

Iván Muñoz Díaz

**DESARROLLO, MODELADO
E INSTRUMENTACIÓN DE
ESTRUCTURAS FLEXIBLES
PARA LA CANCELACIÓN ACTIVA
DE VIBRACIONES**

I.S.B.N. Ediciones de la UCLM
978-84-8427-601-2



Ediciones de la Universidad
de Castilla-La Mancha

Cuenca, 2008



TESIS DOCTORAL



**Desarrollo, modelado e instrumentación
de estructuras flexibles para la
cancelación activa de vibraciones**

por

Iván Muñoz Díaz

Ingeniero Industrial

Presentada en la

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales

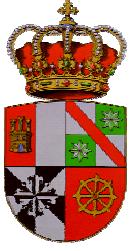
de la

Universidad de Castilla-La Mancha

para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Ciudad Real, julio de 2007



TESIS DOCTORAL



**Desarrollo, modelado e instrumentación
de estructuras flexibles para la
cancelación activa de vibraciones**

Autor: Iván Muñoz Díaz

Directores: Juan José López Cela

Vicente Feliu Batlle

Agradecimientos

Quisiera expresar mi gratitud a mis Directores de Tesis. Primero, a D. Vicente Feliu Batlle por la posibilidad ofrecida para la realización de la presente Tesis; y segundo, a D. Juan José López Cela por sus muchas sugerencias y recomendaciones y, sobre todo, por su sentido común.

Estoy enormemente agradecido a mi compañero Emiliano Pereira por su colaboración, su compromiso con el trabajo y por compartir sus conocimientos durante estos años.

Por otro lado, me gustaría expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que, de una forma u otra, han hecho posible el desarrollo de esta Tesis. Entre ellas se encuentran: Pedro Hungría, Ricardo Romero y a gran parte de los integrantes del grupo ISA de la ETS de Ingenieros Industriales de la UCLM.

Naturalmente, expreso mi mayor gratitud a mis padres y hermanos cuyo apoyo incondicional y comprensión son imprescindible. Muy especialmente, agradezco a Irene que esté siempre a mi lado, aunque a veces no físicamente, y haga que me sienta feliz. Por supuesto, no podría terminar estos agradecimientos sin recordar a aquéllos que nos dejaron, entre ellos mi hermano David y mis abuelos.

El presente trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología a través de proyecto de investigación “Programa de Monitorización y Control de Vibraciones en Estructuras Flexibles Aeroespaciales” (DPI2003-03326).

Ciudad Real

Iván Muñoz Díaz

Junio, 2007

Índice General

Notación

Lista de figuras

Lista de tablas

Resumen

1. Introducción

- 1.1. Generalidades
- 1.2. Concepto de estructura inteligente
- 1.3. Objetivos de la tesis
- 1.4. Estructura de la tesis

2. Estructuras instrumentadas: revisión y consideraciones generales

- 2.1. Estructuras instrumentadas: revisión
 - 2.1.1. Robots flexibles
 - 2.1.2. Estructuras tipo placa
 - 2.1.3. Estructuras articuladas
- 2.2. Caracterización dinámica
 - 2.2.1. Preparación del ensayo
 - 2.2.2. Realización del ensayo
 - 2.2.3. Análisis de resultados
- 2.3. Sensores y actuadores
 - 2.3.1. Galgas extensométricas
 - 2.3.2. Sensores de fibra de Bragg
 - 2.3.3. Sensores/actuadores piezoeléctricos
 - 2.3.4. Motores-actuadores
 - 2.3.5. Otros sensores para el análisis de vibraciones
- 2.4. Consideraciones sobre cancelación de vibraciones
- 2.5. Resumen

3. Robot flexible de un grado de libertad

- 3.1. Modelado dinámico de robots flexibles de un grado de libertad
 - 3.1.1. Modelos continuos
 - 3.1.2. Modelos discretos
 - 3.1.2.1. Modelado mediante elementos finitos
 - 3.1.2.2. Modelado mediante masas puntuales
 - 3.1.3. Modelado incluyendo piezoeléctricos como actuadores/sensores
- 3.2. Definición de la plataforma experimental
 - 3.2.1. Diseño de la plataforma
 - 3.2.2. Caracterización dinámica
 - 3.2.3. Actualización de los modelos
 - 3.2.3.1. Modelos obtenidos a partir de la ecuación dinámica
 - 3.2.3.2. Modelos obtenidos a partir de una discretización espacial
- 3.3. Resumen

4. Placa delgada

- 4.1. Modelado dinámico de placas
 - 4.1.1. Modelos continuos
 - 4.1.2. Modelos discretos
 - 4.1.2.1. Modelado mediante elementos finitos
 - 4.1.2.2. Modelado mediante masas puntuales
 - 4.1.3. Modelado incluyendo piezoeléctricos como actuadores
- 4.2. Definición de la plataforma experimental
 - 4.2.1. Diseño de la plataforma
 - 4.2.2. Caracterización dinámica
- 4.3. Resumen

5. Estructura articulada

- 5.1. Modelado dinámico
 - 5.1.1. Modelado mediante elementos finitos
 - 5.1.2. Modelado incluyendo actuadores
- 5.2. Desarrollo experimental
 - 5.2.1. Diseño de la plataforma
 - 5.2.2. Caracterización dinámica
- 5.3. Resumen

6. Modificación de la dinámica para la simplificación de controladores en cadena abierta

- 6.1. Control en cadena abierta
- 6.2. Controladores basados en el moldeo de la trayectoria
- 6.3. Motivación de la modificación de la dinámica
- 6.4. Aplicación a un robot de un grado de libertad
 - 6.4.1. Estrategia general de control
 - 6.4.2. Modificación de la dinámica del robot flexible
 - 6.4.3. Diseño del esquema de control
 - 6.4.4. Simulaciones y resultados experimentales
 - 6.4.4.1. Simulaciones
 - 6.4.4.2. Resultados experimentales
- 6.5. Resumen

7. Control robusto basado en pasividad de un robot de un grado de libertad

- 7.1. Control robusto basado en la ecuación continua
- 7.2. Pasividad. Fundamentos teóricos
 - 7.2.1. Generalidades
 - 7.2.2. Funciones de transferencia positivo reales
 - 7.2.3. Interconexión de sistemas pasivos
- 7.3. Propiedades de pasividad
 - 7.3.1. Motivación
 - 7.3.2. Pasividad entre $\int \Gamma_{coup}$ y θ_m
- 7.4. Metodología de diseño
- 7.5. Ejemplos de aplicación
 - 7.5.1.1. Controlador PD
 - 7.5.1.2. Controlador PID
 - 7.5.1.3. Extensión al caso de una compensación no exacta del par de acoplamiento
- 7.6. Simulaciones y resultados experimentales
 - 7.6.1.1. Resultados con el PD
 - 7.6.1.2. Resultados con el PID
- 7.7. Discusión
- 7.8. Resumen

8. Conclusiones

8.1. Conclusiones y aportaciones de la tesis

8.2. Futuras líneas de investigación

Referencias**Apéndice A. Obtención de las condiciones de pasividad**

A.1 Condición de pasividad para el caso del PID

A.2 Extensión al caso de una compensación no exacta del par de acoplamiento

Notación

a	Coefficientes del modelo de masas puntuales; coeficiente del desplazamiento elemental
A	Parámetro del piezoeléctrico como actuador; amplitud de un impulso; constante relacionada con los parámetros del motor
\underline{A}	Matriz de estado
B	Constante relacionada con los parámetros del motor
\underline{B}	Matriz de entrada
c	Coefficiente de amortiguamiento; factor de multiplicidad de frecuencias
c_ε	Coefficiente de resistencia a la velocidad de deformación
c_0	Coefficiente de resistencia a la velocidad angular en la articulación
c_1	Coefficiente de fricción de la carga del robot con el medio
c_2	Coefficiente de fricción de la carga del robot en el giro
C	Constante de Bridgman; capacitancia de un sensor piezoeléctrico; término de la vibración residual; controlador
C'	Función auxiliar para el diseño del lazo externo de un esquema de control basado en pasividad
\underline{C}	Matriz de salida; matriz de amortiguamiento
d	Constante de deformación piezoeléctrica
D	Rigidez a flexión de una placa; desplazamiento eléctrico
\underline{D}	Matriz de salida directa de la entrada
e	Señal de error
E	Módulo de elasticidad; campo eléctrico
f	Carga distribuida
F	Fuerza generalizada
g	Constante de voltaje piezoeléctrica
G	Función de transferencia del brazo flexible; sistema general
G_m	Función de transferencia del motor con un servo de posición

h	Espesor
H	Función de transferencia; función escalón; Hamiltoniano
i	Nudo de un elemento finito
I	Inercia de la sección; corriente en un motor
j	Nudo de un elemento finito
J	Número de sensores/actuadores piezoeléctricos; inercia de la carga del robot; funcional
J_0	Inercia del motor+reductora
k	Factor de acoplamiento electromecánico; nudo de un elemento tipo placa; rigidez de una barra; factor de la posición del extremo reflejada
K	Parámetro relacionado con el momento flector aportado por un piezoeléctrico; ganancia de un amplificador; constante del motor
\underline{K}	Matriz de rigidez
K_c	Parámetro de diseño de un controlador basado en pasividad
K_g	Factor de galga
K_i	Ganancia del PID
K_p	Ganancia del PD; ganancia del PID
K_v	Ganancia del PD; ganancia del PID
l	Distancia entre masa puntuales consecutivas; nudo de un elemento tipo placa
L	Longitud; distancia de una masa puntual a la base del brazo
m	Masa puntual; número de elementos
$m_{sismica}$	Masa sísmica
M	Momento flector; masa de la carga del robot; función de transferencia del motor con compensación
\underline{M}	Matriz de masa
n	Número de modos de vibración
n_{eff}	Índice de refracción efectivo
n_r	Relación de reducción
N	Número de grados de libertad; número de impulsos
p	Perturbación; desplazamiento total de cada punto del eslabón flexible; presión
p_{eff}	Constante foto-elástica efectiva
P	Ganancia de la función transferencia de un piezoeléctrico como actuador; potencia

q	Coordenada generalizada; carga eléctrica por unidad de longitud
Q	Esfuerzo cortante; carga eléctrica
r	Señal de comando
R	Resistencia eléctrica; función de disipación de Rayleigh; función de transferencia de un ZV; robustez de un controlador en cadena abierta
R_i	Regulador de posición empleado para el motor
s	Variable compleja
S	Desviación típica; término de la vibración residual; función de almacenamiento
\underline{S}	Matriz de flexibilidad
t	Tiempo
t_p	Tiempo de subida
T	Energía cinética; periodo de una señal; tiempo final
u	Entrada de un sistema; desplazamiento longitudinal
\underline{U}	Matriz auxiliar del modelo de masas puntuales
v	Ruido del sensor
V	Voltaje; energía potencial; vibración residual
w	Deflexión o desplazamiento transversal; función de suministro
W	Energía no conservativa; ancho
x	Eje móvil
x	Coordenada espacial; estado de un sistema
\underline{x}	Vector de coordenadas
X	Eje fijo
X	Subconjunto de \mathbb{R}^n
y	Eje móvil
y	Coordenada espacial; Respuesta del sistema
Y	Eje fijo
z	Coordenada espacial; elongación de una barra piezo-actuada

Griego

α	Constante de masa del amortiguamiento proporcional; parámetro de influencia de un actuador piezoeléctrico; factor de empotramiento; constante de tiempo de un sistema de segundo orden; parámetro de la función de transferencia del PID
$\underline{\alpha}_e$	Matriz de influencia de empujadores de aire

β	Constante de rigidez del amortiguamiento proporcional; parámetro que depende la frecuencia de vibración; parámetro de normalización de la función de coste del posicionamiento de sensores de deformación; frecuencia de corte de un filtro paso bajo
χ	Curvatura
δ	Delta de Kronecker; Delta de Dirac; desplazamiento
Δ	Variación
ε	Deformación; parámetro que tiende a cero
$\bar{\varepsilon}$	Deformación media
ϕ	Modo de vibración
$\underline{\phi}$	Matriz modal
Φ	Función de coste para la modificación de la dinámica del brazo flexible
η	Rendimiento en la transformación de energía eléctrica en mecánica
γ	Parámetro de incertidumbre en la compensación del par de acoplamiento
Γ_{coup}	Par de acoplamiento
Γ_f	Fricción de Coulomb en el motor
Γ_m	Par motor
φ	Función de ponderación o de forma; función de pasividad desde la entrada
κ	Parámetro relacionado con el gradiente de la deformación libre de un piezoeléctrico
λ	Parámetro adimensional que depende de las frecuencias del brazo flexible; parámetro de diseño de un controlador basado en pasividad
λ_B	Longitud de onda nominal de un sensor de fibra de Bragg
Λ	Espaciamiento en la modulación periódica de un sensor de fibra de Bragg
ν	Coefficiente de Poisson; constante de sensibilidad de un acelerómetro
θ	Giro del centro de masas del robot; grado de libertad de giro
θ_m	Giro del motor
θ_t	Giro del extremo del robot
Θ	Parámetro utilizado en la demostración de pasividad
ρ	Densidad de volumen; función de pasividad desde la salida
ρ_L	Densidad lineal
σ	Parámetro de los modos de vibración del brazo flexible; tensión mecánica
Υ	Ganancia de la función transferencia de un piezoeléctrico como sensor
ω	Frecuencia de vibración

Ω	Parámetro del piezoeléctrico como sensor; dominio en un problema de optimización
$\underline{\Omega}^2$	Matriz de frecuencias al cuadrado
ξ	Coefficiente de amortiguamiento modal; permitividad dieléctrica
ψ	Función de pasividad estricta
Ψ	Parámetro de un actuador piezoeléctrico; función de coste para el posicionamiento de sensores de deformación

Subíndices

a	Actuador; relativo a la masa añadida en el equilibrado del eslabón
am	Amplificador
A	Galga del puente Wheatstone
b	Relativo al eslabón del brazo flexible
B	Galga del puente Wheatstone
c	Señal ficticia
e	Empujador de aire; magnitud eléctrica
i	Grado de libertad; número de modo de vibración del brazo flexible; número de masa puntual
j	Grado de libertad; número de actuador
k	Grado de libertad; componente del tensor de deformación
l	Componente del tensor de deformación
m	Número de modo de la placa; magnitud mecánica
n	Número de modo de la placa; nominal o de diseño
p	Piezoeléctrico
P	Relativo a la carga del extremo
q	Relativo al controlador en cadena abierta
s	Sensor
t	Total
x	Dirección x
y	Dirección y
0	Movimiento de sólido rígido; punto de origen

Superíndices

D	Desplazamiento eléctrico constante
E	Campo eléctrico constante

<i>exp</i>	Experimental
<i>nudos</i>	Magnitud en los nudos
<i>q</i>	Grado de robustez de un controlador en cadena abierta
<i>r</i>	Modelo reducido
<i>T</i>	Matriz transpuesta
<i>vM</i>	De von Mises
σ	Tensión mecánica constante

Símbolos

\sim	Magnitud elemental
\wedge	Magnitud adimensional
$_$	Vector o matriz
*	Referencia o movimiento deseado

Abreviaturas y acrónimos

CPT	Command Preshaping Technique
CSI	Controls Structures Integration
DFC	Discrete Feedforward Control
DSFB	Direct Strain Feedback
EDP	Ecuación en Derivadas Parciales
ESA	European Space Agency
ETSII	Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
FFT	Fast Fourier Transform
FIR	Finite Impulsive Response
FRF	Frequency Response Function
IIR	Infinite Impulsive Response
IRF	Impulse Response Function
LQG	Linear Quadratic Gaussian
MIT	Massachusetts Institute of Technology
NASA	National Aeronautics and Space Administration
PD	Proporcional Derivativo
PI	Proporcional Integral
PID	Proporcional Integral Derivativo
SIM	Space Interferometry Mission
SOFIA	Stratospheric Observatory For Infrared Astronomy

SRMS	Shuttle Remote Manipulator System
UCLM	Universidad de Castilla-La Mancha
ZV	Zero Vibration
ZVD	Zero Vibration and Derivative

Lista de figuras

Figura 1.1:	Estructuras aeroespaciales (NASA): a) Brazo robótico. b) Vehículo de lanzamiento SOFIA (“Stratospheric Observatory For Infrared Astronomy”). c) Estación espacial internacional.....	3
Figura 1.2:	Brazo robótico montado sobre una plataforma espacial SRMS (“Shuttle Remote Manipulator System”) (NASA).....	4
Figura 1.3:	Diagrama de bloques de un sistema de control genérico.....	5
Figura 2.1:	Edificio instrumentado con un sistema de amortiguamiento híbrido (Ando Nishikicho, Tokio, Japón) (Spencer y Sain, 1997).....	12
Figura 2.2:	Grúa telescópica. Deflexión del extremo.....	13
Figura 2.3:	Silla con brazo robotizado de asistencia (Phybotics, appliedresources.com).....	14
Figura 2.4:	Elementos tipo placa. a) Timón del vehículo de lanzamiento SOFIA. b) Placas solares en la estación espacial internacional (NASA).....	17
Figura 2.5:	Plataforma espacial “Voyager” (NASA).....	20
Figura 2.6:	Estación espacial internacional (spaceflight.nasa.gov).....	20
Figura 2.7:	Diseño propuesto para la misión SIM (“Space Interferometry Mission”), donde siete cristales ópticos se montan sobre una estructura articulada (NASA) (Joshi, 1999).....	21
Figura 2.8:	Estructura “SSI Evolutionary Model” experimentada en el “Langley Research Center” de la NASA (Maghami y Gupta, 1997).....	22
Figura 2.9:	Estructura articulada flexible (MIT) (Gutiérrez, 1999).....	23

Figura 2.10: Estructura articulada colgada mediante muelles elásticos de un pórtico rígido. Condiciones libre-libre. (Laboratorio de Mecánica de los Medios Continuos, ETSII, UCLM)	26
Figura 2.11: Estructura empotrada-libre. a) Estructura articulada de aluminio. b) Cosido mediante tornillos y placa de anclaje en un bloque de hormigón (Laboratorio de Mecánica de los Medios Continuos, ETSII, UCLM).....	27
Figura 2.12: Señales de excitación. Columna izquierda: excitación. Columna de la derecha: respuesta.....	29
Figura 2.13: Ejemplo de análisis de señal	33
Figura 2.14: Diagrama de bloques de una medida con galgas extensométricas	34
Figura 2.15: Configuración bandas extensométricas. a) Galga uniaxial. b) Roseta triaxial. c) Roseta triaxial, montaje en una placa	35
Figura 2.16: Montaje en $\frac{1}{2}$ puente para flexión. a) Disposición de las bandas en un problema de flexión. b) Puente de Wheatstone.....	36
Figura 2.17: Sistema sensorial basado en fibra de Bragg.....	37
Figura 2.18: Diagrama de un transductor piezoeléctrico	39
Figura 2.19: Montaje de tres cámaras de seguimiento para la determinación de la posición del extremo de una varilla flexible (Payo y col., 2005) (Laboratorio de Mecánica de los Medios Continuos, ETSII, UCLM).....	43
Figura 2.20: Láser de barrido basado en el efecto Doppler. a) Ejemplo de sistema de barrido 2-D, caracterización de una placa delgada. b) Ejemplo de sistema de barrido 3-D, caracterización de la carrocería de un vehículo (alava-ing.es)	44
Figura 3.1: Brazo de robot flexible de un grado de libertad	52
Figura 3.2: Grados de libertad. Coordenadas generalizadas.....	57
Figura 3.3: Brazo flexible discretizado con masas puntuales	60
Figura 3.4: Parches piezoeléctricos para vibración a flexión.....	62
Figura 3.5: Viga instrumentada con sensores y actuadores piezoeléctricos.....	63

Figura 3.6: Piezoeléctrico j adherido a la viga	63
Figura 3.7: Distribución de deformaciones piezoeléctrico-estructura.....	64
Figura 3.8: Plataforma experimental robot flexible de un grado de libertad	68
Figura 3.9: Modos en desplazamiento $\hat{\phi}(\hat{x})$. Primer modo (—); Segundo modo (—); Tercer modo (··).....	70
Figura 3.10: Modos en deformación $\hat{\phi}''(\hat{x})$. Primer modo (—); Segundo modo (—); Tercer modo (··).....	70
Figura 3.11: Diseño del motor-actuador	72
Figura 3.12: Reductora Harmonic Drive (harmonicdrive.com).....	73
Figura 3.13: Ensayo de impacto. Brazo de robot flexible	76
Figura 3.14: Ensayo armónico utilizando el motor-actuador. Brazo de robot flexible ...	78
Figura 3.15: Ensayo armónico utilizando actuadores piezoeléctricos. Brazo de robot flexible	79
Figura 4.1: Placa delgada. Dimensiones.....	85
Figura 4.2: Esquema de la placa en voladizo	86
Figura 4.3: Elemento tipo placa. Coordenadas generalizadas	88
Figura 4.4: Obtención de un modelo de masa puntuales de una estructura tipo placa	90
Figura 4.5: Placa con un piezoeléctrico j	92
Figura 4.6: Plataforma experimental. Placa delgada en voladizo	95
Figura 4.7: Roseta de deformación. a) Configuración en estrella. b) Configuración en triángulo	98
Figura 4.8: Modos de vibración de la placa: modo 1 (1.60Hz), modo 2 (8.02Hz), modo 3 (9.97Hz). a) Desplazamientos. b) Deformación equivalente.....	100
Figura 4.9: Función de coste $\Psi(x, y)$ y puntos estudiados.....	101

Figura 4.10: Esquema general del montaje de un sistema sensorial basado en fibra de Bragg	101
Figura 4.11: Ensayo de impacto. Placa delgada	102
Figura 4.12: Ensayo armónico. Placa delgada	103
Figura 5.1: a) Unión Mero. b) y c) Labores de montaje de una estructura articulada (nasa.gov)	105
Figura 5.2: Diagrama de una estructuras articulada actuada (vista en planta).....	106
Figura 5.3: Elemento tipo barra. Coordenadas generalizadas	107
Figura 5.4: Diagrama de un piezo-actuador empleado en estructuras articuladas	109
Figura 5.5: Estructura articulada libre-libre formada por barras de PVC y uniones de aluminio	110
Figura 5.6: Unión Mero. Nudo roscado de aluminio	110
Figura 5.7: Modelo de elementos finitos. Estructura articulada colgada.....	111
Figura 5.8: Modos de vibración de la estructura articulada colgada.....	113
Figura 5.9: Ensayo de impacto. Estructura articulada	115
Figura 6.1: Generador de comando en tiempo real	119
Figura 6.2: Moldeado de la trayectoria con una secuencia de impulsos. El parámetro Δ indica la longitud (duración) de la secuencia.....	119
Figura 6.3: Curvas de sensibilidad para un ZV (—), ZVD (---), ZVDD (·) y vibración residual permitida (--)	121
Figura 6.4: Respuesta de un ZV y un ZVD ante incertidumbres. Referencia de comando (—); Comando moldeado (---); Salida (·)	123
Figura 6.5: Estrategia general de control cuando se emplea un controlador en cadena abierta	125
Figura 6.6: Servo de posición para el motor	128

Figura 6.7:	Servo de posición para el motor con un PD	129
Figura 6.8:	Modificación del sistema. Equilibrado del eslabón.....	133
Figura 6.9:	Simulaciones con servo de posición y sin prefiltro para $\hat{M}_p = 0.281$	134
Figura 6.10:	Respuesta en frecuencia de los prefiltros ZV, ZVD, y ZVDD.....	135
Figura 6.11:	Simulaciones utilizando un ZV	136
Figura 6.12:	Simulaciones utilizando un ZVDD.....	137
Figura 6.13:	Experimentos utilizando un ZV	140
Figura 6.14:	Experimentos utilizando un ZVDD	141
Figura 7.1:	Interconexión en paralelo y en realimentación.....	149
Figura 7.2:	Configuración típica en realimentación para el control de robots flexibles de un grado de libertad.....	151
Figura 7.3:	Motor+Brazo sin desacoplamiento	152
Figura 7.4:	Motor+Brazo con desacoplamiento	152
Figura 7.5:	Lazo interno para el control de posición del motor	152
Figura 7.6:	Lazo externo para la cancelación de las vibraciones residuales.....	152
Figura 7.7:	Diagrama equivalente al esquema de la Figura 7.6	153
Figura 7.8:	Brazo de robot flexible pseudo-empotrado	154
Figura 7.9:	Esquema general de control.....	156
Figura 7.10:	Esquema general de control. Diagrama equivalente al esquema de la Figura 7.9	157
Figura 7.11:	Lugar de las raíces del denominador de $Q(s)$. Diseño de los parámetros del controlador del lazo externo.....	160
Figura 7.12:	Servo de posición para el motor con un PID	161
Figura 7.13:	Condición de pasividad para el PID. Límite inferior	162

Figura 7.14: Resultado utilizando el PD: (—) Simulación con $M_p = 0$; (⊖) Experimento con $M_p = 0$; (--) Simulación con $M_p = 0.3$; (⊖) Experimento con $M_p = 0.3$; (---) Referencia.....	165
Figura 7.15: Resultado utilizando el PID: (—) Simulación con $M_p = 0$; (⊖) Experimento con $M_p = 0$; (--) Simulación con $M_p = 0.3$; (⊖) Experimento con $M_p = 0.3$; (---) Referencia.....	166
Figura A.1: Comportamiento asintótico	188
Figura A.2: Representación gráfica de $x_q(\varepsilon)$	189
Figura A.3: Curva de diseño $\Lambda(\varepsilon)$	191
Figura A.4: Esquema general de control incluyendo una compensación no exacta del par de acoplamiento	193

Lista de tablas

Tabla 2.1:	Características de los motores-actuadores	41
Tabla 2.2:	Elementos de transmisión.....	42
Tabla 4.1:	Parámetros de la placa delgada.....	96
Tabla 4.2:	Amplitudes en el ensayo armónico	104
Tabla 5.1:	Propiedades físicas y mecánicas de la estructura articulada.....	111
Tabla 5.2:	Frecuencias de la estructura articulada. Modelo libre-libre. Modelo con muelles. Valores medidos.....	112
Tabla 6.1:	Parámetros del robot flexible de un grado de libertad	131
Tabla 6.2:	Frecuencias adimensionales del brazo flexible sin modificar ($\hat{\omega}_{n1} = 1.63$)	131
Tabla 6.3:	Combinaciones de las frecuencias $\hat{\omega}_2 = c_2\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_3 = c_3\hat{\omega}_1$	132
Tabla 6.4:	Frecuencias adimensionales del brazo flexible modificado ($\hat{\omega}_{n1} = 1.60$) ..	132
Tabla 6.5:	Simulaciones (resumen). Amplitud de la vibración residual y tiempo de subida	138
Tabla 6.6:	Frecuencias adimensionales experimentales, sistema inicial ($\hat{\omega}_{n1} = 1.63$) y sistema modificado ($\hat{\omega}_{n1} = 1.60$)	139
Tabla 6.7:	Experimentos (resumen). Amplitud de la vibración y tiempo de subida.	142
Tabla 7.1:	Comparación de las principales referencias estudiadas	168

Resumen

Uno de los aspectos clave, desde el punto de vista tecnológico, que condiciona el diseño de sistemas aeroespaciales, es el hecho de emplear materiales muy ligeros, lo cual da lugar a estructuras muy flexibles que presentan grandes vibraciones ante pequeñas perturbaciones. Este hecho impide el posicionamiento preciso de los instrumentos instalados sobre dichas estructuras e influye sustancialmente en su vida útil. Por tanto, es evidente la importancia del desarrollo de estructuras instrumentadas que cuenten con sistemas de control activo capaces de cancelar de forma eficiente las vibraciones no deseadas.

En esta tesis se han abordado fundamentalmente tres aspectos relacionados con el desarrollo de estructuras instrumentadas. El primero es la construcción de plataformas experimentales que sean representativas de sistemas aeroespaciales; en este sentido, se han construido tres plataformas: un robot flexible de un grado de libertad, una placa delgada de gran tamaño y una estructura articulada. El segundo de los aspectos es la caracterización dinámica de cada una de las estructuras. Para ello, es necesario considerar el empleo de actuadores y sensores, así como el posicionamiento de los mismos. Se han utilizado galgas extensométricas, acelerómetros, fibra de Bragg y piezoeléctricos como sensores y motores rotativos, motores lineales (excitador electromagnético), martillos de impacto y piezoeléctricos como actuadores. El tercer y último aspecto es el relacionado con el control activo de vibraciones; para ello, se han desarrollado dos esquemas de control para la cancelación activa de vibraciones en el robot flexible: uno en cadena abierta (basado en el moldeado de la trayectoria) y otro en cadena cerrada (basado en pasividad). En el diseño de ambos esquemas se evidencia la importancia que tienen las propiedades mecánicas de la estructura en el desarrollo de algoritmos de control y en la eficacia del sistema de control en su conjunto.

Abstract

One of the technological aspects that determines the design of aerospace systems is the use of very lightweight materials. This fact results in very flexible structures, which present high oscillations under small perturbations. In that way, these oscillations make the precise positioning of these structures and the instruments installed on them very difficult. Moreover, such vibrations affect significantly their useful life. Therefore, vibrations suppression in flexible structures by means of active control is a challenging problem.

In this thesis, three different subjects related to smart structures (structures with sensors and/or actuators) has been dealt with. The first subject is related to the construction of experimental structures representative of aerospace systems. Specifically, it has been built three laboratory structures: a single-link flexible manipulator, a very large thin plate and a truss structure. The second subject is the dynamic characterization of each structure (experimental modal analysis). This is concerned with what sensors/actuators should be used and where they should be positioned. The following sensors/actuators have been employed: fiber Bragg grating sensors, piezoelectric sensors/actuators, conventional strain gauges, piezoelectric accelerometers, electrodynamic shakers, DC motors and impact hammers. The last subject deals with the active control of the single-link flexible manipulator. Two control schemes have been developed: the first one is based on trajectory shaping, and the second one is based on energy shaping. In both designs, the interaction between the mechanical properties and the control design has been used to simplify the control algorithms and to improve the performance of the control scheme.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

Esta tesis se introduce con un párrafo correspondiente al “New Millenium Program” (1995) de la NASA (“National Aeronautics and Space Administration”), a través del cual se pretende acelerar el desarrollo de tecnologías de última generación (nmp.jpl.nasa.gov):

“Gran parte del presupuesto de una misión espacial se invierte en el vehículo de lanzamiento (cuanto más grande es el vehículo espacial, tanto más grande y costoso es el vehículo de lanzamiento requerido para impulsarlo al espacio) y en el equipo de operaciones a lo largo de toda la misión. Por ello, resulta evidente la magnitud de los ahorros que estas tecnologías revolucionarias producirán para la NASA.”

En las estructuras espaciales existen dos requisitos opuestos: por un lado, las estructuras deben tener el suficiente tamaño como para cumplir ciertos objetivos (por ejemplo, medir distancias entre astros, “Space Interferometry Mission”, donde receptores de luz deben cumplir unas ciertas distancias) y por otro lado, se deben minimizar tanto la masa como el volumen. De esta forma, se construyen estructuras muy ligeras y flexibles, donde adquiere gran importancia el desarrollo de nuevos materiales, más ligeros y con mejores propiedades mecánicas, así como la implantación de sistemas de control para la cancelación de vibraciones.

Ante esto, es evidente el interés que despierta la investigación en el ámbito de la cancelación de vibraciones en estructuras flexibles, el cual ha venido motivado

fundamentalmente por el desarrollo de la industria aeroespacial (telescopios, elementos de plataformas, manipuladores espaciales, etc.). Dicha investigación tiene también implicaciones directas en los campos del transporte (aviación civil y militar), en las comunicaciones (satélites de comunicaciones) y en muchos otros ámbitos de la ingeniería, donde la aparición de vibraciones es un hecho no deseable. Uno de los aspectos clave, desde el punto de vista tecnológico, que condiciona el diseño de los equipos, es el hecho de emplear materiales muy ligeros, lo cual da lugar a estructuras realmente flexibles, que presentan grandes vibraciones ante pequeñas perturbaciones, impidiendo así el posicionamiento preciso de los instrumentos instalados sobre ellas. Este fenómeno reduce drásticamente la funcionalidad de muchos equipos o incluso llega a inutilizarlos para los propósitos para los que fueron diseñados. De esta forma, diversos centros e instituciones de investigación, como por ejemplo, la NASA o la ESA (“European Space Agency”), universidades y empresas se han planteado el desarrollo de sistemas de amortiguamiento activos y/o pasivos de estas vibraciones. Cuando los requisitos de precisión y rapidez de cancelación son muy exigentes, los sistemas de amortiguamiento activo (mediante el cierre de lazos de control) presentan un mejor comportamiento que los sistemas pasivos, que generalmente son amortiguadores mecánicos.

Esta tesis doctoral se enmarca dentro del proyecto de investigación “Programa de Monitorización y Control de Vibraciones en Estructuras Flexibles Aeroespaciales” (DPI2003-03326) financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología. Éste es un proyecto multidisciplinar en el que participan investigadores de las áreas de Ingeniería de Sistemas y Automática y de Mecánica de los Medios Continuos. Este trabajo se centra principalmente en los aspectos mecánicos del proyecto; siendo su finalidad fundamental el control de vibraciones en plataformas experimentales que representan estructuras flexibles aeroespaciales. Para ello, se pretende desarrollar diferentes sistemas, tales como: un brazo de robot flexible, que representa a los manipuladores que se pueden encontrar en una estructura espacial (Figura 1.1a); una placa relativamente grande y fina, que puede representar un panel o el ala de un vehículo lanzador (Figura 1.1b); y una gran estructura articulada que sea representativa del esqueleto de estaciones espaciales (Figura 1.1c). En el desarrollo de estos sistemas existen cuatro puntos fundamentales en los que se centra la tesis: diseño y construcción de las diferentes plataformas experimentales, caracterización dinámica de los sistemas, establecimiento de modelos dinámicos de orden reducido y finalmente, control de

vibraciones en la primera de las plataformas experimentales. La cancelación en las otras dos plataformas queda como trabajo futuro de investigación. Por otro lado, es necesario mencionar que las estructuras se diseñan de forma que presentan frecuencias de vibración bajas, y no es objetivo de esta tesis el empleo de materiales más ligeros y más rígidos que mejoren la respuesta de dichas estructuras.



a)

b)

c)

Figura 1.1: Estructuras aeroespaciales (NASA): a) Brazo robótico. b) Vehículo de lanzamiento SOFIA (“Stratospheric Observatory For Infrared Astronomy”). c) Estación espacial internacional

Finalmente, es importante comentar que los cuatro puntos fundamentales de la presente tesis se encuadran dentro de lo que ha sido denominado por la NASA como CSI (“Controls Structures Integration”), es decir, el diseño de la estructura se realiza teniendo en cuenta la instrumentación y el control que después se aplicará. Asimismo, este trabajo se encuadra dentro de una disciplina en auge denominada *Mecatrónica*, la cual engloba a todos aquellos dispositivos mecánicos que se encuentran bajo un control electrónico inteligente (DYNA, 2005).

1.2 Concepto de estructura inteligente

El campo de las estructuras instrumentadas (“smart structures”) ha sido un área de investigación emergente en las últimas décadas. Las estructuras instrumentadas se pueden dividir en varios grupos: a) estructuras con un sistema sensorial; b) estructuras con un sistema sensorial y un sistema de actuación; c) estructuras con un sistema sensorial, un sistema de actuación y que además son capaces de adaptarse, de forma autónoma, a cambios externos; y d) finalmente, estructuras que, además de todo lo anterior, son capaces de aprender de la experiencia (Measures, 2001).

Una estructura inteligente se puede definir como aquélla que es capaz de sentir y actuar de forma controlada en respuesta a estímulos externos, lo cual se corresponde con los subgrupos c) y d). Esto es lo que se ha venido a llamar en la literatura “paradigma de la naturaleza”. Las estructuras de la naturaleza, como por ejemplo las manos, son capaces de sentir y actuar de forma controlada ante cambios externos. Esto, traducido a los objetivos de esta tesis, es que un robot flexible sea capaz de actuar por sí solo de forma controlada ante grandes cambios en la carga que transporta. Un ejemplo de estructura instrumentada es el brazo robótico de la NASA mostrado en la Figura 1.2. Dicho robot incorpora un sistema de monitorización de fallos que automáticamente es capaz de frenar los motores de las uniones y avisar a los astronautas que existe la posibilidad de un fallo mecánico.



Figura 1.2: Brazo robótico montado sobre una plataforma espacial SRMS (“Shuttle Remote Manipulator System”) (NASA)

El desarrollo de estas estructuras va íntimamente unido tanto al desarrollo de materiales como al de sistemas de control. Actualmente, se están desarrollando nuevos materiales (materiales piezoeléctricos o fibra óptica) capaces de medir y/o actuar de forma eficiente y controlada. Estos materiales se integran con las estructuras y trabajan como sensores, como actuadores o de ambas formas. Igualmente claro es que el desarrollo de estas estructuras involucra el diseño e implementación de sistemas de control cada vez más precisos y robustos.

A continuación se presenta un diagrama de bloques en el que se muestran los elementos fundamentales de un esquema de control genérico y se particularizan para el caso en el que el sistema físico o planta es una estructura mecánica flexible (ver Figura 1.3). Los objetivos de cualquier sistema de control aplicado a una estructura flexible pueden ser algunos de los siguientes: posicionamiento, seguimiento de trayectorias, reducción de la vibración residual, robustez ante perturbaciones o evitación de obstáculos. En la Figura 1.3, el movimiento deseado, $y^*(t)$, alimenta al generador de comando. Éste transforma el movimiento deseado en una señal de comando, $r(t)$, la cual se compara con una medida del estado, $y_s(t)$, que se obtiene a partir de sensores. El resultado de esta comparación es una señal de error, $e(t)$, que se utiliza en una ley de control en lazo cerrado para generar una señal de control, $u(t)$. Finalmente, esta señal se utiliza por los actuadores del sistema modificando el estado del mismo. En función de los objetivos que se pretendan conseguir, se dotará a la planta de unos elementos u otros. Es necesario elegir el tipo de sensores y/o actuadores, así como la estrategia de control que se va a seguir.

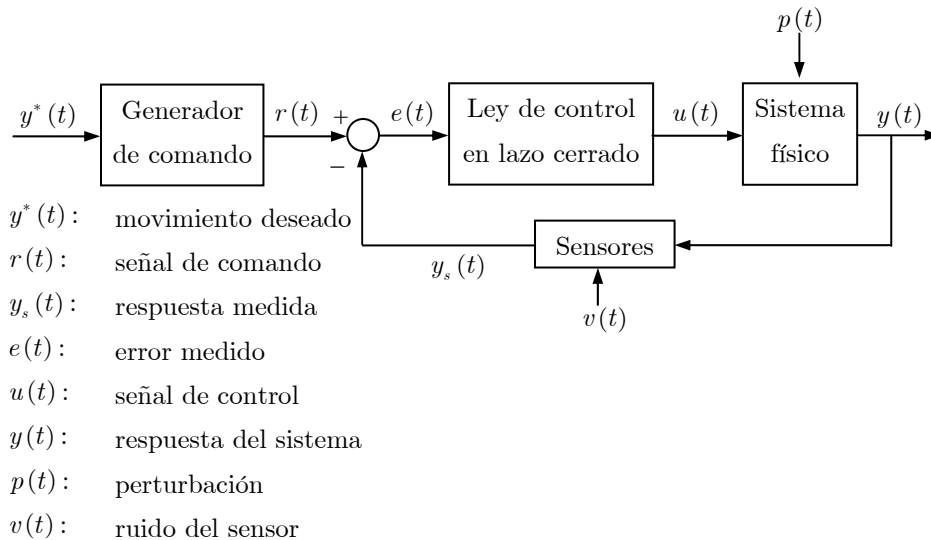


Figura 1.3: Diagrama de bloques de un sistema de control genérico

Tal y como se muestra en la Figura 1.3, un esquema general de control cuenta con un controlador en cadena abierta o generador de comando y con un controlador en cadena cerrada o lazo cerrado. El primero, siempre y cuando uno de los objetivos del control sea la eliminación de las vibraciones, trata de generar una señal de comando que no excite (o que lo haga lo menos posible) los modos de vibración de la planta; en el segundo, se realimenta una señal del error con objeto de minimizarlo o eliminarlo.

Así, un control en cadena abierta sólo tiene sentido cuando la estructura debe realizar maniobras, mientras que un control en cadena cerrada permite posicionar el sistema según la referencia ($r(t)$) y cancelar las vibraciones debidas al movimiento o a perturbaciones externas. A lo largo de la tesis se estudiarán los elementos del diagrama de bloques para el caso en el que la planta es una estructura mecánica flexible.

1.3 Objetivos de la tesis

Esta tesis pretende explotar y profundizar en las propiedades mecánicas de los sistemas, de forma que los algoritmos de control sean simples y aplicables desde un punto de vista ingenieril.

Los objetivos fundamentales de esta tesis son los siguientes:

a) Construcción de tres plataformas experimentales representativas de estructuras aeroespaciales (ver Figura 1.1):

- Robot flexible de un grado de libertad (Figura 1.1a).
- Placa delgada de gran tamaño (alas de un vehículo de lanzamiento, Figura 1.1b).
- Estructura articulada de gran tamaño (estructura modular de la estación espacial internacional, Figura 1.1c).

b) Establecimiento de modelos dinámicos reducidos que se puedan utilizar en el control activo de vibraciones de estructuras reales.

c) Estudio de los sensores y actuadores utilizados en estructuras inteligentes y de los posibles criterios de posicionamiento.

d) Eliminación de vibraciones en la plataforma experimental robot flexible de un grado de libertad utilizando un controlador en cadena abierta que moldee la trayectoria (“input shaping”) y que se simplifique considerando las propiedades dinámicas del sistema físico. Para ello, es necesario explorar las posibles modificaciones de la dinámica del sistema físico que conduzcan a la simplificación del controlador en cadena abierta.

e) Cancelación activa de vibraciones en la plataforma experimental robot flexible de un grado de libertad utilizando un controlador en cadena cerrada que moldee la energía

(“energy shaping”) y esté basado en propiedades de pasividad. Para ello, es necesario explorar las propiedades de pasividad del sistema físico.

1.4 Estructura de la tesis

La presente tesis se divide en los siguientes capítulos:

Capítulo 1: Introducción

El Capítulo 1 se corresponde con esta introducción, donde se ha mostrado una visión general de las estructuras instrumentadas. Asimismo, se han descrito los objetivos de esta tesis.

Capítulo 2: Estructuras instrumentadas: revisión y consideraciones generales

En este capítulo se revisan los antecedentes existentes, tanto referentes a estructuras reales, estaciones espaciales, satélites, partes de aviones, etc.; como a plataformas de laboratorio. Asimismo, se describe el proceso de caracterización dinámica de estructuras, centrándose en el análisis modal experimental. Además, se presentan los diferentes sensores y actuadores que se emplean en estructuras instrumentadas y se pone especial énfasis en los fundamentos físicos de cada uno de ellos. Finalmente, se exponen algunas consideraciones importantes en la implantación de un sistema de control activo de vibraciones.

Capítulo 3: Robot flexible de un grado de libertad

Este capítulo se dedica al modelado dinámico, la construcción y caracterización dinámica de la plataforma robot flexible de un grado de libertad. Se estudia tanto el modelo de parámetros distribuidos (o continuo) como modelos de parámetros concentrados (o discretos), entre los que se encuentran los modelos de elementos finitos y los de masas puntuales; además, se presenta el modelado cuando el robot se instrumenta con parches piezoeléctricos. Por otro lado, la caracterización dinámica se lleva a cabo mediante ensayos de impacto y armónicos. Finalmente, se plantean dos métodos de actualización de modelos: el primero está destinado a los modelos continuos y el segundo, a los modelos discretos.

Capítulo 4: Placa delgada

Este capítulo se centra en el modelado dinámico, la construcción y caracterización dinámica de la plataforma placa delgada. Dicha placa se estudia empotrada-libre. En cuanto al modelado, se estudia tanto el modelo continuo como un modelo discreto basado en elementos finitos. Además, se presenta una nueva técnica para la obtención de modelos reducidos de masas puntuales; y se estudia el modelado cuando se incluyen piezoeléctricos como actuadores. En la definición de la plataforma, se pone especial hincapié en un nuevo método de posicionamiento de sensores de deformación desarrollado, y aplicado a esta plataforma. Finalmente, se valida experimentalmente el método de posicionamiento y se caracteriza la placa mediante ensayos de impacto y armónicos.

Capítulo 5: Estructura articulada

Este capítulo se dedica al modelado dinámico, la construcción y caracterización dinámica de la plataforma estructura articulada. Se estudia el modelado de la estructura en condiciones libre-libre e instrumentada con empujadores de aire y elementos piezoeléctricos. La estructura es modular y se construye mediante barras de PVC y uniones de aluminio. La caracterización dinámica se realiza mediante ensayos de impacto.

Capítulo 6: Modificación de la dinámica para la simplificación de controladores en cadena abierta

Se pone en evidencia en este capítulo la interacción entre las propiedades dinámicas del sistema y la aplicación de un controlador en cadena abierta; más concretamente, se propone una modificación de la dinámica del robot flexible que permite la simplificación de un controlador en cadena abierta cuando se consideran varios modos de vibración. Esta modificación hace que un controlador diseñado para un solo modo de vibración sea capaz de cancelar varios modos simultáneamente. Se presentan simulaciones y experimentos de la plataforma robot flexible de un grado de libertad considerando los tres primeros modos de vibración.

Capítulo 7: Control robusto basado en pasividad de un robot de un grado de libertad

En el Capítulo 7 se propone una nueva metodología de diseño de controladores basados en pasividad para robots flexibles de un grado de libertad. Se presentan los conceptos básicos de pasividad y se analizan las relaciones pasivas que se han propuesto

en la literatura en el control de robots flexibles. En este sentido, se propone una nueva relación de pasividad entre la integral de par de acoplamiento del brazo en el motor y el ángulo del motor, utilizándose esta propiedad en el diseño del esquema de control. Dicho esquema se valida tanto en simulaciones como en experimentos.

Capítulo 8: Conclusiones

Se concluye la tesis con las principales contribuciones de la investigación desarrollada y se plantean diversas líneas futuras de investigación.

Capítulo 2

Estructuras instrumentadas: revisión y consideraciones generales

Este capítulo se divide en cuatro partes. En la primera se realiza una revisión del desarrollo de estructuras instrumentadas. En primer lugar se comentan los robots flexibles (principalmente los de un grado de libertad), las estructuras tipo placa y las estructuras articuladas. Se comentan tanto estructuras reales como plataformas de laboratorio, y además, se mencionan algunos tipos de control aplicados a ellas. En la segunda parte del capítulo se trata el problema de la caracterización dinámica. Se discuten distintos tipos de ensayos dinámicos y se hace especial énfasis en la descripción del análisis modal experimental. La tercera parte del capítulo se dedica a la descripción de los sensores y actuadores utilizados más habitualmente en las estructuras instrumentadas. Especial atención se ha prestado a las galgas extensométricas y a la fibra de Bragg entre los sensores, a los motores entre los actuadores y a los piezoeléctricos que se pueden emplear como ambos. En la cuarta y última parte se realizan algunas consideraciones generales sobre la cancelación de vibraciones en estructuras.

Es interesante mencionar que, aunque esta tesis se ha centrado en tres tipos de estructuras representativas de sistemas aeroespaciales, el campo de las estructuras instrumentadas engloba también a las construcciones civiles, como por ejemplo, edificios o puentes. La instrumentación de edificios para su protección ante acciones severas, tales como terremotos o vientos huracanados, se ha desarrollado de forma importante en las últimas dos décadas (Spencer y Sain, 1997). En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo de edificio instrumentado (Ando Nishikicho, Tokio, Japón) que

cuenta con un sistema de amortiguamiento híbrido, esto es, se combina un amortiguador de masa ajustable con un motor-actuador. Dicho sistema de amortiguamiento se sitúa en la cúspide del edificio. Por otro lado, existen bastantes ejemplos de puentes instrumentados con fibra óptica (sensores de Bragg) (Measures, 2001), de forma que se monitoriza en tiempo real el estado de deformaciones de la estructura. Un ejemplo de ellos es el puente “Taylor Bridge” en Winnipeg, Canadá.

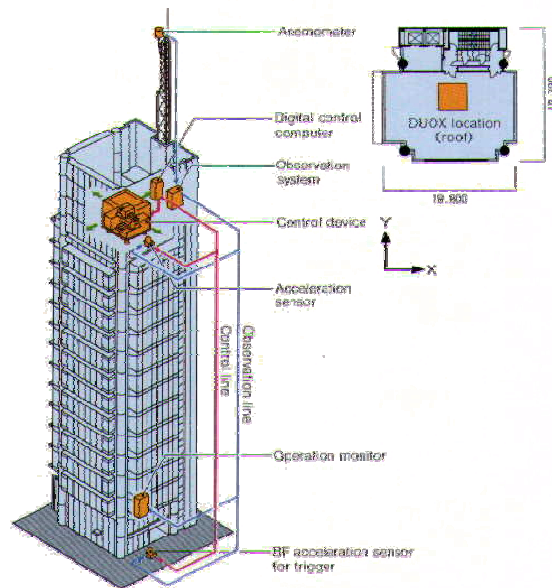


Figura 2.1: Edificio instrumentado con un sistema de amortiguamiento híbrido (Ando Nishikicho, Tokio, Japón) (Spencer y Sain, 1997)

2.1 Estructuras instrumentadas: revisión

2.1.1 Robots flexibles

Los robots flexibles son un ejemplo típico de estructura instrumentada. Un robot flexible es aquél que incluye algún elemento con un cierto grado de flexibilidad, es decir, elementos con capacidad de deformarse de forma elástica. El desarrollo de este campo de investigación ha venido motivado por la necesidad de construir robots más grandes y ligeros en la industria aeroespacial (ver Figura 1.2). Por otro lado, la dinámica de estos robots es compleja (sistemas multivariables, de parámetros distribuidos, con no linealidades y a veces variantes en el tiempo), lo cual ha provocado el interés de

muchos investigadores tanto en el campo de la dinámica como en el del control automático.

La construcción de robots grandes y ligeros se puede conseguir de dos formas: bien utilizando materiales más ligeros o bien reduciendo la sección transversal de los eslabones del robot. De ambas formas se plantean dos problemas: 1) en situaciones estáticas aparecen deflexiones que hacen que la posición final del útil instalado en el extremo del robot no sea la deseada (ver Figura 2.2), y 2) durante el movimiento aparecen vibraciones en el extremo lo cual obliga a realizar una maniobra muy lenta o a esperar a que estas vibraciones se amortigüen. Como consecuencia de lo anterior, la flexibilidad es un problema. Para minimizar los efectos de ésta, se incluyen sistemas de control (sensores, actuadores y algoritmos de control).



Figura 2.2: Grúa telescópica. Deflexión del extremo

Por otro lado, la flexibilidad se puede considerar una ventaja en ciertas ocasiones. Por ejemplo, en tareas de ensamblado, la adición de un elemento terminal con un cierto grado de flexibilidad puede hacer más sencillas estas operaciones. Otra ventaja emana de la capacidad que presenta un robot flexible de absorber la energía de un impacto, lo cual no ocurre con un robot rígido. A partir de esta propiedad, ha surgido una línea de investigación que estudia robots que actúan coordinadamente entre sí o con seres humanos. En la Figura 2.3 se observa una silla de ruedas con un robot manipulador de asistencia. Al hilo de lo anterior, han aparecido tanto algoritmos para la detección de impactos (García y col., 2003) como controles de fuerza que actúan una vez detectada la colisión (Matsuno y Kasai, 1998).



Figura 2.3: Silla con brazo robotizado de asistencia (Phybotics, appliedresources.com)

A continuación se describen algunos de los aspectos tecnológicos que son específicos de robots flexibles. Los materiales que más se emplean para los eslabones son metales ligeros, habitualmente aluminio, aunque también se han utilizado materiales compuestos, como por ejemplo, en Choi y col. (1995). En cuanto a los actuadores, los más empleados son motores eléctricos o actuadores hidráulicos para el caso de robots de grandes dimensiones. Estos actuadores deben ser más rápidos que los convencionales ya que se utilizan para la cancelación de vibraciones asociadas al movimiento. Por regla general, los motores se emplean para la cancelación de los modos más bajos, ya que no son capaces de cancelar modos altos. Una solución a lo anterior es incorporar actuadores piezoeléctricos que suministran muy poca energía (como los modos altos) pero presentan un ancho de banda muy grande, es decir, son muy rápidos. Un ejemplo que combina estos dos tipos de actuadores es el trabajo de Moallen y col. (2004). En cuanto al sistema sensorial, en los robots rígidos es suficiente con una medición de la posición de la articulación; sin embargo, en el caso de los robots flexibles, esta medida no suele ser práctica para observar las vibraciones del eslabón conectado a la misma. A menudo las articulaciones tienen reductoras que disminuyen enormemente el par de acoplamiento entre el motor y el eslabón, haciendo que el efecto sobre el motor de las vibraciones en el eslabón sea pequeño. Incluso, en el caso de robots con motores de accionamiento directo, el efecto de las vibraciones en el ángulo del motor no es alto. Es por ello que es aconsejable, para el control de estos robots, contar con un sistema sensorial que aporte tanto una medida de la posición como una de la vibración de cada eslabón. En esta tesis se utiliza como medida adicional, a la posición de la articulación,

el momento flector en la base del eslabón, que se mide a través de un puente de galgas extensométricas. Se pueden emplear otros sensores como los acelerómetros. Éstos son muy sensibles a la vibración, pero no permiten obtener de forma fiable la posición ya que la salida es la segunda derivada temporal del desplazamiento. Es decir, cualquier ruido en la medida que no tenga media cero dará lugar a un error en la posición. Por tanto, si se emplean estos sensores, es necesario añadir otro sensor para conocer el error en régimen permanente y así, poder evitarlo o minimizarlo.

En cuanto a la tipología de los robots flexibles estudiados en la literatura, la mayoría son de un grado de libertad, esto es, el robot realiza un movimiento que habitualmente es de rotación en el plano, y que en muchos casos transportan una carga en el extremo que es muy grande en comparación con la masa del eslabón (por ejemplo en Feliu y Ramos (2005)). En este caso, el primer modo de vibración es mucho más importante que el resto, y por lo tanto, sólo se considera éste. Así, el eslabón con la carga se modela como un sistema de segundo orden. Sin embargo, cuando el robot opera sin carga, o la masa de ésta es del orden de la del eslabón o menor, entonces es necesario considerar un modelo con varios modos de vibración si se quiere mantener la precisión del mismo. En esta tesis se ha considerado un robot flexible de un grado de libertad y con varios modos de vibración significativos en la respuesta dinámica. Por otro lado, existen otras tipologías correspondientes a robots de dos y tres grados de libertad. En general, cada eslabón se modela con un único modo de vibración. En el artículo de Feliu (2006) se realiza una revisión del estado actual de la robótica flexible.

Existen dos formas de abordar el modelado dinámico de robot flexibles: la primera de ellas parte de la ecuación en derivadas parciales que gobierna el problema y utiliza el análisis modal para obtener un modelo truncado en frecuencia (Bellezza y col., 1990); la segunda de ellas parte de una discretización espacial del eslabón y utiliza las ecuaciones de equilibrio dinámico o las ecuaciones de Lagrange para obtener el modelo. En cuanto a esta segunda forma existen dos técnicas: modelado mediante elementos finitos (por ejemplo, Tokhi y col. (2001)) o modelado mediante masas puntuales (Feliu y col., 1992). Las técnicas de modelado dinámico de robots flexibles se abordan en detalle en el Capítulo 3 (Apartado 3.1) y, por ejemplo, en el trabajo de Dwivedy y Eberhard (2006) se realiza una revisión exhaustiva y completa de estas técnicas.

Tal y como se comentó en el Apartado 1.2, existen dos tipos de controladores: en cadena abierta y en cadena cerrada. En el Capítulo 6 se utiliza un control en cadena

abierta y en el Capítulo 7 un control en cadena cerrada para cancelar las vibraciones en un brazo de robot flexible de un grado de libertad. De forma breve, se puede decir que los controladores en cadena abierta generan una trayectoria que no excita los modos de vibración del eslabón. Sobre esta idea se han desarrollado tres técnicas diferentes. La primera se basa en la inversión de la dinámica del robot, lo cual da lugar a un nuevo modelo dinámico con una parte inestable. Tal inestabilidad impide que esta técnica se pueda emplear para calcular la trayectoria en tiempo real, teniéndose que calcular fuera de línea. Un ejemplo de esta técnica es el trabajo de Bayo (1987). La segunda de las técnicas consiste en realizar una convolución de la trayectoria con ciertos impulsos en instantes calculados, de modo que la vibración se anule una vez terminada la trayectoria. El desarrollo básico de esta técnica se describe en Singer y Seering (1990). Sin embargo, dicha técnica ha sufrido diversos avances hacia esquemas más robustos ante cambios en el sistema (Mohamed y col., 2005). La tercera de las técnicas fue desarrollada por Rattan y Feliu (1992) y se basa en la inversión aproximada de la dinámica discreta del sistema, de tal forma que se diseña un filtro cuyo numerador es el denominador de la función de transferencia discreta del robot. Así, estas técnicas se pueden agrupar en dos tipos: las de comando precalculado, donde se calcula la trayectoria con antelación al movimiento, y las de comando calculado en tiempo real.

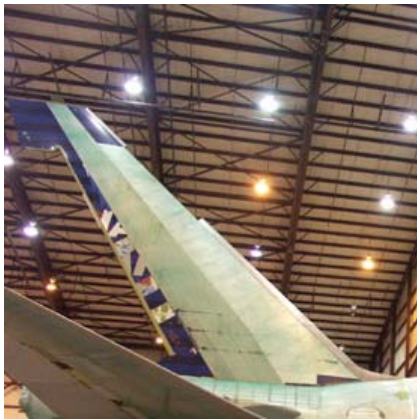
Por otro lado, se encuentran los controladores en cadena cerrada, en los cuales se realimenta una señal que depende del error, siendo el objetivo la eliminación de éste. Se han propuesto diversos tipos de controladores en cadena cerrada en la literatura. Entre ellos están los siguientes: control clásico con reguladores PID, control por realimentación del estado, control robusto, control pasivo, control adaptativo, control no lineal y control por técnicas de inteligencia artificial. En el Capítulo 7 se aborda la cancelación de vibraciones en un robot flexible de un grado de libertad empleando un controlador basado en pasividad. En el artículo de Benosman y Vey (2004) se realiza una profunda revisión de las técnicas de control empleadas en robótica flexible.

2.1.2 Estructuras tipo placa

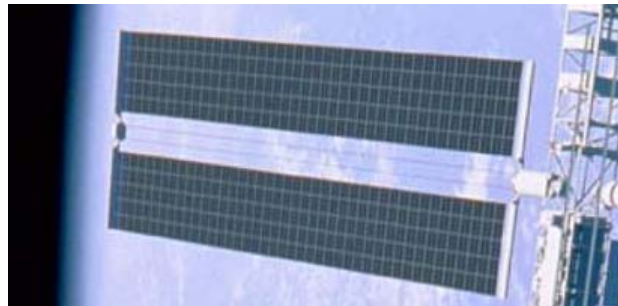
Una de las estructuras flexibles poco amortiguadas que más aparecen en los sistemas aeroespaciales son las placas delgadas. Dichas estructuras son elementos planos en los que el espesor es despreciable frente a las otras dos dimensiones. Por otro lado, el

desarrollo de los materiales piezoeléctricos, en concreto, en forma de parche, ha contribuido al desarrollo de estructuras tipo placa instrumentadas. Así, la naturaleza distribuida de las placas hace que estos sensores/actuadores en forma de parche sean idóneos en la implementación de sistemas de control para la cancelación de vibraciones en dichas estructuras.

Ejemplos de estructuras tipo placa son las alas o elementos de dirección en aviones o vehículos de lanzamiento (ver Figura 2.4a). Otro ejemplo significativo son los paneles solares, que son fuente de energía de sistemas aeroespaciales. En la Figura 2.4b) se observa una parte de la estación espacial internacional donde dos paneles solares se acoplan a una estructura articulada. En general, cualquier panel plano que forme parte de la estructura de un vehículo aeroespacial se puede tratar como una estructura tipo placa.



a)



b)

Figura 2.4: Elementos tipo placa. a) Timón del vehículo de lanzamiento SOFIA. b) Placas solares en la estación espacial internacional (NASA)

Como ya se ha comentado, las placas presentan una naturaleza distribuida, y por tanto, su comportamiento dinámico viene descrito por una ecuación en derivadas parciales. En general, esta ecuación no tiene solución analítica. Sólo existe solución para algunos casos muy concretos, por ejemplo, para una placa rectangular con dos lados opuestos apoyados. En consecuencia, los métodos numéricos (por ejemplo el método de los elementos finitos o el de las diferencias finitas) adquieren una gran importancia en el conocimiento de la dinámica de la estructura y en la obtención de modelos reducidos que se pueden emplear en aplicaciones de control en tiempo real.

A continuación se citan algunos trabajos relevantes de estructuras tipo placa. En el artículo de Fleming y Moheimani (2003) se realiza una identificación dinámica de una placa con una morfología similar a la de un ala de avión, es decir, se trata de una placa trapezoidal en voladizo, esto es, empotrada en uno de sus lados y libre en el resto. Dicha placa es de aluminio y sus dimensiones son: 680mm el lado empotrado, 520mm de voladizo y un espesor de 4mm. La placa se excita utilizando un parche piezoeléctrico y la identificación se realiza empleando un láser de barrido basado en el efecto Doppler. En el trabajo de Halim (2003) se estudia el posicionamiento óptimo de sensores/actuadores piezoeléctricos en una placa rectangular de aluminio de 800×600×4mm apoyada en todos sus lados. En este caso sí existe solución analítica al problema dinámico. El posicionamiento óptimo de sensores/actuadores se realiza empleando la matriz de controlabilidad espacial, la cual está basada en la norma H_2 (Moheimani y Fu, 1998). De esta forma, se tiene en cuenta la reducción de la vibración sobre toda la estructura, mientras que se mantiene la controlabilidad y la observabilidad de los modos considerados por encima de un cierto nivel. Además, se introduce una restricción extra en la matriz de controlabilidad con el fin de reducir los efectos de desbordamiento. Se entiende por efecto de desbordamiento a la aparición de la dinámica correspondiente a los modos no considerados en el modelo (en el Apartado 2.5 se hacen consideraciones sobre este fenómeno). Un trabajo significativo en cuanto al control activo de estructuras tipo placa es el de Hwang y col. (1997). En dicho trabajo se estudia una placa rectangular de acero de 360×300×0.8mm empotrada en todos sus lados e instrumentada con dos pares de parches piezoeléctricos. De este modo, cada par de parches, situados en el mismo emplazamiento, está formado por un sensor y un actuador piezoeléctrico. El modelado de la placa se realiza mediante un modelo truncado en el que se consideran los tres primeros modos de vibración. La colocación de los sensores/actuadores se realiza mediante una función de sensibilidad que es el resultado de la suma del cuadrado de la deformación en las dos direcciones del plano de la placa. Además, se consideran los nodos, o puntos de valor nulo, del cuarto modo para la colocación de los sensores/actuadores, de esta forma se evita la aparición de la dinámica de dicho modo (efecto de desbordamiento). En este trabajo se utiliza un control robusto LQG (Linear Quadratic Gaussian) con un filtro paso bajo para eliminar incertidumbres asociadas a las frecuencias altas (efecto de desbordamiento y/o ruido en la medida) y un filtro paso alto para eliminar incertidumbres debidas a las frecuencias bajas (desviaciones constantes en las medidas). En el artículo de Kar y Seto (2000) se

estudia una placa rectangular de aluminio en voladizo de 300×1000×4mm junto con un control robusto basado en H_∞ , para el cual se utiliza un modelo reducido de masas puntuales. En dicho modelo se consideran los tres primeros modos (incluido un modo de torsión) y se utiliza el cuarto modo para situar las masas puntuales del modelo reducido, de forma que se evita el efecto de desbordamiento del cuarto modo. En este trabajo se utilizan sensores de desplazamiento situados en la posición de las masas del modelo y la estructura se excita con un actuador electromagnético. Finalmente, se comenta que existe otra forma de abordar la cancelación de vibraciones en estructuras tipo placa; la cual consiste en el empleo de parches piezoeléctricos junto con una red eléctrica pasiva (resistiva) donde, a través del efecto piezoeléctrico, se disipa la energía (“Shunted piezoelectric material”) (Moheimani, 2003). Un ejemplo de esta tecnología es el trabajo de Fein y Gaul (2004) donde se cancelan vibraciones en una placa de acero rectangular de 500×504×1.5mm empotrada en un lado y libre en el resto. Dicha placa está instrumentada con ocho pares de parches piezoeléctricos adheridos a lo largo de la estructura y una red eléctrica resistiva donde se disipa la energía.

Atendiendo al gran interés existente en el estudio de estructuras tipo placa, en esta tesis se ha analizado una placa en voladizo empotrada en una base de hormigón. Los detalles de la estructura, modelado y caracterización dinámica de la misma se abordan en el Capítulo 4.

2.1.3 Estructuras articuladas

Las estructuras articuladas se han incluido en sistemas aeroespaciales desde el comienzo de la carrera espacial dada su ligereza y facilidad de montaje. Habitualmente estas estructuras son de gran tamaño y sobre ellas se montan equipos de elevada precisión que tienen ciertos objetivos. Un primer ejemplo de estructura articulada utilizada en el espacio se encuentra en el satélite espacial “Voyager” de la NASA (1977) (ver Figura 2.5), donde una plataforma de exploración se monta en el extremo de una estructura articulada de 2.3m (Joshi, 1999). También se utilizan estructuras articuladas en satélites como en el programa de la NASA “Earth Observing System” (1996), cuyo esqueleto es una estructura articulada tipo grúa.

Un caso muy significativo del empleo de estructuras articuladas es la estación espacial internacional. En la Figura 2.6 se muestra una imagen de la estación espacial

internacional y se observa como el esqueleto de ésta es una gran estructura articulada sobre la que se sitúan paneles solares y sistemas de exploración.

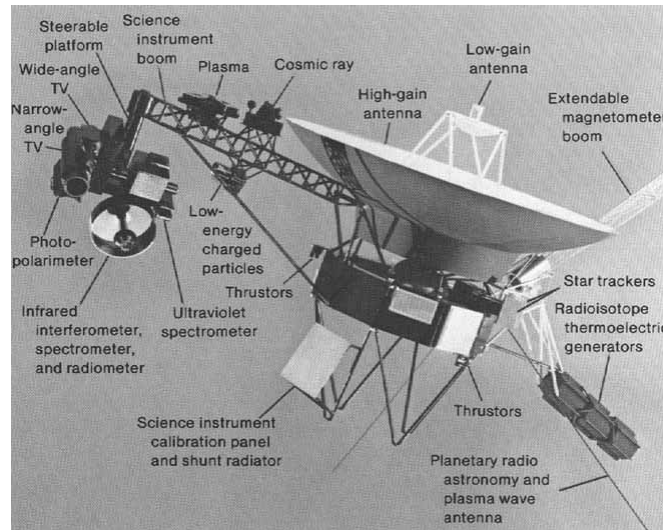


Figura 2.5: Plataforma espacial “Voyager” (NASA)



Figura 2.6: Estación espacial internacional (spaceflight.nasa.gov)

En las nuevas misiones de la NASA, como en la misión denominada “Space Interferometry Mission” (SIM), también se incluyen estructuras articuladas. La misión SIM consiste en una serie de elementos que se sitúan sobre una estructura articulada y que tienen como objetivo la medición de distancias entre astros (ver Figura 2.7). Más concretamente, está formada por siete cristales ópticos distribuidos a lo largo de una estructura de 10m. Dicha estructura está instrumentada con actuadores y sensores que tienen por objetivo anular los efectos de cualquier fuente de perturbación en la medición de dichos cristales. Con todo lo anterior, se puede decir que las estructuras

articuladas ligeras son representativas de estructuras flexibles aeroespaciales y lo seguirán siendo en el futuro.

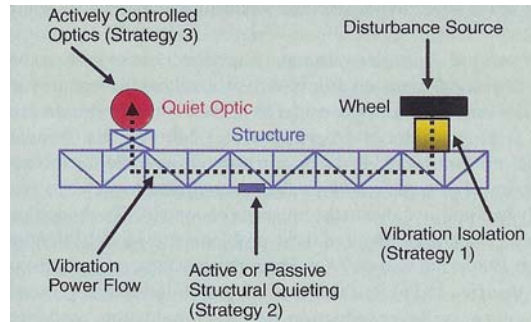


Figura 2.7: Diseño propuesto para la misión SIM (“Space Interferometry Mission”), donde siete cristales ópticos se montan sobre una estructura articulada (NASA) (Joshi, 1999)

Seguidamente se comentan algunas plataformas de laboratorio desarrolladas en diversos centros de investigación. En el centro de investigación de la NASA “Langley Research Center” se han llevado a cabo durante los últimos cuarenta años numerosos ensayos dinámicos sobre modelos de laboratorio y sobre plataformas reales. A partir de los años ochenta, se empezaron a enviar al espacio grandes estructuras articuladas, lo que motivó el estudio de la interacción entre la mecánica de las estructuras y los sistemas de control que se aplicaban (CSI). En el informe de Horta y Kvaternik (2000) se realiza una revisión completa de los ensayos dinámicos realizados en las últimas cuatro décadas. En este informe se pueden encontrar numerosos ejemplos de estructuras articuladas. A continuación se citan algunos de ellos. Un ejemplo es el modelo “Early Space Station Hybrid-Scale Dynamic Model” donde el esqueleto es una estructura articulada de aluminio de 5m de longitud y formada por diez módulos; siendo cada módulo un cubo de 0.5m de lado. También se han experimentado estructuras articuladas despegables como la que se estudia en Hsieh y col. (1991). Dicha estructura se considera empotrada-libre y está compuesta por: 18 módulos de elementos tubulares de grafito/epoxy y uniones de titanio con pasadores de acero inoxidable. La estructura desplegada en su totalidad mide 20m de longitud. Otro ejemplo es la plataforma “SSI Evolutionary Model” (ver Figura 2.8). Dicha plataforma presenta un esqueleto de aluminio de 16.8m sobre el que se sitúan: una torre de 2.8m, un láser vertical y dos

estructuras cruzadas de 5.1m, siendo todos los elementos de sección rectangular. De las estructuras cruzadas se cuelga el conjunto, de forma que se simula la situación libre-libre (Maghami y Gupta, 1997).

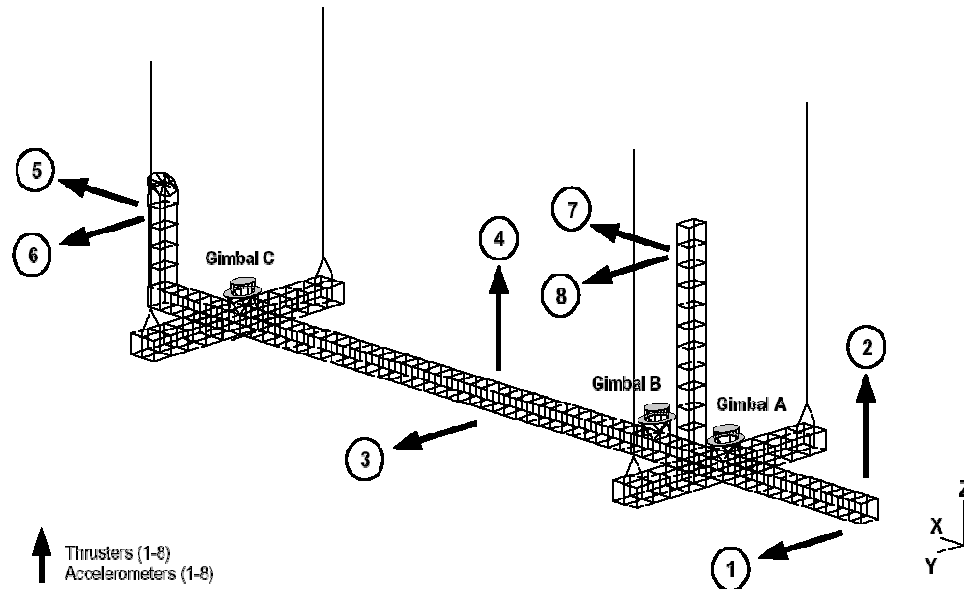


Figura 2.8: Estructura “SSI Evolutionary Model” experimentada en el “Langley Research Center” de la NASA (Maghami y Gupta, 1997)

En universidades como “Virginia Polytechnic Institute”, “Massachusetts Institute of Technology” (MIT), “Politecnico Di Milano” también se han experimentando estructura articuladas y se han desarrollado estrategias de control. En el trabajo de Hallauer y Lamberson (1989) se describe el diseño y análisis dinámico de una estructura articulada plana formada por veinte módulos de 354mm de longitud cada uno. La estructura se forma con el sistema de unión Mero (Mero Construction System M12) utilizando barras y uniones de aluminio. Dicha estructura se empotra en un extremo y se deja libre en el otro, estando toda ella sobre una mesa de aire. Se sitúan en el extremo libre un par de empujadores de aire y se mide la respuesta con dos acelerómetros –uno en el extremo y otro en el centro–. Como continuación del trabajo anterior, en Hallauer y col. (1991) se realiza la cancelación activa de vibraciones de dicha estructura implementado un algoritmo de control no lineal para los empujadores de aire. En la tesis de Gutiérrez (1999) se diseña una estructura articulada empotrada-libre de seis módulos de sección triangular y unida por nudos roscados. Cada módulo es una pirámide invertida de base cuadrada (de forma que se minimiza el número de barras empleadas) construida con barras de 250mm, resultando así una estructura de

1.5m de longitud (ver Figura 2.9). En el diseño realizan análisis de sensibilidad que permiten optimizar la estructura desde el punto de vista de la aparición de vibraciones residuales. Otro ejemplo es el trabajo de Ercoli-Finzi y col. (1993) donde se describe el diseño, análisis modal y actualización del modelo de una gran estructura articulada. Dicha estructura está formada por 54 módulos de 370mm de longitud y se encuentra colgada de muelles elásticos. Los módulos están formados por barras de PVC unidas por bolas de aluminio. Cada una de las barras se modela como un elemento sin masa que trabaja a tracción/compresión, de forma que en los nudos se sitúa tanto la masa de las barras como la de las bolas. La cancelación de vibraciones en la estructura anterior se aborda en el trabajo de Casella y col. (2002). La estructura se instrumenta con seis empujadores de aire y seis elementos piezoeléctricos. De esta forma, los primeros se encargan de la cancelación de las vibraciones debidas a los modos más bajos, que son los que presentan una mayor energía, y los segundos se encargan de los modos más altos, que son menos energéticos, pero se necesita una mayor velocidad de respuesta. Finalmente, se comenta el artículo de Gawronski (1997) donde se considera el problema del posicionamiento óptimo de sensores/actuadores en estructuras flexibles y se particulariza para una estructura articulada. El posicionamiento se realiza mediante el uso de las matrices de controlabilidad y observabilidad, y además, se incluyen restricciones en los emplazamientos, es decir, el posicionamiento sólo se puede llevar a cabo en ciertas regiones seleccionadas previamente.

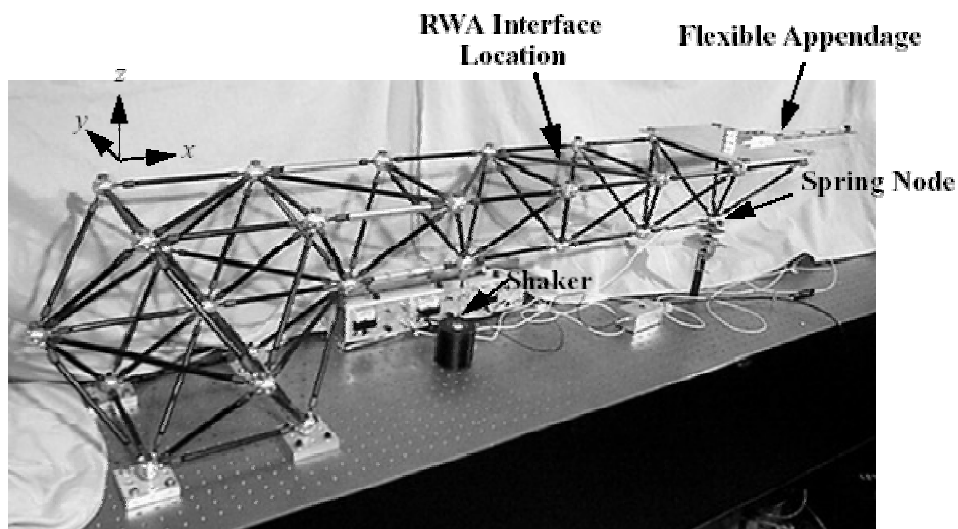


Figura 2.9: Estructura articulada flexible (MIT) (Gutiérrez, 1999)

Teniendo en cuenta lo anterior, en la presente tesis se ha construido una estructura articulada colgada formada por barras de PVC y unida por nudos roscados de aluminio.

Los detalles de la estructura, modelado y caracterización dinámica se abordan en el Capítulo 5. Es interesante comentar que la estructura en su conjunto se comporta como una viga en 3-D, es decir, presenta flexión en dos ejes y torsión, sin embargo, cada una de las barras (de forma individual) trabaja a tracción/compresión.

2.2 Caracterización dinámica

En general, para el control de vibraciones es necesario disponer de un modelo matemático fiable que describa adecuadamente el comportamiento dinámico de la estructura. Con la caracterización dinámica se obtienen datos de medida que permiten conocer la precisión de dichos modelos y llevar a cabo su actualización si es necesario.

De forma teórica, un modelo dinámico se construye a partir de las propiedades modales de la estructura –frecuencias naturales, formas modales y coeficientes de amortiguamiento–. Con estas propiedades se describe la respuesta natural del sistema. El segundo paso es obtener la respuesta forzada y conocer así cómo vibra la estructura en la práctica.

Los ensayos dinámicos se pueden dividir en tres tipos (Ewins, 2000):

- El primero de ellos consiste en someter a la estructura a sus condiciones de operación y observar si soporta esas condiciones o no. Con este procedimiento no se evidencia si la estructura se encuentra al límite de su capacidad y no es posible obtener su configuración óptima.
- El segundo tipo tiene por objetivo cuantificar el nivel de vibración de la respuesta en servicio. Es un ensayo basado en la observación y aporta una información limitada ya que sólo se conocen ciertos parámetros del sistema.
- El tercer tipo son los ensayos modales. Estos ensayos no sólo permiten obtener el nivel de vibración sino también caracterizar la estructura, es decir, conocer sus propiedades.

Mientras que el primer y segundo tipo de ensayos se basan en medir alguna propiedad –normalmente el nivel de vibración–, en los ensayos modales se mide tanto la entrada (excitación) como la salida (respuesta) y se obtiene la relación entre ellas que se denomina función de respuesta. Al conjunto de estas relaciones se le denomina Modelo

de Respuesta. Sin embargo, en los estudios teóricos, por ejemplo, con elementos finitos, se obtiene un Modelo Espacial. Un tercer tipo de modelo es el denominado Modelo Modal que se puede obtener a partir del modelo de respuesta y del modelo espacial.

En un ensayo modal experimental se mide la respuesta de la estructura ante una excitación conocida (Modelo de Respuesta), para, a través de las funciones de respuesta, obtener las funciones de transferencia y, por tanto, los modos de vibración (forma modal, frecuencias naturales y amortiguamientos) (Modelo Modal). Por otro lado, existen algunos métodos para obtener las matrices de la estructura (matrices de rigidez, masa y amortiguamiento) (Modelo Espacial).

En cuanto a las aplicaciones de los ensayos modales, la primera y más generalizada consiste en la obtención de frecuencias y modos de vibración. La necesidad de obtener dichas características suele tener fundamentalmente dos objetivos:

- Comprobar el cumplimiento de una especificación sobre la frecuencia de resonancia de la estructura.
- Determinar si el modelo matemático de la estructura es correcto mediante la correlación entre los resultados teóricos y los del ensayo, y actualizar el modelo en caso de ser necesario.

A continuación se describen las tareas más importantes que se deben realizar en cualquier ensayo modal. Dichas tareas se pueden agrupar en tres etapas:

- Preparación del ensayo. Etapa en la que se realiza la selección de las técnicas más apropiadas para cada caso particular. Será necesario definir las condiciones de contorno en las que se dispondrá la estructura, la técnica de excitación más adecuada, los puntos de excitación y los sensores de medida y su situación.
- Realización del ensayo. En esta etapa se agrupan los procesos de excitación de la estructura y toma de datos, el análisis de las señales registradas y el cálculo de las funciones de respuesta.
- Análisis de resultados. Ésta es la etapa final y consiste en el ajuste de las funciones de transferencia y la obtención de los modos y frecuencias naturales de vibración.

2.2.1 Preparación del ensayo

A continuación se recogen algunas consideraciones que se deben tener en cuenta en el proceso de ensayo (Ewins, 2000).

a) Condiciones de contorno.

La definición de las condiciones de contorno de la estructura durante la realización del ensayo no sólo depende del objetivo de éste, sino también de los medios disponibles en el lugar de su realización. Se suelen considerar tres tipos de condiciones de contorno.

- Estructura libre-libre. Estas condiciones de contorno se pueden conseguir sosteniendo a la estructura mediante muelles elásticos. Con esto se consigue aislar a la estructura de posibles vibraciones externas. Al sostener la estructura por muelles elásticos se busca que los modos correspondientes al sólido rígido estén lo suficientemente alejados de las frecuencias naturales de interés. En general, se considera aceptable que el modo de sólido rígido más elevado esté entre un 10% y un 20% de la primera frecuencia de la estructura. En la Figura 2.10 se muestra una estructura articulada colgada de muelles elásticos que se ha desarrollado dentro de esta tesis (Capítulo 5).

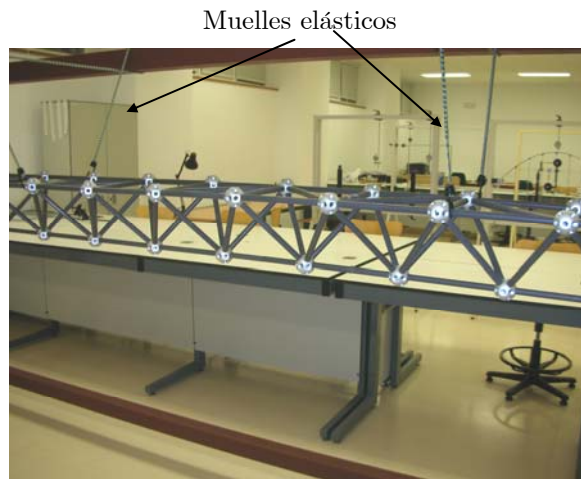


Figura 2.10: Estructura articulada colgada mediante muelles elásticos de un pórtico rígido. Condiciones libre-libre. (Laboratorio de Mecánica de los Medios Continuos, ETSII, UCLM)

- Estructura empotrada. Los apoyos restringidos estarán de acuerdo a una especificación dada (giros y/o desplazamientos). En general, en condiciones de

laboratorio es difícil conseguir un empotramiento perfecto ya que casi siempre existen flexibilidades locales difícilmente salvables. En la Figura 2.11 se muestra una estructura articulada de aluminio empotrada en un bloque de hormigón a través de un cosido con tornillos.



a)

b)

Figura 2.11: Estructura empotrada-libre. a) Estructura articulada de aluminio. b) Cosido mediante tornillos y placa de anclaje en un bloque de hormigón (Laboratorio de Mecánica de los Medios Continuos, ETSII, UCLM)

- Estructura en condiciones operacionales. Se realiza el ensayo *in situ*, en las condiciones que existan durante la vida operativa de la estructura. En este caso, si el objetivo es la obtención de las frecuencias, no existen problemas. Ahora bien, si el objetivo es obtener un modelo numérico de la estructura, se deben incluir las condiciones de contorno.

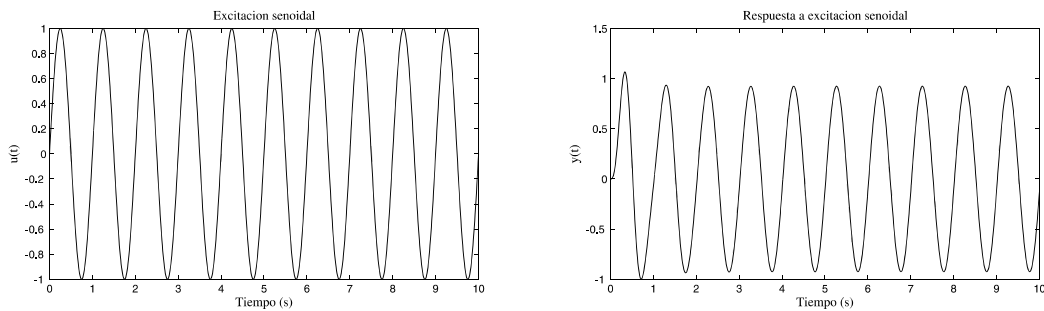
b) Técnica de excitación.

El tipo de excitación depende de la estructura y de las opciones disponibles. En realidad existen diversas señales de excitación. En la Figura 2.12 se muestran las señales de excitación más utilizadas que son: entrada sinusoidal, periódica, aleatoria, chirp e impulsiva. En dicha figura, en la columna de la izquierda se muestra la excitación y en la columna de la derecha la respuesta de un sistema dinámico con un modo de vibración. Por otro lado, el tipo de señal no es un condicionante (siempre y

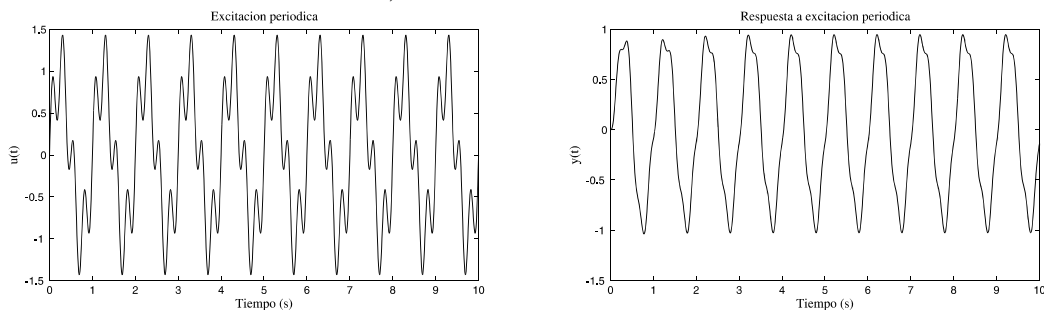
cuando el espectro de excitación se adapte al ancho de banda de la estructura) ya que se obtienen funciones de transferencia $(H_{ij}(j\omega))$ que son independientes de la excitación. Esto es,

$$H_{ik}(j\omega) = y_{si}(j\omega)/u_k(j\omega), \quad (2.1)$$

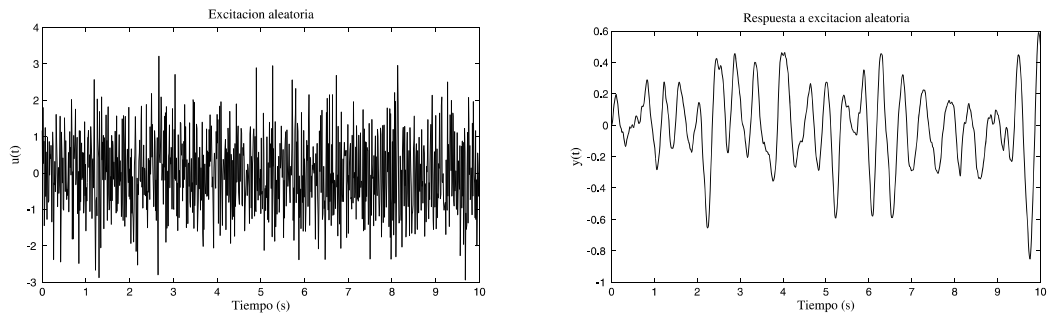
donde, $y_{si}(j\omega)$ es la magnitud medida y $u_k(j\omega)$ es la excitación, con ω la frecuencia y $i, k = 1, \dots, N$, siendo N el número de grados de libertad considerados en la estructura. En este caso el término grado de libertad se entiende como las coordenadas del modelo espacial. Habitualmente se aplican cargas puntuales, aunque también se puede someter a la estructura a una vibración en su base. Para el primer tipo de carga se suele emplear un martillo instrumentado, con el cual se puede aplicar una carga de tipo impulsivo con un amplio rango de excitación. También se puede emplear un vibrador electromagnético gobernado por un sistema de control. Por otro lado, se pueden utilizar otro tipo de actuadores como pueden ser cristales piezoeléctricos, donde la entrada no es directamente una fuerza sino una deformación localizada en la unión estructura-piezoeléctrico. Para el segundo tipo de carga se puede utilizar una mesa vibratoria de tal forma que se aplican cargas simultáneas en todos los puntos de la estructura, proporcionales a la masa de cada uno de ellos.



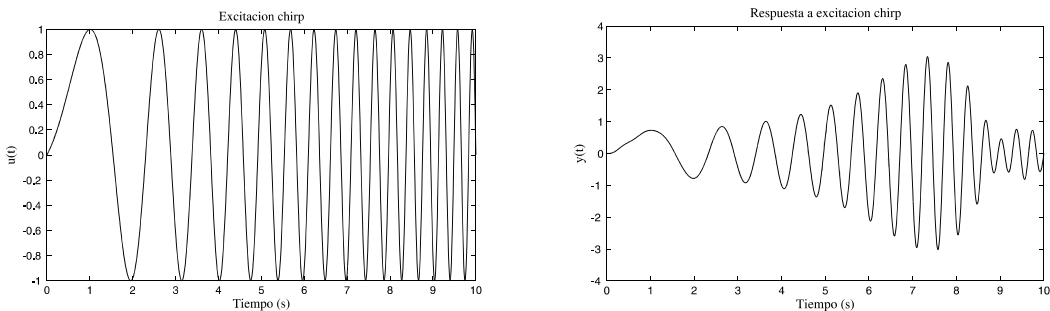
a) Excitación sinusoidal



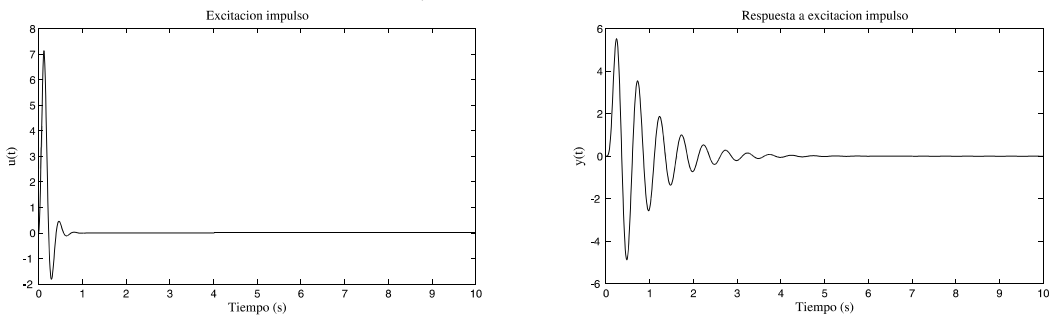
b) Excitación periódica



c) Excitación aleatoria



d) Excitación chirp



e) Excitación impulsiva

Figura 2.12: Señales de excitación. Columna izquierda: excitación. Columna de la derecha: respuesta

c) Puntos de medida.

Tanto para la selección de los puntos de medida como de excitación es necesario tener una predicción de los modos (disponer de un modelo numérico inicial aproximado). En caso contrario, sería necesario obtener la respuesta en un elevado número de puntos y el esfuerzo para llevar a cabo el análisis sería mucho mayor.

Los puntos de medida deben cubrir tanto los picos o puntos de máxima medida como los nodos o puntos de medida cero. Además, si es posible, los puntos de medida deberían ser compatibles con los grados de libertad del modelo matemático utilizado para la predicción. También es importante situar los sensores de forma que se obtenga una medida del comportamiento global de la estructura y se eviten efectos locales,

habitualmente indeseables. Por otro lado, es interesante mencionar que existen numerosos criterios de posicionamiento de sensores dependiendo de la magnitud que éstos midan y del objetivo final. Existen criterios de posicionamiento enfocados a la identificación de sistemas (Udwadia, 1994) o a la detección de daños en estructuras (Shi y col., 2000). Dentro de esta tesis se ha desarrollado un criterio de posicionamiento de sensores de deformación basado en la deformación equivalente de von Mises (dicho trabajo se explica en el Capítulo 4 y en Díaz y col. (2006)). Otros autores utilizan la matriz de observabilidad extraída del modelo en espacio de estados del sistema (por ejemplo, en Gawronski (1997)).

d) Puntos de excitación.

Finalmente, es necesario definir los puntos en los que se aplica la carga. Las técnicas de ajuste de las funciones de transferencia necesitan, teóricamente, sólo una columna de la matriz de transferencia en la que se encuentra la información de todos los modos de vibración. Por tanto, y desde este punto de vista, con excitar la estructura en un solo punto sería suficiente, aunque en la práctica suele ser recomendable hacerlo en varios. Por otro lado, existen numerosos criterios para elegir los puntos óptimos de excitación. La mayoría de ellos se basan en la matriz de controlabilidad extraída del modelo en espacio de estados (Gawronski, 1997). En general los criterios de posicionamiento consideran de forma conjunta los sensores y los actuadores (por ejemplo, Halim y Moheimani, 2003). Así, se identifica un modelo del sistema que se puede emplear en aplicaciones de control de vibraciones.

2.2.2 Realización del ensayo

Esta etapa consiste fundamentalmente en cuatro tareas:

- Colocación de los sensores.
- Ajuste de la cadena de medida, seleccionando las ganancias adecuadas de los amplificadores.
- Excitación de la estructura y recogida de la respuesta.
- Análisis de las señales y obtención de las funciones de transferencia.

En la Figura 2.13 se muestra el proceso que se lleva a cabo para la obtención de las funciones de respuesta en frecuencia (“Frequency Response Function” FRF). En dicha figura se considera un sistema con un modo de vibración predominante y los modos superiores se tratan como ruido de alta frecuencia. La señal analógica captada por los sensores (sensor de medida de la respuesta y sensor de medida de la actuación) se pasa por un filtro paso bajo con una cierta frecuencia de corte. En las Figuras 2.13a) y 2.13b) se muestra, respectivamente, la señal temporal de la salida y el espectro en frecuencias de la señal de entrada, que es de tipo impulsivo, antes y después de aplicar el filtro paso bajo, también denominado filtro antialiasing. A continuación, se convierte la señal analógica en digital, realizando un muestreo con una frecuencia f_c que debe ser, al menos, el doble que la frecuencia máxima que se pretende captar ($f_m < f_c/2$). En la Figura 2.13c) se muestran, respectivamente, la señal de salida y de entrada muestreadas. Cualquier frecuencia superior a $f_c/2$ tendrá una cierta “frecuencia aparente” en el registro muestreado inferior a f_c (“efecto aliasing”). Finalmente, se aplica una ventana de ponderación, que permite observar mejor los datos, y se lleva a cabo la transformada rápida de Fourier (“Fast Fourier Transform” FFT) (ver Figura 2.13d) de tal forma que se obtiene la función de respuesta en frecuencia como el cociente entre la FFT de la respuesta y la FFT de la excitación (ver Figura 2.13e).

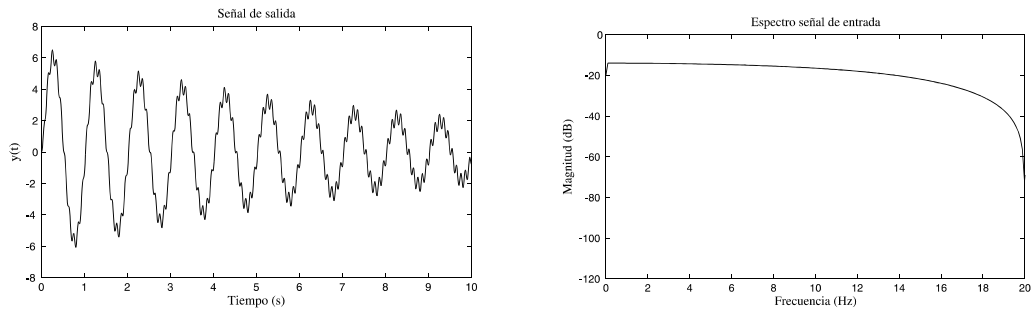
2.2.3 Análisis de resultados

La etapa final es la obtención de las funciones de transferencia a partir del ajuste de las funciones de respuesta en frecuencia, y la comprobación de la bondad de los resultados. Todos los métodos parten de establecer una expresión que aproxime la función teórica a partir de los modos de vibración, las frecuencias y los amortiguamientos. Además, suelen incorporar parámetros residuales adicionales que tienen en cuenta el efecto de los modos de vibración no considerados en el proceso.

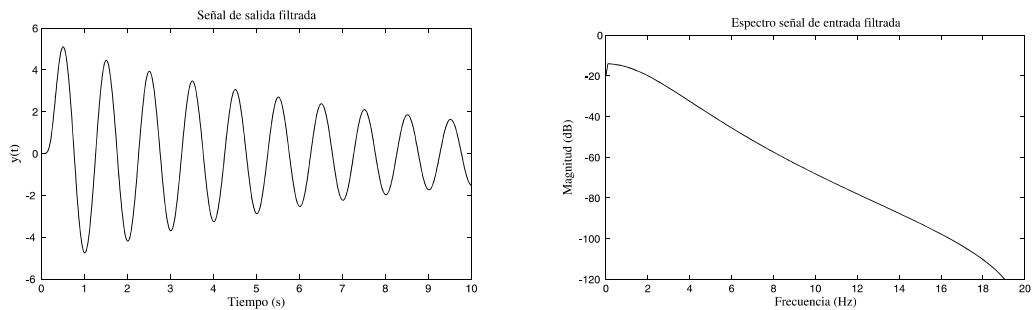
Las técnicas de ajuste se pueden dividir en dos grupos (Ewins, 1984):

- Aquéllas que realizan aproximaciones que ajustan cada modo de forma independiente, por ejemplo, la aproximación en cuadratura o el ajuste circular. Estas técnicas se pueden emplear siempre que los modos estén lo suficientemente desacoplados.

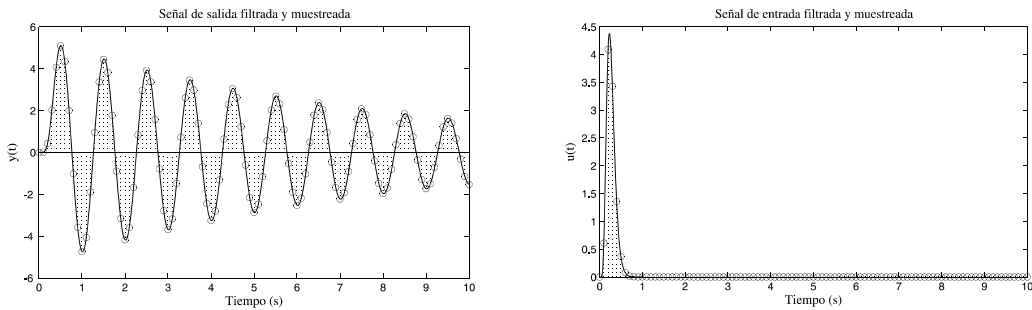
- Aquéllas que aproximan la respuesta del sistema completo, es decir, se consideran varios modos de vibración simultáneamente.



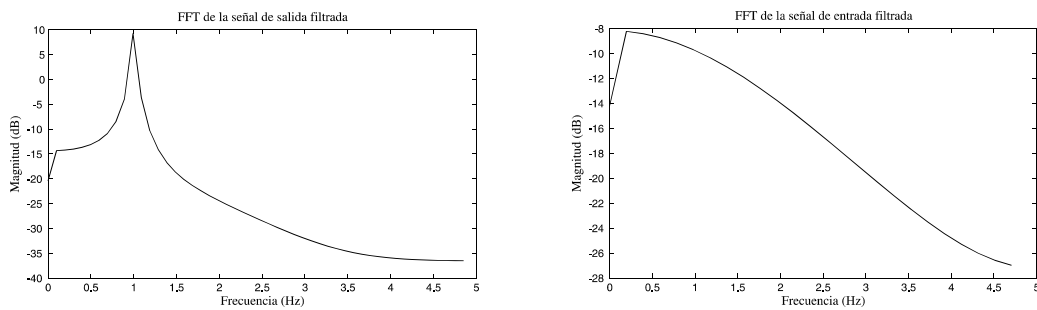
a) Registro: salida temporal y espectro de la señal de entrada (impacto)



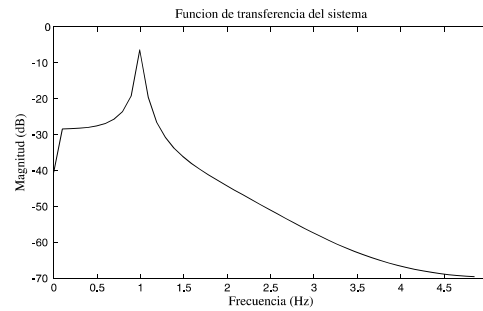
b) Filtro antialiasing



c) Muestreo



d) FFT y ventana de ponderación



e) Función de respuesta en frecuencia

Figura 2.13: Ejemplo de análisis de señal

2.3 Sensores y actuadores

En este apartado se describen los sensores y actuadores que habitualmente se emplean en estructuras instrumentadas. Inicialmente, se describen las galgas extensométricas, que son los sensores de deformación más extendidos, y los sensores de fibra de Bragg, que se pueden emplear para medir deformaciones. Estos últimos están reemplazando a los primeros en diversas aplicaciones. Por otro lado, se describen los sensores/actuadores piezoeléctricos dado su elevado grado de implantación en estructuras instrumentadas y también se comentan los motores-actuadores que aparecen fundamentalmente en sistemas robóticos. Además, se comentan otros sensores como: acelerómetros, cámaras de seguimiento y vibrómetros láser.

Los sensores de deformación permiten conocer las deformaciones y, a partir de ellas, las tensiones y los esfuerzos que se desarrollan en las estructuras cuando se ejercen cargas exteriores sobre ellas. Son transductores que transforman una medida eléctrica en deformación (galgas extensométricas y piezoeléctricos) o un cambio de longitud de onda en deformación (sensores de Bragg).

2.3.1 Galgas extensométricas

a) Principio de funcionamiento.

Las bandas o galgas extensométricas son elementos de tipo resistivo. Su funcionamiento se basa en el cambio de resistencia que sufre un hilo conductor al variar

su longitud. Por tanto, se puede determinar la variación de longitud que experimenta la banda midiendo la variación de resistencia. Existe una relación directa entre la deformación (ε) que sufre la banda y la variación de resistencia eléctrica (ΔR). Si se emplea como transductor un puente de Wheatstone, la variación de resistencia eléctrica se traduce en una variación de voltaje (ΔV) fácilmente medible. En la Figura 2.14 se muestra un diagrama de bloques de una medida con galgas extensométricas.

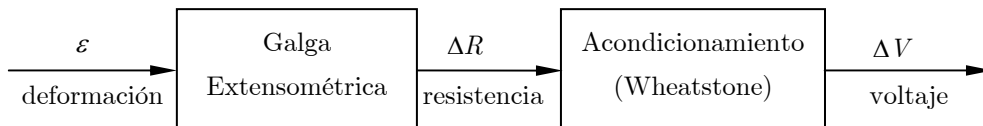


Figura 2.14: Diagrama de bloques de una medida con galgas extensométricas

Dado un hilo conductor sometido a deformaciones longitudinales, se puede demostrar que la variación de resistencia eléctrica resulta ser (Pérez-García y col., 2004)

$$\frac{dR}{R} = [(1 + 2\nu) + C(1 - 2\nu)] \frac{dL_s}{L_s} = K_g \frac{dL_s}{L_s}, \quad (2.2)$$

donde $R \equiv$ resistencia eléctrica, $\nu \equiv$ coeficiente de Poisson, $L_s \equiv$ longitud del cable, $C \equiv$ constante de Bridgman y $K_g \equiv$ factor de galga. A partir de (2.2), se obtiene la deformación en función de la variación de resistencia

$$\varepsilon = \frac{1}{K_g} \frac{dR}{R}, \quad (2.3)$$

es decir, midiendo la variación de resistencia se puede determinar la deformación que ha sufrido la banda. Si las deformaciones son pequeñas, la ecuación (2.3) se transforma en

$$\varepsilon = \frac{1}{K_g} \frac{\Delta R}{R}. \quad (2.4)$$

Las galgas más comunes suelen estar fabricadas de constantán (aleación formada por un 45% de Ni y un 55% de Cu) y su factor de galga está entorno a 2. Esta aleación se caracteriza por presentar una resistencia eléctrica constante en un amplio rango de temperaturas.

b) Configuraciones.

En general, una banda extensométrica consta de una pista conductora, la cual está dispuesta de forma que el hilo conductor presenta una gran longitud en la dirección de

medida. Esta pista conductora acaba en dos terminales donde se sueldan los cables que la deben unir al circuito de medida. Todo este conjunto está sostenido por un material aislante que es el que proporciona el soporte para su pegado. Existen diferentes configuraciones dependiendo del número de ejes de medida. En la Figura 2.15a) se representa el esquema de una galga uniaxial, mientras que en la Figura 2.15b) se representa una roseta triaxial de deformación. Esta última se emplea para medir la deformación en tres direcciones diferentes y, por tanto, determinar un estado plano de deformaciones, el cual queda definido por tres valores. En la Figura 2.15c) se muestra una roseta que ha sido adherida a una estructura tipo placa.

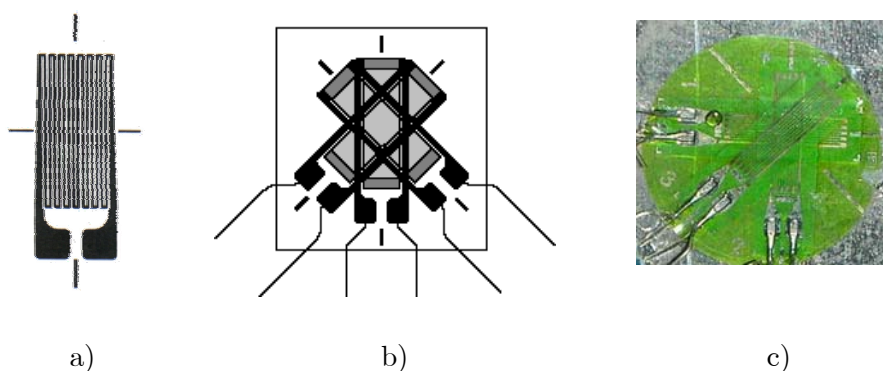


Figura 2.15: Configuración bandas extensométricas. a) Galga uniaxial. b) Roseta triaxial. c) Roseta triaxial, montaje en una placa

c) Acondicionamiento: puente de Wheatstone.

El acondicionamiento de bandas extensométricas se realiza a través de un puente de Wheatstone. Existen diversos montajes: en $\frac{1}{4}$ puente, en $\frac{1}{2}$ puente y en puente completo. El montaje en $\frac{1}{4}$ puente se utiliza cuando se tiene una única galga. El montaje en $\frac{1}{2}$ puente se emplea cuando se tienen dos galgas activas y se puede utilizar para el caso de deformaciones iguales (tracción/compresión) u opuestas (flexión) en ambas galgas. Finalmente, en el montaje en puente completo se tienen cuatro galgas activas. En esta tesis se han empleado dos galgas activas para medir las vibraciones debidas a la flexión en el robot flexible, y un montaje en $\frac{1}{4}$ puente para cada una de las galgas que forman las rosetas que se han utilizado para medir las vibraciones en una placa.

A continuación se describe el proceso de medida de deformaciones en un problema de flexión utilizando un montaje en $\frac{1}{2}$ puente (ver Figura 2.16). Se toma el caso particular en el que las dos bandas son iguales y con una resistencia nominal R . Las

otras dos resistencias también se consideran iguales entre ellas y de valor nominal igual al de las bandas ($R_3 = R_4 = R$). En un problema de flexión si la sección transversal es simétrica, se cumple

$$\varepsilon_A = -\varepsilon_B = \varepsilon, \quad (2.5)$$

luego,

$$\Delta R_A = -\Delta R_B = \Delta R. \quad (2.6)$$

A partir del montaje en $\frac{1}{2}$ puente (Figura 2.16b) se obtiene

$$V_{AB} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} V_0, \quad (2.7)$$

donde V_0 es el voltaje de alimentación del puente. Teniendo en cuenta la expresión (2.6), se tiene lo siguiente

$$R_1 = R - \Delta R, \quad R_2 = R + \Delta R, \quad R_3 = R_4 = R. \quad (2.8)$$

Si se sustituye (2.8) en (2.7), se llega a la siguiente expresión simplificada para el voltaje

$$V_{AB} = \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R} V_0. \quad (2.9)$$

Si se considera (2.4), el voltaje (2.9) se reescribe como sigue

$$V_{AB} = \frac{1}{2} V_0 K_g \varepsilon, \quad (2.10)$$

de tal forma que se relaciona el voltaje del puente V_{AB} con la deformación que sufren las bandas ε .

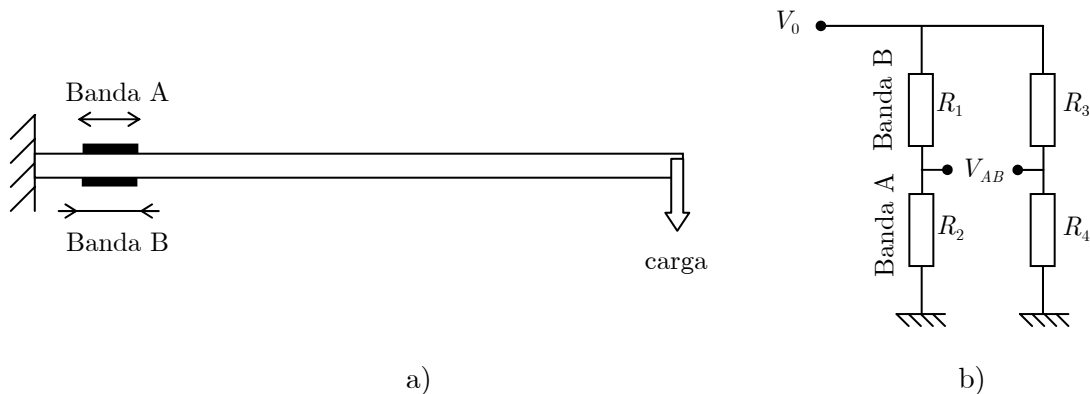


Figura 2.16: Montaje en $\frac{1}{2}$ puente para flexión. a) Disposición de las bandas en un problema de flexión. b) Puente de Wheatstone

2.3.2 Sensores de fibra de Bragg

En este apartado se describe el principio de funcionamiento de un sistema sensorial basado en sensores de Bragg, que son sensores de fibra óptica. Actualmente, en diversas aplicaciones, se está implantando el uso de sensores basados en fibra de Bragg para la medición de vibraciones. Estos sensores presentan ciertas ventajas tales como: bajo peso, resistencia al ruido electromagnético o elevada sensibilidad (Measures, 2001). El sensor se fabrica mediante un grabado en el núcleo de una fibra óptica. Más concretamente, se construye haciendo una modulación periódica del índice de refracción del núcleo de una fibra óptica. Así, la luz que viaja a lo largo de la fibra se refleja de forma periódica debido a dicha modulación. Esta tecnología se conoce como tecnología de Bragg y permite grabar en una única fibra un gran número de sensores sin añadir conexiones adicionales, como ocurre con los sensores tradicionales. Tal y como se muestra en la Figura 2.17, un sistema sensorial basado en fibra de Bragg consta de: una fuente de luz (láser) que emite una señal, una o varias fibras ópticas donde se graban los sensores a una cierta longitud de onda nominal λ_B (también llamada resonancia de Bragg) correspondiente con la longitud de onda de la señal reflejada y un detector de longitud de onda que mide dicha señal (Kersey y col., 1997).

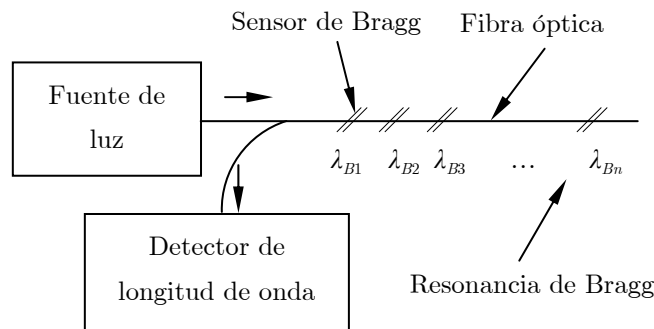


Figura 2.17: Sistema sensorial basado en fibra de Bragg

El principio de funcionamiento es el siguiente: a través de una fuente de luz, se inyecta un espectro lo suficientemente ancho, de tal forma que cada sensor grabado refleja un espectro muy estrecho caracterizado por una longitud de onda nominal λ_B . Este espectro reflejado se pierde en la señal transmitida. Por otro lado, la señal reflejada depende de la longitud del sensor L_s y, por tanto, perturbaciones en éste (por ejemplo, una elongación) se traducen en un cambio en la longitud de onda reflejada. La longitud de onda nominal de un sensor, o resonancia de Bragg, se expresa como

$$\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda, \quad (2.11)$$

donde n_{eff} es el índice de refracción efectivo del núcleo de la fibra y Λ es el espaciamiento de la modulación periódica del índice de refracción. A partir de la expresión (2.11), se observa que cualquier cambio en el espaciamiento de la modulación Λ o en el índice de refracción efectivo n_{eff} provoca un cambio en la resonancia λ_B . Así, cualquier cambio de temperatura o de deformación se puede determinar a partir de la variación de la resonancia $\Delta\lambda_B$. Dicha variación, considerando condiciones isotérmicas, se expresa como sigue

$$\Delta\lambda_B = 2\left(\Lambda \frac{\partial n_{eff}}{\partial L_s} + n \frac{\partial \Lambda}{\partial L_s}\right)\Delta L_s. \quad (2.12)$$

Teniendo en cuenta que la deformación del sensor viene dada por $\varepsilon = \Delta L_s/L_s$ y la expresión (2.12), la variación relativa de la longitud de onda se relaciona con la deformación mediante la siguiente expresión (Melle y col., 1993)

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = (1 - p_{eff})\varepsilon, \quad (2.13)$$

siendo p_{eff} la constante foto-elástica efectiva. Por tanto, existe una relación lineal y directa entre el cambio de longitud de onda $\Delta\lambda_B$ y la deformación que sufre el sensor ε . Finalmente, es interesante recalcar que se pueden grabar un gran número de sensores en una única fibra a longitudes de resonancia diferentes, lo que hace que este tipo de sensores sean de gran utilidad en sistemas sensoriales cuasi-distribuidos.

2.3.3 Sensores y actuadores piezoeléctricos

Los materiales piezoeléctricos son aquellos que presentan la capacidad de transformar energía mecánica en energía eléctrica (efecto directo, sensor) y viceversa, energía eléctrica en mecánica (efecto inverso, actuador). Así, si un material piezoeléctrico se adhiere a una estructura, se puede deformar ésta aplicando un voltaje al material piezoeléctrico de forma que se comporta como un actuador. Por otro lado, se puede emplear como un sensor, ya que las deformaciones en la estructura se traducen en un voltaje en el piezoeléctrico.

El efecto piezoeléctrico exhibido por materiales naturales es muy pequeño; sin embargo, se han desarrollado materiales con propiedades piezoeléctricas mejoradas.

Existen dos materiales que actualmente se emplean como piezoeléctricos y son: el Zirconato Titanato de Plomo (PZT), que es un material cerámico, y el Polifluoruro de Vinilideno (PVDF), que es un polímero semicristalino. El primero de ellos exhibe un mayor efecto piezoeléctrico, pero es relativamente frágil, mientras que el segundo es más dúctil. Esto hace que el PZT se utilice más como actuador y el PVDF como sensor (Moheimani y Fleming, 2006).

A continuación se presentan las ecuaciones que gobiernan el efecto piezoeléctrico cuando el material trabaja como actuador y como sensor. En la Figura 2.18 se muestra un esquema de un transductor piezoeléctrico donde la dirección de polarización es el eje-z negativo.

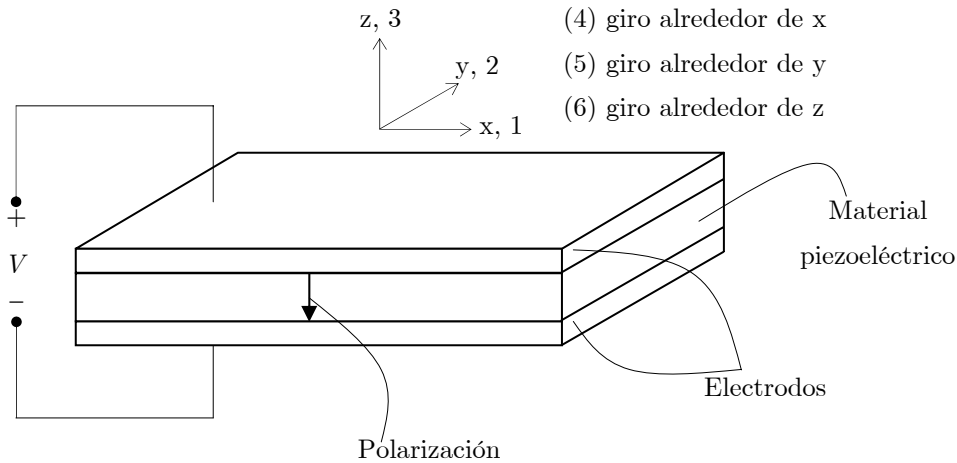


Figura 2.18: Diagrama de un transductor piezoeléctrico

La ecuación electrodinámica que gobiernan el efecto piezoeléctrico inverso (actuador) es (Gandhi y Thompson, 1992)

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S}^E \underline{\sigma} + \underline{d} \underline{E}, \quad (2.14)$$

donde $\underline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ (m/m) es el vector de deformaciones, $\underline{S}^E \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ (m²/N) es la matriz de flexibilidad (inversa de la matriz de constantes elásticas) cuando el campo eléctrico \underline{E} es constante, $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ (N/m²) es el vector de tensiones mecánicas, $\underline{d} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ (m/V o C/N) es la matriz de constantes de deformación piezoeléctricas y $\underline{E} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ (V/m) es el vector de campo eléctrico. La ecuación (2.14) se puede formular también como sigue

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S}^D \underline{\sigma} + \underline{g} \underline{D}, \quad (2.15)$$

donde \underline{S}^D es la matriz de flexibilidad cuando el desplazamiento eléctrico \underline{D} es constante, $\underline{g} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ (m²/C o Vm/N) es la matriz de constantes de voltaje piezoeléctricas y $\underline{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ (C/m²) es el vector de desplazamiento eléctrico. Por otro lado, la ecuación que gobierna el efecto directo (sensor) es

$$\underline{D} = \underline{d}^T \underline{\sigma} + \underline{\xi}^\sigma \underline{E}, \quad (2.16)$$

donde $\underline{\xi}^\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (C/Vm) es la matriz de permitividad dieléctrica cuando la tensión $\underline{\sigma}$ es constante y el superíndice T indica la matriz transpuesta. La ecuación (2.16) se puede escribir también como sigue

$$\underline{E} = \underline{g}^T \underline{\sigma} + (\underline{\xi}^\sigma)^{-T} \underline{D}. \quad (2.17)$$

La ecuación (2.14) indica que la deformación mecánica inducida en el piezoeléctrico es el resultado de la suma de la deformación debida a la tensión mecánica y la deformación inducida por un voltaje de control aplicado (efecto piezoeléctrico inverso). Por otro lado, la ecuación (2.16) indica que el desplazamiento eléctrico total es el resultado de la suma del desplazamiento debido a una posible tensión mecánica aplicada (efecto piezoeléctrico directo) y el desplazamiento generado por un campo eléctrico (ecuaciones de Maxwell).

2.3.4 Motores-actuadores

En las estructuras instrumentadas se utilizan motores que, cuando actúan sobre la estructura mecánica, modifican su posición. En general, los elementos motores se clasifican atendiendo a:

- a) La naturaleza de la energía de activación:
 - Motores neumáticos.
 - Motores hidráulicos.
 - Motores eléctricos.
 - Motores mixtos (sistemas electro-hidráulicos).
- b) El tipo de movimiento generado:
 - Actuadores lineales.

- Actuadores rotativos.

Además, existen otros elementos que habitualmente vienen asociados a los motores y que son:

- Mecanismos de reconversión y transmisión del movimiento.
- Reductoras.

En la Tabla 2.1 se resumen las características de los motores citados anteriormente. En la Tabla 2.2 se exponen los elementos de transmisión y conversión del movimiento más empleados.

Tabla 2.1: Características de los motores-actuadores

	Neumático	Hidráulico	Eléctrico
Energía	Aire a presión	Aceite	Corriente eléctrica
Opciones	– Cilindros – Motor de paletas – Motor de pistones	– Cilindros – Motor de paletas – Motor de pistones	– Corriente continua – Corriente alterna – Motor paso a paso
Ventajas	– Baratos – Rápidos – Sencillos – Robustos	– Rápidos – Alta relación potencia-peso – Alta capacidad de carga	– Precisos – Fiables – Fácil control – Silenciosos
Desventajas	– Dificultad de control continuo – Accesorios – Ruidosos	– Elevado mantenimiento – Accesorios – Fugas – Caros	– Potencia limitada

Finalmente, las reductoras tienen la misión de adaptar el par y la velocidad del motor-actuador a los valores adecuados para el movimiento. Las características deseables de las reductoras son: alto rendimiento, holguras pequeñas, alta rigidez torsional, alta relación de reducción y poco volumen y peso. Los tipos de reductora más empleados son: reductoras epicicloidales, Harmonic Drive y reductoras Cyclo.

Tabla 2.2: Elementos de transmisión

Entrada-salida	Denominación	Ventajas	Inconvenientes
Circular-circular	– Engranajes	– Pares altos	– Holguras
	– Correas dentadas	– Distancias grandes	–
	– Cadenas	– Distancias grandes	– Ruido
	– Paralelogramo	–	– Giro limitado
	– Cables	–	– Deformabilidad
Circular-lineal	– Tornillo sin fin	–	– Rozamiento
	– Cremallera	– Holgura media	– Rozamiento
Lineal-circular	– Paralelogramo	–	– Control difícil
	– Cremallera	– Holgura media	– Rozamiento

2.3.5 Otros sensores para análisis de vibraciones

A continuación se mencionan otros sensores o sistemas de medición de vibraciones.

a) Acelerómetros.

Un acelerómetro es un sensor que mide la aceleración del cuerpo al que se adhiere. Existen diversas clases de acelerómetros (piezoeléctricos, capacitivos y de carga) pero los más utilizados son los piezoeléctricos. El funcionamiento de estos acelerómetros se basa en la propiedad que tiene un elemento piezoeléctrico de generar una carga eléctrica cuando una masa sísmica ejerce una fuerza sobre él (Pérez-García y col. (2004); pcb.com). La ecuación de comportamiento de un acelerómetro es

$$V = \nu h p_x \text{ con } p_x = A m_{\text{sismica}} \ddot{x}. \quad (2.18)$$

donde V (V) es el voltaje de salida del acelerómetro, ν (Vm/N) es la constante de sensibilidad, h (m) es el espesor del piezoeléctrico, p_x (N/m²) es la presión que causa la masa sísmica m_{sismica} , A (m²) es el área de contacto entre los dos cuerpos y \ddot{x} (m/s²) es la aceleración medida. Además, el acelerómetro va acompañado de un circuito electrónico que amplifica la señal de salida.

Las ventajas de este tipo de sensores son: su compacidad, elevada sensibilidad y economía. Por el contrario, en general no permiten medir con fiabilidad a bajas frecuencias y su peso no es despreciable cuando se adhieren a estructuras muy ligeras; y entonces, hay que considerarlos en el modelo. Además, debido a que la señal de salida es la aceleración, la posición no se puede determinar de forma fiable (aparecen errores de posición en régimen permanente). Por otro lado, con los acelerómetros capacitivos sí es posible medir vibraciones de muy baja frecuencia (cercanas al nivel de continua).

b) Cámaras de seguimiento.

Las cámaras de seguimiento son sistemas de rayos infrarrojos que son capaces de situar en el espacio unas balizas o marcas (elementos pasivos). Estas marcas se colocan sobre el punto del espacio (objeto material) sobre el que se pretende realizar el seguimiento. En la Figura 2.19 se muestra un montaje de tres cámaras de seguimiento (Qualisys Motion Capture Systems, modelo ProReflex MCU) que se utilizan para la validación experimental de un modelo dinámico no lineal de una varilla flexible (Payo y col., 2005).



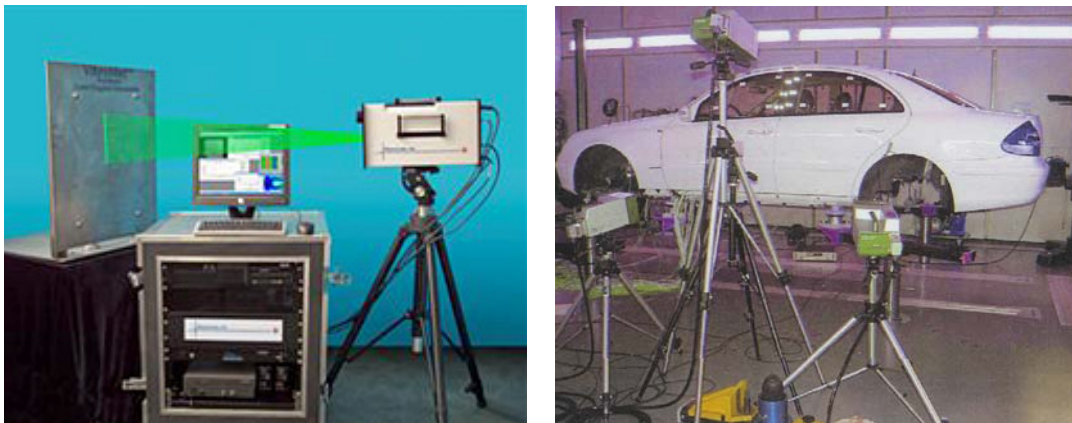
Figura 2.19: Montaje de tres cámaras de seguimiento para la determinación de la posición del extremo de una varilla flexible (Payo y col., 2005) (Laboratorio de Mecánica de los Medios Continuos, ETSII, UCLM)

c) Vibrómetros láser.

Los vibrómetros láser se basan en el efecto Doppler, de tal forma que miden la variación de la frecuencia de la luz reflejada en una estructura vibrante para determinar

su velocidad y desplazamiento instantáneos. Existen sistemas monopunto (por ejemplo, Polytec, modelo OFV-534), que miden la velocidad/desplazamiento en una dirección, y sistemas de barrido 2-D y 3-D (Polytec, modelo PSV-400-3D), que realizan múltiples medidas en dos o tres ejes del espacio en una malla de puntos previamente definida sobre el objeto de estudio. Así, se obtiene una identificación de la dinámica del objeto. En la Figura 2.20a) se muestra el montaje de una cámara de barrido para la identificación de una placa delgada y en la Figura 2.20b) el montaje de tres cámaras para la identificación de la carrocería de un vehículo.

El empleo de este tipo de sistemas evita el uso de un gran número de sensores y de equipos de adquisición con muchos canales. Una ventaja importante es que se trata de una medida sin contacto, por tanto, no afecta a la dinámica del objeto de estudio. Estos sistemas basados en láser de barrido se utilizan fundamentalmente para la identificación modal de sistemas mecánicos, pero también se pueden emplear para la detección de daños en estructuras (por ejemplo, Khan y col. (2000)).



a)

b)

Figura 2.20: Láser de barrido basado en el efecto Doppler. a) Ejemplo de sistema de barrido 2-D, caracterización de una placa delgada. b) Ejemplo de sistema de barrido 3-D, caracterización de la carrocería de un vehículo (alava-ing.es)

2.4 Consideraciones sobre cancelación de vibraciones

Esta tesis se centra fundamentalmente en estructuras aeroespaciales que son ligeras, debido sobre todo al coste de lanzamiento, y que presentan las siguientes propiedades (Balas, 1982):

1. Son sistemas de parámetros distribuidos, por tanto, en teoría, son infinito dimensionales; en la práctica, son sistemas de un orden muy elevado.
2. Presentan frecuencias de resonancia muy bajas y, a menudo, muy próximas, es decir, los modos de vibración se encuentran acoplados.
3. El amortiguamiento natural de los modos correspondientes a estas frecuencias bajas es muy pequeño y es, generalmente, insuficiente para reducirlas en un tiempo adecuado.
4. La predicción de su comportamiento en el espacio exterior a través de ensayos en la tierra no es siempre fácilmente extrapolable.
5. Los requisitos de forma, posicionamiento y cancelación de vibraciones son muy exigentes, por tanto, suele ser necesario incluir algún sistema de control activo.

Las frecuencias de vibración más bajas se amortiguan muy lentamente y su efecto conduce a una degradación drástica en el comportamiento de la estructura, y por ende, de los sistemas montados sobre ellas. Por tanto, la mayoría de los sistemas de control se centran en las vibraciones debidas a las frecuencias más bajas.

Sin embargo, el hecho de controlar los modos correspondientes a las primeras frecuencias de vibración hace que puedan aparecer inestabilidades debidas a los modos superiores no considerados. A este hecho se le denomina efecto de desbordamiento. Una forma de minimizar este efecto es situando los sensores y actuadores en emplazamientos donde la dinámica debida a los modos no controlados aparezca lo menos posible. Por lo tanto, idealmente se deberían situar en los nodos o puntos de medida cero de los modos superiores (Balas, 1982). Otra forma de minimizar el desbordamiento es mediante la inclusión de un filtro paso bajo. Así, a medida que disminuye el ancho de banda del filtro, disminuye el efecto de desbordamiento. Sin embargo, debido a que este filtro influye en la magnitud y en la fase de los modos controlados, se debe tener en cuenta

en el diseño del control. Generalmente, la inclusión de un filtro paso bajo se traduce en una respuesta más lenta del sistema de control. A veces se combinan las dos herramientas anteriores, lo cual evita en gran medida la influencia del filtro en los modos controlados (Kar y Seto, 2000). Otra alternativa a las dos herramientas anteriores es el empleo de sistemas de control que se basen en la ecuación en derivadas parciales que gobierna el comportamiento dinámico de la estructura. De esta forma no existen problemas de desbordamiento ya que se consideran todos los modos. Un ejemplo de lo anterior son los sistemas de control basados en pasividad, donde no existen problemas de desbordamiento; sin embargo, el seguimiento de trayectorias es muy difícil de conseguir.

Es necesario destacar la importancia que tiene el posicionamiento de sensores y actuadores no sólo para minimizar el efecto de desbordamiento, sino también para maximizar la medida y minimizar el esfuerzo de control. Al hilo de lo anterior, es interesante mencionar la importancia de trabajar con relaciones de fase mínima en el diseño de controles robustos. La propiedad de fase mínima se traduce en que la dinámica de los ceros de la función de transferencia entre el sensor y el actuador es estable, es decir, todos los ceros están en el semiplano negativo del plano complejo. Una forma de asegurar la existencia de esta propiedad es que el sensor y el actuador estén colocados en el mismo emplazamiento. Además, la propiedad de fase mínima es una condición necesaria para que el sistema sea pasivo. Por ejemplo, si se elige como entrada la fuerza (o el par) y como salida la velocidad lineal (o angular) en el mismo punto, el sistema, además de ser de fase mínima, es pasivo (Khalil, 1992).

2.5 Resumen

En este capítulo se ha realizado una revisión del desarrollo de estructuras instrumentadas, fundamentalmente dentro del ámbito aeroespacial. Se han aportado ejemplos, tanto de estructuras reales como de estructuras de laboratorio; motivándose la construcción de tres plataformas experimentales: un robot flexible, una placa delgada y una estructura articulada. Además, se han comentado las etapas básicas de la caracterización dinámica experimental y se han descrito los actuadores y sensores más empleados en estructuras flexibles instrumentadas. Finalmente, se han presentado

algunas consideraciones que se deben tener en cuenta en la implantación de un sistema de control para la cancelación de vibraciones.

Capítulo 3

Robot flexible de un grado de libertad

En este capítulo se aborda el modelado dinámico, la construcción y la caracterización dinámica de un robot flexible de un grado de libertad. Como ya se ha comentado, los robots flexibles son un ejemplo típico de estructuras instrumentadas que aparecen en aplicaciones aeroespaciales.

Este capítulo se divide en dos partes. La primera se dedica al estudio de los modelos existentes, mientras que en la segunda se presenta el desarrollo y diseño de la plataforma experimental. Dentro de la primera parte, se estudia el modelo continuo y modelos discretos; además, se presentan el modelado incluyendo piezoeléctricos como actuadores/sensores. Dentro de la segunda parte, además de la caracterización dinámica de la plataforma, se aportan dos métodos de actualización de modelos: el primero se basa en el ajuste de alguno de los parámetros físicos que definen las frecuencias de vibración –obtenidas a partir del modelo de parámetros distribuidos–; y el segundo es un método de actualización de la matriz de masa de modelos obtenidos a partir de una discretización espacial.

3.1 Modelado dinámico de robots flexibles de un grado de libertad

Los robots flexibles están formados por eslabones o sistemas mecánicos que presentan una naturaleza distribuida, es decir, su comportamiento dinámico viene dado por una ecuación en derivadas parciales (EDP). Más concretamente, su dinámica está descrita por infinitos modos de vibración. Sin embargo, la amplitud de estos modos disminuye de forma drástica a medida que aumenta su frecuencia. Esto permite aproximar la dinámica total por modelos de orden reducido que sólo recogen los primeros modos –los de frecuencias más bajas– que además, habitualmente, son los más significativos. Existen dos formas de obtener modelos reducidos:

- A partir de modelos continuos (o de parámetros distribuidos): modelos de dimensión infinita donde se trunca en un cierto modo de vibración.
- A partir de modelos discretos (o de parámetros concentrados): discretización espacial que conduce a un modelo de estado de dimensión finita. Estos modelos a su vez se pueden dividir en dos subgrupos:
 - Modelos de elementos finitos.
 - Modelos de masas puntuales.

Los modelos continuos se obtienen a partir de la resolución de la EDP que caracteriza el comportamiento dinámico del sistema. La resolución de una EDP se puede llevar a cabo mediante separación de variables y expansión modal. Esto es, la solución en desplazamientos de la ecuación se representa por una sumatoria infinita de productos que son el resultado de multiplicar una función espacial (función modal o función propia) por una función temporal (coordenadas generalizadas). Uno de los trabajos pioneros utilizando esta filosofía aplicada a robots flexibles fue el de Canon y Schmitz (1984).

Los modelos discretos se obtienen a partir de una división espacial del eslabón, que es el elemento que une la carga con el motor-actuador. En los modelos de elementos finitos, el eslabón se divide en partes o elementos que están unidos por nudos siendo las coordenadas generalizadas el desplazamiento y el giro en cada nudo. Las variables en el interior del elemento se aproximan a partir de las variables nodales (desplazamiento y

giro en cada nudo) mediante unas funciones de interpolación que dependen del tipo de elemento utilizado. Un ejemplo en cuanto a la aplicación del método de los elementos finitos a robots flexibles es el de Bayo (1987). En lo que se refiere al modelado empleando la hipótesis de masas puntuales, la masa se concentra en diversos puntos y se desprecia la inercia de rotación éstas. Así, considerando el movimiento del brazo en un plano, se tiene un grado de libertad menos que en el que en el caso de los elementos finitos por masa puntual o nudo. Un trabajo significativo referente a esta técnica de modelado es el de Feliu y col. (1992).

3.1.1 Modelos continuos

El brazo considerado (ver Figura 3.1) está compuesto por los siguientes elementos: un motor+reductora (actuador) en su base con una inercia total J_0 ; un eslabón flexible con una densidad lineal ρ_L , longitud L , rigidez a flexión EI ; y una carga de masa M_p e inercia J_p . La estructura global rota en un sistema de ejes fijos (X,Y). Las hipótesis de trabajo son: a) el robot sólo puede rotar en el plano horizontal, de forma que la gravedad se puede omitir; y b) se asume que la deflexión $w(x,t)$ es pequeña ($< 0.1L$), por tanto, sólo se consideran deflexiones transversales y se desprecian las debidas a las fuerzas centrífugas. Por otro lado, se toma una formulación pseudo-articulada, esto es, el eje-x del sistema móvil pasa por el centro de masas de la estructura global. Esta formulación es equivalente a la pseudo-empotrada, donde el eje-x es tangente al eslabón en la base (Bellezza y col., 1990).

Teniendo en cuenta las hipótesis anteriormente expuestas y el principio de Hamilton en su versión extendida (Meirovitch, 1997), se obtiene la EDP de 4º orden que gobierna el comportamiento dinámico de una viga Euler-Bernoulli

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho_L \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t), \quad (3.1)$$

donde $w(x,t)$ es la deflexión en cada punto y $f(x,t)$ es la carga distribuida externa.

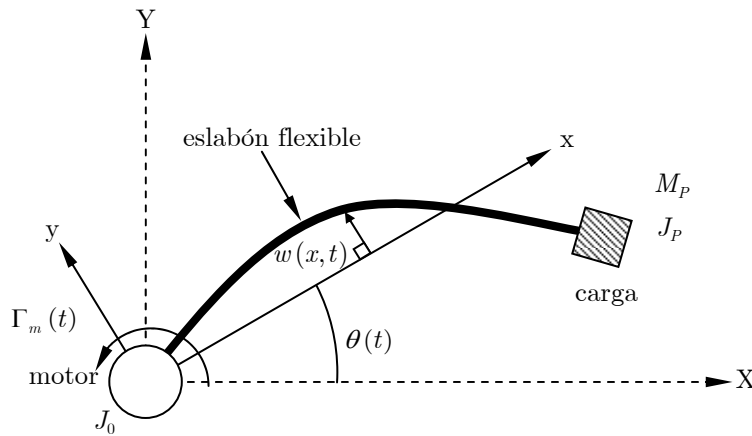
Se define $p(x,t) := x\theta(t) + w(x,t)$ como la posición de cada punto del eslabón flexible. Si se particulariza (3.1) para un brazo flexible sometido a un par motor $\Gamma_m(t)$ en la base, se obtiene el siguiente problema de contorno, donde (') indica derivada respecto a x y (·) indica derivada respecto a t ,

$$EIw^{IV}(x,t) + \rho_L \ddot{w}(x,t) = 0, \quad (3.2)$$

$$\Gamma_m(t) = J_0 \ddot{\theta}(0,t) + \rho \int_0^L x \ddot{w}(x,t) dx + M_P L \ddot{\theta}(L,t) + J_P \ddot{\theta}'(L,t), \quad (3.3)$$

y las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ EIw''(0,t) &= J_0 \ddot{\theta}'(0,t) - \Gamma_m \\ EIw''(L,t) &= -J_P \ddot{\theta}'(L,t) \\ EIw'''(L,t) &= M_P \ddot{\theta}(L,t) \end{aligned} \quad (3.4)$$



(X, Y) :	sistema inercial (sistema fijo)
(x, y) :	sistema no inercial (sistema móvil)
$w(x, t)$:	deflexión del brazo (m)
$\theta(t)$:	giro del sistema (x, y) respecto del sistema (X, Y)
J_0 :	inercia del motor-reductora (kgm^2)
ρ_L :	densidad lineal (kg/m)
EI :	rigidez a flexión (Nm^2)
L :	longitud del brazo (m)
M_P :	masa en el extremo (kg)
J_P :	inercia de la masa en el extremo (kgm^2)
$\Gamma_m(t)$:	par motor aplicado (Nm)

Figura 3.1: Brazo de robot flexible de un grado de libertad

A continuación se realiza un análisis modal del sistema definido por (3.2)-(3.4). Se anulan las fuerzas externas ($\Gamma_m = 0$), se aplica separación de variables y expansión modal al sistema. Así, la deflexión $w(x, t)$ se puede expresar como sigue

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t), \quad (3.5)$$

donde $\phi_i(x)$ son las funciones modales y $q_i(t)$ son las coordenadas generalizadas. De esta forma, la EDP (3.2) se transforma en dos ecuaciones diferenciales, una dependiente del tiempo y otra del espacio. La ecuación dependiente del tiempo es

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0, \quad (3.6)$$

siendo ω la frecuencia de vibración, con las siguientes condiciones iniciales

$$q(0) = 0; \dot{q}(0) = 0. \quad (3.7)$$

La ecuación dependiente del espacio es

$$\phi^{IV}(x) - \beta^4 \phi(x) = 0, \quad (3.8)$$

con $\beta^4 = \rho_L \omega^2 / EI$, y las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ EI\phi''(0) &= -\omega^2 J_0 \phi'(0) \\ EI\phi''(L) &= \omega^2 J_p \phi'(L) \\ EI\phi'''(L) &= -\omega^2 M_p \phi(L) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Procediendo de la misma forma que en Bellezza y col. (1990), es decir, sustituyendo la forma de la solución de la ecuación dependiente del espacio (3.8) en las condiciones de contorno (3.9) se obtiene la ecuación característica del sistema. De la resolución de ésta, se obtienen las infinitas frecuencias naturales del sistema ω_i . Utilizando tres de las condiciones de contorno y una de las siguientes condiciones de ortogonalidad,

$$\begin{aligned} EI \int_0^L \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx &= \omega_i^2 \delta_{ij} \\ \rho_L \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx + J_0 \phi_i'(0) \phi_j'(0) + M_p \phi_i(L) \phi_j(L) + J_p \phi_i'(L) \phi_j'(L) &= \delta_{ij} \end{aligned}, \quad (3.10)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, se obtienen las funciones modales $\phi_i(x)$. De esta forma, conociendo las frecuencias y las formas modales se puede obtener la solución del problema de contorno mediante la ecuación (3.5).

En este punto, se considera la formulación lagrangiana (Meirovitch, 1997). La energía cinética y potencial vienen dadas por

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2} J_0 (\dot{p}'(0,t))^2 + \frac{1}{2} \rho_L \int_0^L (\dot{p}(x,t))^2 dx + \frac{1}{2} M_p (\dot{p}(L,t))^2 + \frac{1}{2} J_p (\dot{p}'(L,t))^2 \\ V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (w''(x,t))^2 dx \end{aligned}, \quad (3.11)$$

y la energía no conservativa por

$$W(t) = \Gamma_m(t) p'(0, t). \quad (3.12)$$

Por otro lado, se puede incluir una función de disipación de Rayleigh para tener en cuenta amortiguamientos de tipo viscoso. La energía disipada se puede expresar como

$$R(t) = \frac{1}{2} \int_0^L c(x) (\dot{p}(x, t))^2 dx + \frac{1}{2} c_0 (\dot{p}(0, t))^2 + \frac{1}{2} \int_0^L c_\varepsilon(x) (\dot{w}''(x, t))^2 dx + \frac{1}{2} c_1 (\dot{p}(L, t))^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{p}'(L, t))^2. \quad (3.13)$$

El primer término es la energía disipada por la fuerza de amortiguamiento que opone el sistema al desplazamiento, donde $c(x)$ es el coeficiente de resistencia a la velocidad. El segundo término se debe a la energía disipada en la unión donde, c_0 es el coeficiente de resistencia a la velocidad angular en la articulación. El tercer término es el debido al momento resistente (amortiguamiento estructural) que se opone a su deformación (Modelo de Kelvin-Voigt), donde c_ε es el coeficiente de resistencia a la velocidad de deformación. Finalmente, los dos últimos términos corresponden a la fricción de la carga con el medio y el rozamiento en su giro; c_1 y c_2 son los coeficientes de resistencia a esos dos movimientos. En la expresión (3.13) se aceptan las siguientes hipótesis: 1) $c(x)$ es constante y proporcional a la densidad lineal del eslabón ρ_L ; 2) c_0 es proporcional a la inercia del motor+reductora J_0 ; 3) c_ε es proporcional a la rigidez EI ; 4) c_1 es proporcional a la masa de la carga M_p ; y 5) c_2 es proporcional a la inercia de la carga J_p . Las hipótesis anteriores son las correspondientes al denominado amortiguamiento proporcional (Meirovitch, 1997).

Teniendo en cuenta (3.5), (3.10) y las hipótesis anteriores, las energías dadas por (3.11), (3.12) y (3.13) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \dot{q}_i^2(t), \quad V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i^2 q_i^2(t) \\ W(t) &= \Gamma_m \left(\sum_{i=0}^{\infty} q_i(t) \phi_i'(0) \right), \\ R(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i^2(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde ξ_i es el coeficiente de amortiguamiento del modo correspondiente y $q_0(t) = \theta(t)$, $\omega_0 = 0$, $\phi_0(x) = x$ y $\xi_0 = 0$ es el movimiento como sólido rígido. Aplicando la ecuación de Lagrange a (3.14), se obtienen infinitas ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \Gamma_m(t) \phi_i'(0), \quad i = 0, \dots, \infty. \quad (3.15)$$

Para el diseño de reguladores, simulación dinámica, análisis, truncamiento, etc. es más conveniente expresar (3.15) en forma de variables de estado

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{u}(t)\end{aligned}\quad (3.16)$$

donde \underline{x} es el vector de estado, \underline{A} es la matriz del sistema, \underline{B} es la matriz de entrada, \underline{u} es el vector de entradas, \underline{y} es el vector de salidas, \underline{C} es la matriz de salida y \underline{D} es la matriz de transferencia directa de la entrada. Como variables de estado se toman las coordenadas generalizadas q_i y sus derivadas \dot{q}_i , la entrada al sistema es el par motor $u(t) = \Gamma_m(t)$ y las dimensiones de las matrices dependen del número de modos de vibración que se tienen en cuenta. Si se toman los n primeros modos, las matrices quedan como sigue

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}; \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & \vdots & 0 & 0 & -2\xi_1\omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}; \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \phi'_1(0) \\ \vdots \\ \phi'_n(0) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

donde $\underline{x} \in \mathbb{R}^{(2n+2) \times 1}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{(2n+2) \times (2n+2)}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{(2n+2) \times 1}$, $\underline{C} \in \mathbb{R}^{1 \times (2n+2)}$ y $\underline{D} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ (suponiendo una única salida).

Por otro lado, las matrices \underline{C} y \underline{D} dependen de las salidas que se pretendan estudiar. En esta tesis, las salidas que se manejan son: la posición del motor dada por el ángulo en la base del eslabón (denotado por θ_m), la posición del extremo dada por su ángulo (denotada por θ_i) y el par de acoplamiento debido al eslabón y a la carga (denotado por Γ_{coup}).

El ángulo del motor, haciendo uso de (3.5), se define como

$$\theta_m(t) = p'(0, t) = \theta(t) + w'(0, t) = q_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi'_i(0) q_i(t), \quad (3.18)$$

por tanto,

$$\underline{C} = [1 \quad \phi'_1(0) \quad \cdots \quad \phi'_n(0) \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]; \underline{D} = 0. \quad (3.19)$$

El ángulo del extremo se define como

$$\theta_t(t) = p'(L, t) = \theta(t) + w'(L, t) = q_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi'_i(L) q_i(t), \quad (3.20)$$

por tanto,

$$\underline{C} = [1 \quad \phi'_1(L) \quad \cdots \quad \phi'_n(L) \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]; \quad \underline{D} = 0. \quad (3.21)$$

Y el par de acoplamiento viene dado por

$$\Gamma_{coup} = -EIw''(0, t) = -EI \sum_{i=1}^{\infty} \phi''(0) q_i(t), \quad (3.22)$$

entonces

$$\underline{C} = -EI [0 \quad \phi''_1(L) \quad \cdots \quad \phi''_n(L) \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]; \quad \underline{D} = 0. \quad (3.23)$$

Además del sistema en variables de estado, se pueden obtener las funciones de transferencia. Si se aplica la transformada de Laplace a (3.15), se obtiene la función de transferencia entre las coordenadas generalizadas y el par motor

$$q_i(s) = \frac{\phi'_i(0)}{(s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2)} \Gamma_m(s), \quad i = 0, \dots, \infty. \quad (3.24)$$

A partir de (3.24), y utilizando (3.18), (3.20) y (3.22) se obtienen las funciones de transferencia de las salidas que se manejan

$$\frac{\theta_m(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{1}{s^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi'_i(0)^2}{s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\theta_t(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{1}{s^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi'_i(L)\phi'_i(0)}{s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2}, \quad (3.26)$$

y

$$\frac{\Gamma_{coup}(s)}{\Gamma_m(s)} = -EI \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi''_i(0)\phi'_i(0)}{s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2}. \quad (3.27)$$

Como se puede observar las funciones de transferencia (3.25), (3.26) y (3.27) son de orden infinito. Por tanto, para la obtención de modelos reducidos es necesario truncar en un cierto modo de vibración.

3.1.2 Modelos discretos

Como se ha comentado anteriormente, los modelos discretos se obtienen a partir de una división espacial del eslabón. A continuación, se describen el modelado mediante elementos finitos y masas puntuales.

3.1.2.1 Modelado mediante elementos finitos

Se considera el sistema de la Figura 3.1, cuya dinámica viene descrita por la EDP (3.1). Dicha ecuación representa el comportamiento dinámico de una viga Euler-Bernoulli y recibe el nombre de formulación fuerte (Bathe, 1982).

Si se multiplica por una función de ponderación $\varphi(x)$ a todos los términos de (3.1) y se integra por partes, se obtiene lo que se conoce como formulación débil, donde se relaja la exigencia de continuidad en $w(x,t)$

$$\int_0^L \varphi''(x) EI w''(x,t) dx + \int_0^L \varphi(x) \rho_L \ddot{w}(x,t) dx = \int_0^L \varphi(x) f(x,t) dx, \quad (3.28)$$

donde $\varphi(x)$ ha de pertenecer a las funciones de orden dos. A continuación, se discretiza el eslabón en un cierto número de elementos conectados por nudos. Las coordenadas generalizadas del sistema son los desplazamientos y los giros en cada nudo del elemento como se muestra en la Figura 3.2.

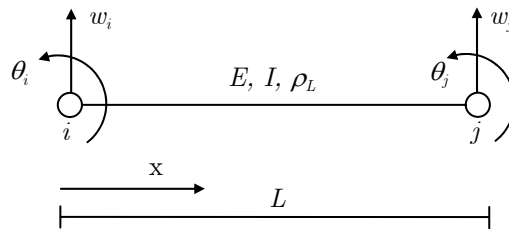


Figura 3.2: Grados de libertad. Coordenadas generalizadas

La deflexión en cada elemento $\tilde{w}(x,t)$ se aproxima mediante las variables nodales. Al existir cuatro variables nodales, la deflexión en el elemento viene definida por un polinomio de tercer grado

$$\tilde{w}(x,t) \approx a_1(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_3(t)x + a_4(t). \quad (3.29)$$

Si se aplican las condiciones de contorno siguientes

$$\tilde{w}(0,t) = w_i(t); \quad \frac{\partial \tilde{w}(0,t)}{\partial x} = \theta_i(t); \quad \tilde{w}(L,t) = w_j(t); \quad \frac{\partial \tilde{w}(L,t)}{\partial x} = \theta_j(t), \quad (3.30)$$

y se combinan con (3.29), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, t) = & \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] w_i(t) + \left[x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \right] \theta_i(t) \\ & + \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] w_j(t) + \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L} - 1\right) \right] \theta_j(t) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

De tal forma que la deflexión en el elemento queda expresada como

$$\tilde{w}(x, t) = \varphi_1(x) w_i(t) + \varphi_2(x) \theta_i(t) + \varphi_3(x) w_j(t) + \varphi_4(x) \theta_j(t), \quad (3.32)$$

y de forma compacta

$$\tilde{w}(x, t) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k(x) w_k^{nudos}(t), \text{ con } w_k^{nudos} = \begin{bmatrix} w_i & \theta_i & w_j & \theta_j \end{bmatrix}^T, \quad (3.33)$$

donde $\varphi_k(x)$ son las funciones de aproximación conocidas normalmente como funciones de forma y se corresponden con los denominados polinomios cúbicos de Hermite. Si estas funciones de forma $\varphi_k(x)$ coinciden con las funciones de aproximación (3.28) utilizadas para obtener la formulación débil, esta aproximación se conoce como Aproximación de Galerkin (Bathe, 1982).

Las aceleraciones y las curvaturas en cada elemento se pueden aproximar como sigue

$$\ddot{\tilde{w}}(x, t) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k(x) \ddot{w}_k^{nudos}(t) \quad (3.34)$$

$$\tilde{w}''(x, t) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k''(x) w_k^{nudos}(t). \quad (3.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.33)-(3.35) en (3.28) se obtiene la formulación matricial del problema

$$M_{jk} \ddot{w}_k^{nudos}(t) + K_{jk} w_k^{nudos}(t) = F_j(t), \text{ con } j = 1, \dots, 2m+2, k = 1, \dots, 2m+2, \quad (3.36)$$

siendo m el número de elementos, $M_{jk} \in \mathbb{R}^{(2m+2) \times (2m+2)}$ la matriz de masa, $K_{jk} \in \mathbb{R}^{(2m+2) \times (2m+2)}$ la matriz de rigidez y $F_j \in \mathbb{R}^{(2m+2) \times 1}$ el vector de fuerzas generalizadas. Los términos anteriores se calculan como

$$M_{jk} = \int_0^L \varphi_j(x) \rho_L \varphi_k(x) dx, \quad (3.37)$$

$$K_{jk} = \int_0^L \varphi_j''(x) EI \varphi_k''(x) dx, \quad (3.38)$$

$$F_j(t) = \int_0^L \varphi_j(x) f(x, t) dx. \quad (3.39)$$

Si a la formulación anterior se le añade la ecuación (3.3), particularizada para un sistema discreto, que corresponde al equilibrio de momentos en el motor, se llega a un grupo de ecuaciones diferenciales, en términos de los desplazamientos y aceleraciones nodales. Este grupo de ecuaciones modela el comportamiento dinámico de un brazo flexible y se expresan de forma matricial quedan como sigue

$$\begin{pmatrix} M_{hh} & M_{hk} & 0 \\ M_{kh} & M_{kk} & M_{kt} \\ 0 & M_{tk} & M_{tt} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_h \\ \ddot{w}_k^{nudos} \\ \ddot{w}_t \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} K_{hh} & K_{hk} & 0 \\ K_{kh} & K_{kk} & K_{kt} \\ 0 & K_{tk} & K_{tt} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w_h \\ w_k^{nudos} \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_m(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

donde w_h es el grado de libertad de giro del motor ($w_h = \theta_m$), \ddot{w}_k^{nudos} se refiere a los grados de libertad internos del eslabón y w_t a los grados de libertad del extremo. Al sistema de ecuaciones (3.40) se le puede añadir el amortiguamiento viscoso que típicamente se expresa como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez. De esta forma, la matriz de amortiguamiento se expresa como sigue

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}, \quad (3.41)$$

donde α y β son constantes. A este tipo de amortiguamiento se le conoce como amortiguamiento proporcional (Rao, 1990). Si se incluye dicho amortiguamiento, el sistema de ecuaciones (3.40) se transforma en

$$\underline{M} \begin{bmatrix} \ddot{w}_h \\ \ddot{w}_k^{nudos} \\ \ddot{w}_t \end{bmatrix} + \underline{C} \begin{bmatrix} \dot{w}_h \\ \dot{w}_k^{nudos} \\ \dot{w}_t \end{bmatrix} + \underline{K} \begin{bmatrix} w_h \\ w_k^{nudos} \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_m(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Generalmente, la respuesta del sistema contiene únicamente algunos modos de vibración. Así, se suele llevar a cabo un análisis modal y transformar el sistema a las coordenadas modales llegando a un sistema desacoplado. Dicho sistema será equivalente al sistema en variables de estado definido por (3.16) y (3.17). Al igual que en el caso continuo se pueden calcular las salidas necesarias. En el sistema en variables de estado obtenido a partir del modelo continuo tanto las frecuencias como los modos no dependen del truncamiento, es decir, del orden del sistema. Sin embargo, las frecuencias y los modos derivados de una discretización espacial dependen del orden del sistema, es decir, de la discretización considerada.

3.1.2.2 Modelado mediante masas puntuales

Se considera el sistema de la Figura 3.1. La técnica de modelado mediante masas puntuales se basa en concentrar la masa del eslabón en un número finito de puntos (masas puntuales). Estas masas están unidas por eslabones de masa despreciable y sólo se considera su translación. En consecuencia, la rotación de las masas no produce momentos en el eslabón (es decir, se desprecia la inercia de rotación) y, por tanto, el número de modos de vibración del modelo coincide con el número de masas (Figura 3.3). Por otro lado, los modelos que resultan de esta técnica son equivalentes a los obtenidos mediante elementos finitos si se utiliza una matriz de masa concentrada. La diferencia entre ambas técnicas radica en las coordenadas empleadas.

En la Figura 3.3 se considera que: el valor de las masas es m_i , con $1 \leq i \leq n$; la distancia ente dos masas consecutivas $i-1$ e i es l_i siendo l_1 la distancia entre el eje del motor y la primera masa; y que la distancia entre la masa m_i y el eje del motor es L_i . Al igual que en el caso continuo, se acepta que las deflexiones son pequeñas de forma que las distancias entre las masas (medidas a lo largo de la longitud del brazo) son iguales a su proyección sobre el eje-x. Para aproximar el sistema distribuido se toman los siguientes valores de masas puntuales

$$m_i = \rho_L (l_i/2 + l_{i+1}/2), \text{ con } 1 \leq i < n, \quad m_n = \rho_L l_n/2, \quad (3.43)$$

donde ρ_L es la densidad lineal del eslabón.

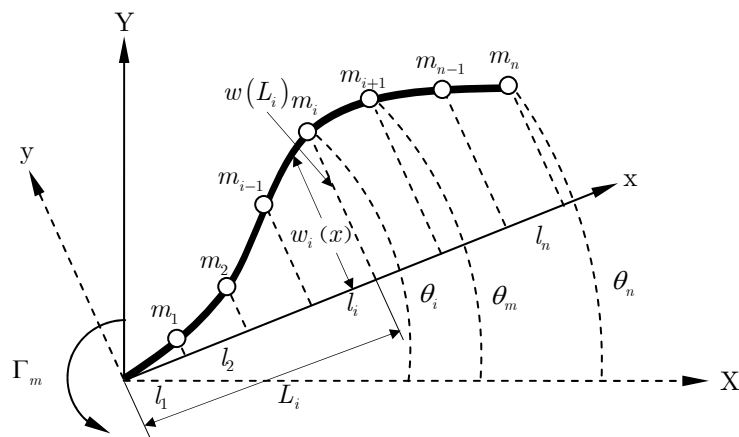


Figura 3.3: Brazo flexible discretizado con masas puntuales

A continuación, se describe brevemente el proceso seguido en la obtención del modelo dinámico empleando esta técnica (Feliu y col., 1992). La deflexión estática $w(x)$ viene dada por la ecuación de Euler-Bernoulli

$$EI \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} = 0. \quad (3.44)$$

A partir de (3.44), se obtiene que la deflexión en el intervalo $[i-1, i]$ es de la siguiente forma

$$w_i(x, t) = a_{i,0}(t) + (x - L_{i-1})a_{i,1}(t) + (x - L_{i-1})^2 a_{i,2}(t) + (x - L_{i-1})^3 a_{i,3}(t), \quad (3.45)$$

donde los $a_{i,j}(t)$ son coeficientes que hay que determinar.

Para obtener los coeficientes $a_{i,j}(t)$ es necesario imponer: a) continuidad entre intervalos consecutivos hasta la segunda derivada

$$w_i(l_i, t) = w_{i+1}(0, t); w'_i(l_i, t) = w'_{i+1}(0, t); w''_i(l_i, t) = w''_{i+1}(0, t), \quad (3.46)$$

o lo que es lo mismo, continuidad en el desplazamiento, en el giro y en la curvatura; y, b) continuidad entre el motor y el eslabón hasta la primera derivada

$$w_1(0, t) = w'_1(0, t) = 0, \quad (3.47)$$

es decir, se acepta que el eslabón está empotrado en el motor. Este grupo de ecuaciones se completa expresando las deflexiones de cada masa puntual en términos de los coeficientes. Posteriormente, se aplican las ecuaciones de equilibrio a las n masas, y tras algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene

$$\frac{d^2 p(L_i, t)}{dt^2} = \frac{6EI}{m_i} (a_{i,3}(t) - a_{i+1,3}(t)), \quad (3.48)$$

siendo $p(L_i, t)$ el desplazamiento total (sólido rígido + deflexión) que se calcula como $p(L_i, t) := L_i \theta_m(t) + w(L_i, t)$, con θ_m el ángulo del motor.

Por otro lado, los coeficientes $a_{i,3}$ se pueden expresar de la siguiente forma compacta

$$\begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ \vdots \\ a_{n,3} \end{bmatrix} = \underline{U} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

donde \underline{U} es una matriz constante que depende de la longitud del eslabón y de la localización de las masas puntuales. Finalmente, $p(L_i, t)$ se relaciona con la posición angular de cada masa a través de

$$\theta_i(t) = p(L_i, t)/L_i. \quad (3.50)$$

Considerando (3.50) y sustituyendo (3.49) en (3.48), se obtienen n ecuaciones lineales que expresadas de forma matricial son

$$\underline{M}\ddot{\underline{\theta}}(t) + \underline{K}\underline{\theta}(t) = \underline{B}\underline{\theta}_m(t), \quad (3.51)$$

donde $\underline{M} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$ es la matriz de masas concentradas, $\underline{\theta}$ es un vector columna que representa la posición angular de la masas concentradas, \underline{K} es una matriz constante de $n \times n$ (matriz de rigidez) y \underline{B} es un vector columna constante de $n \times 1$. Finalmente, al igual que en el apartado anterior, se puede incluir una matriz de amortiguamiento como la dada por la ecuación (3.41). Por otro lado, a partir del modelo dinámico (3.51) se puede obtener el sistema en variables de estado o las funciones de transferencia necesarias.

3.1.3 Modelado incluyendo piezoeléctricos como actuadores/sensores

Hasta el momento se ha considerado como actuador un motor situado en la base del brazo flexible. En este apartado se muestran las ecuaciones dinámicas que rigen el comportamiento del sistema cuando se incluyen parches (o cristales) piezoeléctricos a lo largo del eslabón. El desarrollo que a continuación se muestra es para sistemas continuos, pero igualmente se puede realizar para sistemas discretos (por ejemplo, Fuller y col. (1996)).

Las vibraciones de flexión, que son las interesantes en vigas, se pueden inducir mediante dos parches piezoeléctricos adheridos a la estructura y aplicando voltajes desfasados en ambos, tal y como se muestra en la Figura 3.4.

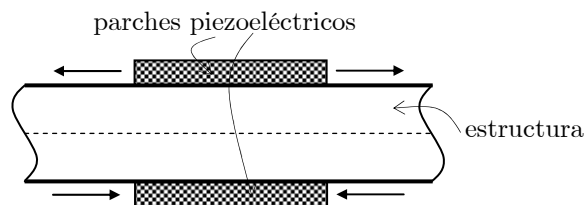


Figura 3.4: Parches piezoeléctricos para vibración a flexión

A continuación, se considera una viga instrumentada con piezoeléctricos como la de la Figura 3.5. En dicha figura se suponen J actuadores/sensores distribuidos a lo largo de la estructura. Se supone además que el actuador j y la estructura tienen como

dimensiones $L_{pj} \times W_{pj} \times h_{pj}$ y $L \times W \times h$, respectivamente (ver Figura 3.6). El voltaje aplicado a los actuadores es $V_a = [V_{a1}, \dots, V_{aJ}]^T$.

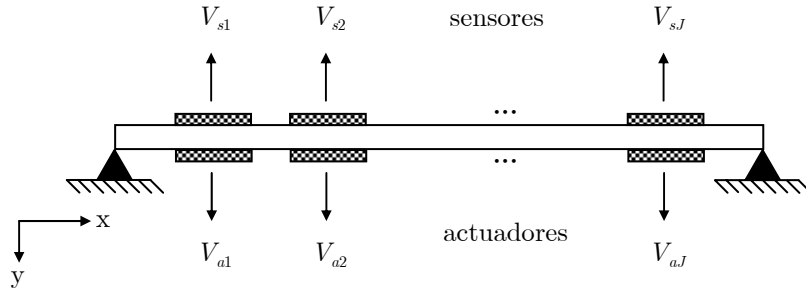


Figura 3.5: Viga instrumentada con sensores y actuadores piezoeléctricos

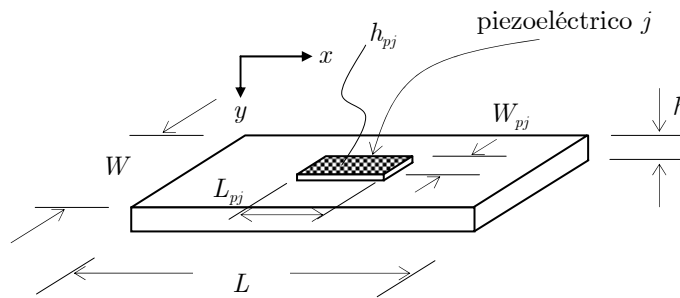


Figura 3.6: Piezoeléctrico j adherido a la viga

La EDP (3.1) considerando la contribución de un parche piezoeléctrico es de la siguiente forma

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho_L \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_{px}(x,t)}{\partial x^2}, \quad (3.52)$$

donde M_{px} es el momento flector aportado a la estructura por el piezoeléctrico-actuador. En (3.52) se desprecia el aporte de rigidez y masa del parche.

A continuación, se estudia el actuador j de la viga instrumentada de la Figura 3.5. La deformación longitudinal total en dicho actuador es el resultado de la deformación inducida por la flexión ε_x y la deformación libre ε_p (ver Figura 3.7 y ecuación 2.14). Esta deformación libre se genera por el voltaje aplicado y tiene la siguiente expresión

$$\varepsilon_p = \left(\frac{d_{31}}{h_p} \right) V_{aj}(t), \quad (3.53)$$

donde d_{31} es la constante de carga piezoeléctrica que relaciona la deformación mecánica con el voltaje aplicado V_{aj} . Nótese que el campo eléctrico aplicado por el piezoeléctrico

es $E_{aj} = V_{aj}/h_p$ y d_{31} es la componente de la matriz \underline{d} que indica la deformación en la dirección (1) cuando el piezoeléctrico se polariza en la dirección (3). Las tensiones se pueden obtener a partir de las deformaciones utilizando la ley de Hooke

$$\begin{aligned}\sigma_{px} &= E_p (\varepsilon_x - \varepsilon_p), \\ \sigma_x &= E \varepsilon_x\end{aligned}\quad (3.54)$$

siendo σ_{px} y σ_x las tensiones normales en el actuador y en la viga, respectivamente, y E_p y E el módulo de elasticidad del actuador y de la viga, respectivamente.

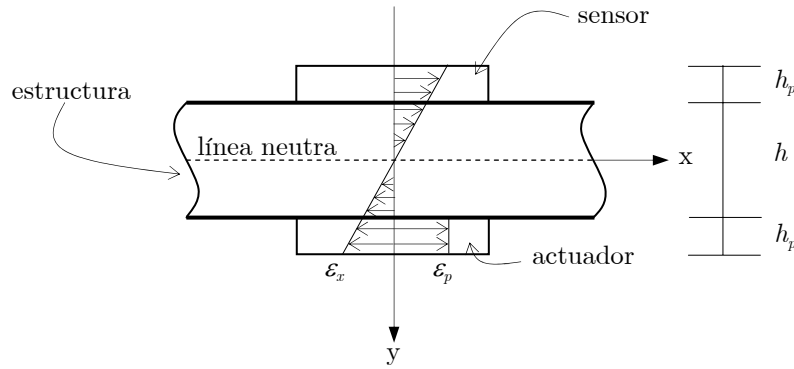


Figura 3.7: Distribución de deformaciones piezoeléctrico-estructura

La distribución de la deformación a lo largo del espesor de la viga se considera lineal para el caso de flexión pura, $\varepsilon_x = y\chi$ (siendo χ la curvatura), como se muestra en la Figura 3.7. La curvatura χ se obtiene a partir del equilibrio de momentos con respecto a la línea neutra de la viga

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \sigma_x dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} y \sigma_{px} dy = 0. \quad (3.55)$$

El equilibrio de momentos indica que el momento flector generado por el parche se transfiere directamente a la estructura. Utilizando (3.54) y (3.55), se obtiene el valor de la curvatura en función de la deformación ε_p inducida por el piezoeléctrico

$$\chi = \kappa \varepsilon_p, \quad (3.56)$$

donde

$$\kappa = \frac{12E_p h_p (h_p + h)}{2Eh^3 + E_p [(h + 2h_p)^3 - h^3]}. \quad (3.57)$$

Supuesto que los bordes del piezoeléctrico j son (x_{1j}, x_{2j}) a lo largo del eje- x y $H(\cdot)$ es la función escalón (o de Heaviside), el momento flector experimentado por la viga se puede expresar como

$$M_{pxj} = EI \chi_j \left[H(x - x_{1j}) - H(x - x_{2j}) \right] V_{aj}(t). \quad (3.58)$$

Teniendo en cuenta que $I = (1/12)W_p h^3$ y que la curvatura se puede expresar (considerando (3.56) y (3.53)) como

$$\chi = \kappa \frac{d_{31}}{h_p} V_{aj}(t), \quad (3.59)$$

entonces, el momento flector se reescribe como

$$M_{pxj} = K_j \left[H(x - x_{1j}) - H(x - x_{2j}) \right] V_{aj}(t), \quad (3.60)$$

con

$$K_j = \frac{\kappa_j E d_{31j} h^3 W_{pj}}{12 h_{pj}}. \quad (3.61)$$

Nótese que $H(x - x_{1j})$ es cero para $x < x_{1j}$ y uno para $x \geq x_{1j}$.

En este punto, se lleva a cabo un análisis modal similar al realizado en el apartado 3.1.1, ecuaciones (3.5)-(3.15) (Moheimani y Fleming, 2006). Así, se derivan infinitas ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{\rho_L} \sum_{j=1}^J K_j \Psi_{ij} V_{aj}(t), \quad (3.62)$$

con $\Psi_{ij} = d\phi_i(x_{2j})/dx - d\phi_i(x_{1j})/dx$, $i = 1, \dots, \infty$, $j = 1, \dots, J$ y $\phi_i(x)$ los modos de vibración. Si se aplica la transformada de Laplace a (3.62), la función de transferencia entre la deflexión de la viga $w(x, s)$ y voltaje aplicado $V_a(s) = [V_{a1}(s), \dots, V_{aJ}(s)]^T$ es

$$G(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x) P_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2}, \quad (3.63)$$

con

$$P_i = [K_1 \Psi_{i1} \dots K_J \Psi_{iJ}]. \quad (3.64)$$

A continuación, se considera el parche piezoeléctrico trabajando como sensor (ver Figura 3.7). Esto es, la deformación estructural se traduce en carga eléctrica debido al efecto piezoeléctrico. Considerando la ecuación (2.16) y que el campo eléctrico aplicado es cero, la carga eléctrica por unidad de longitud se puede expresar

$$q_p(t) = W_p d_{31} \sigma_x, \quad (3.65)$$

donde se ha tenido en cuenta que el desplazamiento eléctrico \underline{D} es carga por unidad de área. Si se considera la ley del material ($\underline{\varepsilon} = \underline{S}^E \underline{\sigma}$) y las siguientes relaciones entre parámetros piezoeléctricos

$$d_{31} = g_{31} \xi_{33} \sigma, \quad k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \xi_{33} \sigma}, \quad (3.66)$$

donde k_{31} es el factor de acoplamiento electromecánico, la carga por unidad de longitud se puede calcular como

$$q_p(t) = \frac{k_{31}^2}{g_{31}} W_p \varepsilon_x. \quad (3.67)$$

La deformación del sensor es

$$\varepsilon_x = -y_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.68)$$

siendo $y_p = -\frac{h + h_p}{2}$ la distancia normal desde el eje neutro al plano medio del sensor.

La carga eléctrica global se puede obtener integrando (3.67) a lo largo de la longitud del sensor. Si se considera el análisis modal, el voltaje inducido en el sensor V_{sj} es

$$V_{sj}(t) = \Omega_j \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_{ij} q_i(t), \quad (3.69)$$

donde

$$\Omega_j = \frac{W_{pj} k_{31j}^2}{C_j g_{31j}} \left(\frac{h + h_{pj}}{2} \right), \quad (3.70)$$

siendo C_j la capacitancia del sensor. Así, la función de transferencia entre el voltaje aplicado $V_a(s)$ y el voltaje del sensor $V_s(s) = [V_{s1}(s), \dots, V_{sj}(s)]^T$ es

$$G(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Upsilon_i P_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2}, \quad (3.71)$$

con $\Upsilon_i = [\Omega_1 \Psi_{i1} \dots \Omega_j \Psi_{ij}]^T$.

Estas funciones de transferencia se pueden obtener igualmente utilizando el método de los elementos finitos y se llega a un resultado muy similar al anterior pero donde los modos y las frecuencias provienen de una discretización espacial, y por tanto, su valor depende de ésta (Halim, 2002).

3.2 Definición de la plataforma experimental

Antes de definir el desarrollo experimental, se describen brevemente los elementos que forman parte de un robot de un grado de libertad (ver Figura 3.1). Tal sistema, se puede dividir en:

- a) Estructura mecánica. Es la estructura que une el motor-actuador con el elemento terminal, que puede ser una muñeca o pinza.
- b) Sistema motriz o actuador. Es el sistema que actúa sobre la estructura mecánica modificando su configuración y, por tanto, la situación del elemento terminal.
- c) Sistema sensorial o sensores. El sistema sensorial es necesario para conocer el estado del robot y, en el caso de la cancelación de vibraciones, para cerrar bucles de control.
- d) Sistema de control. El sistema de control gobierna los actuadores del robot a partir de la definición de los movimientos que se pretenden ejecutar, y en el caso de un robot flexible, también da las órdenes necesarias para eliminar las vibraciones residuales indeseables.

3.2.1 Diseño de la plataforma

En este apartado se describen los elementos más importantes en el desarrollo y diseño de la plataforma experimental robot flexible de un grado de libertad que se muestra en la Figura 3.8. Dicha plataforma está compuesta de un motor conectado a una reductora que adapta el par y la velocidad de la salida del actuador a los valores adecuados para el movimiento del eslabón del robot. Este eslabón, que se encuentra conectado a la salida de la reductora, es flexible (ligero) y está instrumentado con un puente de galgas extensométricas, situado en su base. Este sensor mide el par que se acopla en el actuador debido al propio eslabón y a una posible carga situada en el extremo. Dicho par, que se ha definido como par de acoplamiento (ver ecuación (3.22)), es una magnitud que se utiliza en los esquemas de control desarrollados dentro de esta tesis.

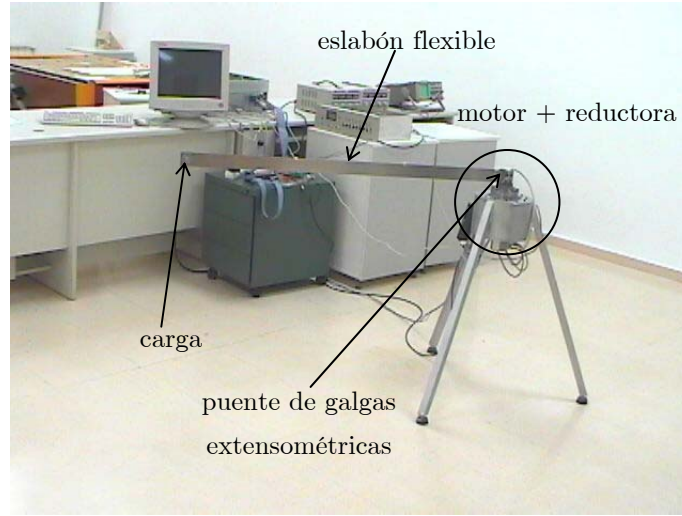


Figura 3.8: Plataforma experimental robot flexible de un grado de libertad

El eslabón elegido debe presentar unas frecuencias naturales muy bajas y poco amortiguadas, que es una característica de los manipuladores flexibles que, por ejemplo, se utilizan en aplicaciones aeroespaciales. A continuación se considera el sistema brazo flexible de la Figura 3.1, pero donde ahora la entrada es el ángulo del motor $\theta_m(t)$ en lugar del par motor $\Gamma_m(t)$. Con la consideración anterior, se analiza la dinámica del eslabón y la carga con independencia del motor-actuador. Este hecho se debe a que en los esquemas de control utilizados en los Capítulos 6 y 7 se desacopla la dinámica del brazo en la ley de control del motor. De este modo, el motor y el brazo se comportan como dos sistemas en cascada, donde la entrada al brazo es la salida del motor (ángulo del motor). Si se acepta que la masa del extremo tiene inercia despreciable ($J_p \approx 0$), se tiene el siguiente problema de contorno

$$EIw^{IV}(x,t) + \rho_L(x\ddot{\theta}_m(t) + \ddot{w}(x,t)) = 0, \quad (3.72)$$

con

$$\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ w'(0,t) &= 0 \\ w''(L,t) &= 0 \\ EIw'''(L,t) &= M_p(L\ddot{\theta}_m(t) + \ddot{w}(L,t)) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Procediendo de igual forma que en el Apartado 3.1, se aplica separación de variables al problema de contorno dado por (3.72) y (3.73) (ver ecuación (3.5)) y se sustituye la forma de la solución de la parte espacial,

$$\phi(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) + C \sinh(\beta x) + D \cosh(\beta x), \quad (3.74)$$

donde A , B , C y D son constantes, en las condiciones de contorno (3.73), obteniéndose lo siguiente

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -s_L & -c_L & \text{sh}_L & -\text{ch}_L \\ \frac{\beta M_p}{\rho_L} s_L - c_L & \frac{\beta M_p}{\rho_L} c_L + s_L & \frac{\beta M_p}{\rho_L} \text{sh}_L - \text{ch}_L & \frac{\beta M_p}{\rho_L} \text{ch}_L + \text{sh}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0, \quad (3.75)$$

donde $c_L = \cos \beta L$, $s_L = \sin \beta L$, $\text{ch}_L = \cosh \beta L$ y $\text{sh}_L = \sinh \beta L$. El determinante de la matriz de (3.75) es la ecuación característica. De su resolución se obtienen las infinitas frecuencias naturales del sistema. Si se consideran los siguientes parámetros adimensionales

$$\lambda^4 = \rho_L L^4 \omega^2 / EI; \hat{M}_p = M_p / \rho_L L, \hat{x} = x / L, \quad (3.76)$$

donde $\lambda = \beta L$, \hat{M}_p es la carga adimensional y \hat{x} es la coordenada espacial adimensional, la ecuación característica queda como sigue

$$1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda) - \hat{M}_p \lambda [\sin(\lambda) \cosh(\lambda) - \cos(\lambda) \sinh(\lambda)] = 0 \quad (3.77)$$

Si se resuelve la ecuación (3.77) para el caso de $\hat{M}_p = 0$, que corresponde a las frecuencias más elevadas, ya que éstas disminuyen al aumentar la carga, se obtiene

$$\lambda_1 = 1.87510407, \lambda_2 = 4.69409113, \lambda_3 = 7.85475744, \dots \quad (3.78)$$

Una vez que se tienen las frecuencias, el siguiente paso es obtener los modos de vibración. Para obtener dichos modos, se consideran tres de las condiciones de contorno (3.73) y una de las condiciones de ortogonalidad (3.10). Procediendo como se indica, el modo i adimensional se puede representar de la siguiente forma

$$\hat{\phi}_i(\hat{x}) = \cosh(\lambda_i \hat{x}) - \cos(\lambda_i \hat{x}) - \sigma_i (\sinh(\lambda_i \hat{x}) - \sin(\lambda_i \hat{x})), \quad (3.79)$$

y su segunda derivada, que es la curvatura (la cual es proporcional a la deformación)

$$\hat{\phi}_i''(\hat{x}) = \hat{\chi}_i = \lambda_i^2 [\cosh(\lambda_i \hat{x}) + \cos(\lambda_i \hat{x}) - \sigma_i (\sinh(\lambda_i \hat{x}) + \sin(\lambda_i \hat{x}))], \quad (3.80)$$

donde σ_i toma los siguientes valores

$$\sigma_1 = 0.734095514, \sigma_2 = 1.018467319, \sigma_3 = 1.000033553, \dots \quad (3.81)$$

En las Figura 3.9 y 3.10 se muestran los tres primeros modos en desplazamiento y en deformación, respectivamente. La amplitud de dichos modos se ha normalizado a uno.

Se observa que los desplazamientos son máximos en el extremo para los tres primeros modos, mientras que las deformaciones son máximas en el empotramiento.

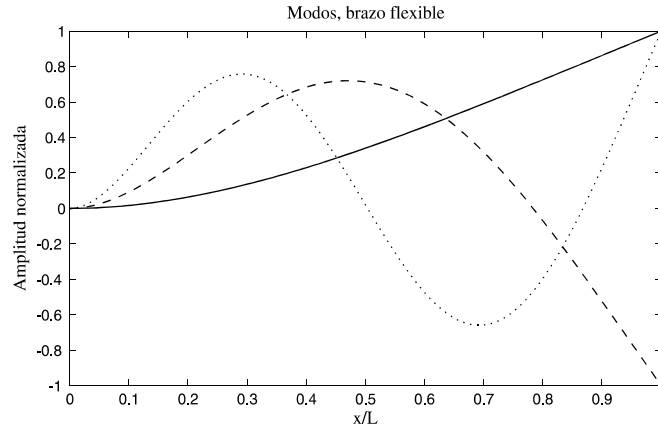


Figura 3.9: Modos en desplazamiento $\hat{\phi}(\hat{x})$. Primer modo (—); Segundo modo (···); Tercer modo (—·—)

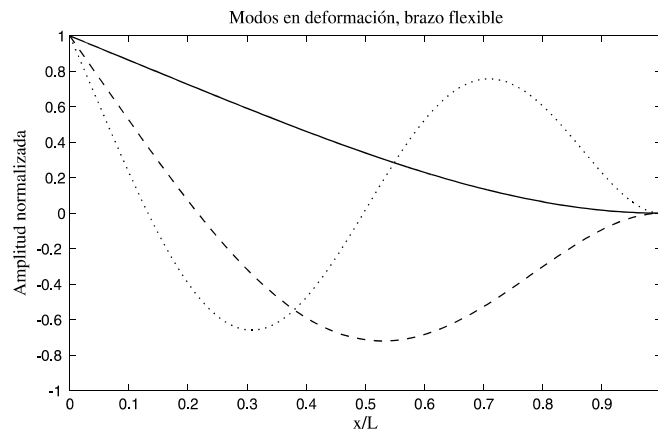


Figura 3.10: Modos en deformación $\hat{\phi}''(\hat{x})$. Primer modo (—); Segundo modo (···); Tercer modo (—·—)

Teniendo en consideración los valores de las frecuencias adimensionales (3.78), se han elegido las dimensiones del eslabón. Para ello, se ha tomado como condición de diseño que la primera frecuencia de vibración para el brazo sin carga sea de aproximadamente 1Hz. Como material se utiliza aluminio, ya que presenta una baja densidad, y la sección transversal es rectangular, tal que la inercia respecto a un eje es mucho mayor que respecto al otro (eje débil). Así, se ha elegido un brazo con una longitud 1.26m y una sección de 0.05×0.002m. El movimiento del brazo se realiza en el plano definido por su eje débil y la coordenada longitudinal del eslabón.

Una vez que se tiene el eslabón y se define la carga máxima, se diseña el actuador. Se considera que la carga máxima que se transporta es dos veces la masa del eslabón, esto es, $M_p = 2\rho_l L$. El proceso es el siguiente:

a) Se toma una serie de trayectorias de referencia, obteniéndose la máxima potencia demandada, el máximo par necesario y la máxima velocidad alcanzada. En la Figura 3.11a) se muestra una de las maniobras: una rotación de 180° en 0.63s.

b) A partir de cada una de las trayectorias, se obtiene la velocidad angular (Figura 3.11b) y el par motor (Figura 3.11c), con los cuales se obtiene la potencia mecánica. La potencia mecánica máxima obtenida es de $P_m \approx 320\text{W}$.

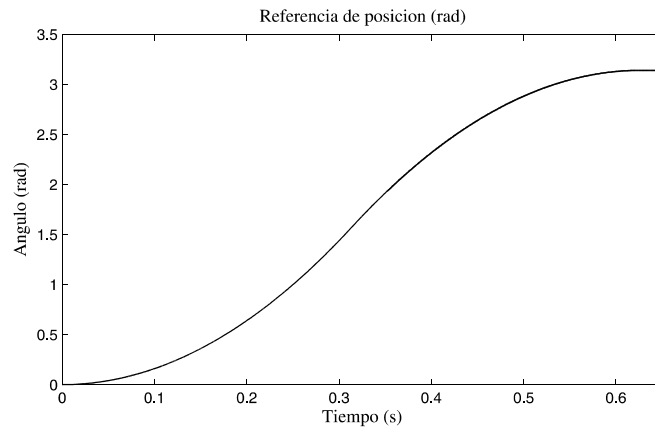
c) A partir de la potencia mecánica (P_m) se obtiene la potencia eléctrica (P_e). Esto es, $P_e = \eta P_m$. Si se considera un rendimiento en la transformación $\eta = 0.80$, entonces, la potencia eléctrica necesaria es de $P_e \approx 400\text{W}$.

d) Dada la potencia eléctrica y fijando un voltaje nominal ($V_n = 48\text{V}$), se obtiene la corriente nominal máxima en el motor ($I_n = P_e / (\sqrt{3} \cos \phi V_n) = 5.4\text{A}$) tomando un cierto factor de potencia ($\cos \phi = 0.90$).

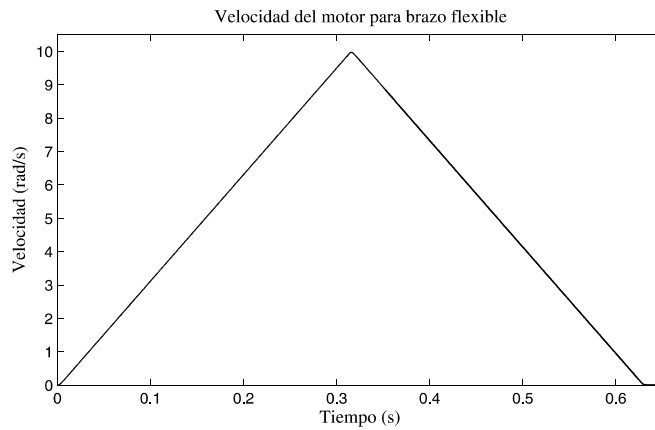
e) Una vez definida la potencia eléctrica (P_e) y la corriente nominal (I_n), se elige el motor más idóneo.

f) Finalmente, una vez elegido el motor, y considerando el par máximo que éste puede entregar, se elige la relación de reducción mínima que permita conseguir el par motor máximo que resulta de las trayectorias supuestas inicialmente. La reductora debe ser elegida tal que soporte la máxima velocidad que pueda alcanzar el motor.

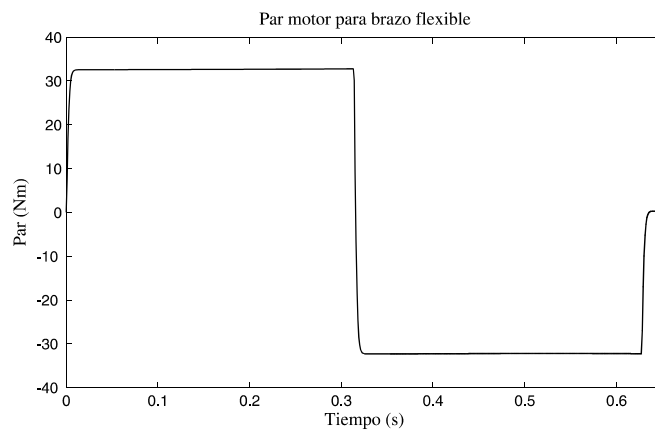
Atendiendo al procedimiento anteriormente expuesto, se elige el conjunto motor+reductora que mejor se adapta a los requisitos demandados. De esta forma, el actuador de la plataforma experimental está compuesto por un motor de corriente continua de conmutación electrónica de 400W (Maxon motor EC-60) conectado a una reductora. El motor está equipado con un encoder incremental para medir la posición angular del motor y con un servoamplificador que permite el control de éste, tanto en corriente como en velocidad.



a) Referencia de posición para el ángulo del motor



b) Velocidad del ángulo del motor



c) Par motor

Figura 3.11: Diseño del motor-actuador

La reductora empleada es una Harmonic Drive lubricada con grasa (HFUC-32-50-20 H) con una relación de reducción de 1:50. Este tipo de reductoras no presentan holguras en la transmisión además de otras propiedades deseables en robótica como alto

rendimiento y alta rigidez torsional. La Figura 3.12 muestra los elementos que componen este tipo de reductoras. El aro circular se encuentra fijo y es rígido, mientras que el aro flexible se une al eje de salida, así, los dientes interiores del aro circular engranan con los exteriores del aro flexible. El generador de ondas es elíptico y se fija al eje de entrada. Finalmente, la relación de reducción viene dada por la diferencia de dientes entre el aro rígido y flexible (1 ó 2) dividido por el número de dientes del aro flexible (harmonicdrive.com; maxonmotor.com).

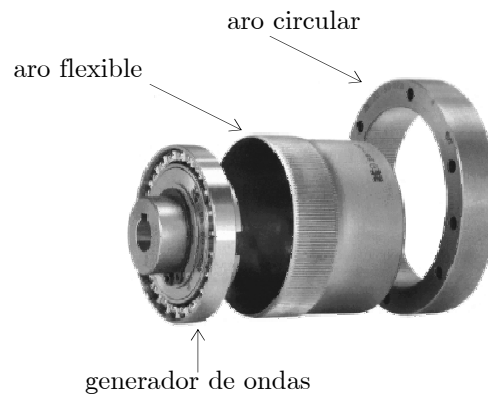


Figura 3.12: Reductora Harmonic Drive (harmonicdrive.com)

El sistema sensorial de la plataforma está formado por dos sensores: un encoder incremental montado en el eje del motor y un puente de galgas extensométricas adherido a la base del eslabón.

Los encoder ópticos incrementales miden posiciones relativas y cuentan con trenes de pulsos desfasados 90° para determinar el sentido de giro, una señal de paso por cero, un número máximo de pulsos por vuelta (en el encoder empleado 500, ampliable a 2000) y con una electrónica adicional.

Se ha utilizado un puente de galgas extensométricas situado en la base del eslabón con una configuración en $\frac{1}{2}$ puente; el cual se utiliza para medir el par de acoplamiento del eslabón y la carga en el eje del motor. Este montaje es insensible a las deformaciones axiales y a cambios de temperatura. Por otro lado, si se observan los modos en deformación (Figura 3.10), en concreto, los tres primeros, se concluye que el punto óptimo para situar los sensores de deformación es la base del brazo, que es donde los modos de interés alcanzan su máximo valor. Además, tal y como se ha discutido en el Apartado 2.5, es interesante que el actuador y el sensor estén colocados en el mismo

emplazamiento de forma que se pueda trabajar con funciones de transferencia de fase mínima.

La señal medida por el puente se acondiciona mediante un amplificador dinámico de deformación (Kyowa modelo DPM600). La salida del amplificador dinámico (V_{am}) tiene la siguiente expresión (ver ecuación (2.10))

$$V_{am} = \frac{K_{am} K_g V_0}{2} \varepsilon, \quad (3.82)$$

donde $K_{am} = 2 \cdot 10^3$ es la ganancia del amplificador, $V_0 = 2V$ es la tensión de alimentación del puente, $K_g = 2$ es el factor de galga, y ε es la deformación debida a la flexión. Por otro lado, el par de acoplamiento, considerando una sección simétrica, se puede expresar como

$$\Gamma_{coup} = \frac{2IE}{h} \varepsilon, \quad (3.83)$$

siendo $EI = 2.40Nm^2$ la rigidez a flexión y $h = 0.002m$ el espesor. Entonces, la relación entre el par de acoplamiento y la salida del amplificador queda como sigue

$$\Gamma_{coup} = \frac{4IE}{h V_0 K_{am} K_g} V_{am}. \quad (3.84)$$

3.2.2 Caracterización dinámica

Para la caracterización dinámica se han realizado dos tipos de ensayos diferentes y se han obtenido las correspondientes respuestas. El primero se trata de un ensayo de impacto a partir del cual se obtiene la función de respuesta impulsiva (“impulse response function” IRF). El segundo es un ensayo armónico donde la entrada es una función chirp. Por otro lado, en la caracterización dinámica se han empleado dos tipos de sensores: 1) un acelerómetro piezoresistivo (Kistler modelo 8702B500) situado en el extremo del eslabón y 2) un puente de galgas extensométricas situado en la base del eslabón; y tres tipos de actuadores: 1) el motor-actuador situado en la base del brazo, 2) un martillo de impacto instrumentado (Kistler), y 3) parches piezoeléctricos situados en la base del brazo (PZT4D Vernitron). A continuación se muestran tres ejemplos de ensayo. El primero es un ensayo de impacto donde se emplea, como excitador, un martillo instrumentado y, como salida, la medición del puente de galgas; el segundo es un ensayo armónico donde la entrada es el ángulo del motor-actuador y la salida es la

medida del puente; y el tercero es un ensayo armónico donde la entrada es el voltaje aplicado a un parche piezoeléctrico y la salida es la medición del puente.

a) Ensayo de impacto.

En un ensayo de impacto, la entrada al sistema es una delta de Dirac definida como

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \text{ con } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.85)$$

En la Figura 3.13 se muestra un ejemplo de ensayo de impacto. El impacto se ha realizado en el extremo libre del eslabón $\hat{x} = 1$. En dicho punto se maximiza la observabilidad de los tres primeros modos, que son los más importantes en la respuesta dinámica (ver Figura 3.9). La señal de salida es el par de acoplamiento que se obtiene a partir de la señal dada por el puente de galgas extensométricas (ecuación (3.84)). En la Figura 3.13a) se muestra el espectro en frecuencia (la FFT) de la señal de entrada (martillo instrumentado), la cual excita todos los modos más importantes en la respuesta dinámica (0-20Hz). En la Figura 3.13b) se representa la señal temporal del par de acoplamiento (o IRF) medida por el puente de galgas extensométricas y en la Figura 3.13c) se muestra la FRF obtenida entre el par de acoplamiento y la señal del martillo.

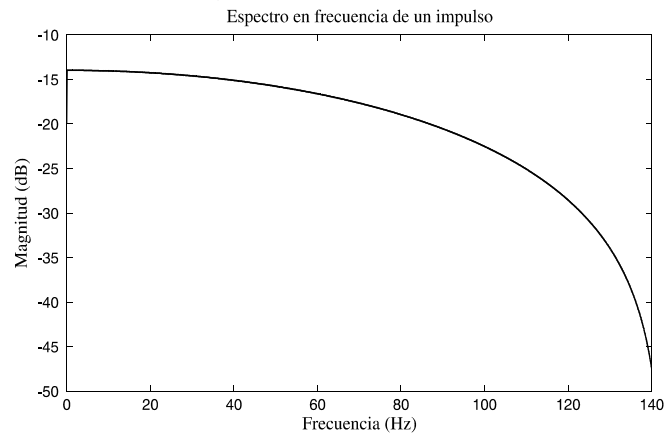
Por otro lado, la función de transferencia entre el par de acoplamiento y la fuerza del impacto se puede escribir de forma general de la siguiente manera (ver ecuación (3.27))

$$\frac{\Gamma_{coup}(s)}{F(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2} \quad (3.86)$$

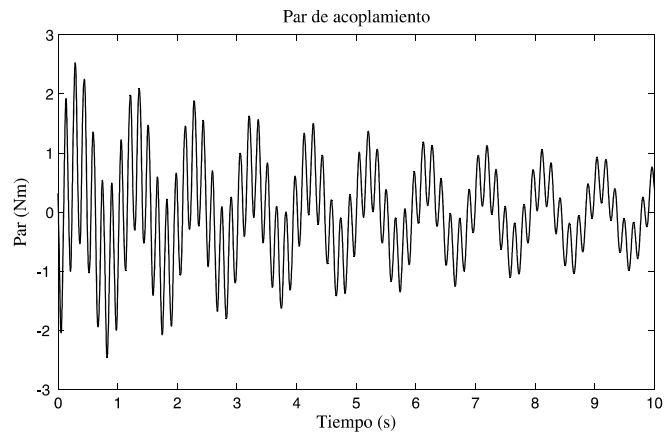
A partir de la Figura 3.13 se puede estimar la función de transferencia anterior. Esta función no es la que se utiliza en los esquemas de control desarrollados en esta tesis (Capítulos 6 y 7), ya que la entrada que se emplea es el ángulo del motor ($\Gamma_{coup}(s)/\theta_m(s)$). Sin embargo, ambas funciones de transferencia tienen el mismo denominador. Si se utiliza la regla del decremento logarítmico en la Figura 3.13b) (considerando el primer modo y filtrando los superiores), se obtiene un valor para el amortiguamiento del primer modo $\xi_1 = 0.02$. Ya que el amortiguamiento es muy pequeño ($\xi_1 \leq 0.3$), se puede aproximar la frecuencia natural por la frecuencia correspondiente al mayor valor de amplitud y aplicar la regla de la cuadratura para la estimación del amortiguamiento de los modos superiores (Rao, 1990). Finalmente, se

han realizado diez ensayos y se han obtenido los siguientes resultados para los tres primeros modos de vibración (media \pm desviación típica)

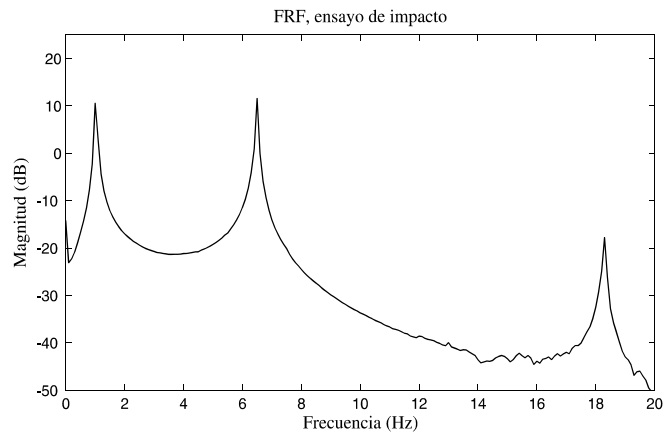
$$\begin{aligned} \omega_1 &= 6.47 \pm 0.13 \text{ rad/s} \quad (1.03 \pm 0.02 \text{ Hz}); \quad \xi_1 = 0.02 \pm 0.005 \\ \omega_2 &= 40.97 \pm 0.13 \text{ rad/s} \quad (6.05 \pm 0.03 \text{ Hz}); \quad \xi_2 = 0.025 \pm 0.005 \\ \omega_3 &= 115.04 \pm 0.62 \text{ rad/s} \quad (18.31 \pm 0.10 \text{ Hz}); \quad \xi_3 = 0.025 \pm 0.005 \end{aligned} \quad (3.87)$$



a) Espectro en frecuencia de la señal de entrada



b) Señal temporal del par de acoplamiento



c) FRF entre el par de acoplamiento y la señal del martillo

Figura 3.13: Ensayo de impacto. Brazo de robot flexible

b) Ensayo armónico utilizando el motor-actuador.

Se utiliza como entrada de referencia al sistema una función chirp. En términos generales una función chirp es un coseno cuyas propiedades cambian con la variable independiente (e.g.: tiempo - t). La función chirp está definida como $u(t) = A(t)\cos \omega(t)t$, donde $A(t)$ es la amplitud y $\omega(t)$ es la frecuencia, ambas pueden ser variantes con el tiempo. La función chirp utilizada tiene las siguientes propiedades: amplitud constante, tiempo final igual a 90s y un barrido en frecuencia de 0 a 50Hz. La entrada es el ángulo del motor y la salida el par de acoplamiento medido con el puente de galgas. Se utiliza una señal chirp de referencia para el motor con un control de posición, siendo la salida del motor la entra al sistema. La Figura 3.14 es un ejemplo de ensayo. En la Figura 3.14a) se muestra la señal temporal de la entrada donde se observa como la amplitud es constante y la frecuencia va cambiando. Nótese que sólo se han representado los 10 primeros segundos para dar una mayor claridad a la figura. En la Figuras 3.14b) se representa la señal temporal del par de acoplamiento (salida). Se observa como cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia de resonancia, la amplitud de la señal aumenta. Finalmente, en la Figura 3.14c) se representa la FRF obtenida a partir del par de acoplamiento y el ángulo del motor.

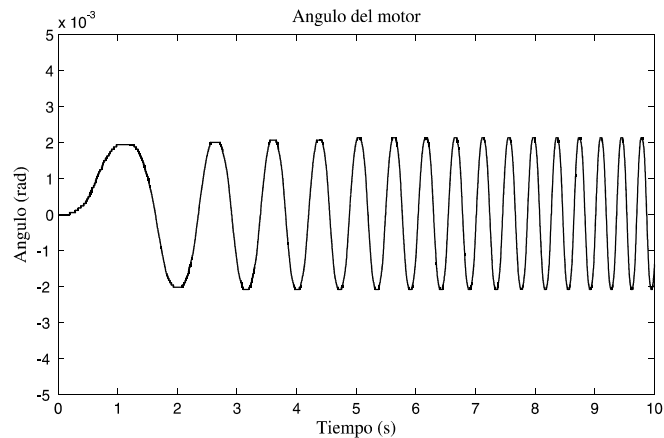
Si se dividen las expresiones (3.27) y (3.25), se puede demostrar que la función de transferencia entre el par de acoplamiento y el ángulo del motor es de la siguiente forma (Feliu y col., 2005)

$$\frac{\Gamma_{coup}(s)}{\theta_m(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s^2 B_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2}. \quad (3.88)$$

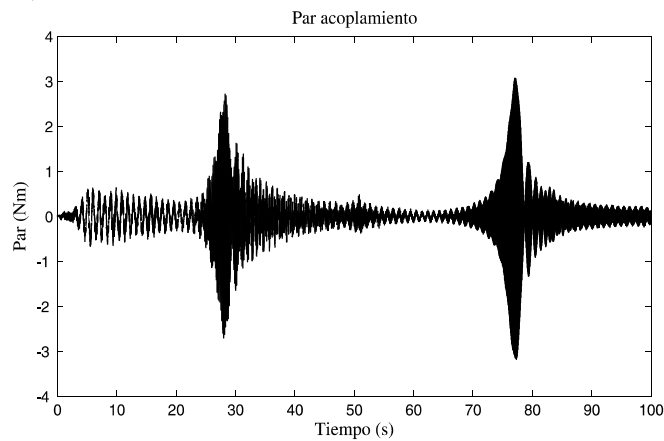
Utilizando la FRF de la Figura 3.14c) se pueden estimar los valores constantes B_i de la función de transferencia anterior. Si se particulariza dicha función (3.88) para los tres primeros modos, se toma el módulo de cada una de las partes asociadas a cada modo por separado (esto es, se acepta que los modos están perfectamente desacoplados) y se iguala con el valor de la amplitud de la FRF, se obtiene el valor de B_i correspondiente a cada modo. Es decir, se resuelven las tres ecuaciones siguientes

$$\left| \frac{s^2 B_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \right|_{s=j\omega_i} = \left| \frac{\Gamma_{coup}(s)}{\theta_m(s)} \right|_{s=j\omega_i}, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \quad (3.89)$$

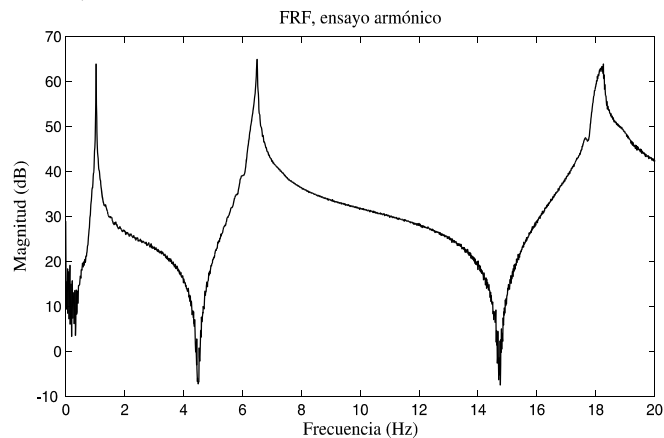
donde el segundo término corresponde a la amplitud de la FRF particularizada para las frecuencias de resonancia. Se obtienen la siguientes valores para los B_i : $B_1 = 1329.5$, $B_2 = 93058$ y $B_3 = 192680$.



a) Señal temporal de la entrada: ángulo del motor



b) Señal temporal del par de acoplamiento



c) FRF entre el par de acoplamiento y el ángulo del motor

Figura 3.14: Ensayo armónico utilizando el motor-actuador. Brazo de robot flexible

c) Ensayo armónico utilizando actuadores piezoeléctricos.

A continuación se muestra un ensayo armónico utilizando, como actuador, un parche piezoeléctrico situado en la base del brazo. La entrada es el voltaje aplicado al piezoeléctrico. Se ha utilizado una función chirp de amplitud constante, tiempo final

igual a 200s y un barrido en frecuencia de 0 a 45Hz. La salida es la deformación en la base, que se ha medido con un puente de galgas extensométricas. La FRF obtenida a partir de la deformación en la base y el voltaje aplicado al piezoeléctrico se muestra en la Figura 3.15.

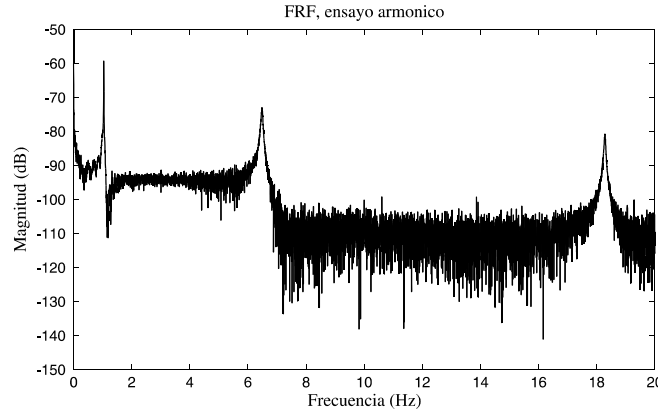


Figura 3.15: Ensayo armónico utilizando actuadores piezoeléctricos. Brazo de robot flexible

3.2.3 Actualización de los modelos

Este apartado se ha dividido en dos partes. En la primera se presenta un proceso de optimización para el ajuste de alguno de los parámetros que definen las frecuencias de vibración obtenidas a partir de la EDP que describe el problema. En la segunda parte se desarrolla un método para la actualización de la matriz de masa de modelos obtenidos a partir de una discretización espacial.

3.2.3.1 Modelos obtenidos a partir de la ecuación dinámica

Una vez que se han obtenido los valores reales de las frecuencias de vibración, que se van a denotar por ω_i^{exp} , se obtiene el módulo de elasticidad E de tal forma que las frecuencias del modelo continuo se ajusten a las experimentales. Se ajusta el módulo de elasticidad ya que de todos los parámetros que definen las frecuencias de vibración es el que presenta un mayor grado de incertidumbre. A partir de la ecuación (3.76), se obtiene el valor de las frecuencias en función de E

$$\omega_i = \lambda_i^2 \left(\frac{EI}{\rho_L L^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.90)$$

donde $\rho_L L$, que es la masa del eslabón, e I , que es la inercia de la sección, se consideran conocidos. Se define el error asociado a cada frecuencia como

$$e_i(E) = \frac{|\omega_i(E) - \omega_i^{exp}|}{\omega_i^{exp}}, \quad (3.91)$$

y el error total como

$$e_t(E) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [e_i(E)]^2}. \quad (3.92)$$

Finalmente, el valor de E considerado se obtiene minimizando el error total

$$\min_{E \in \mathbb{R}} e_t(E). \quad (3.93)$$

3.2.3.2 Modelos obtenidos a partir de un discretización espacial

Dado un modelo dinámico derivado de una discretización espacial y con matriz de masa concentrada como el representado por la ecuación (3.51), sin fuerzas externas,

$$\underline{M}\ddot{\underline{\theta}} + \underline{K}\underline{\theta} = 0, \quad (3.94)$$

se obtienen los autovalores (o valores propios) ω_i^2 y los autovectores (o vectores propios) $\underline{\phi}_i$. La actualización de la matriz de masa se lleva a cabo mediante el siguiente proceso:

1. Se resuelve el problema de autovalores $(\omega_i)^1$ y autovectores $(\underline{\phi}_i)^1$ y se obtienen las matrices $\underline{A} = [\underline{\phi}_1, \dots, \underline{\phi}_n]$, $\underline{W} = \text{diag}(-\omega_1^2, \dots, -\omega_n^2)$ y $\underline{v} = [e^{i\omega_1 t}, \dots, e^{i\omega_n t}]$. Entonces $\underline{\theta} = \underline{A}\underline{v}$ y $\ddot{\underline{\theta}} = \underline{A}\underline{W}\underline{v}$.
2. Se sustituye $\underline{\theta}$ y $\ddot{\underline{\theta}}$ en la ecuación (3.94), pero utilizando $\underline{W}^* = \text{diag}((-\omega_1^{exp})^2, \dots, (-\omega_n^{exp})^2)$ y se resuelve la siguiente ecuación

$$\underline{D}\underline{m} = \underline{b}, \quad (3.95)$$

con $\underline{D} = (\underline{A}\underline{W}^*)^T$, $\underline{m} = (m_1, \dots, m_N)$ (las componentes de la diagonal de la matriz de masa) y $\underline{b} = -(\underline{u}\underline{K}\underline{A})^T$ con $\underline{u} = \text{ones}(1, n)$.

3. Con $\underline{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$, se resuelve de nuevo el problema de autovalores y autovectores y se obtienen $(\omega_i)^r$ y autovectores $(\underline{\phi}_i)^r$ siendo r el número de iteración.
4. El proceso finaliza cuando

$$|\omega_i^r - \omega_i^{exp}| \leq \text{TOL}, \quad (3.96)$$

siendo TOL una cierta tolerancia.

A continuación se muestra un ejemplo de actualización de la matriz de masa siguiendo el proceso anterior. Si se considera un modelo de masas puntuales (Apartado 3.1.2.2) con $n = 3$, se obtienen las siguientes matrices del modelo

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0.1126 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1126 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0563 \end{pmatrix}; \quad \underline{K} = \begin{pmatrix} 614.64 & -706.85 & 276.59 \\ -176.71 & 338.05 & -184.39 \\ 30.73 & -81.95 & 53.78 \end{pmatrix}, \quad (3.97)$$

donde se han utilizado los datos del brazo flexible. Siguiendo el procedimiento anteriormente descrito y las frecuencias experimentales (ver (3.87)), se actualiza la matriz de masa

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0.1130 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1115 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0566 \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

de forma que las frecuencias del modelo completo son exactamente las experimentales.

3.3 Resumen

Este capítulo se ha centrado en el modelado dinámico, la construcción y caracterización dinámica de la plataforma robot flexible de un grado de libertad. Se han estudiado las técnicas de modelado basadas en el modelo continuo y en modelos discretos (elementos finitos y masas puntuales). Asimismo, se ha descrito la plataforma experimental y se ha llevado a cabo su caracterización dinámica. Finalmente, se han propuesto algunas técnicas de actualización de modelos.

Capítulo 4

Placa delgada

En este capítulo se aborda el modelado dinámico, la construcción y la caracterización dinámica de una plataforma basada en una placa delgada. Las placas delgadas son un ejemplo típico de estructuras poco amortiguadas que aparecen en sistemas aeroespaciales.

Este capítulo se divide en dos partes. La primera se dedica al estudio del modelado de placas, mientras que en la segunda se presenta el desarrollo y diseño de la plataforma experimental. Dentro de la primera parte, se estudia el modelado a partir de la ecuación continua y de discretizaciones espaciales; además, se presenta una nueva técnica para la obtención de modelos reducidos de masas puntuales y se aplica a una placa delgada en voladizo. Por otro lado, dentro de la segunda parte, se desarrolla y valida experimentalmente un nuevo método de posicionamiento de sensores de deformación.

4.1 Modelado dinámico de placas

Una placa delgada se caracteriza por que el espesor es despreciable frente a las otras dos dimensiones. De esta forma, se cumplen las hipótesis generales de la teoría para placas delgadas que permiten reducir el problema general 3-D a un problema 2-D. Por otro lado, las placas se diferencian de las vigas no sólo en la naturaleza bidimensional del problema (existe flexión alrededor de los ejes contenidos en su plano e interviene el coeficiente de Poisson en la ley de comportamiento) sino en que presentan además torsión. Al igual que en vigas, las placas presentan una naturaleza distribuida, es decir,

su comportamiento dinámico viene dado por una EDP y por tanto, su dinámica se describe mediante infinitos modos de vibración. Normalmente, la amplitud de los modos disminuye de forma drástica a medida que aumenta su frecuencia. Este hecho hace que la dinámica total se pueda aproximar por modelos reducidos que habitualmente consideran los dos o tres primeros modos. Estos modelos reducidos se pueden obtener a partir de un truncamiento en frecuencia de los modelos de dimensión infinita que resultan de la resolución de la EDP. Sin embargo, en general esta EDP no tiene solución analítica. Esto es, sólo se puede resolver en unos casos muy particulares. Es por ello que se emplean métodos numéricos para la resolución como puede ser el método de los elementos finitos. Por otro lado, existe otro tipo de modelos reducidos denominados de masas puntuales (Seto y Mitsuta, 1992) que se basan en situar unas masas puntuales, que corresponden con los grados de libertad del modelo reducido, de tal forma que el modelo completo es equivalente al reducido desde el punto de vista de esas masas puntuales. La obtención del modelo se puede realizar bien a partir de la solución de la EDP, en los casos en los que es posible, o bien a partir de un modelo de elementos finitos suficientemente refinado.

4.1.1 Modelos continuos

A continuación se considera una placa rectangular de dimensiones $L_x \times L_y \times h$ donde se cumple $\max(h/L_x; h/L_y) \leq 1/20$, es decir, se trata de una placa delgada (ver Figura 4.1). El módulo de elasticidad, la densidad y el coeficiente de Poisson se denotan por E , ρ y ν , respectivamente. Se consideran las hipótesis de la teoría de placas delgadas o hipótesis de Kirchhoff (Hughes, 1987): a) el material es elástico, lineal, isótropo y homogéneo, b) se acepta que la deflexión no depende de la coordenada transversal $w(x, y, z, t) = w(x, y, t)$, c) se acepta que la deflexión $w(x, y, t)$ es pequeña ($< 0.1 \max(L_x, L_y)$), d) se aproxima el giro por la pendiente, e) se desprecia la deformación por cortante y f) la sección es plana y perpendicular al plano medio antes y después de la deformación. Con las hipótesis anteriores y utilizando el principio de Hamilton en su versión extendida, se obtiene la EDP que gobierna el comportamiento dinámico de la placa (Meirovitch, 1997)

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t), \quad (4.1)$$

donde $w(x, y, t)$ es la deflexión en cada punto de la placa, $f(x, y, t)$ es la carga distribuida externa, D es la rigidez a flexión definida por

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (4.2)$$

y ∇^4 es el operador bilaplaciano definido por

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (4.3)$$

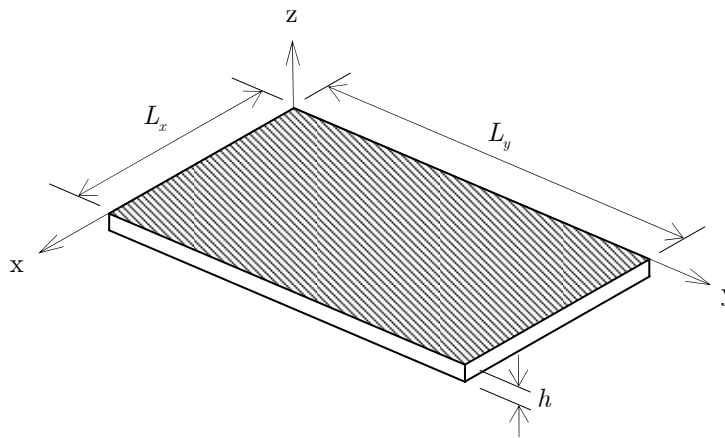


Figura 4.1: Placa delgada. Dimensiones

Para el estudio de las vibraciones libres o análisis modal de (4.1), se anulan las fuerzas externas $f(x, y, t) = 0$

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.4)$$

Las condiciones de contorno dependen del problema considerado. Para el caso de un lado empotrado ($y = 0$) y el resto libre (o placa en voladizo, ver Figura 4.2), que es el caso de interés en este capítulo, son las siguientes

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = 0; \quad \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} = 0; \quad \forall x, \quad y = 0, \\ M_x(x, y, t) = 0; \quad Q_x(x, y, t) = 0; \quad \forall x, \quad y = L_y, \\ M_y(x, y, t) = 0; \quad Q_y(x, y, t) = 0; \quad \forall y, \quad x = 0, \\ M_y(x, y, t) = 0; \quad Q_y(x, y, t) = 0; \quad \forall y, \quad x = L_x, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde el momento flector a lo largo del eje-x y el momento flector a lo largo del eje-y son, respectivamente, (por simplicidad se denota $w(x, y, t)$ por w)

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (4.6)$$

y los esfuerzos cortantes a lo largo del eje-x y eje-y son, respectivamente,

$$Q_x(x, y, t) = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y(x, y, t) = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (4.7)$$

donde M_{xy} es el momento torsor definido por

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (4.8)$$

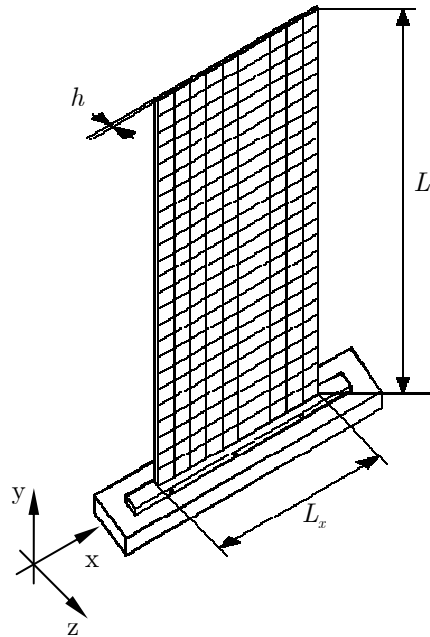


Figura 4.2: Esquema de la placa en voladizo

Seguidamente se aplica el análisis modal al sistema definido por (4.4) y (4.5). La deflexión $w(x, y, t)$ se expresa como

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{nm}(x, y) q_{nm}(t), \quad (4.9)$$

y el problema de autovalores queda como sigue

$$D \nabla^4 \phi_{nm} = \rho h \omega_{nm}^2 \phi_{nm}, \quad (4.10)$$

donde ω_{nm} y ϕ_{nm} son, respectivamente, las frecuencias naturales y funciones modales asociadas con el modo (m, n) y q_{nm} son las coordenadas generalizadas. Además, las funciones modales cumplen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho h \phi_{mn} \phi_{pq} dx dy &= \delta_{mp} \delta_{nq} \\ \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} D \nabla^4 \phi_{mn} \phi_{pq} dx dy &= \omega_{mn}^2 \delta_{mp} \delta_{nq} \end{aligned}, \quad (4.11)$$

donde δ_{mp} y δ_{nq} son deltas de Kronecker.

Si se considera la contribución de una fuerza externa $F(t)$ aplicada en (x, y) en la dirección-z y se utiliza la ecuación de Lagrange, se obtienen infinitas ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\ddot{q}_{mn}(t) + 2\xi_{mn} \omega_{mn} \dot{q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 q_{mn}(t) = F(t) \phi_{mn}(x, y). \quad (4.12)$$

Procediendo de igual forma que en el Capítulo 3 (Apartado 3.1.1) las ecuaciones (4.12) se pueden expresar como un sistema en el espacio de estados e igualmente se pueden obtener las funciones de transferencia que se necesiten.

4.1.2 Modelos discretos

Los modelos discretos se obtienen a partir de una discretización espacial de la placa. A continuación se presentan las diferencias que existen en cuanto al modelado mediante elementos finitos de una estructura tipo viga, correspondiente al apartado anterior, y una estructura tipo placa.

4.1.2.1 Modelado mediante elementos finitos

La diferencia fundamental con respecto a una viga radica en que el tipo de elemento empleado (número de nudos y grados de libertad asociados a cada nudo) es diferente. Por otro lado, el procedimiento para obtener el modelo del sistema es el presentado en el Capítulo 3, y por tanto, no se repite aquí.

Para el caso de un elemento placa las coordenadas generalizadas (o grados de libertad) serán el desplazamiento transversal w y los giros con respecto al eje-x $\theta_x = \partial w / \partial x$ y al eje-y $\theta_y = \partial w / \partial y$ en cada nudo como se muestra en la Figura 4.3 (Hughes, 1987). El elemento placa (delgada) está formado por cuatro nudos, por tanto, se tienen doce grados de libertad por elemento.

El desplazamiento transversal en el elemento $\tilde{w}(x, y, t)$ se aproxima mediante las variables nodales. Al existir doce variables nodales, la deflexión en el elemento viene definida por el siguiente polinomio

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, t) \simeq & a_1(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_3(t)x + a_4(t) + a_5(t)y^3 + a_6(t)y^2 + a_7(t)y \\ & + a_8(t)xy + a_9(t)x^2y + a_{10}(t)xy^2 + a_{11}(t)x^3y + a_{12}(t)xy^3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si se aplican las condiciones de contorno para cada nudo, se tiene (por ejemplo, para el nodo i)

$$\tilde{w}(0, 0, t) = w_i(t); \quad \frac{\partial \tilde{w}(0, 0, t)}{\partial x} = \theta_{xi}(t); \quad \frac{\partial \tilde{w}(0, 0, t)}{\partial y} = \theta_{yi}(t). \quad (4.14)$$

Si se combinan (4.13) y (4.14), se obtiene

$$\tilde{w}(x, y, t) \simeq \sum_{i=1}^4 \varphi_{wi}(x, y) w_i(t) + \varphi_{\theta_{xi}}(x, y) \theta_{xi}(t) + \varphi_{\theta_{yi}}(x, y) \theta_{yi}(t), \quad (4.15)$$

donde φ_{wi} , $\varphi_{\theta_{xi}}$ y $\varphi_{\theta_{yi}}$ son las funciones de forma.

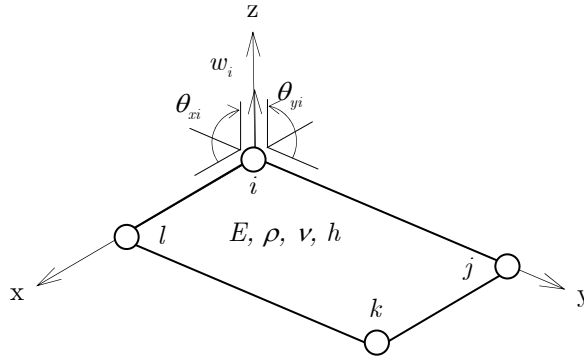


Figura 4.3: Elemento tipo placa. Coordenadas generalizadas

Procediendo de forma similar al caso de la viga, se obtiene la formulación matricial del problema, que es equivalente al caso de la viga, pero con coordenadas y funciones de forma diferentes.

4.1.2.2 Modelado mediante masas puntuales

En este apartado se presenta un nuevo método para la obtención de modelos reducidos de masas puntuales. A diferencia de otros métodos, donde se realiza un análisis modal para la obtención de la matriz de rigidez y se lleva a cabo un proceso iterativo para la obtención de la matriz de masa (Seto y Mitsuta, 1992), el que aquí se presenta necesita un análisis estático y modal del modelo completo, de forma que no es necesario ningún proceso iterativo. Este método se particulariza para la obtención de modelos para placas aunque el método podría ser empleado en cualquier estructura. Por otro lado, cabe destacar la importancia de estos modelos en aplicaciones de control (Kar y col., 2000).

El procedimiento es el siguiente:

- 1) Se resuelve el modelo completo. Se realiza un análisis modal y se obtienen las frecuencias y los modos de vibración de la estructura de forma analítica (si existe ésta) o de forma numérica, por ejemplo, mediante un modelo de elementos finitos suficientemente refinado. Se decide además el número de modos n que se van a considerar en el modelo reducido.
- 2) Se seleccionan los nodos (puntos de desplazamiento nulo) del primer modo de vibración no considerado (modo $n + 1$), de forma que se sitúan n masas puntuales estratégicamente en estos puntos y se evita así el efecto de desbordamiento debido a ese modo. El resultado es un sistema de n grados de libertad. Se realiza también un análisis estático del modelo completo considerando que el valor del vector de cargas debe ser no nulo en los puntos donde se sitúan las masas puntuales.
- 3) Se obtienen la matriz de masa y de rigidez del modelo reducido. Para ello, se utiliza el análisis modal y el análisis estático del modelo completo y se realiza igualmente el análisis modal y estático del modelo reducido.

A continuación se realiza un ejemplo de obtención del modelo reducido para una placa en voladizo. Se toma una placa rectangular de aluminio (ver Figura 4.2) con los siguientes datos: $E = 0.65 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\rho = 2950 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.30$, $L_x = 0.500\text{m}$, $L_y = 1.200\text{m}$ y $h = 0.003\text{m}$. El paso 1 (análisis modal del modelo completo) se realiza de forma numérica ya que no tiene solución analítica. Se utiliza un modelo de 250 elementos tipo placa y se consideran los tres primeros modos de vibración ($n = 3$). En la Figura 4.4 se muestran los cuatro primeros modos de vibración y el posicionamiento de las masa puntuales. El modo 1 es el primer modo de flexión, el modo 2 es el primer modo de torsión, el modo 3 es el segundo modo de flexión y el modo 4 es el tercer modo de flexión. Este cuarto modo es el que se utiliza para situar las masas puntuales en sus nodos o puntos de desplazamiento nulo (Paso 2).

A partir del modelo completo se obtiene la matriz modal y las frecuencias del modelo reducido (Paso 3). La matriz modal del modelo reducido es la siguiente

$$\underline{\phi}^r = \begin{pmatrix} \phi_{11}^r & \phi_{12}^r & \phi_{13}^r \\ \phi_{21}^r & \phi_{22}^r & \phi_{23}^r \\ \phi_{31}^r & \phi_{32}^r & \phi_{33}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.718 & 1.082 & 0.322 \\ 0.718 & -1.082 & 0.322 \\ 0.294 & 0 & -0.599 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

donde ϕ_{ij}^r indica el valor del modo j (del modelo completo) en la posición de la masa i (ver Figura 4.4). Las frecuencias del modelo reducido son las frecuencias del modelo original

$$\omega_i^r = \omega_i; \text{ con } i = 1, \dots, n = 3. \quad (4.17)$$

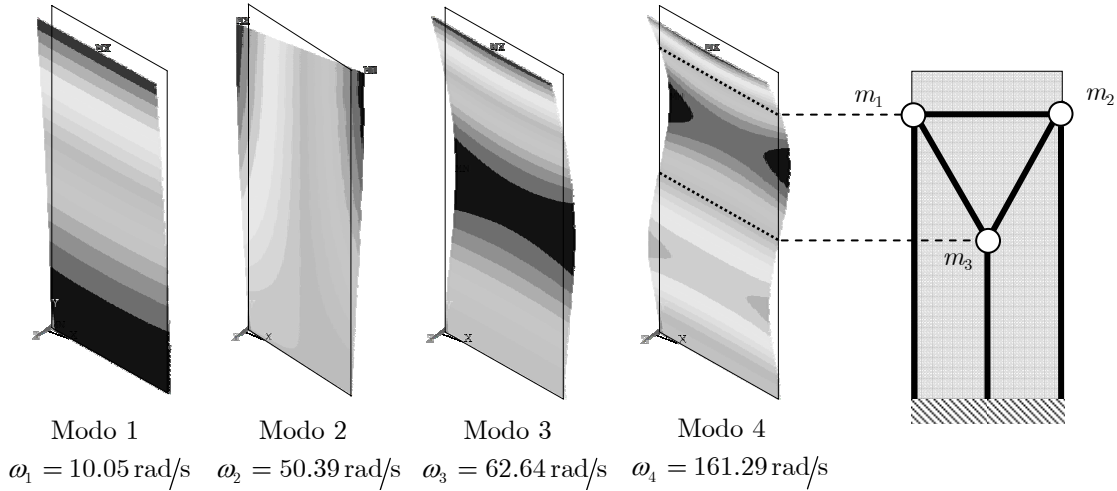


Figura 4.4: Obtención de un modelo de masa puntuales de una estructura tipo placa

Seguidamente se obtienen las matrices de masa y de rigidez. Se toma un modelo reducido de la siguiente forma

$$\underline{M}^r \ddot{\underline{\delta}} + \underline{K}^r \underline{\delta} = 0, \quad (4.18)$$

donde $\underline{M}^r = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ es la matriz de masa del modelo reducido supuesta diagonal, $\underline{K}^r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de rigidez, $\underline{\delta} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector columna que contiene el desplazamiento transversal de las masas puntuales, que son los grados de libertad del modelo reducido. Si se lleva a cabo el análisis modal de (4.18), es decir

$$\underline{\delta} = \underline{\phi}^r \underline{q}, \quad (4.19)$$

siendo \underline{q} las coordenadas modales, se llega al siguiente sistema desacoplado

$$\ddot{\underline{q}} + \left(\underline{\phi}^r\right)^{-1} \left(\underline{M}^r\right)^{-1} \underline{K}^r \underline{\phi}^r \underline{q} = 0. \quad (4.20)$$

Se define

$$\underline{\Omega}^2 = \left(\underline{\phi}^r\right)^{-1} \left(\underline{M}^r\right)^{-1} \underline{K}^r \underline{\phi}^r = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2), \quad (4.21)$$

y

$$\underline{B} = \left(\underline{M}^r\right)^{-1} \underline{K}^r = \underline{\phi}^r \underline{\Omega}^2 \left(\underline{\phi}^r\right)^{-1}, \quad (4.22)$$

donde \underline{B} es una matriz conocida ya que se obtiene a partir de $\underline{\Omega}^2$. A continuación se lleva a cabo un análisis estático del sistema completo, donde el vector de fuerzas es $\underline{F} \neq \underline{0}$ en los grados de libertad correspondientes al modelo reducido. En este caso se ha tomado

$$\underline{F}^r = (1 \quad 1 \quad 1)', \quad (4.23)$$

Se obtienen los desplazamientos en las posiciones de las masas puntuales

$$\underline{\delta} = \begin{pmatrix} 1.135 \times 10^{-2} \\ 1.135 \times 10^{-2} \\ 0.5552 \times 10^{-2} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

con lo que se tiene la siguiente relación

$$\underline{K}^r \underline{\delta} = \underline{F}^r, \quad (4.25)$$

donde \underline{F}^r es el vector de fuerzas externas particularizado para los grados de libertad del modelo reducido. Si se despeja \underline{K}^r de (4.22) y se sustituye en (4.25), se tiene

$$\underline{M}^r \underline{B} \underline{\delta} = \underline{F}^r. \quad (4.26)$$

Si se define $\underline{v} = \underline{B} \underline{\delta}$, se llega a la siguiente ecuación a partir de la cual se obtienen los términos de la matriz de masa (supuesta diagonal)

$$\underline{M}^r \underline{v} = \underline{F}^r \rightarrow m_i = \frac{F_i^r}{v_i} \quad i = 1, \dots, n = 3. \quad (4.27)$$

La matriz de masa del modelo reducido obtenida es la siguiente

$$\underline{M}^r = \begin{pmatrix} 0.723 & 0 & 0 \\ 0 & 0.723 & 0 \\ 0 & 0 & 1.902 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Una vez conocida la matriz de masa del sistema reducido \underline{M}^r , a partir de (4.22) se obtiene la matriz de rigidez

$$\underline{K}^r = \underline{M}^r \underline{B} = \begin{pmatrix} 1204.7 & -632.3 & -1219.4 \\ -632.3 & 1204.7 & -1219.4 \\ -1219.4 & -1219.4 & 6151.7 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

con lo que resulta un modelo de orden reducido que es equivalente al modelo completo en los puntos en los cuales se han situado las masas puntuales.

4.1.3 Modelado incluyendo piezoeléctricos como actuadores

Considérese una placa delgada uniforme instrumentada con un actuador piezoeléctrico como se muestra en la Figura 4.5. La EDP que gobierna el comportamiento dinámico (ecuación (4.1)) con la contribución del piezoeléctrico es de la siguiente forma

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_{px}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{py}}{\partial y^2}, \quad (4.30)$$

donde M_{px} y M_{py} son los momentos flectores externos por unidad de longitud aportados por el parche piezoeléctrico.

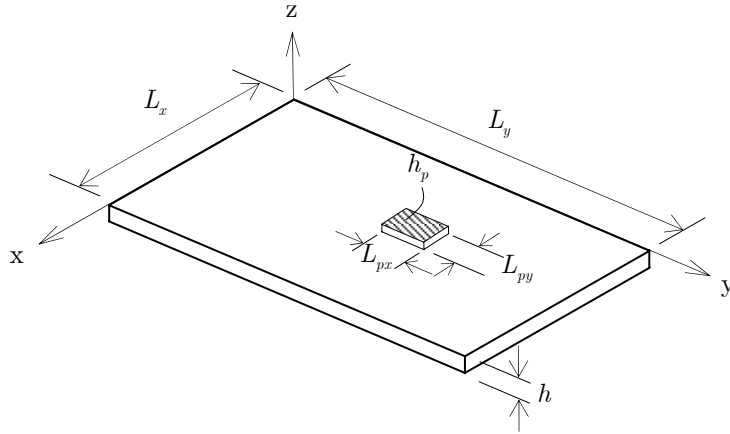


Figura 4.5: Placa con un piezoeléctrico j

Si se supone que la estructura se encuentra sometida a J actuadores de dimensiones $L_{pxj} \times L_{pyj} \times h_{pj}$ cada uno, la fuerza externa debida al conjunto de actuadores se puede expresar como sigue

$$\frac{\partial^2 M_{px}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{py}}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^J \alpha_j V_{aj}(t), \quad (4.31)$$

donde V_{aj} es el voltaje aplicado en el actuador j y α_j es un término que depende de las propiedades y de la localización del actuador. El siguiente paso es llevar a cabo un proceso similar al realizado en el Apartado 3.1.3, pero particularizado para placas. Se tienen las mismas ecuaciones pero aplicadas a las dos direcciones longitudinales contenidas en el plano de la placa.

Las deformaciones libres que se inducen en los parches piezoeléctricos debidas al voltaje aplicado son

$$\begin{aligned}\varepsilon_{px} &= \left(\frac{d_{31}}{h_p} \right) V_{aj}(t) \\ \varepsilon_{py} &= \left(\frac{d_{32}}{h_p} \right) V_{aj}(t)\end{aligned}, \quad (4.32)$$

donde d_{31} y d_{32} son las constantes de carga piezoeléctrica en la dirección-x y en la dirección-y, las cuales relacionan la deformación mecánica con el voltaje aplicado V_{aj} .

Las tensiones en el actuador se obtienen a partir de la ley de comportamiento del piezoeléctrico

$$\begin{aligned}\sigma_{px} &= \frac{E_p}{1-\nu_p^2} \left(\varepsilon_x - \varepsilon_{px} + \nu (\varepsilon_y - \varepsilon_{py}) \right) \\ \sigma_{py} &= \frac{E_p}{1-\nu_p^2} \left(\varepsilon_y - \varepsilon_{py} + \nu (\varepsilon_x - \varepsilon_{px}) \right)\end{aligned}, \quad (4.33)$$

con E_p y ν_p , el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del piezoeléctrico, respectivamente.

Conocidas las deformaciones, las tensiones en la placa se obtienen como sigue

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x)\end{aligned}, \quad (4.34)$$

con E y ν , el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson de la placa, respectivamente.

A partir de aquí se sigue el mismo proceso que en el caso de la viga, pero aplicado a cada uno de los ejes longitudinales (Moheimani y col., 2003). Igualmente se considera el análisis modal y se obtienen infinitas ecuaciones desacopladas similares a (4.12), pero donde la fuerza externa proviene del momento flector inducido por los parches piezoeléctricos. Así, la ecuación obtenida del análisis modal es

$$\ddot{q}_{mn}(t) + 2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 q_{mn}(t) = \sum_{j=1}^J A_j \Psi_{mnj} V_{aj}(t), \quad (4.35)$$

con

$$A_j = \frac{\kappa_j d_{31j} D (1 + \nu)}{h_{pj}}, \quad (4.36)$$

siendo

$$\kappa = \frac{12E_p h_p (h_p + h)}{24D(1 + \nu_p^2) + E_p [(h + 2h_p) - h^3]}, \quad (4.37)$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_{mnj} = & \left[\int_{y_{1j}}^{y_{2j}} \frac{\partial \phi_{mn}(x_{2j}, y)}{\partial x} dy - \int_{y_{1j}}^{y_{2j}} \frac{\partial \phi_{mn}(x_{1j}, y)}{\partial x} dy \right] \\ & + \left[\int_{x_{1j}}^{x_{2j}} \frac{\partial \phi_{mn}(x, y_{2j})}{\partial y} dx - \int_{x_{1j}}^{x_{2j}} \frac{\partial \phi_{mn}(x, y_{1j})}{\partial y} dx \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

siendo (x_{1j}, x_{2j}) las coordenadas inicial y final en la dirección-x y (y_{1j}, y_{2j}) las coordenadas inicial y final en la dirección-y. Si se aplica la transformada de Laplace a (4.35), la función de transferencia entre el desplazamiento transversal de la placa $w(x, y, s)$ y el voltaje aplicado $V_a(s) = [V_{a1}(s), \dots, V_{aJ}(s)]^T$ es

$$G(x, y, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{mn}(x, y) P_{mn}}{s^2 + 2\xi_{mn} \omega_{mn} s + \omega_{mn}^2}, \quad (4.39)$$

donde

$$P_{mn} = [A_1 \Psi_{mn1} \dots A_J \Psi_{mnJ}]. \quad (4.40)$$

4.2 Definición de la plataforma experimental

En esta sección se describen los elementos más importantes en el desarrollo y diseño de la plataforma placa delgada (ver Figura 4.6). Dentro de este desarrollo se ha elaborado un criterio de diseño para el posicionamiento de sensores de deformación en estructuras. Dicho criterio se ha particularizado para estructuras tipo placa. Se ha llevado a cabo una caracterización dinámica de la placa y una validación experimental del criterio de posicionamiento utilizando sensores de galgas extensométricas y sensores de fibra de Bragg.

4.2.1 Diseño de la plataforma

La placa que se ha elegido es una placa rectangular delgada que presenta unas frecuencias naturales muy bajas y poco amortiguadas debido a su tamaño $L_y = 1.2\text{m}$,

$L_x = 0.5\text{m}$ y $h = 0.003\text{m}$ y al material empleado, que en este caso es aluminio. En la Tabla 4.1 se recogen los parámetros de la placa. Dicha placa se ha embebido en un bloque de hormigón por lo que las condiciones de contorno corresponden a una placa en voladizo, esto es, uno de sus lados está empotrado y el resto libres. Un empotramiento perfecto indica que la masa a la que se une la placa tiene una masa “infinita” en comparación con la masa de la estructura. Para establecer la influencia del valor de la masa del elemento de empotramiento en las frecuencias naturales de la estructura se calculan las frecuencias del conjunto estructura-elemento en condiciones libre-libre, y se toma la primera de ellas ω_{conj} (después de las de sólido rígido) (Ewins, 1984). Dicha frecuencia se relaciona con la de la estructura ω_{estr} como sigue

$$\omega_{conj} = \alpha \omega_{estr}; \text{ con } \alpha = \left(1 + \frac{m_{estr}}{M_{elem}} \right), \quad (4.41)$$

donde m_{estr} es la masa de la estructura, M_{elem} es la masa del elemento de empotramiento al que se une la estructura y α indica la variación existente del empotramiento experimental con respecto a un empotramiento ideal. En la plataforma desarrollada se tiene: $m_{estr} = 5.30\text{kg}$, $M_{elem} = 270\text{kg}$ y $\alpha = 0.02$. Por tanto, se concluye que el empotramiento se puede aceptar como ideal.

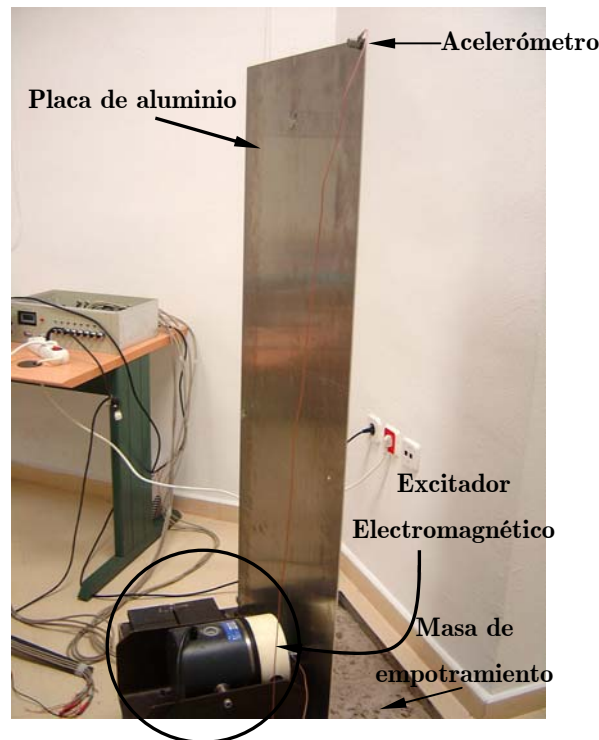


Figura 4.6: Plataforma experimental. Placa delgada en voladizo

Tabla 4.1: Parámetros de la placa delgada

Modulo de elasticidad (N/m ²)	E	0.65×10^{11}
Densidad de masa (kg/m ³)	ρ	2950
Coefficiente de Poisson	ν	0.30
Ancho (m)	L_x	0.500
Espesor (m)	h	0.003
Longitud (m)	L_y	1.2

4.2.2 Criterio de posicionamiento

El objetivo de este apartado es proponer un criterio para el posicionamiento de sensores de deformación en estructuras (Díaz y col., 2006). Aunque este criterio es general, se particulariza para estructuras tipo placa. La magnitud que se mide es la deformación equivalente de von Mises (ε^{vM}) la cual es un valor que representa un estado tridimensional de deformación. Ésta se define como ((Chandrasekharaiah y Debnath, 1994)

$$\varepsilon^{vM} = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} [(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2] + 12[\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.42)$$

donde ε_{kl} ($k = x, y, z; l = x, y, z$) son las nueve componentes del tensor de deformación que definen el estado de deformaciones del punto material.

El criterio propuesto, pensado para aplicaciones de cancelación y monitorización de vibraciones, se basa en considerar que las distribuciones de ε^{vM} deben ser lo mayores posible y al mismo tiempo lo más parecidas posible. En consecuencia, se propone un criterio que tiene en cuenta la media y la desviación típica de las distribuciones de ε^{vM} de los modos considerados. Así, el problema de optimización propuesto es

$$\max_{\underline{x} \in \Omega} \Psi(\underline{x}) = \frac{1}{\beta(\underline{x})} \frac{\bar{\varepsilon}(\underline{x})}{S(\underline{x})}, \quad (4.43)$$

con $\underline{x} = (x, y, z)$, $\bar{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{vM}(\underline{x})$, $S(\underline{x}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^{vM}(\underline{x}) - \bar{\varepsilon}(\underline{x}))^2}$, i indica el modo de vibración, n el número de modos considerados, $\beta(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in \Omega} (\bar{\varepsilon}(\underline{x})/S(\underline{x}))$ y el dominio se define $\Omega = \{(x, y, z) \mid \dots\}$. La función de

coste (4.43), la cual se normaliza al valor de β , es proporcional a la media ($\bar{\varepsilon}$) e inversamente proporcional a la desviación típica (S). En aplicaciones de control de vibraciones, es interesante monitorizar modos con amplitudes similares de forma que si un modo no se observa es porque es despreciable con respecto al resto. Sin embargo, si no se penaliza la desviación, un posible sistema de control podría no observar modos que, aun cuando son despreciables con respecto a los otros, son importantes en la respuesta dinámica del sistema.

El procedimiento es el siguiente:

- 1) Se lleva a cabo un análisis modal del que se obtienen las formas modales.
- 2) A partir de las formas modales se obtienen los términos del tensor de deformación y con éstos, la distribución de la deformación equivalente dada por (4.42) correspondiente a cada modo.
- 3) Se aplica el criterio de optimización (4.43) utilizando los modos considerados.

Seguidamente se particulariza la expresión (4.42) para una estructura tipo placa delgada. En este caso el dominio es $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq h\}$, con (L_x, L_y, h) las dimensiones de la placa, y se consideran las hipótesis de Kirchhoff para placas delgadas, esto es, las deformaciones ε_{zz} , ε_{xz} y ε_{yz} son despreciables. Entonces, la expresión (4.42) se reduce a

$$\varepsilon_i^{vM}(\underline{x}) = \frac{2}{3} \left\{ \varepsilon_{xxi}^2(\underline{x}) + \varepsilon_{yyi}^2(\underline{x}) - \varepsilon_{xxi}(\underline{x})\varepsilon_{yyi}(\underline{x}) + 12\varepsilon_{xyi}^2(\underline{x}) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.44)$$

donde $i = 1, \dots, n$ indica el modo de vibración. Las deformaciones se relacionan con las curvaturas de la siguiente forma

$$\varepsilon_{xxi} = z\chi_{xxi}; \quad \varepsilon_{yyi} = z\chi_{yyi}; \quad \varepsilon_{xyi} = z\chi_{xyi}, \quad (4.45)$$

siendo χ_{xx} y χ_{yy} las curvaturas de flexión del plano medio de la placa en planos paralelos a xz y yz, respectivamente, y χ_{xy} es la curvatura de torsión con respecto a los ejes x e y. Las curvaturas se calculan utilizando las formas modales

$$\chi_{xxi} = \partial^2 \phi_i(x, y) / \partial x^2; \quad \chi_{yyi} = \partial^2 \phi_i(x, y) / \partial y^2; \quad \text{y } \chi_{xyi} = \partial^2 \phi_i(x, y) / \partial x \partial y, \quad (4.46)$$

donde $\phi_i(x, y)$ es la forma modal i . En resumen, con las formas modales ϕ se calculan las curvaturas χ (4.46), con las curvaturas las deformaciones ε (4.45) y finalmente se obtiene la deformación equivalente ε^{vM} (4.44). Con ε^{vM} se aplica el problema de optimización (4.43).

Para la determinación experimental de las tres componentes del tensor de deformaciones $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$, se mide la deformación longitudinal en tres direcciones diferentes, lo cual conduce al empleo de una roseta triaxial. Existen dos posibles configuraciones: en estrella y en triángulo. Ambas configuraciones se utilizan para galgas convencionales y la configuración en triángulo se emplea para sensores de fibra de Bragg por razones constructivas. En la Figura 4.7 se muestran las dos configuraciones.

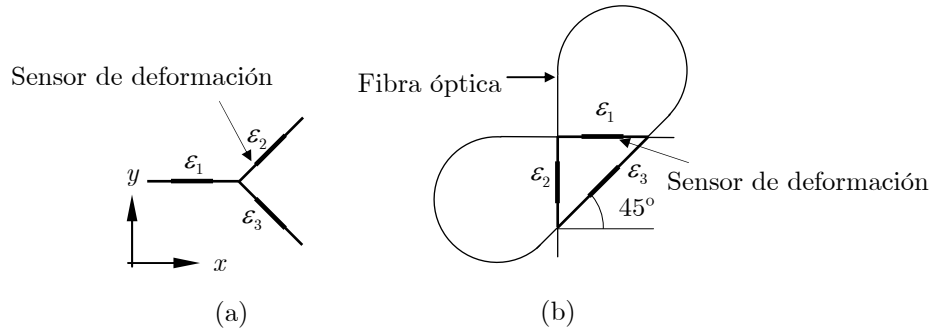


Figura 4.7: Roseta de deformación. a) Configuración en estrella. b) Configuración en triángulo

Las deformaciones longitudinales medidas por los sensores ε_1 , ε_2 y ε_3 se pueden expresar en términos de las componentes del tensor ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{xy} como sigue

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{1x}^2 & n_{1y}^2 & n_{1x}n_{1y} \\ n_{2x}^2 & n_{2y}^2 & n_{2x}n_{2y} \\ n_{3x}^2 & n_{3y}^2 & n_{3x}n_{3y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

con n_{lx} y n_{ly} ($l = 1, 2, 3$) los cosenos directores con respecto al eje-x. Para una configuración en triángulo como la que se muestra en la Figura 4.7b) los ángulos con respecto al eje-x son 0° , 90° y 45° . Con la consideración anterior, la ecuación (4.47) se puede invertir para obtener el tensor de deformaciones

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Finalmente, empleando (4.48), se calcula de forma experimental la deformación equivalente ε^{vM} dada por (4.44).

4.2.3 Caracterización dinámica

Al igual que en la caracterización dinámica del brazo flexible (Apartado 3.2.2), se han realizado dos tipos de ensayos con la intención de caracterizar dinámicamente la estructura y validar experimentalmente el criterio de posicionamiento descrito en el apartado anterior. El primero es un ensayo de impacto y el segundo es un ensayo armónico. Los sensores empleados han sido: 1) acelerómetro piezoresistivo (Kistler modelo 8702B500) situado en el extremo opuesto al empotramiento y en un lateral (ver Figura 4.6), 2) roseta de galgas extensométricas (Kyowa modelo KFG-5-120-D17-11) y 3) roseta de fibra de Bragg (Smart Fibres Ltd); y los actuadores empleados han sido: 1) martillo instrumentado (Kistler), 2) excitador electromagnético (Gearing & Watson Electronics modelo V20) y 3) parche piezoeléctrico (Piezo Systems PZT modelo PSI-5A4E).

A continuación se sigue el procedimiento para el posicionamiento de sensores de deformación presentado en el apartado anterior. El primer paso es realizar un análisis modal y obtener las formas modales. En este caso, al tratarse de una placa en voladizo, no existe solución analítica. En consecuencia, se obtienen las formas modales numéricamente mediante el método de los elementos finitos. Se han empleado 250 elementos placa de tal forma que el tamaño del elemento es aproximadamente igual al tamaño de la roseta empleada. Por otro lado, se han considerado los tres primeros modos de vibración ($n = 3$), con los cuales se aproxima adecuadamente el comportamiento dinámico de la placa. Con las formas modales se obtienen las curvaturas (4.46), a partir de las curvaturas las deformaciones (4.45) y finalmente la deformación equivalente (4.44) para cada uno de los modos considerados. En la Figura 4.8 se muestran los tres primeros modos de vibración $\phi_i(x, y)$ y sus correspondientes mapas de deformaciones equivalentes ε_i^{vM} . El primer y tercer modo son de flexión y el segundo es de torsión. Una vez que se tienen las distribuciones de deformación equivalente, se calcula la función de coste $\Psi(x, y)$ (ecuación (4.43)). Los valores máximos de dicha función se obtienen en $(x = 0.00, y = 0.10)$ y $(x = 0.50, y = 0.10)$. En la Figura 4.9 se representa la función de coste y la localización de los valores máximos de ésta, que son los puntos óptimos donde situar los sensores.

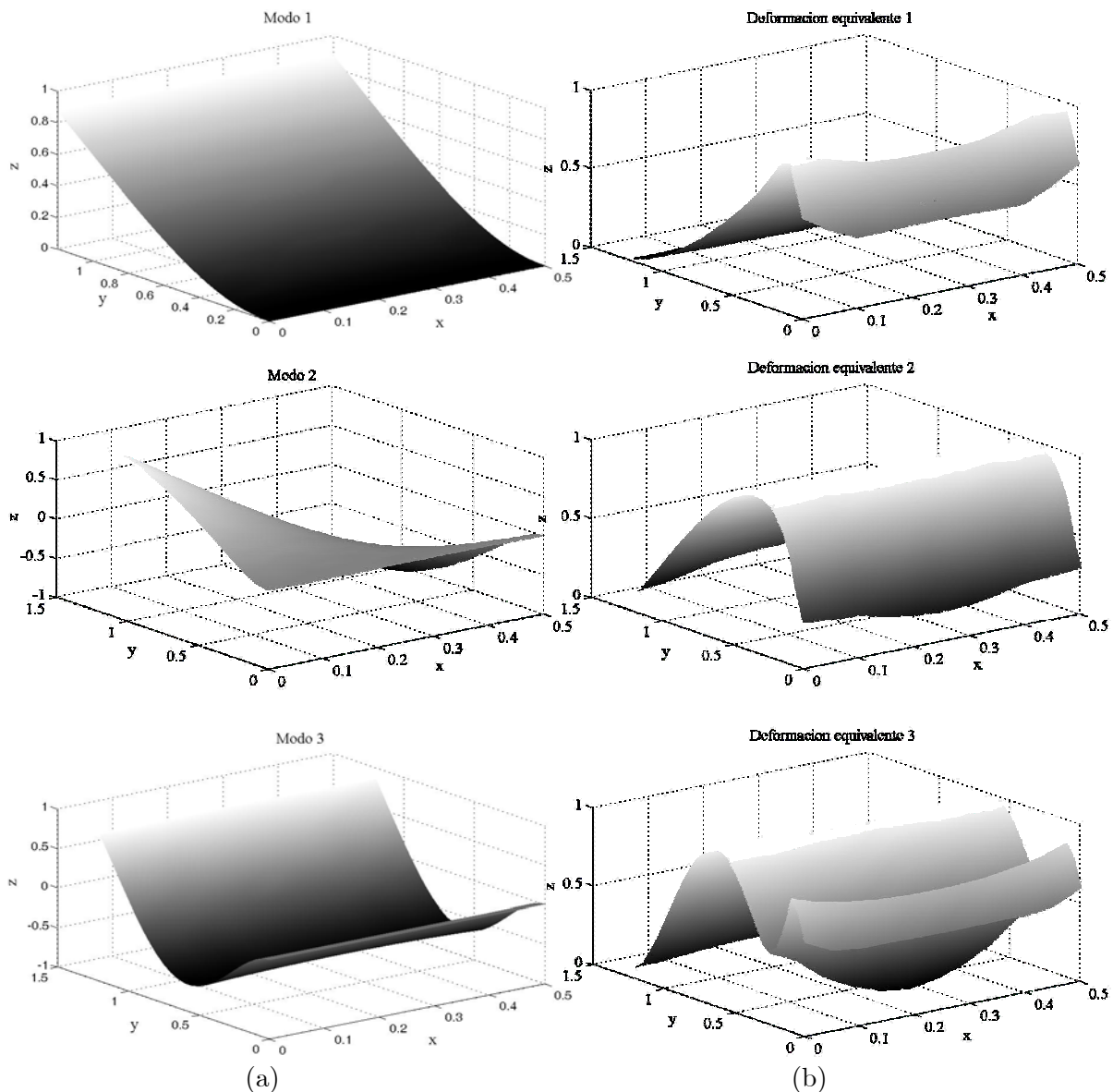


Figura 4.8: Modos de vibración de la placa: modo 1 (1.60Hz), modo 2 (8.02Hz), modo 3 (9.97Hz). a) Desplazamientos. b) Deformación equivalente

Para llevar a cabo la validación experimental del criterio de posicionamiento y la caracterización dinámica de la placa se han empleado rosetas de galgas extensométricas y una roseta de fibra de Bragg. La roseta de fibra de Bragg se ha situado en uno de los puntos óptimos (punto 1) y en el resto de los puntos se ha utilizado rosetas de galgas extensométricas (ver Figura 4.9). En la Figura 4.10 se muestra un diagrama del montaje experimental para el caso en el cual se utiliza fibra de Bragg. La señal procedente de los sensores se demodula mediante el sistema “Interrogator si420”. Tal sistema puede demodular hasta 512 sensores simultáneamente con una frecuencia de

muestreo de 250Hz. Por otro lado, para excitar la placa se ha empleado un martillo instrumentado (ensayo de impacto) y un excitador electromagnético (ensayo armónico).

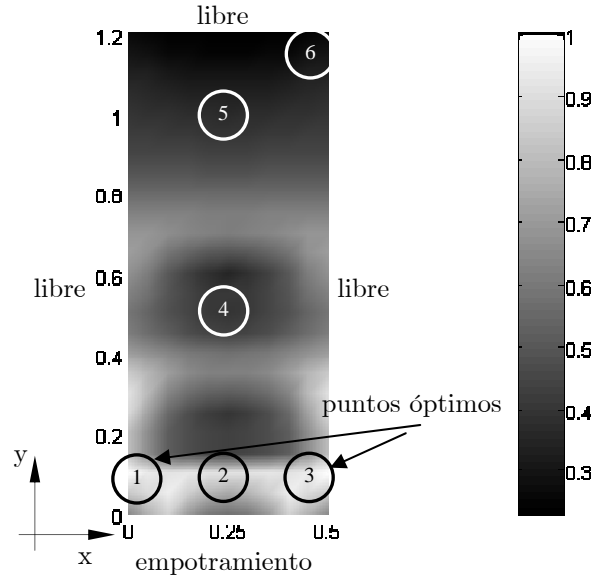


Figura 4.9: Función de coste $\Psi(x,y)$ y puntos estudiados

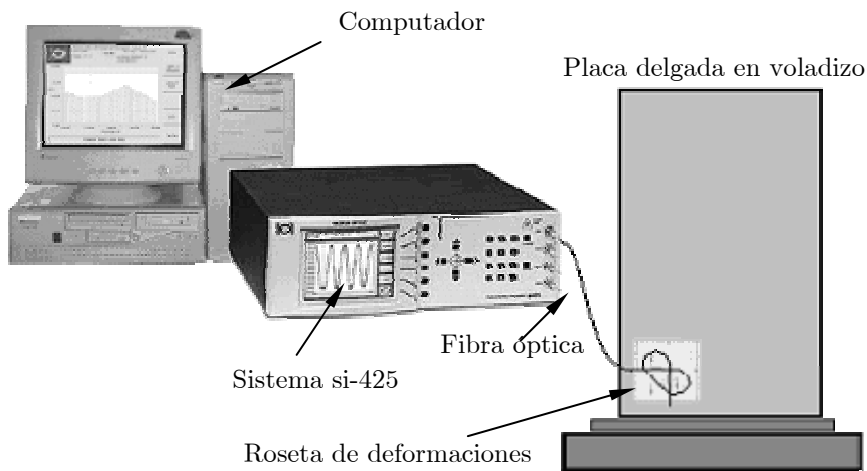
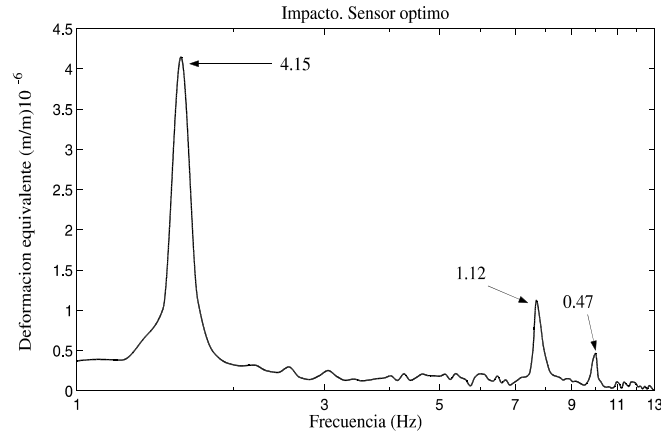


Figura 4.10: Esquema general del montaje de un sistema sensorial basado en fibra de Bragg

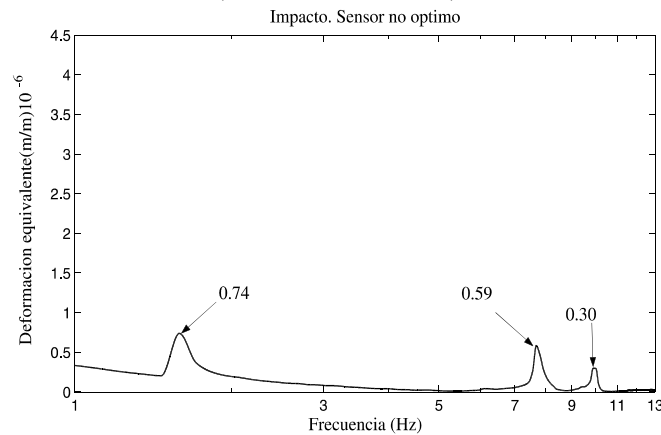
a) Ensayo de impacto.

Se han realizado varios ensayos de impacto y en la Figura 4.11 se muestra uno de ellos correspondiente a un impacto en $(x = 0.00, y = 1.20)$. En concreto, se representa el espectro en frecuencia (la FFT) de la deformación equivalente en uno de los puntos óptimos $(x = 0.00, y = 0.10)$ (Punto 1) (Figura 4.11a) y en otro de los puntos

empleados en la validación ($x = 0.25, y = 1.00$) (Punto 5) (Figura 4.11b). Se observa como la respuesta dada por el sensor situado en el punto óptimo es más observable que la dada por el otro sensor.



a) Espectro en frecuencia de la señal registrada por un punto óptimo $\Psi(x, y) = 1$ y
 $(x = 0.00, y = 0.10)$



b) Espectro en frecuencia de la señal registrada por un punto no óptimo $\Psi(x, y) = 0.78$
y $(x = 0.25, y = 1.00)$

Figura 4.11: Ensayo de impacto. Placa delgada

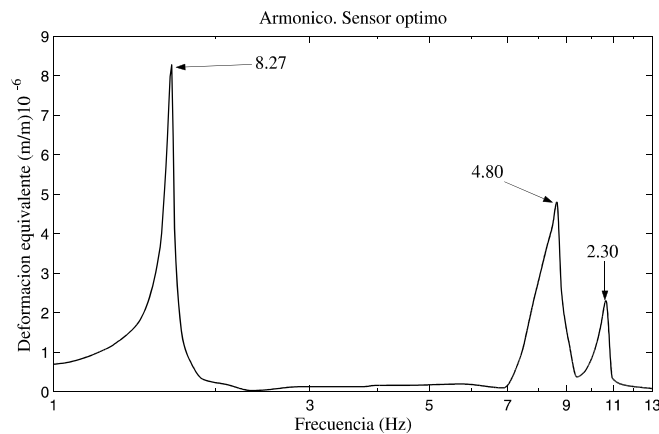
Por otro lado, a partir de la Figura 4.11 se pueden estimar las frecuencias naturales y los amortiguamientos modales. Tras diez ensayos, se han obtenido las siguientes frecuencias naturales para los tres primeros modos (media \pm desviación típica)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 10.00 \pm 0.31 \text{ rad/s} \quad (1.59 \pm 0.05 \text{ Hz}) \\ \omega_2 &= 48.38 \pm 0.94 \text{ rad/s} \quad (7.70 \pm 0.15 \text{ Hz}) , \\ \omega_3 &= 62.83 \pm 1.30 \text{ rad/s} \quad (10.01 \pm 0.20 \text{ Hz}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

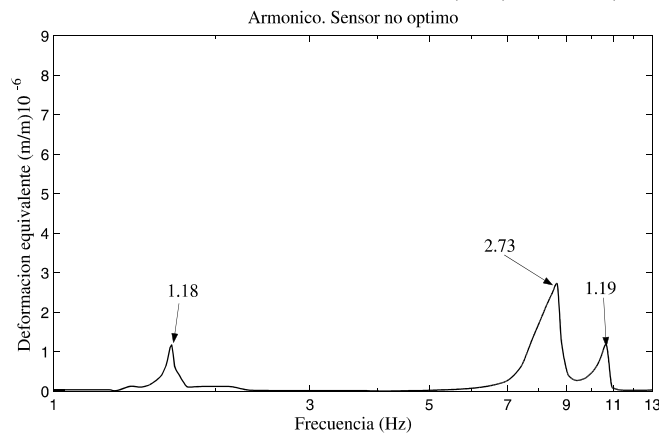
y el amortiguamiento es aproximadamente constante para los tres primeros modos y tiene un valor de $\xi = 0.03 \pm 0.005$.

b) Ensayo armónico.

Se ha aplicado una fuerza armónica en punto $(x = 0.40, y = 0.20)$ con un rango de frecuencias $(0,13)$ Hz y resolución de 0.2Hz. Para ello, se ha empleado un excitador electromagnético y se ha medido la entrada colocando un acelerómetro en el propio excitador. Se ha modificado la frecuencia de excitación y se ha medido la respuesta en régimen permanente con rosetas de deformación, obteniéndose la deformación equivalente. Así, la magnitud de la FRF entre la deformación equivalente medida por un sensor colocado en uno de los puntos óptimo (Punto 1) y la excitación se representa en la Figura 4.12a) y en la Figura 4.12b) se muestra la FRF cuando la salida se mide con un sensor colocado en un punto no óptimo (Punto 5). El sensor colocado en situación óptima refleja con mayor claridad los tres primeros modos de vibración. En la Tabla 4.2 se resumen las amplitudes de las respuestas dadas por los sensores colocados en los puntos analizados.



a) FRF obtenida a partir de un punto óptimo $\Psi(x, y) = 1$ y $(x = 0.00, y = 0.10)$



b) FRF obtenida a partir de un punto no óptimo $\Psi(x, y) = 0.78$ y $(x = 0.25, y = 1.00)$

Figura 4.12: Ensayo armónico. Placa delgada

Tabla 4.2: Amplitudes en el ensayo armónico

Localización			Deformación equivalente			
Puntos	x (m)	y (m)	ε_1^{vM}	ε_2^{vM}	ε_3^{vM}	$\Psi(x, y)$
1	0.00	0.10	8.27	4.80	2.30	1.00
2	0.25	0.10	8.05	4.51	1.50	0.83
3	0.50	0.10	8.27	4.80	2.30	1.00
4	0.00	0.50	4.15	7.81	1.80	0.88
5	0.25	1.00	1.18	2.73	1.19	0.78
6	0.50	1.20	$\cong 0$	$\cong 0$	$\cong 0$	$\cong 0$

4.3 Resumen

En este capítulo se ha estudiado el modelado dinámico de placas delgadas a partir de la EDP que gobierna su dinámica. Además, se ha comentado la realización de modelos de elementos finitos y la obtención de modelos reducidos de masas puntuales. En cuanto a esto último, se ha desarrollado un método para la obtención de estos modelos, basándose en un análisis estático y modal previo. A continuación se ha definido la plataforma experimental y se ha planteado un criterio para el posicionamiento de sensores de deformación; dicho criterio se ha validado experimentalmente empleando fibra de Bragg como sensor de deformación.

Capítulo 5

Estructura articulada

En este capítulo se describe el modelado, diseño y caracterización dinámica de la tercera de las plataformas experimentales, una estructura articulada representativa de grandes estructuras espaciales. Las estructuras aeroespaciales son de grandes dimensiones y ligeras, por lo que presentan unas frecuencias de vibración muy bajas. Por otro lado, suelen tener un diseño modular que permite su ensamblaje, de forma sencilla, en el espacio. En la Figura 5.1a) se muestra un nudo de varias barras realizado mediante la unión Mero (Mero Construction System M12) y en las Figuras 5.1b) y c) se observa a un astronauta realizando labores de montaje de una estructura espacial. La estructura articulada experimental que se va a desarrollar debe representar estas condiciones. Se propone una estructura formada por barras de PVC y uniones Mero de aluminio.

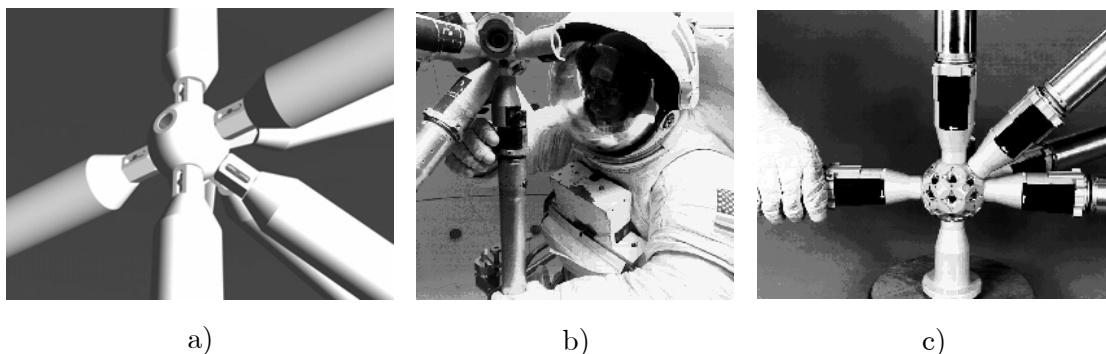


Figura 5.1: a) Unión Mero. b) y c) Labores de montaje de una estructura articulada
(nasa.gov)

La estructura propuesta se cuelga de muelles elásticos a un pórtico rígido de forma que se pretende representar condiciones de contorno libre-libre que son las condiciones

que se presentan en el espacio (ver, por ejemplo, Figura 2.6). Se ha realizado un modelo de elementos finitos de esta estructura colgada y dicho modelo se ha validado experimentalmente mediante ensayos de impacto. Es sumamente importante contar con un modelo que represente satisfactoriamente la plataforma, ya que éste se puede emplear para el posicionamiento de sensores y actuadores y para el desarrollo de modelos reducidos que se puedan utilizar en aplicaciones de control de vibraciones.

5.1 Modelado dinámico

Se considera una estructura articulada, como la de la Figura 5.2, instrumentada con empujadores de aire (sistema todo-nada), que suministran una fuerza en la dirección contraria al escape, y con piezo-actuadores, que provocan un desplazamiento en la dirección axial (Casella y col. 2002). Una estructura articulada está formada por barras que están unidas a través de nudos, de forma que las barras trabajan a tracción/compresión. No obstante, el comportamiento global de la estructura es similar al de una viga, es decir, aparecen tanto modos de flexión como de torsión.

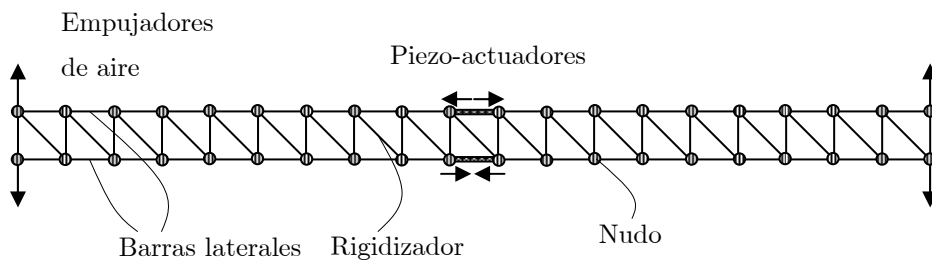


Figura 5.2: Diagrama de una estructuras articulada actuada (vista en planta)

5.1.1 Modelado mediante elementos finitos

A continuación se describe el modelado dinámico de estructuras de barras. La ecuación que gobierna el comportamiento dinámico de una barra es (Meirovitch, 1997)

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \rho_L \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t), \quad (5.1)$$

donde $u(x, t)$ es el desplazamiento longitudinal a lo largo de la coordenada longitudinal x , E , A y ρ_L son el módulo de elasticidad, el área transversal y la densidad lineal, respectivamente, y $f(x, t)$ es la fuerza distribuida axial.

Si se considera el método de los elementos finitos, se lleva a cabo una discretización espacial mediante elementos de dos nudos. Las coordenadas generalizadas (o grados de libertad) de dichos elementos son el desplazamiento longitudinal de cada nudo (ver Figura 5.3).

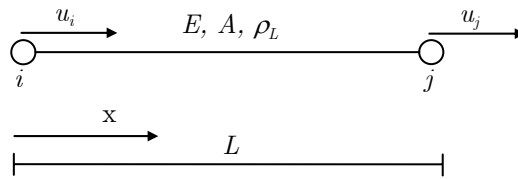


Figura 5.3: Elemento tipo barra. Coordenadas generalizadas

Dado que el elemento tiene dos grados de libertad, el desplazamiento longitudinal en el elemento $\tilde{u}(x, t)$ se aproxima mediante el siguiente polinomio de grado uno

$$\tilde{u}(x, t) \approx a_1(t)x + a_2(t). \quad (5.2)$$

Si se aplican las condiciones de contorno en el elemento

$$\tilde{u}(0, t) = u_i(t); \quad \tilde{u}(L, t) = u_j(t), \quad (5.3)$$

y se combinan con (5.2), se obtiene la siguiente aproximación para el desplazamiento longitudinal en el elemento

$$\tilde{u}(x, t) \approx \left[1 - \frac{x}{L}\right]u_i(t) + \left[\frac{x}{L}\right]u_j(t). \quad (5.4)$$

La expresión (5.4) se puede expresar como

$$\tilde{u}(x, t) \approx \varphi_1(x)u_i(t) + \varphi_2(x)u_j(t), \quad (5.5)$$

donde $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son las funciones de aproximación o funciones de forma.

Procediendo de igual forma que en el Capítulo 3 (Apartado 3.1.2.1) y suponiendo una estructura formada por N nudos (y por tanto, N grados de libertad), se obtiene la forma matricial del problema

$$\underline{M}\ddot{\underline{\delta}}(t) + \underline{K}\underline{\delta}(t) = \underline{F}(t), \quad (5.6)$$

con $\underline{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matriz de masa diagonal, $\underline{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matriz de rigidez, $\underline{\delta} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ vector de desplazamientos nodales y $\underline{F} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ vector de fuerzas externas aplicadas en cada nudo en la dirección del grado de libertad correspondiente.

5.1.2 Modelado incluyendo actuadores

Seguidamente se comenta el modelado de los actuadores que se representan en el diagrama de la Figura 5.2. Los empujadores de aire se pueden construir a partir de electroválvulas normalmente cerradas de aire comprimido de forma que cuando se abra una de las salidas, en la cual se sitúa una tobera, se consigue una fuerza en la dirección contraria al escape. Esta fuerza se puede considerar aproximadamente constante y así, el empujador de aire se utiliza como un actuador todo-nada. Los empujadores de aire se pueden modelar como una fuerza aplicada en el nudo correspondiente. Si se consideran n_e empujadores, se puede construir la matriz de influencia $\underline{\alpha}_e \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que

$$\underline{F}(t) = \underline{\alpha}_e \underline{u}_e, \quad (5.7)$$

donde $\underline{u}_e \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ es la señal de control. Para mejorar la precisión del modelo sería recomendable añadir la masa del empujador en el nudo correspondiente.

Los piezo-actuadores están formados por una parte activa (material piezoeléctrico) y una pasiva (ver Figura 5.4). La parte activa es un tubo piezoeléctrico que se polariza en la dirección radial y genera desplazamientos en la dirección axial. Por otro lado, la parte pasiva se modela como un elemento tipo barra (como el de la Figura 5.3). A continuación se definen los siguientes parámetros: z_1 y z_2 son, respectivamente, las elongaciones de la parte activa y de la parte pasiva, z_t es la elongación total, V_a el voltaje aplicado, F la fuerza axial resultante, k_1 la rigidez del elemento activo, k_2 la rigidez del elemento pasivo (nótese que $k_1 \gg k_2$) y d la constante de carga piezoeléctrica que relaciona la elongación con el voltaje. La elongación de la parte activa viene dada por

$$z_1 = F/k_1 + V_a d, \quad (5.8)$$

y la elongación de la parte pasiva por

$$z_2 = F/k_2. \quad (5.9)$$

Entonces, la elongación total se calcula como

$$z_t = z_1 + z_2. \quad (5.10)$$

De (5.8), (5.9) y (5.10), se obtiene la fuerza resultante en el elemento piezo-actuado

$$F = k_t z_t - k_t V_a d \text{ con } k_t = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (5.11)$$

Tal fuerza se traduce en sendas fuerzas aplicadas en los nudos que se incorporan al vector de cargas.

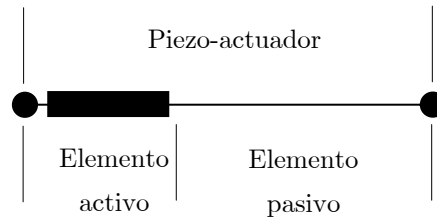


Figura 5.4: Diagrama de un piezo-actuador empleado en estructuras articuladas

5.2 Definición de la plataforma experimental

En esta sección se describen los elementos más importantes en el desarrollo y diseño de la plataforma estructura articulada.

5.2.1 Diseño de la plataforma

La plataforma desarrollada se muestra en la Figura 5.5. Dicha plataforma está formada por 16 módulos de 250mm de longitud cada uno que dan lugar a una estructura de 4m de longitud total. Cada módulo es una pirámide invertida de base cuadrada. En la base se incluye un elemento rigidizador (barra diagonal). Con este montaje se minimiza el número de barras empleadas. Las barras se han construido de material plástico (PVC) y los nudos son uniones de aluminio. En la Figura 5.6 se muestra un nudo de unión. Cada nudo dispone de 18 agujeros de M12 con ángulos (con respecto a la horizontal) de 45°, 60°, 90°, 120°, 135° y 180°. La estructura está formada por 16 módulos que suman un total de 144 barras y 50 nudos que resultan en un peso total de aproximadamente 12kg. La estructura está suspendida por cuatro muelles que están conectados a una estructura porticada muy rígida. En la Tabla 5.1 se muestran las propiedades físicas y mecánicas de los elementos de la estructura.

Por otro lado, cabe destacar que se ha elegido PVC ya que la relación entre el módulo de elasticidad y la densidad es más baja que en otros materiales, como aluminio o nylon, lo cual se traduce en frecuencias de vibración más bajas. Si se considera la estructura como una viga, las frecuencias de vibración son proporcionales a la raíz cuadrada de la relación entre el módulo de elasticidad y la densidad $\sqrt{E/\rho}$. Así, por ejemplo, para el aluminio esta relación es aproximadamente 160, para el nylon es 85 y para el PVC es 45. Otros condicionantes importantes son que el material debe ser fácilmente mecanizable, de fácil adquisición y de bajo coste.

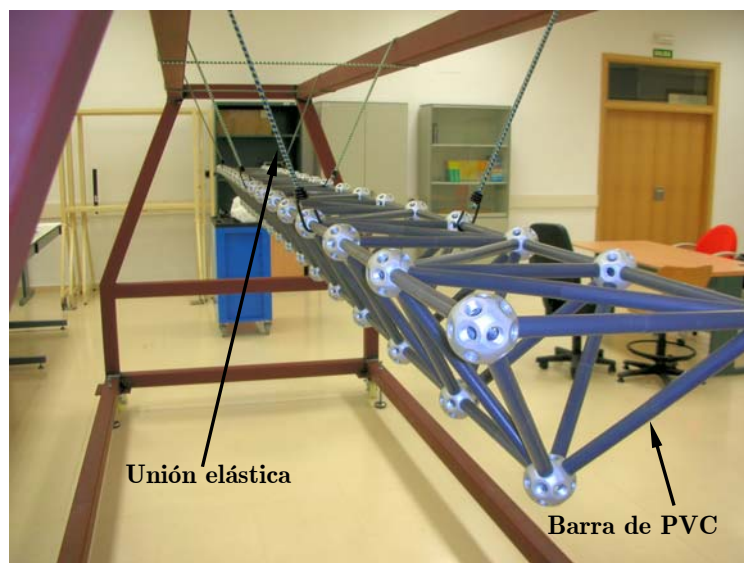


Figura 5.5: Plataforma experimental. Estructura articulada libre-libre formada por barras de PVC y uniones de aluminio

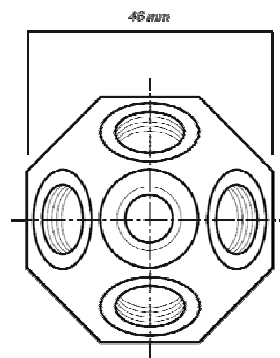


Figura 5.6: Unión Mero. Nudo roscado de aluminio

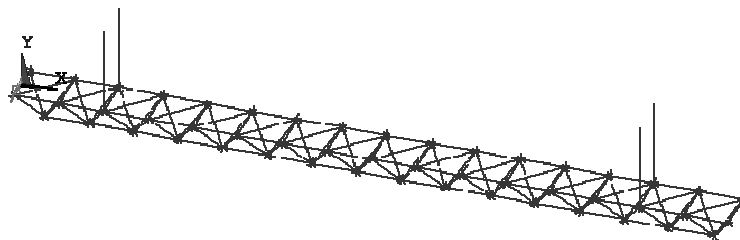
Tabla 5.1: Propiedades físicas y mecánicas de la estructura articulada

Barras	Diámetro 15mm	Material PVC	Densidad 1250kg/m ³	Módulo de elasticidad 1.3×10 ⁹ N/m ²
Nudos	Diámetro 46	Material Aluminio	Masa 80gr	
Muelles	Longitud nominal 0.65m	Rigidez 113N/m	Masa 0.5kg	

5.2.2 Caracterización dinámica

Uno de los objetivos de este apartado es obtener algunos resultados preliminares que permitan corregir la situación de los muelles de forma que la estructura se comporte como libre-libre. Es decir, las frecuencias del sólido rígido deben estar completamente desacopladas de las frecuencias de vibración. Otro objetivo es realizar un modelo de elementos finitos y validarlo mediante ensayos dinámicos experimentales. Dicho modelo se podrá utilizar para diseños posteriores encaminados a la instalación de sensores y actuadores para la cancelación de vibraciones. Una vez validado el modelo, se puede emplear para la decisión del posicionamiento de sensores y actuadores y para la obtención de modelos reducidos (como el presentado en el Apartado 4.1.2.2) que permitan el desarrollo de algoritmos de control en tiempo real.

Se ha realizado un modelo de elementos finitos (ver Figura 5.7) en el cual la rigidez de la estructura se ha concentrado en las barras (utilizando un único elemento barra) y la masa (tanto de las bolas como de las barras) en los nudos. Los muelles de suspensión se han modelado mediante elementos elásticos sin masa y su masa se ha añadido a los nudos de unión.

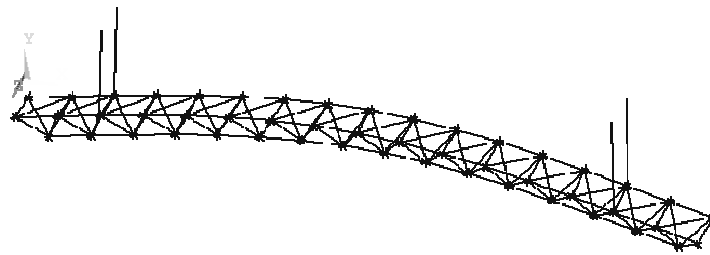
**Figura 5.7:** Modelo de elementos finitos. Estructura articulada colgada

Se ha realizado un análisis estático previo utilizando únicamente como carga externa la gravedad. De este análisis se ha obtenido que la flecha máxima relativa (con respecto a las uniones de los muelles con la estructura) es de menos del 0.1% de la longitud total, y por tanto, es despreciable. Con este análisis se demuestra que la estructura está perfectamente balanceada.

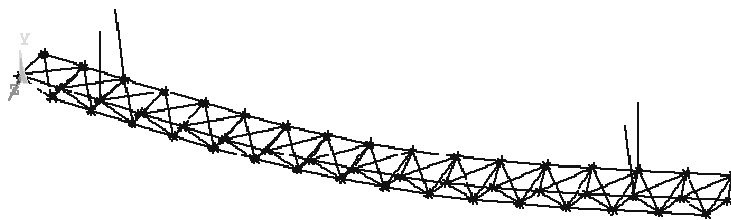
Se ha realizado un análisis modal utilizando dos modelos de elementos finitos. En el primero se ha considerado la estructura libre-libre (ideal), y en el segundo se han incluido los muelles tal y como se ha comentado anteriormente. De esta forma, se comprueba la influencia de éstos en los modos de sólido rígido y en los modos de vibración. En la Tabla 5.2 se muestra el resultado obtenido y en la Figura 5.8 se representan los cinco primeros modos de vibración extraídos del modelo en el que se incluyen los muelles. Entre los modos obtenidos se encuentran cuatro modos de flexión (en los dos planos) y un modo de torsión.

Tabla 5.2: Frecuencias de la estructura articulada. Modelo libre-libre. Modelo con muelles. Valores medidos

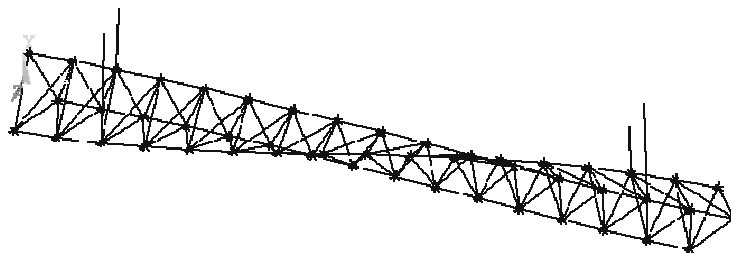
Modo	Forma modal	Modelo libre-libre (Hz)	Modelo con muelles (Hz)	Valores medidos (Hz)
1	Desplazamiento X	0	0.0	—
2	Giro Y	0	0.38×10^{-5}	—
3	Desplazamiento Z	0	0.87×10^{-5}	—
4	Desplazamiento Y	0	0.92	—
5	Giro X	0	1.00	—
6	Giro Z	0	1.18	—
7	1ª Flexión vertical	12.73	12.75	12.82
8	1ª Flexión horizontal	15.31	15.31	15.20
9	1ª Torsión	27.78	27.81	27.75
10	2ª Flexión vertical	33.17	33.17	33.25
11	2ª Flexión horizontal	38.38	38.38	38.50



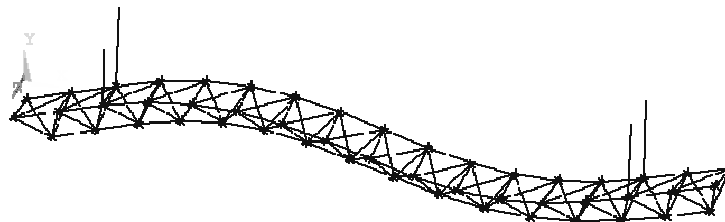
a) 1ª Flexión vertical



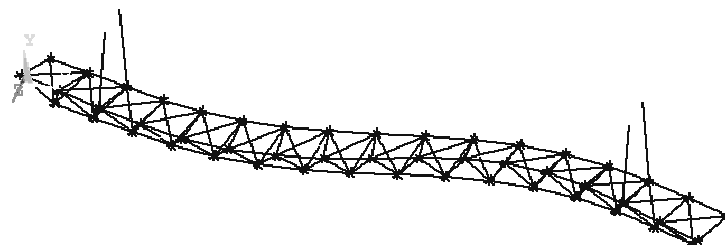
b) 1ª Flexión horizontal



c) 1ª Torsión



d) 2ª Flexión vertical



e) 2ª Flexión horizontal

Figura 5.8: Modos de vibración de la estructura articulada colgada

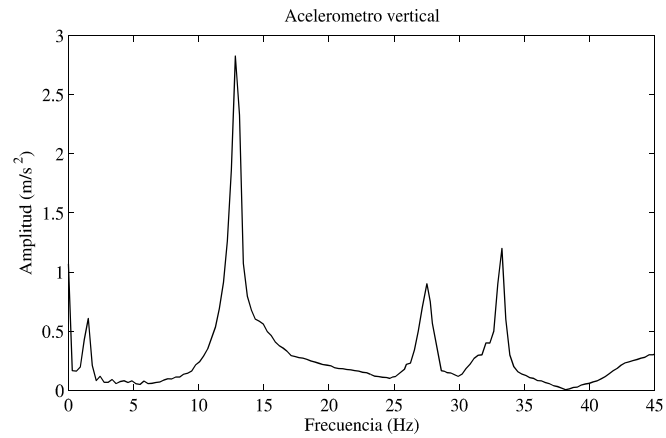
Para validar el modelo se han llevado a cabo varios ensayos de impacto utilizando un acelerómetro en plano vertical (eje-y) y otro en el plano horizontal (eje-z). Los

acelerómetros se han situado en uno de los nudos laterales de un módulo extremo de forma que se excitan tanto los modos de flexión como el modo de torsión representados en la Figura 5.8. No se ha empleado un tercero en el eje-x ya que las frecuencias axiales son muy elevadas y no aparecen en los ensayos. A continuación se discute brevemente la situación de los sensores. Si se considera la primera flexión (tanto vertical como horizontal) el máximo desplazamiento se alcanza en los extremos de la estructura. En cuanto a la segunda flexión, nuevamente el máximo desplazamiento se obtiene en los extremos. Finalmente, el modo de torsión tiene su máxima rotación también en los extremos libres. Por tanto, se concluye que, para los modos analizados, el posicionamiento óptimo de los acelerómetros es en los módulos extremos y en sus nudos laterales. Por otro lado, el punto de excitación óptimo es el mismo que el de medida; así, el impacto se realiza en el otro nudo lateral (donde no se han situado los sensores). Dicho impacto se realiza con un ángulo de aproximadamente 45° con la horizontal, de forma que se excitan tanto los modos verticales como los horizontales, y por supuesto, el de torsión.

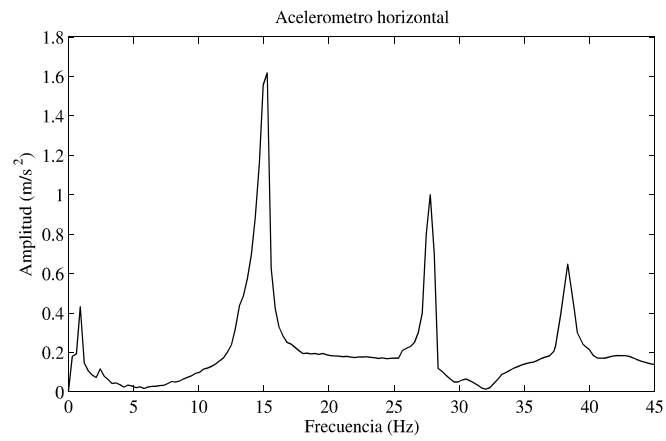
Uno de los ensayos realizado se muestra en la Figura 5.9, donde se observa como el modo de torsión es captado por ambos acelerómetros (27.75Hz) mientras que los modos de flexión vertical son captados por el acelerómetro situado en vertical (Figura 5.9a) y los horizontales por el situado en horizontal (Figura 5.9b). En la Tabla 5.2, en la última columna, se muestran las frecuencias medidas después de realizar varios ensayos utilizando distintas frecuencias de muestreo y diferentes cabezas de impacto en el martillo instrumentado. Se observa como los modelos realizados reproducen de forma bastante exacta el comportamiento dinámico de la estructura.

5.3 Resumen

En este capítulo se ha construido una estructura articulada representativa de grandes estructuras espaciales, estudiándose aquella en condiciones de contorno libre-libre. Dicha estructura es modular y fácilmente ampliable en su longitud. Además, se ha realizado un modelo de elementos finitos validado mediante ensayos de impacto.



a) Espectro en frecuencia de la señal registrada por el acelerómetro vertical



b) Espectro en frecuencia de la señal registrada por el acelerómetro horizontal

Figura 5.9: Ensayo de impacto. Estructura articulada

Capítulo 6

Modificación de la dinámica para la simplificación de controladores en cadena abierta

En este capítulo se aborda la eliminación de vibraciones en el robot flexible de un grado de libertad, empleando un controlador en cadena abierta. El objetivo de control es general una trayectoria que permita posicionar el extremo de forma precisa, mientras que se reduce la vibración residual que resulta una vez finalizada la maniobra. Más específicamente, la finalidad principal de este capítulo es explotar las propiedades dinámicas del sistema, de forma que un controlador diseñado para un solo modo de vibración sea capaz de cancelar la vibración debida a varios modos. Así, se propone una modificación de la dinámica, que permite aplicar un controlador sencillo a varios modos, mientras que se mantiene el tiempo de respuesta del sistema.

La primera parte de este capítulo se dedica a los controladores en cadena abierta en general y a los basados en el moldeo de la trayectoria en particular. A continuación se motiva el hecho de modificar la dinámica del sistema y se presenta un ejemplo de aplicación a un robot de un grado de libertad. La modificación de la dinámica se realiza atendiendo a dos condiciones: 1) las frecuencias deben cumplir unas ciertas relaciones respecto a una frecuencia de diseño y 2) dichas frecuencias se deben modificar lo menos posible ante variaciones en un parámetro; este parámetro será el valor de la carga del extremo que transporta el robot de un grado de libertad. Con estos condicionamientos se elabora un criterio de optimización.

6.1 Control en cadena abierta

Los esquemas de control en cadena abierta (o lazo abierto) se basan en el desarrollo de una entrada (entrada moldeada) que no excita las frecuencias de vibración del sistema ($r(t)$ en la Figura 1.3). Estas técnicas pueden clasificarse en dos grupos: moldeado precalculado y moldeado en tiempo real.

Existen diversas técnicas para precalcular comandos de referencia que no exciten las frecuencias de vibración del sistema. Por ejemplo, Aspinwall (1980) propuso un método basado en la expansión de Fourier que reducía los picos del espectro de frecuencia en diversos puntos. Otra alternativa son los comandos de tiempo óptimo (control toda-nada) (Onsay y Akay, 1991). El principal problema de estos comandos precalculados es que no se garantiza la cancelación de la vibración si se produce un cambio en la trayectoria.

La otra técnica, moldeado en tiempo real, consiste en filtrar la referencia para generar la trayectoria (ver Figura 6.1). Para sistemas lineales los filtros pueden ser de respuesta impulsiva finita (“Finite impulsive response” FIR) o de respuesta impulsiva infinita (“Infinite impulsive response” IIR). En las técnicas basadas en el filtrado se incluyen filtros paso bajo, elimina banda y filtros de ranura (Tokhi y Poerwanto, 1996). Un caso particular de un filtro FIR es la llamada técnica del moldeado de comando (“command preshaping technique” CPT) que se utiliza en la cancelación de vibraciones en sistemas mecánicos. Dicha técnica se implementa mediante la convolución del comando de referencia con una secuencia de impulsos (ver Figura 6.2). Esta técnica fue descrita en detalle por Singer y Seering (1990). Otra versión del moldeado de la trayectoria es el control en lazo abierto discreto (“discrete feedforward control” DFC), el cual se basa en una inversión aproximada de la dinámica discreta del sistema (Rattan y Feliu (1992) y Feliu y Rattan (1999)). Por otro lado, se puede demostrar que en ciertos casos se llega a un mismo filtro FIR tanto utilizando DFC como CPT (Feliu y col., 2006).

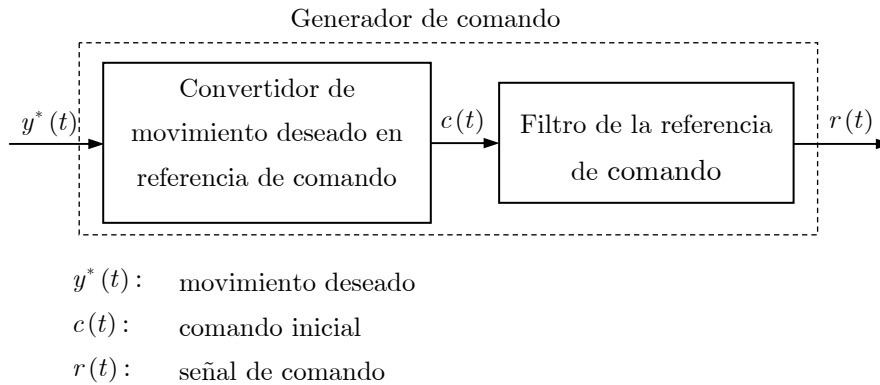


Figura 6.1: Generador de comando en tiempo real

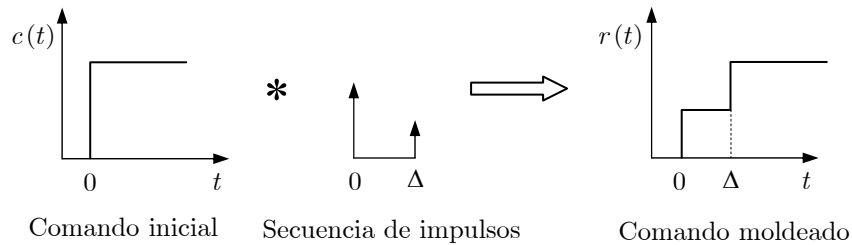


Figura 6.2: Moldeado de la trayectoria con una secuencia de impulsos. El parámetro Δ indica la longitud (duración) de la secuencia

El caso más general de control en cadena abierta es aquél diseñado para un sistema de varios modos de vibración y con grandes incertidumbres en el modelo. Existen varias formas de abordar el problema. La primera consiste en diseñar un controlador para cada modo de vibración. Cada controlador debe garantizar que la vibración residual se encuentre por debajo de un cierto valor máximo y debe presentar una cierta robustez a incertidumbres en los parámetros. Un ejemplo de esta técnica es el trabajo de Mohamed y col. (2005). El principal inconveniente de esta técnica es que el número de impulsos resultante es muy elevado lo que conduce a una respuesta del sistema muy lenta. Una forma de disminuir el número de impulsos y/o la complejidad del controlador es utilizar un solo controlador para la cancelación de varios modos. Feliu y Rattan (1999) proponen un control que cancela dos modos de vibración simultáneamente minimizando el tiempo de la secuencia. El inconveniente en este caso es que para soluciones robustas el esfuerzo de control necesario es muy elevado. Shan y col. (2005) aprovechan la relación entre los dos primeros modos de su sistema para cancelar ambos modos con un único controlador. Sin embargo, no se plantea una metodología para la obtención de dicha relación.

Con todo lo anterior, en este capítulo se propone modificar la dinámica del sistema para reducir la variación de las frecuencias naturales debido a cambios en un parámetro. Además, estas frecuencias deben cumplir unas ciertas relaciones entre ellas. De esta forma, la modificación propuesta permite diseñar un controlador en cadena abierta (basado en CPT) que cancela varios modos de vibración y que tiene la estructura equivalente a un controlador diseñado para un solo modo de vibración. Así, se disminuye el número de impulsos para unas especificaciones de robustez dadas.

6.2 Controladores basados en el moldeo de la trayectoria

Como ya se ha comentado, la técnica CPT involucra la convolución de la referencia deseada con una secuencia de impulsos. De esta forma, se debe determinar tanto la amplitud como el tiempo de cada uno de los impulsos para que la vibración resultante sea nula. Si el controlador es capaz de eliminar completamente la vibración a una frecuencia determinada, se denomina ZV (“zero vibration” ZV). Sin embargo, en aplicaciones reales, siempre existen incertidumbres en el modelo, y por tanto, es necesario emplear una versión robusta del ZV que se denomina ZVD (“zero vibration and derivative” ZVD). Este último se obtiene al aplicar un ZV a la vibración residual obtenida de aplicar un ZV inicial. Igualmente, se puede aplicar un nuevo ZV a la salida del ZVD y se obtiene un ZVDD, y así sucesivamente. Por otro lado, el aumento de la robustez se consigue a costa de un incremento en el tiempo de subida (tiempo requerido para que la respuesta pase del 10% al 90% del valor final), es decir, la respuesta del sistema es más lenta. Esto es, con un ZV se necesita medio periodo de la señal para eliminarla. Esto significa que la referencia moldeada emplea medio periodo más para alcanzar el punto final deseado (este es el valor Δ en la Figura 6.2). Por otro lado, por ejemplo, un ZDV tiene una duración de un periodo de la vibración. En la Figura 6.3 se muestra la curva de sensibilidad, en la cual se representa en el eje de ordenadas la vibración residual (vibración con entrada moldeada dividida por la vibración con entrada sin moldear) y en el eje de abscisas la frecuencia normalizada (la frecuencia real dividida por la frecuencia del modelo). En dicha figura se representan la curva para un ZV, un ZVD y un ZVDD, observándose el aumento de robustez del segundo frente al primero y del tercero frente al segundo y al primero. Por ejemplo, si se considera un nivel de vibración residual aceptable del 10% tal y como se indica en la figura, con un

ZV se tiene un intervalo de robustez normalizada de 0.12, con un ZVD de 0.40 y con un ZVDD de 0.60.

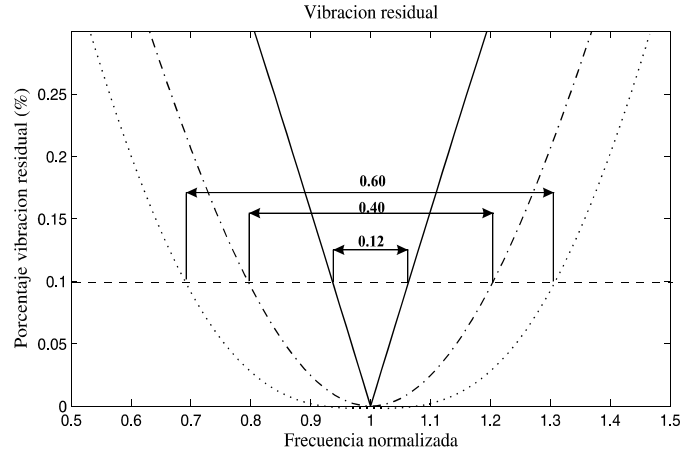


Figura 6.3: Curvas de sensibilidad para un ZV (—), ZVD (---), ZVDD (··) y vibración residual permitida (--)

A continuación se considera un oscilador armónico de segundo orden no amortiguado con una frecuencia natural ω al que se le aplica la técnica CPT. La vibración residual de dicho sistema se puede expresar como sigue (Singer y Seering, 1990)

$$V(\omega) = \sqrt{[C(\omega)]^2 + [S(\omega)]^2}, \quad (6.1)$$

con

$$C(\omega) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega t_i), \quad S(\omega) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega t_i), \quad (6.2)$$

siendo A_i y t_i las amplitudes y la localización temporal de los impulsos, respectivamente, y N el número de impulsos.

Si se acepta que el primer impulso se aplica en el tiempo inicial $t_1 = 0$, un ZV debe anular la vibración residual con una secuencia de dos impulsos ($N = 2$). Así, las ecuaciones de diseño son

$$C(\omega) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega t_i) = 0, \quad S(\omega) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega t_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^N A_i = 1. \quad (6.3)$$

La última ecuación se debe a que si un comando se obtiene mediante la convolución de una secuencia de impulsos finitos, las amplitudes de dichos impulsos deben sumar uno para que el comando moldeado alcance el mismo punto final que el comando sin moldear. La resolución de las ecuaciones (6.3) conduce a los siguientes parámetros que definen la secuencia de impulsos:

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}; t_1 = 0; t_2 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}, \quad (6.4)$$

donde T es el periodo de la señal que se pretende eliminar. Es importante destacar que el segundo impulso se debe aplicar a la mitad del periodo T en el caso de un ZV.

Las ecuaciones de diseño para un ZVD son las siguientes ($N = 3$)

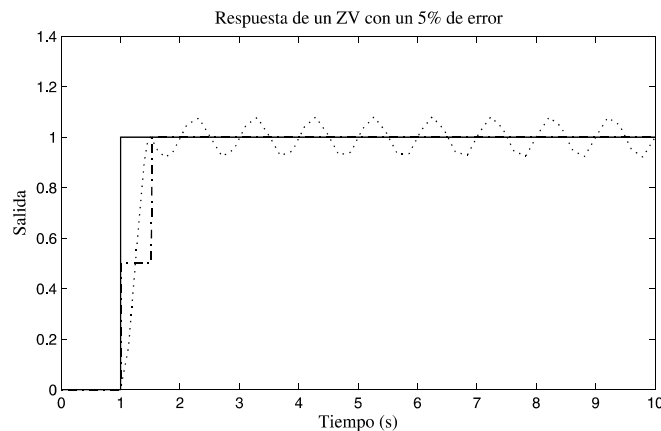
$$\frac{dC(\omega)}{d\omega} = -\sum_{i=1}^N A_i t_i \sin(\omega t_i) = 0, \quad \frac{dS(\omega)}{d\omega} = \sum_{i=1}^N A_i t_i \cos(\omega t_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^N A_i = 1. \quad (6.5)$$

El resultado de resolver (6.5) es

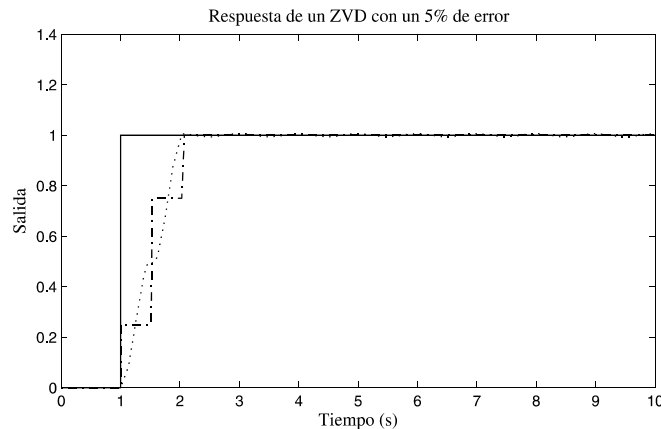
$$A_1 = A_3 = \frac{1}{4}; A_2 = \frac{1}{2}; t_1 = 0; t_2 = \frac{\pi}{\omega}; t_3 = \frac{2\pi}{\omega} = T. \quad (6.6)$$

En este caso, el tiempo final es el periodo T de la señal. Un aumento en la robustez va acompañado de un aumento en el tiempo subida. Este proceso se lleva a cabo de forma similar para cualquier otra versión robusta del ZV.

A continuación, para ilustrar la necesidad de utilizar, en aplicaciones reales, una versión robusta del ZV, se toma un oscilador armónico no amortiguado donde existe un error en la frecuencia del modelo de un 5%. En la Figura 6.4a) se muestra la respuesta utilizando un ZV y en la Figura 6.4b) utilizando un ZVD, que se puede entender también como un ZV de la vibración residual de un ZV inicial. En este ejemplo se observa como la vibración resultante al aplicar un ZV es significativa; sin embargo, cuando se utiliza un ZVD, la vibración resultante es prácticamente nula. Es interesante observar también el aumento en el tiempo de subida cuando se emplea un ZVD en lugar de un ZV.



- a) Respuesta con un ZV si existe un error del 5% en la frecuencia. Se utilizan $N = 2$ impulsos



b) Respuesta con un ZVD si existe un error del 5% en la frecuencia. Se utilizan $N = 3$ impulsos

Figura 6.4: Respuesta de un ZV y un ZVD ante incertidumbres. Referencia de comando (—); Comando moldeado (---); Salida (··)

6.3 Motivación de la modificación de la dinámica

A continuación se demuestra que, dado un ZV o un ZVD, se alcanza la condición de vibración nula para la frecuencia de diseño $\omega = \omega_0$ (o frecuencia fundamental) y para todas las frecuencias que sean múltiplos impares de ésta. Matemáticamente se expresa mediante la siguiente condición

$$\omega_i = c_i \omega_0; \text{ con } c_i = (2k + 1) \text{ y } k \in \mathbb{N}. \quad (6.7)$$

La condición (6.7) se demuestra como sigue:

1. La respuesta impulsiva de un ZV se puede escribir como

$$r(t) = \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \text{ con } T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (6.8)$$

siendo δ una delta de Dirac.

2. La transformada de Laplace de (6.8) es la función de transferencia de un ZV, y queda como sigue

$$R(s) = \frac{1 + e^{-s\frac{\pi}{\omega_0}}}{2}. \quad (6.9)$$

3. La condición de vibración nula se obtiene de la siguiente expresión

$$R(s)|_{s=j\omega} = 0 \rightarrow e^{-j\omega \frac{\pi}{\omega_0}} = -1, \quad (6.10)$$

de donde se deduce la condición (6.7).

En este capítulo se propone modificar la dinámica del sistema de forma que las frecuencias más importantes del mismo cumplan la relación dada por (6.7). De esta forma, se cancelan los modos más significativos utilizando un controlador en cadena abierta, o prefiltro, diseñado únicamente para la frecuencia fundamental.

6.4 Aplicación a un robot de un grado de libertad

El objetivo de este apartado es desarrollar un método que permita modificar la dinámica del sistema mecánico robot flexible de un grado de libertad (ver Figura 3.1) de forma que las frecuencias, correspondientes a los modos de vibración más significativos, cumplan la condición (6.7). Esta modificación, a su vez, debe provocar que dichas frecuencias sean poco sensibles a cambios en la masa del extremo. Por tanto, se consigue que un prefiltro, o controlador en cadena abierta, diseñado mediante la técnica CPT y para la frecuencia fundamental cancele la vibración no sólo de este modo de vibración sino también de los modos sucesivos. Este hecho tiene implicaciones inmediatas ya que se consigue una reducción drástica de la complejidad tanto en el diseño como en los filtros resultantes, lo cual se traduce en una reducción de la longitud de la secuencia y, por tanto, en el tiempo de subida. Por otro lado, el esquema de control debe ser capaz de eliminar de forma efectiva la vibración residual, mientras que el extremo debe alcanzar la posición final dada por la orden de comando.

6.4.1 Estrategia general de control

La estrategia general de control se describe en la Figura 6.5. En la figura, θ_t y θ_t^* son la posición angular del extremo y su referencia (o trayectoria deseada), y θ_m y θ_m^* son la posición angular del motor y su referencia (o trayectoria deseada). La función de transferencia $G_m(s)$ se obtiene como resultado de aplicar un servo de posición al motor, $[C(s)]^q$ es el controlador en cadena abierta empleado para la cancelación de la vibración dada por $G_1(s)$, que es la función de transferencia que relaciona el ángulo del extremo

con el ángulo del motor. Por otro lado, el término q indica el grado de robustez del controlador, esto es, $q = 1$ indica un ZV, $q = 2$ un ZVD, $q = 3$ un ZVDD, y así sucesivamente.

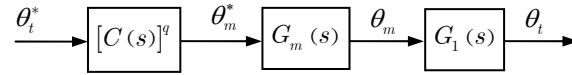


Figura 6.5: Estrategia general de control cuando se emplea un controlador en cadena abierta

6.4.2 Modificación de la dinámica del robot flexible

El objetivo de este apartado es plantear un método para la modificación de la dinámica de forma que las frecuencias naturales del sistema sean múltiplos impares de una frecuencia fundamental (es decir, que cumplan la condición (6.7)) y que la variación de éstas al cambiar la masa de la carga sea mínima. Esta segunda propiedad permite mejorar el grado de robustez, mientras que se mantiene la velocidad de respuesta del sistema. El método que se preconiza consiste en la adición de pequeñas masas en puntos específicos del eslabón. A este hecho se le denomina equilibrado del eslabón a lo largo del capítulo.

Se considera la vibración libre y sin amortiguamiento del brazo flexible dada por la ecuación (ver ecuación (3.51))

$$\underline{M}\ddot{\underline{\theta}}(t) + \underline{K}\underline{\theta}(t) = 0. \quad (6.11)$$

A continuación se definen los siguientes parámetros adimensionales: la masa de la carga adimensional se define como

$$\hat{M}_p = \frac{M_p}{M_b}, \quad (6.12)$$

con $M_b = \rho_L L$ la masa del eslabón y M_p la masa de la carga; la masa añadida adimensional como

$$\hat{m}_a = \frac{m_a}{M_b}, \quad (6.13)$$

con m_a la masa añadida en x_a ; la coordenada espacial se normaliza con la longitud del eslabón L

$$\hat{x}_a = \frac{x_a}{L}; \quad (6.14)$$

y finalmente, la frecuencia adimensional se calcula como

$$\hat{\omega}_i^2 = \frac{\rho_L L^4}{EI} \omega_i^2, \quad (6.15)$$

con ω_i las frecuencias naturales.

Por otro lado, la matriz de masa \underline{M} y la matriz de rigidez \underline{K} se pueden expresar como

$$\underline{M} = \rho_L L \hat{\underline{M}}; \quad \underline{K} = \left(\frac{EI}{L^3} \right) \hat{\underline{K}}, \quad (6.16)$$

donde $\hat{\underline{M}}$ y $\hat{\underline{K}}$ son matrices adimensionales que dependen de la discretización realizada, de la masa de la carga M_p y de las masas añadidas para equilibrar el eslabón.

A partir del análisis modal de (6.11) y los parámetros adimensionales dados por (6.12)-(6.16), se obtiene el siguiente problema de autovalores y autovectores

$$\det(\hat{\underline{M}}^{-1} \hat{\underline{K}} - \hat{\omega}_i^2 \underline{I}) = 0; \quad (\hat{\underline{M}}^{-1} \hat{\underline{K}} - \hat{\omega}_i^2 \underline{I}) \hat{\underline{\phi}}_i = 0. \quad (6.17)$$

Resolviendo el problema anterior, se obtienen los valores propios $\hat{\omega}_i^2$ (el cuadrado de las frecuencias normalizadas) y los vectores propios $\hat{\underline{\phi}}_i$ (formas modales).

Seguidamente se propone un criterio de optimización para el equilibrado del eslabón. Dicho criterio se particulariza para el brazo flexible caracterizado en el Apartado 3.2.2. La dinámica de este sistema está perfectamente definida por los tres primeros modos de vibración. Por tanto, es necesario ajustar la relación de la segunda y de la tercera frecuencia con respecto a la primera. Así, se añade una única masa \hat{m}_a situada en \hat{x}_a (dos parámetros para elegir y dos relaciones que ajustar) con los siguientes objetivos: 1) conseguir que se cumpla la condición de multiplicidad dada por la ecuación (6.7); y 2) minimizar la variación de las frecuencias ante cambios en la masa de la carga. Nótese que el proceso de optimización tiene dos objetivos y, por tanto, no se cumplirá la condición de multiplicidad de forma exacta. En el proceso de optimización se considera un intervalo de variación de la masa de la carga \hat{M}_p y un valor máximo de la masa añadida $\hat{m}_{a \max}$.

El criterio de optimización se lleva a cabo en los siguientes pasos:

1. Se define un funcional que refleje la multiplicidad de un modo respecto al fundamental

$$J_i(\hat{M}_p, \hat{m}_a, \hat{x}_a, c_i) = \left| \frac{\hat{\omega}_i(\hat{M}_p, \hat{m}_a, \hat{x}_a)}{\hat{\omega}_1(\hat{M}_p, \hat{m}_a, \hat{x}_a)} - c_i \right|, \quad i = 2, \dots, n \text{ y } c_i = c_2, \dots, c_n, \quad (6.18)$$

con $\hat{m}_a \in (0, \hat{m}_{a \max})$, $\hat{M}_p \in (\hat{M}_{p \min}, \hat{M}_{p \max})$ y $\hat{x}_a \in (0, 1)$, donde i indica el modo de vibración, n el número de modos considerados, $\hat{\omega}_i$ las frecuencias adimensionales y c_i es el valor impar que relaciona las frecuencias (ver (6.7)). Obsérvese que J_i decrece a medida que las frecuencias se acercan a la deseada.

2. Se calcula la siguiente función de coste que minimiza el máximo rango de variación de las frecuencias con respecto a la variación de la masa de la carga

$$J(\hat{x}_a, \underline{c}) = \min_{0 \leq \hat{m}_a \leq \hat{m}_{a \max}} \left(\max_{\substack{\hat{M}_{p \min} \leq \hat{M}_p \leq \hat{M}_{p \max} \\ i=2, \dots, n}} J_i(\hat{M}_p, \hat{m}_a, \hat{x}_a, c_i) \right), \quad \text{con } \underline{c} = [c_2 \quad \dots \quad c_n]. \quad (6.19)$$

Esta función de coste indica que la masa añadida debe minimizar la variación de las frecuencias ante cambios en la carga \hat{M}_p para una posición dada \hat{x}_a .

3. La función de coste final es

$$\Phi(\underline{c}) = \min_{0 \leq \hat{x}_a \leq 1} J(\hat{x}_a, \underline{c}), \quad (6.20)$$

donde $\Phi(\underline{c})$ es el óptimo para unas relaciones prescritas \underline{c} e indica el valor óptimo de \hat{m}_a y su posición \hat{x}_a .

6.4.3 Diseño del esquema de control

A continuación se detalla el diseño del servo de posición del motor $G_m(s)$ y del prefiltro $[C(s)]^q$ (ver Figura 6.5).

- a) Servo de posición del motor.

La dinámica del motor se puede expresar como sigue

$$\Gamma_m(t) = n_r KV(t) = J_0 \ddot{\theta}_m(t) + v \dot{\theta}_m(t) + \Gamma_f(t) + \Gamma_{coup}(t), \quad (6.21)$$

donde $\Gamma_m \equiv$ par motor; $n_r \equiv$ relación de reducción; $K \equiv$ constante del motor que relaciona Γ_m con el voltaje; $V \equiv$ señal de voltaje que controla el motor; $J_0 \equiv$ inercia del motor + reductora; $\nu \equiv$ fricción viscosa; $\Gamma_f \equiv$ fricción seca o de Coulomb y $\Gamma_{coup} \equiv$ par de acoplamiento en el motor debido al eslabón y a la carga. Obsérvese que (6.21) es el equilibrio de momentos a la salida de la reductora.

En la Figura 6.6 se describe el esquema empleado en el servo de posición. Como se observa en dicha figura, el par de acoplamiento se compensa en el motor. Por otro lado, $R_i(s)$ es el regulador de posición utilizado para el motor. En este capítulo, $R_i(s)$ se ha considerado como un PD. A partir de la Figura 6.6, el voltaje que controla la corriente del motor es de la siguiente forma

$$V = V_c + \Gamma_{coup}/n_r K, \quad (6.22)$$

donde V_c se denomina señal de control ficticia. Si se sustituye (6.22) en (6.21) y no se considera el rozamiento de Coulomb Γ_f , la ecuación (6.21) queda como sigue

$$n_r K V_c(t) = J_0 \ddot{\theta}_m(t) + \nu \dot{\theta}_m(t), \quad (6.23)$$

y su función de transferencia es

$$\theta_m(s)/V_c(s) = M(s) = A/(s(s+B)), \quad (6.24)$$

con $A \equiv n_r K/J_0$ y $B \equiv \nu/J_0$. Por tanto, el regulador de posición $R_i(s)$ se diseña independientemente de la dinámica del brazo, es decir, como si se controlase un motor sin carga. Nótese que en (6.23) no se ha incluido la fricción seca Γ_f ya que se puede tratar como una perturbación y su efecto se puede minimizar o eliminar con el regulador de posición. Esta forma de actuar, basada en el desacoplamiento de la dinámica del motor y del brazo, se ha utilizado en otros trabajos previos (por ejemplo, Feliu y col. (1992)).

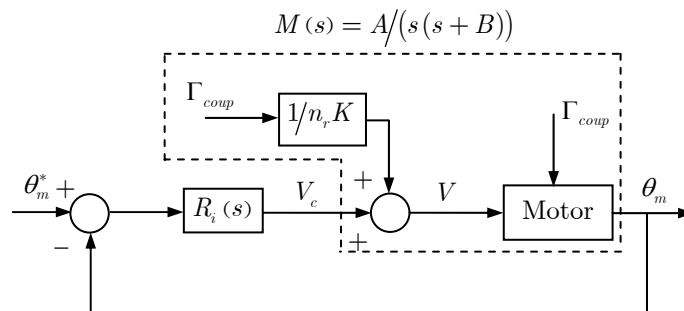


Figura 6.6: Servo de posición para el motor

Normalmente el regulador $R_i(s)$ de la Figura 6.6 es un PD. Este regulador admite la variación indicada en la Figura 6.7, cuya la ley de control resultante es

$$V = \Gamma_{coup}/n_r K + K_p (\theta_m^* - \theta_m) - K_v \dot{\theta}_m, \quad (6.25)$$

donde K_p y K_v son las ganancias del PD. El ajuste de las ganancias se lleva a cabo de forma que la respuesta del motor sea la de un sistema de segundo orden críticamente amortiguado

$$\theta_m(s)/\theta_m^*(s) = G_m(s) = 1/(1 + \alpha s)^2, \quad (6.26)$$

donde α es la constante de tiempo. Utilizando (6.22), (6.24) y (6.25), se obtienen las ecuaciones de diseño

$$K_p = 1/A\alpha^2; K_v = (2 - B\alpha)/A\alpha. \quad (6.27)$$

En general, estas ganancias deben ser lo más grandes posibles por dos razones: 1) para aumentar la velocidad de respuesta, y 2) para minimizar el error en régimen permanente debido a la fricción de Coulomb. Sin embargo, dichas ganancias y, por tanto, el valor de α , estarán limitadas por el par máximo que pueda entregar el motor.

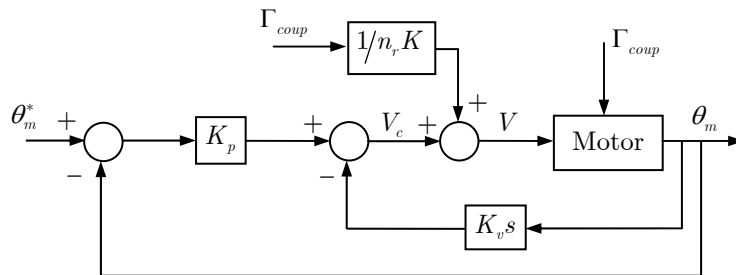


Figura 6.7: Servo de posición para el motor con un PD

b) Controlador en cadena abierta.

A continuación se describe el proceso de diseño de $[C(s)]^q$, que consiste en determinar la frecuencia de diseño adimensional del filtro $\hat{\omega}_{n1}$ que se relaciona con ω_0 a través de la siguiente relación (teniendo en cuenta la adimensionalización (6.15))

$$\hat{\omega}_{n1}^2 = \frac{\rho_L L^4}{EI} \omega_0^2, \quad (6.28)$$

y el parámetro q que define la robustez ($q = 1$, ZV, $q = 2$, ZVD, $q = 3$, ZVDD).

El primer paso es analizar las frecuencias naturales del sistema cuando se considera una variación en el valor de la carga del extremo. Con esta variación, se determinan los valores de c_i más cercanos a las relaciones existentes entre las frecuencias (ver

condición (6.7)). Para las posibles combinaciones, se aplica el criterio de optimización descrito en 6.5.2 y se obtienen los valores de \hat{m}_a y \hat{x}_a . Finalmente, la modificación del sistema se realizará para aquel valor de \underline{c} que resulte en un menor valor de $\Phi(\underline{c})$ (ver ecuación (6.20)).

Una vez que se ha modificado la dinámica del sistema, el segundo paso es elegir la frecuencia de diseño $\hat{\omega}_{n1}$ y la robustez necesaria q . La variación de cada una de las frecuencias al variar la carga será $\Delta\hat{\omega}_i$. Así, la máxima variación es

$$\Delta\hat{\omega}^{\max} = \max |\hat{\omega}_{i\max} - \hat{\omega}_{i\min}|; i = 1, \dots, n. \quad (6.29)$$

A continuación se calcula el centro del intervalo más desfavorable

$$\hat{\omega}_{qi} = \frac{\hat{\omega}_{i^*\max} - \hat{\omega}_{i^*\min}}{2}; i = 1, \dots, n, \quad (6.30)$$

con i^* el modo para el cual se obtiene $\Delta\hat{\omega}^{\max}$. De este modo, la frecuencia adimensional de diseño del filtro se tomará como (ver ecuación (6.28))

$$\hat{\omega}_{n1} = \frac{\hat{\omega}_{qi}}{c_i}. \quad (6.31)$$

El siguiente paso es decidir q . Se define V como el tanto por ciento de vibración residual permitida. Utilizando $\Delta\hat{\omega}^{\max}$ se obtiene la robustez necesaria normalizada a la frecuencia de diseño

$$R = \frac{\Delta\hat{\omega}^{\max}}{\hat{\omega}_{n1}}. \quad (6.32)$$

Con V , se obtiene la robustez de cada prefiltro R_q . Así, la condición de diseño es

$$R \leq R_q. \quad (6.33)$$

En la Figura 6.3, si se acepta una vibración residual $V = 10\%$, se obtiene que la robustez de cada filtro es $R_1 = 0.12$, $R_2 = 0.40$ y $R_3 = 0.60$.

6.4.4 Simulaciones y resultados experimentales

Se considera un brazo de robot flexible, como el de la Figura 3.1, con las propiedades que se recogen en la Tabla 6.1. A continuación se lleva a cabo la modificación de la dinámica propuesta en el Apartado 6.5.2 y se aplica el esquema de control definido en 6.5.3.

Tabla 6.1: Parámetros del robot flexible de un grado de libertad

Rigidez (Nm ²)	EI	2.40
Densidad lineal (kg/m)	ρ_L	0.268
Ancho (m)	W	0.05
Espesor (m)	h	0.002
Longitud (m)	L	1.26
Masa del eslabón (kg)	M_b	0.338
Rango de variación de la carga (kg)	M_P	0.050 ÷ 0.150
Constante del motor (Nm/V)	K	0.474
Relación de reducción	n_r	50
Inercia motor+reductora (en el lado de la reductora) (kgm ²)	J_0	0.83
Rozamiento viscoso (kgm ² /s)	ν	3.65

6.4.4.1 Simulaciones

Para la aplicación del criterio de optimización se ha empleado un modelo de elementos finitos (40 elementos) que se ha considerado suficientemente refinado. Dicho modelo ha sido actualizado y aproxima de forma muy precisa las frecuencias experimentales del sistema. La carga se ha variado desde $\hat{M}_{P_{\min}} = 0.15$ hasta $\hat{M}_{P_{\max}} = 0.45$. En la Tabla 6.2 se recogen: las frecuencias adimensionales para el rango de variación de la carga considerado, las frecuencias normalizadas a la frecuencia diseño $\hat{\omega}_{n1}$, y la robustez normalizada para cada frecuencia. La frecuencia de diseño se calcula a partir de $\hat{\omega}_{q1}$ (6.31), que se obtiene, a su vez, a partir de $\Delta\hat{\omega}^{\max}$ (6.30). Considerando la Tabla 6.2, se obtiene $\Delta\hat{\omega}^{\max} = 2.04$ y $\hat{\omega}_{q3} = 37.42$. Si se toma $c_3 = 23$, la frecuencia de diseño es $\hat{\omega}_{n1} = 1.63$.

Tabla 6.2: Frecuencias adimensionales del brazo flexible sin modificar ($\hat{\omega}_{n1} = 1.63$)

Frecuencias adimensionales	$\hat{M}_{P_{\min}} = 0.15$	$\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$	$\hat{M}_{P_{\max}} = 0.45$	$\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$	$R = \Delta\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$
$\hat{\omega}_1$	1.95	1.20	1.44	0.88	0.32
$\hat{\omega}_2$	13.21	8.12	12.00	7.37	0.75
$\hat{\omega}_3$	38.44	23.62	36.40	22.37	1.25

A continuación se ajusta la dinámica del sistema siguiendo el procedimiento presentado en el Apartado 6.5.2. Se toma como masa añadida máxima $\hat{m}_{a\max} = 0.15$ (que se corresponde con un 15% de la masa del eslabón). La multiplicidad entre la segunda y la primera frecuencia es $\hat{\omega}_2/\hat{\omega}_1 \in (6.77, 8.33)$ y entre la tercera y la primera es $\hat{\omega}_3/\hat{\omega}_1 \in (19.71, 25.28)$. Considerando lo anterior, se elabora la Tabla 6.3. En dicha tabla se recoge el valor y la posición de la masa añadida, y la función de coste $\Phi(\underline{c})$ para las posibles combinaciones de los c_i .

Tabla 6.3: Combinaciones de las frecuencias $\hat{\omega}_2 = c_2\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_3 = c_3\hat{\omega}_1$

Caso	c_2	c_3	\hat{m}_a	\hat{x}_a	$\Phi(c_i)$
1	7	19	0.15	0.30	2.60
2	7	21	0.13	0.75	2.20
3	7	23	0.09	0.90	2.10

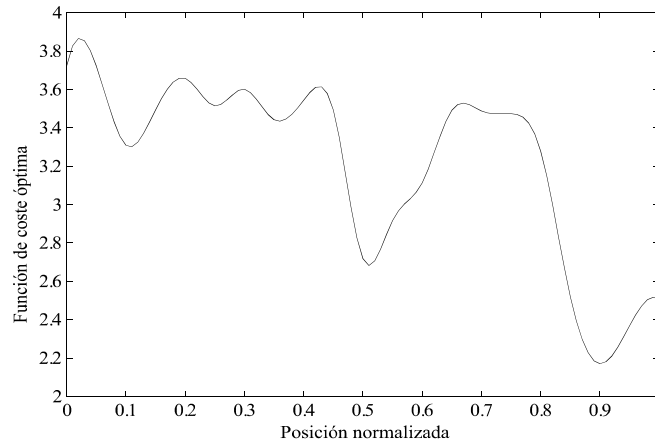
Atendiendo a la Tabla 6.3, la combinación óptima se corresponde con el caso 3 donde las relaciones de las frecuencias son $c_2 = 7$ y $c_3 = 23$. En la Figura 6.8 se muestra la función de coste $J(\hat{x}_a)$ y el valor de la masa normalizada correspondiente al caso 3. El valor mínimo del funcional se obtiene en $\hat{x}_a = 0.90$ para una masa $\hat{m}_a = 0.09$. A continuación se elabora la Tabla 6.4, que es similar a la Tabla 6.2, pero con el eslabón equilibrado. En dicha tabla se observa como la frecuencia de diseño es prácticamente igual y la variación de las frecuencias ha disminuido ostensiblemente.

Tabla 6.4: Frecuencias adimensionales del brazo flexible modificado ($\hat{\omega}_{n1} = 1.60$)

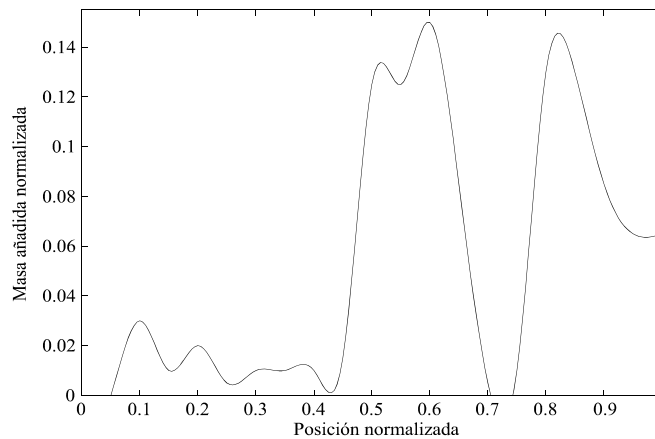
Frecuencias adimensionales	$\hat{M}_{P_{\min}} = 0.15$	$\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$	$\hat{M}_{P_{\max}} = 0.45$	$\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$	$\Delta\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$
$\hat{\omega}_1$	1.85	1.16	1.44	0.90	0.26
$\hat{\omega}_2$	13.20	8.25	12.31	7.69	0.56
$\hat{\omega}_3$	37.31	23.32	36.38	22.74	0.58

Seguidamente se presentan las simulaciones realizadas. En tales simulaciones se ha utilizado un modelo truncado con los tres primeros modos de vibración. La primera de ellas se lleva a cabo empleando únicamente el servo de posición, es decir, sin el controlador en cadena abierta y con una masa en el extremo $\hat{M}_p = 0.281$, que es un valor tal que la primera frecuencia del brazo coincide con la frecuencia del diseño del filtro $\hat{\omega}_{n1} = 1.60$. Se utiliza una referencia de comando (sin moldear) que es una rampa de pendiente 2 rad/s con un valor final de 0.2 rad. En la Figura 6.9 se representa la respuesta del extremo, el par de acoplamiento y su FFT para el caso anteriormente

descrito. Se observa como los tres primeros modos son los más significativos en la respuesta dinámica del sistema y presentan una amplitud de 1.09, 0.59 y 0.09Nm, respectivamente.



a) Función de coste $J(\hat{x}_a)$

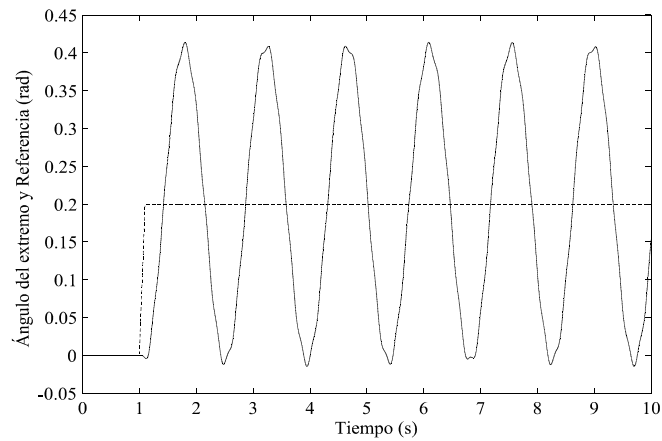


b) Masa normalizada añadida

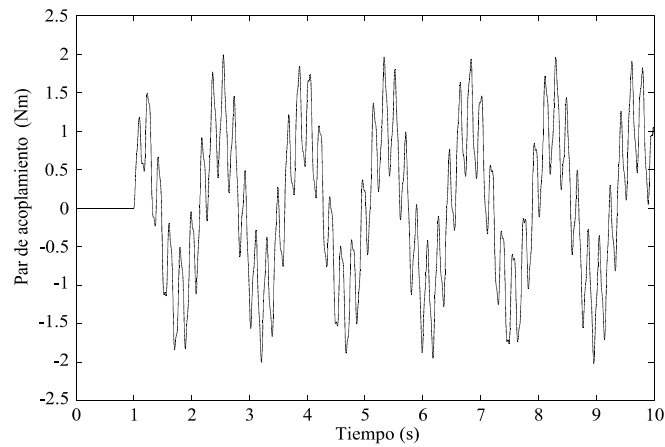
Figura 6.8: Modificación del sistema. Equilibrado del eslabón

Siguiendo el procedimiento descrito en los Apartados 6.5.2 y 6.5.3, se considera una vibración residual aceptable de $V = 10\%$. Utilizando la Tabla 6.4, se tiene $R = \Delta\hat{\omega}_3/\hat{\omega}_{n1} = 0.58$ con $\hat{\omega}_{n1} = 1.60$, que corresponde a $\hat{M}_p = 0.281$. Se deduce que el intervalo de robustez mínimo es $[0.71, 1.29]$. Una vez establecidos los valores de V , R y $\hat{\omega}_{n1}$, el siguiente paso es seleccionar el prefiltro más adecuado.

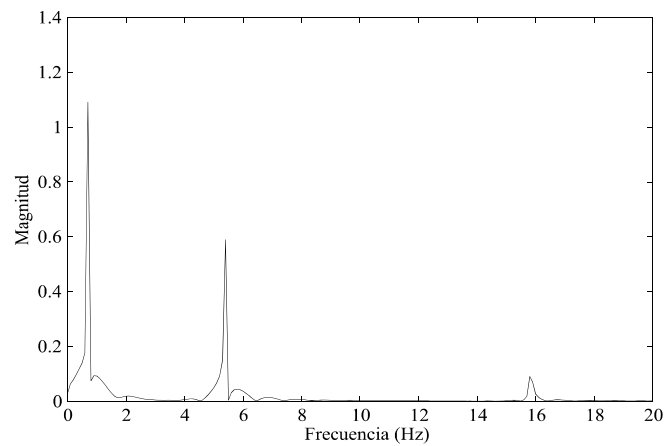
En la Figura 6.10 se muestra la magnitud de la respuesta en frecuencia para los prefiltros $C(s)$, $[C(s)]^2$ y $[C(s)]^3$ normalizados a $\hat{\omega}_{n1}$. Los intervalos de robustez correspondientes a cada uno de los prefiltros son $[0.94, 1.06]$, $[0.80, 1.20]$ y $[0.70, 1.40]$. Por tanto, el prefiltro necesario es un ZVDD ($q = 3$).



a) Ángulo del extremo θ_t (—) y Referencia (---)

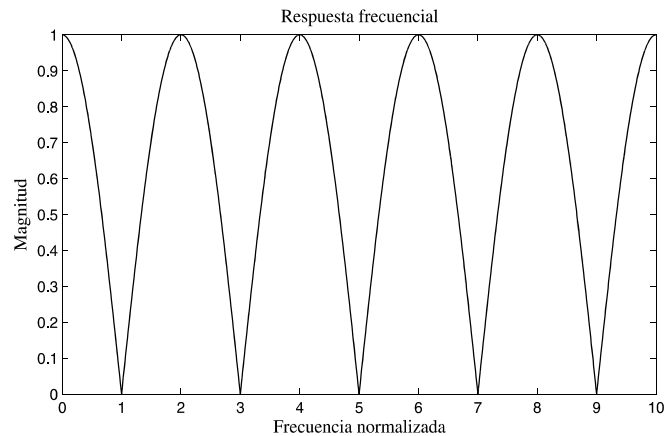


b) Respuesta temporal del par de acoplamiento Γ_{coup}

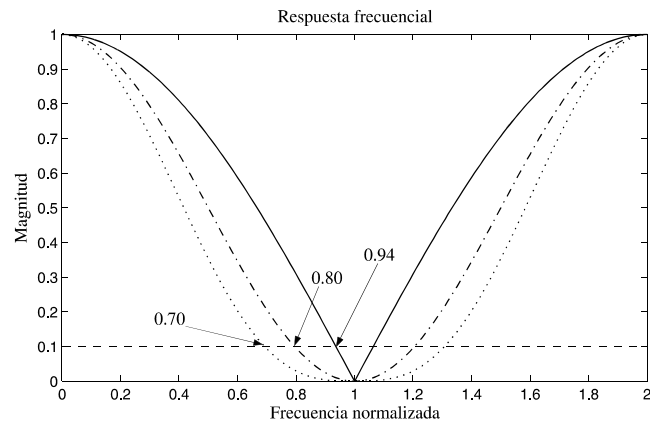


c) FFT del par de acoplamiento Γ_{coup}

Figura 6.9: Simulaciones con servo de posición y sin prefiltro para $\hat{M}_P = 0.281$



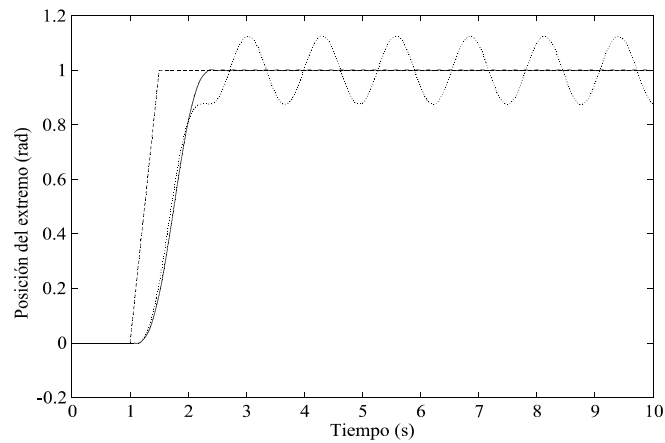
a) Respuesta en frecuencia correspondiente al ZV



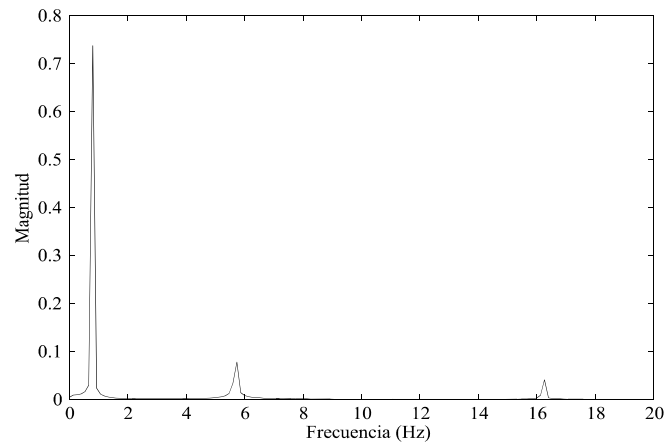
b) Detalle de la respuesta en frecuencia: ZV (—), ZVD (---), ZVDD (··) y vibración residual permitida (--)

Figura 6.10: Respuesta en frecuencia de los prefiltros ZV, ZVD, y ZVDD

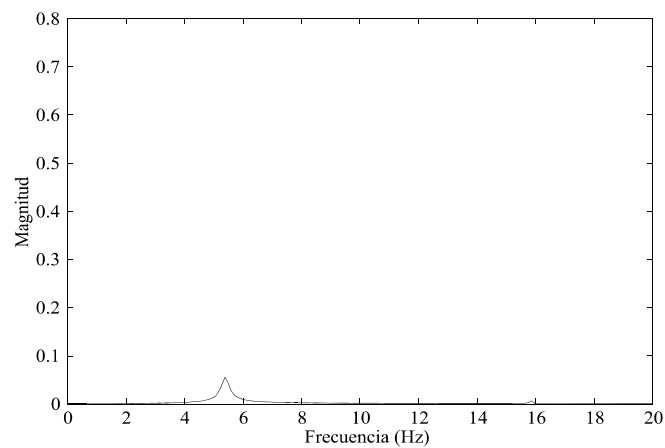
En la Figura 6.11a) se representa la posición del extremo utilizando un ZV para $\hat{M}_p = 0.15$ y $\hat{M}_p = 0.281$ (el segundo valor se corresponde con la frecuencia de diseño del filtro). En la Figura 6.11b) y c) se muestra la FFT del par de acoplamiento para ambas masas. Obsérvese como para $\hat{M}_p = 0.281$ la vibración residual es eliminada casi completamente, pero cuando la masa varía, esta vibración permanece (ver Figura 6.10). A continuación se obtiene el tiempo de subida. Si se sustituyen los parámetros del sistema de la Tabla 6.1, la frecuencia adimensional $\hat{\omega}_{n1} = 1.60$ corresponde a $\omega_{n1} = 3.03 \text{ rad/s}$. Teniendo en cuenta que el periodo se calcula como $T = 2\pi/\omega_{n1}$, entonces, el tiempo de subida se puede estimar como $t_p = T/2 = 1.04 \text{ s}$, ya que se trata de un ZV.



a) Ángulo del extremo θ_t con: $\hat{M}_P = 0.281$ (—), $\hat{M}_P = 0.15$ (··) y Referencia (—)



b) FFT de Γ_{coup} con $\hat{M}_P = 0.15$

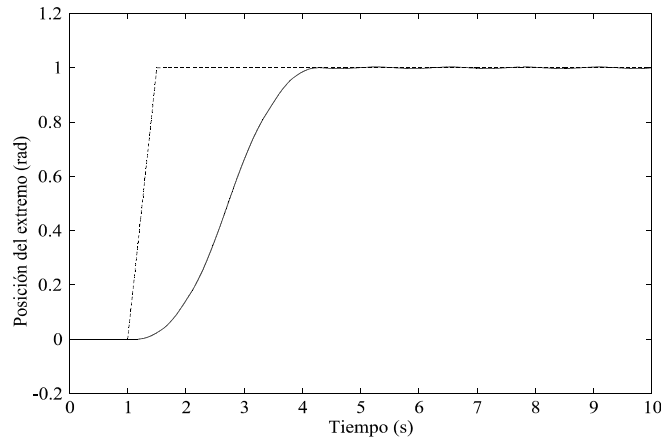


c) FFT de Γ_{coup} con $\hat{M}_P = 0.281$

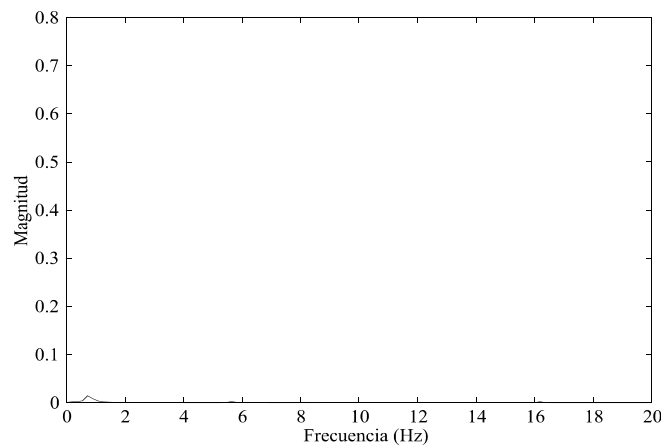
Figura 6.11: Simulaciones utilizando un ZV

En la Figura 6.12 se muestra la respuesta del extremo para un ZVDD y con $\hat{M}_P = 0.15$. En las Figuras 6.12b) y c) se representa la FFT del par de acoplamiento

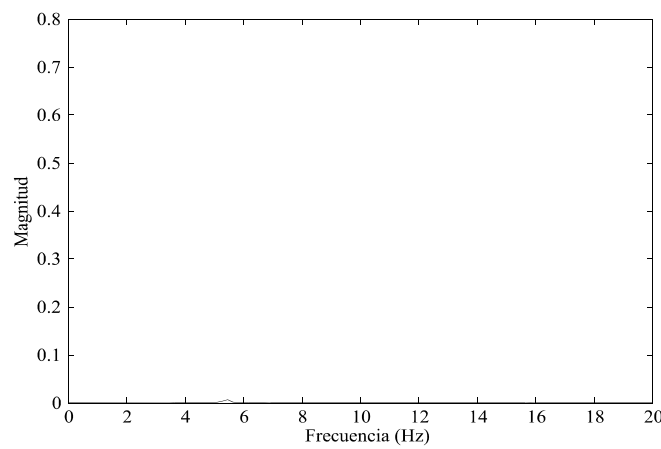
para $\hat{M}_p = 0.15$ y $\hat{M}_p = 0.281$, respectivamente. En este caso la vibración residual se elimina casi completamente para todo el intervalo y el tiempo de subida viene dado por $t_p = 3T/2 = 3.11s$.



a) Ángulo del extremo θ_t (—) con $\hat{M}_p = 0.15$ y Referencia (---)



b) FFT de Γ_{coup} con $\hat{M}_p = 0.15$



c) FFT de Γ_{coup} con $\hat{M}_p = 0.281$

Figura 6.12: Simulaciones utilizando un ZVDD

Finalmente, en la Tabla 6.5 se resumen todos los resultados obtenidos en las simulaciones.

Tabla 6.5: Simulaciones (resumen). Amplitud de la vibración residual y tiempo de subida

	Amplitud de la vibración (Nm)			Tiempo de subida (s)
	1 ^{er} modo	2 ^o modo	3 ^{er} modo	
Sin controlador				
$\hat{M}_p = 0.281$	1.09	0.59	0.09	
Con ZV				
$\hat{M}_p = 0.15$	0.73	0.08	0.05	1.04
$\hat{M}_p = 0.281$	≈ 0	0.05	≈ 0	1.04
$\hat{M}_p = 0.45$	0.60	0.18	0.015	1.04
Con ZVDD (versión robusta)				
$\hat{M}_p = 0.15$	0.014	≈ 0	≈ 0	3.11
$\hat{M}_p = 0.281$	≈ 0	0.01	≈ 0	3.11
$\hat{M}_p = 0.45$	≈ 0	0.018	≈ 0	3.11

6.4.4.2 Resultados experimentales

En este apartado se muestran los resultados experimentales obtenidos. La dinámica del brazo se ha ajustado siguiendo el proceso de optimización desarrollado en el apartado anterior. En la Tabla 6.6 se muestran las frecuencias del sistema original y modificado. Se puede observar como la variación de las frecuencias se reduce sustancialmente añadiendo una masa del 8.7% de la masa del eslabón.

Los parámetros de la ley de control (6.25) se ajustan para que la respuesta del motor sea la correspondiente a un sistema críticamente amortiguado como el de la ecuación (6.26) con una constante de tiempo $\alpha = 0.01$. Aplicando las ecuaciones de diseño (6.27) y teniendo en cuenta los datos del motor (ver Tabla 6.1), se obtienen los siguientes valores para los parámetros del regulador

$$K_p = 19.35; K_v = 0.21. \quad (6.34)$$

En los experimentos se han empleado las mismas trayectorias que en las simulaciones. Como se comenta en el Capítulo 3, el par de acoplamiento se mide utilizando un puente

de galgas extensométricas situado en la base del brazo. Por otro lado, el cálculo de la posición del extremo se realiza mediante un observador de orden completo, ya que no se mide directamente. Este observador se construye a partir del modelo en espacio de estados con entrada el ángulo del motor y salida el par de acoplamiento, con lo que se puede estimar cualquiera de sus estados, y entre ellos, la posición del extremo.

Tabla 6.6: Frecuencias adimensionales experimentales, sistema inicial ($\hat{\omega}_{n1} = 1.63$) y sistema modificado ($\hat{\omega}_{n1} = 1.60$)

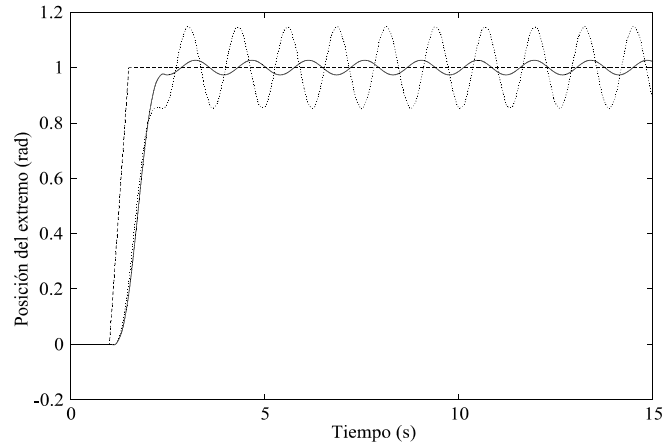
Frecuencias adimensionales	$\hat{M}_{p_{\min}} = 0.15$	$\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$	$\hat{M}_{p_{\max}} = 0.45$	$\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$	$\Delta\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_{n1}$
Sistema inicial					
$\hat{\omega}_1$	1.97	1.21	1.43	0.88	0.33
$\hat{\omega}_2$	13.25	8.13	11.99	7.35	0.77
$\hat{\omega}_3$	38.40	23.56	36.45	22.36	1.20
Sistema modificado					
$\hat{\omega}_1$	1.71	1.07	1.34	0.84	0.23
$\hat{\omega}_2$	13.20	8.25	12.35	7.72	0.53
$\hat{\omega}_3$	37.35	23.34	36.40	22.75	0.59

El mismo ensayo que el representado en la Figura 6.9 se ha realizado experimentalmente y se han obtenido las siguientes amplitudes para los tres primeros modos de vibración: 1.40, 0.55 y 0.08 Nm, respectivamente.

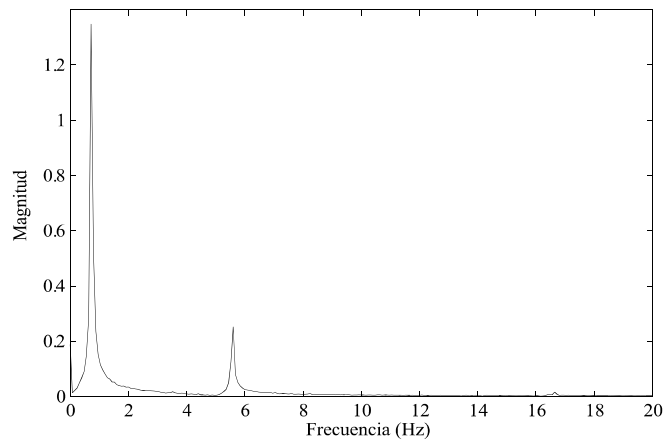
En la 6.13a) se muestra la respuesta estimada del extremo utilizando un ZV para $\hat{M}_p = 0.15$ y $\hat{M}_p = 0.281$, y además, se representa la señal de referencia. En la Figura 6.13b) y c) se representa la FFT del par de acoplamiento para $\hat{M}_p = 0.15$ y $\hat{M}_p = 0.281$, respectivamente. Para $\hat{M}_p = 0.15$, la amplitud de los tres primeros modos es 1.25, 0.275 y 0.015Nm, mientras que para $\hat{M}_p = 0.281$, las amplitudes se reducen a 0.111, 0.074 y 7.5×10^{-3} Nm. Por tanto, con un ZV no se elimina la vibración residual para la variación considerada de la carga.

A continuación, se comentan los resultados obtenidos cuando se utiliza un ZVDD. En la Figura 6.14a) se muestra la estimación de la respuesta del extremo para $\hat{M}_p = 0.15$. En la Figura 6.14b) se representa el par de acoplamiento con $\hat{M}_p = 0.15$, obteniéndose las siguientes amplitudes: 0.025, 0.05 y 4×10^{-3} Nm. En la Figura 6.14c) se muestra el par de acoplamiento para $\hat{M}_p = 0.281$ con los siguientes resultados: 0.02,

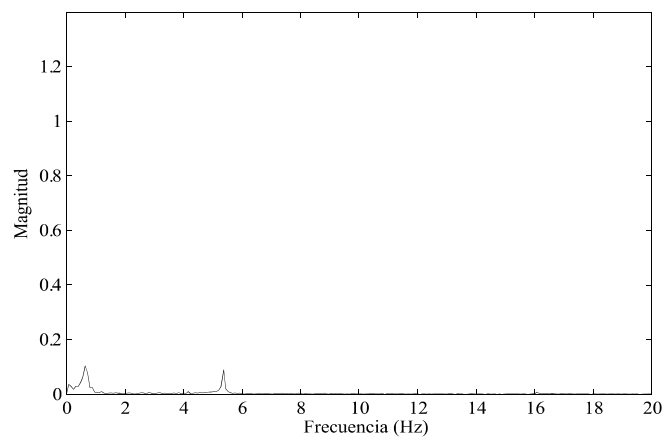
7×10^{-3} y 5×10^{-3} Nm. Así, utilizando un ZVDD, la vibración residual se cancela para todo el rango de carga considerado.



a) Estimación del ángulo del extremo θ_t con: $\hat{M}_P = 0.281$ (—), $\hat{M}_P = 0.15$ (··) y Referencia (--)

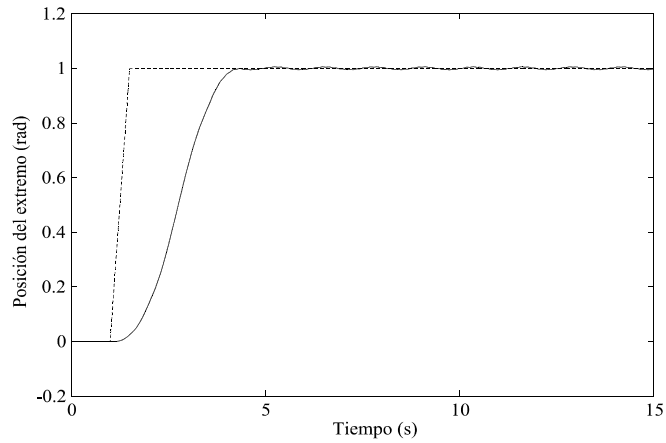


b) FFT de Γ_{coup} con $\hat{M}_P = 0.15$

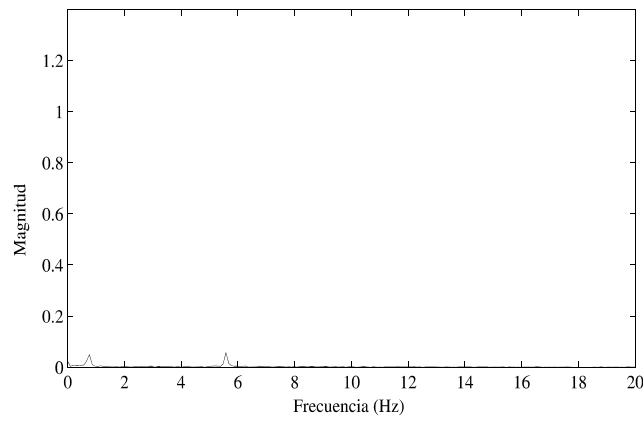


c) FFT de Γ_{coup} con $\hat{M}_P = 0.281$

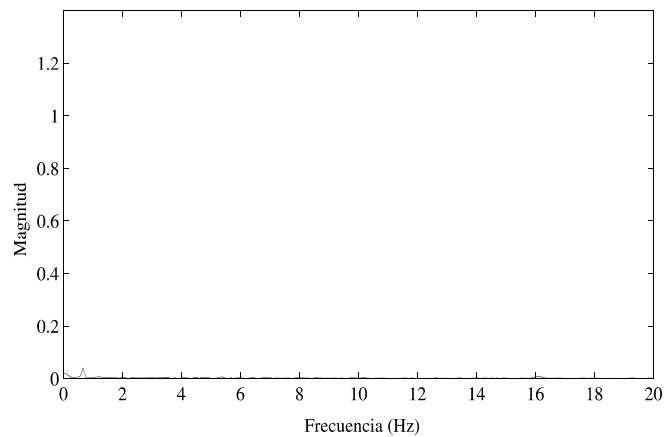
Figura 6.13: Experimentos utilizando un ZV



a) Estimación del ángulo del extremo θ_t con $\hat{M}_P = 0.15$ (—) y Referencia (---)



b) FFT de Γ_{coup} con $\hat{M}_P = 0.15$



c) FFT de Γ_{coup} con $\hat{M}_P = 0.281$

Figura 6.14: Experimentos utilizando un ZVDD

Finalmente, en la Tabla 6.7 se resumen todos los resultados obtenidos en los experimentos realizados para $\hat{M}_P = 0.15, 0.281$ y 0.45 .

Tabla 6.7: Experimentos (resumen). Amplitud de la vibración y tiempo de subida

	Amplitud de la vibración (Nm)			Tiempo de establecimiento (s)
	1 ^{er} modo	2 ^{er} modo	3 ^{er} modo	
Sin controlador				
$\hat{M}_p = 0.281$	1.40	0.55	0.08	
Con ZV				
$\hat{M}_p = 0.15$	1.25	0.275	0.015	1.04
$\hat{M}_p = 0.281$	0.111	0.074	7.5×10^{-3}	1.04
$\hat{M}_p = 0.45$	0.60	0.11	0.015	1.04
Con ZVDD (versión robusta)				
$\hat{M}_p = 0.15$	0.025	0.05	7.5×10^{-3}	3.11
$\hat{M}_p = 0.281$	0.02	7×10^{-3}	5×10^{-3}	3.11
$\hat{M}_p = 0.45$	0.022	0.018	6×10^{-3}	3.11

6.5 Resumen

En este capítulo se ha desarrollado un método de cancelación de vibraciones para un manipulador flexible de un grado de libertad, sistema que presenta varios modos de vibración. El método combina el uso de un prefiltro o controlador en cadena abierta con un ajuste de la dinámica del sistema.

La principal característica del método propuesto es que mediante un equilibrado del eslabón del brazo flexible (modificación de sus frecuencias de vibración) se puede emplear un controlador para varios modos, con una complejidad equivalente a la de un controlador diseñado para un modo, y que es capaz de cancelar la vibración residual incluso cuando la carga varía significativamente. El prefiltro utilizado se ha diseñado mediante la técnica CPT.

Capítulo 7

Control robusto basado en pasividad de un robot de un grado de libertad

En este capítulo se aborda la cancelación de vibraciones en el robot flexible de un grado de libertad, empleando un control en cadena cerrada basado en pasividad. Así, se pone en evidencia la importancia del modelado y de las propiedades físicas del sistema en la simplificación y eficacia del esquema de control. Más en particular, se estudian las propiedades de pasividad y el empleo de éstas en el diseño de un esquema de control.

En el capítulo anterior se ha mostrado que una modificación del sistema mecánico puede conducir a un sistema de control en lazo abierto más robusto y sencillo. Aquí, se aborda un ejemplo de cómo se pueden explotar las propiedades de pasividad de los sistemas mecánicos y así conseguir controles en lazo cerrado muy simples y robustos ante cambios en el sistema.

En el apartado siguiente se realiza una revisión de los esquemas de control basados en pasividad existentes y se motiva la nueva metodología de diseño que se desarrollará a lo largo del capítulo. A continuación, se presentan algunos fundamentos teóricos de la pasividad y se relacionan las propiedades de las funciones de transferencia con la pasividad. Esto es, las funciones de transferencia positivo reales y estrictamente positivo reales representan sistemas pasivos y estrictamente pasivos, respectivamente. También se comentan las relaciones existentes entre pasividad y estabilidad. A continuación se analizan las propiedades de pasividad y se presenta una nueva metodología de diseño; la cual se valida tanto en simulaciones como en experimentos.

Finalmente, se dedica un apartado de discusión de la metodología presentada con respecto a otros esquemas.

7.1 Control robusto basado en la ecuación continua

En la literatura se han propuesto múltiples técnicas extraídas de la teoría de control clásica que se han aplicado a robots flexibles para conseguir los objetivos de control, por ejemplo, precisión en el posicionamiento del extremo o cancelación de la vibración residual (ver la revisión de Benosman y Vey (2004)). Típicamente, los algoritmos de control propuestos se basan en modelos truncados de orden finito obtenidos a partir de un análisis modal o del método de los elementos finitos. Con técnicas como el Posicionamiento de Polos (Pole Placement) (Kotnik y col., 1998), control LQG (Linear Quadratic Gaussian) (Rovner y Cannon, 1987), o controles basados en la inversión de la dinámica (De Luca y col., 1989; Feliu y col., 2003), se alcanzan respuestas satisfactorias de los sistemas desde el punto de vista de la velocidad, precisión y cancelación de vibraciones. Los problemas de estas técnicas basadas en el modelo son que la complejidad de los algoritmos de control aumenta drásticamente con el orden del sistema y que la estabilidad del sistema en lazo cerrado es sensible a: 1) cambios en la carga, 2) incertidumbres en los parámetros del modelo, y 3) frecuencias de desbordamiento (o frecuencias no consideradas en el modelo).

Para superar estos inconvenientes se han propuesto diferentes soluciones. Estas soluciones se pueden dividir en dos grupos: controles adaptativos y controles robustos. Los controles adaptativos tratan de ajustar los parámetros del controlador a cambios en el sistema (Yang y col., 1992), mientras que los controles robustos se diseñan de forma que son insensibles a ciertas variaciones en los parámetros del sistema. Dentro de los controladores robustos, se encuentran aquéllos que se obtienen a partir del modelo infinito dimensional (modelo extraído directamente de la EDP), entre ellos se sitúan los basados en la realimentación de la medida de la deformación (“Direct Strain Feedback” DSFB) (Luo, 1993) o controladores basados en pasividad (Wang y Vidyasagar, 1992). Aunque estas técnicas son robustas a las frecuencias de desbordamiento y a incertidumbres en el modelo, presentan un problema común que es la limitación existente (en general de velocidad) debida al acoplamiento de la dinámica del motor y

del brazo. Es decir, el diseño del controlador de posición del motor se ve afectado por la dinámica del brazo. A continuación se comentan brevemente estas limitaciones.

En cuanto a los esquemas basados en DSFB, Luo (1993) demostró que su empleo introduce un término de amortiguamiento en la EDP del brazo. Entonces, DSFB junto con un control de posición para el motor, que debería ser robusto a las fricciones en la unión, se pueden emplear para el control del brazo y para la cancelación de vibraciones. Sin embargo, la estabilidad del sistema depende del controlador empleado en el motor y de los parámetros del brazo (el valor la carga) ya que ambos están acoplados. Más concretamente, cuando en el controlador del motor se utiliza un PID para eliminar el error en régimen permanente, no está asegurada la estabilidad del sistema ante cambios en la carga y la respuesta del sistema se deteriora considerablemente. Otros trabajos basados en DSFB, pero con una realimentación no lineal, son Ge y col. (1998) y Luo y Feng (1999). Ge y col. (1998) proponen una ley de control que utiliza un PD para el motor y una función de realimentación no lineal que depende de la velocidad del motor y de una medida de la vibración (que puede ser la deformación, el esfuerzo cortante o la fuerza de reacción en la unión o la aceleración en cualquier punto del eslabón). Luo y Feng (1999) demuestran la estabilidad global asintótica del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, para eliminar el error en régimen permanente en los resultados experimentales, añaden un PID en el motor, pero no demuestran la estabilidad en este caso. Además, se experimentan diversas medidas de vibración con el objeto de estudiar la más eficiente.

Otros controles robustos se basan en propiedades de pasividad de manipuladores flexibles. Gevarter (1970) demostró que entre la velocidad en la unión y el par motor existía una relación de pasividad, y entonces, con un PI se podía estabilizar el sistema. Sin embargo, la cancelación de vibraciones en este caso era poco efectiva y obligaba a maniobras muy lentas. Por otro lado, Wang y Vidyasagar (1992) propusieron una salida alternativa, denominada salida reflejada (que es función de la posición del extremo), y demostraron la relación de pasividad entre la velocidad de dicha salida y el par motor. Entonces, utilizando un controlador estrictamente pasivo se hace al sistema estable. Sin embargo, la relación de pasividad sólo se cumple cuando la inercia del actuador es suficientemente pequeña en comparación con la inercia del brazo. Otros trabajos más recientes basados en pasividad son el de Liu y Yuan (2003) y Ryu y col. (2004). Liu y Yuan (2003) generalizan la salida propuesta por Wang y Vidyasagar (1992) y proponen añadir un controlador que garantice la pasividad entre dicha salida y

el par motor sin la necesidad de considerar ninguna restricción entre la inercia del actuador y del brazo. Además, se demuestra que con un PD se asegura la estabilidad del sistema para un modelo truncado. Sin embargo, el uso de un PI para eliminar el error debido al rozamiento de Coulomb hace que el sistema no sea observable. Ryu y col. (2004) proponen una forma diferente de abordar el problema, la cual consiste en inyectar amortiguamiento al sistema sin *a priori* ninguna información del modelo. El sistema se considera como una red de dos puertos que caracteriza el intercambio de energía entre el generador de trayectoria y la planta. Se incluye un controlador y observador de pasividad en cada puerto de forma que se asegura la pasividad de la red. Además, se utiliza un controlador de velocidad para el motor. Esta técnica presenta dos problemas en su implementación práctica. El primero es que un controlador de velocidad no elimina el error en régimen permanente y el segundo es que cuando la entrada es cero el controlador pasividad no es capaz de incluir ningún amortiguamiento en el sistema, lo cual conduce a una cancelación de la vibración poco eficiente.

El objetivo de este capítulo es encontrar un relación entrada/salida del sistema brazo de robot flexible para que: a) se pueda separar la dinámica del motor y del brazo de forma que el sistema de control se divida en dos controles independientes: un control de posición para el motor y un control encargado de la cancelación de las vibraciones; y b) el sistema sea pasivo (y esto se demuestre a partir del modelo continuo) y así, esté asegurada la estabilidad global del sistema ante cambios en la carga y no existan problemas debidos a las frecuencias de desbordamiento y/o a incertidumbres en el modelo. Atendiendo al primero de los objetivos, se realimenta el par de acoplamiento del brazo (par debido al eslabón+carga), que es el par medido en la base, en la ecuación del motor, y de esta forma se desacopla la dinámica del motor y del brazo. En consecuencia, se puede plantear un esquema de control basado en dos lazos anidados (lazo interno y lazo externo) (Feliu y col., 1993). A diferencia de las referencias Luo (1993), Ge y col. (1998) y Luo y Feng (1999), entre otras, el diseño del control de posición del motor se realiza independientemente de la dinámica del brazo. El lazo interno controla la posición del motor y hace robusto al sistema a la fricción de Coulomb (fricción seca en el motor), mientras que el lazo externo se encarga de la cancelación de las vibraciones. El lazo externo se diseña a partir de la dinámica del lazo interno, la propiedad de pasividad existente entre la integral del par de acoplamiento y al ángulo del motor y el teorema de la interconexión de sistemas pasivos. Por tanto, el esquema de control resultante presenta las siguientes propiedades: a) el lazo interno se

diseña para que el sistema sea robusto a la fricción de Coulomb; b) el lazo externo mantiene la estabilidad global independientemente de la dinámica del eslabón y hace al sistema robusto ante grandes cambios en la carga; c) el esquema de control no se ve afectado por incertidumbres en el modelo y/o frecuencias de desbordamiento; y d) el lazo externo garantiza una cancelación de la vibración eficiente y mantiene la precisión del extremo. Además, el ajuste de los parámetros se lleva a cabo de forma fácil y sistemática.

7.2 Pasividad: fundamentos teóricos

7.2.1 Generalidades

De forma general un sistema es pasivo cuando la cantidad neta de energía almacenada por él, en un intervalo de tiempo finito cualquiera $(0, T)$, es inferior, o a lo sumo igual, a la energía total entregada a ese sistema durante ese intervalo de tiempo. Tómesese un sistema G con vector de entradas \underline{u} , vector de salidas \underline{y} , y estado \underline{x}

$$(G) \begin{cases} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}), & \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} = h(\underline{x}, \underline{u}), & \underline{u}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (7.1)$$

Si se considera una función $w : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, llamada función de suministro, asociada al sistema G , que es localmente integrable para cualquier entrada $\underline{u} \in U$, esto es, satisface $\int_{t_0}^{t_1} |w(\underline{u}(t), \underline{y}(t))| dt < \infty \forall t_0 < t_1$. Considérese además X como un subconjunto de \mathbb{R}^n que contiene el origen. Entonces, se tienen las siguientes definiciones.

Definición 7.1 El sistema G es disipativo en X con una función de suministro $w(\underline{u}, \underline{y})$ si existe una función $S(\underline{x})$ con $S(\underline{0}) = 0$, tal que $\forall \underline{x} \in X$

$$\int_0^T w(\underline{u}(t), \underline{y}(t)) dt \geq S(\underline{x}(T)) - S(\underline{x}(0)) \text{ y } S(\underline{x}) > 0, \quad (7.2)$$

para $\forall \underline{u} \in U$ y $\forall T \geq 0$ de forma que $\underline{x}(t) \in X, \forall t \in [0, T]$. La función $S(\underline{x})$ se denomina función de almacenamiento.

Definición 7.2 El sistema G es pasivo si es disipativo con una función de suministro $w(\underline{u}, \underline{y}) = \underline{u}^T \underline{y}$.

La inecuación (7.2) se puede escribir también como

$$w(\underline{u}, \underline{y}) \geq \dot{S}(\underline{x}), \quad (7.3)$$

o para sistemas pasivos

$$\underline{u}^T \underline{y} \geq \dot{S}(\underline{x}). \quad (7.4)$$

La ecuación anterior indica que la potencia suministrada supera al cambio de energía almacenada. Además, se dice que el sistema G es (ver, por ejemplo, Khalil (1992))

- sin pérdidas si $\underline{u}^T \underline{y} = \dot{S}(\underline{x})$.
- de entrada pasiva si $\underline{u}^T \underline{y} \geq \dot{S}(\underline{x}) + \underline{u}^T \underline{\varphi}(\underline{u})$ para alguna función $\underline{\varphi}$.
- de entrada estrictamente pasiva si $\underline{u}^T \underline{y} \geq \dot{S}(\underline{x}) + \underline{u}^T \underline{\varphi}(\underline{u})$ y $\underline{u}^T \underline{\varphi}(\underline{u}) > 0$, $\forall \underline{u} \neq \underline{0}$.
- de salida pasiva si $\underline{u}^T \underline{y} \geq \dot{S}(\underline{x}) + \underline{y}^T \underline{\rho}(\underline{y})$ para alguna función $\underline{\rho}$.
- de salida estrictamente pasiva si $\underline{u}^T \underline{y} \geq \dot{S}(\underline{x}) + \underline{y}^T \underline{\rho}(\underline{y})$ y $\underline{y}^T \underline{\rho}(\underline{y}) > 0$, $\forall \underline{y} \neq \underline{0}$.
- estrictamente pasivo si $\underline{u}^T \underline{y} \geq \dot{S}(\underline{x}) + \psi(\underline{x})$ para alguna función $\psi(\underline{x})$ definida positiva.

7.2.2 Funciones de transferencia positivo reales

Seguidamente se presenta la conexión existente entre funciones de transferencia positivo reales y la propiedad de pasividad.

Definición 7.3 Una matriz de funciones de transferencia $G(s)$ ($p \times p$) se dice que es positivo real si

- todos los polos de $G(s)$ están en el semiplano negativo $\text{Re}(s) \leq 0$,
- para todo ω real para el cual $j\omega$ no es un polo de cualquier elemento de $G(s)$, la matriz $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ es semidefinida positiva, y
- cualquier polo imaginario puro de cualquier elemento de $G(s)$ debe ser un polo simple y la matriz de residuos $\lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s)$ debe ser semidefinida positiva.

La función de transferencia $G(s)$ es estrictamente positivo real si $G(s - \varepsilon)$ es positivo real para $\varepsilon > 0$.

Si $p = 1$, la Definición 7.3 se reduce a que $\text{Re}[G(j\omega)] \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ está en el semiplano derecho. Igualmente, la condición $\text{Re}[G(j\omega)] > 0$ indica que $G(s)$ es estrictamente positivo real. Por otro lado, esta condición sólo se satisface si el orden relativo de $G(s)$ es cero o uno. El orden relativo de una función de transferencia $G(s) = n(s)/d(s)$ se define como la diferencia entre el grado de $d(s)$ y el grado de $n(s)$.

A partir de la Definición 7.3 se puede obtener el siguiente lema.

Lema 7.1 Se dice que el sistema invariante

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{x} + \underline{D}u \end{aligned} \quad (7.5)$$

con $G(s) = \underline{C}(sI - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}$, es

- pasivo si $G(s)$ es positivo real;
- estrictamente pasivo si $G(s)$ es estrictamente positivo real.

A continuación, se muestra un lema que relaciona pasividad con estabilidad.

Lema 7.2 Considérese un sistema como el representado por (7.1). El origen de $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, 0)$ es asintóticamente estable si el sistema es estrictamente pasivo. Además, si la función de almacenamiento es radialmente ilimitada, el origen es globalmente asintóticamente estable.

7.2.3 Interconexión de sistema pasivos

Teorema 7.1 Se suponen dos sistemas pasivos G_1 y G_2 . El sistema que resulta de la conexión en paralelo y de la realimentación de uno sobre otro es a su vez pasivo.

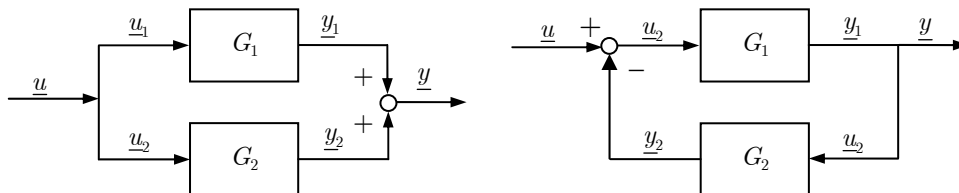


Figura 7.1: Interconexión en paralelo y en realimentación

Prueba: De la pasividad de G_1 y G_2 , existen $S_1(\underline{x})$ y $S_2(\underline{x})$ tal que

$$S_i(\underline{x}(T)) - S_i(\underline{x}(0)) \leq \int_0^T \underline{u}_i^T \underline{y}_i dt, \quad i = 1, 2. \quad (7.6)$$

Se define $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ y $S(\underline{x}) = S_1(\underline{x}) + S_2(\underline{x})$, siendo $S(\underline{x})$ definida positiva. Para la conexión en paralelo, la salida es $\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$, de forma que

$$S(\underline{x}(T)) - S(\underline{x}(0)) \leq \int_0^T (\underline{u}^T \underline{y}_1 + \underline{u}^T \underline{y}_2) dt = \int_0^T \underline{u}^T \underline{y} dt. \quad (7.7)$$

Esto prueba que el sistema resultante de la conexión en paralelo de sistemas pasivos es también pasivo. Para la interconexión en realimentación se tiene

$$S(\underline{x}(T)) - S(\underline{x}(0)) \leq \int_0^T (\underline{u}_1^T \underline{y}_1 + \underline{u}_2^T \underline{y}_2) dt. \quad (7.8)$$

Sustituyendo $\underline{u}_2 = \underline{y}_1$ y $\underline{u}_1 = \underline{u} - \underline{y}_2$, se llega a

$$S(\underline{x}(T)) - S(\underline{x}(0)) \leq \int_0^T \underline{u}^T \underline{y}_1 dt = \int_0^T \underline{u}^T \underline{y} dt, \quad (7.9)$$

lo que prueba que el sistema producto de la realimentación de sistemas pasivos es también pasivo.

7.3 Propiedades de pasividad

El objetivo de esta sección es proponer una relación entrada/salida del sistema robot flexible que permita el diseño de un esquema de control robusto que sea simple y eficaz.

7.3.1 Motivación

Como se ha comentado en la introducción los esquemas de control basados en pasividad actúan sobre el motor y el brazo (eslabón+carga) como un único sistema. En la Figura 7.2 se muestra la configuración en realimentación típicamente empleada en esquemas de control para robot flexibles basados en pasividad. Esta configuración se apoya en que si el Regulador es estrictamente pasivo con ganancia finita y la planta (Motor+Brazo) es pasiva, el sistema en lazo cerrado es estable (Wang y Vidyasagar, 1992). En la figura y^* es la referencia, e el error y Γ_m el par motor, que es la entrada a la planta, e y la salida, que debe ser elegida de forma tal que la relación y/Γ_m sea pasiva.

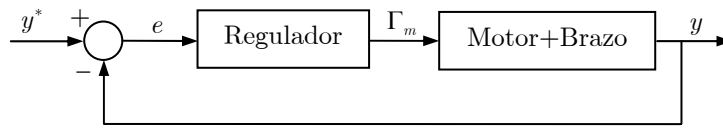


Figura 7.2: Configuración típica en realimentación para el control de robots flexibles de un grado de libertad

En la literatura se han elegido diversas salidas: $y = \dot{\theta}_m$, velocidad del ángulo del motor (Gevarter, 1970); $y = \theta_m - w(L)/L$, donde $w(L)$ es la deflexión en el extremo, se denomina posición del extremo reflejada (Wang y Vidyasagar, 1992); e $y = \theta_m + k w(L)/L$ con $-\infty < k < 0.742$, que es una generalización de la posición del extremo reflejada (Liu y Yuan, 2003). Si se toma como salida la velocidad angular del motor siendo la entrada el par motor, se puede emplear un PI para estabilizar el sistema. La desventaja fundamental de este esquema es que la cancelación de la vibración no es efectiva y es necesario utilizar una referencia de trayectoria muy lenta. Si se toma como salida la posición reflejada, se puede emplear un regulador estrictamente pasivo para estabilizar el sistema. Sin embargo, la relación de pasividad entre la salida reflejada y el par motor sólo se cumple cuando la inercia del motor es suficientemente pequeña con respecto a la inercia del brazo. Esta misma relación es necesaria para el caso en el que se considera la generalización de la posición reflejada. Sin embargo, Liu y Yuan (2003) añaden un controlador que garantiza la pasividad sin la necesidad de que se cumpla dicha relación. Además, se demuestra la estabilidad del sistema en lazo cerrado utilizando un PD para un modelo truncado (Liu y Yuan, 2003). Por tanto, ya que la demostración se realiza para un modelo de orden finito, no se asegura que no existan problemas debidos a incertidumbres en los parámetros y/o frecuencias de desbordamiento.

Con los precedentes anteriores, se pretende encontrar un esquema que desacople la dinámica del motor y del brazo evitando restricciones de velocidad y utilizar un diseño basado en propiedades de pasividad, obtenidas a partir del modelo infinito dimensional, que no presente restricciones en los parámetros.

A continuación, se explica de forma secuencial el proceso para la obtención del esquema de control propuesto en este capítulo. En la Figura 7.3 se separa en bloques diferentes el motor y el brazo, de forma que se introduce en el motor el par de acoplamiento como una perturbación. La entrada al motor es el par motor Γ_m y la salida es el ángulo del motor θ_m , que a su vez es la entrada al brazo. La salida del

brazo es y , que es la variable que se ha de determinar. Ahora bien, si se realimenta el par de acoplamiento Γ_{coup} tal y como se indica en la Figura 7.4, la función de transferencia entre $\theta_m/\Gamma_{m,c}$, siendo $\Gamma_{m,c}$ el par motor ficticio, corresponde a un motor sin carga. En consecuencia, ahora el objetivo es controlar un motor sin carga.

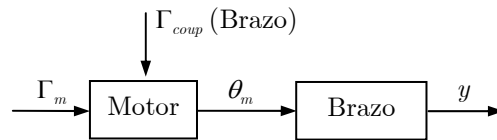


Figura 7.3: Motor+Brazo sin desacoplamiento

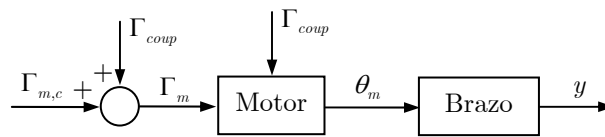


Figura 7.4: Motor+Brazo con desacoplamiento

El siguiente paso es añadir al esquema de la Figura 7.4 un controlador de posición para el motor $R_i(s)$ como se indica en la Figura 7.5. De esta forma, se cierra un primer lazo de control, denominado lazo interno, cuya función de transferencia se denota por $G_m(s)$ y cuya entrada por θ_m^* . A continuación, se cierra un segundo lazo de control con el controlador $C(s)$ que será el encargado de cancelar las vibraciones residuales. A este segundo lazo se le denomina lazo externo y se representa en la Figura 7.6, donde y^* es la referencia al sistema completo.

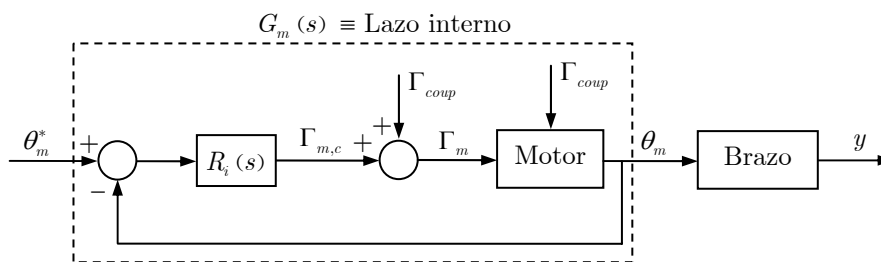


Figura 7.5: Lazo interno para el control de posición del motor

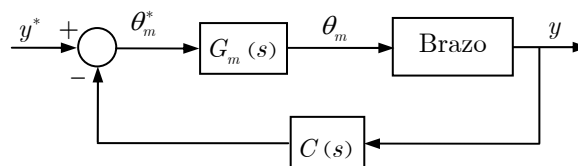


Figura 7.6: Lazo externo para la cancelación de las vibraciones residuales

Una vez que se han cerrado los dos lazos de control, se reordena el esquema de la Figura 7.6 como se muestra en la Figura 7.7. En este punto, se considera el teorema de la interconexión de sistemas pasivos en realimentación (Apartado 7.2.3), esto es, si la función de transferencia $C(s)G_m(s)$ se diseña de forma que sea pasiva y se toma una salida y tal que la relación y/θ_m sea también pasiva, entonces, la conexión en realimentación $Q(s)$ será pasiva, y si $1/C(s)$ es estable, el sistema completo también lo será. En el apartado siguiente se demuestra que existe una relación de pasividad entre la integral del par de acoplamiento $\int \Gamma_{coup}$ y el ángulo del motor θ_m . Por tanto, se elige como salida $y = \Gamma_{coup}$ y el controlador del lazo externo se define $C(s) = C'(s)/s$, donde se incluye la acción integral. Por otro lado, el par de acoplamiento es una medida de la vibración, de forma que cuando este valor se cancele, la posición del extremo del brazo habrá alcanzado su valor final. La metodología de diseño se detalla en el Apartado 7.4.

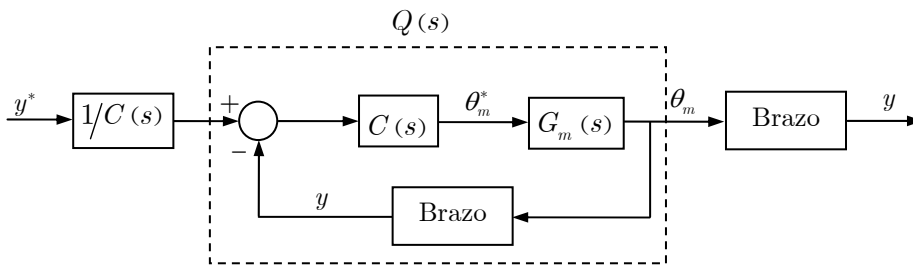


Figura 7.7: Diagrama equivalente al esquema de la Figura 7.6

7.3.2 Pasividad entre $\int \Gamma_{coup}$ y θ_m

Considérese el sistema brazo de robot flexible de la Figura 7.8 donde la entrada es el ángulo del motor θ_m . Se considera una formulación pseudo-empotrada, esto es, el eje-x es tangente a la base del eslabón (Bellezza y col., 1990).

Si se considera la EDP que gobierna el comportamiento dinámico de una viga Euler-Bernoulli, donde se ha incluido un cierto amortiguamiento viscoso y se ha particularizado para el sistema de la Figura 7.8, se tiene

$$EIw^{IV}(x,t) + \rho_L \ddot{p}(x,t) + c\dot{p}(x,t) = 0, \quad (7.10)$$

donde $p(x,t) = x\theta_m(t) + w(x,t)$ y c es un coeficiente constante de amortiguamiento. Las condiciones de contorno asociadas a (7.10) son

$$\begin{aligned}
w(0,t) &= 0 \\
w'(0,t) &= 0 \\
EIw''(L,t) &= -J_P\ddot{p}'(L,t) \\
EIw'''(L,t) &= M_P\ddot{p}(L,t)
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Permítase de ahora en adelante utilizar p , p_0 y p_L para denotar $p(x,t)$, $p(0,t)$ y $p(L,t)$, y escribir w , w_0 y w_L en lugar de $w(x,t)$, $w(0,t)$ y $w(L,t)$. Por otro lado, el par de acoplamiento debido al eslabón y la carga se puede obtener a partir de las dos expresiones siguientes

$$\Gamma_{coup}(t) = -EIw_0'' = \rho_L \int_0^L x\ddot{p}dx + M_P L\ddot{p}_L + J_P \ddot{p}'_L + c \int_0^L x\dot{p}dx. \tag{7.12}$$

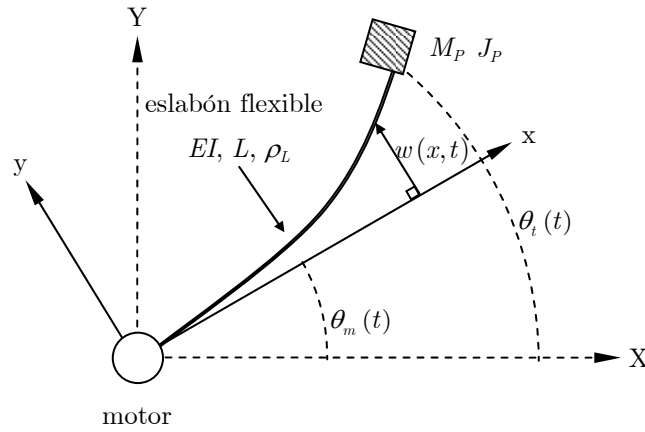


Figura 7.8: Brazo de robot flexible pseudo-empotrado

A continuación se demuestra la relación de pasividad existente entre $\int \Gamma_{coup}$ y θ_m . Para ello, se toma como función de almacenamiento el Hamiltoniano

$$H(t) = T(t) + V(t), \tag{7.13}$$

donde $T(t)$ y $V(t)$ son, respectivamente, la energía cinética y potencial debidas al eslabón y a la carga. La energía cinética total se calcula como

$$T(t) = \frac{1}{2} \rho_L \int_0^L \dot{p}^2 dx + \frac{1}{2} M_P (\dot{p}_L)^2 + \frac{1}{2} J_P (\dot{p}'_L)^2, \tag{7.14}$$

y la potencial

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w'')^2 dx. \tag{7.15}$$

Obviamente, el Hamiltoniano (7.13) es definido positivo.

La derivada temporal de $T(t)$ es

$$\dot{T}(t) = \rho_L \int_0^L \dot{p}\ddot{p}dx + M_P \dot{p}_L \ddot{p}_L + J_P \dot{p}'_L \ddot{p}'_L, \quad (7.16)$$

y la derivada temporal de $V(t)$ queda

$$\dot{V}(t) = EI \int_0^L w'' \dot{w}'' dx. \quad (7.17)$$

Si se compara (7.16) con (7.12), se puede escribir

$$\dot{T}(t) = \dot{\theta}_m \left(\Gamma_{coup} - c \int_0^L x \dot{p} dx \right) + \Theta, \quad (7.18)$$

siendo Θ

$$\Theta = \rho_L \int_0^L \dot{w}\ddot{p}dx + M_P \dot{w}_L \ddot{p}_L + J_P \dot{w}'_L \ddot{p}'_L. \quad (7.19)$$

A partir de (7.10) y de las condiciones de contorno (7.11), Θ se puede escribir también (tras integrar por partes)

$$\Theta = -EI \int_0^L w'' \dot{w}'' dx - c \int_0^L \dot{w}\ddot{p}dx. \quad (7.20)$$

Ahora bien, si se considera la expresión (7.17), Θ se reescribe de la siguiente forma

$$\Theta = -\dot{V}(t) - c \int_0^L \dot{w}\ddot{p}dx. \quad (7.21)$$

Por tanto, la derivada temporal de (7.13) utilizando (7.16) y (7.21) queda

$$\dot{H}(t) = \dot{T}(t) + \dot{V}(t) = \dot{\theta}_m \Gamma_{coup} - c \int_0^L \dot{p}^2 dx. \quad (7.22)$$

Si se define

$$\psi(\dot{p}) = c \int_0^L \dot{p}^2 dx, \quad (7.23)$$

entonces la ecuación (7.22) se puede reescribir como

$$u(t)y(t) = \dot{H}(t) + \psi(\dot{p}), \quad t \in [0, T], \quad (7.24)$$

donde $u = \dot{\theta}_m$ (entrada), $y = \Gamma_{coup}$ (salida) y $\psi(\dot{p})$ es una función definida positiva. Por tanto, atendiendo a la Definición 7.2, existe una relación de pasividad estricta entre $\dot{\theta}_m$ y Γ_{coup} . Por otro lado, ya que el sistema es lineal, la función de transferencia $y(s)/u(s)$ es estrictamente positiva real (Lema 7.1). Así, la función de transferencia $(y(s)/s)/(u(s)/s)$ es la misma que $y(s)/u(s)$, y por tanto, la relación entre $\int_0^T \Gamma_{coup} dt$ y θ_m es estrictamente pasiva ya que $\mathcal{L}^{-1}[y(s)/s] = \int_0^T \Gamma_{coup} dt$ y $\mathcal{L}^{-1}[u(s)/s] = \theta_m$.

7.4 Metodología de diseño

El objetivo de este apartado es estudiar las posibles configuraciones del regulador del lazo interno $R_i(s)$ y del controlador del lazo externo $C(s)$ de tal forma que se garantice la estabilidad global del sistema. Una vez discutidas esas posibles configuraciones, se plantea una metodología de diseño del esquema de control. En la Figura 7.9 se muestra el esquema general de control donde se observan los dos lazos anidados (interno y externo). En la figura, θ_t y θ_t^* son la posición angular del extremo y su referencia, y θ_m^* es la referencia de la posición angular del motor. La función de transferencia del lazo interno $G_m(s)$ se obtiene como resultado de aplicar un servo de posición $R_i(s)$ al motor, $C(s)$ es el controlador del lazo externo, $G_1(s)$ y $G_2(s)$ son las funciones de transferencia que relacionan, respectivamente, el ángulo del extremo y el par de acoplamiento con el ángulo del motor. A continuación se comenta en detalle el lazo externo y la metodología de diseño. El lazo interno o servo de posición del motor corresponde a la Figura 6.6 y se explica en detalle en el Apartado 6.5.3a). No obstante, se recuerda que una vez realimentado el par de acoplamiento, la función de transferencia del motor quedaba

$$\theta_m(s)/V_c(s) = M(s) = A/(s(s+B)), \quad (7.25)$$

donde V_c es el voltaje de control ficticio, es decir, como si el motor estuviese sin carga.

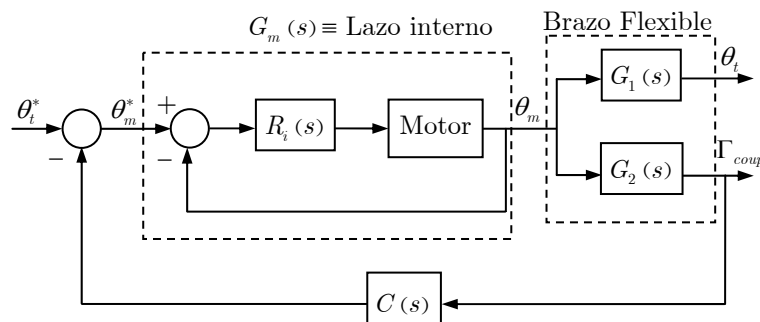


Figura 7.9: Esquema general de control

a) Lazo externo.

Como se muestra en la Figura 7.9, el lazo externo se cierra empleando el controlador $C(s)$. Tal controlador se define como

$$C(s) = C'(s)/s, \quad (7.26)$$

donde $C'(s)$ debe ser diseñada. En este punto, al igual que en la sección anterior, se reorganiza el esquema de la Figura 7.9 de la forma que se muestra en la Figura 7.10. A partir de la Figura 7.10, se obtiene que la función de transferencia $Q(s)$ es de la siguiente forma

$$Q(s) = \frac{C'(s)G_m(s)}{1 + C'(s)G_m(s)G_2(s)\frac{1}{s}}. \quad (7.27)$$

A continuación, se tiene en cuenta la relación de pasividad entre la integral del par de acoplamiento y el ángulo de motor que se ha demostrado en el apartado anterior. Esto es, la función de transferencia $G_2(s)/s$ es estrictamente positivo real (la función de transferencia de la realimentación en la Figura 7.10). A partir del teorema de la interconexión de sistemas pasivos en realimentación (Teorema 7.1), si la función de transferencia $C'(s)G_m(s)$ se diseña de forma que sea estrictamente pasiva (estrictamente positivo real) y $G_2(s)/s$ es estrictamente pasiva, se llega a que $Q(s)$ también es estrictamente pasiva, y por ende, asintóticamente estable (Lema 7.2). Además, nótese que los polos de $G_1(s)/C'(s)$ son los ceros de $Q(s)$ ya que $G_1(s)$ y $G_2(s)$ tienen el mismo denominador y $C'(s)$ aparece como un factor en el numerador de $Q(s)$. Así, los polos de la función de transferencia $\theta_t/\theta_t^* = Q(s)G_1(s)/C'(s)$ son los polos de $Q(s)$. Con todo lo anterior, se concluye que la estabilidad de $Q(s)$ garantiza la estabilidad del sistema completo y que dicha estabilidad depende de la pasividad del término $C'(s)G_m(s)$.

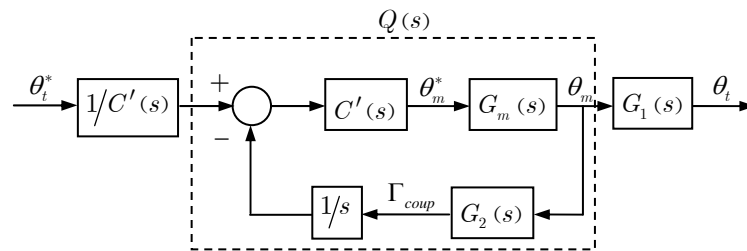


Figura 7.10: Esquema general de control. Diagrama equivalente al esquema de la Figura 7.9

b) Metodología de diseño.

El proceso de diseño se ha dividido en cuatro pasos:

- 1) Se define la estructura del controlador del lazo interno $R_i(s)$ (por ejemplo, un PD o un PID) de tal forma que el orden relativo de $G_m(s)$ sea menor o igual que

- dos.
- 2) Se diseñan los parámetros de $R_i(s)$ de tal forma que el control de posición del motor sea robusto a la fricción de Coulomb y sea lo más rápido posible con respecto a la dinámica del sistema.
 - 3) Se define la estructura de $C'(s)$ de tal forma que $C'(s)G_m(s)$ sea pasivo y $C(s)$ implementable (es decir, esto último implica que $C(s)$ debe ser propia o, lo que es lo mismo, su orden relativo debe ser mayor o igual que cero). Estas dos condiciones conducen a que el orden relativo de $G_m(s)$ debe ser menor o igual que dos.
 - 4) Se diseñan los parámetros de $C'(s)$ de forma que los dos polos correspondientes al primer modo de vibración pasen a ser un polo doble en el eje real negativo. Esto es, se diseña de forma que la dinámica dominante sea críticamente amortiguada.

7.5 Ejemplos de aplicación

En este apartado se analizan las condiciones de pasividad de $C'(s)G_m(s)$ para dos controladores $R_i(s)$ diferentes en el lazo interno. Primero se estudia el caso de un PD, con el cual el efecto de la fricción de Coulomb (que conduce a un error en régimen permanente) se minimiza utilizando altas ganancias. Posteriormente, se estudia el caso de un PID con un filtro paso bajo en la acción derivativa, el cual elimina el error en régimen permanente debido a la acción integral. El orden relativo de $G_m(s)$ cuando se utiliza cualquiera de los dos controladores mencionados es dos. Inicialmente, se analizan las condiciones de pasividad cuando el par de acoplamiento se compensa de forma exacta y posteriormente, se estudia como se modifican esas condiciones cuando existen incertidumbres en los parámetros de la compensación.

7.5.1 Controlador PD

El diseño de un PD para el control de posición se ha descrito en el Apartado 6.5.3a), donde se lleva a cabo el desacoplamiento entre la dinámica del motor y del brazo. El

lazo interno se diseña de forma que la respuesta sea la de un sistema de segundo orden críticamente amortiguado. La función de transferencia que resulta es

$$G_m(s) = 1/(1 + \alpha s)^2, \quad (7.28)$$

donde α es la constante de tiempo. El orden relativo de $C'(s)G_m(s)$ debe ser cero o uno para que sea pasivo (Definición 7.3). Por otro lado, la función de transferencia $C(s)$ debe ser propia (orden relativo mayor o igual que cero) para ser implementable. Por tanto, como el orden relativo de $G_m(s)$ (ver (7.28)) es dos, entonces, $C'(s)$ debe ser de la siguiente forma

$$C'(s) = K_c(\lambda s + 1), \quad (7.29)$$

donde K_c y λ son parámetros de diseño. Ya que un sistema lineal estrictamente pasivo es estrictamente positivo real (Definición 7.3) y considerando (7.28) y (7.29), se obtiene la siguiente condición de pasividad para $C'(s)G_m(s)$

$$\operatorname{Re}(C'(j\omega)G_m(j\omega)) = \operatorname{Re}\left\{\frac{K_c(1 + j\lambda\omega)}{(1 - \alpha^2\omega^2) + j2\omega\alpha}\right\} > 0, \quad \forall \omega > 0. \quad (7.30)$$

De (7.30) se deduce de forma inmediata la siguiente condición necesaria y suficiente

$$\lambda > \alpha/2 > 0. \quad (7.31)$$

El último paso es el diseño de $C'(s)$ para que la respuesta del sistema debida a los dos polos dominantes sea críticamente amortiguada. Para realizar este diseño se ha empleado el método del lugar de las raíces. En la Figura 7.11 se ilustra un ejemplo de lugar de las raíces. Las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots$ son las frecuencias de vibración del brazo. Así, el diseño de K_c se realiza de forma que los dos polos dominantes que corresponden al primer modo de vibración sean un polo doble real situado en $-p_d$. El polo $-1/\alpha$ es el correspondiente a la dinámica del lazo interno que es mucho más rápida que la dinámica del brazo. El cero del lazo externo se sitúa en $-1/\lambda$ y debe cumplir la condición de pasividad (7.31).

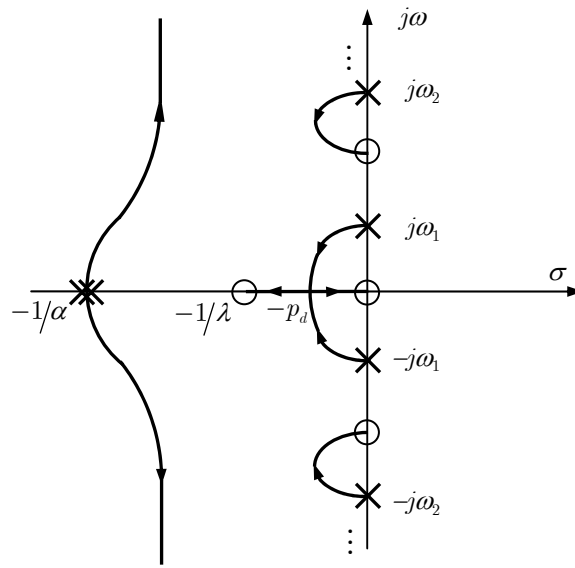


Figura 7.11: Ilustración del lugar de las raíces del denominador de $Q(s)$. Diseño de los parámetros del controlador del lazo externo

7.5.2 Controlador PID

La ley de control para un PID incluyendo la compensación del par de acoplamiento (ver Figura 7.12) es

$$V = \Gamma_{coup}/n_r K + K_p (\theta_m^* - \theta_m) + K_v (\dot{\theta}_m^* - \dot{\theta}_m) + K_i \int (\theta_m^* - \theta_m) d\tau, \quad (7.32)$$

donde K_p , K_v y K_i son las ganancias del PID. Dados los problemas que conlleva una acción derivativa del error en la velocidad (ruidos de alta frecuencia, elevadas señales de control, etc.), se añade un filtro paso bajo con una frecuencia de corte β , quedando la función de transferencia del regulador del lazo interno como sigue

$$R_i(s) = \frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s(s + \beta)}, \quad (7.33)$$

con

$$\alpha_0 = K_i \beta; \quad \alpha_1 = K_p \beta + K_i; \quad \alpha_2 = K_v + K_p. \quad (7.34)$$

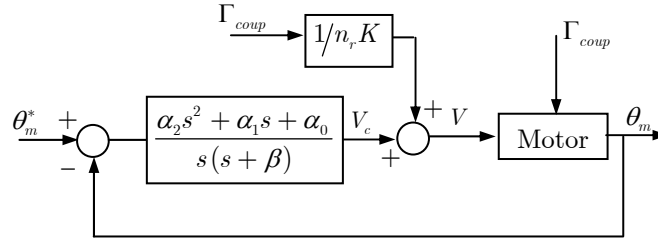


Figura 7.12: Servo de posición para el motor con un PID

Teniendo en cuenta la ecuación del motor (7.25), se obtiene la función de transferencia del lazo interno para el caso del PID

$$G_m(s) = \frac{A(\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0)}{s(s + B)(s + \beta) + A(\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0)}. \quad (7.35)$$

A continuación se toma como criterio de diseño que $G_m(s)$ tenga todos sus polos en el eje real y sean coincidentes ($-p$). Entonces, (7.35) queda

$$G_m(s) = \frac{A(\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0)}{(s + p)^4}, \quad (7.36)$$

con las siguientes ecuaciones de diseño

$$\beta = 4p - B; \quad \alpha_2 = (6p^2 - 4pB + B^2)/A; \quad \alpha_1 = 4p^3/A; \quad \alpha_0 = p^4/A. \quad (7.37)$$

Obsérvese que el orden relativo de $G_m(s)$ es dos. Al igual que en el caso del PD, el orden relativo de $C'(s)G_m(s)$ debe ser cero o uno y $C(s)$ debe ser propia. Entonces, $C'(s)$ se elige como en (7.29). Finalmente, sustituyendo (7.37) en (7.36), se obtiene la siguiente condición de pasividad estricta para $C'(s)G_m(s)$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{-(6p^2 - 4pB + B^2)\omega^2 + p^4 + j4p^3\omega}{\omega^4 - 6p^2\omega^2 + p^4 - j(4p\omega^3 - 4p^3\omega)} (1 + j\lambda\omega) \right\} > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (7.38)$$

A continuación se define $\Lambda \equiv \lambda p$ y $\varepsilon \equiv B/p$ y tras algunos cálculos se obtiene

$$79.8p > \Lambda > (-6 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)/(4(-5 + 3\varepsilon - \varepsilon^2)). \quad (7.39)$$

(Los detalles de la obtención de (7.39) se detallan en el Apéndice A.1). Nótese que en la condición (7.39) el límite superior carece de interés ya que valores elevados de Λ hacen que el cero asociado a λ esté más cerca del origen, y por tanto, lo esté también el polo de diseño $-p_d$, lo cual conduce a un sistema más lento (ver Figura 7.11). En la Figura 7.13 se representa el límite inferior.

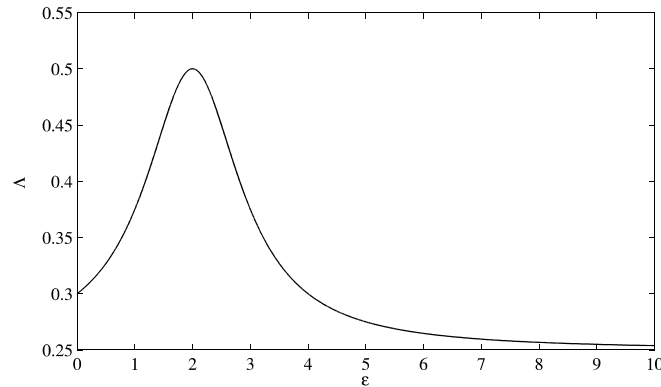


Figura 7.13: Condición de pasividad para el PID. Límite inferior

Finalmente, el último paso es el diseño de $C'(s)$ para que la respuesta del sistema debida a los dos polos dominantes sea críticamente amortiguada. Al igual que en el caso del PD, se emplea el método del lugar de las raíces para ajustar K_c y λ .

7.5.3 Extensión al caso de una compensación no exacta del par de acoplamiento

Hasta ahora, se ha aceptado que la compensación del par de acoplamiento en el motor era exacta. Sin embargo, en la práctica, existen incertidumbres tanto en los parámetros del motor como en la medida del par de acoplamiento.

Teniendo en cuenta estas incertidumbres, la nueva condición de pasividad estricta para el caso del PD es como sigue

$$\lambda > \frac{\alpha}{2} + \gamma > 0, \quad (7.40)$$

a diferencia de (7.31). Así, el valor de λ que garantiza la pasividad de $Q(s)$ es el mismo que en el caso ideal salvo por el sumando γ que recoge las incertidumbres y hace más restrictiva la condición. Este parámetro es inversamente proporcional a la relación de reducción n_r , lo cual hace que el efecto de éste en la condición de pasividad sea pequeño para un motor-actuador con reductora. Los detalles de la obtención de γ se presentan en el Apéndice A.2.

Para el caso del PID, se llega a una condición homóloga a (7.40)

$$\Lambda > \Psi\chi + \frac{-6 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}{4(-5 + 3\varepsilon - \varepsilon^2)}. \quad (7.41)$$

Nuevamente, la condición ideal se encuentra afectada por un sumando $\Psi\chi$, donde χ es inversamente proporcional a la relación de reducción. Los detalles se presentan en el Apéndice A.2.

Por tanto, teniendo en cuenta incertidumbres en los parámetros, se obtienen dos condiciones de pasividad equivalentes, a las que ya se tenían, pero más restrictivas.

7.6 Simulaciones y resultados experimentales

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la particularización del esquema de control propuesto en los Apartados 7.3 y 7.4 para los ejemplos analizados en el Apartado 7.5, esto es, para un PD y un PID en el lazo interno.

Los parámetros del brazo son los que se muestran en la Tabla 6.1, salvo que ahora la carga se modifica de 0.00 a 0.30kg. Las simulaciones se han realizado utilizando un modelo truncado en el que se han considerado los tres primeros modos de vibración. Las frecuencias naturales son 1.03, 6.05 y 18.31Hz para el caso sin masa y 0.44, 4.78, 15.44Hz para el caso con masa.

7.6.1 Resultados con el PD

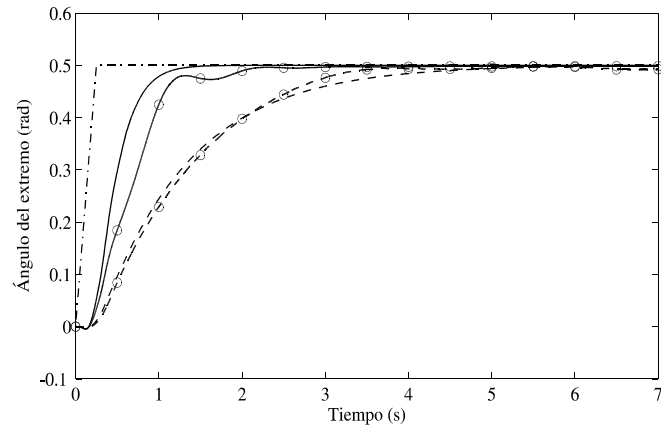
Se presentan las simulaciones y los resultados experimentales para el caso del PD en el lazo interno y bajo las mismas condiciones de trabajo. La constante de tiempo del lazo interno se ha tomado $\alpha = 0.02$, siendo las ganancias del PD: $K_p = 83.72$ y $K_v = 3.35$ (ecuación (6.27)). El paso siguiente es el diseño de $C'(s)$ que se realiza para el caso de masa 0.0kg, de tal forma que los polos correspondientes al primer modo de vibración se sitúan en $-p_d = 3.8$. Entonces, empleando el método del lugar de las raíces tal y como se indica en el Apartado 7.5.1, se obtienen los parámetros $\lambda = 0.05$ y $K_c = 1.8$ de $C'(s)$. Por otro lado, si se considera un porcentaje de incertidumbre del 90% en la estimación del parámetro K del motor y en la medida del par de acoplamiento, se obtiene que λ debe ser mayor que 0.0127 (ecuación (7.40)), en lugar de $\alpha/2 = 0.01$ (ecuación (7.31)) (para más detalles ver el Apéndice A.2). Por tanto, se cumple la condición de pasividad. Una vez que se han establecido los parámetros que

definen el esquema de control, se llevan a cabo simulaciones y experimentos con $M_p = 0$ y $M_p = 0.30\text{kg}$ (aproximadamente la masa del eslabón).

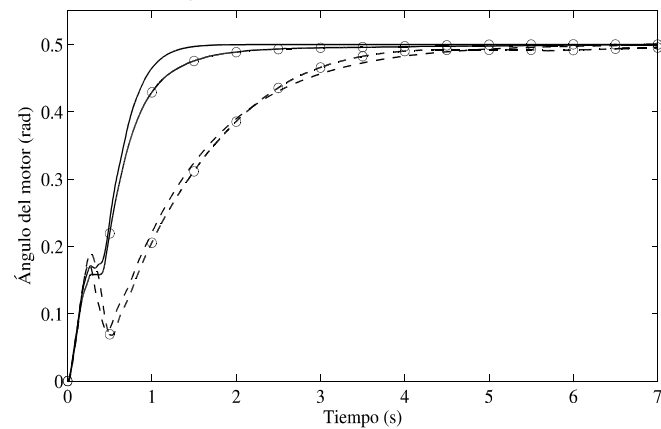
En la Figura 7.14a) se muestra el ángulo del extremo para los dos valores de masa considerados tanto en simulación como experimental. Se observa como para ambos valores de masa la respuesta del extremo es muy aceptable. Nótese que esta señal no se mide directamente, y por tanto, se estima a partir de un observador de orden completo. Este observador se construye a partir del modelo en espacio de estados con entrada el ángulo del motor y salida el par de acoplamiento. En esta misma figura se muestra la referencia del ángulo del extremo θ_t^* que es una rampa de pendiente 2 y valor final 0.5. En las Figuras 7.14b) y c) se representan las señales que se realimentan en el esquema de control, el ángulo del motor en el lazo interno y el par de acoplamiento tanto en el lazo interno como en el lazo externo. Se observa como claramente la vibración residual se anula completamente y también se observa un pequeño error en régimen permanente (entorno al 1%) en el ángulo del motor y del extremo.

7.6.2 Resultados con el PID

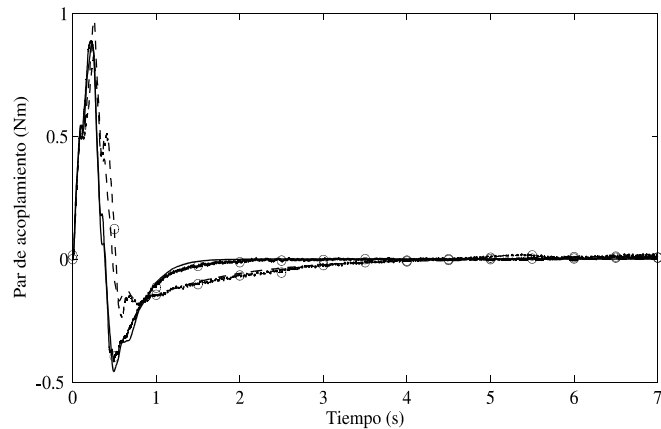
Seguidamente se presentan las simulaciones y los resultados experimentales para el caso del PID en el lazo interno y bajo las mismas condiciones de trabajo. Teniendo en cuenta el par motor máximo, se diseña el PID para $p = 40$ (ecuación (7.36)). A partir de la ecuación (7.37) se obtienen los parámetros del regulador $\beta = 155.6$, $\alpha_2 = 312.82$, $\alpha_1 = 8.98 \cdot 10^3$ y $\alpha_0 = 8.98 \cdot 10^4$. Procediendo igual que en el caso del PD (es decir, empleando el método del lugar de las raíces), se obtienen los parámetros del lazo externo $\lambda = 0.02$ ($\Lambda = p\lambda$) y $K_c = 1.83$. Para este diseño, la respuesta del extremo para el PD y el PID son similares en términos del tiempo de establecimiento (tiempo para que la respuesta alcance y permanezca dentro de un porcentaje del valor final). Por otro lado, se considera el mismo nivel de incertidumbre que en el caso del PD, y se obtiene que Λ debe ser mayor que 0.30 (que coincide prácticamente con el límite inferior de (7.39)). Por tanto, se cumple la condición de pasividad. Una vez establecidos los parámetros que definen el esquema de control, se llevan a cabo simulaciones y experimentos con $M_p = 0$ y $M_p = 0.30\text{kg}$.



a) Ángulo del extremo θ_t



b) Ángulo del motor θ_m



c) Par de acoplamiento Γ_{coup}

Figura 7.14: Resultado utilizando el PD: (—) Simulación con $M_p = 0$; (⊖) Experimento con $M_p = 0$; (---) Simulación con $M_p = 0.3$; (⊖) Experimento con $M_p = 0.3$; (---) Referencia

En la Figura 7.15a) se muestra el ángulo del extremo para los dos valores de masa considerados tanto en simulaciones como en experimentos. Se observa como el tiempo de establecimiento es similar al caso del PD y como el error en régimen permanente es

prácticamente cero en los experimentos. En la Figura 7.15b) se observa como el motor alcanza el valor final sin error en régimen permanente y en la Figura 7.15c) se representa el par de acoplamiento, el cual se anula de forma muy efectiva.

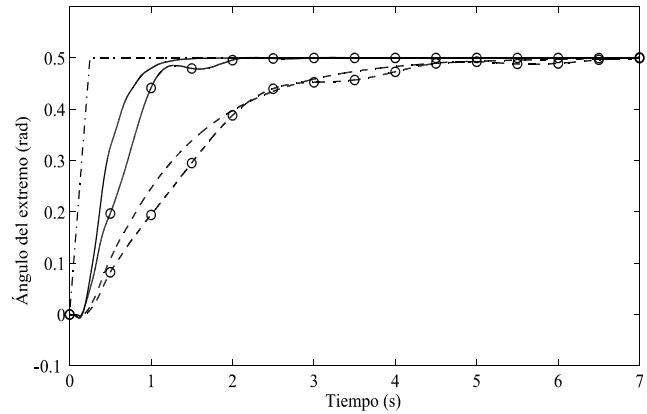
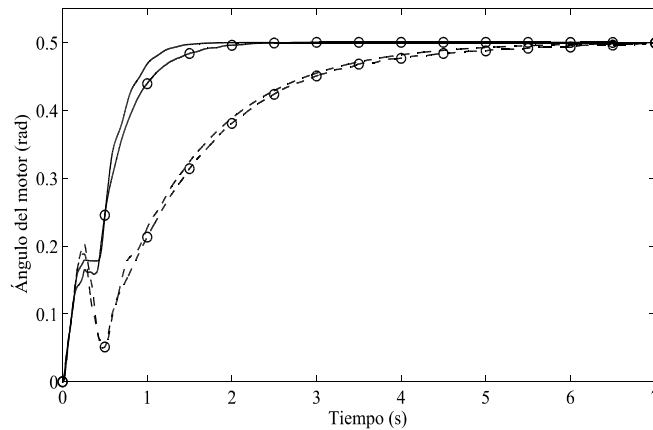
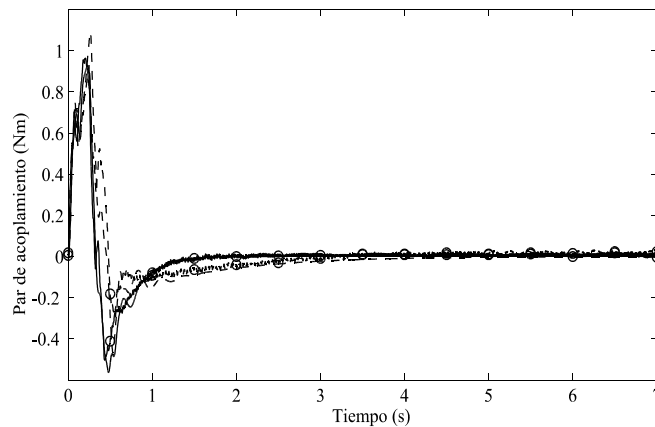
a) Ángulo del extremo θ_t b) Ángulo del motor θ_m c) Par de acoplamiento Γ_{coup}

Figura 7.15: Resultado utilizando el PID: (—) Simulación con $M_p = 0$; (⊕) Experimento con $M_p = 0$; (---) Simulación con $M_p = 0.3$; (⊖) Experimento con $M_p = 0.3$; (---) Referencia

7.7 Discusión

En este apartado se discuten las ventajas y desventajas de la metodología presentada en comparación con los trabajos más significativos basados en DSFB (Luo, 1993; Ge y col., 1998; Luo y Feng, 1999) y en pasividad (Liu y Yuan, 2003). Nótese que los trabajos de pasividad de Gevarter (1970) y Wang y Vidyasagar (1992) no se consideran ya que son un caso particular del trabajo de Liu y Yuan (2003).

Luo (1993) propone un control para el motor basado en una referencia de velocidad. Se demuestra que si la referencia de velocidad es proporcional a la medida de la deformación en la base del eslabón, las vibraciones se amortiguan. Además, demuestra que la realimentación de la integral de la deformación aumenta la rigidez del brazo. Por otro lado, utiliza un PID para el control de posición del motor. Sin embargo, no se estudian las condiciones de estabilidad para el PID y dado que la dinámica del motor y del brazo están acopladas, el esquema de control se encuentra limitado en las especificaciones temporales de la respuesta y la estabilidad global depende de los parámetros del brazo.

Ge y col. (1998) utilizan una ley de control que se compone de un controlador PD más una función no lineal. Esta función se forma a partir de una medida de la vibración que puede ser la deformación, el esfuerzo cortante o la aceleración en cualquier punto del eslabón. Se demuestra la estabilidad del sistema, pero no se investiga qué ocurre cuando se incluye rozamiento de Coulomb.

Luo y Feng (1999) desarrollan experimentalmente el esquema propuesto por Ge y col. (1998) y además incluyen un PID, en lugar de un PD, para eliminar el error en régimen permanente. Sin embargo, no se demuestra la estabilidad cuando se incluye esa acción integral. Las especificaciones temporales de la respuesta están limitadas por la estabilidad global del sistema y la efectividad en la eliminación de la vibración residual.

Liu y Yuan (2003) demuestran las condiciones de pasividad para modelos infinito dimensionales. La entrada es el par motor y la salida es el ángulo del motor más un valor que depende de la posición del extremo. Se debe cumplir alguna de las siguientes restricciones: la salida es el ángulo del motor o la inercia del motor+reductora es despreciable frente a la inercia del eslabón y la carga. Sin embargo, se demuestra que se puede emplear un controlador que convierta al sistema en pasivo independientemente

de las restricciones anteriores. Si se emplea un PD para el motor se asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, no se puede incluir una acción integral ya que el sistema deja de ser observable. Por otro lado, si se aumentan las ganancias del PD para minimizar el error en régimen permanente se deteriora drásticamente la respuesta del sistema. Es importante mencionar que tanto la pasividad obtenida con el controlador, como la estabilidad del sistema en lazo cerrado con un PD, se demuestran para un modelo truncado.

Finalmente, la metodología aquí presentada permite diseñar el control de posición del motor independientemente de la dinámica del brazo. Es decir, el lazo interno se diseña para conseguir unas especificaciones temporales para la respuesta del motor y para reducir o eliminar el error debido a la fricción de Coulomb. Además, la estabilidad global del sistema es independiente de la dinámica del brazo y muy robusta a incertidumbres, tanto en los parámetros del motor como en la medida del par de acoplamiento. Por otro lado, la metodología presentada es sistemática, de fácil aplicación y conduce a controladores más sencillos y robustos que el resto de metodologías comentadas en este capítulo.

En la Tabla 7.1 se resumen las ventajas y desventajas de las referencias comentadas. La primera fila se refiere a las restricciones en el modelo dinámico. La segunda indica si es posible que aparezcan inestabilidades al cambiar la carga o por las frecuencias de desbordamiento. La tercera se refiere a las limitaciones en la respuesta debido al control de posición del motor. La cuarta indica si existen restricciones en cuanto a la eliminación del error en régimen permanente.

Tabla 7.1: Comparación de las principales referencias estudiadas

	Luo (1993)	Ge (1998)	Luo (1999)	Liu (2003)	PD	PID
<i>Restricciones</i>	NO	NO	NO	SI	NO	NO
<i>Inestabilidades</i>	SI	NO	SI	SI	NO	NO
<i>Limitaciones temporales</i>	SI	SI	SI	SI	NO	NO
<i>Error en régimen permanente</i>	NO	SI	NO	SI	NO	NO

7.8 Resumen

Se ha propuesto una nueva metodología para el diseño de controladores basados en pasividad y aplicados a manipuladores flexibles de un grado de libertad. El esquema propuesto está formado por dos lazos de control anidados (lazo interno y lazo externo) y una realimentación lineal de la medida de la deformación en la base del brazo (proporcional al par de acoplamiento), para desacoplar la dinámica del motor y del brazo; de esta forma, la dinámica del lazo interno es independiente del valor de la carga. El lazo externo se diseña utilizando la propiedad de pasividad existente entre la integral del par de acoplamiento y el ángulo del motor; así, el sistema global es estable, independientemente de la dinámica del lazo interno. La propiedad de pasividad se demuestra sin aceptar ninguna restricción en los parámetros del sistema. Por tanto, la metodología propuesta basada en un modelo infinito dimensional presenta varias ventajas respecto a otras referencias consultadas, entre las que se destacan las siguientes (ver Tabla 7.1): a) no se acepta ninguna restricción en el modelo; b) el esquema resultante es independiente de la carga; y c) se puede incluir una acción integral sin afectar a la estabilidad del sistema. Finalmente, el ajuste de los parámetros se realiza para que el comportamiento del sistema sea críticamente amortiguado para una dinámica nominal.

Capítulo 8

Conclusiones

La tesis que se ha presentado es el resultado de los trabajos realizados por el autor en el proyecto de investigación “Programa de Monitorización y Control de Vibraciones en Estructuras Flexibles Aeroespaciales”. Más concretamente, esta tesis recoge los aspectos relacionados con la construcción y caracterización dinámica de tres plataformas representativas de estructuras aeroespaciales y el control de vibraciones en una de ellas, un robot flexible de un grado de libertad. A continuación se exponen las principales conclusiones y aportaciones y además, se proponen una serie de trabajos futuros a modo de continuación de la investigación desarrollada.

8.1 Conclusiones y aportaciones de la tesis

En esta tesis se han investigado varios aspectos relacionados con el análisis y control de vibraciones en estructuras flexibles representativas de sistemas aeroespaciales. Las contribuciones y aportaciones son las siguientes:

- i) En el Capítulo 2 se ha realizado una revisión de las estructuras flexibles aeroespaciales, tanto estructuras reales como de laboratorio. De esta forma, se ha motivado la construcción de tres plataformas: un robot flexible de un grado de libertad, una gran placa delgada empotrada-libre y una estructura articulada libre-libre. Se ha estudiado tanto el procedimiento experimental de caracterización dinámica, como los sensores/actuadores más empleados en las estructuras instrumentadas. Además, se han incluido ciertas consideraciones que son importantes en la implementación práctica de un sistema de control para la

- cancelación de vibraciones. Entre ellas se encuentran las relativas a la colocación de sensores y actuadores para: minimizar los efectos de las frecuencias de desbordamiento, maximizar la medida y minimizar el esfuerzo de control.
- ii) En el Capítulo 3 se han descrito las distintas técnicas de modelado de robots flexibles de un grado de libertad –modelo continuo, modelo de elementos finitos y modelo de masas puntuales–. A partir de estas técnicas, se obtienen relaciones dinámicas entre la entrada (actuador) y las salidas (sensores), que se utilizan en el diseño de algoritmos de control. En esta tesis se ha empleado un motor-actuador en la base del eslabón (unión) o actuadores piezoeléctricos adheridos a lo largo del eslabón. Se ha diseñado la plataforma experimental: el eslabón se ha construido de aluminio con una sección rectangular, de forma que la inercia con respecto a un eje es mucho mayor que respecto al otro y así, el eslabón vibra en un único plano; también se ha diseñado un motor-actuador, consistente en un motor de corriente continua y una reductora Harmonic Drive. El actuador se ha dimensionado considerando la flexibilidad del brazo. Se ha instalado un puente de galgas que mide el par en la base del eslabón. Por otro lado, esta estructura se ha caracterizado dinámicamente mediante ensayos de impacto y armónicos. Finalmente se han propuesto dos métodos de actualización de modelos: el primero consiste en ajustar un parámetro del modelo continuo, de forma que se minimice el error cuadrático medio de las frecuencias (con respecto a las experimentales) correspondientes a los modos analizados; el segundo método se ha enfocado a los modelos discretos (de orden reducido) y se basa en la actualización de la matriz de masa, de modo que las frecuencias de vibración del modelo reducido coincidan con unas frecuencias dadas, que pueden ser las del modelo continuo o las experimentales, si se dispone de ellas.
- iii) En el Capítulo 4 se ha presentado el modelado dinámico de placas y se han incluido piezoeléctricos como actuadores. Se ha propuesto una nueva técnica para la obtención de modelos reducidos de masas puntuales; dicha técnica se ha aplicado a placas, pero es de aplicabilidad general. Se ha desarrollado una plataforma experimental que consiste en una placa delgada de gran tamaño en voladizo. Se ha propuesto un nuevo criterio de posicionamiento de sensores de deformación que se ha particularizado para esta estructura; este criterio se basa en la deformación equivalente de von Mises, la cual permite considerar un estado tridimensional de deformaciones en un único valor. La estructura se ha

- caracterizado utilizando como sensores, rosetas de galgas extensométricas, fibra de Bragg y acelerómetros y, como actuadores, se ha empleado un martillo instrumentado, un excitador electromagnético y un parche piezoeléctrico.
- iv) En el Capítulo 5 se ha desarrollado una estructura articulada formada por barras de PVC y uniones de aluminio. Dicha estructura se ha estudiado en condiciones libre-libre utilizando muelles elásticos. Se ha realizado un análisis dinámico de la estructura y se ha comprobado que los modos de sólido rígido están totalmente desacoplados de los modos de vibración. Además, se ha estudiado el modelado dinámico incluyendo actuadores de dos tipos: empujadores de aire y piezoeléctricos.
 - v) En el Capítulo 6 se ha propuesto una técnica de modificación y/o ajuste de la dinámica del eslabón de un manipulador de un grado de libertad que permite la aplicación de un control en cadena abierta sencillo (como si fuese para un único modo de vibración), el cual es capaz de cancelar varios modos de vibración simultáneamente. Esta modificación de la dinámica junto con el controlador en cadena abierta se han aplicado a la plataforma experimental y se han obtenido resultados satisfactorios, tanto en simulaciones como en experimentos.
 - vi) En el Capítulo 7 se ha propuesto una nueva metodología para el diseño de un esquema de control robusto basado en pasividad. Este esquema utiliza dos lazos anidados desacoplados: el lazo interno, que controla la posición del motor; y el lazo externo, que se encarga de la cancelación de las vibraciones y de mantener la pasividad del sistema completo. En el diseño del esquema se utiliza la propiedad de pasividad existente entre la integral del par de acoplamiento y el ángulo del motor. Esta relación se ha demostrado rigurosamente empleando el modelo de parámetros distribuidos. Basándose en la propiedad de interconexión de sistemas pasivos en realimentación, se han establecido condiciones para el lazo interno y externo que garantizan la estabilidad global asintótica para cualquier valor de la masa del extremo. Además, se ha incluido un análisis de robustez ante incertidumbres que afectan al desacoplamiento del motor y del brazo.

8.2 Futuras líneas de investigación

A continuación se exponen algunos de los posibles trabajos futuros:

- i) La demostración de pasividad realizada en el Capítulo 7 se pretende utilizar en el diseño de un control repetitivo aplicado al robot flexible. En el trabajo de Feliu y col. (2005) se plantea un esquema basado en un control repetitivo para un modelo discreto del brazo flexible. El objetivo sería demostrar la estabilidad global del sistema controlado utilizando las propiedades de pasividad estudiadas en la tesis. Además, se podría modificar la dinámica del brazo (al igual que en el Capítulo 6) para mejorar la eficacia del sistema de control.
- ii) Aplicar el esquema de control propuesto en el Capítulo 7 a un robot formado por dos eslabones: un eslabón inicial flexible y un segundo eslabón rígido. De esta forma se trataría de un sistema variante en el tiempo y sería necesario estudiar las propiedades de pasividad de este sistema.
- iii) Diseño e implantación de una red de rosetas de fibra óptica en la estructura tipo placa y diseñar un algoritmo de detección de daños basado en la deformación equivalente de von Mises, que es una magnitud significativa del estado tridimensional de deformaciones. De este modo, se podrían emplear índices de daño como los presentados en Cornwell y col. (1999), pero sustituyendo magnitudes energéticas por la deformación equivalente. Con esto, se podría valorar la sensibilidad de este parámetro a daños en la estructura.
- iv) Desarrollo de un sistema de cancelación activa de vibraciones basado en piezoeléctricos para la estructura tipo placa. Se pretende utilizar un control repetitivo, diseñado para un modo, que permita cancelar varios modos simultáneamente. En este caso, también sería necesario un estudio de las propiedades de pasividad y una modificación de la dinámica.
- v) Diseño e implantación de una red de fibra óptica en la estructura articulada. La información dada por la red se utilizaría para la monitorización del estado de tensiones y detección de posibles daños en dicha estructura.
- vi) Desarrollo de un sistema de cancelación activa de vibraciones, utilizando empujadores de aire y acelerómetros. Sería necesario un estudio del

posicionamiento de los actuadores y sensores así como de las posibles leyes de control no lineal que se podrían utilizar.

Referencias

(alava-ing.es)

(appliedresources.com)

- (Aspinwall, 1980) Aspinwall, D.M., "Acceleration profiles for minimizing residual response," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 102, no. 1, pp. 3–6, 1980
- (Balas, 1982) Balas, M.J., "Trends in large space structures control theory: Fondest hopes, wildest dreams," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, no. 3, pp. 522–535, 1982
- (Bathe, 1982) Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982
- (Bayo, 1987) Bayo, E., "A finite-element approach to control the end-point motion of a single-link flexible robot," *Journal of Robotic Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 63–75, 1987
- (Bellezza y col., 1990) Bellezza, F., Lanari, L., y Ulivi, G., "Exact modelling of the flexible slewing link," Proceedings of the *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol.1, pp. 734–804, mayo 1990
- (Benosman y Vey, 2004) Benosman, M., y Vey, L.G., "Control of flexible manipulators: A Survey," *Robotica*, vol. 22, no. 5, pp. 533–545, 2004
- (Canon y Schmitz, 1984) Canon, R.H., y Schmitz, E., "Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 3, no. 3, pp. 62–75, 1984

- (Casella y col., 2002) Casella, F., Locatelli, A., y Schiavoni, N., "Modelling and control for vibration suppression in a large structure with jet thrusters and piezoactuators," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 4, pp. 589–599, 2002
- (Chandrasekharaiah y Debnath, 1994) Chandrasekharaiah, D.S, y Debnath, L., *Continuum Mechanics*, Academic Press, San Diego, 1994, Capítulo 5
- (Choi y col., 1995) Choi, S.B., Thompson, B.S., y Gandhi, M.V., "Control of a single-link flexible manipulator fabricated from composite laminates," *Journal of Robotic Systems*, vol. 12, no. 1, pp. 45–54, 1995
- (Cornwell y col., 1999) Cornwell, P., Doebbling, S.W., y Farrar, C.R., "Application of the strain energy damage detection method to plate like structures," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 224, no. 2, pp. 359–374, 1999
- (De Luca y col., 1989) De Luca, A., Lucibello, P., y Ulivi, G., "Inversion techniques of trajectory control of flexible robot arm," *Journal of Robotic Systems*, vol. 6, no. 4, pp. 325–344, 1989
- (Díaz y col., 2006) Díaz, I.M., Pereira, E., Cela, J.J.L. y Feliu, V., "Desing and experimental validation of an optimal positioning criterion of strain sensors for plate structures," Proceedings of the 13th *International Congress on Sound and Vibration*, Viena, julio 2006
- (Dwivedy y Eberhard, 2006) Dwivedy, S.K., y Eberhard, P., "Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, no. 7, pp. 749–777, 2006
- (DYNA, 2005) Revista DYNA, Consejo General de Colegios Oficiales de Ingenieros Industriales, *Noticias*, p. 75, noviembre 2005
- (Ercoli-Finzi y col., 1993) Ercoli-Finzi, A., Gallieni, D., y Ricci, S., "Design, modal testing and updating of a large space structure laboratory model (TESS)," Proceedings of the 9th *Symposium on Dynamics and Control of Large Structures*, pp. 409–420, Blacksburg-Virginia, mayo 1993
- (Ewins, 1984) Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press, Wiley, 1984

- (Ewins, 2000) Ewins, D.J., "Basics and state-of-the-art of modal testing," *Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences*, vol. 25, no. 3, pp. 207–220, 2000
- (Fein y Gaul, 2004) Fein, O.M., y Gaul, L., "On the application of shunted piezoelectric material to enhance structural damping of a plate," *Journal of Intelligent System and Structures*, vol. 15, no. 9, pp. 737–743, 2004
- (Feliu y col., 1992) Feliu, V., Rattan, K.S., y Brown, H.B., "Modeling and control of single-link flexible arms with lumped masses," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 114, no. 3, pp. 59–69, 1992
- (Feliu y col., 1993) Feliu, V., Rattan, K.S., y Brown, H.B., "Control of flexible arms with friction in the joint," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 4, pp. 467–475, 1993
- (Feliu y Rattan, 1999) Feliu, V., y Rattan, K.S., "Feedforward control of single-link flexible manipulators by discrete model inversion," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 121, no. 4, pp. 713–721, 1999
- (Feliu y col., 2003) Feliu, V., Somolinos, J.A., y García, A., "Inverse dynamics based control system for a three-degree-of-freedom flexible arm," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 19, no. 6, pp. 1007–1014, 2003
- (Feliu y col., 2005) Feliu, V., Díaz, I.M., Roncero, P., y Cela, J.J.L., "Repetitive control for single link flexible manipulator," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4314–4319, Barcelona, abril 2005
- (Feliu y Ramos, 2005) Feliu, V., y Ramos, F., "Strain gauge based control of single-link flexible very lightweight robots robust to payload changes," *Mechatronics*, vol. 15, no. 5, pp. 547–571, 2005
- (Feliu, 2006) Feliu, V., "Robots flexibles: hacia una generación de robots con nuevas prestaciones," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 3, no. 3, pp. 24–41, 2006

- (Feliu y col., 2006) Feliu, V., Pereira, E., Díaz, I.M., y Roncero, P., "Feedforward control of multimode single-link flexible manipulators based on an optimal mechanical design," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 54, no. 8, pp. 651–666, 2006
- (Fuller y col., 1996) Fuller, C.R., Elliot S.J., y Nelson, P.A., *Active Control of Vibration*, Academic Press, London, 1996.
- (Gandhi y Thompson, 1992) Gandhi, M.V., y Thompson, B.S., *Smart Materials and Structures*, Chapman & Hall, London, 1992.
- (García y col., 2003) García, A., Feliu, V., y Somolinos, J.A., "Experimental testing of a gauge based collision detection mechanism for a new three-degree-of-freedom flexible robot," *Journal of Robotic Systems*, vol. 20, no. 6, pp. 271–284, 2003
- (Gawronski, 1997) Gawronski, W., "Actuator and sensor placement for structural testing and control," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 208, no. 1, pp. 101–109, 1997
- (Ge y col., 1998) Ge, S.S., Lee, T.H., y Zhu, G., "Improving regulation of a single-link flexible manipulator with strain feedback," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, no. 1, pp. 179–185, 1998
- (Gevarter, 1970) Gevarter, W.B., "Basic relations for controls of flexible vehicles," *AIAA Journal*, vol. 8, no. 4, pp. 666–672, 1970
- (Gutiérrez, 1999) Gutiérrez, H.L., *Performance Assessment and Enhancement of precision controlled structures during conceptual design*, Tesis doctoral, The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1999, Capítulo 6
- (Hallauer y Lamberson, 1989) Hallauer, W.L., y Lamberson, S.E., "A laboratory planar truss for structural dynamics testing," *Experimental Techniques*, vol. 13, no. 9, pp. 24–27, 1989
- (Hallauer y col., 1991) Hallauer, W.L., Lamberson, S.E., y Baer, C.A., "Active vibration damping of a planar truss using air-jet thrusters," *Experimental Mechanics*, vol. 31, no. 3, pp. 189–196, 1991

- (Halim, 2002) Halim, D., *Vibration analysis and control of smart structures*, Tesis doctoral, The University of Newcastle, Australia, 2002, Capítulo 2
- (Halim y Moheimani, 2003) Halim, D., y Moheimani, S.O.R., "An optimization approach to optimal placement of collocated piezoelectric actuators and sensors on a thin plate," *Mechatronics*, vol. 13, no. 1, pp. 27–47, 2003
- (harmonicdrive.com)
- (Horta y Kvaternik, 2000) Horta, L.G., y Kvaternik, R.G., "A historical perspective on dynamics testing at the Langley Research Center," *NASA STI Report Series*, TM–2000–210295, 2000
- (Hsieh y col., 1991) Hsieh, C., Kim, J.H., Liu, K., Zhu, G., y Skelton, R.E., "Control of large flexible structures –an experiment on the NASA Mini-Mast facility," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 11, no. 6, pp. 13–21, 1991
- (Hughes, 1987) Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamics Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987
- (Hwang y col., 1997) Hwang, J.K., Choi, C.H., Song, C.K., y Lee, J.M., "Robust LQG control of an all-clamped thin plate with piezoelectric actuators/sensors," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 2, no. 3, pp. 205–212, 1997
- (Joshi, 1999) Joshi, S.S., "The need for a systems perspective in control theory and practice," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 19, no. 6, pp. 56–63, 1999
- (Kar y col., 2000) Kar, I.N., Miyakura, T., y Seto, K., "Bending and torsional vibration control of a flexible structure using H_∞ -based robust control law," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 3, pp. 545–553, 2000
- (Kersey y col, 1997) Kersey, A.D., Davis, M.A., Patrick, H.J., LeBlanc, M., Koo, K.P., Askins, C.G., Putnam, M.A., y Friebele, E.J., "Fiber grating sensors," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 13, no. 8, pp. 1442–1463, 1997

- (Khalil, 1992) Khalil, H.R., *Nonlinear Systems*, Macmillan, New York, Capítulo 6
- (Khan y col., 2000) Khan, A.Z., Stanbridge, A.B., y Ewins, D.J., "Detecting damage in vibrating structures with scanning LDV," *Optics and Lasers Engineering*, vol. 32, no. 6, pp. 583–592, 2000
- (Kotnik y col., 1998) Kotnik, P.T., Yurkovich, S., y Ozguner, U., "Acceleration feedback for control of a flexible manipulator arm," *Journal of Robotic Systems*, vol. 5, no. 3, pp. 181–196, 1998
- (Liu y Yuan, 2003) Liu, L.Y., y Yuan, K., "Noncollocated passivity-based PD control of a single-link flexible manipulator," *Robotica*, vol. 21, no. 2, pp. 117–135, 2003
- (Luo, 1993) Luo, Z.H., "Direct strain feedback control of flexible robot arms: new theoretical and experimental results," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, pp. 1610–1622, 1993
- (Luo y Feng, 1999) Luo, Z.H., y Feng, D.X., "Nonlinear torque control of a single-link flexible robot," *Journal of Robotic Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 25–35, 1999
- (Maghami y Gupta, 1997) Maghami, P.G., y Gupta, S., "Design of constant gain dissipative controllers for eigensystem assignment in passive systems," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 20, no. 4, pp. 648–657, 1997
- (Matsuno y Kasai, 1998) Matsuno, F., Kasai, S., "Modeling and robust force control of constrained one-link flexible arms," *Journal of Robotic Systems*, vol. 15, no. 8, pp. 447–464, 1998
- (maxonmotor.com)
- (Measures, 2001) Measure, R.M., *Structural monitoring with fiber optic technology*, Academic Press, London, 2001
- (Meirovitch, 1997) Meirovitch, L., *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1997

- (Melle y col., 1993) Melle, S.M., Liu, K.X., Measures, R.M., "Practical fiber-optic Bragg grating strain-gauge system," *Applied Optics*, vol. 32, no. 19, pp. 3601–3609, 1993
- (Moallen y col., 2004) Moallen, M., Kermani, M.R., Patel, R.V., y Ostojic, M., "Flexure control of a positioning system using piezoelectric transducers," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 5, pp. 757–762, 2004
- (Mohamed y col., 2005) Mohamed, Z., Martins, J., Tokhi, M.O., Costa, J.S.D., y Botto, M.A., "Vibration control of a very flexible manipulator system," *Control Engineering Practise*, vol. 13, no. 3, pp. 267–277, 2005
- (Moheimani y Fu, 1998) Moheimani, S.O.R., y Fu, M., "Spatial H_2 norm of flexible structures and its application in model order selection," Proceedings of the 37th *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3623–3624, Tampa-Florida, diciembre 1998
- (Moheimani, 2003) Moheimani, S.O.R., "A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 11, no. 4, pp. 482–494, 2003
- (Moheimani y col., 2003) Moheimani, S.O.R., Halim, D., y Fleming, A.J., *Spatial Control of Vibration*, World Scientific, London, 2003
- (Moheimani y Fleming, 2006) Moheimani, S.O.R., y Fleming, A.J., *Piezoelectric Transducer for Vibration Control and Damping*, Springer-Verlag, London, 2006
- (nasa.gov)
- (nmp.jpl.nasa.gov)
- (Onsay y Akay, 1991) Onsay, T., y Akay, A., "Vibration reduction of a flexible arm by time-optimal open-loop control," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 147, no. 2, pp. 283–300, 1991

- (Payo y col., 2005) Payo, I., Ramos, F., Cortázar, D.O., y Feliu, V., “Experimental validation of nonlinear dynamic models for single-link very flexible arms,” *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 5304–5309, Seville, Spain, December 2005
- (pcb.com)
- (Pérez-García y col., 2004) Pérez-García, M.A., Álvarez-Antón, J.C., Campo-Rodríguez, J.C., Ferrero-Martín, F.J., y Grillo-Ortega, G.J, *Instrumentación Electrónica*, Thomson, Madrid, 2004, Capítulo 7
- (polytec.com)
- (Rao, 1990) Rao, S.S., *Mechanical Vibrations*, Addison Wesley, New York, 1990
- (Rattan y Feliu, 1992) Rattan, K.S., y Feliu, V., “Feedforward control of flexible manipulators,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 788–793, Nice, mayo 1992
- (Rovner y Cannon, 1987) Rovner, D.M., y Cannon, R.H., “Experiments toward on-line identification and control of a very flexible one-link manipulator,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 4, pp. 3–19, 1987
- (Ryu y col. 2004) Ryu, J.H., Kwon, D.S., y Hannaford, B., “Control of a flexible manipulator with noncollocated feedback: time-domain passivity approach,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 20, no. 4, pp. 776–780, 2004
- (Seto y Mitsuta, 1992) Seto, K., y Mitsuta, S., “A new method for making a reduced order model flexible structures using unobservability and uncontrollability and its application in vibration control,” *Proceedings of the 1st International Conference on Motion and Vibration Control*, pp. 152–158, Yokohama, septiembre 1992
- (Shan y col., 2005) Shan, J.J, Liu, H.T., y Sun, D., “Modified input shaping for rotating single-link flexible manipulator,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 285, no. 1, pp. 187-207, 2005

- (Shi y col., 2000) Shi, Z.Y., Law, S.S., y Zhang L.M., "Optimum sensor placement for structural damage detection," *American Society of Civil Engineers, Journal of Engineering Mechanics*, vol. 126, no. 11, pp. 1173–1179, 2000
- (Singer y Seering, 1990) Singer, N.C., y Seering, W.C., "Preshaping command inputs to reduce system vibrations," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 112, no. 2, pp. 76–82, 1990
- (Spencer y Sain, 1997) Spencer, B.F., y Sain, M.K., "Controlling buildings: a new frontier in feedback," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, no. 6, pp. 19–35, 1997
- (Tokhi y Poerwanto, 1996) Tokhi, M.O., y Poerwanto, H., "Control of vibration of flexible manipulators using filtered command input," *Proceedings of the 4th International Congress on Sound and Vibration*, pp. 1019–1026, St Petersburg, junio 1996
- (Tokhi y col., 2001) Tokhi, M.O., Mohamed, Z., y Shaheed, M.H., "Dynamic characterization of a flexible manipulator system," *Robotica*, vol. 19, no. 5, pp. 571–580, 2001
- (Udwadia, 1994) Udwadia, F.E., "Methodology for optimal sensor locations for parameter-identification in dynamic-systems," *American Society of Civil Engineers, Journal of Engineering Mechanics*, vol. 120, no. 2, pp. 368–390, 1994
- (Wang y Vidyasagar, 1992) Wang, D., y Vidyasagar, M., "Passive control of a stiff flexible link," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 11, no. 6, pp. 572–578, 1992
- (Yang y col., 1992) Yang, T.C., Yang, C.S., y Kudva, P., "Load-adaptive control of single-link flexible manipulator," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 22, no. 1, pp. 85–91, 1992

Apéndice A

Obtención de las condiciones de pasividad

A.1 Condición de pasividad para el caso del PID

En este apéndice se detalla el proceso para la obtención de la condición de pasividad (7.39) para el caso del PID. La ecuación de diseño (7.38) se puede separar en parte real y parte imaginaria, y queda lo siguiente

$$\operatorname{Re}\{G_m(jz)(1+j\Lambda z)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{(\Delta_r(z) - \Lambda z\Delta_i(z)) + j(\Delta_i(z) - \Lambda z\Delta_r(z))}{(1+z^2)^4}\right\} \geq 0, \quad \forall z \geq 0, \quad (1)$$

con $z = \omega/p$ siendo ω la frecuencia y p el polo de diseño de $G_m(s)$, y

$$\begin{aligned} \Delta_r(z) &= 1 + (4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)z^2 + (21 - 24\varepsilon + 6\varepsilon^2)z^4 + (-6 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)z^6 \\ \Delta_i(z) &= 4z^2 \left[(1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2)z^2 + (-5 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)z^4 \right] \end{aligned}, \quad (2)$$

donde $\varepsilon = B/p$ y $\Lambda = \lambda p$. Si se desarrolla la condición de pasividad (1), se puede escribir lo siguiente

$$\phi(x, \varepsilon, \Lambda) = p(x, \varepsilon) - \Lambda q(x, \varepsilon) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad (3)$$

con $x = z^2$ y

$$\begin{aligned} p(x, \varepsilon) &= 1 + (4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)x + (21 - 24\varepsilon + 6\varepsilon^2)x^2 + (-6 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)x^3 \\ q(x, \varepsilon) &= 4x^2 \left[(1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2) + (-5 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)x \right] \end{aligned}, \quad (4)$$

El problema que se plantea es encontrar

$$\Lambda = \Lambda(\varepsilon) \rightarrow \phi(x, \varepsilon, \Lambda) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad (5)$$

donde $\Lambda(\varepsilon)$ es la curva de diseño.

a) Condición asintótica.

Se define $f(x, \varepsilon) = p(x, \varepsilon)/q(x, \varepsilon)$ y Λ_∞ , límite asintótico cuando la frecuencia tiende a infinito, como sigue

$$\Lambda_\infty(\varepsilon) = \frac{p_\infty}{q_\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \varepsilon) = \frac{-6 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}{4(-5 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)}. \quad (6)$$

A continuación, se iguala a cero tanto el numerador como el denominador de (6)

$$\begin{aligned} p_\infty(\varepsilon) = 0 &\rightarrow r_{1,2} = 2 \pm j\sqrt{2} \rightarrow p_\infty(\varepsilon) < 0 \quad \forall \varepsilon \\ q_\infty(\varepsilon) = 0 &\rightarrow r_{1,2} = 2 \pm j \rightarrow q_\infty(\varepsilon) < 0 \quad \forall \varepsilon \\ \Lambda_\infty(\varepsilon) &> 0 \quad \forall \varepsilon \end{aligned} \quad (7)$$

y se obtienen soluciones complejas para ambos polinomios de forma que ninguno de ellos cambio de signo. Ambos polinomios son siempre negativos. Por tanto, la condición (3), cuando las frecuencias tienden a infinito, se puede escribir como sigue

$$-|p_\infty| + \Lambda_\infty |q_\infty| > 0 \rightarrow \Lambda_\infty > |p_\infty|/|q_\infty|. \quad (8)$$

En la Figura A.1 se representa la curva asintótica. Las propiedades de dicha curva son

$$\Lambda_\infty(0) = 0.3, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \Lambda_\infty(\varepsilon) = 0.25, \quad \Lambda'_\infty(\varepsilon) = 0 \rightarrow \varepsilon = 2 \exists \max \Lambda_\infty(2) = 0.5. \quad (9)$$

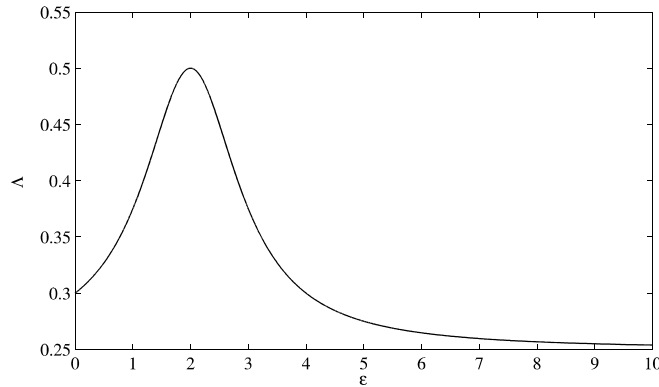


Figura A.1: Comportamiento asintótico

b) Polinomio $q(x, \varepsilon)$.

Se obtienen las raíces de $q(x, \varepsilon)$

$$q(x, \varepsilon) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{n(\varepsilon)}{d(\varepsilon)} = \frac{-1 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}{-5 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}, \quad (10)$$

y se define $x_3 = x_q$. A continuación se analiza el comportamiento de x_q . Los cambios de signo de esta variable definen los tramos que es necesario analizar. Igualando a cero x_q , se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} d(\varepsilon) = 0 &\rightarrow r_{1,2} = 2 \pm j \rightarrow d(\varepsilon) < 0 \quad \forall \varepsilon \\ n(\varepsilon) = 0 &\rightarrow r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \\ x_q(0) = 0.2, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} x_q(\varepsilon) = 1, \quad x'_q(\varepsilon) = 0 &\rightarrow \varepsilon = 2 \exists \min x_q(2) = -3 \end{aligned} \quad . \quad (11)$$

En la Figura A.2 se representa la variable x_q .

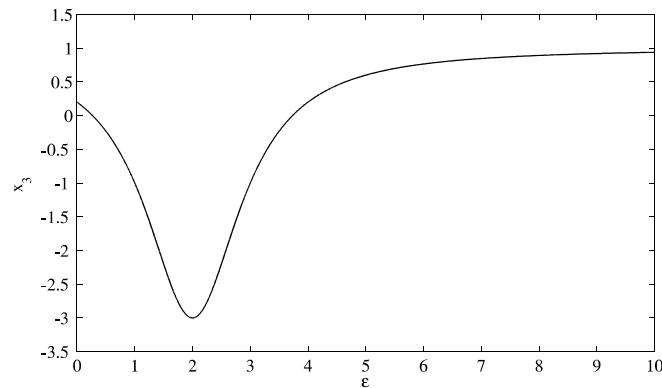


Figura A.2: Representación gráfica de $x_q(\varepsilon)$

De (11) se deducen los siguientes tramos para analizar

$$\begin{aligned} \varepsilon \in (0, 2 - \sqrt{3}), x \in (0, x_q) &\rightarrow q(x, \varepsilon) > 0, x \in (x_q, \infty) \rightarrow q(x, \varepsilon) < 0 \\ \varepsilon \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}), x \in (0, \infty) &\rightarrow q(x, \varepsilon) < 0 \\ \varepsilon \in (2 + \sqrt{3}, \infty), x \in (0, x_q) &\rightarrow q(x, \varepsilon) > 0, x \in (x_q, \infty) \rightarrow q(x, \varepsilon) < 0 \end{aligned} \quad , \quad (12)$$

c) Polinomio $p(x, \varepsilon)$.

El mismo análisis se puede hacer para $p(x, \varepsilon)$. Se obtiene lo siguiente

$$\varepsilon \in (0, \infty), x \in (0, x_p) \rightarrow p(x, \varepsilon) > 0, x \in (x_p, \infty) \rightarrow p(x, \varepsilon) < 0, \quad (13)$$

donde x_p es el valor de x para el que $p(x, \varepsilon)$ cambia de signo. Además, se cumple $x_p > x_q$.

d) Análisis.

A continuación se analiza la condición de pasividad para cada tramo.

- I. $\varepsilon \in (0, 2 - \sqrt{3})$
 - i. $x \in (0, x_q), q > 0, p > 0$

$$|p| - \Lambda |q| > 0, \Lambda < |p|/|q|, \text{ límite superior}$$

$$\text{ii. } x \in (x_q, x_p), q < 0, p > 0$$

$$|p| + \Lambda |q| > 0, \Lambda > -|p|/|q|, \Lambda > 0$$

$$\text{iii. } x \in (x_p, \infty), q < 0, p < 0$$

$$-|p| + \Lambda |q| > 0, \Lambda > |p|/|q|, \Lambda > \Lambda_\infty \text{ límite inferior}$$

$$\text{II. } \varepsilon \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$$

$$\text{i. } x \in (0, x_p), q < 0, p > 0$$

$$|p| + \Lambda |q| > 0, \Lambda > -|p|/|q|, \Lambda > 0$$

$$\text{ii. } x \in (x_p, \infty), q < 0, p < 0$$

$$-|p| + \Lambda |q| > 0, \Lambda > |p|/|q|, \Lambda > \Lambda_\infty \text{ límite inferior}$$

$$\text{III. } \varepsilon \in (2 + \sqrt{3}, \infty)$$

$$\text{i. } x \in (0, x_q), q > 0, p > 0$$

$$|p| - \Lambda |q| > 0, \Lambda < |p|/|q|, \text{ límite superior}$$

$$\text{ii. } x \in (x_q, x_p), q < 0, p > 0$$

$$|p| + \Lambda |q| > 0, \Lambda > -|p|/|q|, \Lambda > 0$$

$$\text{iii. } x \in (x_p, \infty), q < 0, p < 0$$

$$-|p| + \Lambda |q| > 0, \Lambda > |p|/|q|, \Lambda > \Lambda_\infty \text{ límite inferior}$$

Una vez analizados los tramos se puede representar la curva de diseño. En la Figura A.3 se muestra dicha curva para valores de $\varepsilon \in (0, 0.5)$, ya que en la práctica este valor está muy cercano a cero. Por otro lado, es importante destacar que aunque existe un límite superior, el límite realmente interesante es el inferior debido a que en la práctica interesan valores Λ lo más pequeños posible. Nótese que en la Figura A.3 el límite superior se ha dividido entre cien.

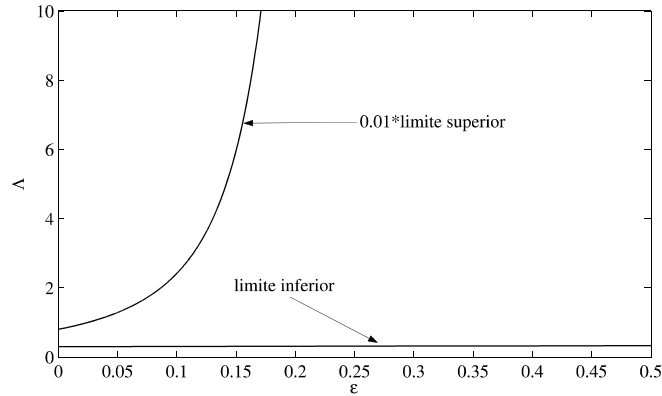


Figura A.3: Curva de diseño $\Lambda(\varepsilon)$

A.2 Extensión al caso de una compensación no exacta del par de acoplamiento

En este apéndice se detalla el proceso para la obtención de la condición de pasividad estricta, para el caso del PD (ecuación (7.40)) y el PID (ecuación (7.41)), cuando se consideran incertidumbres en la constante del motor K y en la medida del par de acoplamiento.

Se define el par de acoplamiento medido como $\mu\Gamma_{coup}$, donde μ modela incertidumbres en la ganancia del sensor (idealmente $\mu = 1$), y se denota el valor estimado de K como K_0 . A continuación se define el porcentaje de variación del parámetro K con respecto a su valor estimado como

$$\Delta K = \frac{K - K_0}{K_0}, \quad (14)$$

y el porcentaje de variación de μ con respecto a su valor ideal

$$\Delta\mu = \mu - 1. \quad (15)$$

En la Figura A.4 se representa el esquema de control cuando se consideran incertidumbres en la compensación del par de acoplamiento. En dicha figura, se indica el lazo interno por $C_D(s)$ y $C_F(s)$, los cuales se pueden identificar fácilmente con los parámetros de un PD o un PID. Atendiendo a la figura y a las expresiones (14) y (15), el término de desacoplamiento se escribe como

$$\frac{\mu}{n_r K_0} = \frac{1}{n_r K} + \frac{\Delta\mu + \Delta K + \Delta\mu\Delta K}{n_r K_0 (1 + \Delta K)}. \quad (16)$$

Por otro lado, todas las incertidumbres se pueden agrupar en el lazo externo, y entonces, se tiene la siguiente expresión para $C(s)$

$$C(s) = K_c (1 + \Delta\mu) \frac{\lambda s + 1}{s} - \frac{\Delta\mu + \Delta K + \Delta\mu\Delta K}{n_r K_0 (1 + \Delta K)} \frac{1}{C_D(s)}, \quad (17)$$

y tras algunos cálculos, se obtiene la nueva expresión de $C'(s)$ (en lugar de (7.29))

$$C'(s) = K_c (1 + \Delta\mu) \left[s \left(\lambda - \frac{\Delta\mu + \Delta K + \Delta\mu\Delta K}{(1 + \Delta\mu)(1 + \Delta K) n_r K_0 K_c C_D(s)} \right) + 1 \right]. \quad (18)$$

Así, con la nueva expresión de $C'(s)$, se procede igual que en el caso ideal. De esta forma, para el PD, la condición (7.31) se transforma en

$$\lambda > \frac{\alpha}{2} + \gamma. \quad (19)$$

Este es el nuevo límite inferior que garantiza la pasividad de $Q(s)$ cuando existen incertidumbres. El parámetro γ queda como sigue

$$\gamma = \frac{\Delta\mu + \Delta K + \Delta\mu\Delta K}{(1 + \Delta\mu)(1 + \Delta K) n_r K_0 K_c K_p} = \frac{1}{n_r K_0 K_c K_p} \left(1 - \frac{1}{(1 + \Delta\mu)(1 + \Delta K)} \right). \quad (20)$$

Si se consideran los límites de variación de K y μ siguientes

$$\begin{aligned} |\Delta K| &\leq \Delta K_{\max} < 1 \\ |\Delta\mu| &\leq \Delta\mu_{\max} < 1 \end{aligned}, \quad (21)$$

la condición más restrictiva (γ_{\max} en (19)) se alcanza cuando $\Delta K = \Delta K_{\max}$ y $\Delta\mu = \Delta\mu_{\max}$.

Para el caso del PID, la condición de pasividad (7.39) se transforma en

$$\Lambda > \Psi\chi + \frac{-6 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}{4(-5 + 3\varepsilon - \varepsilon^2)}, \quad (22)$$

donde

$$\Psi = 1 - B^3 \frac{-20\varepsilon^5 + 102\varepsilon^4 - 216\varepsilon^3 + 165\varepsilon^2 - 52\varepsilon + 6}{4(-5 + 3\varepsilon - \varepsilon^2)pA}, \quad (23)$$

y las incertidumbres se agrupan en el término

$$\chi = \frac{\Delta\mu + \Delta K + \Delta K\Delta\mu}{(1 + \Delta\mu)(1 + \Delta K) n_r K_0 K_c \alpha_2^2 p}. \quad (24)$$

En la condición (22), el valor más restrictivo es para el mayor valor de $\Psi\chi$, el cual depende del signo de Ψ . Cuando $\Psi > 0$, el máximo valor de $\Psi\chi$ se alcanza para $\Delta K = \Delta K_{\max}$ y $\Delta\mu = \Delta\mu_{\max}$. Cuando $\Psi < 0$, el máximo valor de $\Psi\chi$ se alcanza para $\Delta K = -\Delta K_{\max}$ y $\Delta\mu = -\Delta\mu_{\max}$. Por otro lado, $\Psi > 0$ si $\varepsilon > 0.5$. Teniendo en cuenta que los valores de interés de $\varepsilon \ll 0.5$, la condición más restrictiva será la primera, $\Delta K = \Delta K_{\max}$ y $\Delta\mu = \Delta\mu_{\max}$.

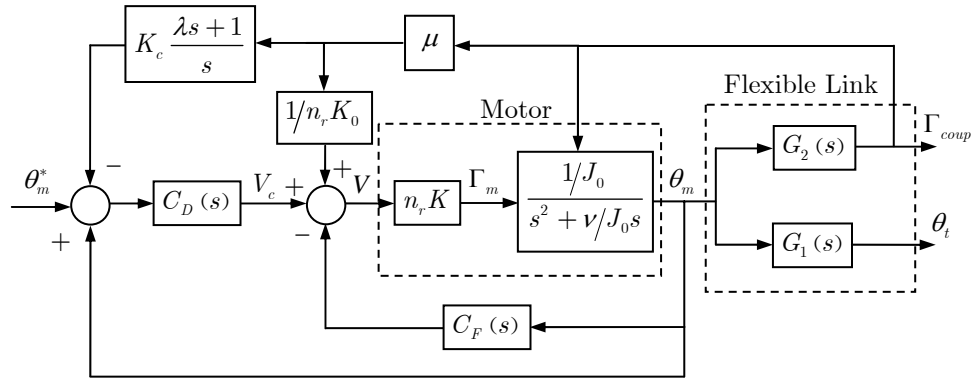


Figura A.4: Esquema general de control incluyendo una compensación no exacta del par de acoplamiento