

tanulmányok **155 / 1984**

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

TERMIKUS ERŐMŰVEKEN ALAPULÓ VILLAMOSENERGIA-RENDSZEREK
RÖVIDTÁVÚ, OPTIMÁLIS, ERŐMŰVI MENETRENDJÉNEK
MEGHATÁROZÁSA HÁLÓZATI FELTÉTELEK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

Irta:

DEÁK ISTVÁN, HOFFER JÁNOS, MAYER JÁNOS, NÉMETH AGOSTON*,
POTECZ BÉLA,**, PRÉKOPA ANDRÁS, STRAZICZKY BEÁTA

*Erőmű és Hálózattervező Vállalat
1054 Bp. Széchenyi rkp. 3.

**Magyar Villamos Művek Tröszt
Országos Villamos Teherelosztó
1024 Bp. Peterman bíró u. 5-7.

A kiadásért felelős:

DR. VAMOS TIBOR

Fősztályvezető:

PRÉKOPA ANDRÁS

A tanulmány az MTA Központi Kutatási Alapjára kötött szerződés keretében készült.

ISBN 963 311 172 2

ISSN 0324-2951

TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
1. BEVEZETÉS	7
2. VILLAMOSENERGIA-RENDSZEREK ÁLTALANOS JELLEMZŐI	18
2.1. VILLAMOSENERGIA-RENDSZEREK ÁLTALÁNOS JELLEMZŐI	18
2.1.1. A teljesítmény-egyensúly	20
2.1.2. A jelenlegi üzemirányítási stratégia alapelemei	22
2.1.3. A központi üzemirányításról	23
2.2. A NAPI ÜTEMEZÉSI FELADAT MEGFOGALMAZÁSA	25
2.2.1. A fogyasztás, a fogyasztói igénygörbe	25
2.2.2. Az erőművek és üzemmódjaik	28
2.2.3. A villamosenergia-rendszer alaphálózata ...	29
3. A VILLAMOSENERGIA-TERMELÉS ÜTEMEZÉSÉNEK EGY ÁLTALÁNOS MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSI MODELLJE	32
3.1. A MODELL VÁLTOZÓI	33
3.1.1. Üzemmód változók	34
3.1.2. Teljesítmény változók	36
3.1.3. Feszültségi változók	38
3.2. A CÉLFÜGGVÉNY	38
3.2.1. Erőművi blokkok termelési költsége	38
3.2.2. Berendezések állásából, újraindításából származó költség: átállási költség	40
3.2.3. Hálózati veszteségből eredő költségek	53
3.3. KORLÁTOZÓ FELTÉTELRENDSZER	54
3.3.1. Periódusonként ismétlődő feltételek	54
3.3.2. Periódusokat összekapcsoló feltételek	61
3.4. A MODELL SZERKEZETÉNEK ÁTTEKINTÉSE, MÉRETE, JELLEMZŐI	67
3.5. A 3. FEJEZETBEN ALKALMAZOTT JELÖLÉSEK ÖSSZEFOGLALÁSA	71

	Oldal
4. A MODELLT EGYSZERÜSÍTŐ FELTEVÉSEK	75
4.1. AZ IGÉNYGÖRBE JELLEGZETES ALAKJÁN ALAPULÓ EGYSZERÜSÍTŐ FELTEVÉS	76
4.2. AZ ÜZEMMÓDOK MEGADÁSÁNAK SORRENDJE	77
4.3. A TERMELÉSI KÖLTSÉG KÖZELITÉSE	79
4.4. AZ ÜZEMMÓDVÁLTÁS KÖLTSÉGÉNEK KÖZELITÉSE	81
4.5. MUNKAPONT BEVEZETÉSE, NÉHÁNY JELÖLÉS	85
4.6. A FESZÜLTSEGI VÁLTOZÓK SZÁMÁNAK REDUKCIÓJA	88
4.7. A FESZÜLTSEGEK KÉPZETES RÉSZÉNEK KIFEJEZÉSE A HATÁSOS TELJESITMÉNY BETÁPLÁLÁSSAL. A FESZÜLTSEGI VÁLTOZÓK SZÁMÁNAK TOVÁBBI REDUKCIÓJA	89
4.8. A HÁLÓZATI FELTÉTELEK LINEARIZÁLÁSA	92
4.9. A HÁLÓZATI VESZTESÉG FÜGGVÉNY LINEARIZÁLÁSA	93
4.10. FESZÜLTSEGGELLENŐRZŐ PERIÓDUSOK	94
4.11. A HÁLÓZATI FELTÉTELEK KIVÁLASZTÁSA	95
5. AZ EGYSZERÜSÍTŐ FELTÉTELEK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL KAPOTT MODELL	96
5.1. AZ EGYSZERÜSÍTETT MODELL	96
5.1.1. Üzem mód változók	96
5.1.2. Teljesítmény változók	99
5.1.3. Feszültségi változók	101
5.2. A CÉLFÜGGVÉNY	102
5.2.1. Erőművi blokk termelési költsége	102
5.2.2. A berendezések állásából ill. újraindításából származó költségrész	103
5.2.3. A hálózati veszteség költsége	105
5.3. KORLÁTOZÓ FELTÉTELEK	105
5.3.1. Normál periódus feltételrendszere	105
5.3.2. Feszültségellenőrző periódusok feltételrendszere	107
5.3.3. A periódusokat összekapcsoló feltételek	109
5.3.4. Tüzelőanyagkényszer feltételek	112
5.4. AZ EGYSZERÜSÍTETT MODELL SZERKEZETE, JELLEMZŐI, MÉRETE	113

	Oldal
5.5. A 4. ÉS 5. FEJEZETBEN BEVEZETETT JELÖLÉSEK ÖSSZEFOGLALÁSA	116
6. A NAPI MENETREND MEGHATÁROZÁSA	119
6.1. A NAPI ADATOKNAK MEGFELELŐ VEGYESVÁLTOZÓS FELADAT GENERÁLÁSA	119
6.2. MEGOLDÁSI LEHETŐSÉGEK	120
6.3. AZ OPTIMALIZÁLÓ ELJÁRÁS	121
6.4. A BENDERS DEKOMPOZICIÓN A RÉSZFELADATOK MEGOLDÁSÁRA	122
FÜGGELÉK A VILLAMOSENERGIA-RENDSZER ÁTVITELI HÁLÓZATRÓL	133
F1. A villamos hálózatok matematikai modellje	133
F2. A villamosenergia-rendszer átviteli hálózatának fizikai leírása	157
F3. A villamosenergia-rendszer átviteli hálózatának matematikai modellje	169
F4. A teljesítményáramlás, Stott módszere a hálózatszámítási feladat megoldására	187
I R O D A L O M	200

K i v o n a t

Ez a szokásosnál lényegesen nagyobb terjedelmű cikk az MTA SzTAKI Operációkutatási Osztályán végzett, a villamosenergia-termelő rendszer optimális napi ütemezését célzó sokéves munka első részletes beszámolója.

A munka történetét ismertető bevezetés és a villamosenergia rendszerek irányítási feladatait áttekintő 2. fejezet után a cikk 3. fejezete termikus erőművekből álló energiatermelő rendszer egy általános matematikai programozási modelljét tartalmazza. A modell általános abban az értelemben, hogy megfogalmazásánál nem tettünk egyszerűsítő feltevéseket a modellnek megfelelő nemlineáris, vegyes (folytonos-diszkrét) változóju feladat megoldhatósága érdekében. A modell tartalmazza az erőművi viszonyokat leíró feltételek mellett az elektromos hálózat zavartalan működéséhez szükséges feltételeket is. Minimalizálandó célfüggvénye az energiatermelés költsége, mely a tüzelőanyagfelhasználás, az erőművi egységek állás-ujraindítás költségéből és a hálózati veszteség költség összegéből tevődik össze. A 4. fejezetben az ütemezési problémát egyszerűsítő feltevéseket ismertetjük, majd az 5. fejezet az említett feltevések figyelembevételével kapott modell leírása. Ennek az egyszerűsített modellnek nagyméretű, speciális strukturájú, vegyesváltozós, lineáris programozási feladat felel meg, melynek megoldásáról a 6. fejezetben számolunk be.

A terjedelmes, négy részből álló függelék a villamosenergia-rendszerek átviteli hálózatának alapismereteit és összefüggéseit foglalja össze olyan formában, mely - megítélésünk szerint - matematikusok számára könnyen érthető és a matematikai számításokhoz jó alapul szolgál.

1. BEVEZETÉS

Ez a dolgozat egy kutató csoport sokéves munkájának első részletes beszámolója. A munka az MTA SzTAKI Operációkutatási Osztályán készült.

Több mint 10 évvel ezelőtt, 1972-ben, a szerzők egyike - Prékopa András - Olaszországban járt, előadásokat tartott a Római Egyetemen. Az előadásokon mérnökök is részt vettek. Egyikük, abban a reményben, hogy az előadott matematikai programozási modellek számos villamosenergiaipari alkalmazást is nyerhetnek (miután vizügyi alkalmazásokról sok szó esett), elkalauzolta az előadót a római teherelosztóba. Ennek egyik kutatója korábban már kidolgozott egy dinamikus típusú modellt a villamosenergia-termelés napi ütemezésének a meghatározására. A kevés változós, nagy aggregáltsági fokú modell csupán globális értékeket adott, ám abban az időben más teherelosztók sem rendelkeztek még finomabb időbeli és térbeli felosztást tartalmazó, napi menetrend meghatározását nyújtó matematikai programozási modellel. Ekkor született meg a gondolat, hogy meg kellene próbálni a napi menetrend meghatározására megalkotni egy nagyméretű, vegyesváltozós modellt a hazai körülményeknek megfelelően, de azért az általánosság némi igényével.

A gondolatot követő első tett abban állt, hogy a téma iránt sikerült felkelteni Németh Ágoston erősáramú villamosmérnök hallgató érdeklődését, aki ezután erről írta diplomamunkáját, melyet 1973-ban védett meg. Ez lényegében a szakirodalomban ismert eljárások egy részét foglalta össze. Miután Potecz Béla, az Országos Teherelosztó akkori osztályvezetője, mai igazgatóhelyettese, a diplomamunkával megismerkedett és tudomást szerzett a további tervekről, megszerezte a Magyar Villamos Művek Tröszt támogatását és személyesen is bekapcsolódott a munkába.

Az első modell, mely az ennek a dolgozatnak az 5. fejezetében taglalt modell lényeges elemeit már tartalmazta, Németh Ágoston és Prékopa András munkájaként született meg Potecz Béla

hathatós közreműködésével. Ez 1974 végére készült el. Az eredményeket egy nem publikált tanulmány foglalta össze [35]. A fő eredmény ebben annak a vegyesváltozós modellnek az összeállítására, melynek fejlettebb formája e dolgozat 5. fejezetében olvasható.

A [35] tanulmánynak a szerzői között az eddig említett három személyen kívül szerepelt még Kéri Gerzson, Turchányi Piroska és Vizvári Béla is. Kéri Gerzson összefoglaló áttekintést nyújtott az itthon elérhető lineáris programozási programcsomagokról, Turchányi Piroska és Vizvári Béla pedig egy-egy kisméretű, folytonos változós, illetve diszkrét változós mintafeladatot oldott meg, meglévő, részben általuk készített általános célú programok segítségével.

A munkának ebben az első fázisában részt vett még Molnár Miklós közgazdász is, aki nagy segítséget nyújtott a megfelelő közgazdasági szemlélet kialakításában. Ami azonban a modellalkotási munkát illeti, ő különállóan megfogalmazott egy modellt, mely ugyan elvi szempontból érdekes volt, azonban a gyakorlati számításokra nem volt megfelelő.

A munka második fázisa 1976-ban kezdődött. Ekkor kapcsolódott be Strazicky Beáta. Az 1976-77 években fő feladata a [35] tanulmányban foglalt vegyesváltozós modell számszerűsítése volt. Tisztázta, hogy milyen adatok állnak rendelkezésre, ezek milyen formában adóttak és hogyan építhető fel ezekből az egy konkrét napnak megfelelő feladat. Ezekben az években készítette el az ELTE matematika (operációkutatási) szakon Hoffer János szakdolgozatát. A Benders-féle dekompozícióról, Strazicky Beáta vezetésével.

A feladat számszerűsítési munkáinak keretén belül 1977-78-ban Bárász András közreműködésével elkészült a Magyar Tudományos Akadémia CDC 3300-as számítógépére a feladathoz szükséges adatbázis.

A napi menetrend feladatának (a mostani cikk 5. fejezetében foglalt feladatról van szó) numerikus megoldására vonatkozó algoritmus kialakítása, valamint a kapcsolódó számítógépes prog-

ramok elkészítése az 1977-1981 években történt. Hosszas megfontolás után a Benders-féle dekompozíció alkalmazása mellett döntöttünk. Először Strazicky Beáta elkészítette a feszültséges feltételek nélküli feladat generálására vonatkozó programokat. Hoffer János Benders dekompozícióval megoldotta a három különböző típusú periódus feladatát és elkészítette a megfelelő számítógépes programokat.

Mayer János 1978-ban kapcsolódott be a munkába. Ő az ún. feszültséges periódusok villamos feltétel rendszerét generáló és a "load flow feladat" megoldását célzó programrendszer kifejlesztésén dolgozott. 1979 végére elkészítette a hálózati feltételeket generáló módszert és a megfelelő számítógépes program első változatát. A szakirodalom tanulmányozása után kiválasztotta a később nagyon jónak bizonyult Stott-féle módszert, melynek implementálását 1981-ben fejezte be. 1980-ban elkészítette a feszültséges feltételeket generáló módszer programjait és a megfelelő adatszervezési programokat. A feszültséges feltételek tesztelésében Hoffer János is részt vett. A teljes menetrendet előállító program oly módon született, hogy a feszültséges feltételeket generáló programot Hoffer János és Mayer János illesztette Strazicky Beáta fent említett feladat generáló programjához.

Deák István is 1978-ban kapcsolódott be a munkába. Ő készítette az optimalizáló program részeinek összefogását biztosító keretprogramot, továbbá a tüzelőanyagkényszer feltételeket is figyelembe vevő megoldást előállító programot. Ennek az utóbbinak az elve Potecz Bélától származik.

A teljes program első változata 1979-ben készült el, és egy 10 csomópontos, kisméretű tesztfeladaton jól le is futott. A program futtatása azonban teljes kudarcot vallott reális méretű, 170 csomópontos hálózatokon. Ennek, mint a későbbiekben kiderült, kettős oka volt. Egyfelől rendkívül sok és változatos hiba volt az adatokban, másrészt a load-flow feladat megoldására kialakított saját módszerünk nagyméretű feladatok esetében nem konvergált. A módszer hiányosságainak a felfedezésében nagy

segítségünkre volt Borzsák Péter villamos hálózatokra vonatkozó szakértelme. Ami az adatok hibáinak a felfedezését illeti, ez Mayer Jánostól vett el hosszú hónapokat, annak ellenére, hogy Németh Ágoston e téren is komoly segítséget nyújtott. Szinte egyenként kellett a hibákat kiszűrni a modell futtatásaira és az eredmények analizisére támaszkodva. Az adatjavítás során a modell több kisebb módosításon ment át (ilyen módosítás volt pl. az, hogy egy csomóponthoz több erőmű is csatlakozhat).

Meg kell még említeni, hogy mind a load flow feladata megoldása, mind pedig a feszültséges feltételek generálása szükségessé tette egy ritka mátrixú, nagyméretű lineáris egyenletrendszer megoldását. Ehhez 1978-ban Kéri Gerzson ajánlott egy ritka mátrix invertáló, általa készített általános célkitűzésű módszert és programot, melyet azonban később mégsem építettünk be, minthogy ez a program az inverz mátrixot állítja elő és ezért egyenletrendszer-megoldási célra lassúnak bizonyult.

A program megbízhatóan működött, a mi speciális feladatunkra való gyakori alkalmazása azonban nem bizonyult gazdaságosnak.

Az általunk ténylegesen felhasznált, lineáris egyenletrendszer megoldó programot a feladat specialitásainak figyelembevételével Sparing László készítette el, ez volt a diplomamunkája a BME matematikus-mérnök szakán. Ezt Mayer János és Prékopa András vezetésével készítette.

Sparing László munkája lehetővé tette, hogy Mayer János implementálja Stott módszerét a load flow feladat megoldására. Az eredmények előírt formában való táblázatosítására vonatkozó programokat Fülöp János készítette el.

Az optimális napi menetrend meghatározását célzó munka második szakasza 1981-ben fejeződött be. A feladat gépi numerikus megoldása reális méretben, reális adatokkal ellátott tesztfeladatokon sikeresen lefutott a CDC 3300-as számítógépén. Az addigi eredményekről az ugyancsak nem publikált [11] tanulmány számolt be.

A feladat sikeres megoldása utáni munkálatok az alábbi célkitűzésekkel folytak:

- a programokat átírni az Akadémia IBM 3031-es számítógépére;
- az IBM 3031-es adta lehetőségeken túlmenően is csökkenteni a futási időket, új adatbázist kialakítani;
- a napi menetrend feladatának elvi alapjait, továbbá az általunk adott megoldást egységes matematikai keretbe foglalni.

A dolgozat nem foglalkozik azzal, hogy milyen eredmények születtek az első két cél elérése érdekében tett munkák során, viszont meg kíván felelni az utolsó célkitűzésnek. Az alábbiakban rövid tartalmi összefoglalást adunk.

A 2. fejezet a villamosenergia-rendszerekkel kapcsolatos, a matematikai modellalkotáshoz szükséges legfontosabb műszaki ismereteket foglalja össze. Minthogy ezek együttese a feladat fizikai értelemben vett meghatározását nyújtja, nevezhetjük a 2. fejezetben foglaltakat a feladat fizikai modelljének is.

A 3. fejezetben elvonatkoztatunk a magyar villamosenergia-ipar konkrét feladatától és megfogalmazzuk a villamosenergia-termelés ütemezésének általános feladatát, amelyben csupán termikus erőművek vesznek részt az energia termelésében. Az erőművek üzemmódjaira épülő vegyes változós modellben fontosnak tartjuk azt, hogy a hálózati feltételeket is szerepeltetjük a modellben.

A 4. fejezetben szisztematikusan összeállítottuk azokat az egyszerűsítő feltevéseket, amelyek szerepet játszanak az előző fejezet modelljének a magyar villamosenergia-rendszerre való alkalmazásában. Ezek a feltevések a nyert feladat gépi, numerikus megoldásának lehetővé tételét célozzák.

Az 5. fejezetben megadjuk a vegyesváltozós egyszerűsített modellt, amelynek célfüggvénye és feltételei lineárisak, együttható mátrixa pedig strukturált.

A 6. fejezet a feladat megoldásával foglalkozik. A módszer a Benders-dekompozíció alapul, heurisztikus elemeket is tar-

talmaz és a feladat szerkezetét lényegesen kihasználja.

A terjedelmes, négy részből álló függelék a villamosenergia-rendszerek átviteli hálózatának alapismereteit és összefüggéseit foglalja össze olyan formában, mely - megítélésünk szerint - matematikusok számára könnyen érthető és a matematikai számításokhoz jó alapul szolgál.

Nem tartalmazza a dolgozat a feladat megoldásához készített programrendszer ismertetését és a futási eredményekről szóló részletes beszámolókat sem mellékeltek. Ezek a [11] belső intézeti anyagban találhatóak meg, ám miután a programok hamarosan futnak majd az IBM 3031 gépen is, ezek a korábbi programleírások és futási eredményekről szóló beszámolók aktualitásukat veszítik.

A fenti leírásból kitűnik, hogy az idők folyamán igen sokan részt vettek az optimális napi menetrend kialakítását célzó projekt munkáiban. Mégis, a jelenlegi dolgozat szerzői azok, akik a legfontosabb munkákat elvégezték. Mellettük Sparing László játszott még jelentős szerepet, az ő hozzájárulása azonban jól körülhatárolható részfeladat megoldása volt és eredményeit részletesebb formában külön fogja publikálni.

Nehéz dolog az egyes fejezetek szerzőinek nevét egyértelműen megadni, hiszen a modell sok közös megbeszélésen alakult, formálódott, azonkívül ennek a dolgozatnak a fő modellje már az első, 1974-es [35] beszámolóban is megtalálható szerényebb formában, és más személy volt a szerző a későbbiek számára alapul szolgáló műben, mint aki ennek a dolgozatnak a megfelelő fejezetét írta. Ilyenformán az alábbi felsorolásban sokkal inkább a fejezetek szerzőit soroljuk fel, mintsem azokat, akik az egyes fejezeteket jelenlegi végleges formájukban megírták.

A 2. fejezet főként Németh Ágoston és kisebb részben Prékopa András munkája.

A dolgozat architektúrájának kialakításában meghatározó szerepe volt Prékopa Andrásnak, aki kezdeményezte az 5. fejezetben foglalt speciális modell mellett a 3. fejezetben foglalt általá-

nos modell kialakítását, valamint a villamosenergia-rendszerek átviteli hálózatának a Függelékben foglalt tárgyalásmódját is. A korábbi modell megfogalmazása, valamint e munkája révén társszerzője a dolgozat valamennyi fejezetének a 6. kivételével.

A villamosenergia-rendszerekkel kapcsolatos ismeretek közvetítése és a modellalkotás révén Németh Ágoston is társszerzőnek tekinthető a 3., 4., és az 5. fejezeteket illetően. Ugyanez vonatkozik Potecz Bélára is, akinek a gondolatai a 6. fejezetben is lényeges szerephez jutottak.

A 3., 4. és 5. fejezetek további szerzői és a jelenlegi végleges változatuk kialakítói Strazicky Beáta és - a feszültséges feltételek vonatkozásában - Mayer János.

Mint korábban említettük, a vegyesváltozós feladat megoldásában Potecz Béla gondolatai lényeges szerepet játszottak. A 6. fejezet anyaga ezek felhasználásával készült, azonban főként Deák István és Hoffer János munkája eredményeként.

Végül a Függelék nagyrészt Mayer János munkájaként könyvelhető el.

A szerzőknek a fejezethez történt fenti hozzárendelése - ismételten hangsúlyozzuk - csak hozzávetőleges, mert az egyes szerzők munkái nem választhatók szét egyértelműen.

Most néhány gondolatot fejtünk ki arra vonatkozólag, hogy modellünk hogyan illeszthető a matematikai programozási modellek rendszerébe, milyen motivációk merültek fel a matematikai módszertan oldaláról.

Időben lejátszódó folyamatok modellálása és irányítása speciális strukturájú, nagyméretű matematikai programozási feladatok segítségével, régi keletű elképzelés. Dantzig a szimplex módszert 1947-ben alkotta meg és 1951-ben publikálta. Ám, már 1949-ben két cikket írt az ún. lépcsős strukturájú, nagyméretű lineáris programozási feladatokról, melyek az *Econometrica* hasábjain jelentek meg. Az egyiket M.K.Wood-dal közösen írta, és ebben a berlini légihid megszervezése szerepel illusztratív alkalmazásként. A második dolgozatban a dinamikus típusú Leontief-

féle input-output modellel való kapcsolatot fejtegeti a szerző.

Ha nem is lépcsős struktúrájú, de speciális szerkezetű (ún. blokk-trianguláris) mátrix szerepel Neumann Jánosnak a konstans módon fejlődő gazdaságra vonatkozó matematikai modelljében.

A speciális struktúrájú lineáris vagy nemlineáris programozási feladatok nagy szerephez jutnak a sztochasztikus programozásban. Ilyen esetekben egy kiindulásul szolgáló feladat mátrixa sokszorozódik meg egy nagyméretű mátrixon belül kb. annyiszor, mint amennyi lehetséges értéke van a feladatban szereplő véletlen mennyiségeknek együtt. Az ezzel kapcsolatos első eredmények szintén Dantzigtól származnak, és a több mint 20 évvel ezelőtti időben keletkeztek.

A nagyméretű matematikai programozási feladatok gépi numerikus megoldhatósága bátorítólag hat ilyen jellegű modellek alkotására. Minthogy a változók és a feltételek száma igen nagy lehet (ezres nagyságrendű feladat még reális idő alatt megoldható), ezért az időbeli folyamatok nem elnagyolt, hanem kellő részletességű, realisztikus modellálására és irányítására lehetőség nyílt.

Ez adta a gondolatot és a bátorságot az ebben a cikkben leírt modell megfogalmazására.

A munka első fázisának befejezésekor azonban kitűnt, hogy modellünk jelentősen eltér a lineáristól, nemcsak azért, hogy a változók egy (nem csekély) része diszkrét, 0-1 értékű, hanem azért is - és a fő nehézséget tulajdonképpen ez okozta - hogy az erőművekben lejátszódó folyamatok modellálásán kívül a villamos hálózat adottságait is figyelembe kell vennünk, ez pedig azt jelentette, hogy a feltételek jelentős része nemlineáris, sőt, ezek explicite nem is adóttak a rendelkezésre álló adatok alapján, hanem bonyolult ágterhelési feladatok megoldása révén kell azokat generálnunk.

Ezek után egyelőre félre kellett tenni a felmerülő sztochasztikus programozási szempontokat és a determinisztikus feladatra kellett koncentrálnunk. A sztochasztikus szempontok az

egynapos modellben különben sem jutnak érvényre, hiszen egyfelől az egynapi villamosenergia-igény kielégítő pontossággal előre jelezhető, és az ebben rejlő véletlen hiba a modellhiba nagyságrendjén belül van. A későbbiekben azonban foglalkozni kívánunk olyan modell konstrukciójával is, mely több napos időszakra vonatkozik. Ebben a sztochasztikus programozás minden bizonnyal szerepet fog majd kapni.

Az alábbiakban rövid irodalmi áttekintést adunk.

Cikkünk témája több szakterülhöz kapcsolódik, ezért az Olvasó tájékozódását megkönnyítendő az irodalomjegyzékben néhány könyvet is feltüntettünk az egyes területekre vonatkozóan.

A villamosenergia-rendszerekkel kapcsolatos műszaki témákkal foglalkozik [7], [19], [22], [23], [46] és [73]. Villamos hálózatokat tárgyalnak a [60], [69] könyvek; az átviteli hálózatra vonatkozó hálózatszámítási feladattal és annak megoldásával kapcsolatban a [3], [19], [20], [23], [63], [67] könyveket ajánljuk.

Az "Együttműködő erőművek gazdaságos irányítása" témakörben a [19], [36], [37] művek szolgálhatnak tájékozódásul.

A hazai kutatási eredményekre vonatkozóan lásd a [70] tanulmányt, annak irodalomjegyzékében felsorolt dolgozatokat, valamint a [71], [53], [68] tanulmányokat.

A megoldásra alkalmazott matematikai, operációkutatási módszerekre vonatkozóan a [9], [40], [43], [55], [57] könyveket ajánljuk.

Villamosenergia-rendszerek átviteli hálózatával kapcsolatban a leggyakrabban felmerülő numerikus probléma a hálózatszámítási (load-flow) feladat megoldása. A megoldó algoritmusokra vonatkozóan az 1973-ig terjedő időszak eredményeinek összefoglalása megtalálható a [66] dolgozatban. Az azóta kidolgozott módszerek közül a gyakorlatban legjobban bevált algoritmusok egyike: Stott módszere [65], melyet a dolgozat függelékében részletesen tárgyalunk.

Az optimális teljesítményáramlás problémakör olyan időszakra vonatkozik, melyben a teljesítményigény konstansnak tekinthető. A feladat: meghatározni az átviteli hálózat egyes csomópontjaihoz csatlakozó erőművek által termelendő teljesítményeket oly módon, hogy a tüzelőanyag költség vagy a hálózati veszteség minimális legyen. Korlátozó feltételekként az átviteli hálózatra vonatkozó feltételek szerepelnek; így a load flow egyenletek, valamint a generált teljesítményekre, az ágak termikus terhelésére, a csomóponti feszültségekre és a csomóponti meddőteljesítmény-kibocsátásra vonatkozó korlátok. Általában nagyméretű, nemlineáris programozási feladat adódik. Ennek megoldására a gyakorlatban jól bevált a [17] dolgozatban közölt, a redukált gradiens és büntetőfüggvényes módszerek kombinálásából adódó algoritmus. A téma irodalmának 1975-ig terjedő feldolgozása megtalálható a [26] dolgozatban. A témakörben azóta is intenzív kutatás folyik, az Olvasó további utalásokat talál erre vonatkozóan a [20] kötetben.

A "Villamosenergia-termelés menetrendje" témakörben olyan hosszabb (egynapos, legfeljebb egyhetes) időszakot tekintünk, melyet rövidebb periódusokra bontva, a periódusokban a teljesítményigény állandónak tekinthető és megfelelő pontossággal előre becsülhető. A feladat: az erőművi egységek rendelkezésre állásának és a generált teljesítményeknek oly módon történő meghatározása, hogy a tüzelőanyagköltség és az egységek leállításából ill. újraindításából származó hőveszteség minimális legyen. Korlátozó feltételekként leggyakrabban a teljesítményegyensúlyt kifejező egyenlőséget, a rendelkezésre állásokat és a termelt mennyiségeket kifejező változókat összekapcsoló feltételeket, az energiatermelésbe bevonható tüzelőanyagra vonatkozó korlátozásokat és más technológiai előírásokat leíró feltételeket vesznek figyelembe.

Általában nagyméretű, vegyes, egészértékű - esetleg tiszta lineáris - programozási feladatra vezető modellt készítenek pl.: [25], [30] és [44].

A feladat megoldására alkalmazott módszerek a következők:

- kötött sorrend kijelölése az egységek be, ill. kikapcsolására [25],
- dinamikus programozás alkalmazása, [50], [70],
- egészértékű és vegyes, egészértékű programozási módszerek alkalmazása (igy pl. branch and bound módszer) [6], [28].

A jelenlegi fejlődés fő iránya: általános modell kidolgozása, melyben a fenti két feladat együttes megoldására tesznek kísérletet a hálózati feltételek linearizált változatainak figyelembevételével [20].

2. VILLAMOSENERGIA-RENDSZEREK ÁLTALÁNOS JELLEMZŐI

2.1 VILLAMOSENERGIA-RENDSZEREK ÁLTALÁNOS JELLEMZŐI

A villamosenergia-rendszer energiatermelő egységek, vezeték és transzformátorok, nemzetközi kooperációs kapcsolatok olyan együttese, mely közös igazgatás, illetve felügyelet mellett látja el a fogyasztókat villamos energiával.

A rendszer kialakítása és a távlati fogyasztói igényeknek megfelelő továbbfejlesztése a rendszertervezés feladata. Az viszont az *üzemirányítás* feladata, hogy a már meglévő erőművi és hálózati berendezéseket a rendszer egésze szempontjából optimálisan üzemeltessük.

Dolgozatunk a központi üzemirányítás témaköréhez kapcsolódik. Az üzemirányítással szemben az alábbi főbb követelmények merülnek fel.

1. Ki kell elégíteni az időben változó hatásos és reaktív teljesítményigényt. A hatásos teljesítménynek megfelelő energia a rendszerben nem tárolható, az ilyen igény μ sec nagyságrendű idő alatt fut át a hálózaton, és az erőművi generátoroknál jelentkezik. Szerencsére a fogyasztás összetétele olyan, hogy a teljesítményigény a perces nagyságrendben gyakorlatilag konstansnak tekinthető, ez pedig már jóval több, mint a generátorok szabályozóinak reakcióideje. Az 1 percnél rövidebb időtartamokhoz tartozó kismértékű ingadozásokat ezek a berendezések kompenzálják. További sajátosság az, hogy a termelőnek a fogyasztásra csak kismértékű hatása van, az számára külső adottságként jelentkezik.

2. A termelt energiának műszaki jellegű minőségi követelményeket is ki kell elégítenie.

- A váltakozó áram frekvenciája a névleges értéktől (50 Hz) csak a tűréshatáron belül térhet el. Ez lényeges a rendszer irányítása, illetve stabilitása szempontjából, hiszen az erőművekben szinkrongenerátorok termelik az energiát.

További indokul szolgál, hogy a fogyasztók egy része (pl. szinkronmotorok, villamos órák, vasúti biztonsági berendezések) szintén névleges frekvenciára vannak méretezve.

- Az alaphálózati feszültségeknek az előirt határokon belül kell maradniuk ahhoz, hogy a fogyasztóknál, amelyek névleges feszültségre vannak méretezve, a feszültség ingadozása a tűréshatáron belül legyen.
- Az energiaellátásnak folyamatosnak kell lennie, sem az energiatermelő, sem a hálózati berendezésekben nem léphet fel veszélyes mértékű túlterhelés. A rendszer napi konfigurációjának olyannak kell lennie, hogy egy esetleges üzemzavar minimális kárt okozzon.
- A nemzetközi teljesítménycsere a menetrendi (szerződésben lekötött) értékektől csak tolerálható mértékben különbözhet.
- A mellékhatásként jelentkező környezetszennyezés minimális legyen.

3. A termelési költségek legyenek optimálisak.

A változó fogyasztói igényeket a fenti kényszerfeltételek mellett csak úgy lehet kielégíteni, hogy a rendszer szabályozható mennyiségeit elsősorban az erőművek betáplálásait, az üzemiránvitás folyamatosan megváltoztatja. Ezen kívül minden időszakban döntenie kell a rendszer más változtatható paramétereinek legmegfelelőbb értékeiről is, így elő kell írnia a szabályozós transzformátorok pozícióját, utasítást kell adnia a kondenzátorok, söntfojtók be- és kikapcsolására, a hálózati konfiguráció megváltoztatására. A felsorolt berendezésekkel kapcsolatban ld. a 2.2.3 és az F2. részt.

A továbbiakban néhány itt vázolt kérdést részletesebben vizsgálunk.

2.1.1 A teljesítmény-egyensúly

Az üzemirányítás alapfeladata a fogyasztók mindenkori hatásos és meddőteljesítmény-igényének kielégítése. A hálózat csomópontjainak számát N -nel jelölve (ld. az F2. részt), és a hálózatot a rendszerközi vezetékek határpontjáig tekintetbe véve, a termelt és fogyasztott teljesítmények egyensúlyát az alábbi egyenletek fejezik ki:

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^N P_{G_i} + \sum_{i=1}^N P_{T_i} = \sum_{i=1}^N P_{D_i} + P_v ,$$

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^N Q_{G_i} + \sum_{i=1}^N Q_{T_i} + \sum_{i=1}^N Q_{K_i} + \sum_{i=1}^N Q_{C_i} - \sum_{i=1}^N Q_{L_i} = \\ = \sum_{i=1}^N Q_{D_i} + Q_v .$$

Az egyenletek közül (2.1) a hatásos, (2.2) pedig a meddőteljesítmény-egyensúlyt fejezi ki. Az alkalmazott jelölések a következők (az i index csomópont-sorszámot jelent):

- P_{G_i}, Q_{G_i} = az erőművek hatásos, illetve meddő betáplálása;
- P_{T_i}, Q_{T_i} = a nemzetközi vezetékek határpontjain érkező összes hatásos ill. meddő teljesítmény;
- P_{D_i}, Q_{D_i} = a fogyasztói hatásos, ill. meddőteljesítmény-igény;
- Q_{K_i} = a szinkronkompensátorok meddő termelése;
- Q_{C_i} = a vezetékek kapacitásai és a söntkondenzátorok által termelt meddő teljesítmény;
- Q_{L_i} = a söntfojtók meddő-fogyasztása;
- P_v, Q_v = a hálózat teljes soros hatásos, ill. meddőteljesítmény-vesztesége.

Az üzemirányítás alapfeladata a rendszer változtatható paramétereinek olyan megválasztását jelenti, hogy

- a.) érvényes legyen a (2.1) és a (2.2) összefüggés;
- b.) teljesüljenek a 2.1. rész bevezetésében felsorolt kényszerfeltételek;
- c.) az a.), b.) által szűkített halmazból olyan paraméterértékeket válasszon, melyek a rendszer egésze szempontjából "legmegfeleőbbek";
- d.) a változtatható mennyiségek, paraméterek adott pillanatban "legmegfelelőbb" kombinációját megvalósítsa és a rendszert ebben az állapotában tartsa mindaddig, amíg egy új állapot felvétele nem válik indokolttá.

Az a kérdés, hogy a szabályozott mennyiségek és ezzel a rendszer állapotjellemzőinek "legjobb" kombinációja az energiarendszer milyen részletességű matematikai modelljével és milyen kritériumok alapján választandó meg, végérvényesen nem zárható le. Nyilvánvaló, hogy az ezzel kapcsolatos kutatások irányát a meglévő energiarendszerekkel szerzett tapasztalatok alapvetően befolyásolják. Jellemző például, hogy a nagy üzembiztonságokat mindig a meglévő irányítási stratégia "kritikus felülvizsgálata" szokta követni.

Az összes szabályozott mennyiségnek a rendszer összes állapotjellemzőjére gyakorolt hatását figyelembe vevő globális optimalizálás - különösen, ha a szokásos kényszerfeltételeken és a gazdaságossági szempontokon túlmenően üzembiztonsági kritériumokat is érvényesít - nagyon komplex, nagyméretű nemlineáris feladat. Ebben elvben statisztikai jellegű megfontolások is szerepet kaphatnak. Az egynapos üzemirányítási feladatban azonban, ha az energiaigény előrejelzésére megfelelő pontosságú, a véletlen hatásának figyelembevétele első közelítésben mellőzhető. Jelen dolgozatban kísérletet teszünk a probléma determinisztikus megfogalmazására, felépítünk egy vegyesváltozós (diszkrét-folytonos) modellt (ld. 3. fejezet).

2.1.2 A jelenlegi üzemirányítási stratégia alapelemei

A jelenlegi gyakorlatban alkalmazott üzemirányítási-szabályozási eljárások a teljes feladatot egymástól többé-kevésbé függetleníthető részfeladatokra bontják, amelyek maguk is gyakran még további egyszerűsítésket, elhanyagolásokat tartalmaznak.

A megszokásosabb szétválasztás azon a felismerésen alapul, hogy a hatásos teljesítmények (2.1) által kifejezett egyensúly nagymértékben független a meddő teljesítmény és a feszültség viszonyoktól (ld. F4 rész). Ennek megfelelően a hatásosteljesítmény-frekvencia szabályozás különválasztható a meddőteljesítmény-feszültség szabályozástól. Az előbbit (P-f)-szabályozásnak, az utóbbit pedig (Q-V)- szabályozásnak is szokás nevezni. A szétválaszthatóságot nagymértékben alátámasztja az a gyakorlati körülmény, hogy az erőművekben a beavatkozási lehetőség is a fentieknek megfelelően válik ketté: a P_{G_i} termeléseket a turbina-szabályozók (primer szabályozók), a Q_{G_i} betáplálást pedig a generátorokhoz tartozó feszültségszabályozók alapjeleinek módosításával lehet megváltoztatni.

A kétféle szabályozás közül a (P-f)-szabályozás a primer feladat, minthogy a gazdasági kihatások ennél a legszembetűnőbbek, és mert a korszerű energiarendszerekben a frekvenciaeltérés tűréshatárát rendkívül szigorúan szabják meg (normális üzemben általában $\pm 0.1\%$ a tolerancia). Az erőművi frekvenciaszabályozás mechanizmusának szemléltetésére tételezzük fel, hogy a hatásos teljesítmény-igény valamely időpontban kismértékben csökken. Ekkor, mivel a turbina által leadott forgatónyomaték még a régebbi, nagyobb igénynek felel meg, a generátor forgási sebessége és azzal együtt a váltóáram frekvenciája kismértékben nő. Ezt érzékeli a turbina-szabályozó berendezés, és csökkenti a turbinába áramló gőzt. Így csökken a forgatónyomaték, és azzal a forgási sebesség is, egyúttal pedig a generátor kevesebb hatásos teljesítményt ad le, új dinamikus egyensúlyi helyzet alakul ki.

A hálózat frekvenciaszabályozása úgy történik, hogy egy vagy néhány erőműtől eltekintve (ezekben kis reakcióidejű turbinaszabályozók működnek) valamennyi erőmű a menetrend szerint táplál be aktív és reaktív teljesítményt, a frekvenciaszabályozást hatásos teljesítmény betáplálásuk révén a kiválasztott erőművek végzik.

A rendszerszintű (Q-V)-szabályozásnak normális üzemben általában kisebb figyelmet szentelnek, egyrészt mert a meddőtermeléshez ill. nyeléshez gyakorlatilag nem tartozik üzemi költség, így csak a hálózati veszteség módosításában játszik némi gazdasági szerepet, másrészt pedig, mert a hálózati feszültségek névlegestől való eltérésére legalább +5%, de gyakran +10% is megengedhető. Rendszermentő szerepe lehet a (Q-V)-szabályozásnak üzemzavarok alkalmával.

Teljesítményszabályozáson a továbbiakban mindig hatásos-teljesítmény-szabályozást értünk.

2.1.3 A központi üzemirányításról

Az üzemirányítási feladat fentebb körvonalazott összetettségéből adódóan az energiarendszer központi irányításának az alábbi, idő és feladat szerinti felosztása alakult ki.

Időbeli felosztás

- Előkészítő tevékenység: a tényleges üzemvitelt megelőző becsült terhelési adatokkal és a karbantartások figyelembevételével végzett számítások, amelyek az on-line teljesítmény- és feszültségszabályozás alapfeltételeit határozzák meg (az egyes blokkok indításának, leállításának időpontjai; napi fejlesztési és feszültségi menetrend; export-import megállapodások; karbantartások előkészítése stb.).

- Üzemvitel: on-line (automatikus és/vagy kézi) szabályozás, amely a tényleges, pillanatnyi adatok alapján állítja be a rendszer teljesítményegyensúlyát - ez az automatikus telje-

sitményszabályozás (AGC¹), amelynek részei a központi szabályozás, továbbá az erőművi blokk szabályozás - valamint a kívánatos meddőteljesítmény-egyensúlyt - ez az automatikus vagy felügyeleti jellegű feszültségszabályozás (AVC² vagy SVC³).

Feladat szerinti felosztás

- A teljesítmény-egyensúly biztosítása: az AGC feladatban P_{G_i} meghatározása oly módon, hogy a fogyasztói igényeket a menetrendi frekvencián kielégítsék, a csereteljesítmény pedig megegyezzen a menetrendben rögzített értékével.

- Döntéshozatal: az AGC feladatban a P_{G_i} összterhelést osztjuk szét a rendelkezésre álló erőművek között, azaz az egyes erőművek által termelendő hatásos teljesítményt határozzuk meg. Az AVC (SVC) feladatban a meddőforrások betáplálásainak ill. feszültségeinek, valamint a szabályozós transzformátorok pozícióinak, ill. egyes hálózati elemek ki-bekapcsolási állapotának a meghatározása a cél. Ezt oly módon kell tennünk, hogy a fogyasztói igényeket a megengedett sinfeszültségek fennállása mellett kielégítsük és eközben Q_{T_i} értéke is elfogadható legyen.

- Végrehajtás: Az AGC feladatban az egyes erőművek által a kiszabott teljesítményváltoztatások teljesítése, amely az erőművi szabályozó, majd a blokk szabályozó segítségével zajlik le.

- Az AVC (SVC) feladatban a kiadott meddő betáplálási, sinfeszültség módosítási, transzformátor áttétel változtatási illetve kapcsolási parancs teljesítése, amely az erőművi meddőszabályozók, majd az erőművi generátorok, valamint a szinkronkompenzátorok gerjesztésszabályozóival, a söntfojtótekercek és kondenzátorok (nagyfeszültségű vezetékek, kábelek) megszakítóinak működtetése útján, ill. a transzformátor szabályozó léptetésével történik.

-
1. Automatic Generation Control
 2. Automatic Voltage Control
 3. Supervising Voltage Control

2.2 A NAPI ÜTEMEZÉSI FELADAT MEGFOGALMAZÁSA

A napi ütemezési feladat megoldása, vagyis az úgynevezett "napi menetrend" megadása azt jelenti, hogy a nap minden szakaszára (melyek egy óra vagy fél óra időtartamúak)

- megállapítjuk valamennyi erőműre, hogy azt melyik üzemmódjában és milyen teljesítményszinten működtetjük,
- meghatározzuk az energiaexport és import nagyságát
- és a csomóponti potenciálok értékét

úgy, hogy az országot ellássuk elektromos energiával, a fogyasztói pontokon lévő feszültségek a névlegestől csak csekély mértékben térjenek el, az ágak termikusan ne terhelődjenek túl, a meddőforrás csomópontok meddőteljesítmény-kibocsátása ill. nyelése az előirt tartományba essék, figyelembe véve az erőművi, a hálózati és más gyakorlati megszorításokat.

Esetünkben a tervezés 25 órára vonatkozik, vagyis egy teljes napra és a következő nap első órájára. Modellünket - melyet a 3. fejezetben ismertetünk - nem egyszerűen csak valamilyen napi menetrend meghatározására dolgoztuk ki, hanem a lehetséges menetrendek közül olyannak a megkeresését tűztük ki célul, amely a figyelembe vett költségfüggvényt tekintve a lehető legkisebb költséggel jár.

A fejezet alábbi pontjaiban ennek a feladatnak egyes elemait vizsgáljuk meg részletesebben. Így az első pontban a fogyasztást, a fogyasztói igénygörbét elemezzük, a második pontban az erőművekről ejtünk szót, a harmadik pontban az energiaelosztó villamos hálózatot ismertetjük, végül a negyedik pontban a villamos energia termelési költség összetevőit vizsgáljuk meg.

2.2.1 A fogyasztás, a fogyasztói igénygörbe

Az energiarendszeri szolgáltatás célja a számos, területileg szétszóró fogyasztó ellátása. Az ellátás - néhány nagyipari fogyasztótól eltekintve - az alaphálózati alállomásokról (csomópontokról) táplált, kiterjedt, kisebb feszültségű elosztó há-

lózatok közvetítésével történik. Az alaphálózati csomópontokon fellépő teljesítményigény a nap folyamán erősen ingadozik. A vizsgálat tárgyává tett egy óra és fél óra időtartamú időszakokban mind a hatásos, mind a meddő teljesítmény ingadozása csekély, ezért állandónak tekintjük azokat.

A rendszer összes csomópontjain fellépő fogyasztások órás összegei, az erőművi önfogyasztások összege, a hálózati veszteség és az esetleges export mennyisége együttesen alkotják a pillanatnyi teljesítményigényt. Az igény időbeli változását az igény-idő függvény írja le. Ezt a függvényt a mérnöki gyakorlat röviden igénygörbének nevezi.

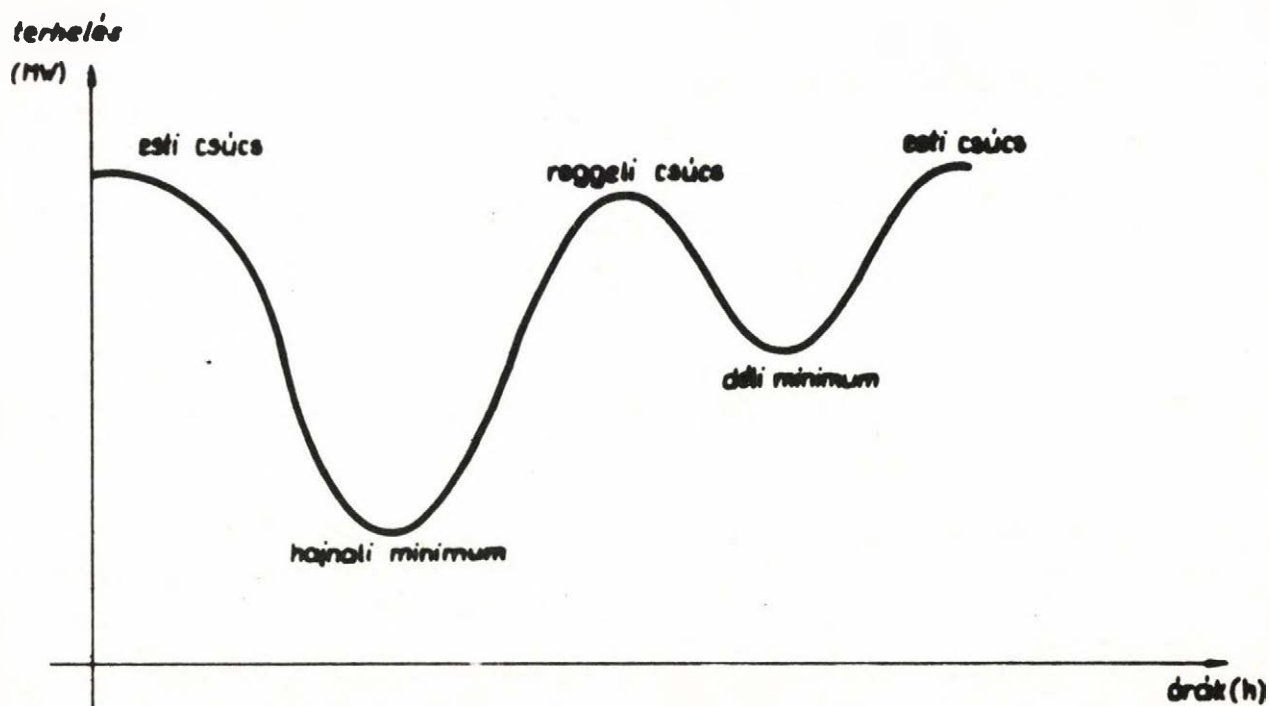
A napi igénygörbe az alábbi tényezőktől összetetten függ:

- évszakok (napkelte és napnyugta időpontja és a közöttük lévő időszakok hossza, téli, nyári időszámítás, fűtési szezon, stb.),
- a nap típusa (munkanap, szabadnap),
- időjárási hatások (napsütés, hőmérséklet, felhőzet, szél, stb.),
- TV program.

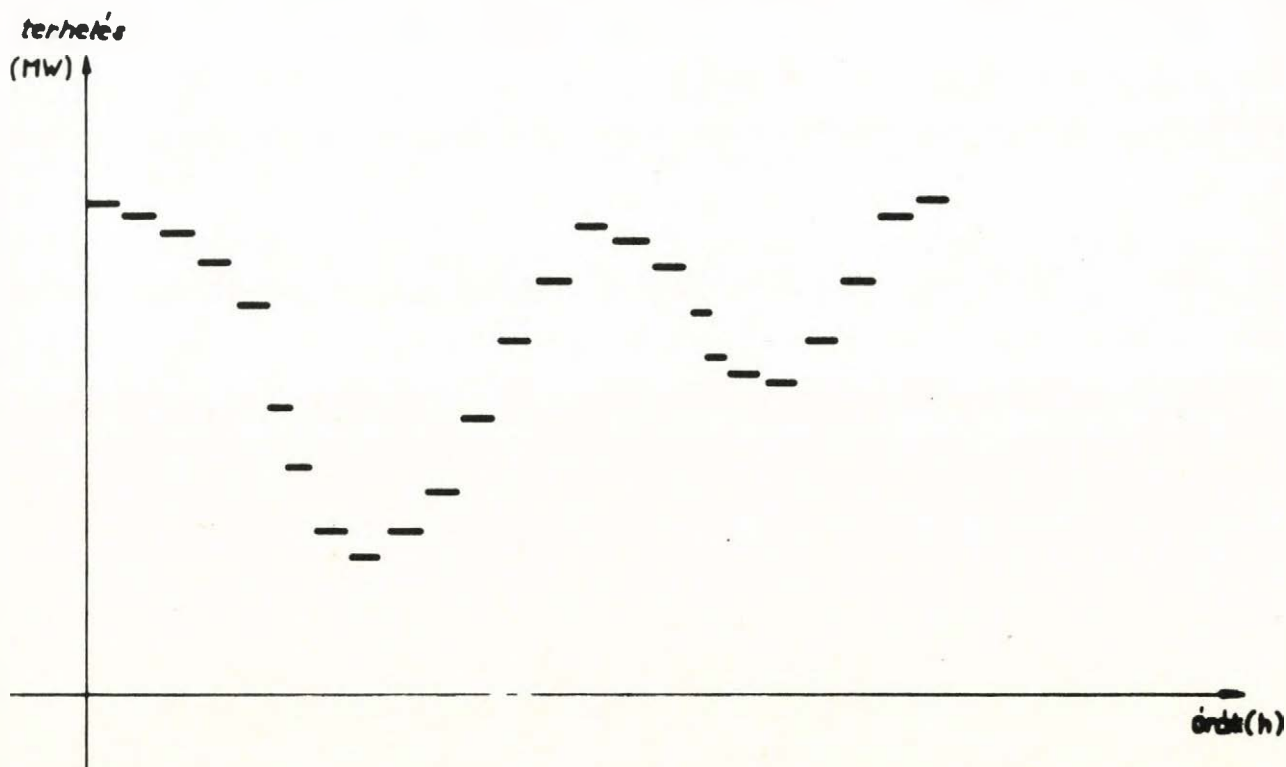
Magyarországon a napi igénygörbe igen jól - mintegy 1-2%-os eltéréssel - számítógépes programmal becsülhető előre. Ez mindig két lokális maximumot és két lokális minimumot tartalmaz.

A napi tervezés az esti csúcsterhelési időszakokkal kezdődik (mely általában a 17.00 és 19.00 óra közötti időszakra esik), továbbá 23 egyórás és 4 félórás periódusra vonatkozik.

A teljesítményigény értéke egy óra alatt csak csekély mértékben változik, ezért a számításokban az egyórás és a félórás időszakokban azt állandónak tekintjük. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az igénygörbét lépcsős függvénnyel helyettesítjük (lásd az 1. és 2. ábrát).



1. ábra: Jellemző napi igénygörbe



2. ábra. Napi igénygörbe közelítése lépcsős függvénnyel a nap egyorás és felorás szakaszokra történő felosztása esetén

2.2.2 Az erőművek és üzemmódjaik

Ipari méretekben a villamos energia termelése hő-, viz- és atomerőművekben történik. Az egyes erőművekben különböző gazdaságossági és műszaki-technológiai feltételek érvényesek az ott alkalmazott energiaátalakítási módoktól, a berendezések fajtájától, azok állapotától, a felhasznált energiahordozó minőségétől és eltérésétől függően. Ebben a dolgozatban csak hőerőműves villamosenergia-termeléssel foglalkozunk.

Az erőmű különböző berendezés-csoportjainak (blokkcsoportok, kazán-turbina-generátor együttesek) üzeme esetén az erőmű különböző *üzemmódjairól* vagy más szóval *üzemállapotairól* beszélünk. Az erőmű egyes üzemállapotai meghatározott hatásos és meddő teljesítmény tartományban üzemelnek. Egyik üzemmódból a másikba üzemmódváltással kerül az erőmű. Az *üzemmódváltás* bizonyos berendezéscsoportok leállítása indítása útján történik. Vannak olyan üzemmódok, amelyek egymást követően egészen különböző berendezések működtetését jelentik. Ilyen üzemmódok közötti közvetlen üzemmódváltás nem megengedett a gyakorlatban, annak igen magas költsége miatt.

Technológiai okok miatt az erőművi egységek kikapcsolás után csak legalább 4 óra állásidő eltelte után kerülhetnek vissza az áramfejlesztésbe.

Külön erőmű termeléseként fogjuk fel az importból származó energiamennyiséget. Az "importerőmű" üzemmód-jellemzői írják le az államközi szerződésekben foglalt feltételeket.

Az erőművek működéséhez szükséges primér energiahordozók ipari kooperáció útján jutnak el felhasználási helyükre. Az együttműködési kapcsolatban fellépő problémák (pl. szállítási késleltetési, vízerőműveknél tározási problémák) szükségessé tehetik, hogy valamely erőmű, vagy erőművek napi energiahordozó felhasználását korlátozzuk. Ez, matematikailag kifejezve alsó, vagy felső korlátot egyaránt jelenthet. Az energiahordozó felhasználása közvetlenül kifejezhető a napi fejlesztett energiamennyiséggel, így előfordulhat, hogy az egész napra vonat-

kozó termelési korlátokról eltérő alsó, vagy felső korlátok érvényesülnek. Ezt *tűzelőanyagkényszernek* nevezzük.

2.2.3 A villamosenergia-rendszer alaphálózata

Az erőművekben generált elektromos energiának a fogyasztóhoz való szállítása a villamosenergia-hálózaton keresztül történik. A hálózat távvezeték ágai az alábbiak szerint csoportosíthatók:

- a.) A 750, 400 és 220 kV-os, a nemzetközi kooperációs hálózathoz csatlakozó vezetékeknek az országhatárig terjedő szakasza,
- b.) A 400 és 220 kV-os gerincvezetésekből álló országos alaphálózat,
- c.) A 120 kV-os nagyfeszültségű fő-elosztóhálózat,
- d.) A fentieknél kisebb feszültségű elosztóhálózat.

A hálózat különböző feszültségű részei transzformátorokat is tartalmazó alállomásokon keresztül csatlakoznak egymáshoz. A fogyasztók teljesítményigényük szerint a csomópontokon csatlakoznak a megfelelő szintű hálózathoz.

A központi irányítás számára a villamosenergia-rendszer olyan nemzetközi kapcsolódásokat is tartalmazó hurkolt hálózatként jelenik meg, melyben a fogyasztások az egyes nagy feszültségű csomópontokra koncentrálva lépnek fel, míg más, az előbbiekkal részben azonos csomópontokra erőművek táplálódnak. Ennek megfelelően a napi menetrend optimalizálására vonatkozó modellben a villamosenergia-hálózatnak a fenti csoportosítás szerinti a.) és b.) részeit, továbbá a (120 kV-os) c.) hálózat azon részeit vesszük figyelembe, amelyekhez jelentős erőművek csatlakoznak, vagy amelyek a 400, illetve 220 kV-os csomópontok között sönt-ágakat képeznek, vagy képezhetnek. A továbbiakban villamosenergia-hálózaton a hálózatnak ezt a részét értjük, és ezt alaphálózatnak is fogjuk nevezni.

Az alaphálózat csomópontjaihoz erőművek, meddőforrások, ill. fogyasztók csatlakoznak. Az erőművekről, ill. a fogyasztásról már esett szó, a meddőforrásokról, ill. a nyelőkről rövid áttekintést adunk (lásd még az F2 részt).

A meddőforrásokat jelentő berendezések a hálózat csomópontjaihoz csatlakozva meddő teljesítményt képesek betáplálni (erőművi generátorok, szinkronkompenzátorok, statikus vagy szabályozható kondenzátorok), vagy elnyelni (erőművi generátorok, szinkronkompenzátorok, söntfojtótekercecsek). A folytonosan szabályozható források teljesítménye megadott tartományban mozoghat, a kapcsolhatóké (söntfojtók, statikus kondenzátorok) a csomóponti feszültség négyzetével arányosan változik.

A csomópontokat egymással ágak kapcsolják össze, melyek vagy távvezetékek, vagy kábelek, vagy pedig transzformátorok. Az ágak a végpontjaikra nézve villamosan szimmetrikusak, véges ellenállásuk, induktivitásuk, kapacitásuk, valamint termikus terhelhetőségük van. Villamosan ugyan nem, de az üzemirányítás szempontjából megkülönböztetjük a rendszerközi távvezetékeket, amelyek nemzeti vagy egyéb érdekelttség szerint elkülönülő rendszereket kötnek össze. Az ágak ohmos ellenállásából következően a teljesítmény-szállítás a terheléstől és a feszültségviszonyoktól függő veszteséggel jár. Kiemeljük, hogy a villamosenergia-hálózat elemei dinamikusak abban az értelemben, hogy a hálózati konfiguráció a hálózati elemek hibája, tervezett kiiktatása stb. következtében naponta, és ezen belül is esetleg rövidebb időtartamok alatt változik.

Illusztrációképpen röviden egy napon belül két szélsőséges terhelésű időszakot tekintünk.

Az éjszakai minimális terhelésű időszakban (ld. 2.2.1) a távvezetékek, kábelek gyengén vannak terhelve, ebben a helyzetben a kapacitív karakterük dominál, azaz meddő teljesítményt termelnek. A reaktív teljesítmény túltermelés a feszültségek felugrásával jár (lásd F2 részt), ennek kompenzálásában fontos szerepet játszanak a csomópontokhoz csatlakozó meddőnyelők.

A másik szélsőséges eset a csúcsterhelésű időszak, ekkor nagy meddőteljesítmény-igény mutatkozik. Ez egyrészt abból adódik, hogy a fogyasztók jelentős része meddő teljesítményt nyel (elektromos motorok), másrészt ilyenkor a teljesítményt szállító vezetékek is erősen le vannak terhelve, és ilyenkor az induktív karakterük a domináns. Ebben a helyzetben a feszültségek leesnek, és ennek kompenzálására a meddőforrások alkalmasak.

3. A VILLAMOSENERGIA-TERMELÉS ÜTEMEZÉSENEK EGY ÁLTALÁNOS MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSI MODELLJE

Ebben a fejezetben a 2.2 bekezdésben megfogalmazott ütemezési probléma egy általános matematikai programozási modellje kerül ismertetésre arra az esetre, amikor az energiatermelő rendszer csak termikus erőműveket tartalmaz. A modellt azért nevezzük általánosnak, mert megfogalmazásakor nem alkalmazunk egyszerűsítő feltevéseket azzal a céllal, hogy a megfelelő matematikai programozási modell matematikailag és számítástechnikailag kezelhető legyen.

Az 5. fejezetben egy egyszerűsített modellt fogunk ismertetni. A két modell lényegesen különbözik az üzemállapotváltozásokra vonatkozó feltevésekben.

Az általános modellben az üzemállapotváltozások kihatásait a következőképpen összegezhetjük:

a.) Kikapcsolásnál a kikapcsolt, vagy a kikapcsolttal azonos típusú előzetesen nem működő egységek csak a minimális (4 órás) állásidő után léphetnek üzembe.

b.) Bekapcsolásnál fellép a bekapcsolt egység előzetes állásidőjétől függő bekapcsolási költség. A bekapcsolásra kerülő egységek üzemben léteire vonatkozóan előzetes feltételezéseket nem teszünk, az üzemeltetési időtartamot a teljes napi optimálás határozza meg.

c.) Az átkapcsolásokat, amelyek egyes egységek kikapcsolásával, míg mások egyidejű bekapcsolásával járhatnak, az előző két üzemállapotváltozás összegeként kezeljük. Ez az eset ritkán fordul elő, de a lehetőségét nem zárjuk ki.

A két modell abban is különbözik, hogy míg az általános modell tetszőleges hosszúságú ütemezési időszakokra is megfogalmazható, addig az egyszerűsített modell a 4.2 bekezdésben tett egyszerűsítő feltevés miatt egynapos (ill. 25 órás) ütemezési időszakra vonatkozik. Az egyszerűsített modellben azok az időszakok, amelyekben az igény értéke konstansnak tekinthető, 1/2 és 1 órá-

sak. Az általános modellben ezek tetszőleges hosszúságúak lehetnek. Az időszakokra a "periódus" elnevezést használjuk.

3.1 A MODELL VÁLTOZÓI

A probléma megfogalmazása (lásd 2.2 bekezdés) szerint az ütemezés időtartamának minden periódusához meg kell határoznunk az erőművekben alkalmazandó üzemmódokat, az alkalmazandó üzemmód teljesítményszintjét és a szabályozható feszültségű hálózati pontok feszültségeit.

Ennek megfelelően a modell változói az egyes periódusokbeli üzemmódokat, a teljesítményszinteket és a feszültségeket jelölő vektorok. A modell leírásakor nehézséget okoz a változók nagy száma, illetve az, hogy a változókra más és más hivatkozásmód alkalmas az éppen ismertetendő ténytől függően.

Általános jelöléstechnikánk az lesz, hogy a változó vektorokat és ezek komponenseit is felső indexszel látjuk el annak a periódusnak a jelölésére, amelyre a változó vonatkozik. Ha a felső indexet elhagyjuk, arra a vektorra hivatkozunk, melyet a megfelelő felső indexszel ellátott vektoroknak a periódusok sorrendjében való egymás után fűzésével kapunk. Ezen konvenció alól kivétel lesz a hálózat feszültségviszonyait tárgyaló rész, ahol a felső index elhagyásával jelölt változó vektor egy tetszőleges, de rögzített periódushoz tartozó vektort jelöl.

A hálózat feszültségi viszonyainak a tárgyalása önmagában is elég bonyolult; a megértést megkönnyíti, hogy a tárgyalásban elhagyjuk a felső indexet. Ott, ahol felső index nélküli változót ilyen értelemben használunk, erre külön felhívjuk az olvasó figyelmét.

Jelölje a továbbiakban T az ütemezési időszak periódusainak a számát, a_t pedig a t -edik periódus időtartamát. Az ütemezés

időtartama eszerint $\sum_{t=1}^T a_t$. Legyen K az erőművek, $M(k)$ a k -edik erőműben alkalmazható üzemmódok száma.

Az erőművek üzemmódjainak a megnevezésére az első, második stb. $M(k)$ -edik üzemmód szóhasználatot alkalmazzuk erőművenként. Az üzemmódok sorrendjére az általános modellben nem teszünk semmi megszorítást. Lásd erre vonatkozóan a 3.2.2 bekezdés végén található megjegyzést.

A továbbiakban szükséges egyéb jelöléseket legelső előfordulásuknál definiáljuk, majd összefoglalásként áttekintjük őket a 3.5 bekezdésben.

3.1.1 Üzemmód változók

Az egyes periódusokban az erőművekben alkalmazandó üzemmód megadására bevezetjük az \underline{y}^t változó vektorokat ($t=1, 2, \dots, T$),

amelyek dimenziója $\sum_{k=1}^K M(k)$; és az ezekből alkotott \underline{y} vektort, amely $T \sum_{k=1}^K M(k)$ dimenziós.

\underline{y}^t komponensei 0 vagy 1 értékűek. Definíciójukat a következőképpen adhatjuk meg. Minden erőmű minden üzemmódjához tartozik egy komponens az erőművek, azon belül a lehetséges üzemmódok egymásutánjának sorrendjében. E szerint a sorrendezés szerint

\underline{y}^t l -edik komponense - a $\sum_{k=1}^{i-1} M(k) < l \leq \sum_{k=1}^i M(k)$ egyenlőtlenség teljesülése esetén - az i -edik erőmű $j=l - \sum_{k=1}^{i-1} M(k)$ -edik

üzemmódjához tartozik.

A komponensekre gyakran fogunk kettős indexszel is hivatkozni, ahol az első index a komponens által jellemzett erőműnek, a második index a jellemezett üzemmódnak a sorszáma.

Legyen az itt leírt l -edik komponens értéke 1, ha a t -edik periódusban az i -edik erőműben a j -edik üzemmód alkalmazandó, egyébként 0.

Mivel minden erőműben mindenkor egyetlen üzemmód üzemel, e definícióból azonnal következik, hogy teljesülnie kell a

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^{M(i)} y_{ij}^t = 1, \quad i=1, 2, \dots, K, \quad t=1, 2, \dots, T$$

összefüggéseknek.

Az \underline{y} felső index nélküli vektor megállapodásunk szerint az \underline{y}^t $t=1, 2, \dots, T$ vektorok egymás után fűzésével keletkezik. Így

pl. $y_{i0}^t = y_{ij}^t$ az \underline{y} vektor

$$(t_0 - 1) \sum_{k=1}^K M(k) + 1 = (t_0 - 1) \sum_{k=1}^K M(k) + \sum_{k=1}^{i-1} M(k) + j\text{-edik}$$

komponense.

A későbbiekben szükségünk lesz a tervezési időszakot megelőző időszak legutolsó periódusában alkalmazott üzemmódok ismeretére is. Az erre vonatkozó információ megadható ezen legutolsó periódusra vonatkozó üzemmód változók értékeinek megadásával. Jelöljük \underline{y}^0 -val a megfelelő üzemmód vektort. Ez a modell-

ben $\sum_{k=1}^K M(k)$ dimenziós, 0-1 komponenseket tartalmazó konstans

vektor.

Megjegyzés:

1.) Az olvasóban esetleg felvetődik az a kérdés, hogy mi történik, ha két egymást követő tervezési időszakban az erőművekben alkalmazható üzemmódok nem azonosak, illetve ha egy tervezési időszakon belül változik az üzemmód készlet. (Ez előfordulhat, hiszen például valamilyen karbantartási munka a nap bármely időpontjában befejeződhet, s így addig nem alkalmazható gépi egységek is működtethetők ezt követően.)

A kérdés megválaszolása egyszerű: a tervezési időszakban alkalmazható üzemmódokat úgy adjuk meg, hogy ezek halmaza a lehető legbővebb legyen. Külön üzemmódnak tekintjük azt az üzemmódot is, amelynek alkalmazása csak néhány periódusban megengedett. Ezekre vonatkozóan megköveteljük, hogy azokban a periódusokban, amelyekben ez az üzemmód nem alkalmazható, a megfelelő üzemmód változó értéke 0 legyen.

Ez a megállapodás lehetővé teszi, hogy az $M(k)$, $k=1, 2, \dots, K$ üzemmód készlet független legyen az időtől és egy-egy üzemmód sorszám mindig ugyanazt az üzemmódot jelölje.

2.) Felvetődhet az a kérdés is, hogy mi történik, ha valamely erőműben csak egyetlen üzemmód alkalmazható, azaz valamely $M(i)=1$. Ebben az esetben a modellben ezen üzemmód alkalmazásának teljesítményszintjét kell csak megadni, a megfelelő üzemmód változó használata felesleges, hiszen ennek értéke csak 1 lehet.

Ennek ellenére, a modell leírását megkönnyítendő, ezekkel az erőművekkel ill. üzemmódokkal nem foglalkozunk külön, hanem használjuk az $y_{i,1}$ változót, s a (3.1) egyenlőség megkövetelésével biztosítjuk az $y_{i,1}=1$ teljesülését.

3.) Megjegyezzük még, hogy az egyszerűsített modell üzemmód változóit az ittenitől eltérő módon definiáljuk.

3.1.2 Teljesítmény változók

Az egyes periódusokban az erőművekben alkalmazandó üzemmódok teljesítményszintjének megadására a p^t teljesítmény-változó vektorokat használjuk. Ezek dimenziója $\sum_{k=1}^K M(k)$.

Összefűzésükkel ($t=1, 2, \dots, T$) keletkezik a p vektor, amely

$T \sum_{k=1}^K M(k)$ dimenziós.

p^t definíciója a következő:

Minden erőmű minden üzemmódjához hozzárendeljük p^t egy komponensét (az erőművek, azon belül az üzemmódok sorrendjében, ugyanúgy, ahogyan az üzemmód változóknál tettük). A komponensekre kettős indexszel is fogunk hivatkozni, ahol az első index a megfelelő erőmű, a második az üzemmód sorszáma. Ezek szerint a $p_{i,j}^t$ komponens a p^t vektor $\sum_{k=1}^{i-1} M(k) + j$ -edik komponense,

ill. a p vektor definíciója szerint ennek $(t-1) \sum_{k=1}^K M(k) +$

$i-1$
 $\sum_{k=1}^{i-1} M(k) + j$ -edik komponense.

Minden erőmű minden üzemmódjához ismert a működtetésnél megengedett minimális és maximális teljesítményszint. Jelölje ezeket P_{ij}^{min} és P_{ij}^{max} , $i=1, 2, \dots, K$, $j=1, 2, \dots, M(i)$.

A p_{ij}^t komponens értékét definiáljuk a következőképpen: legyen a $p_{ij}^t = 0$, ha a t -edik periódusban az i -edik erőműben nem a j -edik üzemmód kerül alkalmazásra, egyébként az i -edik erőmű j -edik üzemmódjában a működési szintnek a minimális érték feletti része.

Ezzel a definícióval az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának teljesítményszintje a

$$P_{ij}^{min} y_{ij}^t + p_{ij}^t$$

összeggel adható meg, és teljesülnie kell a

$$(3.2) \quad P_{ij}^{min} y_{ij}^t \leq P_{ij}^{min} y_{ij}^t + p_{ij}^t \leq P_{ij}^{max} y_{ij}^t \quad \text{illetve:}$$

$$0 \leq p_{ij}^t \leq (P_{ij}^{max} - P_{ij}^{min}) y_{ij}^t$$

összefüggésnek. A fenti definíció értelmében a p_{ij}^t komponens csak akkor vehet fel nem zéró értéket, ha $y_{ij}^t = 1$. E követelmény teljesülését a (3.2) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő $P_{ij}^{max} y_{ij}^t$ szorzatban az y_{ij}^t tényező biztosítja. (Nem igaz azonban, hogy $y_{ij}^t = 1$ teljesüléséből következik az, hogy $p_{ij}^t > 0$, hiszen ha az üzemmód a megengedett minimális szinten működik, akkor $p_{ij}^t = 0$.)

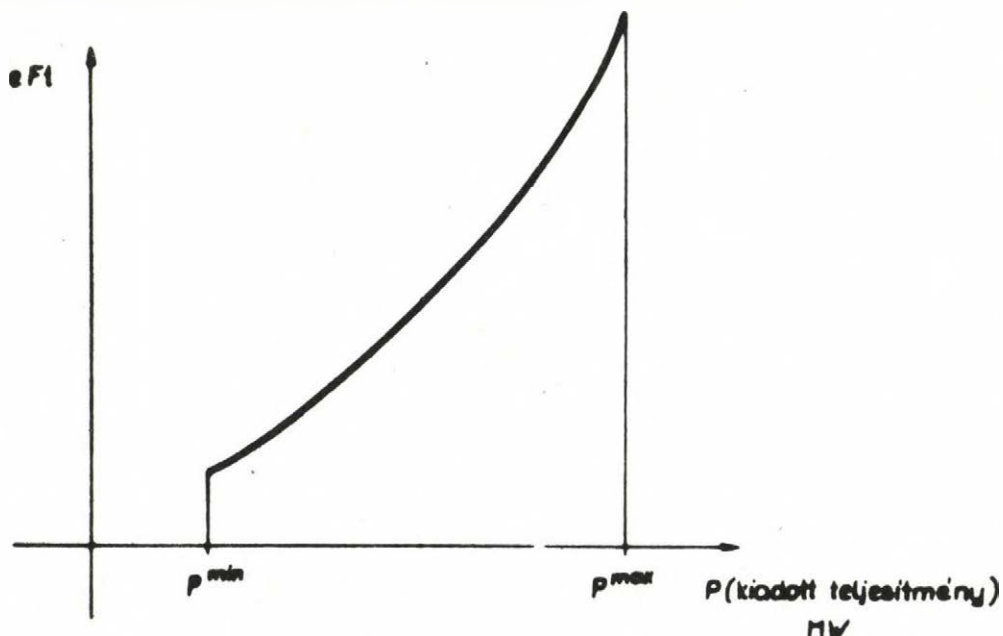
3.1.3 Feszültségi változók

A modellben változóknak tekintjük az átviteli hálózat valamennyi csomópontja komplex feszültségének valós és képzetes részét. Jelöljük a t -edik periódusban a csomóponti feszültségek valós részét v_1^t, \dots, v_N^t -vel, a képzetes részét pedig w_1^t, \dots, w_N^t -vel, ahol N a hálózat csomópontjainak száma. A megfelelő vektorokat jelölje \underline{v}^t , ill. \underline{w}^t . A továbbiakban, amennyiben egy rögzített periódust tekintünk, a felső indexet el fogjuk hagyni.

3.2 A CÉLFÜGGVÉNY

A modell minimalizálandó célfüggvényét a villamosenergia-termelés költsége szolgáltatja. Ez tartalmazza az erőművi blokkok adott szinten való működtetéséhez szükséges tüzelőanyag költségét, az erőművi blokkok bekapcsolásakor fellépő, állásukból származó hőveszteségi és az üzemmódváltással kapcsolatos állagromlási költséget, valamint a hálózati veszteségből eredő költséget. E három összetevőt külön-külön tárgyaljuk.

3.2.1 Erőművi blokkok termelési költsége



3. ábra. Jellegetes fajlagos költséggörbe

Az erőművi blokkok üzemeléséből származó költségrészt a következőképpen adhatjuk meg:

Minden erőmű minden lehetséges üzemmódjához tartozik egy arra jellemző költséggörbe (lásd 3. ábra).

Legyen $f_{ij}(P)$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódjához tartozó költséggörbét megadó függvény, ahol a P független változó az üzemeltetés teljesítményszintje, a függvényérték pedig a P szintű termelés esetén időegység alatt elhasznált tüzelőanyag ára.

$f_{ij}(P)$ értelmezési tartománya a $[P_{ij}^{min}, P_{ij}^{max}]$ intervallum, hiszen az i -edik erőmű j -edik üzemmódja csak ezen teljesítménykorlátok között működhet. Az i -edik erőmű j -edik üzemmódja működésből származó költségrész nyilvánvalóan 0, ha az erőműben nem ez az üzemmód működik.

Vezessük be a következő jelölést:

Legyen $K_{ij} = f_{ij}(P_{ij}^{min})$, vagyis az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának működtetése esetén a minimális teljesítmény kibocsátásának költsége.

Legyen $k_{ij}(P) = f_{ij}(P_{ij}^{min} + P) - f_{ij}(P_{ij}^{min})$, azaz a $P_{ij}^{min} + P$ teljesítményszinten való működtetés esetén, a minimális P_{ij}^{min} mennyiségen felül termelt P energiamennyiség többlet termelési költsége. A $k_{ij}(P)$ függvény értelmezési tartománya a $[0, P_{ij}^{max} - P_{ij}^{min}]$ intervallum.

Megállapodásunk szerint a t -edik periódus időtartamát a_t jelöli. Az eddigiek alapján az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának t -edik periódusbeli üzemeléséből származó költség a következő:

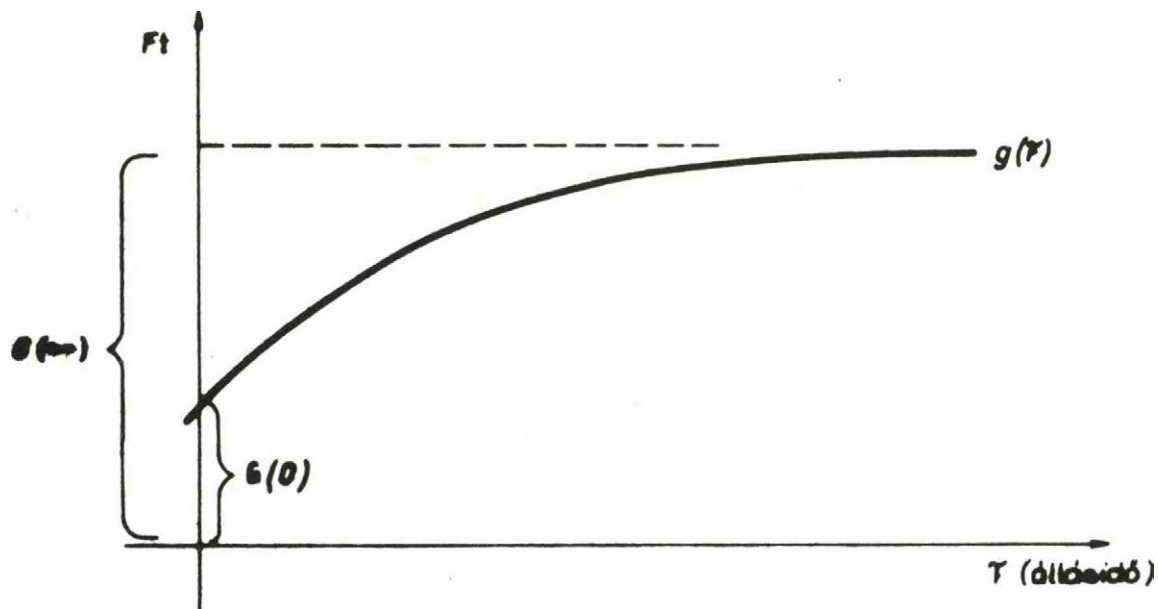
$$(3.3) \quad a_t \{K_{ij} y_{ij}^t + k_{ij}(p_{ij}^t)\}.$$

Igy a teljes tervezési intervallumban az erőművi blokkok működéséből származó költségrész:

$$(3.4) \quad \sum_{t=1}^T a_t \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} \{k_{ij} y_{ij}^t + k_{ij} (p_{ij}^t)\}.$$

3.2.2 Berendezések állásából, újraindításából származó költség: átállási költség

Az üzemmódok állásából származó költség figyelembevétele valójában annak a költségnek a figyelembevételét jelenti, amely az egyes erőművi egységek bekapcsolásánál, az erőművi egység egy bizonyos állásidő utáni újraindításakor jelentkezik. Egy-egy erőművi egység vonatkozásában ez a költség tartalmaz egy, a berendezések kapcsolása következtében fellépő állagromlási és többlet karbantartási költséget, valamint a működéshez felfűtött testeknek az állásidő folyamán történő lehülése következtében szükségessé váló felfűtés költségét. Ez utóbbi költségrész - mivel a hűlés során exponenciális jellegű hőleadás történik - az állásidő exponenciális függvénye.



4. ábra. Erőművi egységek ledlítés - újraindítási (állási) költségeinek alakulása az állásidő függvényében.

A 4. ábrán egy erőművi egység τ állásidő eltelte utáni újraindításának költséggörbéje látható az állásidő függvényében. Ez a költséggörbe a

$$(3.5) \quad g(\tau) = G(0) + \{G(\infty) - G(0)\} (1 - e^{-c\tau})$$

képlettel adható meg, ahol a c , $G(0)$, $G(\infty)$ az erőművi egységre jellemző állandók, $G(0)$ az állagromlást és többlet karbantartási költséget, $\{G(\infty) - G(0)\} (1 - e^{-c\tau})$ pedig a hőveszteség miatt fellépő költségrészt jelenti. $G(\infty)$ a hosszú állásidő utáni ún. hidegen indítás költsége; $c > 0$, mivel a hőveszteség-költség az állásidő növekedésével együtt növekszik. A $g(\tau)$ függvény értelmezve van minden $\tau \geq 0$ esetén, annak ellenére, hogy az erőművi egységek vagy folyamatosan működnek, és ekkor természetesen nincs állás-újraindítási költség, vagy a tényleges állásidő értéke legalább 4 óra. A nagytömegű berendezések tranziens hőigénybevételét korlátozó ajánlások, szabványok, garanciák, üzemviteli előírások miatt ugyanis a leállított berendezések csak legalább 4 óra elteltével indíthatók újra.

Hogy az erőművi egységek állásából származó költséget a modellben - amelyben üzemmódok működéséről ill. állásáról történik döntés - figyelembe vehessük, tisztáznunk kell az erőművi egységek és az üzemmódok kapcsolatát. Ha minden üzemmód más és más erőművi egység működését jelentené, akkor az üzemmód állásának ideje és egy erőművi egység állásának ideje azonos lenne, és az erőművi egységek állás-költségeinek számításához az üzemmódok állásidejét kellene figyelembe vennünk, amely az y_{ij}^t üzemmód változók függvényeként megadható. Az erőművek üzemmódjai és az erőművi egységek között azonban nincs ilyen kölcsönösen egyértelmű kapcsolat. Az erőművek üzemmódjai az erőművi egységek különböző, műszakilag lehetséges együttműködéseként adódnak. Példaként tekintsük a következőt:

Tegyük fel, hogy valamely erőműben három erőművi egység van, jelölje ezeket 1 , 2 , 3 . Amennyiben ennek az erőműnek két lehetséges üzemmódja A és B lenne, ahol A az 1

erőművi egység működését, B pedig a 2 és 3 egységek működését jelentené, akkor az erőművi egységek állásideje azonos lenne az üzemmódok állásidejével és az állásköltség egyszerűen számítható lenne. Ha azonban lenne egy harmadik, C üzemmód is, amely mindhárom erőművi egység működését jelentené, akkor az erőművi egységek állásideje már nem lenne azonos az üzemmódok állásidejével.

A következőkben az erőművi egységek állásköltségének figyelembevételére adunk egy módszert. Ennek leírásában a következő terminológiát és jelöléseket használjuk:

Az i -edik erőmű j -edik üzemmódja vonatkozásában az egyes periódusok kezdetének időpontja lehet *kikapcsolási* vagy *bekapcsolási* időpont, illetve változatlan működés esetén a periódus *folytatólagos működési* vagy *továbbállási periódus*. Így a t -edik periódus kezdetének időpontja kikapcsolási időpont, ha $y_{ij}^{t-1}=1$ és $y_{ij}^t=0$. Ha $y_{ij}^{t-1}=0$ és $y_{ij}^t=1$, akkor ez az időpont bekapcsolási időpont. A t -edik periódus folytatólagos működési periódus, ha $y_{ij}^{t-1}=1$ és $y_{ij}^t=1$. Egyébként $y_{ij}^{t-1}=0$ és $y_{ij}^t=0$ esetén a periódus továbbállási periódus (mivel az y^0 vektort korábban már definiáltuk, a fenti terminológia minden $t=1, 2, \dots, T$ esetén értelmes).

Definiáljuk az erőművek üzemmódjaihoz minden periódusban az üzemmód folytatólagos állásának időtartamát a következő módon. Legyen az i -edik erőmű j -edik üzemmódja folytatólagos állásának ideje a t -edik periódusban 0 , ha a t -edik periódus az i -edik erőmű j -edik üzemmódjára nézve bekapcsolási periódus vagy folytatólagos működési periódus; legyen a_t , ha a t -edik periódus kikapcsolási periódus és a t -edik periódust megelőző legutolsó kikapcsolási periódus elejétől eltelt idő, beleértve a t -edik periódus időtartamát is, ha a t -edik periódus továbbállási periódus.

Jelöljük $\tau_{ij}(t)$ -vel az i -edik erőmű j -edik üzemmódja folytatólagos állásidejét a t -edik periódusban. $\tau_{ij}(t)$ megadható a következő formulával:

$\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}(t-1) + a_t$, ha a t -edik periódus továbbállási periódus, azaz $y_{ij}^{t-1} = 0$ és $y_{ij}^t = 0$;

$\tau_{ij}(t) = a_t$, ha a t -edik periódus kezdetének időpontja kikapcsolási időpont, azaz $y_{ij}^{t-1} = 1$ és $y_{ij}^t = 0$;

$\tau_{ij}(t) = 0$, ha a t -edik periódus folytatólagos működési periódus vagy kezdetének időpontja bekapcsolási időpont, azaz vagy $y_{ij}^{t-1} = 1$ és $y_{ij}^t = 1$ vagy $y_{ij}^{t-1} = 0$ és $y_{ij}^t = 1$.

$\tau_{ij}(t)$ -nek az üzemmódváltozó-komponensektől való függése megadható a következő szorzat formájában is:

$$(3.6) \quad \tau_{ij}(t) = \{\tau_{ij}(t-1) + a_t\} (1 - y_{ij}^t),$$

hiszen $y_{ij}^t = 1$ esetén e szorzat értéke 0, egyébként $y_{ij}^t = 0$ és $y_{ij}^{t-1} = 1$ esetén $\tau_{ij}(t) = a_t$, hiszen $\tau_{ij}(t-1) = 0$. Végül $y_{ij}^t = 0$ és $y_{ij}^{t-1} = 0$ esetén $\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}(t-1) + a_t$.

A definíció teljességéhez meg kell még adni $\tau_{ij}(0)$ értelmezését. Legyen $y_{ij}^0 = 1$ esetén (azaz ha az üzemmód az előző tervezési időszak befejezésekor működik) $\tau_{ij}(0) = 0$, és $y_{ij}^0 = 0$ esetén legyen $\tau_{ij}(0)$ a tervezési időszakot megelőzően eltelt állásidő, vagyis $\tau_{ij}(0)$ az előző tervezési időszakra vonatkozó $\tau_{ij}(T)$.

Az üzemmódokhoz hasonlóan erőművi egységek vonatkozásában is használjuk a kikapcsolási ill. bekapcsolási időpont, folytatólagos működési ill. továbbállási periódus elnevezéseket és definiáljuk erőművi egységek folytatólagos állásának az idejét. Ehhez használjuk a következő jelöléseket.

Legyen $N(i)$ az i -edik erőmű egységeinek száma. Hivatkozunk az egységekre sorszámokkal, a sorszámokból alkotott indexhalmaz legyen $L(i) = \{1, 2, \dots, N(i)\}$. Jelöljük $J(i, j)$ -vel az $L(i)$ azon részhalmazát, amelynek megfelelő egységek együttes működése az i -edik erőmű j -edik üzemmódját szolgáltatja. ($i=1, 2, \dots, K$; $j=1, 2, \dots, M(i)$).

Az i -edik erőmű k_0 sorszámú egysége működik a t -edik periódusban, ha $y_{ij_0}^t = 1$ esetén $k_0 \in J(i, j_0)$. Abban az esetben, ha $y_{ij_0}^t = 1$ és $k_0 \notin J(i, j_0)$, a k_0 sorszámú egység a t -edik periódusban áll.

A fenti információ a $\sum_{j: k_0 \in J(i, j)} y_{ij}^t$ összeg értékével is megadható, ahol az összegzés azon j értékekre történik, amelyekre $k_0 \in J(i, j)$.

$$\sum_{j: k_0 \in J(i, j)} y_{ij}^t = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik erőmű } k_0 \text{ egysége} \\ & \text{működik a } t\text{-edik periódusban,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A t -edik periódus kezdetének időpontja az i -edik erőmű k_0 egységére kikapcsolási időpont, ha

$$\sum_{j: k_0 \in J(i, j)} y_{ij}^{t-1} = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{j: k_0 \in J(i, j)} y_{ij}^t = 0.$$

A bekapcsolási időpont, folytatólagos működési ill. továbbál-lási periódus elnevezést hasonlóan definiáljuk - mindenütt a $\sum_{j: k_0 \in J(i, j)} y_{ij}^t$ összegek figyelembevételével.

Szükségünk lesz az egyes erőművi egységek folytatólagos áll-lásának idejére, - ezt is az üzemmódok folytatólagos állásának i-dejével analóg módon definiáljuk.

Jelölje $\xi_{ik}(t)$ az i -edik erőmű k -adik egységének folytató-lagos állásidejét a t -edik periódusban.

$\xi_{ik}(t)$ megadható a következő formulával:

$$\xi_{ik}(t) = \xi_{ik}(t-1) + a_t, \text{ ha } \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} = 0 \text{ és } \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 0$$

$$\xi_{ik}(t) = a_t, \text{ ha } \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 1 \text{ és } \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 0$$

$$\xi_{ik}(t) = 0, \text{ ha } \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 1 \text{ és } \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 1$$

$$\text{vagy } \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} = 0 \text{ és } \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 1$$

illetve megadható a következő szorzat formájában is:

$$\xi_{ik}(t) = \{\xi_{ik}(t-1) + a_t\} \left(1 - \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t\right).$$

A definíció teljességéhez szükséges $\xi_{ik}(0)$ értékét $\tau_{ij}(0)$ -val analóg módon definiáljuk.

Az üzemmódok állásidejének és az egységek állásidejének definíciójából következik, hogy

$$\xi_{ik}(t) = \min_{j:k \in J(i,j)} \tau_{ij}(t), \quad k=1,2,\dots,N(i), \quad i=1,2,\dots,K$$

és ha valamely egység működése csak egyetlen üzemmód működése esetén szükséges, akkor ezen egység és üzemmód állásideje megegyezik.

Az energiatermelő rendszer egészében fellépő állásköltséget periódusonként, erőműenként illetve erőművi egységenként veszőnk figyelembe, majd összegezzük az így adódó költségrészeket. Minden periódusban az erőművi egységnek az adott periódusbeli szerepéből származó költségrészt számítjuk fel.

Jelölje $g_{ik}(\tau)$ az i -edik erőmű k -edik erőművi egysége állásköltség függvényét, $k=1,2,\dots,N(i)$, $i=1,2,\dots,K$.

Vizsgáljuk a $g_{ik}(\xi_{ik}(t))$ függvényértéket. Ha az i -edik erőmű k -adik erőművi egysége a t -edik periódusban nem működik, akkor ez a függvényérték a t -edik periódus végéig eltelt állásidőhöz tartozó állásköltség. Ha az i -edik erőmű k -adik erőművi egysége működik a t -edik periódusban, akkor $\xi_{ik}(t)=0$, és a megfelelő függvényérték az állagromlás költségének felel meg.

Igy az i -edik erőmű k -adik erőművi egységének t -edik periódusbeli állapotából származó költség a $g_{ik}(\tau)$ függvény felhasználásával a következő formulával adható meg:

$$(3.7) \quad \left\{1 - \left(\prod_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1}\right) \left(\prod_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t\right)\right\} g_{ik}(\xi_{ik}(t)) - \\ - \left\{1 - \prod_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t\right\} g_{ik}(\xi_{ik}(t-1)).$$

Ennek belátására nézzük sorra a következő négy esetet:

a.) Ha az i -edik erőmű k -adik erőművi egysége a t -edik periódusban és az azt megelőző periódusban is áll, azaz:

$$\prod_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} = 0 \quad \text{és} \quad \prod_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 0, \quad \text{akkor a (3.7)}$$

kifejezés értéke:

$$g_{ik}(\xi_{ik}(t)) - g_{ik}(\xi_{ik}(t-1)),$$

ami a t -edik periódusbeli, $\xi_{ik}(t-1)$ időponttól a $\xi_{ik}(t)$ időpontig tartó α_t időtartamú továbbállás költsége.

b.) Ha az i -edik erőmű k -adik erőművi egysége vonatkozásában a t -edik periódus kezdetének időpontja kikapcsolási időpont, azaz a $t-1$ -edik periódusban olyan üzemmód működik, amelynek működéséhez a k -adik egység működése szükséges $\left(\prod_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} = 1\right)$, a t -edik periódusban pedig az ilyen üzemmódok egyike sem üzemel

($\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 0$), akkor (3.7) értéke

$$g_{ik}(a_t) - g_{ik}(0),$$

ami az a_t idejű állásból származó költség.

c.) Ha az i -edik erőmű k -adik erőművi egysége a t -edik és az azt megelőző periódusban is működik ($\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} = 1$ és

$\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 1$), akkor (3.7) értéke 0.

d.) Ha a t -edik periódus kezdete bekapcsolási periódus az i -edik erőmű k -adik erőművi egységére nézve, - azaz: az i -edik erőmű k -adik erőművi egysége a t -edik periódusban működik,

($\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 1$), de a megelőző periódusban nem

($\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} = 0$), akkor (3.7) értéke $g_{ik}(0)$, ami a megelőző

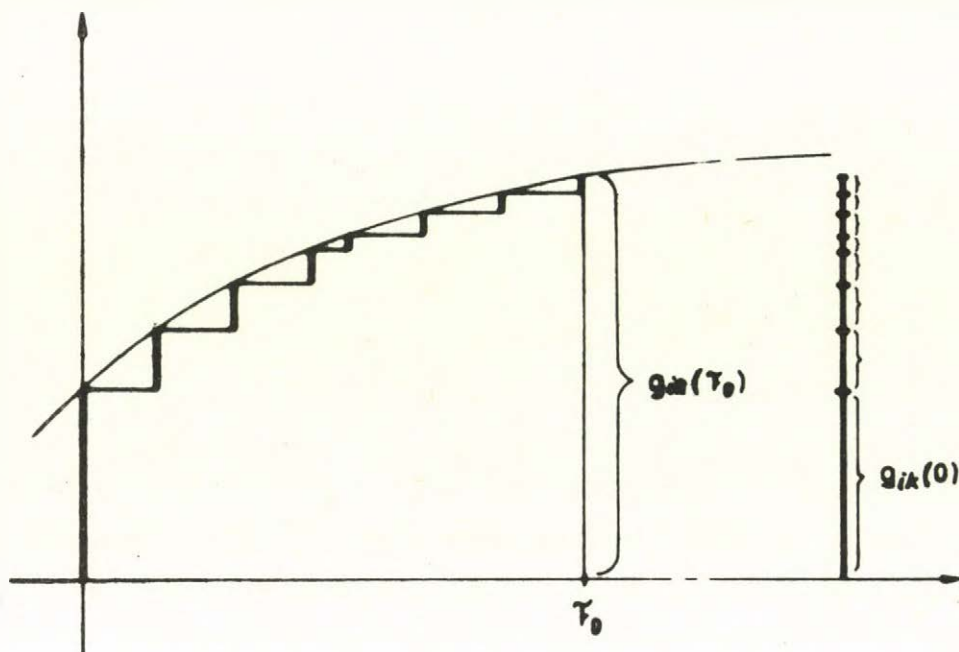
állási időszakhoz tartozó állagromlást kifejező érték.

A vizsgált (3.7) kifejezés értékeinek $t=1,2,\dots,T$ -re való összegzése esetén végül is az i -edik erőmű k -adik erőművi egységének az egész időszak alatt betöltött szerepéből származó költséget az állásköltség-függvény periódushossznyi független-változó növekedéshez tartozó függvényérték növekményeinek összegeként állítjuk elő. A $g_{ik}(0)$ állagromlás-költséget az egység bekapcsolásának időpontjában vesszük figyelembe. (lásd 5. ábra). Folytonos működési periódusokban állásköltség nem lép fel.

Illusztrációként tekintsünk egy konkrét esetet:

Tegyük fel, hogy az ötödik erőműben három erőművi egység van, amelyek közül a 1 és 3 együttműködése az 1., mindhárom egység együttműködése a 2. üzemmódot szolgáltatja. $M(5)=2$,

$$N(5)=3, J(5,1)=\{1,3\}, J(5,2)=\{1,2,3\}.$$



8. ábra. A τ_0 állásidőhöz tartozó átállási költség előállítására függvényérték-növekmények és $g_{ik}(0)$ összegeként

Tegyük fel, hogy a tervezési időszakot megelőzően és annak első három periódusában az első üzemmód működik, ezt követően 4 periódusban a második üzemmód működik. Végül a tervezési időszak végéig az első üzemmód üzemel. Legyen a tervezési időszak 10 periódus hosszúságú. Tegyük fel, hogy a második üzemmód ki-kapcsolása a tervezési időszak előtt 2 órával történt. Az üzemmód változók értéke ekkor a következő:

$$y_{51}^0=1, y_{51}^1=1, y_{51}^2=1, y_{51}^3=1, y_{51}^4=0, y_{51}^5=0, y_{51}^6=0, y_{51}^7=0,$$

$$y_{51}^8=1, y_{51}^9=1, y_{51}^{10}=1;$$

$$y_{52}^0=0, y_{52}^1=0, y_{52}^2=0, y_{52}^3=0, y_{52}^4=1, y_{52}^5=1, y_{52}^6=1, y_{52}^7=1,$$

$$y_{52}^8=1, y_{52}^9=1, y_{52}^{10}=1.$$

Az üzemmódok állásideje $\tau_{51}(t)$ és $\tau_{52}(t)$, $t=0,1,2,\dots,10$ a következő:

$$\tau_{51}(0)=0, \tau_{51}(1)=\tau_{51}(2)=\tau_{51}(3)=0, \tau_{51}(4)=a_4, \tau_{51}(5)=a_4+a_5,$$

$$\tau_{51}(6)=a_4+a_5+a_6, \tau_{51}(7)=a_4+a_5+a_6+a_7, \tau_{51}(8)=0, \tau_{51}(9)=0,$$

$$\tau_{51}(10)=0.$$

$$\tau_{52}(0)=2, \tau_{52}(1)=2+a_1, \tau_{52}(2)=2+a_1+a_2, \tau_{52}(3)=2+a_1+a_2+a_3,$$

$$\tau_{52}(4)=\tau_{52}(5)=\tau_{52}(6)=\tau_{52}(7)=0, \tau_{52}(8)=a_8, \tau_{52}(9)=a_8+a_9,$$

$$\tau_{52}(10)=a_8+a_9+a_{10}.$$

Az erőművi egységek állásideje $\xi_{51}(t)$, $\xi_{52}(t)$ és $\xi_{53}(t)$ a következő ($t=0,1,2,\dots,10$):

$$\xi_{51}(t) = \min_{j:1 \in J(i,j)} \tau_{5,j}(t) = \begin{cases} \tau_{51}(t)=0, & t=0,1,2,3,8,9,10 \\ \tau_{52}(t)=0, & t=4,5,6,7 \end{cases} ;$$

$$\xi_{52}(t) = \min_{j:2 \in J(5,j)} \tau_{5,j}(t) = \tau_{52}(t);$$

$$\xi_{53}(t) = \min_{j:3 \in J(5,j)} \tau_{5,j}(t) = \min(\tau_{51}(t), \tau_{52}(t)) = 0.$$

Igy az erőművi egységek periódusonkénti állapotából származó költségek:

Periódus	1.egység	2. egység	3.egység
1.	0	$g_{52}(2+a_1)-g_{52}(2)$	0
2.	0	$g_{52}(2+a_1+a_2)-g_{52}(2+a_1)$	0
3.	0	$g_{52}(2+a_1+a_2+a_3)-g_{52}(2+a_1+a_2)$	0
4.	0	$g_{52}(0)$	0
5.	0	0	0
6.	0	0	0
7.	0	0	0
8.	0	$g_{52}(a_8)-g_{52}(0)$	0
9.	0	$g_{52}(a_8+a_9)-g_{52}(a_8)$	0
10.	0	$g_{52}(a_8+a_9+a_{10})-g_{52}(a_8+a_9)$	0

A periódusonként figyelembe vett állásköltségek összege:

$$g_{52}(2+a_1+a_2+a_3)-g_{52}(2)+g_{52}(0)+g_{52}(a_8+a_9+a_{10})-g_{52}(0).$$

Ez megfelel annak, hogy az erőműben a 2. erőművi egység a tervezési időszakot megelőző 2 órás állás után három perióduson át áll, $(g_{52}(2+a_1+a_2+a_3)-g_{52}(2))$, ezután bekapcsolásra kerül $(g_{52}(0))$, végül a nyolcadiktól a tizedik periódusig áll $(g_{52}(a_8+a_9+a_{10})-g_{52}(0))$.

Fentiek alapján a teljes energiarendszer állásköltsége

$$(3.8) \quad \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^{N(i)} \left[\left\{ 1 - \left(\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} \right) \left(\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t \right) \right\} g_{ik}(\xi_{ik}(t)) - \left\{ 1 - \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t \right\} g_{ik}(\xi_{ik}(t-1)) \right]$$

Ez az összeg nem tartalmazza a vizsgált időszak utolsó periódusában álló erőművi egységek állagromlás költségét. Ezt a költségrést ugyanis az újraindítás időpontjában vesszük figyelembe, újraindítás pedig itt nem következik be. Az utolsó periódusban álló erőművi egységek állagromlás költségének összege:

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^{N(i)} g_{ik}(0) \left(1 - \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^T \right)$$

a következő tervezési időszakban lép fel.

Az állásköltség számolásakor nem foglalkozunk azzal, hogy a tényleges állásidő leállított berendezések esetén mindig legalább négy óra. Ennek teljesüléséről a modell feltételrendszerének megfogalmazásánál gondoskodunk.

Megjegyzés:

Az erőművi egységek állásával, újraindításával kapcsolatosan fellépő költség figyelembevételének módja általánosabb, mint ami az erőművek üzemviteli gyakorlatának ismeretében szükséges. Igaz ugyan, hogy egy adott erőmű egységei sokféle módon működhetnek együtt, vagyis az erőművekben sokféle üzemmód lehetséges, s ezek megadhatók a megfelelő erőművi egységek sorzámaiból álló indexhalmazokkal (ezeket $J(i,j)$, $j=1,2,\dots,M(i)$ -vel jelöltük). Az üzemviteli gyakorlat szerint azonban egy adott tervezési időszakban az összes lehetséges üzemmódoknak csak egy része megengedett, mégpedig csak olyan része, mely sorbarendeázhető úgy, hogy a megfelelő $J(i,j)$ halmazokra

$$J(i, j_1) \supset J(i, j_2) \supset \dots \supset J(i, j_r)$$

teljesül. Ritkán, de előfordul egy ennél általánosabb eset, amikor a tervezési időszakban megengedett üzemmódok úgy rendezhetőek csak sorba, hogy a megfelelő $J(i, j)$ halmazok két fenti tulajdonságu csoportra bonthatók. Legyenek ezek

$$J(i, j_1) \supset J(i, j_2) \supset \dots \supset J(i, j_r),$$

$$J(i, l_1) \supset J(i, l_2) \supset \dots \supset J(i, l_s).$$

A két csoport általában nem független, $J(i, l_1)$ része valamely, az első csoportba tartozó indexhalmaznak, s valamely az első csoportba tartozó halmaz része $J(i, l_s)$ -nek. Ez a műszaki-technológiai feltételek szerint az a legáltalánosabb eset, amely a gyakorlatban előfordulhat.

Mindkét esetre példát adunk:

Tegyük fel, hogy valamely erőműben pl. 5 erőművi egység van. Ezek különböző lehetséges együttműködésével adódó üzemmódoknak megfelelő $J(i, j)$ halmazok legyenek a következők:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Az első esetre példa egy olyan tervezési időszak, amelyben ezek közül a következő üzemmódok működése lehetséges:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Igaz ugyanis, hogy:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \supset \{1, 2, 3, 5\} \supset \{1, 2\} \supset \{1\}.$$

A második esetre példa egy olyan tervezési időszak, amelyben a következő üzemmódok lehetségesek:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \text{ és } \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Ekkor ugyanis

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \supset \{1, 2, 3, 5\} \supset \{1, 2\} \supset \{1\}; \{1, 3, 5\} \supset \{1, 3\}$$

és

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \supset \{1, 3, 5\}; \{1, 3\} \supset \{1\}$$

teljesül.

Olyan tervezési időszak, amelyben az utóbbi példában szereplő üzemmódokon túl pl. még az $\{1, 2, 4\}$ erőművi egység indexhalmazzal jellemzett üzemmód is megengedett, műszaki okok miatt nem fordulhat elő. Lehetséges azonban egy olyan tervezési időszak, amikor az $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 4\}$, üzemmódok megengedettek. Ez ismét az első esetre szolgálna például.

Mivel ez a cikk egy adott ütemezési időszakra vonatkozó modellel foglalkozik, a leírásban szereplő $M(i)$, $i=1, 2, \dots, k$ az adott ütemezési időszakban alkalmazható üzemmódok számát jelöli és nem az összes lehetséges üzemmódot, így az állásköltség számításakor kihasználható a $J(i, j)$, $j=1, 2, \dots, M(i)$, $i=1, 2, \dots, K$ halmazok fenti tulajdonsága.

Az egyszerűsített modellben feltételezzük, hogy az üzemmódok megadásának a sorrendje olyan, hogy: $J(i, 1) \supset J(i, 2) \supset \dots \supset J(i, M(i))$.

3.2.3 Hálózati veszteségből eredő költségek

Az erőművekben termelt villamos energia a hálózaton keresztül jut el a fogyasztókhoz. A szállítás a hálózat ágainak ohmos ellenállása következtében hatásosteljesítmény-veszteséggel jár, a villamos energia egy része hővé alakul. Egy rögzített periódus véve a hálózati veszteségből eredő költség a következő alakú:

$$(3.10) \quad C^v(\underline{v}, \underline{w}) = \gamma a_t P^v(\underline{v}, \underline{w}),$$

ahol $C^v(\underline{v}, \underline{w})$ a hálózati energia-veszteség forintértéke az adott periódusra, γ 1 MWh költsége forintban, a_t a t -edik periódus hossza órában, $P^v(\underline{v}, \underline{w})$ pedig az összes hálózati hatásos-teljesítmény-veszteség MW-ban. A $P^v(\underline{v}, \underline{w})$ függvény a $\underline{v}, \underline{w}$ változók konvex kvadratikus függvénye (lásd (F4.21), (F4.30), (F.4.31)). A teljes hálózati veszteség-költség az egyes periódusok veszteség-költségeinek összege.

3.3 KORLÁTOZÓ FELTÉTELRENDSZER

A modell feltételrendszere egyrészt olyan feltételeket tartalmaz, amelyek megkövetelése a változók definíciója miatt szükséges, másrészt olyanokat, amelyek az energiarendszer működésének leírásához szükségesek. A feltételek csoportosíthatók aszerint, hogy periódusonként ismétlődően csak egy-egy periódushoz tartozó változók közötti kapcsolatot fejeznek ki, vagy több periódus változói közötti összefüggést írnak elő.

3.3.1 Periódusonként ismétlődő feltételek

Minden egyes periódusban meg kell követelnünk, hogy minden erőműben egyetlen üzemmód működjön, az üzemmód teljesítményszintje a megengedett tartományba essen és a termelt villamosenergia mennyisége az országos villamosenergia-igénynek a hálózati veszteséggel és a villamos energia termeléséhez szükséges önfogyasztással megnövelt értékével egyenlő legyen. Meg kell követelnünk azt is, hogy a villamosenergia-rendszer hálózati viszonyai minden periódusban megengedettek legyenek.

Az üzemmód változók definíciója miatt a "minden erőműben egyetlen üzemmód" követelmény a (3.1) egyenlőségek teljesülését jelenti. Ezekre a feltételekre a diszkrét programozásban elfogadott terminológiát fogjuk alkalmazni, *SOS feltételekként* hivatkozunk rájuk. (Special Ordered Set olyan 0 vagy 1 értékű változók halmaza, melyek közül egy és csak egy lehet 1 értékű.)

Természetesen az üzemmód változóknak definíciójuk miatt ezen kívül még az

$$y_{ij}^t = 0 \quad \text{vagy } 1, \quad j=1, 2, \dots, M(i), \quad i=1, 2, \dots, K$$

követelményeknek teljesülniük kell.

A teljesítmény változók definíciója szerint minden periódusban meg kell követelnünk a (3.2) egyenlőtlenségek teljesülését. Ezekre az egyenlőtlenségekre a továbbiakban *összekapcsolási feltétel* elnevezéssel hivatkozunk. Ezek ugyanis azok a feltételek, amelyek közvetlenül "összekapcsolják" az egy-egy erőmű egy-egy üzemmódjához tartozó üzemmód és teljesítmény változót.

Az "energiaigény kielégítés" követelményét tartalmazó feltétel - (minden periódushoz egyetlen ilyen szükséges) - neve *ellátási feltétel*. A teljesítmény és üzemmód változók felhasználásával a villamosenergia-rendszer t -edik periódusbeli termelésének a szintje a

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} (P_{ij}^{min} y_{ij}^t + p_{ij}^t)$$

összeggel adható meg. Minden erőmű minden üzemmódjához ismert egy ún. önfogyasztás függvény, amely az üzemmód teljesítményszintjének függvényében megadja az erőmű üzemeltetéséhez szükséges villamos energia mennyiségét. Jelölje $P_{ij}^{önf}$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódjához tartozó önfogyasztás függvényt. Az i -edik erőmű önfogyasztása a t -edik periódusban:

$$(3.12) \quad \sum_{j=1}^{M(i)} P_{ij}^{önf} (P_{ij}^{min} y_{ij}^t + p_{ij}^t),$$

és a teljes villamoserőmű-rendszer t -edik periódusbeli önfogyasztása

$$(3.13) \quad P^t \text{ önf} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} P_{ij}^{önf} (P_{ij}^{min} y_{ij}^t + p_{ij}^t).$$

Jelölje $P^t \text{ igény}$ a t -edik periódusbeli villamosenergia-igény ér-

tékét és P^t vesztt a t -edik periódusbeli hálózati veszteséget.

Az ellátási feltétel a következő:

$$(3.14) \quad \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} (P_{ij}^{min} y_{ij}^t + P_{ij}^t) = P^t igény + P^t vesztt + P^t önf.$$

Megjegyezzük, hogy a P^t vesztt és a P^t önf értékek nemlineárisan függenek a \underline{p}^t és \underline{y}^t változóktól, míg P^t igény konstans érték, az igénygörbe adata. A veszteség és az önfogyasztás számításának módját itt nem részletezzük. A 4. fejezetben egyszerűsítő feltevéseket teszünk ezekre vonatkozóan is.

A villamosenergia-rendszer hálózati viszonyait leíró feltételek a következők (ezek leírásában a periódust azonosító felső indexet elhagyjuk).

Az átviteli hálózattal kapcsolatos feltételrendszer felépítését a csomóponti teljesítmény-betáplálásokat a csomóponti feszültségekkel összekötő (F3.43) összefüggésekből kiindulva kezdjük el, amelyeket itt a tárgyalás könnyítése céljából reprodukálunk:

$$(3.15) \quad \left. \begin{aligned} f_i(\underline{v}, \underline{w}) &= P_i \\ g_i(\underline{v}, \underline{w}) &= Q_i \end{aligned} \right\} i=1, \dots, N.$$

Jelölje a továbbiakban I_E azon csomópontok sorszámainak halmazát, amelyekhez erőmű csatlakozik, I_E elemszámát jelöljük N_E -val.

Jelöljük továbbá I_M -mel azon csomópontok sorszámainak halmazát, amelyekhez a villamosenergia-rendszer olyan berendezése csatlakozik, amelynek a meddőteljesítmény-betáplálása illetve fogyasztása az adott periódusban nem előírt értékű, megadott korlátok között mozoghat. Ezeket a továbbiakban meddőforrás-csomópontoknak fogjuk nevezni. (Részletesebben lásd F3 rész). Az I_M

halmaz elemszámát jelölje N_M . Az I_E és I_M indexhalmazokat az elemeket alkotó sorszámok növekvő sorrendje szerint rendezettnek tekintjük.

A (3.15) egyenlőségekben szereplő P_i hatásos teljesítményt a következőképpen felbontva kezeljük:

$$(3.16) \quad P_i = P_i^G - P_i^F, \quad i=1, \dots, N,$$

ahol a G felső index generált (betáplált) teljesítményt, az F pedig fogyasztást jelent. A P_i^F , $i=1, \dots, N$ mennyiségek a csomópontként megadott fogyasztás-értékek (teljesítményigények), és nyilvánvalóan teljesül a $P_i^G = 0$, $i \notin I_E$ reláció.

Jelölje \hat{p}^G a \underline{p}^G vektor $i \in I_E$ komponenseiből alkotott N_E dimenziós vektort. A (3.15) egyenlőségeknek a modellbe feltételként való beépítéséhez elegendő a \hat{p}^G vektort a modellnek az erre a periódusra vonatkozó teljesítmény ill. üzemmód változóiból alkotott \underline{p} és \underline{y} vektorokkal kifejezni. Jelöljük n -nel \underline{p} (és ezzel együtt \underline{y}) dimenzióját.

Az üzemmódonként ténylegesen termelt teljesítmény (jelölje $\hat{p} \in R^n$) ekkor a következőképpen kapható meg:

$$(3.17) \quad \hat{p} = \underline{p} + \text{diag}(\underline{p}^{min}) \underline{y}$$

ahol $\text{diag}(\underline{p}^{min})$ olyan diagonális mátrix, melynek diagonális elemei a \underline{p}^{min} komponensei, \underline{p}^{min} erőműenként és üzemmódonként a minimális teljesítményszintek vektora.

Az egyes csomópontokhoz tartozó hatásosteljesítmény-be-táplálás ezek után egyszerűen úgy kapható meg, hogy az illető csomópont-hoz csatlakozó erőművek üzemmódjaira a ténylegesen termelt teljesítményeket összeadjuk, azaz \hat{p} megfelelő indexű komponenseit összeadjuk. Mindez a következő lineáris transzformáció végrehajtását jelenti:

$$(3.18) \quad \hat{\underline{p}}^G = H \hat{\underline{p}} \quad .$$

Itt H ($N_E \times n$) méretű összegező mátrix, i -edik sorában az i -edik erőművi csomóponthoz csatlakozó erőmű üzemmódjainak megfelelő pozíciókban 1 áll, a sorban a többi elem 0; $i=1, \dots, N_E$.

Jelöljük a (3.17), (3.18) által definiált lineáris transzformáció mátrixát D -vel, ennek mérete $N_E \times (2n)$ lesz. Legyen továbbá $D^T = (\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_L)$. Így adódott az alábbi összefüggés:

$$(3.19) \quad \hat{\underline{p}}^G = D \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{y} \end{pmatrix}.$$

Ha $i \in I_E$, jelölje $E(i)$ az i index sorszámát az I_E sorba rendezett halmazon belül.

Mielőtt a (3.15) feltételrendszernek a modellhez csatolandó végleges alakját megadnánk, még egy megjegyzést teszünk. A (3.15) egyenlőségekben a Q_i mennyiségek $i \in I_M$ esetén változóként kezelendők. (Lásd Függelék, F3 rész.) Mivel azonban a reaktív teljesítményre vonatkozó feltételekben ezek explicitálva vannak, ezért az $i \in I_M$ sorszámú feltételek elhagyhatók a reaktív teljesítményre vonatkozó részből.

Ezek után a $\underline{p}, \underline{y}$ változókat a csomóponti feszültségekkel összekötő feltételrendszer a következő alakot ölti:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \underline{d}_{E(i)}^T \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{y} \end{pmatrix} - f_i(\underline{v}, \underline{w}) &= P_i^F, & i \in I_E \\ - f_i(\underline{v}, \underline{w}) &= P_i^F, & i \notin I_E \\ - g_i(\underline{v}, \underline{w}) &= Q_i, & i \notin I_M \end{aligned}$$

ahol az $f_i(\underline{v}, \underline{w})$, $g_i(\underline{v}, \underline{w})$ függvények a $\underline{v}, \underline{w}$ változó kvadratikus függvényei (lásd (F3.41)), a feltételek jobboldalán konstans mennyiségek szerepelnek.

A hálózattal kapcsolatos feltételrendszer további részei a különböző villamos mennyiségekre vonatkozó egyenlőtlenség alakú korlátozásokat fejeznek ki, ezeket egyenként áttekintjük.

- Feszültségtartási feltételek

A villamosenergia-rendszerben valamennyi fogyasztó rögzített névleges feszültségszintre van tervezve, az ettől való túlnagy eltérés a fogyasztó tönkremenésével, vagy hibás működésével jár. A fogyasztók feszültségének a névleges szint közelében való tartásához szükség van arra, hogy a nagyfeszültségű hálózat csomópontjainak feszültsége adott intervallumba essen. Legyen a nagyfeszültségű átviteli hálózatra a feszültség abszolút értékének alsó korlátja az i -edik csomópontra vonatkozóan V_i^{min} , a felső korlát V_i^{max} , $i=1, \dots, N$.

Ekkor a feszültségtartási feltételek a következők:

$$(3.21) \quad V_i^{min} \leq (v_i^2 + w_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq V_i^{max}, \quad i=1, \dots, N.$$

- Ágterhelési feltételek

Ezek az ágak termikus terhelhetőségére vonatkoznak, a túlmelegedést korlátozzák. A hálózat minden (i, k) ágához adott egy T_{ik}^{max} érték, az ágon áramló teljesítmény abszolút értéke (látszólagos teljesítmény) biztonsági okokból ennél nem lehet nagyobb. A teljesítményáramlást a Függelék 4. részében tárgyaljuk, a látszólagos teljesítményt a modell változóival az (F4.20) egyenlőség köti össze. Az ágon létrejövő veszteséget ebben a vonatkozásban elhanyagolhatjuk, így az ágterhelési feltételek az alábbiak lesznek:

$$(3.22) \quad |S_{ik}(v_i, v_k, w_i, w_k)| \leq T_{ik}^{max},$$

az átviteli hálózat minden (i, k) ágára.

- Meddőforrás feltételek

E feltételek a meddőforrás csomópontok (esetünkben az $i \in I_M$ sorszámúak) meddőteljesítmény-kibocsátását, illetve nyelését korlátozzák. Erőműveket, ill. szinkron-kompenzátorokat tekintve arról van szó, hogy a szinkron-generátorok karakterisztikáitól függően azok meddőteljesítmény-kibocsátása (ill. nyelése) korlátozott, amiből korlátok adódnak a megfelelő csomópont meddőteljesítmény-kibocsátására, ill. nyelésére vonatkozóan. A többi meddőforrásra vonatkozóan is alsó és felső korlátok adottak a meddőteljesítmény-kibocsátásra (nyelésre). A meddőforrásokkal kapcsolatban lásd F2. rész.

Ha az i -edik csomópont meddőforrás, és a meddőteljesítmény korlátai az erőművi esetben $Q_i^{min}(\underline{y})$, $Q_i^{max}(\underline{y})$, $i \in I_M \cap I_E$, egyébként Q_i^{min} , Q_i^{max} , $i \in I_M \setminus I_E$, akkor a következő feltételek adódnak:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} Q_i^{min}(\underline{y}) \leq Q_i \leq Q_i^{max}(\underline{y}), & \quad i \in I_M \cap I_E \\ Q_i^{min} \leq Q_i \leq Q_i^{max}, & \quad i \in I_M \setminus I_E \end{aligned}$$

Mint azt már említettük, a (3.15) egyenlőségben a Q_i mennyiségek explicitált alakban szerepelnek, így behelyettesítés után adódnak a meddőforrás feltételek:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} Q_i^{min}(\underline{y}) \leq g_i(\underline{v}, \underline{w}) \leq Q_i^{max}(\underline{y}), & \quad i \in I_M \cap I_E \\ Q_i^{min} \leq g_i(\underline{v}, \underline{w}) \leq Q_i^{max}, & \quad i \in I_M \setminus I_E. \end{aligned}$$

A (3.24) egyenlőtlenségekben az erőműveknek megfelelő sorokban a jobb és baloldalakon szereplő korlátok az üzemállapot változó függvényei, ugyanis a csomóponti meddőteljesítmény-kibocsátásra vonatkozó korlátok a csomóponthoz csatlakozó erőművek üzemmódjainak meddő-kibocsátására vonatkozó korlátaiból összeadás révén keletkeznek. Jelölje \hat{Q}_i^{min} ill. \hat{Q}_i^{max} a következő vek-

torokat: dimenziójuk megegyezik \underline{y} dimenziójával, az i -edik csomóponthoz csatlakozó erőművek üzemmódjainak pozíciójában a megfelelő üzemmódra vonatkozó alsó ill. felső korlátok vannak, a többi pozícióban pedig 0. Így a fent említett összeadás megvalósítása és ezzel a meddőforrás korlátok a következők:

$$Q_i^{min}(\underline{y}) = \underline{y}^T \hat{Q}_i^{min}, \quad Q_i^{max}(\underline{y}) = \underline{y}^T \hat{Q}_i^{max},$$

$$i \in I_M \cap I_E.$$

3.3.2 Periódusokat összekapcsoló feltételek

A modell több különböző periódusának változói között az ún. *kikapcsolási feltételek* és a *tüzelőanyagkényszer feltételek* létesítenek kapcsolatot.

Jellemző, hogy a kikapcsolási feltételekben csak az üzemmód változók szerepelnek és a tüzelőanyagkényszer feltételek mindegyike egyetlen erőmű teljesítmény és üzemmód változóit tartalmazza. Olyan feltételek, amelyek több periódus feszültségi változóit tartalmazzák, nincsenek a modellben.

A *kikapcsolási feltételekben* azt a követelményt fogalmazzuk meg, hogy műszaki okok következtében a kikapcsolt egység a minimális, 4 órás állásidő eltelte előtt nem térhet vissza a termelésbe, gazdasági okokból pedig az erőművek a kikapcsolttal azonos egysége sem indíthat. Ez utóbbi ugyan műszakilag lehetséges lenne, de gazdasági szempontból nem indokolt egy egység kikapcsolása, ha például 2 óra múlva vele azonos jellegű és teljesítményű egység indítása válik szükségessé.

A kikapcsolt egységek minimálisan 4 órás állásidejét biztosító követelmény a 3.2.2 bekezdésben definiált $\xi_{ik}(t)$ állásidő segítségével úgy fogalmazható meg, hogy a

$$(3.25) \quad \xi_{ik}(t-1) \left(1 - \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} \right) \left(\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t \right)$$

szorzat értéke vagy 0 vagy legalább 4. Ennek $t=1,2,\dots,T$, $i=1,2,\dots,K$ és $k=1,2,\dots,N(i)$ -re teljesülnie kell. A feltétel ilyen megfogalmazása előnyös, mert ebben nem kell külön kezelni az előző tervezési időszak végén ill. végét megelőzően leállított egységeket.

Ugyanakkor azonban $\xi_{ik}(t)$ számítása bonyolult, s ezért célszerű ezt a követelményt ezen mennyiségek felhasználása nélkül megfogalmazni.

Vezessük be a következő jelölést. Legyen rögzített t esetén $(1 \leq t \leq T-1)$ $l(t)$ az az index, amelyre

$$t + l(t) \leq T,$$

$$a_t + a_{t+1} + \dots + a_{t+l(t)} \geq 4 \quad \text{és}$$

$$a_t + a_{t+1} + \dots + a_{t+l(t)-1} < 4.$$

Ha ilyen $l(t)$ nem található, akkor legyen $l(t)=T-t$. E szerint a definíció szerint $l(t)$ a t -edik periódussal kezdődően azon periódusok száma, amelyek együttes időtartama már eléri a 4 órát, feltéve, hogy a t -edik periódust követő 4 óra (beleértve a t -edik periódus a_t időtartamát is) még a tervezési időszakhoz tartozik. Ha ez nem teljesül, akkor $l(t)$ a tervezési időszak t -edik periódus utáni periódusainak száma. E jelölés bevezetésére azért van szükség, mert a vizsgált időszakban vannak nem egyórás periódusok is, és a követelmény úgy szól, hogy a kikapcsolt egységeknek legalább 4 órán át kell állnia.

A "minimálisan 4 órás állásidő" követelmény így azt írja elő, hogy minden $i=1,2,\dots,K$ és $k=1,2,\dots,N(i)$, valamint $t=1,2,\dots,T-1$ értékre

$$\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 0$$

teljesülésekor

$$\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t+l} = 0 \quad \text{legyen, } l=1,2,\dots,l(t)$$

esetén.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek biztosítására alkalmas a következő egyenlőtlenség-rendszer:

$$(3.26) \quad \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t-1} - \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t + \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^{t+l} \leq 1,$$

$$t = 1, 2, \dots, T-1,$$

$$l = 1, 2, \dots, l(t),$$

$$i = 1, 2, \dots, K,$$

$$k = 1, 2, \dots, N(i).$$

Ezek a feltételek azt írják elő, hogy ha valamely erőművi egység kikapcsolásra került a tervezési időszak egy periódusában, akkor ne kerüljön bekapcsolásra az azt követő 4 órán belül. Fel kell írunk még azokat a feltételeket is, amelyek azt biztosítják, hogy a tervezési időszakot megelőző 4 órán belül kikapcsolt erőművi egység bekapcsolása is csak a szükséges 4 óra állásidő után következhesse be. A kikapcsolási feltételek közül ezeket *első indítási feltételeknek* nevezzük.

Megfogalmazásukhoz legyen l_{ik} értéke a tervidőszak kezdetén az i -edik erőmű k erőművi egységénél szükséges továbbállási periódusok száma, azaz $\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^0 = 0$ és $\xi_{ik}(0) < 4$ esetén l_{ik} annak a periódusnak a sorszáma, amelyre

$$\xi_{ik}(0) + a_1 + \dots + a_{l_{ik}} \geq 4$$

és

$$\xi_{ik}(0) + a_1 + \dots + a_{l_{ik}-1} < 4$$

egyébként pedig $l_{ik} = 0$.

Minden erőmű minden egységére a tervezési időszak első l_{ik} periódusában meg kell követelnünk, hogy

$$\sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^t = 0$$

legyen. Így az első indítási feltételek a következők:

$$(3.27) \quad \sum_{j:k \in J(i,j)} y_{ij}^l = 0, \quad i=1,2,\dots,K, \quad l=1,2,\dots,l_{ik}, \\ k=1,2,\dots,N(i).$$

Emlékeztetjük az olvasót arra, hogy a 3.1.1 bekezdésben szereplő megjegyzés szerint az üzemmód változókra egyéb, egyedi korlátozás is szükséges lehet. Ezen kívül előfordulhat még az is, hogy bizonyos okok miatt egy-egy erőműben bizonyos üzemmódok nem alkalmazhatók közvetlenül egymás után. E kérdéssel azonban itt most nem foglalkozunk.

A 6. ábrán a kikapcsolási feltételek szerkezetét tekintjük át, mátrixos sémával. (Az első indítási feltételek ábrázolásától eltekintünk.) Az ábrán egység-blokkal jelölt, valójában összegező blokkok szerkezetét a 7. ábrán külön is bemutatjuk.

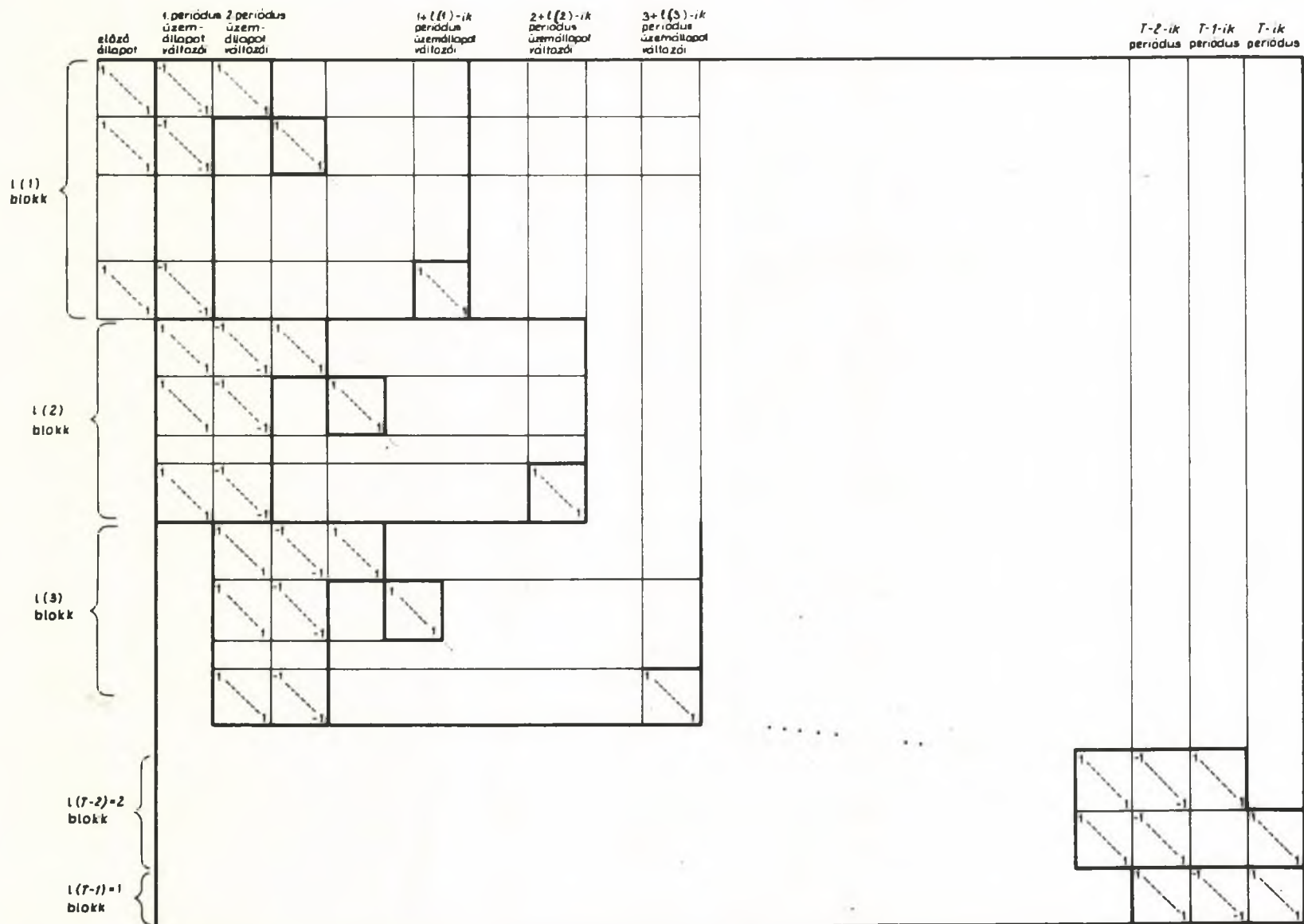
Több periódus változói közötti kapcsolatot irnak elő a *tüzelőanyagkényszer feltételek* is.

A 2.2.2 bekezdésben leírtak szerint a villamosenergia-rendszer zavartalan működéséhez szükséges lehet, hogy valamely erőmű vagy erőművek energiahordozó-felhasználását korlátozzuk. A korlátozás lehet az energiahordozó mennyiségére vonatkozó alsó korlát vagy felső korlát, esetleg alsó és felső korlát vagy egyenlőség követelmény.

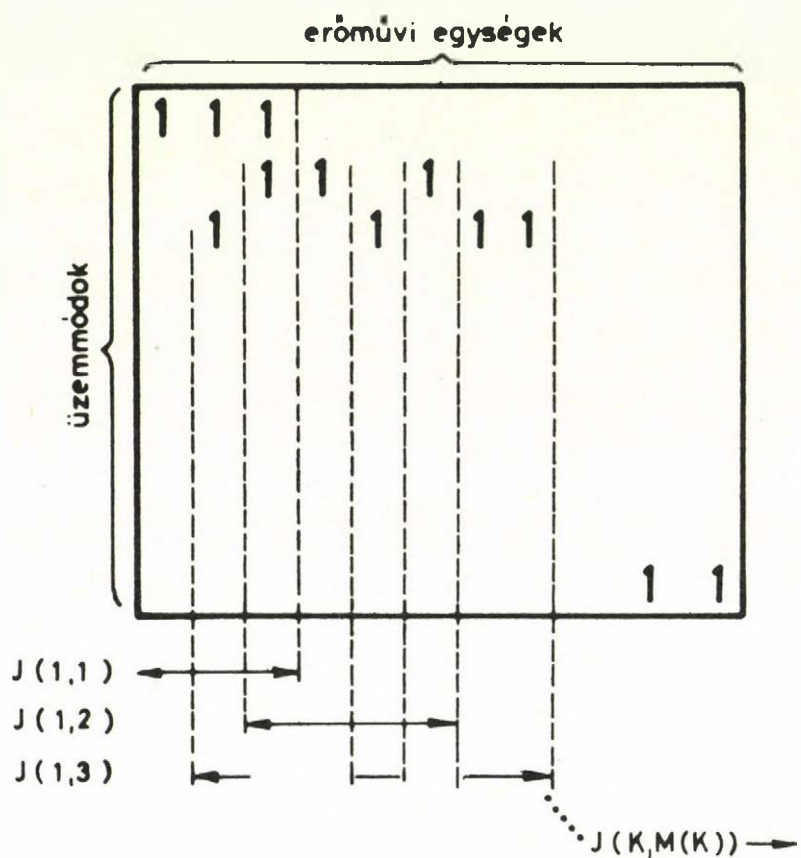
Az erőművek tervezési időszak alatti energiahordozó-felhasználásának korlátozása a modellben a tüzelőanyagkényszer feltételekkel történik. Azokat az erőműveket, amelyekre ilyen korlátozás szükséges, tüzelőanyagkényszeres erőműveknek nevezzük.

Legyen i egy tüzelőanyagkényszeres erőmű indexe. Az i -edik erőmű tervezési időszak alatti teljes termelése a következő összeggel adható meg:

$$(3.28) \quad \sum_{t=1}^T a_t \sum_{j=1}^{M(i)} (P_{ij}^{min} y_{ij}^t + p_{ij}^t).$$



6. ábra. A kikapcsolási feltételek áttekintése, mátrixos sémával.



7. ábra.

A kikapcsolási feltételek összegző-blokkjának szerkezete

A termelt villamos energia mennyisége közvetlen kapcsolatban van a felhasznált energiahordozó mennyiségével. Így az energiahordozóra megadott korlátozás könnyen átszámítható a termelendő energia mennyiségére vonatkozó korlátozásra. A tüzelőanyagkényszer feltételek alakja:

$$(3.29) \quad R_{i \min} \leq \sum_{t=1}^T a_t \sum_{j=1}^{M(i)} (P_{ij}^{\min} y_{ij}^t + p_{ij}^t) \leq R_{i \max}$$

ahol $R_{i \min}$, $R_{i \max}$ a termelendő energiamennyiség alsó ill. felső korlátai.

Megjegyezzük, hogy itt a tervezési időszak - $(\sum_{t=1}^T a_t \text{ óra})$ -

alatt termelt villamos energiára adott korlátozás szerepel, ugyanakkor a gyakorlatban a 24 órás tüzelőanyagfelhasználást szokás korlátozni. Abban az esetben, ha az $R_{i \min}$, $R_{i \max}$ értékek 24 órára vonatkozó korlátok, a termelt villamos energia mennyiségét csak a kijelölt 24 órának megfelelő periódusokra kell összegezni.

3.4 A MODELL SZERKEZETÉNEK ÁTTEKINTÉSE, MÉRETE, JELLEMZŐI

Az általános modell ismertetésének befejezéseként ebben a bekezdésben röviden áttekintjük a modellnek megfelelő vegyes-változós, nemlineáris programozási feladat szerkezetét, összefoglaljuk jellemzőit.

A modell változói az y üzemmód, p teljesítmény és a v, w feszültségi változók. Az üzemmód változó komponensek 0 vagy 1 értéket vehetnek csak fel, a teljesítmény változók nemnegatívak. A minimalizálandó célfüggvény (3.4) termelési-költség része szeparábilis, nemlineáris függvénye az üzemmód és teljesítmény változó komponenseiből alkotott $P_{ij}^{\min} y_{ij}^t + p_{ij}^t$ változóknak. A (3.8) állásköltség az egy-egy erőmű egy-egy üzemmódjához tartozó y_{ij}^t , $t=1, 2, \dots, T$ komponensek nemlineáris függvényeinek az

összege. A (3.10) veszteségeköltség a $\underline{v}^t, \underline{w}^t$ változók konvex kvadratikus függvénye, periódusonként.

A korlátozó feltételrendszer struktúrált. Minden periódus-hoz vannak csak az adott periódus változóit tartalmazó feltételek. Így az egyes periódusok üzemmód változójának komponenseire a (3.1) SOS feltételeknek kell teljesülniük, \underline{y}^t és \underline{p}^t között teremtenek kapcsolatot a (3.2) összekapcsolási feltételek. A (3.14) ellátási feltételben a

$\sum_{j=1}^{M(i)} (P_{ij}^{min} y_{ij}^t + p_{ij}^t)$ nemlineáris függvénye és a szintén nemlineáris hálózati veszteség szerepel, amely a $\underline{v}^t, \underline{w}^t$ változók függvénye.

A (3.21), (3.22), (3.24) hálózati viszonyokat leíró feltételek szintén nemlineárisak, a (3.26), (3.27) kikapcsolási feltételek több periódus üzemmód változóit tartalmazzák, felépítésük a 6. ábrán látható. Egy-egy tüzelőanyagkényszerfeltétel / (3.29) / szintén több periódus változóit tartalmazza, de csak egyetlen erőműhöz tartozó üzemmód és teljesítmény változók lineáris függvénye.

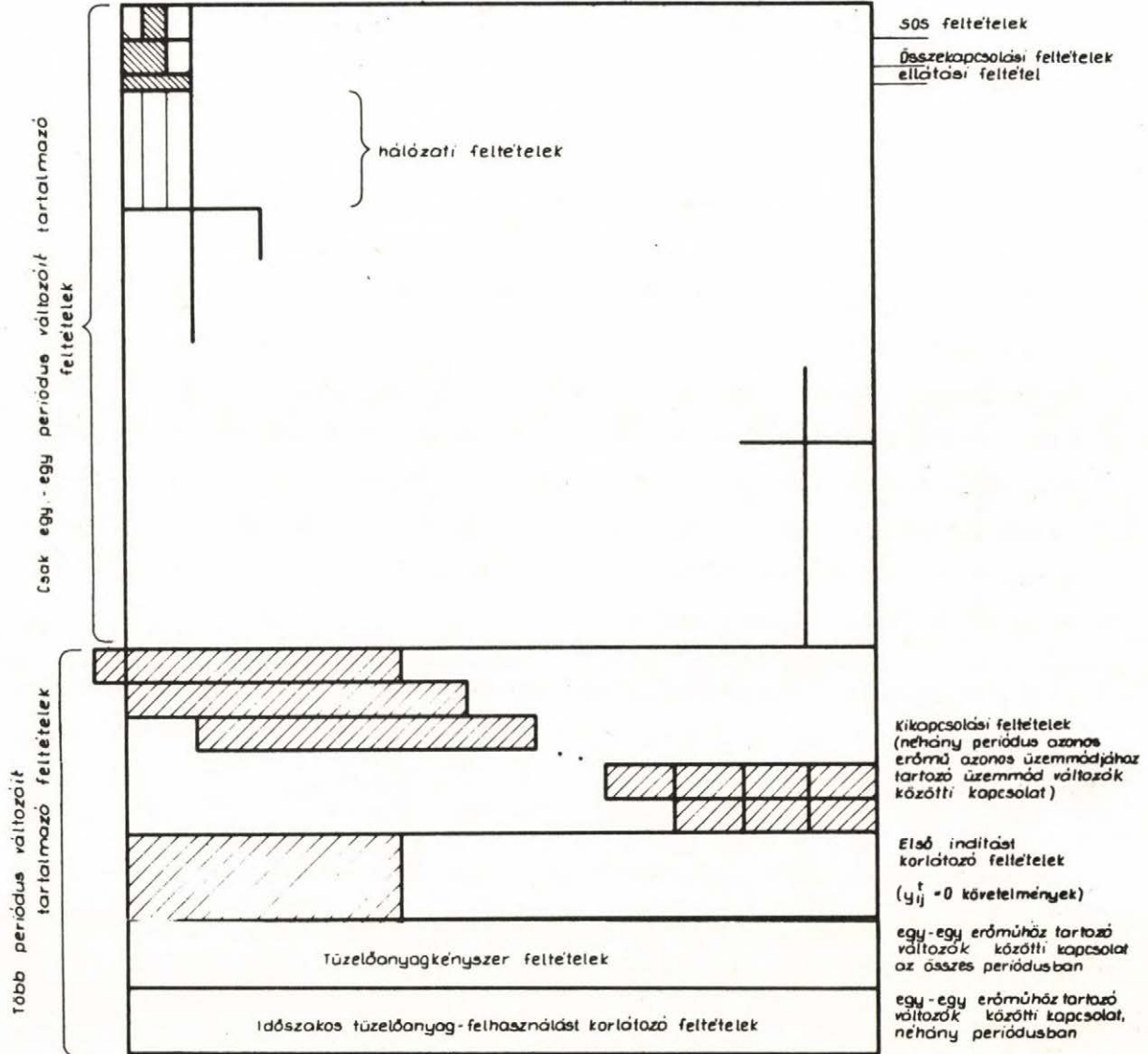
A 8. ábrán a modell vázlatos rajza látható, a változók felsorolásánál egymás után szerepelnek egy adott periódus teljesítmény, üzemmód és feszültségi változói.

Az általános modellnek megfelelő vegyesváltozós, nemlineáris programozási feladat mérete:

Változóinak száma:

1. 0-1 értékű változóinak száma = T szorozva az energiatermelő rendszerben alkalmazható üzemmódok számával, azaz

$$T \sum_{i=1}^K M(i)$$



8. ábra. Az általános modell strukturája

2. teljesítmény változók száma $=T$ szorozva az energiatermelő rendszerben alkalmazható üzemmódok számával,

$$T \sum_{i=1}^K M(i)$$

3. folytonos, feszültségi változóinak száma $=T$ szorozva a hálózat csomópontjainak számával,

$$T N$$

Feltételeinek száma:

1. Periódusonként ismétlődően: az erőművek számával megegyező számú SOS feltétel, az energiatermelő rendszerben alkalmazható üzemmódok számával azonos számú összekapcsolási feltétel, 1 ellátási feltétel és a hálózat csomópontjainak kétszerese-számú feszültségtartási, az ágak számának kétszerese-számú ágterhelési feltétel, a meddő csomópontok számával azonos számú meddőforrás feltétel, ezen kívül a hálózatszámítási feladat feltételei.
2. A periódusokat összekapcsoló kikapcsolási feltételek száma az erőműrendszer erőművi egységei számának kb. 4 T -szerese, ezen kívül van még maximum 5 tüzelőanyagkényszer feltétel.

Megemlítjük még, hogy ha e feladat megoldására *leszámlálási jellegű stratégiát alkalmaznánk*, - azaz a feladatot rögzített üzemmód változó értékek mellett oldanánk meg, akkor az így egy-egy lépésben megoldandó feladat mérete a következő lenne:

Változóinak száma: $T(K+N)$.

Feltételeinek száma:

1. Periódusonként ismétlődően: az erőművek számával azonos számú alsó-felső korlát a teljesítmény változókra. (ezek felelnek meg az összekapcsolási feltételeknek), 1 ellátási feltétel és a korábbihoz képest változatlan számú hálózati feltétel.

2. A periódusok összekapcsolására ebben a feladatban a tüzelőanyagkényszer feltételek szolgálnának, számuk maximum 5.

Ha a tüzelőanyagkényszer feltétel nem szerepel egy konkrét tervezési időszakra vonatkozóan, akkor ez a feladat szétesik T független feladatra (hiszen az üzemmód változók rögzítettek!). Ezek mindegyike az erőművek számával azonos számú teljesítményváltozót és a hálózat csomópontjainak kétszerese számú feszültségi változót tartalmaz. Célfüggvénye a teljesítmény változók konvex, szeparábilis, nemlineáris függvénye. A feltételek között is vannak nemlineárisak, például a hálózati viszonyokat leíró feltételek kvadratikusak, de nem biztos, hogy konvexek.

3.5 A 3. FEJEZETBEN ALKALMAZOTT JELÖLÉSEK ÖSSZEFOGLALÁSA

T	a tervezési időszak periódusainak száma,
a_t	a t -edik periódus időtartama, órában,
K	erőművek száma,
$M(k)$	$k=1,2,\dots,K$ az egyes erőművekben a tervezési időszakban alkalmazható üzemmódok száma,
i,j	indexpár az i -edik erőmű j -edik üzemmódjára utal, $i=1,2,\dots,K$, $j=1,2,\dots,M(k)$,
$\underline{y}^t, y_{\ell}^t, y_{ij}^t$	a t -edik periódushoz tartozó üzemmód változóvektor és komponensei,
\underline{y}	a modell üzemmód változó vektora (\underline{y}^t vektorok egymásután fűzésével adódik),
\underline{y}^0	a vizsgált időszakot megelőző legutolsó periódus üzemmód változó vektorának értéke,
$\underline{p}^t, p_{\ell}^t, p_{ij}^t$	a t -edik periódushoz tartozó teljesítmény változó és komponensei,
\underline{p}	a modell teljesítmény változó vektora (a \underline{p}^t vektorok egymásután fűzésével keletkezik),
$p_{ij}^{min}, p_{ij}^{max}$	az i -edik erőmű j -edik üzemmódja teljesítményszintjének alsó és felső korlátja,
$\underline{v}^t, \underline{w}^t$	a t -edik periódusban a csomópontok komplex potenciáljának valós illetve képzetes részéből alkotott vektorok,

- $f_{ij}(P)$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának termelési költségét a teljesítmény függvényében megadó függvény,
- $K_{ij} = f_{ij}(P_{ij}^{min})$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának működésekor a minimális teljesítmény kibocsájtásának költsége,
- $k_{ij}(P) = f_{ij}(P_{ij}^{min} + P) - f_{ij}(P_{ij}^{min})$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának működésekor a minimális szint feletti P teljesítmény többlet termelési költsége,
- $N(i)$ az i -edik erőmű egységeinek száma,
- $J(i, j)$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának üzemelésekor működő egységek sorszámainak halmaza,
- $g_{ik}(\tau)$ az i -edik erőmű k -edik egységének állásköltsége a τ állásidő függvényében,
- $G_{ik}(\infty), G_{ik}(0), c_{ik}$ az állásköltség függvényében szereplő konstansok,
- $\tau_{ij}(t)$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódja folytatólagos állásának ideje a t -edik periódusig bezárólag,
- $\tau_{ij}(0)$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának a tervezési időszakot megelőző folytatólagos állásideje,
- $\xi_{ik}(t)$ az i -edik erőmű k -edik egysége folytatólagos állásának ideje a t -edik periódusig bezárólag,
- $\xi_{ik}(0)$ az i -edik erőmű k -edik egységének a tervezési időszakot megelőző folytatólagos állásideje,
- $P_{ij}^{\text{önf}}(P)$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódja működésekor P szintű termelés esetén fellépő önfogyasztás,
- $p^t \text{ vesz}$ a t -edik periódusban fellépő hálózati veszteség ($\underline{w}^t, \underline{w}^t$ függvénye),
- $p^t \text{ önf}$ az erőműrendszer teljes önfogyasztása a t -edik periódusban (\underline{y}^t és \underline{p}^t függvénye)
- $p^t \text{ igény}$ a t -edik periódusban fellépő teljesítményigény, az igénygörbe t -edik periódushoz tartozó értéke (MW),

- $l(t)$ a t -edik periódust követő azon periódusok száma, amelyek együttes időtartama - beleértve a t -edik periódus időtartamát is - már eléri a 4 órát, illetve a t -edik periódust követő periódusok száma a tervezési időszakban,
- l_{ik} az i -edik erőmű k -adik egysége csak a tervezési időszak első l_{ik} periódusának eltelte után kapcsolható be először,
- R_i^{min}, R_i^{max} tüzelőanyagkényszeres erőmű esetén a tüzelőanyagkényszernek megfelelő termelési korlátok,
- N a hálózat csomópontjainak száma,
- M a hálózat ágainak száma,
- I_E az erőművi csomópontok sorszámaiból alkotott indexhalmaz,
- N_E az I_E elemszáma,
- I_M a meddőforrás csomópontok sorszámainak halmaza,
- N_M az I_M elemszáma,
- P_i a hálózat i -edik csomópontjára a hatásosteljesítmény-betáplálás és fogyasztás különbsége, $i=1, \dots, N$,
- Q_i a hálózat i -edik csomópontján a meddőteljesítmény-betáplálás és fogyasztás különbsége, $i=1, \dots, N$.
- P_i^G a hálózat i -edik csomópontján a hatásosteljesítmény-betáplálás, $i=1, \dots, N$,
- P_i^F a hálózat i -edik csomópontjára a hatásosteljesítmény-fogyasztás, $i=1, \dots, N$,
- \hat{P}_I^G a \underline{P}^G vektor $i \in I_E$ komponenseiből alkotott N_E -dimenziós vektor,
- D a teljesítmény és üzemállapot változók, valamint a csomóponti generált teljesítmények közötti lineáris transzformáció mátrixa,
- \underline{P}^{min} komponensei erőművenként és üzemmódonként a minimális teljesítményszintek,
- v_i az i -edik csomópont feszültségének valós része,

- w_i az i -edik csomópont feszültségének képzetes része,
- v_i^{min} az i -edik csomópont feszültsége abszolút értékének alsó korlátja,
- v_i^{max} az i -edik csomópont feszültsége abszolút értékének felső korlátja,
- $Q_i^{min}(y)$ a meddő teljesítmény alsó korlátja, $i \in I_M \cap I_E$,
- $Q_i^{max}(y)$ a meddő teljesítmény felső korlátja, $i \in I_M \cap I_E$,
- Q_i^{min} a meddő teljesítmény alsó korlátja, $i \in I_M \setminus I_E$,
- Q_i^{max} a meddő teljesítmény felső korlátja, $i \in I_M \setminus I_E$,
- T_{ik}^{max} a látszólagos teljesítmény felső korlátja az (i, k) ágra vonatkozóan (termikus terhelhetőség),
- $f_i(\underline{v}, \underline{w})$ az i -edik csomópontához tartozó hatásos teljesítménynek a hálózati feszültségeloszlástól való függését leíró függvény,
- $g_i(\underline{v}, \underline{w})$ az i -edik csomópontához tartozó reaktív teljesítménynek a hálózati feszültségeloszlástól való függését leíró függvény,
- $S_{ik}(v_i, v_k, w_i, w_k)$ a hálózat i -edik csomópontjáról az (i, k) ágra áramló teljesítmény,
- $P^v(\underline{v}, \underline{w})$ a hatásos teljesítmény veszteség, mint a feszültségeloszlás függvénye.

4. A MODELLT EGYSZERÜSÍTŐ FELTEVÉSEK

Az ütemezési feladat 3. fejezetben ismertetett általános modelljének megfogalmazásakor elsősorban az volt a célunk, hogy egy - a problémát a lehető legjobban leíró - modellt hozunk létre, függetlenül attól, hogy az ennek megfelelő matematikai programozási feladat megoldására van-e esélyünk. A modell 3.4 bekezdésében szereplő áttekintése alapján a megfelelő feladat nagyméretű, vegyesváltozós célfüggvényében és feltételeiben is nemlinearitást tartalmazó feladat. Megoldására nincs mód.

Szükségessé látszik, hogy megkíséreljük a modellben szereplő változók és feltételek számának csökkentését, a nemlinearitások kiküszöbölését úgy, hogy az így létrejövő modell az ütemezési problémák még jó modellje, a megfelelő feladat pedig már kezelhető feladat legyen.

Ebben a fejezetben ismertetjük azokat az egyszerűsítő feltevéseket, amelyek figyelembevételével az általános modell egyszerűsíthető a fenti értelemben.

Az ütemezési probléma modellezésekor ezeknek a feltevéseknek a figyelembevétele *célszerű*, hiszen az így létrejövő modellnek megfelelő matematikai programozási feladat megoldására lehetséges.

Feltételezésük ugyanakkor *megalapozott*, hiszen a gyakorlatban már bevált üzemviteli technológia jellegzetességeit vagy matematikai jellegű közelítéseket tartalmaznak. Használunk pusztán jelöléstechnikai jellegű egyszerűsítő feltevéseket is.

Az 5. fejezet az egyszerűsített modell leírását tartalmazza, a figyelembe vett tervezési időszak 25 órás időtartamú, $T=27$ periódust tartalmaz, $a_t=1.0$ vagy 0.5 , $t=1,2,\dots,27$.

4.1 AZ IGÉNYGÖRBE JELLEGZETES ALAKJÁN ALAPULÓ EGYSZERÜSÍTŐ FELTEVÉS

Az országos villamosenergia-igény napi alakulását megadó igénygörbe jellegzetes tulajdonsága, hogy két-két maximális igényérték között egymást követően néhány olyan periódus található, amelyben az igény értéke monoton csökken, majd néhány periódus, amelyben egy minimális érték körül kismértékben ingadozik és végül olyan periódusok következnek, amelyekben az igény monoton nő.

Ésszerűnek tűnik az a követelmény, hogy olyan periódusokban, amelyekben az igény értéke monoton csökken, ne engedjünk meg az erőművekben olyan üzemmódváltást, amely az erőművi egység(ek) bekapcsolását, azaz felfűtését igényli, hanem csak olyat, amely erőművi egység(ek) kikapcsolása által valósul meg.

Olyan periódusokban, amelyekben az igény monoton növekszik, a lehetséges üzemmódváltást korlátozzuk úgy, hogy csak a már működő üzemmódból bekapcsolással megvalósítható üzemmódok legyenek megengedettek.

Azokban a periódusokban, amelyekben az igény csak kismértékben ingadozik, nem engedünk meg üzemmódváltást, hanem csak az alkalmazott üzemmód teljesítményszintjének megváltoztatását.

Egyszerűsítő feltételként az előzőek szerint az egynapos tervezési időszakot felbonthatjuk hat egymást követő ún. szakaszra (egymást követő periódusok együttes elnevezése).

Az első és a negyedik szakaszt az jellemzi, hogy az igény monoton csökken. A harmadik és hatodik szakaszt az, hogy a hozzá tartozó periódusokban az igény monoton nő. A második és ötödik szakaszhoz tartozzon 4-4 periódus, amelyekben az igényérték a minimum körül ingadozik.

Nevezzük az első és negyedik szakaszt *kikapcsolási szakasznak*, a harmadik és hatodik szakaszt *bekapcsolási szakasznak*, a második és negyedik szakaszt *stagnálási szakasznak*.

Az optimumkeresés során szoritkozunk azon menetrendek vizsgálatára, amelyek a kikapcsolási szakaszokban csak kikapcsolás által megvalósítható üzemmódváltásokat, a bekapcsolási szakaszokban csak bekapcsolás által megvalósítható üzemmódváltozásokat irnak elő, a stagnálási szakaszokban pedig nincs üzemmódváltás.

A lehetséges menetrendek halmazának ilyen korlátozása összhangban van az üzemviteli gyakorlattal, s logikusan következik az üzemmódváltás költség kihatásának ismeretéből. Ugyanakkor a modell szempontjából ez egyszerűsítő feltevés, hiszen a feltevésnek eleget tevő menetrendek automatikusan biztosítják a kikapcsolt berendezések minimálisan 4 órás állását. Így a 3.3.2 bekezdésben ismertetett kikapcsolási feltételeket elhagyhatjuk a modelltől, a feltételek száma csökkenthető.

Megjegyezzük, hogy más országokban a nálunk alkalmazott üzemviteli szabályokhoz nagy vonalakban hasonló, de apróbb részletekben a mieinktől eltérő megállapodások érvényesülnek [45].

4.2 AZ ÜZEMMÓDOK MEGADÁSÁNAK SORRENDJE

A 3.2.1 bekezdés végén található megjegyzés szerint az erőművekben egy adott tervezési időszakban alkalmazható üzemmódok az esetek többségében sorbarendeázhetők úgy, hogy a megfelelő erőművi egységek sorszámaiból alkotott $J(i, j)$, $i=1, 2, \dots, K$, $j=1, 2, \dots, M(i)$ halmazokra

$$J(i, j_1) \supset J(i, j_2) \supset \dots \supset J(i, j_{M(i)})$$

teljesüljön.

Az egyszerűsített modellt olyan tervezési időszakra fogalmazzuk meg, amelyben az üzemmódok a fenti tulajdonságúak. Feltételezzük még, hogy az üzemmódok megadásának a sorrendje olyan, hogy

$$J(i, 1) \supset J(i, 2) \supset \dots \supset J(i, M(i))$$

teljesül minden $i=1, 2, \dots, K$ esetén.

Ez a feltételezés úgy is megfogalmazható, hogy üzemmódváltásnál egy nagyobb sorszámú üzemmódra való áttérés berendezéscsoport(ok) kikapcsolásával valósítható meg.

Ezen egyszerűsítő feltevés egyrészt a 4.1 bekezdésben leírtak modellbeli megfogalmazását könnyíti, másrészt az erőművi egységek állásköltségének figyelembevételét egyszerűsíti. Ha ugyanis $J(i, 1) \supset J(i, 2) \supset \dots \supset J(i, M(i))$ teljesül, akkor azok az egységek, amelyekre $k \in J(i, l) \setminus J(i, l+1)$ teljesül, állnak azokban a periódusokban, amelyekben nem az l -edik vagy azt megelőző üzemmódok valamelyike üzemel. Itt és a továbbiakban egy üzemmóddal kapcsolatban használjuk a " j -edik üzemmódot megelőzi", ill. "a j -edik üzemmódot követi" kifejezéseket, ami alatt azt értjük, hogy az üzemmódok felsorolásában a szóbanforgó üzemmód a j -edik előtt, ill. után szerepel, azaz j -nél kisebb, ill. j -nél nagyobb a sorszáma.

Az üzemmódok és erőművi egységek állása közötti fent említett kapcsolat lehetővé teszi, hogy a továbbiakban erőművi egységek állásköltségének figyelembevétele helyett üzemmódok állásköltségét tekintsük.

Legyen $s_{ij}(\tau)$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódja állásköltségét megadó függvény. Definiáljuk az $s_{ij}(\tau)$ értékét a következő módon:

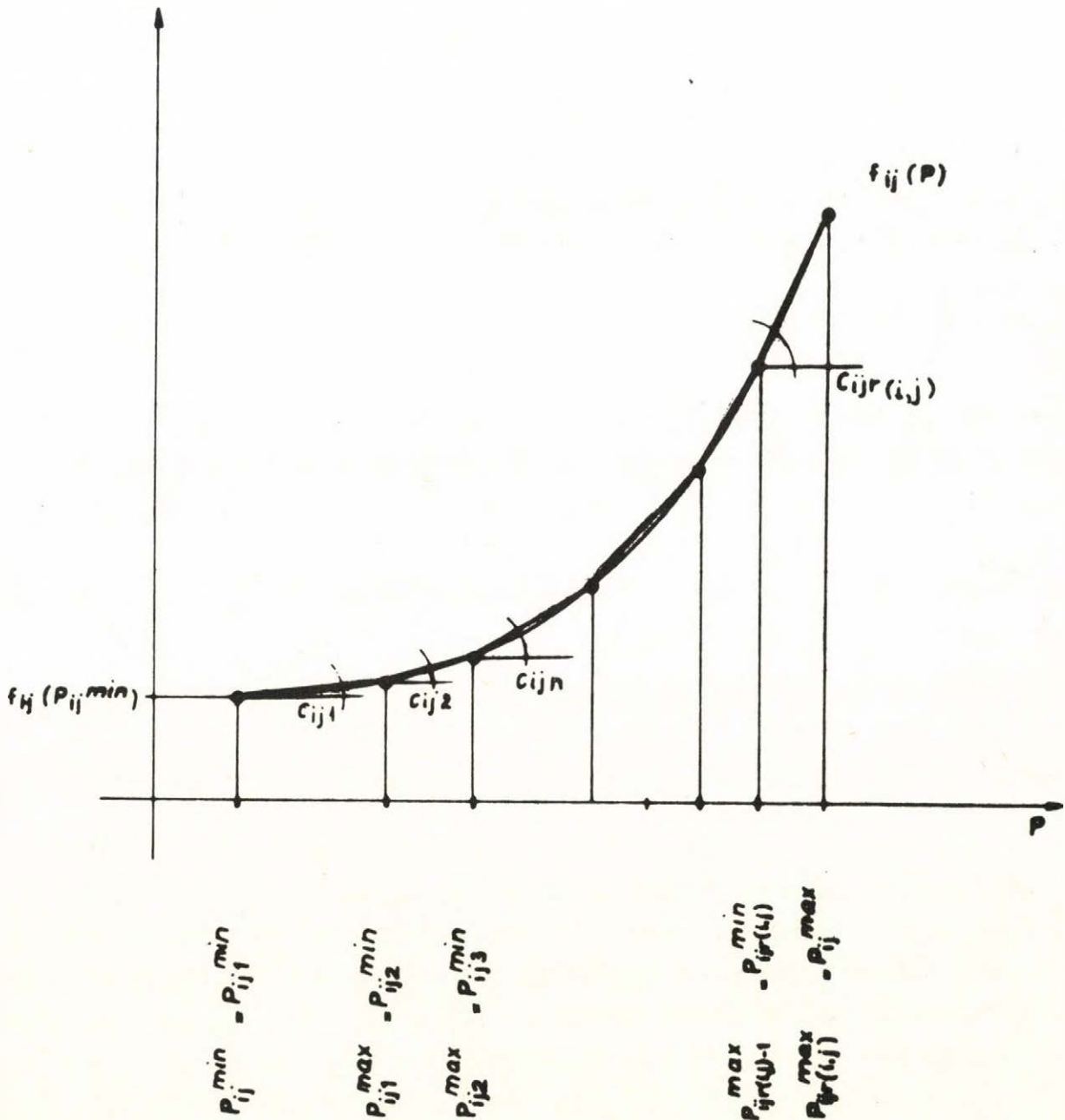
$$s_{ij}(\tau) = \sum_{k \in J(i, j) \setminus J(i, j+1)} g_{ik}(\tau) \quad , \quad i=1, 2, \dots, K, \\ j=1, 2, \dots, M(i)-1.$$

A $k \in J(i, j) \setminus J(i, j+1)$ sorszámú erőművi egységek állásköltségét azon periódusokban kell figyelembe vennünk, amelyekben a j -edik üzemmódot követő üzemmódok valamelyike működik, így a j -edik üzemmód $s_{ij}(\tau)$ állásköltségét is azokban a periódusokban kell figyelembe venni, amelyekben a j -edik üzemmódot követő üzemmódok valamelyike működik.

4.3 A TERMELÉSI KÖLTSÉG KÖZELITÉSE

A 3.2.1 bekezdés szerint az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának P szintű termeléséből származó költségrész az $f_{ij}(P)$ függvényértékkel adható meg, $i=1,2,\dots,K$, $j=1,2,\dots,M(i)$.

Egyszerűsítő feltevésként az $f_{ij}(P)$ nemlineáris költségfüggvények helyett tekintsük ezek lineáris törtfüggvénnyel való közelítését.



9. ábra. Termelési költség közelítése törtfüggvénnyel

Legyen az i -edik erőmű j -edik üzemmódjához tartozó költségfüggvény közelítő szakaszainak a száma $r(i, j)$. Jelöljük a közelítő függvény töréspontjaihoz tartozó teljesítmény értékeket a következő módon:

$$\begin{aligned}
 P_{ij}^{min} &= P_{ij1}^{min}, \\
 P_{ij1}^{max} &= P_{ij2}^{min} \\
 (4.1) \quad P_{ijr(i,j)-1}^{max} &= P_{ijr(i,j)}^{min} \\
 P_{ijr(i,j)}^{max} &= P_{ij}^{max},
 \end{aligned}$$

a közelítő szakaszok meredeksége pedig legyen c_{ijl} , $l=1, 2, \dots, r(i, j)$. Az $f_{ij}(P)$ költségfüggvények olyanok, hogy a meredekségekre teljesülnek a következő relációk:

$$(4.2) \quad c_{ij1} < c_{ij2} < \dots < c_{ijr(i,j)}.$$

Az i -edik erőmű j -edik üzemmódja P szintű termelésének költsége e közelítés esetén a következő összeggel adható meg, feltéve, hogy $P_{ijl_0}^{min} \leq P \leq P_{ijl_0}^{max}$ (azaz P az l_0 -edik szakaszhoz tartozik):

$$(4.3) \quad f_{ij}(P) \sim K_{ij} + \sum_{l=1}^{l_0-1} (P_{ijl}^{max} - P_{ijl}^{min}) c_{ijl} + (P - P_{ijl_0}^{min}) c_{ijl_0}$$

ahol $K_{ij} = f_{ij}(P_{ij}^{min})$ a 3. fejezetben bevezetett jelölés szerint.

A termelési költségfüggvény ilyen szakaszonként lineáris függvénnyel történő helyettesítése esetén a teljesítmény változók számát növelnünk kell. Az általános modell egy P_{ij}^t változója helyett az egyszerűsített modellben $r(i, j)$ számú változónk lesz (5.1.2 bekezdés).

4.4 AZ ÜZEMMÓDVÁLTÁS KÖLTSÉGÉNEK KÖZELITÉSE

Az üzemmódok átkapcsolásából, állásából származó költség-rész megadható a 3.2.2 bekezdésben ismertetett módon. Az ott végeredményként kapott formula azonban bonyolult nemlineáris függvénye az üzemmódokat jellemző 0-1 értékű változóknak.

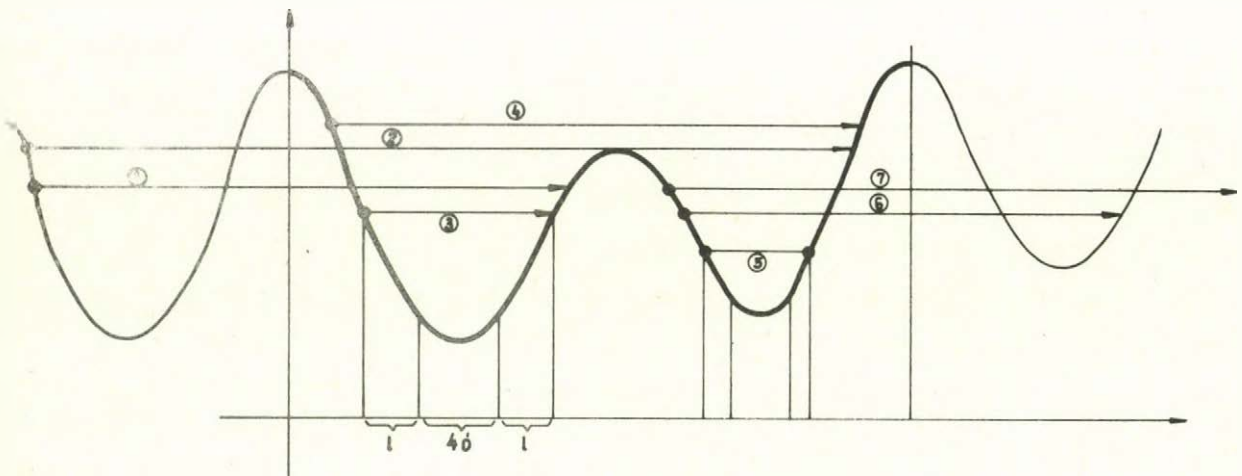
Ebben a bekezdésben megmutatjuk, milyen feltételezéssel lehet ezt a költséget az említett változók lineáris függvényével közelíteni.

A közelítéshez a következő feltevést tesszük: az erőművi egységek kikapcsolás-újraindítása szimmetrikusan történik. Ezen feltevés alatt azt értjük, hogy ha egy erőművi egység a stagnálási szakasz előtt l -periódussal került kikapcsolásra, akkor visszakapcsolása a stagnálási szakaszt követő l -edik periódus befejeződésekor történik. (Ez a feltételezés szorosan kapcsolódik a 4.1 bekezdésben elmondottakhoz, az igénygörbe jellegzetes tulajdonsága indokolja.) Feltevésünk következményeként nincsenek az egyes tervezési időszakok között ún. "átnyúló" költségek. Ha egy egység a vizsgált időszakot megelőzően kikapcsolásra került, akkor az állásából származó költség közelítő értékét a megelőző időszakban már figyelembe kellett venni. Ehhez hasonlóan, ha egy egység a vizsgált tervezési időszakban kerül kikapcsolásra, akkor ennek költsége a vizsgált időszakban vétetik figyelembe.

A szimmetrikus kikapcsolást-újraindítást csupán az állásidő költség kiszámításának leegyszerűsítésére tételezzük fel, megengedünk azonban olyan menetrendeket is, amelyekben vannak nem szimmetrikus kikapcsolás-újraindítást jelentő üzemmódok is.

Az üzemmódváltás-költség lineáris közelítő függvénye olyan, hogy ha a szimmetrikus kikapcsolás-bekapcsolás érvényesül, akkor a 3.2.2 bekezdésben szereplő költséget szolgáltatja, ettől eltérő esetben ennek közelítő értékét.

A szimmetrikus kikapcsolás-újraindítás fogalmának jobb megértésére tekintsük a 10. ábrát.



10. ábra. Szimmetrikus kikapcsolás - újraindítás esetén az ①, ②, ③, ⑤, ⑦ kikapcsolás - újraindítás nem fordulhat elő

Ezen egymáshoz csatlakozó igénygörbék és kikapcsolás-újraindítás párok találhatóak. A nyilak kezdőpontja egy egység kikapcsolását, végpontja az újraindítást jelzi.

	kikapcsolás időpontja	bekapcsolás időpontja
1	előző nap II.kikapcsolási szakasz	I.bekapcsolási szakasz
2	előző nap II.kikapcsolási szakasz	II.bekapcsolási szakasz
3	I.kikapcsolási szakasz	I.bekapcsolási szakasz
4	I.kikapcsolási szakasz	II.bekapcsolási szakasz
5	II.kikapcsolási szakasz	II.bekapcsolási szakasz
6	II.kikapcsolási szakasz	következő nap I. bekapcsolási szakasz
7	II.kikapcsolási szakasz	következő nap II. bekapcsolási szakasz

A szimmetrikus újraindítás azt jelenti, hogy ezek közül csak 3 és 5 típusú eset léphet fel, ebből pedig következik, hogy a költségnek nincs a következő napra "átnyúló" része.

Az ábrán jól látható, hogy a fetételezést az igénygörbe alakjának jellegzetessége indokolja (közelítőleg azonos igényértékek a stagnálási szakaszra "szimmetrikusan" vannak).

Az állásköltség közelítésében egy, a stagnálási szakasz előtt l_0 periódussal kikapcsolt, $4+2l_0$ állásidejű egység vagy (az üzemmódváltástól függően) egységek leállítás-újraindítási költségét a 3.2.2 bekezdéshez hasonló módon, összegként fogjuk előállítani (ez az állásidő onnan adódik, hogy a stagnálási szakasz 4 óra, és az azt megelőző és követő l_0 periódus $2l_0$ óra tartamú, és eltekintünk attól, hogy vannak fél órás periódusok is).

Definiáljuk az összegként való előállításához a d_{ij}^t mennyiségeket a következő módon (minden erőmű minden üzemmódjához és minden periódusra, kivéve a stagnálási szakaszok második, harmadik és negyedik periódusát):

$$(4.4) \quad d_{ij}^t = \begin{cases} s_{ij}^{(4+2l)} - s_{ij}^{(4+2l-1)}, & \text{ha } t \text{ a stagnálási szakaszt megelőző } l\text{-edik periódus,} \\ s_{ij}^{(4)} & \text{ha } t \text{ a stagnálási szakasz kezdete,} \\ s_{ij}^{(4+2l-1)} - s_{ij}^{(4+2l-2)} & \text{ha } t \text{ a stagnálási szakasz utáni } l\text{-edik periódus} \end{cases}$$

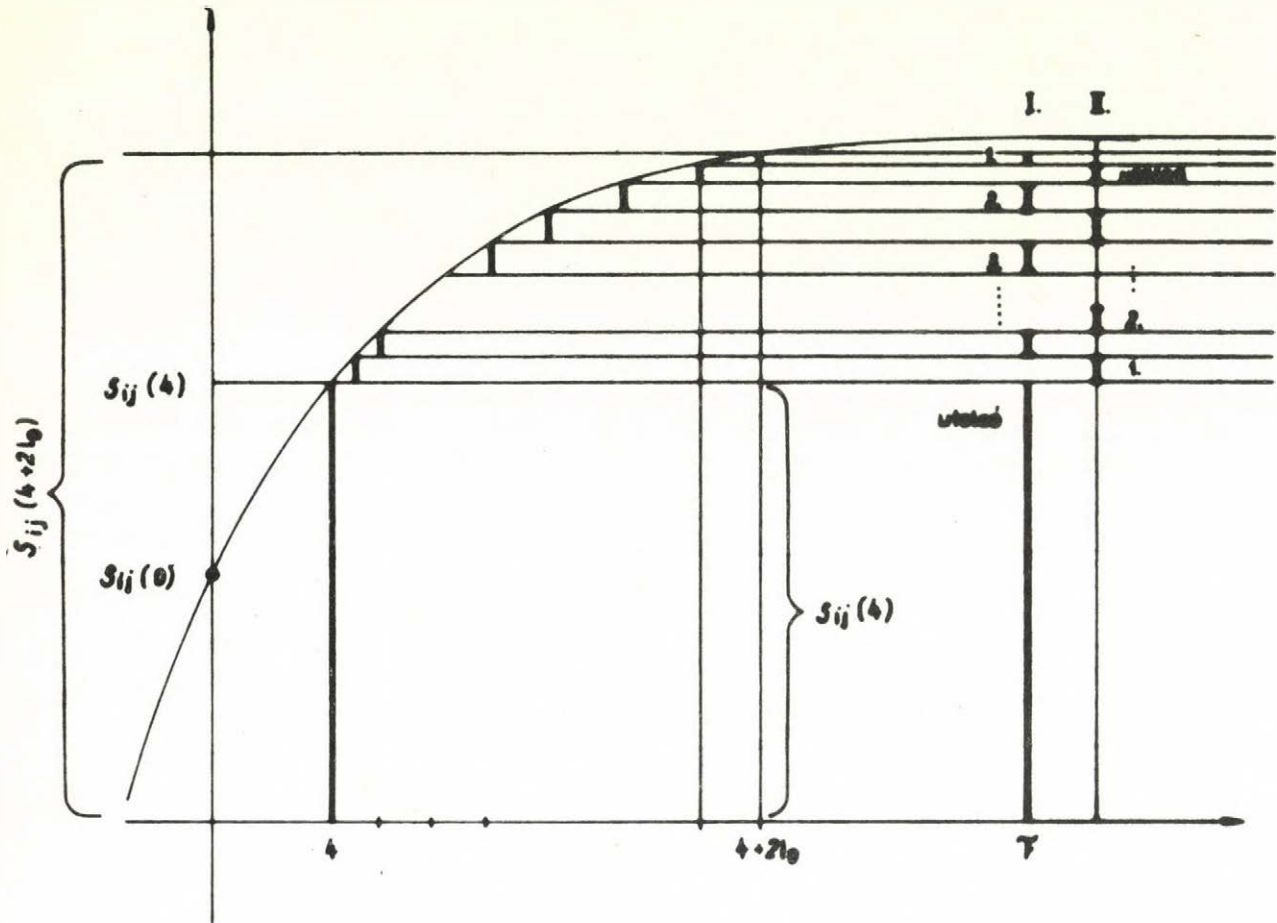
Tegyük fel, hogy az i -edik erőmű j -edik üzemmódját a t_0 kezdetű stagnálási szakasz előtt l_0 -adik periódus elején kapcsoljuk ki, és bekapcsolása szimmetrikusan történik.

Ebben az esetben:

$$(4.5) \quad \sum_{t=t_0-l_0}^{t_0} d_{ij}^t + \sum_{t=t_0+4}^{3+t_0+l_0} d_{ij}^t = s_{ij}^{(4+2l_0)}$$

azaz a d_{ij}^t mennyiségek állásidőre vett összege éppen a megfe-

lelő állásköltség. A d_{ij}^t mennyiségek összegezése ugyanúgy az állásköltség növekményeinek összegezését jelenti, mint a 3.2.2 bekezdésben szereplő összegzés. A két összegzés sorrendje azonban eltér egymástól. A 11. ábra ennek megvilágítására szolgál.



11. ábra. állásköltség előállítás a d_{ij}^t növekmények összegeként.

A jobboldalon I.-vel megjelölt növekmények az összegezés első, a II.-vel megjelölt növekmények az összegezés második részét alkotják; az arab számok a tagok sorrendjére utalnak.

Amennyiben a bekapcsolás nem szimmetrikusan történik, és az összegzést a tényleges állásidőre végezzük el, az $s_{ij}^{(4+2l_0)}$ értéktől az összegzés második tagjához tartozó részletösszeggel térünk el. Feltételezzük, hogy az így kapott állásköltség elég jól közelíti a tényleges $s_{ij}(\tau)$ költséget.

A modellben gondoskodnunk kell arról, hogy a 10. ábra jelöléseiben 1 illetve 2 típusú kikapcsolás-újraindítás miatt álló egységek állásköltsége ne terhelje a vizsgált időszakot. A 4 típusú kikapcsolás-újraindítás miatt a második kikapcsolás-stagnálás-bekapcsolás szakaszban is álló berendezésekhez a második részben már ne számoljunk állásköltséget. A 6 és 7 típusú kikapcsolás-újraindítás költségét a szimmetrikus kikapcsolás-újraindítás költség fentiekben ismertetett közelítésével adjuk meg. A 3 és 5 típusú kikapcsolás-újraindítás vagy szimmetrikus vagy annak közelítése.

4.5 MUNKAPONT BEVEZETÉSE, NÉHÁNY JELÖLÉS

A 3. fejezetben leírt modellnek az átviteli hálózatra vonatkozó részében a (3.20), (3.22), (3.24) feltételekben szereplő függvények, valamint a (3.10) célfüggvény nemlineáris függvények. Mivel lineáris modell felépítését tűzzük ki célul, ezért ezeket lineáris függvényekkel kívánjuk közelíteni. Eljárásunk az lesz, hogy rögzítünk egy munkapontot, erre vonatkozóan linearizálunk és a változókra vonatkozó korlátokkal biztosítjuk, hogy a munkapont így adódó környezetében a közelítés elegendően pontos legyen.

A munkapont természetesen az (F3.43) hálózati feltételeket kielégítő pont lesz, így meghatározása a hálózatszámítási feladat megoldását jelenti (lásd F3. rész). Ehhez meg kell adnunk a feszültségtartó csomópontok - ezek a 3.3.1 részben definiált meddőforrás csomópontok (lásd F3. rész) - feszültségeinek abszolút értékét, valamint a referenciapont feszültségét, melyek a modell szempontjából kiindulási, input adatok. Meg kell adnunk továbbá a fogyasztói csomópontokra a teljesítmény-fogyasz-

tást, az erőművi csomópontokon pedig a generált aktiv teljesítményt. Az előbbieket input adatok, az utóbbiakat pedig úgy kapjuk, hogy megoldunk egy, az illető periódusra vonatkozó optimalizálási feladatot a teljesítménygenerálásra vonatkozóan. (Részletesen lásd 5.3.1 és 6.4 bekezdéseket.)

A linearizálás részletesebb tárgyalásához szükségünk lesz néhány jelölésre. A továbbiakban a változóknál a periódus azonosítására szolgáló felső t indexet elhagyjuk. Jelöljük a munkapontot $(\underline{v}^*, \underline{w}^*)$ -gal. A 3.3.1 részben bevezetett jelöléstől eltérően $L (= N_M)$ jelöli a meddőforrás csomópontok számát. A meddőforrás csomópontok halmazát az F3. részben tárgyaltak szerint a feszültségtartó vagy (Q, V) csomópontok és a referenciapont alkotják. A többi csomópontot fogyasztói csomópontoknak nevezük, halmazukat az F3. rész szerinti (P, Q) csomópontok alkotják. A fogyasztói csomópontok számát jelölje N_F . A \underline{v} vektort a következőképp particionáljuk:

$$(4.6) \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{v}^M \\ \underline{v}^F \end{pmatrix},$$

ahol $\underline{v}^M \in \mathbb{R}^L$ a meddőforrás csomópontokhoz, $\underline{v}^F \in \mathbb{R}^{N_F}$ pedig a fogyasztói csomópontokhoz tartozik és feltételezzük, hogy a csomópontok sorszámozása a meddőforrásokkal kezdődik. Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy az F felső indexet kétféle értelemben is használjuk: feszültséggel kapcsolatban a fentiek szerint fogyasztói csomópontokat, míg a hatásos teljesítmény vonatkozásában teljesítmény-fogyasztást (igényt) azonosít.

Legyen $\underline{g}^T(\underline{v}, \underline{w}) = (g_1(\underline{v}, \underline{w}), \dots, g_N(\underline{v}, \underline{w}))$, ezt is particionáljuk a meddőforrás és a fogyasztói komponensek szerint:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} (\underline{g}^M(\underline{v}, \underline{w}))^T &= (g_1(\underline{v}, \underline{w}), \dots, g_L(\underline{v}, \underline{w})), \\ (\underline{g}^F(\underline{v}, \underline{w}))^T &= (g_{L+1}(\underline{v}, \underline{w}), \dots, g_N(\underline{v}, \underline{w})). \end{aligned}$$

Hasonlóképpen particionálva a (3.15) összefüggésben a jobboldalon $\underline{q} \in \mathbb{R}^N$ -et:

$$(4.8) \quad (\underline{Q}^M)^T = (Q_1, \dots, Q_L); \quad (\underline{Q}^F)^T = (Q_{L+1}, \dots, Q_N).$$

Jelöléseinkkel a (3.15) összefüggéseknek a reaktív teljesítményre vonatkozó része a következő alakot ölti:

$$(4.9) \quad \underline{g}(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{Q}, \quad \text{ill.} \quad \begin{aligned} \underline{g}^M(\underline{v}, \underline{w}) &= \underline{Q}^M, \\ \underline{g}^F(\underline{v}, \underline{w}) &= \underline{Q}^F \end{aligned}$$

Szükségünk lesz a $\underline{g}(\underline{v}, \underline{w}^*): R^N \rightarrow R^N$ leképezés Jacobi-mátrixára a $\underline{v} = \underline{w}^*$ pontban, jelöljük azt Y -nal és particionáljuk a meddő és fogyasztói csomópontoknak megfelelően:

$$(4.10) \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} L \\ \} N_F \end{matrix} \cdot$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_L \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{N_F}$

(F3.35) (F3.39) alapján az Y mátrix elemei a következők lesznek:

$$(4.11) \quad Y_{ii} = \sum_{k \in J(i)} w_k^* G_{ik} + v_i^* \sum_{k \in J(i)} (2 B_{ik} - w C_{ik}) - \sum_{k \in J(i)} v_k^* B_{ik},$$

$$i = 1, \dots, N.$$

$$(4.12) \quad Y_{ik} = \begin{cases} -w_i^* G_{ik} - v_i^* B_{ik}; & \text{ha } (i, k) \text{ ága a hálózatnak,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

4.6 A FESZÜLTSEGI VÁLTOZÓK SZÁMÁNAK REDUKCIÓJA

A 3. fejezet modelljében valamennyi csomópont komplex feszültségének valós és képzetes része változóként szerepel. Ebben a részben közelítő lineáris összefüggést konstruálunk \underline{v}^M és \underline{v}^F között, melynek segítségével \underline{v}^F kifejezhető lesz \underline{v}^M függvényeként. Ily módon az egyszerűsített modellben elegendő lesz \underline{v}^M -et változónak tekinteni.

Az F4. részben megmutatjuk, hogy a reaktívteljesítmény-áramlás elsősorban a csomóponti feszültségek abszolút értékétől függ. A feszültségnek valós és képzetes részre történő felbontását tekintve tapasztalati tény, hogy a reaktívteljesítmény-áramlás elsősorban a valós résztől függ és csak kisebb mértékben a képzetes résztől. Az F4. rész gondolatmeneteihez hasonlóan ez a tény heurisztikus érvekkel is alátámasztható. (4.9)-et tekintve ezért lerögzítjük a képzetes részt a munkaponti \underline{w}^* értékre. Ily módon a következő összefüggés adódik:

$$(4.13) \quad \underline{g}^F(\underline{v}^M, \underline{v}^F, \underline{w}^*) = \underline{Q}^F.$$

Az egyenletrendszer Jacobi-mátrixa (4.10) alapján (Y_3, Y_4) . A villamos hálózat (mint gráf) összefüggőségi viszonyaiból következően Y_4 nem szinguláris. Ezért $(\underline{v}^{*M}, \underline{v}^{*F})$ egy környezetében a (4.13) egyenletrendszer implicit módon definiálja \underline{v}^F -et, mint \underline{v}^M függvényét, azaz van olyan $\underline{h}: R^M \rightarrow R^{NF}$ leképezés, hogy $\underline{v}^F = \underline{h}(\underline{v}^M)$. Az implicit függvények deriváltjára vonatkozó tétel szerint ekkor:

$$(4.14) \quad \frac{d\underline{h}(\underline{v}^{*M})}{d\underline{v}^M} = -Y_4^{-1} Y_3.$$

A $\underline{h}(\underline{v}^M)$ függvény \underline{v}^{*M} körüli Taylor-sorában elhanyagolva a magasabbrendű tagokat, a következő lineáris összefüggés érvényes közelítőleg, a \underline{v}^{*M} elegendően kicsi környezetében:

$$(4.15) \quad \underline{v}^F - \underline{v}^{*F} \sim -Y_4^{-1} Y_3 (\underline{v}^M - \underline{v}^{*M})$$

A közelítőleg érvényes egyenlőséget itt és a továbbiakban is "~" jelöli.

4.7 A FESZÜLTSEGEK KÉPZETES RÉSZÉNEK KIFEJEZÉSE A HATÁSOS TELJESITMÉNY BETÁPLÁLÁSSAL. A FESZÜLTSEGI VÁLTOZÓK SZÁMÁNAK TOVÁBBI REDUKCIÓJA.

Ebben a részben megmutatjuk, hogy linearizálás révén a csomóponti feszültségek képzetes részei kifejezhetők a csomóponti generált \underline{p}^G teljesítménnyel. Mivel ez utóbbi a felépítendő modell változóival lineárisan kifejezhető lesz, ezért lehetőség nyílik arra, hogy az egyszerűsített modellben \underline{w} ne szerepeljen változóként.

Itt is kínálkozik a 4.6 bekezdésben alkalmazott, az implicit függvényekre épített linearizálás. Most mégis másképp fogunk eljárni, olyan eljárást alkalmazunk, amely az ágterhelési feltételekhez egyébként is szükséges teljesítményáramlási összefüggések linearizálására épül.

Ismeretes, hogy a hatásosteljesítmény-áramlás elsősorban a fázisszögekre érzékeny. A feszültségek valós és képzetes részre bontása esetén hasonlóan megmutatható, hogy a hatásosteljesítmény-áramlás a feszültségek képzetes részére érzékeny elsősorban. Ezért lerögzítjük a feszültség valós részét a munkaponti \underline{v}^* értékre és a teljesítményáramlást \underline{w}^* kicsi környezetében mint \underline{w} függvényét vizsgáljuk. A linearizáláshoz reprodukáljuk az i -edik csomópontból az (i, k) ágra kiáramló hatásos teljesítményre vonatkozó (F4.32) összefüggést.

$$(4.16) \quad T_{ik}(v_i^*, v_k^*, w_i, w_k) = G_{ik} \left[v_i^*(v_i^* - v_k^*) + w_i(w_i - w_k) \right] + \\ + B_{ik} \left[w_i v_k^* - w_k v_i^* \right]$$

Az F4. részben foglaltak szerint $G_{ik} \ll B_{ik}$, továbbá viszonylagos egységekben (lásd F4.rész) v_i^* és v_k^* , valamint w_i és w_k eltérése kicsi, ezért a gyakorlatban jól bevált alábbi közeli-

téssel élünk:

$$(4.17) \quad T_{ik}(v_i^*, v_k^*, w_i, w_k) \sim B_{ik}(w_i v_k^* - w_k v_i^*).$$

A kapott összefüggést valamennyi ágra felírjuk, ami kompakt módon tehető meg a következő jelölések felhasználásával:

Legyen V egy $M \times N$ méretű mátrix, ami az A csúcs, él incidenciamátrix A^T transzformáltjából úgy adódik, hogy abban soronként haladva az ág kezdőpontja pozíciójába a munkapontból adódó végponti feszültség valós részét, míg a végpont helyére a kezdőponti feszültség valós részének (-1) -szeresét írjuk. Jelöljük az ágak kezdőpontjából az ágra áramló hatásos teljesítmények vektorát \underline{T} -vel, $\underline{T} \in \mathbb{R}^M$. B legyen $M \times M$ méretű diagonális mátrix; ha az l -edik ág (i, k) , akkor az átló l -edik eleme legyen B_{ik} .

Jelöléseinkkel a teljesítményáramlásra vonatkozó közelítés:

$$(4.18) \quad \underline{T} \sim B \underline{V} \underline{w}.$$

Megjegyezzük, hogy a (4.18) összefüggések a gráf irányítása által definiált referenciairányra vonatkoznak áganként, azaz az irányított gráfban az ágak kezdőpontjából az ágra kimenő teljesítményt írják le. A kimenő teljesítményt természetesen úgy értjük, hogy ha a tényleges teljesítményáramlás az (i, k) ág esetén $k \rightarrow i$ irányú, akkor a kimenő teljesítmény i -ből az ágra negatív értékű.

A 3.3.1 bekezdésnek megfelelően itt is jelöljük \underline{P}^G -vel ($\underline{P}^G \in \mathbb{R}^N$) a csomópontonként generált teljesítmények vektorát, ekkor persze $P_i^G = 0$, $i > L$ -re; \underline{P}^F a csomópontonkénti fogyasztások vektora. Ha valamely mennyiséget $*$ -gal is megjelölünk, az a munkapontra fog vonatkozni.

A \underline{T} teljesítményáramlást a \underline{P}^G vektorral összekapcsoló összefüggésként természetes módon kínálkozik Kirchhoff csomóponti törvényének megfelelője (lásd F4. rész) a teljesítményáramlásra vonatkozóan. Mivel a \underline{T} teljesítményáramlás a referencia-

irányokra vonatkozik, és az ágakon teljesítményveszteség lép fel, ezért a Kirchhoff-törvényben korrekciós tagot is be kell vezetni. Az eljárás egyszerűen az, hogy ha a tényleges áramlás az irányításnak megfelelő, akkor a végponti fogyasztást csökkentjük a veszteséggel, ellenkező esetben ugyanazzal növeljük.

Legyen $\underline{P}^K \in \mathbb{R}^N$ a következő vektor (a jelölésre lásd F4.):

$$(4.19) \quad \underline{P}_l^K = - \sum_{\substack{(i,l) \text{ ág} \\ \text{sgn } T_{il} \geq 0}} P_{il}^v + \sum_{\substack{(i,l) \text{ ág} \\ \text{sgn } T_{il} < 0}} P_{il}^v, \quad l=1, \dots, N.$$

Ezek után Kirchhoff csomóponti törvénye a munkapontban:

$$(4.20) \quad \underline{P}^{*G} = \underline{P}^F + \underline{P}^{*K} + A^T \underline{T}^*.$$

Itt \underline{P}^{*K} a munkaponti feszültségeloszlás ismeretében (F4.22) ill. (F4.30) felhasználásával (4.19) alapján meghatározható. Rögzítve a munkaponthoz tartozó veszteségeket, a munkapont kis környezetére a következő közelítés adódik:

$$(4.21) \quad \underline{P}^G \sim \underline{P}^F + \underline{P}^{*K} + A^T \underline{T}^*.$$

Behelyettesítjük ide a (4.18) összefüggésből a teljesítményáramlásra vonatkozó közelítést, így az alábbi összefüggés adódik:

$$(4.22) \quad \underline{P}^G - \underline{P}^F - \underline{P}^{*K} \sim A^T B V \underline{w}.$$

Itt az $A^T B V$ mátrix $N \times N$ méretű, a rangja $N-1$ (lásd F1.8 tétel).

Töröljük $A^T B V$ mátrix referenciapontok megfelelő sorát és oszlopát, a megmaradt mátrix már nonszinguláris lesz (lásd F1.8 tétel). Invertáljuk, majd az inverzet kiegészítjük egy csupa 0 első sorral és oszloppal, a kapott mátrixot jelölje Z^N . A referenciapontban a potenciál fázisszöge 0, ezért $w_1 = 0$. Így a (4.22) összefüggésből adódik a címben ígért közelítő formula:

$$(4.23) \quad \underline{w} \sim Z^N (\underline{P}^G - \underline{P}^F - \underline{P}^{*K}).$$

4.8 A HÁLÓZATI FELTÉTELEK LINEARIZÁLÁSA

A 4.6 és 4.7 bekezdésekben tárgyaltak alapján adott olyan egyszerűsített lineáris modell felépítésének a lehetősége, melyben a hálózathoz kapcsolódó feltételrendszerben teljesítmény és üzemállapot típusú változók mellett csak a meddőforrás csomópontok komplex feszültségének valós részei szerepelnek változóként. Ehhez azonban egyrészt meg kell adnunk az általános modell (3.22), (3.24) feltételrendszereiben szereplő függvények megfelelő lineáris közelítéseit, másrészt a (3.20) hálózati feltételrendszer kezelésmódját.

Először a (3.22) ágterhelési feltételrendszert vizsgáljuk. A linearizálás (4.18) és (4.23) felhasználásával könnyen adódik:

$$(4.24) \quad \underline{T} \sim BVZ^N(\underline{P}^G - \underline{P}^F - \underline{P}^{*K})$$

Itt a jobboldalon csupán \underline{P}^G változó, a későbbiek során megmutatjuk, hogy az egyszerűsített modell teljesítmény és üzemállapot változóival lineárisan kifejezhető (lásd 5.1.3 bekezdés).

Az ágterhelési feltételekkel kapcsolatban egy további elhanyagolással is fogunk élni, amennyiben a (3.22) feltételekben szereplő $|S_{ik}|$ látszólagos teljesítményt a veszteséggel korrigált hatásos teljesítmény abszolút értékével helyettesítjük, megfelelően korrigált T_{ik}^{max} korlátokat használva.

Ezután a (3.24) meddőforrás feltételrendszert tekintjük. A 4.6 bekezdés jelölésrendszerét használva a $\underline{q}^M(\underline{v}^M, \underline{v}^F, \underline{w}^*)$ -nak a $(\underline{v}^{*M}, \underline{v}^{*F})$ körüli Taylor sorfejtésének kvadratikus tagjait elhanyagolva adódik a következő:

$$(4.25) \quad \underline{q}^M(\underline{v}^M, \underline{v}^F, \underline{w}^*) \sim \underline{q}^M(\underline{v}^{*M}, \underline{v}^{*F}, \underline{w}^*) + Y_1(\underline{v}^M - \underline{v}^{*M}) + Y_2(\underline{v}^F - \underline{v}^{*F}).$$

Behelyettesítünk ide (4.15) alapján:

$$(4.26) \quad \underline{g}^M(\underline{v}^M, \underline{v}^F, \underline{w}^*) \sim \underline{g}^M(\underline{v}^{*M}, \underline{v}^{*F}, \underline{w}^*) + (Y_1 - Y_2 Y_4^{-1} Y_3) (\underline{v}^M - \underline{v}^{*M}).$$

Végül a (3.20) hálózati feltételrendszerrel kapcsolatban teszünk néhány megjegyzést. Ez kvadratikus, egyenlőség alakú feltételekből áll, melyeket a hálózati feszültség-eloszlásnak ki kell elégíteni. A modellbe implicit módon épülnek be, a fentiekben tárgyalt linearizálásokból adódó feltételeken keresztül, a linearizálási eljárás hibájának még megengedett értéke által meghatározott tartományban. A napi menetrend optimalizálására vonatkozó modellt megoldjuk az egyenlőtlenes hálózati feltételekkel, a meddőforrás csomópontok feszültsége valós részét tekintve változónak. A megoldáshoz hozzátéve a meddőforrás csomóponti feszültségek munkaponthoz tartozó képzetes részét, az optimális generált teljesítményeket alapul véve, megoldjuk a hálózatszámítási feladatot. (Lásd F3., F4. részek) Amennyiben a csomóponti feszültségekre vonatkozó alsó-felső korlátok a munkaponti értékekhez elég közeli, azaz a tartomány elég szűk, akkor az ily módon kapott feszültség és teljesítmény-eloszlás fizikailag továbbra is kielégíti a feszültségtartási, ágterhelési és meddőforrás-feltételeket. A stratégia a gyakorlatban jól bevált.

4.9 A HÁLÓZATI VESZTESÉG FÜGGVÉNY LINEARIZÁLÁSA

A $C^V(\underline{v}, \underline{w})$ hálózati veszteség függvény, (3.9), a $(\underline{v}, \underline{w})$ változók kvadratikus, konvex függvénye. A munkapont körüli linearizálás egyszerűen azt jelenti, hogy a $(\underline{v}^*, \underline{w}^*)$ pont körüli Taylor-sorfejtésből elhanyagoljuk a kvadratikus tagokat.

A 4.6 bekezdés jelölésrendszerét használva, a munkaponti értékeket $*$ -gal jelölve, a következő adódik:

$$(4.27) \quad P^V(\underline{v}, \underline{w}) \sim P^V(\underline{v}^*, \underline{w}^*) + \nabla_{\underline{v}^M}^T P^V(\underline{v}^*, \underline{w}^*) (\underline{v}^M - \underline{v}^{*M}) + \\ + \nabla_{\underline{v}^F}^T P^V(\underline{v}^*, \underline{w}^*) (\underline{v}^F - \underline{v}^{*F}) + \nabla_{\underline{w}}^T P^V(\underline{v}^*, \underline{w}^*) (\underline{w} - \underline{w}^*).$$

A tapasztalatok szerint itt a jobboldalon a harmadik tag elhanyagolható. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$\underline{a}^v = \nabla_{\underline{v}} M^{P^v}(\underline{v}^*, \underline{w}^*)$, $\underline{b}^v = \nabla_{\underline{w}} P^v(\underline{w}^*, \underline{w}^*)$. Az F4.30 egyenlőségből közvetlen differenciálással adódik a következő:

$$(4.28) \quad d_i^v = \sum_{\substack{k \\ (i,k) \text{ ág}}} R_{ik} \left[2G_{ik} I_{ik}^{*P} - (B_{ik} - \frac{1}{2}\omega C_{ik}) I_{ik}^{*Q} + B_{ik} I_{ki}^{*Q} \right],$$

$$i=1, \dots, L.$$

Hasonlóképpen kaphatók \underline{b}^v komponensei:

$$b_i^v = \sum_{\substack{k \\ (i,k) \text{ ág}}} R_{ik} \left[2B_{ik} I_{ik}^{*P} + G_{ik} I_{ik}^{*Q} - G_{ik} I_{ki}^{*Q} \right],$$

$$i=1, \dots, N.$$

Felhasználva még a (4.23) összefüggést, a (4.27) a következőképp írható:

$$P^v(\underline{v}, \underline{w}) \sim P^v(\underline{v}^*, \underline{w}^*) + \sum_{i=1}^L d_i \cdot v_i - \sum_{i=1}^L d_i \cdot v_i^* + \underline{b}^T Z^N (\underline{P}^G - \underline{P}^F - \underline{P}^{*K}) - \underline{b}^T \underline{w}^*.$$

A későbbiek során megkonstruált modellben \underline{P}^G kifejezhető lesz lineárisan a teljesítmény és üzemállapot típusu változókkal, amint azt már korábban is említettük.

4.10 FESZÜLTSGELLENŐRZŐ PERIÓDUSOK

Feszültségellenőrző periódusoknak azokat a periódusokat nevezzük, amelyeknél a modellben a kalorikus feltételek mellett hálózati feltételeket is előírunk. A hálózati feltételrendszer generálása és az optimalizálásban való figyelembevétele viszonylag nagyobb számítási-idő igényű ezért az egyszerűsített modellben csupán három periódusra írunk elő hálózati feltételeket. Ezek a szélsőséges terhelésű periódusok: az esti csúcsterhelési periódus, az éjszakai minimum és a délelőt-

ti csúcs. (lásd 4.1) Csúcsterhelésnél nagy a meddőteljesítmény-fogyasztás és alacsonyabbak a feszültségek, az éjszakai minimumban pedig nagy a meddőteljesítmény-termelés, magasak a feszültségek. Gyakorlati tapasztalat, és a 4.1-ben megfogalmazott erőművi blokkokra vonatkozó be- és kikapcsolási stratégiából is következtethető, hogy amennyiben a szélsőséges terhelésű periódusokban megköveteljük a hálózati feltételek teljesülését, azok a közbűlső, ún. normál periódusokban is teljesülni fognak.

4.11 A HÁLÓZATI FELTÉTELEK KIVÁLASZTÁSA

A (3.21) feszültségtartási feltételek valamennyi csomópont-ra vonatkoznak. Ezek közül a képzetes részt korlátozó feltételeket elhagyjuk az egyszerűsített modellben, ugyanis (4.23)-ból láthatóan a hatásos teljesítményt korlátozva a képzetes részt is korlátozzuk, másrészt tapasztalati tény, hogy a képzetes rész változása a munkapont környezetében kicsi a többi villamos mennyiségekre előirt szigorú korlátok következtében.

A csomóponti feszültségek valós részeire előirt korlátok esetében a fogyasztói csomópontokat tekintve ezek közül csak néhány olyan van, amelyik a feszültségtartás szempontjából kritikus.

A munkapontot tekintve a fogyasztói csomópontokra vonatkozó feltételek közül kiválasztjuk a K_v számú legjobban megsértett feltételt, ill. kielégítettség esetén azokat, ahol a munkaponti értékek a legközelebb vannak a határhoz. A gyakorlatban $K_v=30$ elegendőnek bizonyult.

A (3.22) ágterhelési feltételekben az összes vezetéknek csupán kis hányada az, amely túlterhelés szempontjából szóba kerül. Így a munkaponti teljesítményáramlást alapul véve a feszültségtartási feltételekhez analóg módon kiválasztunk K_A darab feltételt, és csupán ezeket írjuk elő az egyszerűsített modellben. A gyakorlatban itt is elegendő a $K_A=30$ érték.

5. AZ EGYSZERÜSÍTŐ FELTÉTELEK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL KAPOTT MODELL

A 4. fejezetben leírtak alapján az ütemezési probléma általános modellje egyszerűsíthető.

Az egyszerűsített modellnek nagyméretű, vegyesváltozós, matematikai programozási feladat felel meg, melynek célfüggvénye és feltételei is lineárisak, együtthatható mátrixa strukturált. Megoldására van lehetőség.

Külön megemlítjük, hogy a modell felépítésénél az említett egyszerűsítéseken túl egy további jelölésbeli változtatást is teszünk: az egyszerűsített modellben az üzemmód változókat az általános modelltől eltérően definiáljuk, hogy a modell 0-1 értékű változóinak a számát csökkentsük.

E modell leírásakor is alkalmazkodunk a 3.1. bekezdésben ismertetett jelöléstechnikai konvenciókhoz.

5.1. AZ EGYSZERÜSÍTETT MODELL

5.1.1. Üzemmód változók

Definiáljuk az x_{ij}^t , $i=1,2,\dots,K$; $j=1,2,\dots,M(i)-1$; $t=1,2,\dots,27$ változókat a következő módon (K az erőművek számát, $M(i)$ az i -edig erőműben alkalmazható üzemmódok számát jelöli, ugyanúgy, mint az általános modell leírásánál):

Legyen

$$(5.1) \quad x_{ij}^t = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i\text{-edik erőműben a } t\text{-edik periódusban a } j\text{-edik vagy a } j\text{-ediket megelőző üzemmódok valamelyike működik;} \\ 1, & \text{ha az } i\text{-edik erőműben a } t\text{-edik periódusban valamely, a } j\text{-ediket követő üzemmód üzemel.} \end{cases}$$

Világos, hogy ha az $x_{i,M(i)}^t$, $i=1,2,\dots,K$; $t=1,2,\dots,27$

szimbólumok jelentését is a fentiek szerint definiáljuk, ennek értéke csak 0 lehet. Így $x_{i, M(i)}^t = 0$, $i=1, 2, \dots, K$; $t=1, 2, \dots, 27$; és ezek nem változói a modellnek, az egy-egy erőműhöz rendelt üzem mód változók száma csak $M(i)-1$.

A modell leírásában ennek ellenére előfordulnak az $x_{i, M(i)}^t$ szimbólumok, az említett értelemben. Ehhez hasonlóan használjuk az $x_{i, 0}^t$, $i=1, 2, \dots, K$; $t=1, 2, \dots, 27$ jeleket. Ezek értéke definíció szerint 1.

Ilyen definíció esetén az $x_{i, j-1}^t - x_{i, j}^t$ különbség értéke akkor és csak akkor 1, ha a t-edik periódusban, az i-edik erőműben a j-edik üzem mód üzemel. ($i=1, 2, \dots, K$, $j=1, 2, \dots, M(i)$, $t=1, 2, \dots, 27$).

$x_{i, j}^t$ definíciójából az is következik, hogy az adott erőműhöz tartozó komponensek - azaz az $x_{i, 1}^t, x_{i, 2}^t, \dots, x_{i, M(i)-1}^t$ értékek csak egymást követően 1 értékeket és ezekhez csatlakozva egymást követően csak 0 értékeket vehetnek fel. Az egymás mellett álló, 1,0 párban a 0 érték helye jelzi, hogy hányadik üzem mód üzemel az adott erőműben, az adott periódusban.

Különböző periódusokhoz tartozó fenti változó csoportokban az 1,0 pár helye más és más lehet. Jobbratulódása azt jelenti, hogy az erőműben a periódusok közötti időszakban kikapcsolás történt. Balratulódása bekapcsolásra utal. Ha az 1,0 pár helye változatlan, akkor a periódusok közötti időszakban az üzem mód nem változott. (lásd 4.2. bekezdés)

Az $x_{i, j}^t$, $i=1, 2, \dots, K$, $j=1, 2, \dots, M(i)-1$ komponenseket az erőművek sorrendjében, azon belül pedig az üzem módok sorrendjében egyetlen vektorra egybekapcsolva kapjuk az \underline{x}^t , t-edik periódushoz tartozó üzem módváltozó-vektort. Ennek dimenziója $\sum_{i=1}^K (M(i)-1)$.

A 4.1. bekezdésben szereplő feltételezés miatt stagnálási szakaszban nem történhet üzem mód változtatás, elegendő azért a stagnálási szakasz egyetlen, első periódusához tartozó üzem-

mód változókat tekinteni a modell változóinak. Ezért \underline{x}^t csak $t=1, 2, \dots, t_0, t_0+4, \dots, t_1, t_1+4, \dots, 27$ esetén jelöl változókat, ahol t_0 és t_1 a stagnálási szakaszok első periódusainak sorszáma. Az \underline{x} felső index nélküli változó ezen \underline{x}^t változók együttesét jelöli. \underline{x} dimenziója

$$21 \quad \sum_{i=1}^K (M(i)-1).$$

A modell leírásában előfordul az x_{ij}^t szimbólum $t=t_0+1, t_0+2, t_0+3$ és t_1+1, t_1+2, t_1+3 esetén is, helyettük

$x_{ij}^{t_0}$ ill. $x_{ij}^{t_1}$ értendő. A modellben szükséges a tervezési

időszakot megelőző időszak legutolsó periódusában alkalmazott üzemmódok ismerete. Az erre vonatkozó információ megadható az ezen legutolsó periódushoz tartozó üzemmód változó értékének megadásával. Jelöljük \underline{x}^0 -val a megfelelő üzemmód-vektort.

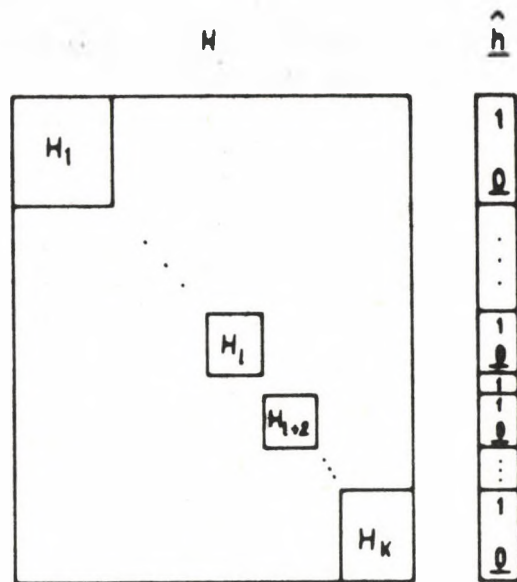
Ez a modellben $\sum_{i=1}^K (M(i)-1)$ dimenziós, 0 és 1 értékekből álló

konstans vektor.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha az általános modellben az üzemmódok és a sorrendjük megegyeznek az e modellbeli üzemmódokkal és sorrendezéssel, akkor a két modell üzemmód változói a következő kapcsolatban vannak egymással:

$$(5.2) \quad \underline{y}^t = H\underline{x}^t + \hat{h}.$$

A túlságosan komplikált jelölésmód elkerülése céljából H ill. \hat{h} explicit megadása helyett az alábbi, 12. ábrán szemléltetjük ezeket.



12. ábra.

Az ábrán a H_ℓ blokk $M(\ell) \times (M(\ell)-1)$ méretű, és $(H_\ell)_{kk} = -1$, $k=1, 2, \dots, M(\ell)-1$; $(H_\ell)_{k+1, k} = 1$, $k=1, 2, \dots, M(\ell)-1$; a mátrix többi eleme 0. Azon erőműveknek megfelelő sorok, ahol egyetlen üzemmód van, 0-val vannak kitöltve, az ábrán ilyen sor található a H_ℓ és $H_{\ell+2}$ blokkok között, a \hat{h} vektorban a megfelelő komponens 1.

5.1.2. Teljesítmény változók

Az egyes periódusokban az erőművekben alkalmazandó üzemmódok teljesítményszintjének megadására minden üzemmódhoz minden periódusban $r(i, j)$ változót rendelünk, ahol az $r(i, j)$ az üzemmódhoz tartozó költségfüggvény közelítő szakaszainak a száma.

Jelölje az i -edik erőmű j -edik üzemmódjához rendelt változókat p_{ijl}^t , $l=1, 2, \dots, r(i, j)$, $t=1, 2, \dots, 27$.

Legyen $p_{ijl}^t = 0$, $l=1, 2, \dots, r(i, j)$, ha a t -edik periódusban

az i -edik erőműnek nem a j -edik üzemmódja üzemel. Egyébként az i -edik erőmű j -edik üzemmódja t -edik periódusbeli P szintű üzemelése esetén $p_{ijl}^t \geq 0$, $l=1,2,\dots,r(i,j)$, és

$$(5.3) \quad P_{ijk}^{min} \leq P \leq P_{ijk}^{max}$$

teljesülésekor legyen

$$(5.4) \quad p_{ijl}^t = P_{ijl}^{max} - P_{ijl}^{min}, \quad l=1,2,\dots,k-1,$$

$$(5.5) \quad p_{ijk}^t = P - P_{ijk}^{min},$$

$$(5.6) \quad p_{ijl}^t = 0, \quad l=k+1,\dots,r(i,j).$$

A definícióból következik, hogy csak akkor lehet $p_{ijk}^t > 0$ valamely k index esetén, ha (5.4) teljesül. A definícióból az is következik, hogy

$$(5.7) \quad 0 \leq p_{ijl}^t = (P_{ijl}^{max} - P_{ijl}^{min})(x_{ij-1}^t - x_{ij}^t),$$

$$i=1,2,\dots,K; \quad j=1,2,\dots,M(i); \quad l=1,2,\dots,r(i,j) \\ t=1,2,\dots,27$$

feltételeknek is teljesülniük kell. Ezekben a jobboldalon szereplő $(x_{ij-1}^t - x_{ij}^t)$ tényező biztosítja azt, hogy $p_{ijl}^t > 0$ csak abban az esetben lehetséges, ha az i -edik erőműben a j -edik, üzemmóó üzemel.

Az így definiált teljesítmény változókkal az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának t -edik periódusbeli teljesítményszintje a

$$(5.8) \quad P = P_{ij}^{min} (x_{ij-1}^t - x_{ij}^t) + \sum_{l=1}^{r(i,j)} p_{ijl}^t$$

összeggel adható meg. Az i -edik erőmű összes üzemmódjaira összegezve ezeket, az erőmű t -edik periódusbeli teljesítményszintjét kapjuk:

$$(5.9) \quad \sum_{i=1}^{M(i)} P_{ij}^{min} (x_{i,j-1}^t - x_{ij}^t) + \sum_{l=1}^{r(i,j)} p_{ijl}^t$$

Rögzített t esetén jelölje p^t azt a vektort, amelyet a p_{ijl}^t komponensekből alkotunk úgy, hogy erőművenként és üzemmódonként felsoroljuk a hozzájuk rendelt teljesítmény változókat.

Ez a p^t a modell t -edik periódusához tartozó teljesítményváltozó vektora. Dimenziója

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} r(i,j).$$

Felső index nélküli p vektorral a modell teljesítményváltozó vektorát jelöljük. Ez a p^t vektorok egymásután fűzésével jön létre, $t=1, 2, \dots, 27$.

5.1.3. Feszültségi változók

A feszültségellenőrző periódusokban a teljesítmény és üzemállapot mellett a feszültségtartó csomópontok feszültségének valós részei is változóként szerepelnek. Az ezekből alkotott L -dimenziós vektort a továbbiakban u -val jelöljük.

A 4. fejezetben feltételeztük, hogy a csomópontonkénti generált hatásos teljesítmények p^G vektora kifejezhető lineárisan a modell p, x változóival. Valóban, legyen D^* a következő, $N \times N_v$ méretű mátrix, (ahol N_v -vel jelöltük a (p^T, u^T))

dimenzióját): 0-tól különböző elemei csak azon csomópontoknak megfelelő sorokban vannak, amelyekhez erőmű csatlakozik. E sorokban a csatlakozó erőművekhez tartozó teljesítmény-típusú változók oszlopában 1 van, az üzemállapot-típusú változók oszlopaiban pedig a megfelelő $p_{i,j+1}^{min}$ - p_{ij}^{min} mennyiségek. Könnyen látható, hogy

$$(5.10) \quad \underline{P}^G = D^* \begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{x} \end{pmatrix} + \underline{P}^{min},$$

ahol P_k^{min} a k-adik csomóponthoz tartozó erőművek üzemmódjainak minimális P_{i1}^{min} teljesítményszintjeinek összege, $k=1,2,\dots,N$; és $P_k^{min} = 0$, ha a k-adik csomóponthoz nem csatlakozik erőmű.

5.2. A CÉLFÜGGVÉNY

A 4. fejezetben ismertetett egyszerűsítő feltevések figyelembevételével és az egyszerűsített modell változóinak felhasználásával a 3.2. bekezdésben leírt nemlineáris célfüggvény összetevői a következőképpen módosulnak:

5.2.1. Erőművi blokk termelési költsége

Az erőművek üzemmódjaihoz tartozó $f_{ij}(P)$, $i=1,2,\dots,K$, $j=1,2,\dots,M(i)$ termelési költségfüggvények lineáris törtfüggvénnyel való közelítését felhasználva az i-edikerőmű j-edik üzemmódjának t-edik periódusbeli, a p_{ijl}^t , $l=1,2,\dots,r(i,j)$ teljesítmény változók által meghatározott (5.8) szintű üzemelésének költsége:

$$(5.11) \quad a_t \{ K_{ij} (x_{ij-1}^t - x_{ij}^t) + \sum_{l=1}^{r(i,j)} c_{ijl} p_{ijl}^t \} .$$

A teljes tervezési időszakban az erőművi blokkok működéséből származó költségrész pedig:

$$(5.12) \quad \sum_{t=1}^{27} a_t \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} \left\{ K_{ij} (x_{i,j-1} - x_{ij}^t)^+ + \sum_{l=1}^{r(i,j)} c_{ijl} x_{ijl}^t \right\},$$

ami lineáris függvénye a modell változóinak.

5.2.2. A berendezések állásából ill. ujraindításából származó költségrész

A 4.4. bekezdésben leírtak szerint az erőművi egységek, ill. az üzemmódok állásából származó költség közelítő értékét a d_{ij}^t mennyiségek állásidőre való összegzésével kapjuk.

Az üzemmód változók definíciója és az üzemmódok megadására tett feltevésünk szerint $x_{ij}^t = 1$ teljesülése esetén az i -edik erőműben a t -edik periódusban a j -edik üzemmódot követő valamely üzemmód üzemel. Ez azonban azt jelenti, hogy a j -edik üzemmódhoz tartozó legalább egy erőművi egység áll.

A d_{ij}^t mennyiségek állásidőre való összegzése ezek szerint megfelel a $d_{ij}^t x_{ij}^t$ szorzatok teljes tervezési időszakra való összegzésének (kivéve a stagnálási szakaszok második, harmadik és negyedik periódusát).

Az állásköltség tehát:

$$(5.13) \quad \sum_{t=1}^{27} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} d_{ij}^t x_{ij}^t,$$

ebben az összegzésben

$$t \neq t_0+1, \quad t_0+2, \quad t_0+3 \quad \text{és} \\ t \neq t_1+1, \quad t_1+2, \quad t_1+3.$$

Ez az összeg azonban tartalmaz az előző tervezési időszak végén már álló egységekhez tartozó költséget is, amittől az egyszerűsítő feltevés szerint eltekintünk. Ennek megfelelően

módosítanunk kell az (5.13) értékét. Ehhez változtassuk meg a d_{ij}^t együtthatók definícióját. Legyen $d_{ij}^t=0$ minden, az első kikapcsolási szakaszhoz, az első bekapcsolási szakaszhoz és az első stagnálási szakasz első periódusához tartozó t érték és minden olyan i, j párral jelzett üzemmód ($i=1, 2, \dots, K$; $j=1, 2, \dots, M(i)$) esetén, amelyre $x_{ij}^0=1$. ($x_{ij}^0=1$ azt jelenti, hogy az i -edik erőműben az előző tervezési időszak befejezésekor valamely, a j -edik üzemmódot követő üzemmód üzemel, tehát a j -edik üzemmódhoz tartozó valamely erőművi egység áll.)

A d_{ij}^t együtthatók módosított értékével számolva az (5.13) kifejezésben már nem tartozik állásköltség a tervezési időszak első felében - a 10. ábra jelöléseit használva - az ① és ② típusú kikapcsolt egységekhez.

Ugyanakkor a ② és ④ típusú kikapcsolt egységekhez a nap második felében még számolunk állásköltséget, holott az egyszerűsítő feltevés szerint ettől eltekintünk. A ② és ④ típusú kikapcsolás-újraindítást az jellemzi, hogy a kikapcsolt egység az első bekapcsolási szakasz utolsó periódusában nem működik. Jelölje t^* az említett periódus sorszámát.

$x_{i_0 j_0}^{t^*}=1$ esetén az i_0 -adik erőmű j_0 -adik üzemmódjához ② vagy ④ típusú kikapcsolt egység tartozik. A $d_{i_0 j_0}^t$ értékek teljes tervezési időszakra vonatkozó összegezésekor az (5.13) összegben a nap második felére vonatkozóan az $s_{i_0 j_0}^{(4+2l_0)}$ közelítő értéke szerepel, feltéve, hogy l_0 a második kikapcsolási szakasz periódusainak a száma. Csökkentjük az (5.13) állásköltséget a

$$(5.14) \quad \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} s_{ij}^{(4+2l_0)} x_{ij}^{t^*}$$

összeggel. Ha $t=t^*$ esetére a d_{ij}^t együtthatókat módosítjuk úgy, hogy csökkentjük értéküket $s_{ij}^{(4+2l_0)}$ -val, ($i=1, 2, \dots, K$; $j=1, 2, \dots, M(i)$); akkor (5.13) az állásköltség egyszerűsítő

feltevések szerinti közelítése.

5.2.3. A hálózati veszteség költsége

Legyen a tekintett feszültségellenőrző periódus a t -edik, ahol nem okoz félreértést, elhagyjuk a periódust azonosító t indexet a változóknál. Jelölje $F(\underline{u}, \underline{p}, \underline{x})$ a hálózati energia-veszteség forint értékét a periódusra, akkor (4.29) alapján a célfüggvény veszteségi része:

$$(5.15) \quad F(\underline{u}, \underline{p}, \underline{x}) = \gamma \alpha_t \left[\underline{a}^T \underline{u} \quad \underline{b}^T \underline{z}^N (D^* \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{x} \end{pmatrix}) \quad \underline{P}^{min} \quad \underline{-P} \quad \underline{-P}^{*K} \right],$$

ahol γ 1MWh veszteség költsége forintban, α_t a t -edik periódus hossza órában.

Az összes hálózati veszteség költség az egyes periódusokra vonatkozó veszteségek költségeinek összege.

5.3. KORLÁTOZÓ FELTÉTELEK

Az egyszerűsített modell feltételei is csoportosíthatók aszerint, hogy periódusonként ismétlődően csak egy-egy periódushoz tartozó változók közötti kapcsolatot fejeznek ki, vagy több periódus változói közötti összefüggést írnak elő.

A periódusonként ismétlődő feltételek között vannak olyanok, amelyek teljesülését csak az úgynevezett feszültségellenőrző periódusokban követeljük meg explicit módon.

5.3.1. Normál periódus feltételrendszere

A következőkben ismertetésre kerülő feltételek teljesülését minden periódusban meg kell követelnünk. "Normál periódus" azoknak a periódusoknak a neve, amelyekben ezeken a feltételeken kívül további, a periódushoz tartozó változók közötti kapcsolatot biztosító korlátozó feltevés már nem szükséges.

A teljesítményváltozók definíciója szerint minden periódusban meg kell követelnünk a

$$(5.16) \quad 0 \leq p_{ijl}^t \leq \left(P_{ijl}^{\max} - P_{ijl}^{\min} \right) (x_{ij-1}^t - x_{ij}^t)$$

$$i=1, 2, \dots, K, \quad j=1, 2, \dots, M(i), \quad l=1, 2, \dots, r(i, j)$$

összekapcsolási feltételek teljesülését.

Megjegyezzük, hogy annak biztosítására, hogy $p_{ijk}^t > 0$
 $p_{ijl}^t = P_{ijl}^{\max} - P_{ijl}^{\min}$, $l=1, 2, \dots, k-1$ esetén teljesülhessen, nem kell a modellben korlátozó feltételt adnunk. A termelési költségeket megadó $f_{ij}(P)$ függvények közelítő függvényeinek (4.2) tulajdonsága miatt a modellnek megfelelő vegyesváltozós feladat költségminimumot megvalósító megoldásaira ez automatikusan teljesül.

Az *ellátási feltétel* az egyszerűsített modell változóinak felhasználásával a következőkben adható meg:

$$(5.17) \quad \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{M(i)} (x_{ij-1}^t - x_{ij}^t) P_{ij}^{\min} + \sum_{l=1}^{r(i,j)} p_{ijl}^t =$$

$$P^t \text{ igény} + P^t \text{ veszt} + P^t \text{ önf.}$$

Bár erre a tényre az egyszerűsítő feltételek ismertetésénél nem térünk ki, az erőművi önfogyasztás függvényeket (ld. 3.3.1. bekezdés) ebben a modellben az üzemmódotól függetlennek tetelezzük fel, s az erőművi teljesítmény lineáris függvényével közelítjük. Így

$$(5.18) \quad P^t \text{ önf} = \sum_{i=1}^K P_i^{\text{önf}} \left(\sum_{j=1}^{M(i)} (x_{ij-1}^t - x_{ij}^t) P_{ij}^{\min} + \sum_{l=1}^{r(i,j)} p_{ijl}^t \right),$$

ahol $P_i^{önf}$ (P) az i -edik erőmű lineáris önfogyasztás függvénye.

Az általános modellben szereplő SOS feltételekre az egyszerűsített modellben nincs szükség. Szükség van azonban az üzemmód definíciója miatt az

$$(5.19) \quad x_{ij-1}^t - x_{ij}^t \geq 0, \quad j=1,2,\dots,M(i)-1,$$

összefüggés megkövetelésére, $i=1,2,\dots,K$ esetén. Ezekre az üzemmódváltozók korlátozó feltételei néven hivatkozunk.

5.3.2. Feszültségellenőrző periódusok feltételrendszere

A normál periódusban megkövetelt feltételeken kívül a feszültségellenőrző periódusokban további feltételek teljesülését kell megkivánnunk.

E helyen a 3.3.1., ill. a 4.5.-4.8. bekezdésekben tárgyaltakra támaszkodva megadjuk az egyszerűsített modellnek az átviteli hálózathoz kapcsolódó feltételrendszerét. Mivel rögzített periódust tekintünk, a felső t azonosító indexet elhagyjuk. A munkapontra vonatkozó mennyiségeket felső *-gal különböztetjük meg.

Feszültségtartási feltételek

Csomópontként adottak a csomóponti feszültségek abszolút értékére vonatkozó V_i^{min} , V_i^{max} , $i=1,\dots,N$ korlátok. Ebből a valós részre vonatkozó korlátokat a következőképp számoljuk:

$$(5.20) \quad u_i^{min} = \left[(V_i^{min})^2 - (w_i^*)^2 \right]^{1/2}; \quad u_i^{max} = \left[(V_i^{max})^2 - (w_i^*)^2 \right]^{1/2};$$

$i=1,\dots,N.$

A feszültségtartási feltételek a meddőforrás csomópontokra vonatkozóan egyedi alsó-felső korlátok:

$$(5.21) \quad u_i^{\min} \leq u_i \leq u_i^{\max}, \quad i=1, \dots, L.$$

A fogyasztói csomópontok esetében felhasználhatjuk a (4.15) összefüggést, így a következő feltételrendszer adódik:

$$(5.22) \quad \underline{u}^{\min F} \leq \underline{v}^{*F} - Y_4^{-1} Y_3 (\underline{u} - \underline{v}^{*M}) \leq \underline{u}^{\max F},$$

ahol alkalmaztuk a 4.6. jelöléseit.

Ágterhelési feltételek

Jelölje \underline{T}^{\max} a (3.22)-ben szereplő T_{ik}^{\max} mennyiségek a 4.8. bekezdés szerinti korrigált M-dimenziós vektorát. A (4.23) és (4.18) összefüggések alapján a következő adódik:

$$(5.23) \quad T \sim BVZ^N (\underline{P}^G - \underline{P}^F - \underline{P}^{*K}).$$

Figyelembe vesszük a \underline{P}^G -re az 5.1.3. bekezdésben kapott összefüggést, így az ágterhelési feltételrendszer a következő lesz:

$$(5.24) \quad -\underline{T}^{\max} \leq BVZ^N \left[D^* \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{x} \end{pmatrix} + \underline{P}^{\min} - \underline{P}^F - \underline{P}^{*K} \right] \leq \underline{T}^{\max}.$$

Megjegyzés: A modellbe mind a fogyasztói csomópontokra vonatkozó feszültségtartási, mind pedig az ágterhelési feltételekből a 4.11. bekezdésben tárgyaltak szerint K_v , ill. K_A számú kerül be.

Meddőforrás feltételek

E feltételrendszer (4.26) és (3.24) alapján azonnal felírható:

$$(5.25) \quad \underline{Q}^{min}(\underline{x}) \leq \underline{Q}^M(\underline{v}^*, \underline{w}^*) + (Y_1 - Y_2 Y_4^{-1} Y_3)(\underline{u} - \underline{v}^{*M}) \leq \underline{Q}^{max}(\underline{x}).$$

Itt a 4.8. bekezdés jelöléseit használtuk, és bevezettük a $Q_i^{min}(\underline{x})$ ill. $Q_i^{max}(\underline{x})$, $i=1, \dots, L$ komponensekből álló, $\underline{Q}^{min}(\underline{x})$, ill. $\underline{Q}^{max}(\underline{x})$ vektorokat. Meg kell még adnunk az (5.25) jobb és baloldalán szereplő függvényeket. Az általános modell (3.24) meddőforrás feltételrendszerével kapcsolatos megfontolások itt is érvényesek, így az \underline{x} -től való függés megadásához elegendő tekinteni az általános modell \underline{y} üzemállapot vektora és az \underline{x} üzemállapot vektor közötti lineáris (5.2) összefüggést.

Ennek alapján $Q_i^{min}(\underline{x})$, $Q_i^{max}(\underline{x})$ függvények a következő alakot öltik a (3.24)-nél alkalmazott jelölésekkel:

$$(5.26) \quad Q_i^{min}(\underline{x}) = (H\underline{x} + \hat{h})^T \hat{Q}_i^{min}, \quad Q_i^{max}(\underline{x}) = (H\underline{x} + \hat{h})^T \hat{Q}_i^{max},$$

$$i \in I_M \cap I_E,$$

$$Q_i^{min}(\underline{x}) = Q_i^{min}, \quad Q_i^{max}(\underline{x}) = Q_i^{max},$$

$$i \in I_M \setminus I_E.$$

5.3.3. A periódusokat összekapcsoló feltételek

Az egyszerűsített modellben nincs szükség az általános modell kikapcsolási feltételeinek megfelelő feltételekre. Elegendő ebben a pontban a 4.1. bekezdésben leírt üzemeltetési rendszabályok matematikai megfogalmazását megadnunk.

A kikapcsolási szakaszban nem engedünk meg bekapcsolást. Ha a t-edik periódus a bekapcsolási szakasz utolsó periódusa,

a megelőző stagnálási szo- kasz első pe- riódusának üzemmod változói	a bekapcsolási szokasz 1. periódusá- nak üzemmod változói	a bekapcsolási szokasz 2. periódusá- nak üzemmod változói	a bekapcsolási szokasz utolsó periódusának üzemmod változói
---	---	---	---

-1 -1 -1	1 1 1		
	-1 -1 -1	1 1 1	
			-1 -1 -1
			1 1 1

14. ábra. A bekapcsolási feltételek mátrixa

vagy kikapcsolási szakaszhoz tartozik, akkor

$$x_{ij}^t = 1 \text{ esetén } x_{ij}^{t+1} = 1$$

szükségképpen. Ezt a logikai feltételt az

$$(5.27) \quad x_{ij}^t \leq x_{ij}^{t+1}$$

egyenlőtlenség írja le a legegyszerűbben. A feltételek mátrixát a 13. ábra mutatja.

Analóg módon tárgyalhatók a bekapcsolási feltételek. Itt

$$x_{ij}^t = 0 \text{ esetén } x_{ij}^{t+1} = 0$$

-nak kell teljesülnie, ha t stagnálási szakasz első periódusának, vagy bekapcsolási szakasz nem utolsó periódusának sorszáma. Ez egyenlőtlenséges formában

$$(5.28) \quad x_{ij}^t \geq x_{ij}^{t+1}$$

A feltételek mátrixos szerkezete a 14. ábrán látható.

5.3.4. Tüzelőanyagkényszer feltételek

A tüzelőanyagkényszer feltételek is periódusokat összekapcsoló feltételek. Ismertetésükhöz elegendő az általános modellnél a 3.3.2. bekezdésben leirtakra hivatkozni és a (3.32) formulát az egyszerűsített modell változóival felírni:

$$(5.29) \quad R_{imin} \leq \sum_{t=1}^{27} a_t \sum_{j=1}^{M(i)} \left\{ P_{ij}^{min} (x_{ij-1}^t - x_{ij}^t)^+ + \sum_{l=1}^{r(i,j)} p_{ijl}^t \right\} \leq R_{imax}$$

Legyen

$$(5.30) \quad h_i(p, \underline{x}) = \sum_{t=1}^{27} a_t \sum_{j=1}^{M(i)} \left\{ P_{ij}^{min} (x_{ij-1}^t - x_{ij}^t)^+ + \sum_{l=1}^{r(i,j)} P_{ijl}^t \right\},$$

a p teljesítmény változó és \underline{x} üzemmód változó lineáris függvénye. Ezt felhasználva a tüzelőanyagkényszer feltételek alakja:

$$(5.31) \quad R_{imin} \leq h_i(p, \underline{x}) \leq R_{imax}.$$

5.4. AZ EGYSZERŰSÍTETT MODELL SZERKEZETE, JELLEMZŐI, MÉRETE

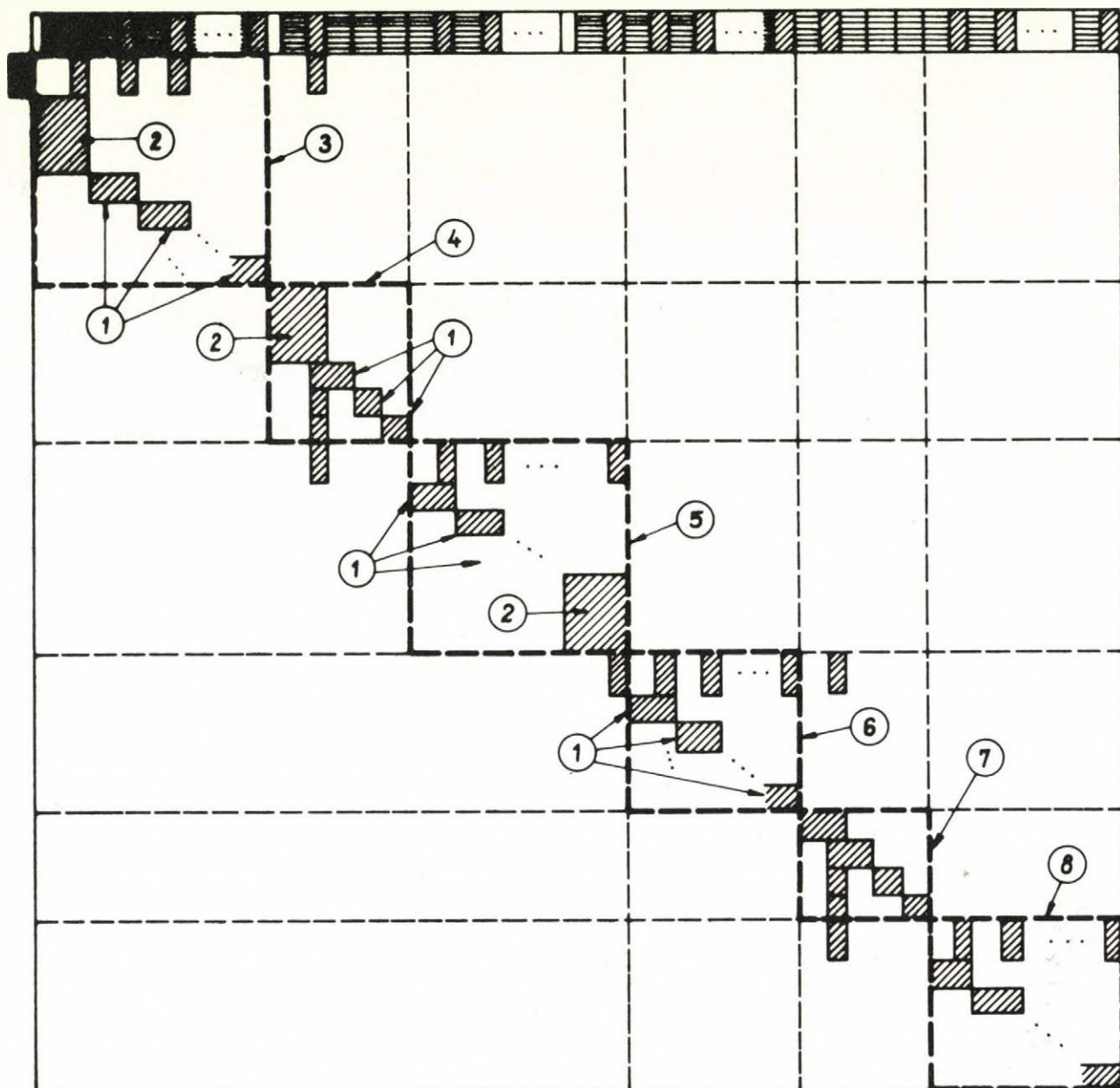
Az egyszerűsített modellnek megfelelő nagyméretű, vegyes-változós, lineáris célfüggvényt és feltételeket tartalmazó matematikai programozási feladat a következő.

A minimalizálandó célfüggvényt az (5.13)-ban szereplő állásköltség (5.14)-gyel csökkentett értékének és az (5.12) termelési költségnek, valamint az (5.15) hálózati veszteség költségnek az összege szolgáltatja.

A korlátozó feltételrendszer a következőket tartalmazza:

- (5.16) összekapcsolási feltételek,
- (5.17) ellátási feltétel,
- (5.19) üzemmód változók korlátozó feltételei,
- (5.22) feszültségtartási feltételek,
- (5.24) ágterhelési feltételek,
- (5.25) meddőforrás feltételek,
- (5.27) - (5.28) kikapcsolási-bekapcsolási feltételek,
- (5.30) tüzelőanyagkényszer feltételek.

A 15. ábrán e feladat együtthatómátrixának rajza látható. A változók periódusonként a következő sorrendben szerepelnek: feszültségi változók, teljesítmény változók, üzemmód változók. (Emlékeztetõül megemlítjük, hogy csak néhány periódushoz tartoznak feszültségi változók és a stagnálási szakaszok második, harmadik és negyedik periódusaihoz nem tartoznak üzemmód változók.)



15. ábra. Az egyszerűsített modell szerkezete

Minden periódushoz tartozik a feltételeknek egy blokkja. Ebben azok a feltételek szerepelnek, amelyek csak az adott periódus változóit tartalmazzák. Normál periódushoz tartozó blokkot az ábrán ① jelöli, míg a feszültségellenőrző periódusok blokkját ② .

Az ábrán szaggatott vonallal egybekapcsolt blokkok egy-egy szakasz (kikapcsolás, stagnálás, bekapcsolás) feltételeit foglalják össze. Az ① és ② -vel jelölt blokkokon kívül a kikapcsolási szakasznak megfelelő blokkok (ezeket az ábrán ③ és ⑥ jelöli) a kikapcsolási feltételeket, a bekapcsolási szakaszoknak megfelelő blokkok (⑤, ⑧) a bekapcsolási feltételeket tartalmazzák. A stagnálási szakaszoknak megfelelő blokkok (jelük az ábrán ④ és ⑦) egyetlen üzemmódváltozó vektort tartalmaznak. A hozzájuk tartozó, a periódusoknak megfelelő "kis blokkok" ezen üzemmódváltozó vektoron keresztül kapcsolódnak egymáshoz.

Ugyanezek az üzemmódváltozó vektorok létesítenek kapcsolatot a ③ és ⑤ blokk, ill. a ⑥ és ⑧ blokk között. Az ⑤ és ⑥ blokk az első bekapcsolási szakasz utolsó periódusához tartozó üzemmódváltozó vektoron keresztül kapcsolódik egymáshoz.

Az ábra felső részén levő, az összes periódust összekapcsoló feltételek a tüzelőanyagkényszer feltételek.

Az egyszerűsített modellnek megfelelő vegyesváltozós, lineáris, programozási feladat mérete:

változóinak száma:

1. 0-1 értékű változóinak száma = $21 \times$ (az energiatermelő rendszerben alkalmazható üzemmódok számának, és az erőművek számának különbsége);
2. teljesítményváltozóinak száma = $27 \times$ az energiatermelő rendszerben alkalmazható üzemmódok termelési költség-függvényei-közelítő szakaszai számainak összege.

3. feszültségi változók száma = a hálózat meddőforrás csomópontjainak a számának háromszorosa;

feltételeinek száma:

1. normál periódus esetén periódusonként (tehát a feladatban 24-szer): a teljesítmény változókkal azonos számú összekapcsolási feltétel + 1 ellátási feltétel + az üzemmód változók számával azonos számú, ezeket korlátozó feltétel (a stagnálási szakasz második, harmadik, negyedik periódusában az üzemmód változók száma 0);
2. feszültségellenőrző periódus esetén a normál periódus feltételein túl még: 2-szer a meddőforrás-csomópontok száma + 60 feltétel, amelyek közül a meddőforrás-csomópontok számával megegyező számú, egyedi alsó-felső korlát;
3. a kikapcsolási és bekapcsolási feltételek száma = 21-szer az erőműrendszerben alkalmazható üzemmódok száma;
4. a tüzelőanyagkényszer feltételek száma maximálisan 5.

A feladat megoldásával a következő fejezetben foglalkozunk.

5.5. A 4. ÉS 5. FEJEZETBEN BEVEZETETT JELÖLÉSEK ÖSSZEFOGLALÁSA

- $S_{ij}(\tau)$ az i -edik erőmű j -edik üzemmódjának állásköltségfüggvénye,
- $r(i, j)$ az $f_{ij}(P)$ függvény közelítő szakaszainak a száma,
- $P_{ijl}^{min}, P_{ijl}^{max}$ az l -edik közelítő szakasz végpontjaihoz tartozó teljesítményszintek,
- c_{ijl} az l -edik közelítő szakasz meredeksége,

- d_{ij}^t az i-edik erőmű j-edik üzemmódja állásköltségének a t-edik periódusban figyelembe veendő része,
- $\underline{x}^t, x_{ij}^t$ a t-edik periódushoz tartozó üzemmód változó, illetve komponens,
- \underline{x}^0 a tervidőszakot megelőző nap utolsó periódusának üzemmódváltozó vektora,
- t_0, t_1 az első és a második stagnálási szakasz kezdetének megfelelő periódus sorszáma,
- $p_{ijl}^t \quad l=1, 2, \dots, r(i, j)$ az i-edik erőmű j-edik üzemmódja teljesítményszintjét megadó teljesítményváltozó komponense - a t-edik periódusban,
- $\underline{p}, \underline{p}$ a t-edik periódushoz tartozó teljesítmény változó vektor és a teljes időszakhoz tartozó teljesítmény változó vektor,
- t^* az első bekapcsolási szakasz utolsó periódusának sorszáma,
- $h_i(\underline{p}, \underline{x})$ az i-edik erőmű napi termelését megadó lineáris függvény,
- L meddőforrás-csomópontok száma ($=N_M$),
- N_F a fogyasztói csomópontok száma, $L+N_F=N$,
- \underline{u} a feszültségi változók vektora valamely rögzített periódusban, komponenseit a meddőforrás-csomópontok feszültségeinek valós része alkotja, $\underline{u} \in R^L$.
- $(\underline{v}^*, \underline{w}^*)$ a munkaponti feszültségek vektora,
- u_i^{min} a meddőforrás-csomópont feszültsége valós részének alsó korlátja,
- u_i^{max} a meddőforrás-csomópont feszültsége valós részének felső korlátja,

B $M \times M$ méretű diagonális mátrix, diagonális
 elemei a B_{ik} mennyiségek (lásd F.3.rész),
 V $N \times N$ méretű mátrix, a teljesítményáramlás feszült-
 ség-függésének kompakt felírása céljából a (4.17)
 összefüggés után bevezetve definícióját lásd ott),
 A a hálózat - a Függelék jelöléseivel az $(N_\gamma, \mathcal{A}^D)$ gráf-
 csúcs, él incidencia mátrix,
 Z^N a következőképpen kapható: törlendő az $A^T B V$
 mátrix referenciaponti sora és oszlopa, az így
 adódó mátrix inverze 0 sorral és oszloppal
 egészítendő ki a törölt soroknak megfelelő po-
 zíciókban;

$$Y = \left(\begin{array}{cc} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} L \\ \} N_F \end{array} \right\} \begin{array}{l} L \\ N_F \end{array}$$

a $g(\underline{v}, \underline{w}^*) : R^N \rightarrow R^N$ leképezés Jacobi
 mátrixa, a meddőforrások és fogyasztói
 csomópontok szerint particionálva;

D^* a teljesítmény és üzemállapot változókból a
 tényleges csomóponti hatásosteljesítmény-betáp-
 lálást adó lineáris transzformáció mátrixa,
 \underline{P}^K az ágankénti hatásosteljesítmény-veszteségek
 korrekciós vektora,
 \underline{d}^v a célfüggvény veszteségi részében \underline{u} együtt-
 hatója,
 \underline{b}^v a célfüggvény veszteségi részében a $\underline{p}, \underline{x}$ vál-
 tozók együttthatóinak konstrukciójához szükséges
 vektor,
 γ 1 MWh hatásosteljesítmény-veszteség költsége
 Ft-ban.

6. A NAPI MENETREND MEGHATÁROZÁSA

A villamos energiát termelő erőműrendszer és az azt továbbító hálózat napról napra változik, így mind a megoldandó feladat, mind a feladat mérete más és más lesz, bár az egyes feladatok felépítése hasonló. Ebben a fejezetben azt ismertetjük, hogy az ütemezési probléma egyszerűsített modelljének megfelelő napi feladatot hogyan lehet előállítani és megoldani.

6.1. A NAPI ADATOKNAK MEGFELELŐ VEGYESVÁLTOZOS FELADAT

GENERÁLÁSA

A hálózatban szükséges javítások, az üzemzavarok elhárítása, vagy más szerelési munkák miatt egy adott napon a hálózat egyes ágainak kapacitása megváltozik (pl. párhuzamos vezetékek, transzformátorok esetében), vagy pedig egyáltalán nem is használható villamos energia továbbítására. Hasonló a helyzet az erőművekkel; az üzemeltethető erőművek, ill. a használható üzemmódok is napról napra változnak nagyjavítások, berendezések elromlása stb. miatt. Ezért az ütemezési problémának megfelelő napi feladatot mindig elő kell állítani, vagyis a villamos hálózat és az erőművek állandó adatait tartalmazó adatbázisból a megfelelő módosítások felhasználásával meg kell határozni a naprakész állapotot, az adott napon használható villamos hálózatot, az egyes ágak aktuális kapacitását, az erőművek adott napon lehetséges üzemmódjait és az azokhoz tartozó korlátokat valamint a feltételeket.

Külön problémát képez egy adott napi feladatban fellépő feszültség-ellenőrző periódusok feltételrendszerének előállítása. Ehhez először megoldunk egy load flow feladatot a munkapont és az ehhez tartozó hálózati veszteségek meghatározása céljából, majd az ezen munkaponthoz és veszteséghez tartozó feltételrendszert generáljuk (a feladatban a feltételek közül csak bizonyosokat veszünk figyelembe, lásd 4.11. bekezdést). Megjegyezzük, hogy az optimalizálás eredményeként a meddőforrást tartalmazó csomópontokban jelentkező feszültségértékek

alapján újra kiszámítjuk a feszültség-eloszlást. Mivel a cél-függvényben szerepelnek veszteségi együtthatók, ezért a munkati veszteségeknél kisebbeket kapunk (lásd 4.5. bekezdést).

A napi feladat többi részét, a ki- és bekapcsolási feltételeket, az összekapcsolási, az ellátási és a tüzelőanyag-kényszer feltételeket a már említett adatokból, ill. az adott napra előrebecsült fogyasztói villamosenergia-igényekből határozzuk meg. Itt jegyezzük meg, hogy az előrebecslés legfeljebb 1-2% -kal tér el a tényleges igénytől.

6.2. MEGOLDÁSI LEHETŐSÉGEK

Az ilyen módon előállított nagyméretű, vegyesváltozós - mind valós, mind csak egész (0-1) értékeket felvevő változókat tartalmazó - modell számítógépes optimalizálását többféle algoritmussal lehet elvégezni.

Elsősorban a Benders dekompozíciós eljárás felhasználására gondoltunk, amellyel az egész feladatot egyszerre oldottuk volna meg. Ezt az elgondolást némi megfontolás után elvetettük. A Benders dekompozíció folyamán ugyanis (lásd 6.4. bekezdés) nagyszámú, egészértékű változókat tartalmazó feladatot kell minden iterációban megoldani, amelyekből pedig már egy feladatnak a megoldása önmagában is nehéz feladat lett volna. Az ilyen, csak egészértékű változókat tartalmazó feladatoknak már nincsen meg az a dekomponálható struktúrája sem, amely az eredeti feladatra - néhány feltétel elhagyása után - jellemző. Szóba került a feladat branch and bound (korlátozás és szétválasztás) módszerrel történő megoldása is, amelyben a keletkezett lineáris programozási feladatokat a Dantzig-Wolfe dekompozíciós eljárással optimalizáljuk. Ezt a lehetőséget azért vetettük el, mert az egészértékű változók száma igen nagy lehet (esetenként 400 is), ami pedig a branch and bound eljárást teszi gyakorlatilag felhasználhatatlanná.

Mindezen megfontolások és az ütemezési probléma fizikai hátterére támaszkodva, egy részben heurisztikus elemeket is tartalmazó, dekompozíciós, optimalizáló eljárás alkalmazása mellett döntöttünk: a feladatot durván szólva periódusonként oldjuk meg, de megfelelő mellékfeltevésekkel biztosítjuk ezek

összekapcsolhatóságát és a tüzelőanyagkényszer feltétel teljesülését. Az eljárást a következő pontban részletezzük.

6.3. AZ OPTIMALIZÁLO ELJÁRÁS

Az ütemezési probléma egyszerűsített modelljének megfelelő feladat feltételeit nem explicit formában - minden feltételt egyszerre - vesszük figyelembe, hanem csoportokra bontva. A szétbontást az teszi lehetővé, hogy a ki- és bekapcsolási feltételektől eltekintve az egyes periódusokat csak a tüzelőanyagkényszer feltételek fogják össze. Az optimalizáló algoritmus a következő lépésekből áll (az eljárást arra az esetre részletezzük, amikor egyetlen tüzelőanyagkényszert előíró feltételünk van).

1. Elhagyjuk a tüzelőanyagkényszer feltételét.

2. A fennmaradó nagyméretű, vegyes, egészértékű, programozási feladatot - amelyben az egyes periódusok közötti kapcsolatot a ki- és bekapcsolási feltételek, valamint a stagnálási szakaszok üzemmód változói biztosítják - a következő módon oldjuk meg (az algoritmus 3. és 4. lépése).

3. Megoldjuk rendre az első, második és harmadik feszültség-ellenőrző periódust úgy, hogy az üzemmód változók lehetséges értékeire nézve bizonyos korlátozásokkal élünk. Az első feszültség-ellenőrző periódus megoldásában minden, az adott napon alkalmazható üzemmód előfordulhat, nincs korlátozás. A második feszültség-ellenőrző periódus (amely az első stagnálás első periódusa) megoldásában csak olyan üzemmódokat engedünk meg, amelyek az első feszültséges periódus megoldásában kapott üzemmódokból *kikapcsolásokkal* kapható meg. Végül a harmadik feszültség-ellenőrző periódusban (a délelőtti legnagyobb teljesítményigény periódusában) olyan üzemmódok fordulhatnak elő, amelyek a második feszültségellenőrző periódus megoldásában szereplő üzemmódokból *bekapcsolásokkal* nyerhetők.

4. Ezek után megoldjuk sorban a még meg nem oldott periódusok feladatát úgy, hogy az adott periódus előtt ill. után levő, már megoldott periódusok üzemmód változóinak értékeit is figyelembe vesszük. Ez úgy történik, hogy kikapcsolási szakaszban csak olyan üzemmódokat veszünk figyelembe az adott periódus megoldásánál, amelyek (i) a korábbi, már megoldott és a kikapcsolási szakaszban levő periódus üzemállapot-rendszeréből kikapcsolással jöhetnek létre (ezt röviden úgy nevezzük, hogy az előző periódusból kikapcsolással kaphatók meg), és amelyekből (ii) a későbbi, már megoldott és a kikapcsolási szakaszban levő periódus üzemállapot rendszere további kikapcsolással kapható meg. Hasonlóképpen bekapcsolási szakaszban csak olyan üzemmódokat engedünk meg egy adott periódus megoldásánál, amelyek (i) a korábbi, már megoldott és a bekapcsolási szakaszban levő periódus üzemállapot rendszeréből bekapcsolással jöhetnek létre (ezt röviden úgy nevezzük, hogy egy előző periódusból bekapcsolással kapható meg) és amelyekből (ii) a későbbi, már megoldott és a bekapcsolási szakaszban levő periódus üzemállapot rendszere további bekapcsolással kapható meg. Mind a kikapcsolásnál, mind a bekapcsolásnál lehetnek (és vannak is) nem változó üzemmód változók.

Például a második periódus megoldásánál csak olyan üzemmódok jöhetnek számításba, amelyek az első feszültségellenőrző periódusból kikapcsolással jöhetnek létre, és amelyekből a második (már szintén megoldott) feszültségellenőrző periódus üzemmódjai csak kikapcsolásokkal valósíthatók meg. A harmadik periódus megoldásánál a második periódus és a második feszültségellenőrző periódus üzemmódjait kell figyelembe venni stb. A harmadik feszültségellenőrző periódus után de még a második stagnálás előtti periódusok megoldásánál olyan üzemmódokat engedünk meg, amelyek csak az előzőleg megoldott periódusoktól függenek, abból kikapcsolással állíthatók elő, míg a stagnálási szakasz utáni periódusok megoldásánál olyan üzemmódokat engedünk meg, amelyek az előzőleg megoldott periódusból bekapcsolásokkal állíthatók elő.

Az egy periódusnak megfelelő feladatot mindig a következő, 6.4. bekezdésben leírásra kerülő Benders dekompozíciós eljárással oldjuk meg, amely képes a fentebb leírt üzemmód korlátozásokat figyelembe venni.

5. Az egész napra vonatkozó megoldás fentebbiekben leírt meghatározása után ellenőrizzük, hogy a megoldás kielégíti-e a tüzelőanyagkényszer feltételt. Ha igen, akkor az algoritmus véget ér, megkaptuk az optimális megoldást, egyébként pedig az algoritmus 6. lépésben leírásra kerülő iteratív eljárást alkalmazzuk a kapott megoldás módosítására.

6. Az iterációs eljárásban lényegében a tüzelőanyag költség növelésével ill. csökkentésével érjük el a tüzelőanyagkényszeres erőmű villamosenergia-termelésének csökkentését ill. növelését.

Az 5.3.4. bekezdésben szereplő (5.31) képlet szerint a tüzelőanyagkényszer feltétele a

$$(6.1) \quad R_{imin} \leq h_i(\underline{p}, \underline{x}) \leq R_{imax}$$

alakban adható meg. Itt $(R_{imin} + R_{imax})/2$ egy előre megadott érték, továbbá

$$\frac{R_{imax} + R_{imin}}{2} - R_{imin} = R_{imax} - \frac{R_{imax} + R_{imin}}{2} = \frac{k}{100} \frac{R_{imax} + R_{imin}}{2}$$

ahol jelen esetben k egy előre megadott egész szám, amely a megengedett eltérést adja meg %-ban (a szokásos érték: $k=3,4,5$). Az adatelőkészítés folyamán arról külön meggyőződünk, hogy az adott R_{imin} és R_{imax} állandók mellett lehetséges-e olyan $(\underline{p}, \underline{x})$ vektorpárt találni, amely a (6.1) egyenlőtlenséget kielégíti.

Jelöljük most az algoritmus 3. és 4. pontjának végrehajtása során meghatározott megoldást (p_0, x_0) -lal. Ha most

$$R_{imin} \leq h_i(p_0, x_0) \leq R_{imax}$$

egyenlőtlenség nem teljesül (egyébként már az algoritmus 5. pontjában végetért volna az optimalizálás), akkor lerögzítjük az x_0 vektort, vagyis a továbbiakban nem változtatunk üzemmódot. Tekintsük azt a feladatot, amelyet az eredeti feladatból úgy kapunk, hogy a tüzelőanyagkényszer feltételt elhagyjuk és az x_0 vektor értékeit behelyettesítjük. Jelöljük ezt a feladatot $F_0(x_0)$ -lal, ez egy 27, egymástól független blckkból álló közönséges lineáris programozási feladat a p ismeretlen vektorra nézve. Ebből a feladatból kiindulva képezük az $F_1(x_0), F_2(x_0) \dots$ feladatok sorozatát, az egyes feladatok egymástól csak a tüzelőanyagkényszeres erőmű működésben levő üzemmódjának teljesítmény változójához tartozó célfüggvénybeli c_1, c_2, \dots, c_k együtthatóban különböznek. Az $F_k(x_0)$ feladatban a c_k együttható szerepel, az $F_0(x_0)$ feladatban az eredeti feladatban szereplő, c_0 -lal jelölt együttható. Az $F_k(x_0)$ feladat optimális megoldását p_k -val jelölve c_{k+1} együtthatót és ezzel együtt az $F_{k+1}(x_0)$ feladatot a következő rekurziók adják meg ($s_0=1$):

$$(6.2) \quad c_{k+1} = c_k s_{k+1}/s_k$$

$$(6.3) \quad s_{k+1} = \begin{cases} s_k \begin{bmatrix} 1-0,3 & \frac{R_{imin} - h_i(p_k, x_0)}{R_{imin} + R_{imax}} \end{bmatrix}, & \text{ha } h_i(p_k, x_0) < R_{imin} \\ s_k \begin{bmatrix} 1-0,3 & \frac{R_{imax} - h_i(p_k, x_0)}{R_{imin} + R_{imax}} \end{bmatrix}, & \text{ha } h_i(p_k, x_0) > R_{imax} \end{cases}$$

A többszörös munkát elkerülendő már előfordult árakat kizárunk. Ezt azáltal érjük el, hogy két, egyre kisebb ingadozást engedő s_{min} és s_{max} korlát között hagyjuk csak az s_k szorzót változni. Legyen kezdetben

$$s_{min} = 0.001 \quad s_{max} = 1000.$$

Egy s_k szorzó alultermelést, ill. túltermelést okoz, ha az s_k -val számított c_k együtthatóval felírt modell optimális p_k megoldása esetén $h_i(p_k, x_0) < R_{imin}$ (ill. $h_i(p_k, x_0) > R_{imax}$). Amennyiben az újonnan meghatározott p_k vektor esetében alultermelés van, akkor $s_{min} < s_k < s_{max}$ esetén $s_{max} = s_k$ lesz az új határ (túlterhelés esetén $s_{min} = s_k$).

Tehát s_{max} tartalmazza az eddigi alultermelést okozó szorzók közül a legkisebbet, s_{min} pedig a túltermelést okozó szorzók közül a legnagyobbat. Ha az $s_{min} < s_k < s_{max}$ egyenlőtlenség teljesül a (6.3) által kiszámított s_k együtthatóra, akkor a (6.2) szerint árat módosítunk, egyébként az

$s_k = \frac{s_{min} + s_{max}}{2}$ értéket használjuk a c_k meghatározására (6.2)-ben. Ez az s_{min} és s_{max} kettős korlát állandóan szűkíti a lehetséges szorzók választási intervallumát, tehát egyszer már használt c_k ár nem térhet vissza.

A leírt ármódosításnak a következő az értelme. Ha a tüzelőanyagkényszeres erőműben kevesebb villamos energiát termelünk, mint kellene (alultermelés van, vagyis $h_i(p_k, x_0) < R_{imin}$), akkor a következő feladatban a célfüggvénybeli együtthatót az előzőhöz képest csökkentjük, hogy a termelt energia növekedjék (ugyanis a modell költség-minimalizáló). Hasonlóképpen túltermelés esetén (vagyis ha $h_i(p_k, x_0) > R_{imax}$) megdrágítjuk a következő, $(k+1)$ -edik feladatban az energia termelésének költségét, hogy az adott erőműben kevesebb energiát termeljünk.

Az $F_0(x_0)$, $F_1(x_0)$, $F_2(x_0)$... feladatok megoldásaként nyert p_0, p_1, \dots optimális megoldások sorozatára a következő

két eset közül az egyik fennáll:

a./ találunk egy olyan p_k megoldást, amelyre a (6.1) egyenlőtlenség teljesül, azaz a (p_k, x_0) megoldás kielégíti a szükséges anyagkényszer feltételét is;

b./ találunk olyan p_l és p_j megoldáspárt, amelyre a $h_i(p_l, x_0) < R_{imin}$ $h_i(p_j, x_0) > R_{imax}$ teljesül.

Egyéb esetek - például csak alultermelést okozó p_k megoldások előfordulása - az adatoknak a (6.1) képlet megadása után vázolt ellenőrzése miatt nem fordulhatnak elő. Az a./ esetben az optimalizálás végetér, a p_k megoldásvektort, ill. a (p_k, x_0) megoldást az eredeti feladat optimális megoldásának tekintjük. A b./ esetben a következőképpen járunk el. A $h_i(p, x_0)$ függvény x_0 lerögzítése után p -ben lineáris. Így

$$\alpha h_i(p_l, x_0) + (1-\alpha) h_i(p_j, x_0) = \frac{R_{imin} + R_{imax}}{2}$$

egyenlőségből az α szorzó $0 \leq \alpha \leq 1$ meghatározható és ezzel a $p_{opt} = \alpha p_l + (1-\alpha)p_j$ vektor is, amelyet optimális megoldásnak tekintünk, hiszen ez megengedett és

$$h_i(p_{opt}, x_0) = \frac{R_{imin} + R_{imax}}{2}$$

is fennáll.

Természetesen α helyett használhatjuk a következő egyenlőtlenségekből nyerhető α_1, α_2 számokat is:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \alpha_1 h_i(p_l, x_0) + (1-\alpha_1) h_i(p_j, x_0) &= R_{imin} \\ \alpha_2 h_i(p_l, x_0) + (1-\alpha_2) h_i(p_j, x_0) &= R_{imax} \end{aligned}$$

ahol α_1 és α_2 a tüzelőanyagkényszer feltétel alsó és felső korlátjához tartozó két érték.

Az α szám használatát az indokolja, hogy a tüzelőanyagkényszer feltétel egyenlőség alakjában is megadható egy adott mennyiségű tüzelőanyag elfogyasztásának előírásával, ill. egy adott $(R_{imin} + R_{imax})/2$ mennyiségű energia fejlesztésének megkövetelésével.

6.4. A BENDERS DEKOMPOZÍCIÓ A RÉSZFELADATOK MEGOLDÁSÁRA

A megelőző 6.3. bekezdésben ismertetett optimalizáló eljárás alkalmazása esetén a teljes feladat 27 részfeladatra bomlik fel. Ezek - típusuk szerint - három csoportba sorolhatók:

- a./ feszültség-ellenőrző periódusok feladata;
- b./ stagnálási szakaszok nem első periódusainak feladata;
- c./ a megmaradó ún. normál periódusok feladata.

Az a./ és c./ pont alatti feladatok lineáris, vegyes, egészértékű optimalizálási feladatok, ezek megoldására a feladatok sajátosságait felhasználó Benders dekompozíciót alkalmazunk. A b./ pontban említett feladatok egyfeltételes, korlátos változójú lineáris programozási feladatok, megoldásukra a "mohó" algoritmust alkalmazzuk (Kovács László Béla [40]).

A fejezet további részeiben a Benders dekompozíciót és annak alkalmazásakor végrehajtott egyszerűsítéseket írjuk le. Leírásunkban csupán a lineáris, vegyes, egészértékű esetre szorítkozunk; a részletek iránt érdeklődő olvasónak Benders [1], Kovács László B. [40], Lasdon [43] művét ajánljuk.

A Benders dekompozíció a következő típusú optimalizálási feladat megoldására szolgál (az algoritmus és a feladat leírásakor jelöléseink függetlenek a korábbi fejezetben bevezetett változó-elnevezésektől).

$$\begin{aligned}
 & A\underline{x} + F\underline{y} \leq \underline{b} \\
 & \underline{x} \geq \underline{0} \\
 & \underline{y} \in Y \\
 & \max(\underline{c}^T \underline{x} + \underline{f}^T \underline{y}) ,
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

ahol:

- A : $m \times n_1$ -es mátrix;
- F : $m \times n_2$ -es mátrix;
- $\underline{c}, \underline{x}$: n_1 dimenziós vektor;
- $\underline{f}, \underline{y}$: n_2 dimenziós vektor;
- \underline{b} : m dimenziós vektor;
- Y : n_2 dimenziós diszkrét halmaz.

A kitűzött feladat ekvivalens az

$$\begin{aligned}
 & x_0 + ((\underline{u}^j)^T F - \underline{f}^T) \underline{y} \leq (\underline{u}^j)^T \underline{b}, \quad j=1, \dots, p \\
 & (\underline{v}^j)^T F \underline{y} \leq (\underline{v}^j)^T \underline{b}, \quad j=1, \dots, r \\
 & \underline{y} \in Y \\
 & \max x_0
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

feladattal, ahol \underline{u}^j $j=1, \dots, p$ ill. \underline{v}^j $j=1, \dots, r$ az

$$\begin{aligned}
 & A^T \underline{u} \geq \underline{c} \\
 & \underline{u} \geq \underline{0}
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

feltételekkel meghatározott poliéder extrémális pontjai ill. extrémális irányai.

A (6.5) vegyes, egészértékű feladat helyett a (6.6) - az x_0 változótól eltekintve - egészértékű feladatot ki-

vánjuk megoldani. Ez utóbbira relaxációt alkalmazunk a feltételek explicit alakban való előállíthatatlansága és nagy száma miatt. Így egy iteratív eljárást kapunk, amelyben az i -edik iteráció a (6.6) feladat egy - feltételek elhagyásával keletkező - relaxáltjának (optimális megoldása legyen \underline{y}^i), valamint az

$$(6.8) \quad \begin{aligned} A^T \underline{u} &\geq \underline{c} \\ \underline{u} &\geq \underline{0} \\ \min (\underline{b} - F\underline{y}^i)^T \underline{u} \end{aligned}$$

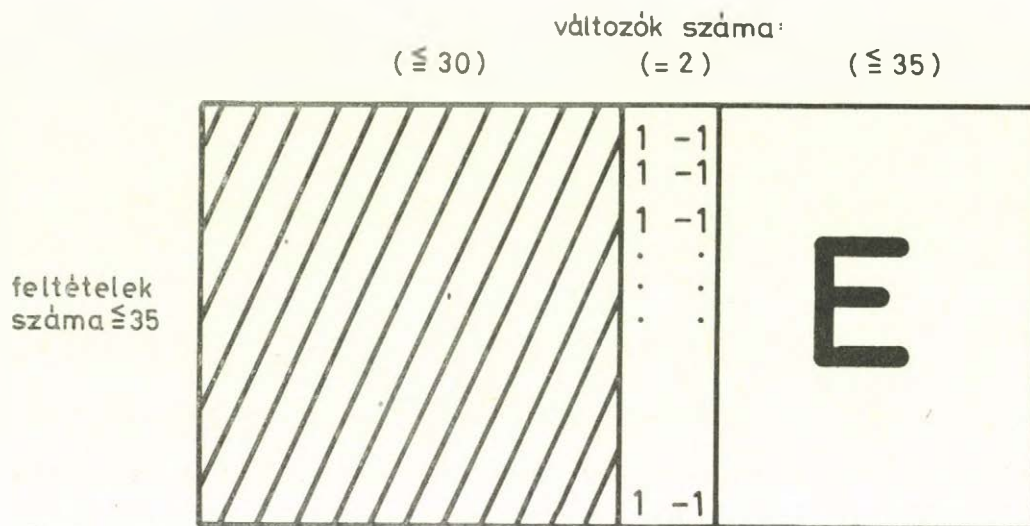
lineáris programozási feladat megoldásából áll.

A (6.8) feladatok megengedett tartománya azonos, az iterációk során csak a célfüggvényvektor változik a (6.6) feladat utolsóként megoldott relaxáltjának \underline{y}^i optimális megoldásának függvényében. A (6.8) feladatok az optimalitási kritérium teljesülésének ellenőrzésére és a (6.6) feladat újabb és újabb feltételének előállítására szolgálnak.

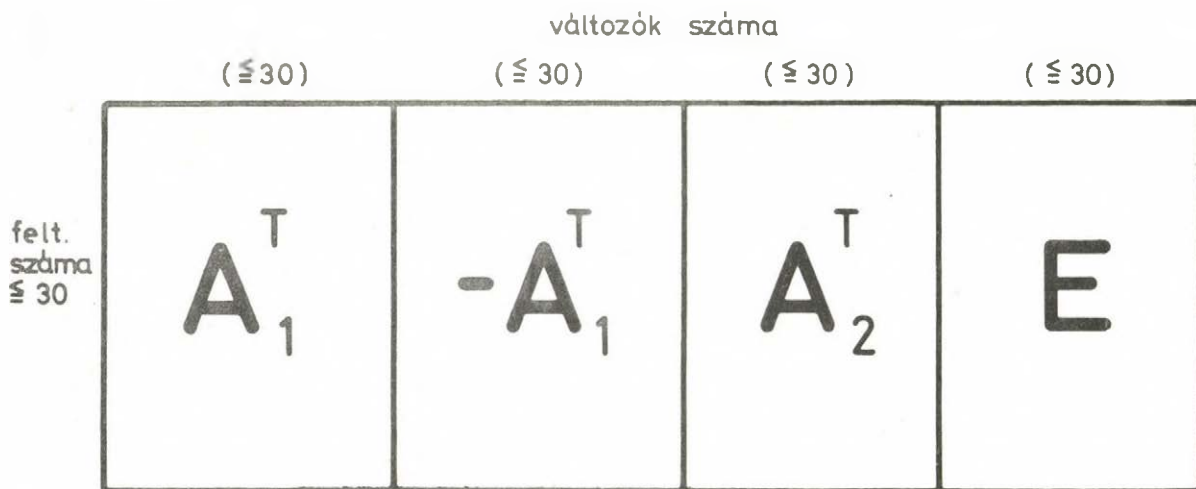
Az iteratív eljárás végén a (6.5) feladat optimális megoldásának folytonos (\underline{x}) részét a dualitás tétel alapján (Prékopa [55]) az utolsóként megoldott (6.8) feladat optimális megoldásához tartozó szimplex jellemzőiből előállíthatjuk, nincs szükség újabb lineáris programozási feladat megoldására (Hoffer [31]).

További egyszerűsítés az, hogy a (6.8) feladatok megoldására az első iterációban kétfázisú szimplex módszert alkalmazunk (Prékopa [55]); a többi iterációban a feladat megoldását a második fázisban kezdjük, induló megengedett megoldásként a megelőző iterációban nyert optimális megoldás szolgál.

A feszültség-ellenőrző periódusok feladatának megoldása során fellépő (6.8) lineáris programozási feladat két független blokkból áll. Ezért megoldását két független feladatra bontjuk (a felbontás után kapott két lineáris programozási feladat mátrixát lásd a 16. és 17. ábrán).



16. ábra



17. ábra

A feszültséges periódusok feladatában megoldandó LP két független blokkja

A normál periódusok feladatának megoldása során fellépő (6.8) lineáris programozási feladat megoldására vonatkozó egy további ötlet felhasználása folyamatban van; a Hoffer [32] -ben javasolt algoritmus alkalmazása jelentősen csökkentené a napi menetrend előállításához szükséges számítási időt.

Megjegyezzük még, hogy az F mátrix szerepe a dekompozíciós eljárás során különleges. Kizárólag mátrix-szorzási műveletekre használjuk azt; jobbról szorzunk vele a (6.6) relaxált feladatok feltételeinek előállításakor, balról pedig a (6.8) feladatok célfüggvény együtthatóinak kiszámításához. Minthogy mind a normál, mind a feszültségellenőrző periódusok feladatában az üzemmód változókhoz tartozó mátrixok jól strukturáltak - kivéve az ágterhelési feltételek részmatrixát - a velük való szorzási szabály könnyen leírható. Ezt a tényt kihasználva a programban nem töltöttünk fel egy mátrixot az elemekkel, hanem a szorzási műveleteket a speciális szerkezetnek megfelelően végezzük.

Az üzemmód változókra vonatkozó alábbi feltételeket (amelyek az Y halmaz tulajdonságait írják le) a (6.6) relaxált feladatainak megoldására alkalmazott leszámplálási algoritmuson belül a következőképpen érvényesítjük:

- egy megelőző és egy rákövetkező periódus üzemmód rendszer figyelembevételét a megfelelő üzemmód változók 0 vagy 1 szinten való rögzítésével;

- az adott periódusra vonatkozó további előírások betartását: bizonyos üzemmódok kötelező üzemeltetését vagy kötelező kikapcsolását hasonlóan az üzemmód változók rögzítésével;

- az üzemmód változók speciális logikáját leíró (5.19) feltételek teljesítését a leszámplálásbeli rögzítések és lekötések összes következményének megvizsgálásával és a megfelelő változók rögzítésével történik. Pl. ha valamely üzemmód változó 1 értéket kap a leszámplálás során, akkor az ugyanahhoz az erőműhöz tartozó kisebb indexű üzemmód változókat 1 értéken rögzítjük. Ha ugyanez a változó 0 értéket kapna, akkor a megfelelő nagyobb indexű üzemmód változókat rögzítjük le 0 szinten.

FÜGGELÉK

VILLAMOSENERGIA-RENDSZEREK ÁTVITELI HÁLÓZATÁRÓL

F.1. A VILLAMOS HÁLÓZATOK MATEMATIKAI MODELLJE

Ebben a részben egy villamos hálózatokra vonatkozó matematikai modellt építünk fel, Ehhez felhasználunk bizonyos szakirodalmat, így elsősorban a [39],[60],[69] műveket, azoktól azonban eltérünk, mert az átviteli hálózat matematikai modelljének konstrukciója megkívánja az ismert tényeknek a szokásostól eltérő rendszer szerinti szisztematikus tárgyalását, továbbá bizonyos fogalmak új megvilágításba helyezését. Így például az általunk bevezetett admittancia-transzformáció a szakirodalomban szereplő transzformációhoz képest lényegesen egyszerűbb, a fizikai szemlélethez nézetünk szerint jobban igazodó tárgyalásmódot tesz lehetővé.

A villamos hálózatot irányított gráffal modellezzük, ezért a teljesség kedvéért röviden összefoglaljuk a szükséges gráfelméleti alapismereteket.

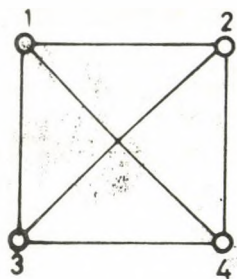
Tekintsünk egy \mathcal{N} véges halmazt, továbbá ennek bizonyos elempárjaiból alkossunk meg egy további \mathcal{A} halmazt. Az \mathcal{N} és \mathcal{A} halmazokat együtt gráfnak az \mathcal{N} halmaz elemeit csúcsoknak, az \mathcal{A} halmaz elemeit éleknek nevezzük. Az \mathcal{A} halmazban foglalt elempárok lehetnek rendezettek (amikor megmondjuk, hogy a két elem közül melyik az első és melyik a második), vagy nem rendezettek. Az előbbi esetben az éleket irányítottaknak, az utóbbi esetben nem irányítottaknak (irányítatlanoknak) nevezzük. A nem irányított élekkel bíró gráfot irányítatlan, az irányított élekkel bíró pedig irányított gráfnak nevezzük.

Ez utóbbinál a könnyebb megkülönböztethetőség kedvéért az élek halmazát \mathcal{A}° -vel jelöljük. A fenti módon megadott gráfok jelölésére az irányítatlan esetben az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ az irányított esetben pedig az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^{\circ})$ szimbólumokat alkalmazzuk.

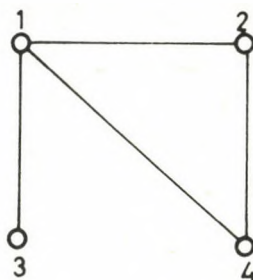
Először irányítatlan gráfokkal foglalkozunk. Ha az \mathcal{N} halmaznak n eleme van, akkor a gráf csucsainak jelölésére az $\{i, j\}$ számpár, pontosabban $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ halmaz egy két elemű részhalmaza. Azt mondjuk, hogy az $\{i, j\}$ él az i és j csúcsokat köti össze.

Világos, hogy ha a csúcsok száma n , akkor az élek száma legfeljebb $n(n-1)/2$ lehet.

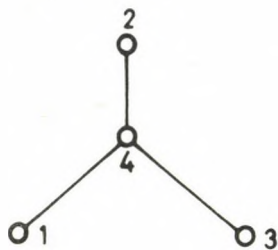
Egy gráfot oly módon szemléltetünk, hogy a síkban felvesszünk n számú pontot, ezek jelentik a gráf csúcsait és vonallal összekötjük az i, j pontokat, ha $\{i, j\} \in \mathcal{A}$. Az alábbi ábrákon négy gráfot láthatunk:



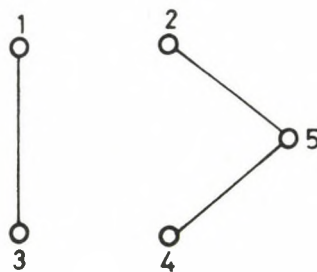
F1. ábra



F2. ábra.



F3. ábra



F4. ábra.

Az alábbiakban néhány fontos fogalmat ismertetünk, majd néhány tételt bizonyítunk be.

Részgráf. A $G' = (\mathcal{N}', \mathcal{A}')$ gráfot a $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ gráf részgráfjának nevezzük, ha $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ és $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$

Út. Ha s, i_1, \dots, i_k, t az \mathcal{N} halmaz különböző elemei, akkor az élek $\{s, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}, \{i_k, t\}$ sorozatát az s, t csucsokat összekötő utnak nevezzük.

Hurok. (Körút) Ha s, i_1, \dots, i_k az \mathcal{N} halmaz különböző elemei, akkor az élek $\{s, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}, \{i_k, s\}$ sorozatát huroknak nevezzük.

Összefüggő gráf. Ha a gráf bármely két különböző csúcsa összeköthető úttal, akkor azt mondjuk, hogy a gráf összefüggő.

(Az F.4. ábrán látható gráf nem összefüggő, az F.1., F.2., F.3. ábrán ábrázolt gráfok összefüggők.)

Fa. Egy gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és nincs benne hurok. (Az F.3. ábrán látható gráf fa.)

Feszítő fa. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ gráf $(\mathcal{N}', \mathcal{A}')$ részgráfját feszítő fának nevezzük, ha $(\mathcal{N}', \mathcal{A}')$ fa és $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$.

Izolált pont. Ha az i csúcs egyetlen élre sem illeszkedik, akkor azt izolált csucsnek nevezzük.

Végpont (terminális pont). Ha az i csúcs pontosan egy élre illeszkedik, akkor azt a gráf végpontjának, másnéven terminális pontjának nevezzük.

F1.1. tétel. Egy n csúccsal bíró fának $n-1$ éle van.

Bizonyítás: Az állítás az $n=1$ esetben nyilvánvalóan igaz, (egyetlen csúcsból álló gráf összefüggő és hurokmentes, tehát fa).

Az $n \geq 2$ esetben először bebizonyítjuk, hogy a fának van terminális pontja. Ha ugyanis tekintjük a gráfban konstruálható leg-hosszabb utat, akkor az a két pont, melyeket ez az út összeköt, terminális pont, hiszen ellenkező esetben az utat meg lehetne hosszabítani.

Ezek után a tételt az $n \geq 2$ esetben teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n=2$ esetben a tétel állítása nyilvánvalóan igaz. Feltéve, hogy az állítás igaz minden n csúccsal bíró fára, tekintsünk egy $n+1$ csúccsal bíró fát, ahol $n \geq 2$. Ennek egy tetszőleges terminális pontját és a hozzá csatlakozó élt elhagyva, egy n csúccsal bíró fát kapunk, melynek az indukciós feltevés szerint $n-1$ éle van. A most elhagyott éllel együtt tehát összesen n él van és így az állítást $n+1$ csúcs eseteére bebizonyítottuk. Ezzel az F.1.1. tétel bizonyítása készen van.

F.1.2. tétel. Egy fa minden csúcspárja pontosan egy úttal köthető össze.

Bizonyítás. Egy út létezését a fa definíciója is megkivánja. Ha volna olyan csúcspár, melyet két különböző úttal össze lehet kötni, akkor amint azt könnyű belátni, volna hurok is a gráfban. Ám ez nem lehetséges, mert a fa hurokmentes. Ezzel a bizonyítás készen van.

F.1.3. tétel. Ha egy gráf minden csúcspárja pontosan egy úttal köthető össze, akkor a gráf fa.

Bizonyítás. Minthogy a gráf a feltétel szerint összefüggő, csak a hurokmentességet kell belátni. Ez azonban egyszerűen következik, hiszen a hurok két tetszőleges csúcsa a hurokban levő élek felhasználásával két különböző módon úttal összeköthető. Ezzel az F.1.3. tételt bebizonyítottuk.

A fenti tételeket célszerű az alábbi, egyetlen tételben összefoglalni.

F.1.4. tétel. Egy n csúccsal bíró G gráf esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

- a./ a G gráf fa;
- b./ a G gráf minden csúcspárja egyértelműen összeköthető úttal;
- c./ G összefüggő és $n-1$ éle van;
- d./ G hurokmentes és $n-1$ éle van.

F.1.5. tétel. Ha a $G=(N, \mathcal{A})$ gráf fa és $\{i, j\} \in \mathcal{A}$, akkor a $G_1=(N, \mathcal{A} \cup \{i, j\})$ gráfban pontosan egy hurok van.

Bizonyítás. A G_1 gráfban biztosan van hurok, ugyanis a csúcsainak a száma ugyanannyi, mint a G gráf esetén, ám eggyel több éle van; a G_1 gráf tehát nem fa, viszont összefüggő, amiből következik, hogy van benne hurok. Azt kell csak belátunk, hogy nincs két hurok G_1 -ben. Indirekt bizonyítással élve, tegyük fel, hogy G_1 -ben van két hurok. Ekkor az $\{i, j\}$ él mindkettőben benne kell, hogy legyen, hiszen G -ben nincsen hurok. Mindkét hurokból az $\{i, j\}$ élt elhagyva az i és a j csúcsokat összekötő két különböző utat kapunk, ami a 2. tétel szerint nem lehetséges.

F.1.6. tétel. Ha a $G=(N, \mathcal{A})$ gráf összefüggő, akkor tartalmaz feszítő fát.

Bizonyítás. Konstruktív bizonyítást alkalmazunk. Legyen $N_1=\{i_1\}$, $\mathcal{A}_1=\emptyset$, ahol $i_1 \in N$ tetszőleges, ekkor $G_1=(N_1, \mathcal{A}_1)$ részgráfja G -nek és triviálisan fa. Tételezzük fel, hogy a G gráf $G_k=(N_k, \mathcal{A}_k)$ részgráfja adott és ez fa $1 \leq k \leq n-1$. Ekkor G_{k+1} -et a következő módon konstruáljuk: Mivel G összefüggő, ezért van olyan $i_p \in N_k$ és $i_q \in N \setminus N_k$, melyre $\{i_p, i_q\} \in \mathcal{A}$. Legyen $N_{k+1}=N_k \cup \{i_q\}$ és $\mathcal{A}_{k+1}=\mathcal{A}_k \cup \{i_p, i_q\}$. Ekkor világos, hogy $G_{k+1}=(N_{k+1}, \mathcal{A}_{k+1})$ újra fa lesz és így $G_n=(N_n, \mathcal{A}_n)$ feszítő fa. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

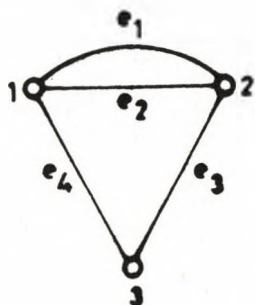
Az irányítatlan gráf éleit az eddigiek során az illető él végpontjaiból alkotott csúcspárral azonosítottuk. A villamos hálózatok modellezéséhez azonban olyan irányítatlan gráf-fogalomra van szükség, amelyben két csúcspontot egynél több él is összeköthet, így az élek a végpontjaikból alkotott csúcspárral már nem lesznek azonosíthatók. Ezért az irányítatlan gráf definícióját általánosabban fogalmazzuk meg, a továbbiak során irányítatlan gráfon a következőket fogjuk érteni:

Tekintsük az \mathcal{N}, \mathcal{A} véges halmazokat és rendeljük hozzá \mathcal{A} minden egyes eleméhez az \mathcal{N} halmaz elemeiből alkotott egy-egy rendezetlen elempárt, pontosabban \mathcal{N} valamely kételemű részhalmazát. Az \mathcal{N}, \mathcal{A} halmazokat a fenti hozzárendeléssel együtt irányítatlan gráfoknak nevezzük és az egyszerűség kedvéért továbbra is az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ szimbólummal jelöljük. Az \mathcal{N} halmaz elemeit csúcsoknak, az \mathcal{A} halmaz elemeit éleknek nevezzük.

Legyen \mathcal{N} elemszáma n ; \mathcal{A} elemszáma m . A gráf csúcsainak jelölésére itt is az $1, \dots, n$ számokat alkalmazhatjuk, a gráf éleit jelölje rendre e_1, e_2, \dots, e_m . Ha $e_k \in \mathcal{A}$ és az ehhez az élhez hozzárendelt elempár $\{i, j\}$, ezt az $e_k \rightarrow \{i, j\}$ szimbólummal jelöljük. Amennyiben $e_k \rightarrow \{i, j\}$ és $e_l \rightarrow \{i, j\}, k \neq l$ teljesül, akkor az e_k, e_l éleket párhuzamos éleknek nevezzük.

Világos, hogy az indulásként definiált irányítatlan gráf mostani definíciójából speciális esetként adódik, amennyiben a definícióban szereplő hozzárendelésről kikötjük, hogy különböző élekhez különböző csúcspárokat rendeljen.

A gráf szemléltetése az eddigiekhez hasonlóan történhet. A sikon felvett n számú pont reprezentálja a gráf csúcsait, és az $\{i, j\}$ pontokat annyi vonallal kötjük össze, ahány élhez az $\{i, j\}$ számpár hozzá van rendelve. Az élek mellé felírjuk az él azonosítóját. Az F.5. ábrán látható gráfban e_1, e_2 párhuzamos élek.



F5. ábra.

A részgráf, út, hurok definíciója a következőképpen módosul:

Részgráf. A $G'=(N', E')$ gráfot a $G=(N, E)$ gráf részgráfjának nevezzük, ha: $N' \subseteq N$, $E' \subseteq E$, továbbá az E' halmaz elemeihez ugyanazokat az elempárokat rendeljük a G' gráfban, mint a G gráfban.

Ut. Ha s, i_1, \dots, i_k, t az N halmaz különböző elemei, akkor az élek $e_{j_1}, \dots, e_{j_{k+1}}$ sorozatát az s, t csucsokat összekötő utnak nevezzük, amennyiben $e_{j_1} \rightarrow \{s, i_1\}$, $e_{j_2} \rightarrow \{i_1, i_2\}, \dots, \dots, e_{j_k} \rightarrow \{i_{k-1}, i_k\}$, $e_{j_{k+1}} \rightarrow \{i_k, t\}$ érvényes.

Hurok. Ha s, i_1, \dots, i_k az N halmaz különböző elemei akkor az élek $e_{j_1}, \dots, e_{j_{k+1}}$ sorozatát huroknak nevezzük, amennyiben $e_{j_1} \rightarrow \{s, i_1\}, e_{j_2} \rightarrow \{i_1, i_2\}, \dots, e_{j_k} \rightarrow \{i_{k-1}, i_k\}$, $e_{j_{k+1}} \rightarrow \{i_k, s\}$

teljesül.

Az indulásként definiált irányítatlan gráfra vonatkozó összes többi definíciót - a fentiekben módosított részgráf, út, hurok fogalmakat véve alapul - szó szerint megismételve adódnak a megfelelő fogalmak az általánosabban definiált irányi-

tatlan gráfra vonatkozóan. Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy valamennyi eddigi tétel érvényes lesz az általánosabban tekintett gráfok esetében is, ugyanazok a bizonyítások alkalmazhatók, helyenkénti értelemszerű átfogalmazással.

Ezután irányított gráfokkal foglalkozunk. Ha az (N, A^D) irányított gráfnak n számú csúcsa van, ezek jelölésére most is alkalmazhatjuk az $1, \dots, n$ számokat. Ekkor minden élnek egy (i, j) rendezett számpár felel meg. Feltételezzük, hogy $A^D \subseteq N \times N$, ami azt jelenti, hogy mindegyik rendezett számpár legfeljebb egy élhez van hozzárendelve. Következésképpen az élek jelölésére a megfelelő rendezett számpárokat alkalmazhatjuk. Legyen az élek száma m , és lássuk el az éleket is sorszámokkal. Feltételezzük, hogy (N, A^D) nem tartalmaz hurokért, azaz $(i, i) \notin A^D$, $i=1, \dots, n$ teljesül.

Jelölje (N, A) az (N, A^D) gráfnak megfelelő irányítatlan gráfot amely az (N, A^D) gráfból úgy kapható, hogy annak éleit irányítatlanoknak tekintjük.

Az egyszerűbb jelölésmód kedvéért a továbbiakban megengedjük a következőt: Ha $\underline{d} \in {}^m$ (vagy $\underline{d} \in {}^m$) komponensei éljellemzők, és az l -edik élt az (i, j) számpár reprezentálja, akkor d_l mellett megengedjük a $d_{i,j}$ jelölést is a \underline{d} vektor l -edik komponensére. Tekintsük továbbá (N, A) azon éleit, amelyek valamelyik végpontja az i -edik csomópont, $i=1, \dots, n$, és jelöljük $J(i)$ -vel a másik végpontok sorszámainak halmazát. Az ezen éleknek az (N, A^D) gráfban megfelelő élek halmazát az i -edik csomópontához illeszkedő élek halmazának fogjuk nevezni. Jelölje továbbá $i(l)$ az i -edik csomópontához illeszkedő l sorszámú él másik végpontjának sorszámát.

Definíció. Az (M, B^D) irányított gráfot az (N, A^D) irányított gráf részgráfjának nevezzük, ha $M \subseteq N$ és $B^D \subseteq A^D$ teljesül.

Definíció. Az (N, A^D) irányított gráf összefüggő, ha (N, A) összefüggő.

A továbbiakban kizárólag összefüggő gráfokkal foglalkozunk,

azaz feltételezzük, hogy $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ összefüggő irányított gráf.

Definíció. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ gráf $(\mathcal{N}, \mathcal{F}^D)$ részgráfja feszítő fa, ha az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ irányítatlan gráfban $(\mathcal{N}, \mathcal{F})$ feszítő fa.

Az $\mathcal{A}^D \setminus \mathcal{F}^D$ elemeit kötőeleknek nevezzük, a továbbiakban jelölje ezek számát k . Az F.1. tétel következményeként az $(\mathcal{N}, \mathcal{F}^D)$ éleinek száma $n-1$ és $k=m-n+1$ teljesül.

Definíció. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ gráf $(\mathcal{N}_H, \mathcal{H}^D)$ részgráfja hurok, ha az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ gráfban $(\mathcal{N}_H, \mathcal{H})$ hurok.

A hurokhoz irányítást is rendelhetünk, ami intuitíve egy "körüljárás" rögzítését jelenti $(\mathcal{N}_H, \mathcal{H})$ -ra. Ha a hurokban kettőnél több csúcs szerepel, akkor ez azt jelenti, hogy ezen csúcsokra vonatkozóan egy ciklikus rendezést rögzítünk. Ekkor ha $(i, l) \in \mathcal{H}^D$, az (i, l) élt a hurokra nézve pozitívan irányítottan nevezzük, ha a ciklikus rendezésben a csúcsok sorrendje i, l ; ellenkező esetben (i, l) a hurokra nézve negatívan irányított. Ha a hurokban csak két csúcs szerepel, akkor $\mathcal{H}^D = \{(i, l), (l, i)\}$ alakú és a "körüljárás" pontos definíciója a fentiekhez hasonlóan egyszerűen megfogalmazható.

Definíció. Legyen $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ az \mathcal{N} halmaz egy particiója, azaz teljesüljön $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$ és $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$. Az ehhez a particióhoz tartozó vágásnak nevezzük és $C(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ -vel jelöljük ebben a részben a \mathcal{A}^D következő részhalmazát:

$$C(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) = \{(i, l) \mid (i, l) \in \mathcal{A}^D \text{ és vagy, } i \in \mathcal{N}_1, l \in \mathcal{N}_2, \text{ vagy pedig } i \in \mathcal{N}_2, l \in \mathcal{N}_1\}.$$

A vágásokhoz irányítást is rendelhetünk. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ egyik lehetséges sorrendjét rögzítjük, azaz pl. az $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ halmazpárt rendezett párként kezeljük. Ha $(i, l) \in C(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, akkor ezt az élt a vágásra nézve pozitívan irányítottan tekintjük, ha $i \in \mathcal{N}_1$, és negatívan irányítottan, ha $i \in \mathcal{N}_2$ teljesül.

Definíció. Az l -edik csúcshoz tartozó csúcs-vágásnak nevezük $l \neq 1, \dots, n$ -re a következő vágást: $C(\{l\}, \mathcal{K} \setminus \{l\})$. Látható, hogy $C(\{l\}, \mathcal{K} \setminus \{l\})$ az l -edik csúcshoz illeszkedő élek halmaza.

Az egyszerűbb tárgyalásmód kedvéért kiválasztunk az $(\mathcal{K}, \mathcal{A}^D)$ gráfból egy $(\mathcal{K}, \mathcal{F}^D)$ feszítő fát, melyet a továbbiakban rögzítettnek tekintünk.

Definíció. Az $\mathcal{A} \setminus \mathcal{F}^D$ kötőélekhez tartozó kötő-hurkok a következőképpen adódó hurkok lesznek: Legyen $(i, l) \in \mathcal{A}^D \setminus \mathcal{F}^D$. Az F1.5. tétel következményeként az $(\mathcal{K}, \mathcal{F}^D \cup \{(i, l)\})$ gráf egy és csak egy hurkot tartalmaz, melyet az (i, l) él által generált kötő-huroknak nevezünk.

Az $(\mathcal{K}, \mathcal{F}^D)$ fához tartozó kötő-hurkok száma a fentiek szerint k .

Definíció. Az $(\mathcal{K}, \mathcal{F}^D)$ fa éleihez tartozó fa-vágásokon a következőképp adódó vágásokat értjük: Legyen $(i, l) \in \mathcal{F}^D$. A fából törölve az (i, l) élt, az két diszjunkt fára esik szét, ilyen módon a két fa csúcspontjait tekintve egy partíciója adódik. Az ehhez a partícióhoz tartozó $(\mathcal{K}, \mathcal{A}^D)$ -beli vágást nevezzük az (i, l) él által generált fa-vágásnak.

A definícióból és az F1.1. tételből látható, hogy az $(\mathcal{K}, \mathcal{F}^D)$ fához tartozó fa-vágások száma $n-1$.

A továbbiakban szükségünk lesz az $(\mathcal{K}, \mathcal{A}^D)$ gráf strukturáját és a vágások, ill. hurkok irányítását leíró különféle incidencia mátrixokra. Feltételezzük, hogy a gráfhoz tartozó vágások és hurkok sorszámozva vannak, és az így adódó rendezésnek megfelelően a fa-vágások, kötő-hurkok, valamint a csúcs-vágások külön-külön is sorszámokkal vannak ellátva.

Ezek után az incidencia mátrixok definíciói rendre a következők:

\hat{Q} : A gráfhoz tartozó vágásokat és azok valamely rögzített irányítását leíró vágás, él incidencia mátrix. Mérete $p \times m$, ahol p az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ gráfhoz tartozó vágások száma. \hat{Q} definíciója a következő:

$$(F1.1) \quad \hat{Q}_{il} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } l\text{-edik él szerepel az } i\text{-edik vágásban} \\ & \text{és a vágásra nézve pozitív irányítású;} \\ -1, & \text{ha az } l\text{-edik él szerepel az } i\text{-edik vágásban} \\ & \text{és a vágásra nézve negatív irányítású;} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Q : Redukált vágás, él incidencia mátrix, mérete $(n-1) \times m$. Definíciójához feltételezzük, hogy a vágásokat a következő irányítással láttuk el: a fa-vágások irányítása olyan, hogy arra nézve a vágást generáló él pozitív irányítású, a többi vágás irányítása tetszőlegesen rögzített. Ekkor Q a \hat{Q} mátrixból az $n-1$ számú fa-vágásnak megfelelő sor kiválasztásával adódó részmatrix.

\hat{A} : Csúcs, él incidencia mátrix, $n \times m$ méretű. Feltételezzük, hogy $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ vágásait a következő irányítással láttuk el: a csúcs-vágások irányítása olyan, hogy arra nézve a csúcsból kifelé mutató élek pozitív irányításúak, a többi vágás irányítása tetszőlegesen rögzített. Ekkor \hat{A} a \hat{Q} mátrix n számú csúcs-vágáshoz tartozó sorának megfelelő részmatrixa. Mivel a csúcs, él incidencia-mátrixra a későbbiekben gyakran lesz szükségünk, explicit alakját is megadjuk:

$$(F1.2) \quad \hat{A}_{il} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } l\text{-edik él illeszkedik az } i\text{-edik csúcsra} \\ & \text{és a csúcs az él kezdőpontja;} \\ -1, & \text{ha az } l\text{-edik él illeszkedik az } i\text{-edik csúcsra} \\ & \text{és a csúcs az él végpontja;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A : Redukált csúcs, él incidencia mátrix, $(n-1) \times m$ méretű. A mátrix \hat{A} -ból annak valamely sora törlésével keletkezik, így \hat{A} -hoz n számú redukált csúcs, él incidencia mátrix rendelhető.

\hat{B} : Az $(\mathcal{N}, \mathcal{F}^D)$ gráfhoz tartozó hurkokat, és azok valamely rögzített irányítását leíró hurok, él incidencia mátrix. Mérete $h \times m$, ahol h a hurkok száma a gráfban. Definíciója az alábbi:

$$(F1.3) \quad \hat{B}_{i\ell} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik hurokban szerepel az } \ell\text{-edik él} \\ & \text{és a hurokra nézve pozitív irányítású;} \\ -1, & \text{ha az } i\text{-edik hurokban szerepel az } \ell\text{-edik él} \\ & \text{és a hurokra nézve negatív irányítású;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

B : Redukált hurok, él incidencia mátrix, $k \times m$ méretű. Definíciójához a hurkokat a következőképpen irányítjuk: A kötő-hurkok irányítása olyan, hogy arra nézve a hurkot generáló él pozitív irányítású, a többi hurok irányítása tetszőlegesen rögzített. Ekkor B a \hat{B} mátrix (kötő-hurkoknak) megfelelő soraiból adódó részmátrix.

Az egyszerűbb jelölésmód kedvéért tételezzük fel, hogy a gráf éleinek sorszámozása a rögzített $(\mathcal{N}, \mathcal{F}^D)$ fára vonatkozó kötőélekkel kezdődik. Ekkor B és Q a következő ún. normál alakot ölti:

$$(F1.4) \quad B = (E_k, F); \quad Q = (Q', E_{n-1})$$

ahol E_k, E_{n-1} a megfelelő méretű egységmátrixok.

A következőkben szükségünk lesz az alábbi tételre, melynek bizonyítása megtalálható pl. [60]-ban.

F1.7. tétel. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{B}^D)$ irányított gráf akkor és csak akkor tartalmaz hurkot, ha az \hat{A} csúcs, él incidencia mátrixának oszlopai lineárisan összefüggők.

A különböző incidencia mátrixok rangjáról szól a következő tétel. Megfogalmazásához vezessük be a mátrixok rangjára az $r(D)$ jelölést, ahol D valamely mátrix.

Fl.8. tétel. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{U}^D)$ összefüggő gráf incidencia mátrixaira érvényesek az alábbi állítások:

- (i) $r(Q) = n-1, r(B) = k.$
- (ii) $r(\hat{A}) = n-1.$
- (iii) \hat{A} bármelyik sorát törölve, az adódó A redukált csúcs, él incidencia mátrix sorai lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: Az (i) állítás (Fl.4) alapján triviális. Az (ii) bizonyításához először is megjegyezzük, hogy \hat{A} sorvektorait összeadva a zérus vektor adódik. Így \hat{A} sorai lineárisan összefüggők, azaz $r(A) \leq n-1$. Ugyanakkor \hat{A} oszlopvektorai közül kiválasztható $n-1$ lineárisan független. Ehhez elegendő egy - az Fl.6. tétel szerint létező - feszítő fának megfelelő oszlopvektorokat kiválasztani, melyek az Fl.7. tétel szerint lineárisan függetlenek. Végül (iii) bizonyítása ebből könnyen adódik, hogy - az (ii) rész bizonyításának kezdetén tett megjegyzésünk miatt - \hat{A} bármely sora kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A következő tétel egy ortogonalitási relációt fogalmaz meg.

Fl.9. tétel. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{U}^D)$ gráf vágásainak és hurkainak tetszőleges irányítása mellett érvényes az alábbi reláció:

$$(Fl.5) \quad \hat{Q} \hat{B}^T = 0$$

Bizonyítás: Válasszuk ki a \hat{Q} mátrix s -edik és a \hat{B} mátrix t -edik sorát. Ez azt jelenti, hogy az s -edik vágást és a t -edik hurkot tekintjük. Ha a vágásnak és a huroknak nincsenek közös élei, akkor a skalár szorzat triviálisan zérus. Egyébként egyszerű belátni, hogy a vágásnak és a huroknak páros sok kö-

zős éle van. A hurok irányításának megfelelő körüljárást véve a közös éleknek a hurokra és a vágásra vonatkozó irányítása felállítva egyező és ellenkező, amiből az állítás már könnyen következik.

A továbbiak során jelölje \mathcal{C}^m a komplex szám n -esek \mathcal{C} feletti lineáris terét, a szokásos skalár szorzattal: $\underline{a}, \underline{b}, \theta \in \mathcal{C}^m$ esetén

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \sum_{i=1}^m a_i \cdot b_i^*, \text{ ahol a } * \text{ komplex konjugáltat jelent.}$$

Ha D altere \mathcal{C}^m -nek, jelölje a dimenzióját $\dim D$.

Mivel az Fl.8., Fl.9. tételekben szereplő mátrixok elemei valós számok, ezért a rangokra vonatkozó állítások \mathcal{C}^m -et alapul véve is érvényesek, és az (Fl.5) ortogonalitási reláció \mathcal{C}^m -beli skalár-szorzatokkal is megfogalmazható.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

Jelöljük \mathcal{C}_Q -val \mathcal{C}^m -nek a \hat{Q} sorvektorai által felfeszített alterét, \mathcal{C}_B pedig jelölje a \hat{B} sorvektorai által felfeszített alteret. Mivel a vágások, ill. hurkok különböző irányításaihoz tartozó \hat{Q} , ill. \hat{B} mátrixok sorai legfeljebb (-1) -es szorzóban különböznek, ezért a \mathcal{C}_Q illetve a \mathcal{C}_B nem függ a vágások, illetve a hurkok irányításától.

Fl.10. tétel. Érvényesek az alábbi állítások:

- (i) $\dim \mathcal{C}_Q = n-1$;
- (ii) $\dim \mathcal{C}_B = k$;
- (iii) \mathcal{C}_Q és \mathcal{C}_B egymás ortogonális kiegészítő alterei.

Bizonyítás: Mivel a vágások és hurkok alkalmas irányítása mellett \hat{Q} sorai között megtalálhatók a Q mátrix, \hat{B} sorai között a B mátrix sorai, ezért az Fl.8. tétel felhasználásával az alábbi adódik:

$$(Fl.6) \quad \dim \mathcal{C}_Q \geq n-1, \quad \dim \mathcal{C}_B \geq k.$$

Másrészt Fl.5 felhasználásával könnyen belátható, hogy \mathcal{C}_Q és \mathcal{C}_B ortogonális alterei \mathcal{C}^M -nek. Így

$$(Fl.7) \quad \dim \mathcal{C}_Q + \dim \mathcal{C}_B \leq m$$

adódik. Ebből az $m=n-1+k$ összefüggés felhasználásával megkaptuk (i) és (ii) bizonyítását. Az alterek ortogonalitása és (i) valamint (ii) implikálják (iii)-t. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Tételünk felhasználásával teljessé tehetjük az incidencia mátrixok rangjára vonatkozó állítások sorozatát.

Fl.11. tétel. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{V}^D)$ összefüggő gráfra vonatkozóan a vágások illetve a hurkok tetszőleges irányítása mellett $r(\hat{Q})=n-1$ és $r(\hat{B})=k$ érvényes.

Bizonyítás: Az Fl.10 tétel alapján triviális.

Megjegyezzük, hogy az (Fl.5) ortogonalitási relációt felhasználva az (Fl.4) összefüggésekben $Q'=-F^T$ érvényes, így B és Q a következő alakban írható:

$$(Fl.8) \quad B=(E_k, F), \quad Q=(-F^T, E_{n-1}).$$

Az éleknek az (Fl.4) összefüggéseknél rögzített sorszámozásából adódik a \mathcal{C}^m -beli vektorok komponenseinek következő partíciója:

$$\text{Ha } \underline{d} \in \mathcal{C}^m, \text{ akkor } \underline{d} = \begin{pmatrix} \underline{d}_K \\ \underline{d}_F \end{pmatrix}, \text{ ahol } \underline{d}_K \in \mathcal{C}^K, \underline{d}_F \in \mathcal{C}^{n-1}.$$

A továbbiakban a hálózatok villamos állapotainak leírásával foglalkozunk.

Definíció: Áramtérnek nevezzük és \mathcal{J} -vel jelöljük \mathcal{C}^m következő alterét:

$$(Fl.9) \quad \mathcal{J} = \{ \underline{i} \mid \hat{Q} \underline{i} = 0, \underline{i} \in \mathcal{C}^m \}.$$

A definíció fizikai háttere Kirchhoff I. törvényének következő alakja: villamos hálózatokban az ág-áramok olyanok, hogy a hálózat bármely irányított vágására vonatkozóan előjeles összegük zérus.

Az Fl.8. Fl.11. tételekből következik, hogy \mathcal{C}^m -nek az \mathcal{J} k -dimenziós altere, melynek ekvivalens megadási módjai az alábbiak:

$$(Fl.10) \quad \mathcal{J} = \{ \underline{i} \mid \underline{Q}\underline{i} = \underline{0}, \underline{i} \in \mathcal{C}^m \},$$

$$(Fl.11) \quad \mathcal{J} = \{ \underline{i} \mid \hat{A}\underline{i} = \underline{0}, \underline{i} \in \mathcal{C}^m \},$$

$$(Fl.12) \quad \mathcal{J} = \{ \underline{i} \mid A\underline{i} = \underline{0}, \underline{i} \in \mathcal{C}^m \}.$$

Ezen összefüggések közül (Fl.11) matematikai megfogalmazása Kirchhoff I. törvénye következő alakjának: Villamos hálózatok ág-áramai olyanok, hogy a hálózat bármely csomópontjára vonatkozóan az abba befolyó áramok összege egyenlő a kifolyó áramok összegével.

Az (Fl.10) egyenlőségből (Fl.8) felhasználásával adódik, hogy az áramteret definiáló egyenletrendszer a következő alakban is felírható:

$$(Fl.13) \quad -F^T \underline{i}_K + \underline{i}_F = \underline{0}.$$

A továbbiakban az $\underline{i} \in \mathcal{J}$ vektorok komponenseit ág-áramoknak is fogjuk nevezni.

Az (Fl.13) összefüggésből látható, hogy a kötőélekre tetszőlegesen megválasztott ág-áramokhoz egyértelműen adódnak a fa-élek ág-áramai.

Definíció. Feszültségtérnek nevezzük és \mathcal{V} -vel jelöljük \mathcal{C}^m következő alterét:

$$(Fl.14) \quad \mathcal{V} = \{ \underline{v} \mid \hat{B} \underline{v} = \underline{0}, \underline{v} \in \mathcal{C}^m \}.$$

Fizikai háttérét tekintve a definíció Kirchhoff II. törvényének felel meg, mely szerint villamos hálózatokban az ág-feszültségek olyanok, hogy a hálózatban bármely irányított hurokra előjeles összegük zérus.

Az Fl.8., Fl.11. tételekből adódik, hogy \mathcal{V} dimenziója $n-1$, és \mathcal{V} ekvivalens módon a következőképp is megadható:

$$(Fl.15) \quad \mathcal{V} = \{ \underline{v} \mid B\underline{v} = \underline{0}, \underline{v} \in \mathbb{C}^m \}.$$

A feszültségteret definiáló egyenletrendszer (Fl.8.) felhasználásával a következő alakban is felírható:

$$(Fl.16) \quad \underline{v}_K + F\underline{v}_F = \underline{0}$$

A $\underline{v} \in \mathcal{V}$ vektorok komponenseit ág-feszültségeknek is fogjuk nevezni.

Az (Fl.16) összefüggésből leolvasható, hogy a fa-éleken tetszőlegesen megválasztva az ág-feszültségeket, a kötőélek ág-feszültségei egyértelműen adódnak.

A feszültség és áramtér egymáshoz való viszonyát a következő tétel mutatja:

Fl.12. tétel. A \mathcal{V} feszültségtér és az \mathcal{J} áramtér egymás ortogonális kiegészítő alterei.

Bizonyítás: A definíciókból következően, az Fl.10 tételt felhasználva $\mathcal{J} = \mathcal{C}_B$, $\mathcal{V} = \mathcal{C}_Q$ adódik, amiből az állítás az Fl.10 tétel alapján következik.

A továbbiak során szükségünk lesz a következő jelölésre: Ha $\underline{a} \in \mathbb{C}^q$ ($q \geq 1$), akkor $\underline{a}^* \in \mathbb{C}^q$ jelölje azt a vektort, amely \underline{a} -ból úgy keletkezik, hogy annak komponenseit a komplex konjugáltakal helyettesítjük.

Definíció: Az $(\mathcal{N}, \mathcal{U}^D)$ irányított gráfot, melynek éleihez a \mathcal{V} feszültségtér, illetve az \mathcal{J} áramtér pontjai alapján ág-feszült-

ségeket, illetve ág-áramokat rendeltünk, hálózatnak fogjuk nevezni.

Definíció. Legyen $\underline{v} \in \mathcal{V}$ és $\underline{i} \in \mathcal{J}$. Ekkor a hálózat éleihez rendelt teljesítményt a következőképpen definiáljuk;

Ha $(j, l) \in \mathcal{A}^D$, akkor az s_{jl} -lel jelölt teljesítmény az alábbi:

$$(F1.17) \quad s_{jl} = v_{jl} i_{jl}^*.$$

Az élekhez rendelt teljesítmények vektorát jelölje \underline{s} , ennek komponenseit ág-teljesítményeknek is fogjuk nevezni.

A hálózatához rendelt S összteljesítményt az ág-teljesítmények összegeként értelmezzük, így az F1.12 tétel felhasználásával kapjuk a következőt:

$$(F1.18) \quad S = \underline{v}^T \underline{i}^* = \langle \underline{v}, \underline{i} \rangle = 0.$$

Fizikai tartalmát tekintve \mathcal{J} és \mathcal{V} ortogonalitása teljesítmény megmaradást fejez ki.

Definíció. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ hálózat villamos állapotain az $(\underline{i}, \underline{v})$, $\underline{i} \in \mathcal{J}$, $\underline{v} \in \mathcal{V}$ vektorpárokat értjük, így az összes villamos állapotok halmaza $\mathcal{J} \times \mathcal{V}$.

Fizikai hálózatokban általában nem minden $(\underline{i}, \underline{v}) \in \mathcal{J} \times \mathcal{V}$ pár megengedett, ezért bevezetjük a megengedett villamos állapotok fogalmát. Ez matematikai szempontból csak annyit jelent, hogy rögzítünk egy $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{J} \times \mathcal{V}$ halmazt, és az $(\underline{i}, \underline{v})$ villamos állapotot megengedettnak nevezzük, ha $(\underline{i}, \underline{v}) \in \mathcal{M}$ teljesül.

A továbbiakban \mathcal{M} lehetséges rögzítéseire vonatkozóan két esetet tárgyalunk.

Definíció. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ hálózat (lineáris) admittancia-transzformációja a \mathcal{C}^m -et önmagába leképező olyan lineáris transzformáció, amely a \mathcal{V} feszültségteret az \mathcal{J} áramtérbe képezi le. A transz-

formáció mátrixát a természetes bázisban jelölje Y .

Ekkor az Y mátrixnak a következő feltételt kell teljesítenie. Ha $\underline{v} \in \mathcal{U}$, akkor $\underline{i} = Y\underline{v}$.

Jelölje \mathcal{J}_Y a \mathcal{U} feszültségtérnek a transzformáció által létrehozott képterét, másszóval:

$$(F1.19) \quad \mathcal{J}_Y = \{ \underline{i} \mid \text{van olyan } \underline{v} \in \mathcal{U}, \text{ hogy } \underline{i} = Y\underline{v} \text{ teljesül} \}.$$

Ekkor az Y mátrixra vonatkozó feltétel megfogalmazható az $\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{J}$ alakban is.

Amennyiben az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ hálózathoz hozzá van rendelve Y mátrixú admittancia-transzformáció, akkor a megengedett villamos állapotok \mathcal{M}_Y halmaza $\mathcal{J}_Y \times \mathcal{U}$ következő részhalmaza lesz:

$$(F1.20) \quad \mathcal{M}_Y = \{ (\underline{i}, \underline{v}) \mid \underline{i} = Y\underline{v}, \underline{i} \in \mathcal{J}, \underline{v} \in \mathcal{U} \}$$

Tekintsük most az $(\mathcal{N}, \mathcal{F}^D)$ feszítő fát és particionáljuk az Y mátrixot a kötő és faéleknek megfelelően a következő módon:

$$(F1.21) \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{KK} & Y_{KF} \\ Y_{FK} & Y_{FF} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az admittancia transzformáció particionált alakban az alábbi lesz:

$$(F1.22) \quad \begin{pmatrix} \underline{i}_K \\ \underline{i}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{KK} & Y_{KF} \\ Y_{FK} & Y_{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v}_K \\ \underline{v}_F \end{pmatrix}$$

Az (F1.16) alapján a \mathcal{U} feszültségtér előállítható a következő alakban:

$$(F1.23) \quad \mathcal{U} = \{ \underline{v} \mid \underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{v}_K \\ \underline{v}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ E_{n-1} \end{pmatrix} \underline{v}_F, \underline{v}_F \in \mathbb{C}^{n-1} \}$$

Az (Fl.22) összefüggésbe helyettesítve az alábbi adódik:

$$(Fl.24) \quad \begin{pmatrix} \underline{i}_K \\ \underline{i}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{KK} & Y_{KF} \\ Y_{FK} & Y_{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F \\ E_{n-1} \end{pmatrix} \underline{v}_F.$$

Innen a következőt kapjuk:

$$(Fl.25) \quad \underline{i}_K = (-Y_{KK}F + Y_{KF}) \underline{v}_F$$

$$\underline{i}_F = (-Y_{FK}F + Y_{FF}) \underline{v}_F$$

A definíció alapján Y pontosan akkor admittancia transzformáció, ha az (Fl.25) alapján kapott $\underline{i} = \begin{pmatrix} \underline{i}_K \\ \underline{i}_F \end{pmatrix}$ eleme \mathcal{J} -nek, minden $\underline{v}_F \theta e^{n-1}$ esetén. Az áramteret definiáló (Fl.13) összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy minden $\underline{v}_F \theta e^{n-1}$ -re teljesülnie kell a következő összefüggésnek:

$$(Fl.26) \quad (F^T Y_{KK} F - F^T Y_{KF}) \underline{v}_F = (Y_{FK} F - Y_{FF}) \underline{v}_F.$$

Innen az Y részmátrixaira a következő feltétel adódik:

$$(Fl.27) \quad F^T Y_{KK} F - F^T Y_{KF} = Y_{FK} F - Y_{FF}.$$

A továbbiakban azzal az esettel fogunk foglalkozni, amikor $Y_{KF}=0$, $Y_{FK}=0$. Ez fizikai háttérét tekintve azt jelenti, hogy csak olyan hálózatokat vizsgálunk, melyekben létezik olyan feszítő fa, hogy a fa-élek és a kötőélek közötti elektromágneses kapcsolat (kölcsönös admittanciák) elhanyagolható.

Ebben az esetben az admittancia-transzformáció mátrixa a következő lesz:

$$(Fl.28) \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{KK} & 0 \\ 0 & -F^T Y_{KK} F \end{pmatrix}.$$

Igy az admittancia-transzformáció az alábbi alakot ölti:

$$(F1.29) \quad \underline{i}_K = Y_{KK} \underline{v}_K,$$

$$(F1.30) \quad \underline{i}_F = F^T Y_{KK} F \underline{v}_F.$$

Összefüggéseinkből (F1.16) felhasználásával az \mathcal{J}_Y altér következő előállítására adódik:

$$(F1.31) \quad \mathcal{J}_Y = \{ \underline{i} \mid \underline{i} = - \begin{pmatrix} Y_{KK} F \\ F^T Y_{KK} F \end{pmatrix} \underline{v}_F, \underline{v}_F \in \mathcal{C}^{n-1} \}.$$

Az (F1.29), (F1.30) relációk fizikai háttere a következő: Az Y_{KK} mátrix diagonális elemei a kötőélek ág-admittanciáinak, a mátrix többi eleme pedig a kötőélek közötti kölcsönös admittanciáknak felel meg. (A fizikai értelemben vett ág-admittanciákat a következő részben tárgyaljuk, lásd tovább [69].) Figyelembe véve az (F1.16) összefüggést is, (F1.29), (F1.30) szerint: a faágak feszültségeit rögzítve, adott Y_{KK} esetén egyértelműen meghatározottak az áramok a teljes hálózatban.

Megjegyezzük, hogy az admittancia-transzformáció Y mátrixa természetesen nem azonos a hálózat passzív elemeinek (lásd [69]) admittanciáiból alkotott, a mérnöki szakirodalomban szintén Y -nal jelölt mátrixszal.

Definíció. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{N}^D)$ hálózat (lineáris) impedancia-transzformációja a \mathcal{C}^m -et önmagába leképező olyan lineáris transzformáció, mely az \mathcal{J} áramteret a \mathcal{U} feszültségtérbe képezi le. A transzformáció mátrixát a természetes bázisban jelölje Z . Ekkor a Z mátrixnak a következő feltételt kell kielégítenie:

$$\text{Ha } \underline{i} \in \mathcal{J}, \text{ akkor } \underline{z} \underline{i} = \underline{v} \in \mathcal{U}.$$

Jelöljük \mathcal{U}_Z -vel az \mathcal{J} áramtérnek a transzformáció által létrehozott képterét, azaz \mathcal{C}^m alábbi alterét:

$$(F1.32) \quad \mathcal{U}_Z = \{ \underline{v} \mid \text{Van olyan } \underline{i} \in \mathcal{J}, \text{ melyre } \underline{v} = Z \underline{i} \text{ teljesül.} \}$$

Ekkor a Z mátrixra vonatkozó feltétel a következő alakban is megfogalmazható: $\mathcal{U}_Z \subseteq \mathcal{U}$.

Ha az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ hálózathoz hozzá van rendelve egy Z mátrixú impedancia-transzformáció, akkor a megengedett villamos állapotok \mathcal{M}_Z halmaza az $\mathcal{J} \times \mathcal{U}_Z$ halmaz következő részhalmaza lesz:

$$(F1.33) \quad \mathcal{M}_Z = \{ (\underline{i}, \underline{v}) \mid \underline{v} = Z \underline{i}, \underline{i} \in \mathcal{J}, \underline{v} \in \mathcal{U} \}.$$

Tekintsük az $(\mathcal{N}, \mathcal{F}^D)$ feszítő fát és particionáljuk a Z mátrixot ennek megfelelően. Az admittancia-transzformációnál követett gondolatmenettel analóg módon eljárva, az alábbi Z mátrix adódik:

$$(F1.34) \quad Z = \begin{pmatrix} -F Z_{FF} F^T & 0 \\ 0 & Z_{FF} \end{pmatrix}.$$

Az impedancia-transzformáció a következő alakú lesz:

$$(F1.35) \quad \underline{v}_K = -F Z_{FF} F^T \underline{i}_K \quad ,$$

$$(F1.36) \quad \underline{v}_F = Z_{FF} \underline{i}_F \quad .$$

Innen (F1.13) felhasználásával a \mathcal{U}_Z altér alábbi előállítását kapjuk:

$$(F1.37) \quad \mathcal{U}_Z = \{ \underline{v} \mid \underline{v} = \begin{pmatrix} -F Z_{FF} F^T \\ Z_{FF} F^T \end{pmatrix} \underline{i}_K, \underline{i}_K \in \mathcal{C}^k \} .$$

Az impedancia-transzformáció fizikai háttere a következő:

A Z_{FF} mátrix diagonális elemei a fa-álek ág-impedanciáinak (lásd következő rész, ill. pl. [69]), a mátrix többi elemei pe-

dig a faélek közötti kölcsönös impedanciáknak (lásd pl. [69]) felelnek meg. Tekintettel (Fl.13)-ra is, az (Fl.35) és (Fl.36) összefüggések szerint: ha a kötőélek áramait rögzítjük, akkor adott Z_{FF} esetén egyértelműen meghatározottak a feszültségek az egész hálózaton.

Természetesen az impedancia-transzformáció Z mátrixa nem azonos a mérnöki szakirodalomban szintén Z -vel jelölt, a passzív elemek impedanciáiból felépített mátrixszal.

Az admittancia - illetve impedancia-transzformációk Y ill. Z mátrixai lehetnek szingulárisak, még akkor is, ha Y_{KK} ill. Z_{FF} nem szinguláris mátrixok. Számunkra a feszültségtérre, ill. az áramtérre korlátozott transzformációk invertálhatósága a lényeges.

Az admittancia-transzformáció esetében arról van szó, hogy az $\underline{i} = Y \underline{v}$ összefüggéssel megadott transzformációt tekintjük, azonban csak $\underline{v} \in \mathcal{V}$ -re. Ez egy $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{J}_Y$ lineáris leképezés. Ahhoz, hogy kölcsönösen egyértelmű legyen, nyilván szükséges a $\dim \mathcal{V} = n-1 = k = \dim \mathcal{J}$ feltétel teljesülése. Az (Fl.31) előállításából látható, hogy a leképezés pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű, ha az ott szereplő mátrix oszlopai lineárisan függetlenek. Amennyiben az inverz transzformáció létezik, azt korlátozott impedancia-transzformációnak nevezzük. Létezése azt jelenti, hogy minden $\underline{i} \in \mathcal{J}_Y$ -hoz pontosan egy $\underline{v} \in \mathcal{V}$ létezik, melyre $(\underline{i}, \underline{v})$ megengedett villamos állapot.

Hasonló megjegyzések érvényesek az impedancia-transzformációra és analóg módon definiáljuk a korlátozott admittancia-transzformációt.

Fizikai háttérét tekintve, az admittancia-, ill. impedancia-transzformációknak a hálózatokhoz való hozzárendelése az Ohm törvénynek a hálózatokra vonatkozó általánosításának tekinthető.

Megjegyezzük, hogy az $(\mathcal{N}, \mathcal{F}^D)$ feszítő fa rögzítésére vonatkozó kiinduló feltevésünknek a tárgyalásmód egyszerűsítésén túlmenően elvi szerepe nincs, a fentebb belátott tételek követ-

kezményeképpen a feszültség-, ill. áramtérhez más-más feszítő
 át választva, az az illető alterekben csupán báziscserét je-
 nt.

Illusztrációként az egyszerű áramkört tekintjük. Ezen a kö-
 vekező hálózatot értjük:

$$\mathcal{N} = \{1, 2\}, \mathcal{A}^D = \{(1, 2), (2, 1)\}, n=m=2, k=1.$$

Az áramtér az $\mathcal{J} = \{(i_1, i_2) \mid i_1 = i_2\}$ altér, a feszültségtér
 pedig a $\mathcal{V} = \{(v_1, v_2) \mid v_1 = -v_2\}$ altér lesz, mindkettő egydimenziós
 altere \mathbb{C}^2 -nek. Esetünkben az impedancia és az admittancia-transz-
 formációk megadása egyenértékű valamelyik ágra - legyen az pl.
 (2, 1) - vonatkozóan egy

$$(F1.38) \quad v_{21} = Z_{21} i_{21}$$

alakú összefüggés rögzítésével, ahol $Z_{21} \in \mathbb{C}$, konstans.

Fizikai tartalmát tekintve (F1.38) az Ohm törvény szokásos
 alakja. Az impedancia-transzformáció mátrixa az alábbi:

$$(F1.39) \quad Z = \begin{pmatrix} -Z_{21} & 0 \\ 0 & Z_{21} \end{pmatrix}$$

A korlátozott impedancia és admittancia-transzformációk
 léteznek, egymás inverzei, ilymódon kölcsönösen egyértelmű le-
 képezést létesítve \mathcal{J} és \mathcal{V} között.

Definíció. Az (F1.38) összefüggésben szereplő Z_{21} mennyiséget
 a (2, 1) él ág-impedenciájának, az $Y_{21} = \frac{1}{Z_{21}}$ mennyiséget pedig
 az él ág-admittanciájának nevezzük.

Végül megjegyezzük, hogy az ebben a részben tekintett el-
 mélet \mathbb{C}^m helyett \mathbb{R}^m alapul vételével analóg módon tárgyalható.

F.2 A VILLAMOSENERGIA-RENDSZER ÁTVITELI HÁLÓZATÁNAK
FIZIKAI LEIRÁSA

Ebben a részben az átviteli hálózathoz egy helyettesítő, fizikai értelemben vett villamos hálózat konstrukcióját körvonalazzuk, mely helyettesítő hálózat feszültség-áram viszonyai a tényleges átviteli hálózat viszonyait az e részben ismertetett körülmények fennállása esetén kellő pontossággal tükrözik.

A harmonikus váltakozó áramokra vonatkozó előkészítő rész után az átviteli hálózat egy egyszerűsített leírása következik. Elsősorban a hálózat azon összetevőire koncentrálunk, melyek a feszültség-áram, és ezen keresztül a teljesítmény-viszonyokat lényegesen befolyásolják. A konstrukciót az átviteli hálózat főbb alkotóelemei fizikai értelemben vett helyettesítő villamos kapcsolásainak tárgyalásával folytatjuk. Végül megadjuk a helyettesítő villamos hálózat felépítését.

Az átviteli hálózat modelljének konstrukciója során harmonikus váltakozó áramokkal fogunk dolgozni, az ezekkel kapcsolatos fizikai fogalmak és alap-összefüggések felidézése céljából a következő egyszerű áramkört tekintjük:

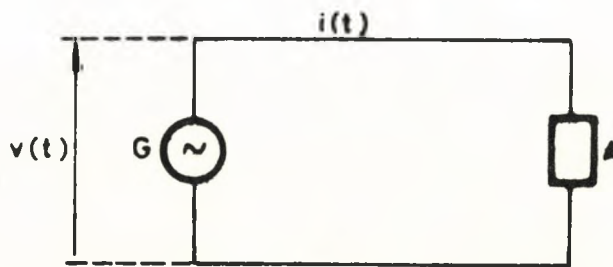


Fig. ábra.

Az ábrán G feszültségforrás, A pedig a következő ideális hálózati elemek valamelyikét jelöli: ohmos ellenállás, induktivitás (tekercs), kondenzátor.

Ha a G feszültségforrás ω körfrekvenciájú, $v(t)$ harmonikus váltakozó feszültséget hoz létre, akkor az A helyére bármelyik fentebb felsorolt ideális hálózati elemet téve, az áramkörben ugyancsak ω körfrekvenciájú, $i(t)$ harmonikus váltakozó áram folyik. Ez azt jelenti, hogy ha a feszültség

$$(F2.1) \quad v(t) = v_{max} \cos(\omega t + \varphi),$$

akkor az áramkörben folyó áramra

$$(F2.2) \quad i(t) = i_{max} \cos(\omega t + \psi)$$

érvényes, ahol v_{max} , i_{max} a feszültség ill. áram csúcértékei (amplitudói), φ, ψ pedig a fázisszögek.

Amennyiben A ohmos ellenállást jelöl R ellenállás-értékkel, akkor a feszültségre és áramra vonatkozóan minden időpillanatban a

$$(F2.3) \quad v(t) = R i(t)$$

összefüggés érvényes.

Ha azonban A induktivitás, melynek L az indukció-együtthatója, akkor a feszültség és áram viszonyára a

$$(F2.4) \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

differenciál-összefüggés érvényes.

Hasonló a helyzet C kapacitású kondenzátor esetén, ahol a differenciál-összefüggés

$$(F2.5) \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

alaku.

A következőkben a váltakozó áramokra vonatkozó komplex formalizmust vázoljuk. A dolgozat további részében jelölje j a komplex képzetes egységet.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$(F2.6) \quad V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

$$(F2.7) \quad I = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} e^{j\psi}$$

Az (F2.6) egyenlőséggel bevezetett V -t, illetve az (F2.7) egyenlőséggel bevezetett I -t a feszültség, ill. áram fázis-reprezentációjának nevezzük, az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ faktor szerepe a komplex teljesítmény tárgyalásánál válik majd világossá.

Az (F2.1) és (F2.2)-nek az (F2.3), (F2.4)(F2.5) összefüggésekbe való behelyettesítésével könnyen látható, hogy (F2.3) (F2.4) (F2.5) rendre formálisan ekvivalensek az alábbiakkal:

$$(F2.8) \quad V = R I$$

$$(F2.9) \quad V = j\omega L I$$

$$(F2.10) \quad V = \frac{1}{j\omega C} I.$$

A kapott formulák az Ohm törvény komplex reprezentációjának tekinthetők. Az összefüggésekben I együtthatójaként szereplő komplex mennyiségeket a megfelelő ideális áramköri elemek impedanciájának, azok reciprokát pedig admittanciájának nevezük. Jelölje az ilymódon meghatározott impedanciát Z , ennek értéke a különböző áramköri elemekre rendre az alábbi:

$$(F2.11) \quad Z = R \quad \text{ohmos ellenállásra,}$$

$$(F2.12) \quad Z = j\omega L \quad \text{induktivitásra,}$$

(F2.13) $Z = \frac{1}{j\omega C}$ kondenzátorra.

A továbbiakban R -et rezisztív, ωL -et induktív, $\frac{1}{\omega C}$ -t pedig kapacitív reaktanciának nevezzük.

Amennyiben az eddig tekintett ideális áramköri elemekből és áramforrásokból felépítünk egy fizikai értelemben vett hálózatot, akkor az áram ill. a feszültség pillanatnyi értékére fennállnak a Kirchhoff-törvények. Feltételezve a mindenütt azonos ω körfrekvenciát, könnyű belátni, hogy a Kirchhoff-féle csomóponti törvény ekvivalens módon megfogalmazható az áramok pillanatnyi értékeinek az áramok fázis-reprezentációjával való helyettesítése útján. Ugyanez a helyzet Kirchhoff huroktörvénye és a feszültségek fázis-reprezentációja vonatkozásában.

A továbbiakban feltételezzük valamennyi áram és feszültségforrással kapcsolatban az azonos, ω körfrekvenciát.

Látható, hogy az ideális áramköri elemekből felépített fizikai hálózat matematikai leírására alkalmazható az F1. részben leírt modell, a gráf éleinek egy-egy hálózati elemet megfeleltetve és fázis-reprezentációban gondolkodva. Egyszerűen belátható, hogy a hálózati elemeket a szokásos értelemben sorba, ill. párhuzamosan kötve a kapott összetett elemhez - a komplexen megfogalmazott Ohm törvényből - hozzárendelhető impedancia-érték az egyenáramú esethez analóg módon kapható az alkotóelemek impedanciájából. Így a matematikai modell-hálózat méretének csökkentése céljából a fenti módon keletkező összetett elemnek csupán egy élt feleltetünk meg a gráfban.

Az F6. ábrán látható áramkörnek a matematikai értelemben vett (és az F1. részben definiált) egyszerű áramkör felel meg, a hálózati elemek impedanciájának pedig a gráf megfelelő éléhez rendelt ág-impedancia.

A harmonikus váltakozó áramokra vonatkozó teljesítményfogalom felidézése céljából most újra az F6. ábra áramkörét tekintjük. Ekkor a $p(t)$ -vel jelölt pillanatnyi teljesítmény a következő:

$$(F2.14) \quad p(t) = v(t) i(t) = v_{max} i_{max} \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \psi).$$

Egyszerű átalakításokkal ez a következő alakra hozható:

$$(F2.15) \quad p(t) = \frac{1}{2} v_{max} i_{max} \cos(\varphi - \psi) [1 + \cos 2(\omega t + \psi)] - \\ - \frac{1}{2} v_{max} i_{max} \sin(\varphi - \psi) \sin 2(\omega t + \psi)$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$(F2.16) \quad P = \frac{1}{2} v_{max} i_{max} \cos(\varphi - \psi)$$

$$(F2.17) \quad Q = \frac{1}{2} v_{max} i_{max} \sin(\varphi - \psi)$$

Jelöléseinkkel a pillanatnyi teljesítményre vonatkozó formula a következő alakot ölti:

$$(F2.18) \quad p(t) = P(1 + \cos 2(\omega t + \psi)) - Q \sin 2(\omega t + \psi).$$

P a hatásos teljesítmény, melyről könnyen megmutatható, hogy a pillanatnyi teljesítmény egy periódusra vett átlaga. Az (F2.18) első tagja egy, a P előjelétől függő irányú, a P középérték körül 2ω körfrekvenciával harmonikusan változó nagyságú teljesítmény-áramlásként interpretálható. ($P \geq 0$ a fogyasztásnak felel meg.)

Q a meddőteljesítmény, az (F2.18) összefüggés második tagja szerint ez egy 0 átlagérték körüli, 2ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés csúcserője. Fizikailag a meddő teljesítmény egy, a feszültségforrás és az impedancia között végbemenő, 0 átlagértékű folyamatos energiacserét reprezentál. Pontosabban ez az energiacsere a forrás és az impedancia elektromágneses tere között megy végbe. Q fenti definíciójából és az (F2.4), (F2.5) egyenlőségekből az is egyszerűen levezethető, hogy az induktív impedancia meddő teljesítményt fogyaszt ($Q > 0$), míg a kapacitív impedancia meddő teljesítményt termel ($Q < 0$). A tovább-

biakban a meddő teljesítményt reaktív teljesítménynek is fogjuk nevezni.

A feszültség (F2.6), illetve áram (F2.7) fázis-reprezentációjának felhasználásával bevezetjük az S komplex teljesítményt a következő definícióval:

$$(F2.19) \quad S = V I^*$$

A fázis reprezentációkat behelyettesítve a komplex teljesítményre az alábbi alak kapható:

$$(F2.20) \quad S = \frac{1}{2} v_{max} i_{max} e^{j(\varphi-\psi)}$$

Innen leolvasható, hogy S a hatásos és reaktív teljesítménnyel a következőképp fejezhető ki:

$$(F2.21) \quad S = P + jQ$$

Látszólagos teljesítménynek nevezzük az $|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ mennyiséget. A dolgozatban a fizikai mennyiségeket a következő mértékegységekben tekintjük adotttnak:

Impedanciák (rezisztív-, induktív-, kapacitív- reaktancia:)	[Ω]
Admittanciák (mindhárom):	[$S = \frac{1}{\Omega}$]
Feszültség:	[kV]
Áram:	[kA]
Hatásos teljesítmény:	[MW]
Meddő teljesítmény:	[Mvar]
Látszólagos teljesítmény:	[MVA]

Ezen előkészítés után megkezdjük a villamosenergia-rendszer átviteli hálózatának tárgyalását.

A villamosenergia-hálózatok általában többfázisúak, jellemző (és általunk vizsgálat alá vont) üzemállapotuk a szimmetrikus egyensúlyi állapot, azaz az egyes fázisokban az áram nagy-

sága azonos, a fázisszögek egymáshoz képest konstans értékkel vannak eltolva. Ebben az esetben a hálózat villamos állapotának meghatározása egyfázisú helyettesítéssel végezhető el, a kapott eredményből a tényleges állapot rekonstruálható. Így a továbbiakban elegendő egyfázisú hálózatokkal foglalkoznunk. Az általunk vizsgált hálózatokban állandósult állapotban a harmonikus váltakozó áram frekvenciája mindenütt azonos. Így a modell felépítése során a fentiekben tárgyalt komplex fázis-reprezentációval dolgozhatunk.

A villamosenergia-rendszerben az erőművekben termelt villamos energiának a fogyasztókhoz való szállítása az átviteli hálózaton keresztül történik. Modellünkben ennek csak az ún. alaphálózat részét tekintjük, azaz a 750, 400, 220 kV-os ún. gerincvezetéseket és a 120 kV-os ún. főelosztóhálózatnak mérnöki szempontok alapján kiválasztott, az energiaelosztásban lényeges szerepet játszó részét.

A mérnöki szempontból tekintett hálózatban az energia szállítása távvezetéseken vagy kábeleken történik. A hálózat különböző feszültségű részeit transzformátorokon keresztül csatlakoznak egymáshoz.

A hálózat csomópontjai az erőművi gyűjtősínek és a fogyasztói alállomások. Az elnevezés onnan ered, hogy a hálózat ágai, az erőművek generátorai és transzformátorai és a fogyasztói kisebb feszültségű elosztóhálózatot az átviteli hálózathoz csatlakozó transzformátorok rézből, vagy alumíniumból készült síneken keresztül kapcsolódnak egymáshoz egy-egy hálózati alállomáson.

Az alábbiakban röviden felsoroljuk azokat a főbb berendezéseket, amelyek együtteséből a csomópontokban teljesítmény-betáplálás, ill. fogyasztás jelentkezik.

- Erőművi szinkrongenerátorok. Hatásos teljesítményt termelnek, a gerjesztésszabályozásuktól függően meddő teljesítményt termelhetnek vagy nyelhetnek. Modellünk szempontjából az egy csomópont-hoz csatlakozó összes generátor- esetleg több erőműben elhelyezve - együttes teljesítményét tekintjük.

- Fogyasztók (terhelés). Ezen az egy csomópontoz az alacsonyabb feszültség-szintű kiterjedt elosztóhálózaton keresztül csatlakozó összes fogyasztót értjük. A modellben az ily módon az egyes csomópontokban jelentkező együttes teljesítményigényt vesszük figyelembe.

Meddő teljesítmény betáplálására, ill. elnyelésére szolgálnak a következő eszközök:

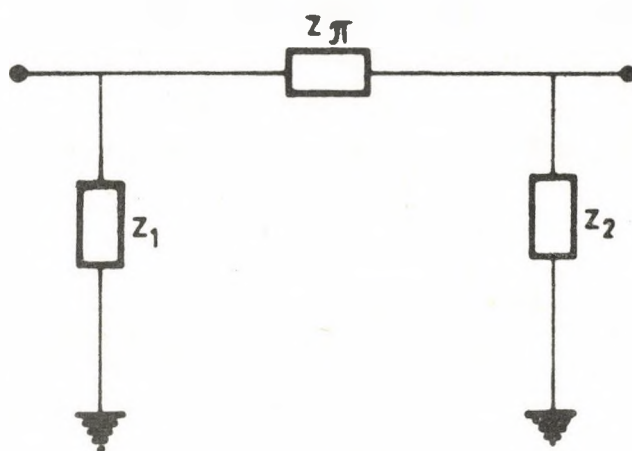
- Szinkronkompenzátor. Szinkrongép, amely hatásos teljesítményt nem táplál a csomópont-ra. A forgórész gerjesztésétől függetlenül akár meddőteljesítmény nyelőként, akár pedig kibocsátóként szerepeltethető, a szabályozási tartományból adódó korlátok között.

- Sönt-fojtótekerecs. Meddő teljesítményt fogyasztó induktív berendezés.

- Sönt-kondenzátor. Meddő teljesítményt bocsát ki kapacitív jellege miatt. Egy csomópontoz több sönt-kondenzátor is csatlakozhat, ilyenkor a kapacitás adott határok között - diszkrét ugrásokkal - változtatható.

A következőkben az átviteli hálózat ágainak és transzformátorainak helyettesítő kapcsolásával foglalkozunk. Olyan egyszerű, néhány ágból álló, ideális hálózati elemekből felépülő villamos kapcsolásról van szó, mely a benne szereplő impedancia-értékek alkalmas megválasztásával az átviteli hálózat megfelelő elemének feszültség-áram viszonyait a hálózat állandósult állapotában mérnöki szempontból kellő pontossággal tükrözi. A helyettesítő kapcsolat természetesen csak az átviteli hálózat elemének stabil üzemi tartományában ad hű feszültség-áram képet.

A távvezetékek, kábelek, transzformátorok helyettesítésére egyaránt az F7. ábrán látható, 3 csomópontból és 3 ágból álló, ún. π -kapcsolás alkalmazható.



F7. ábra.

A csomópontok közül az egyik a földpont, a másik kettő az átviteli hálózat gyűjtősíneinek felel meg. A Z_{π} , Z_1 , Z_2 impedancia-értékek meghatározása a távvezetékek, kábelek, ill. transzformátorok műszaki paramétereiből mérnöki megfontolások alapján történik [19]. Mindhárom esetben Z_{π} a következő alakú:

$$Z_{\pi} = R + j\omega L,$$

ahol R a megfelelő elem ohmos ellenállásának, L pedig az induktivitásnak felel meg. Az átviteli hálózatok fontos jellemzője, hogy valamennyi ágra az ωL induktív reaktancia lényegesen nagyobb az R ohmos ellenállásnál, transzformátorok esetében ezek a mennyiségek egy nagyságrendben különböznek.

Távvezetékek és kábelek esetében $Z_1 = Z_2 = \frac{2}{j\omega C}$, ahol C a távvezetékhez ill. kábelhez rendelt kapacitás érték. Távvezetékek esetében az ωC érték kb. hat nagyságrenddel kisebb, mint ωL értéke. A kábelekhez rendelt kapacitás-érték lényegesen nagyobb a távvezeték kapacitás-értékénél.

A transzformátorok esetében a helyzet bonyolultabb, ezek egy része ugyanis változtatható áttételű, ún. szabályozható transzformátor.

A nem szabályozható transzformátorokra, ill. a változtatható áttételű transzformátorok közül azokra, amelyek ún. középállásban vannak, az F7. ábrán látható helyettesítő kapcsolás egyszerűsödik, amennyiben a π "szárai" elhagyhatók, ezek tehát egy megfelelő Z_{π} impedanciájú ággal helyettesíthetők. Azon szabályozható transzformátorok esetében, melyek nincsenek középállásban az F7. ábrán látható Z_{π} , Z_1 , Z_2 ág-impedanciák értékei a transzformátor műszaki jellemzőiből és az áttételekből határozhatók meg [19].

A továbbiakban az egyszerűbb tárgyalásmód kedvéért felteszünk, hogy a szabályozható transzformátorok középállásban vannak, így valamennyi transzformátor egy-egy megfelelő Z_{π} impedanciájú ággal helyettesíthető.

Az eddigiek alapján felépíthetjük az átviteli hálózat fizikai modelljét, azaz egy olyan villamos hálózatot, melynek feszültség-áram viszonyai az átviteli hálózat feszültség-áram viszonyait a mérnöki alkalmazás szempontjából kellő pontossággal tükrözik.

A helyettesítő villamos hálózat csomópontjai a gyűjtősineknek felelnek meg, jelölje ezek számát N . Feltételezzük továbbá, hogy a csomópontokat számokkal láttuk el. Bevezetjük $(N+1)$ -edik csomópontként a földpontot.

A hálózat ágai a következőképp adódnak: Tételezzük fel, hogy az i -edik és l -edik gyűjtősint távvezeték vagy kábel köti össze. Az F7. ábrának megfelelő helyettesítő kapcsolásban az ellenállás, indukció-együttható és kapacitás értékeit jelölje rendre R_{il} , L_{il} , C_{il} . A helyettesítő villamos hálózatban a π felső szárának megfelel egy, az i -edik csomópontot az l -edikkel összekötő ág, $R_{il} + j\omega L_{il}$ ág-impedancia értékkel. A π szárai az i -edik, ill. l -edik csomópontot a földponttal kötik össze, mindkét ághoz az $\frac{2}{j\omega C}$ impedancia-érték van hozzárendelve.

Amennyiben az i -edik és l -edik gyűjtősinet transzformátor köti össze, és R_{il}, L_{il} ohmos ellenállást, ill. indukció-együtthatót rendeltünk hozzá, akkor a helyettesítő villamos hálózatban a transzformátornak egy, az i -edik és l -edik csomópontot összekötő ág felel meg, $R_{il} + j\omega L_{il}$ ág-impedancia-értékkel.

Ha az i -edik és l -edik csomópontot több távvezeték vagy kábel is összeköti, ezek a villamos hálózatban a párhuzamosan kötött impedanciákra érvényes helyettesítéssel a fenti három ágra redukálhatók, az egyszerűség kedvéért jelölje R_{il}, L_{il}, C_{il} az eredő ellenállást, indukció-együtthatót és kapacitást.

Jelölje M a fenti módon adódó villamos hálózatban azon ágak számát, amelyek mindkét végpontja gyűjtősinnek felelnek meg. Ezeket az egyszerűbb hivatkozás kedvéért a továbbiakban γ -típusú ágaknak fogjuk nevezni.

A vázolt eljárás eredményeként kapott villamos hálózatban a földponttól eltekintve minden csomóponthoz annyi kapacitív, másik végén földelt ág csatlakozik, amennyi az illető csomópont-hoz illeszkedő γ -típusú ágak közül a távvezetékeknek, ill. kábeleknak megfelelő ágak száma. Ezek a párhuzamosan kötött kapacitív ágak csomópontonként egyetlen ággal helyettesíthetők, melynek kapacitása az illető ágak kapacitásainak összege. Amennyiben valamely csomópont-hoz csak transzformátoroknak megfelelő γ típusú ágak csatlakoznak, akkor ahhoz nem vezetünk be ilyen ágot. Jelölje N_C azon csomópontok számát, melyekhez a fenti módon hozzárendeltünk az illető csomópontot a földponttal összekötő ágot, és tételezzük fel, hogy a csomópontok sorszámozása ezen csomópontokkal kezdődik. Ilymódon az első N_C számú gyűjtősinnek megfelelő csomópontok mindegyikéhez egy-egy ilyen kapacitív ág csatlakozik, melyeket a továbbiakban β -típusú ágaknak fogunk nevezni. Jelölje $C_i, i=1, \dots, N_C$ ezen ágak kapacitását.

Amint azt fentebb részletesebben tárgyaltuk, az átviteli hálózat gyűjtősinein több összetevő eredőjeként koncentrált teljesítmény betáplálás vagy igény jelentkezik. Ennek figyelembevétele céljából a sineknek megfelelő csomópontonként egy-egy további ággal egészítjük ki a villamos hálózatot, melyek az il-

lető csomópontot a földponttal kötik össze. Úgy tekintjük, hogy a csomópontokon koncentráltan jelentkező teljesítmény betáplálás ill. igény ezeken az ágakon keletkezik. Az így bevezetett számú új ágat α -típusú ágaknak nevezzük a továbbiakban, melyekhez azonban ág-impedancia értéket nem tudunk hozzárendelni.

Az átviteli hálózatban a különböző távvezetékek, kábelek, transzformátorok elektromágneses kölcsönhatása elhanyagolható, ugyanezt feltételezzük tehát a villamos hálózat β - és γ -típusú ágairól. Feltételezhetjük azt is, hogy az α -típusú, valamint a β - és γ -típusú ágak között nincs elektromágneses kölcsönhatás. Ez azt jelenti, hogy a β - és γ -típusú ágakra vonatkozóan a feszültség-áram viszony ugyanolyan, mintha az illető ágak az F6. ábrán látható áramkörben az A -val jelölt áramköri elem helyén lennének.

Összefoglalva, a villamos hálózat a következő részekből áll: A csomópontok száma $N+1$, az $(N+1)$ -edik csomópont a földpont.

α -típusú ágak: az $1, \dots, N$ sorszámú csomópontokat a földponttal összekötő ágak, ág-impedancia érték nincs hozzájuk rendelve. Ilyen élből N számú van a hálózatban.

β -típusú ágak: az $1, \dots, N_C$ sorszámú csomópontokat az $N+1$ sorszámú földponttal kötik össze. Az i -edik ilyen ághoz $\frac{1}{j\omega C_i}$ ág-impedancia van hozzárendelve. A β -típusú ágak száma: N_C .

γ -típusú ágak: olyan ágak, melyek mindkét végpontjának sorszáma $\leq N$. Ezen ágak halmaza matematikailag az $1, \dots, N$ számokból alkotott összes számpárok halmazának részhalmazaként adható meg. Ha ez a számpár az $\{i, l\}$, akkor az ághoz rendelt ág-impedancia értéke: $R_{il} + j\omega L_{il}$. A γ -típusú ágak száma: M .

A hálózatnak az eddigiekben nem említett, fontos sajátosságai a következők: a földponttól eltekintve, a csomópontoknak és a γ -típusú ágaknak megfelelő irányítatlan gráf összefüggő, továbbá a hálózat hurkolt, azaz a megfelelő gráf sok hurkot tartalmaz. Így feltételezhető, hogy $M > N$ teljesül.

F3. A VILLAMOSENERGIA-RENDSZER ÁTVITELI HÁLÓZATÁNAK MATEMATIKAI MODELLJE

E részben fő törekvésünk: a második részben megfogalmazott fizikai modelltől kiindulva, az első részben adott általános elmélet alkalmazása révén az átviteli hálózat matematikai modelljének felépítése.

Először az átviteli hálózat matematikai modelljének alapját képező hálózatot építjük fel, majd annak feszültség- és áramterét vizsgáljuk, a hálózati veszteség fogalmát tárgyaljuk. Az admittancia-transzformáció analizise révén adódó egyenletrendszerből kiindulva bevezetjük a referenciapont fogalmát. E témák tárgyalása során mindkét megelőző fejezet jelöléseit használjuk, ahol ez konfliktushoz vezethet, esetenként tisztázzuk a jelöléseket. Végül megfogalmazzuk az átviteli hálózatokra vonatkozó hálózatszámítási feladatot, melyhez új, a téma műszaki szakirodalmához igazodó jelölésrendszert vezetünk be a villamos mennyiségekre vonatkozóan.

Az előző részben felépített villamos hálózatra alapozva, az átviteli hálózat matematikai modellje az Fl. részben tárgyalt általános modellnek az alábbiakban megadott speciális esete lesz.

A hálózatot a következő $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ gráffal reprezentáljuk:

\mathcal{N} : A gráf csúcsainak $n=N+1$ elemű halmaza, ahol a villamos hálózat földpontjának megfelelő csúcs az $N+1$ sorszámot kapja.

\mathcal{A}^D : A gráf éleinek $m=M+N+N_C$ elemű halmaza, melyet a villamos hálózat α -, β -, γ -típusú ágainak megfelelően particionálunk. Legyen

$$(F3.1) \quad \mathcal{A}^D = \mathcal{A}_\alpha^D \cup \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D,$$

ahol az \mathcal{A}_α^D , \mathcal{A}_β^D , \mathcal{A}_γ^D él-halmazokat a következőképp definiáljuk:

\mathcal{A}_α^D : Ezek az élek a villamos hálózat α -típusú ágainak felelnek meg, halmazuk definciója az alábbi:

$$(F3.2) \quad \mathcal{A}_\alpha^D = \{(1, N+1), (2, N+1), \dots, (N, N+1)\}.$$

\mathcal{A}_β^D : A villamos hálózat β -típusú ágának megfelelő élek halmaza, mely a következő lesz:

$$(F3.3) \quad \mathcal{A}_\beta^D = \{(N+1, 1), (N+1, 2), \dots, (N+1, N_C)\}.$$

\mathcal{A}_γ^D : A villamos hálózat γ -típusú ágainak megfelelő élek halmaza. Ebbe a halmazba M számú él tartozik, és ugyanazon sorszámú csúcsokat kötik össze, mint a megfelelő γ -típusú ágak a villamos hálózatban. Ezen élek irányítása a továbbiak szempontjából közömbös, mindenesetre rögzítettnek tekintjük.

Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ gráf éleit a következőképp sorszámozzuk: A sorszámozást az \mathcal{A}_α^D -ba tartozó éleken kezdjük, az (F3.2)-ben rögzített sorrendben, majd az \mathcal{A}_β^D -ba tartozó élek következnek az (F3.3)-ban megadott sorrendben, végül \mathcal{A}_γ^D elemei, tetszőleges sorrendben.

Jelöljé \mathcal{N}_γ a továbbiakban a csúcsok halmazának a földpont elhagyásával adódó részhalmazát, azaz legyen $\mathcal{N}_\gamma = \{1, \dots, N\}$.

Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ gráf triviálisan összefüggő, az előző rész végén tett megjegyzés értelmében feltételezzük, hogy az $(\mathcal{N}_\gamma, \mathcal{A}_\gamma^D)$ részgráf is összefüggő.

A feszítő fát az $\mathcal{F}^D = \mathcal{A}_\alpha^D$ előírással rögzítjük, vagyis feszítő fának az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\alpha^D)$ részgráfot választjuk. A fának $n-1=N$ számú éle van. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ gráfban az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\alpha)$ részgráf ún. csillagot alkot, az \mathcal{A}_α halmazt az $N+1$ sorszámú csúcsot az összes többi csúccsal összekötő élek alkotják.

A feszítő fa fenti rögzítéséhez tartozó kötőélek halmazát $\mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D$ alkotja, a kötőélek száma: $k=m-n+1=M+N_C$. A kötőéleknek megfelelő $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ gráf az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}^D)$ gráf összefüggő részgráfja.

Jelölje ebben a részben (az Fl. résztől eltérően) \hat{A} az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ részgráf csúcs, él incidenciamátrixát, A pedig az \hat{A} -ból az $(N+1)$ -edik sor törlésével keletkező redukált csúcs, él incidenciamátrixot.

Könnyen belátható, hogy fa-vágások rendre az $1, \dots, N$ sorszámú csomópontokhoz tartozó csúcs-vágások lesznek az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ gráfra vonatkozóan, azaz sorra az $i=1, \dots, N$ sorszámú csúcsokhoz illeszkedő, az $\mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D$ halmazba eső élekből állnak. Így a redukált vágás-él incidenciamátrix (Fl.4)-alapján esetünkben a következő alakot ölti:

$$(F3.4) \quad Q = (A, E_N).$$

Ebből, valamint (Fl.8)-ből következik, hogy a redukált hurok-él incidenciamátrix megadható az alábbi formában, $F=-A^T$ helyettesítéssel:

$$(F3.5) \quad B = (E_{M+N_C}, -A^T).$$

Az \mathcal{J} áramtér a fentiek szerint a \mathcal{C}^{M+N+N_C} tér $k=M+N_C$ dimenziós altere, definiáló egyenletrendszere (F3.4) és (Fl.13) alapján a következő:

$$(F3.6) \quad A \underline{i}_K + \underline{i}_F = \underline{0}.$$

Ebből az egyenletrendszerből látható, hogy amennyiben a kötőélekre, az $\mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D$ elemeire vonatkozóan előírjuk az \underline{i}_K áram-

-vektort, akkor a fa-élek áramainak \underline{i}_F vektora egyértelműen adott.

Az (F3.6) összefüggés a következőképp is interpretálható: az $(\mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ hálózatra szorítkozunk, akkor úgy is gondolkozhatunk, hogy annak földponttól különböző csúcsain árambetáplálás történik, a betáplált áramok rendre \underline{i}_F komponensei. Mivel A eme hálózat redukált csúcs, él incidencia-mátrixa, ezért ebben a felfogásban (F3.6) a csúcsokra betáplált és a hálózat élein folyó áramok közötti összefüggést fejez ki.

A \mathcal{U} feszültségtér az eddigiek alapján a \mathcal{C}^{M+N+N_C} tér $n-1=N$ dimenziós altere, melynek definiáló egyenletrendszere (F3.5) és (F1.16) alapján az alábbi:

$$(F3.7) \quad \underline{v}_K - A^T \underline{v}_F = \underline{0}.$$

Az összefüggésből világos, hogy a fa éleire, azaz \mathcal{A}_α^D elemeire tetszőlegesen előírva a \underline{v}_F ág-feszültség vektort, a kötőélek ág-feszültségei egyértelműen adottak. Ez az \mathcal{A}_β^D illetve \mathcal{A}_γ^D halmazokba eső kötőélekre vonatkozóan a következőket jelenti:

Ha a kötőél az \mathcal{A}_β halmazba esik, akkor $(N+1, i)$ alakú, ahol $1 \leq i \leq N_C$. Ebben az esetben az él által generált kötőhurok az $(N+1, i) \in \mathcal{A}_\beta^D$ és az $(i, N+1) \in \mathcal{A}_\alpha^D$ élekből áll. A gráf éleinek fentebb megadott sorszámozásának megfelelően a következőt kapjuk:

$$(F3.8) \quad v_{N+i} = v_i \quad i = 1, \dots, N_C.$$

Ha az (i, l) kötőéltre $(i, l) \in \mathcal{A}_\gamma^D$ teljesül, akkor a kötőhurok az $(i, l) \in \mathcal{A}_\gamma^D$, $(l, N+1) \in \mathcal{A}_\alpha^D$, $(i, N+1) \in \mathcal{A}_\alpha^D$ élekből áll. Így (F3.7) alapján a következő érvényes:

$$(F3.9) \quad v_{il} = v_i - v_l, \quad (i, l) \in \mathcal{A}_\gamma^D$$

A kapott eredmények a következőképpen interpretálhatók: Rendeljük az $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^D)$ gráf első N csúcsához tetszőlegesen $u_i \in \mathcal{C}$, $(i=1, \dots, N)$ számértékeket és legyen $u_{N+1}=0$. Legyen a

$\underline{v} \in \mathbb{C}^{M+N+N_C}$ vektor az alábbi módon megadva:

Ha $(i, l) \in \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D$, akkor $v_{il} = u_i - u_l$, a fa-ágakra vonatkozóan pedig $v_i = u_i$, $i=1, \dots, N$.

Az (F3.8), (F3.9) összefüggésekből látható, hogy az így kapott \underline{v} vektor a feszültségtér eleme, azaz $\underline{v} \in \mathcal{V}$, továbbá az is világos, hogy a feszültségtér minden pontja megkapható ezen a módon. A feszültségtér pontjainak e módon történő előállítását az irodalomban "csomóponti potenciálok módszere" néven ismert [69].

A csúcsokhoz a fenti módon hozzárendelt u_i , $i=1, \dots, N+1$ számokat csomóponti potenciáloknak nevezzük, az ezek közül az első N számúból (azaz a földpontnak megfelelő csúcsot kihagyva) megalkotott $\underline{v} \in \mathbb{C}^N$ vektort a csomóponti potenciálok vektorának nevezzük. E vektort felhasználva (F3.7) a következőképp is írható:

$$(F3.10) \quad \underline{v}_K = A^T \underline{u}.$$

A kapott eredmény interpetálható az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ részgráfra szorítkozva: a részgráf csúcsainak halmaza azonos az eredeti gráf csúcsainak halmazával, így a potenciálokat a részgráfra is vonatkoztathatjuk. Ekkor (F3.10) a részgráf ágfeszültségeinek a csomóponti potenciálokból történő szokásos potenciálkülönbségeként való származtatását adja meg.

Az F2.részben tárgyaltak szerint a β - és γ -típusú ágak esetében, melyek a matematikai modell kötőeleinek felelnek meg, ágaként érvényes az Ohm-törvény. Másszóval a komplex ágáramok és ágfeszültségek aránya konstans, függetlenül a többi ág komplex áramától és feszültségétől. A matematikai modellben ez azt jelenti, hogy érvényes az alábbi összefüggés:

$$(F3.11) \quad \underline{i}_K = Y_{KK} \underline{v}_K,$$

ahol Y_{KK} diagonális mátrix, melynek diagonális elemei a kötőelek ág-admittanciái. Így az F1. részben tárgyaltak szerint lé-

tezik az admittancia-transzformáció, melynek mátrixa (F1.28) és (F3.5) alapján az alábbi:

$$(F3.12) \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{KK} & 0 \\ 0 & -AY_{KK}A^T \end{pmatrix},$$

ahol a szokásos módon, a kötő- és faéleknek megfelelően partitionáltuk a mátrixot. Az admittancia-transzformáció a fa-élekre vonatkozóan a következő összefüggést adja:

$$(F3.13) \quad \underline{i}_F = -AY_{KK}A^T \underline{v}_F.$$

Bevezetjük a következő jelölést:

$$(F3.14) \quad \hat{Y} = AY_{KK}A^T.$$

Igy (F3.13) a következő alakot ölti:

$$(F3.15) \quad \underline{i}_F = -\hat{Y} \underline{v}_F.$$

Az \hat{Y} mátrix csak az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ gráf struktúrájától és élelinek ág-admittancia értékétől függ. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ hálózatra szorítkozva, az irodalomban az $\hat{A}Y_{KK}\hat{A}^T$ mátrixot csomóponti admittancia-mátrixnak nevezik (lásd pl. [69]), az \hat{Y} mátrix ebből a földpontnak megfelelő sor- és oszlop törlésével keletkezik.

Megjegyezzük, hogy ha az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ hálózatot lineáris, passzív $(N+1)$ -pólusként kezeljük (ennek definíciójára vonatkozóan lásd [69]), akkor (F3.15) alapján $-\hat{Y}$ az ún. bemeneti admittancia-mátrix [69].

Az (F1.31) összefüggésből látható, hogy az admittancia-transzformáció a \mathcal{V} feszültségteret az \mathcal{J} áramtér következő \mathcal{J}_Y alterére képezi le:

$$(F3.16) \quad \mathcal{J}_Y = \{ \underline{i} \mid \underline{i} = \begin{pmatrix} Y_{KK}A^T \\ -AY_{KK}A^T \end{pmatrix} \underline{v}_F, \underline{v}_F \in \mathcal{C}^N \}.$$

Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ gráf összefüggőségét felhasználva az F1.8 tételből következik, hogy A sorai lineárisan függetlenek.

Mivel Y_{KK} nem szinguláris, ezért előző megjegyzésünk felhasználásával egyszerűen belátható, hogy az (F3.16) összefüggésben szereplő mátrix rangja N , annak oszlopai lineárisan függetlenek.

Innen látható, hogy az \mathcal{J}_Y altér N -dimenziós és a \mathcal{V} feszültségtérre megszorított admittancia-transzformáció kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít \mathcal{V} és \mathcal{J}_Y között. Eredményünk az F1. részben bevezetett terminológia szerint a korlátozott impedancia-transzformáció létezését jelenti.

Mivel az \mathcal{J} áramtér dimenziójára az F2. részben tárgyaltak szerint $k=M+N_C > N$ teljesül, ezért \mathcal{J}_Y valódi altere \mathcal{J} -nek. Így a megengedett villamos állapotok halmazában valamennyi $\underline{v} \in \mathcal{V}$ előfordul valamely $\underline{i} \in \mathcal{J}$ -vel párosítva és ez fordítva nem igaz.

A teljesítmény egyensúlyt kifejező (F1.18) ortogonalitási reláció a következő alakban is felírható:

$$(F3.17) \quad \underline{v}_K^T \underline{i}_K^* + \underline{v}_F^T \underline{i}_F^* = 0.$$

Az F1. részben tárgyaltak szerint ez az összefüggés az áramtér és a feszültségtér definícióiból (vagyis a Kirchhoff-törvényekből) következik, itt megadjuk egy további levezetését az (F3.7), (F3.11), (F3.13) relációkból. Az (F3.13) összefüggésben mindkét oldalon áttérve a komplex konjugáltakra, majd balról szorozva a \underline{v}_F^T vektorral, az alábbi adódik:

$$(F3.18) \quad \underline{v}_F^T A Y_{KK}^* A^T \underline{v}_F^* + \underline{v}_F^T \underline{i}_F^* = 0.$$

Felhasználva az (F3.7) és (F3.11) összefüggéseket, innen közvetlenül adódik (F3.17).

Az (F3.18) összefüggés a következőképp is írható:

$$(F3.19) \quad -\underline{v}_F^T \underline{i}_F^* = \underline{v}_K^T \underline{i}_K^*$$

Definíció. Az $S^v = \underline{v}_K^T \underline{i}_K^*$ mennyiséget hálózati veszteségnek nevezünk.

Fizikai háttérét tekintve S^v az átviteli hálózaton létrejövő összes komplex teljesítmény-veszteséget reprezentálja. Az (F3.19) egyensúlyi egyenletnek tekinthető, amennyiben a baloldalon szereplő mennyiség az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_B^D U \mathcal{A}_Y^D)$ hálózatra annak csúcsain betáplált teljesítményt, míg S^v az ágakon létrejövő veszteséget reprezentálják. A baloldali negatív előjel abból adódik, hogy az \mathcal{A}_α -ba tartó fa-ágakat a földpont felé irányítottuk.

Az \underline{u} csomóponti potenciál vektort felhasználva az eddigiekből könnyen adódnak a teljesítmény veszteségre az alábbi formulák:

$$(F3.20) \quad S^v = -\underline{u}^T \underline{i}_F^* \quad ,$$

$$(F3.21) \quad S^v = \underline{u}^T \hat{Y}^* \underline{u}^* \quad ,$$

$$(F3.22) \quad S^v = \underline{u}^T A Y_{KK}^* A^T \underline{u}^* \quad .$$

Ezek után ismét az (F3.13) összefüggést tekintjük. A $\underline{v}_F = \underline{u}$ helyettesítéssel áttérve a csomóponti potenciálokra (F3.13) a következő alakot ölti:

$$(F3.23) \quad A Y_{KK}^* A^T \underline{u} = -\underline{i}_F^* \quad .$$

A kapott összefüggést most az \underline{u} komponenseire, mint ismeretlenekre vonatkozó egyenletrendszernek tekintjük, \underline{i}_F^* -et adott-nak véve. Ekkor (F3.23) az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_B^D U \mathcal{A}_Y^D)$ hálózat csúcsain létrejövő potenciál-eloszlást írja le, adott csúcsponti árambetáplálások mellett. A következőkben az (F3.23) egyenletrendszer $\hat{Y} = A Y_{KK}^* A^T$, $N \times N$ -méretű együttható mátrixát részletesebb vizsgálatnak vetjük alá.

Az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_B^D U \mathcal{A}_Y^D)$ összefüggő gráf A redukált csúcs, él incidenciamátrixa az alábbi szerkezetű:

$$(F3.24) \quad A = (E_{N_c}, A_\gamma),$$

ahol $E_{N_c} = \begin{pmatrix} E_{N_c} & \\ & 0 \end{pmatrix}$, E_{N_c} egy $N_c \times N_c$ méretű egységmátrix, A_γ pedig az (N_γ, A_γ^D) gráf csúcs, él incidencia mátrixa. Az F1.8 tétel szerint az A mátrix sorvektorai lineárisan függetlenek.

Particionáljuk az Y_{KK} mátrixot a β - és γ -típusú éleknek megfelelően:

$$(F3.25) \quad Y_{KK} = \begin{pmatrix} Y_\beta & 0 \\ 0 & Y_\gamma \end{pmatrix},$$

ahol Y_β, Y_γ a megfelelő méretű diagonális mátrixok.

Igy (F3.14) alapján az együtthatómátrix a következő alakot ölti:

$$(F3.26) \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} Y_\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_\gamma Y_\gamma A_\gamma^T.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$(F3.27) \quad Y_\beta = jY_\beta^K, \quad Y_\gamma = Y_\gamma^\nu + jY_\gamma^K,$$

ahol $Y_\beta^K, Y_\gamma^\nu, Y_\gamma^K$ valós mátrixok. Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy az (F3.23) komplex egyenletrendszernek megfelelő valós egyenletrendszer \bar{Y} mátrixa az alábbi alakú:

$$(F3.28) \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{Y}_\beta \\ Y_\beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_\gamma Y_\gamma^\nu A_\gamma^T & -A_\gamma Y_\gamma^K A_\gamma^T \\ Y_\gamma Y_\gamma^K A_\gamma^T & A_\gamma Y_\gamma^\nu A_\gamma^T \end{pmatrix}$$

ahol $\bar{Y}_\beta = \begin{pmatrix} Y_\beta^K & \\ & 0 \end{pmatrix}$ és a 0 -k mindenütt a megfelelő méretű zérusmátrixokat jelölik.

Az (F3.28) egyenlőségben az összeg első tagjaként szereplő mátrix elemei az F2. részben tárgyaltak szerint több nagyságrenddel kisebbek a második tag elemeinél, és a mátrix az $N_c < N$

esetben triviálisan szinguláris. A második tagként szereplő mátrixról az F1.8. tétel felhasználásával könnyű belátni, hogy az szinguláris. Mindezek alapján az egyenletrendszer mátrixa általában rosszul kondicionált (a fogalommal kapcsolatban lásd [57]), ami az egyenletrendszer numerikus megoldásánál komoly nehézségeket eredményez.

Ezek után az (F3.23) lineáris egyenletrendszert a következőképp módosítjuk: az \underline{u} potenciál-vektor valamely komponensét rögzítettnek tekintjük, és töröljük a rögzített komponensnek megfelelő sorszámú egyenletet. Az új egyenletrendszer mátrixát úgy kapjuk, hogy \hat{Y} megfelelő sorszámú sorát és oszlopát töröljük. Ez a valós egyenletrendszer \bar{Y} mátrixa két sorának és a megfelelő sorszámú két oszlopának törlését jelenti és azt eredményezi, hogy (F3.28) második tagjában A_Y szerepét az $(\mathcal{N}_Y, \mathcal{N}_Y^D)$ gráf megfelelő A_Y^r redukált csucs, él incidencia mátrixa veszi át. Az F1.8 tétel szerint A_Y^r sorai lineárisan függetlenek, így, mivel Y_Y^v diagonális elemei pozitívak, ezért $A_Y^r Y_Y^v (A_Y^r)^T$ könnyen láthatóan pozitív definit mátrix.

A módosított egyenletrendszer mátrixa, mind pedig annak az (F3.28) egyenlőséghez analóg felbontásában szereplő második tag-mátrixa nem szingulárisak, függetlenül attól, hogy melyik sort töröltük. Ez a fentieket tekintetbe véve könnyen adódik a következő tételből:

F3.1 tétel. Ha valamely D , $2p \times 2p$ méretű mátrix a következő szerkezetű:

$$(F3.29) \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ -D_3 & D_2 \end{pmatrix},$$

ahol D_1 és D_2 $p \times p$ méretű, szimmetrikus, pozitív definit mátrixok, D_3 $p \times p$ méretű szimmetrikus mátrix, akkor D nem szinguláris.

Bizonyítás: Legyen $\underline{x} \in \mathbb{R}^{2p}$ olyan vektor, melyre $D\underline{x} = \underline{0}$ teljesül, és tekintsük az $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix}$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^p$ partíciót. Feltételeinkből következően érvényes az alábbi:

$$(F3.30) \quad \underline{x}^T D \underline{x} = \underline{x}_1^T D_1 \underline{x}_1 + \underline{x}_2^T D_2 \underline{x}_2 = 0.$$

Ez az összefüggés a D_1 és D_2 pozitív definit volta miatt implikálja, hogy $\underline{x} = \underline{0}$. Így D oszlopai lineárisan függetlenek, azaz D nem szinguláris és a tételt bebizonyítottuk.

Mivel a fentiekén túlmenően a módosított egyenletrendszer mátrixára vonatkozó (F3.28) típusú felbontásban a második tag általában jól kondicionált mátrix, ezért tekintetbe véve a két tag-mátrix elemei közti nagyságrendi viszonyokat, a módosított egyenletrendszer mátrixa maga is jól kondicionált lesz.

Definíció. Az $(\mathcal{N}, \mathcal{U}_\beta^D \cup \mathcal{U}_\gamma^D)$ hálózatnak azt a csúcsát, melyre vonatkozóan a komplex potenciált rögzítettnek tekintjük, a hálózat referenciapontjának nevezzük.

Fentebb kapott eredményünket a következő alakban is megfogalmazhatjuk: Amennyiben az $(\mathcal{N}, \mathcal{U}_\beta^D \cup \mathcal{U}_\gamma^D)$ hálózat referenciaponttól különböző csúcsaira előírjuk az áram-betáplálásokat, akkor az (F3.23) összefüggésből adódó módosított egyenletrendszer egyértelműen meghatározza a referenciaponttól különböző csúcsokra a komplex potenciálok értékeit és az egyenletrendszer numerikus szempontból is megfelelő. Az (F3.23) összefüggésben a referenciapontnak megfelelő sorban az áram-betáplálás a potenciálokkal explicite ki van fejezve, ezért annak értéke a módosított egyenletrendszer megoldása után behelyettesítéssel megkapható. Az említett tulajdonságok függetlenek attól, hogy melyik csúcs tölti be a referenciapont szerepét.

A potenciál-eloszlás függ attól, hogy mely pontot választottunk referenciapontnak, és ezen belül természetesen függ a referenciapont komplex potenciáljától is.

Az átviteli hálózat referenciapontja nem választható meg tetszőlegesen. A fentiekből látható, hogy a referenciapontra vonatkozó áram-betáplálás nem írható elő, az a potenciál-eloszlásból egyértelműen adódik. Ezért referenciapontként csak azok a csúcsok szerepelhetnek, amelyeknél az áram-betáplálás szabályozható, azaz amelyekhez erőmű is csatlakozik, mégpedig elegendően nagy kapacitással ahhoz, hogy az igény szerinti betáplálást szolgáltatni tudja. Ezen túlmenően a referenciapont-hoz csatlakozó erőmű általában fontos szerepet játszik a rendszer irányításában is (pl. frekvencia-szabályozás), melyekre e dolgozat keretei között nem térünk ki, az Olvasó további információt talál a [19] műben erre vonatkozóan.

A villamosenergia-rendszerek átviteli hálózatánál az áramok helyett a teljesítmény a ténylegesen figyelembe vett fizikai mennyiség, mind a termelés és fogyasztás, mind pedig a szállítás szempontjából. Így az (F3.23) összefüggést áramok helyett teljesítményekkel kell megfogalmaznunk, ami a megfelelő egyenletrendszer linearitásának elvesztésével jár.

Jelölje $\underline{s} \in \mathbb{C}^N$ a fa-ágakhoz rendelt teljesítmények vektorát, ekkor (F1.17) alapján \underline{s} komponensei a következőképp kaphatók:

$$(F3.31) \quad s_p = u_p i_p^*, \quad i=1, \dots, N$$

Ezt és (F3.14) egyenlőségét felhasználva (F3.23) a következőképp írható:

$$(F3.32) \quad u_p^* \sum_{q=1}^N \hat{Y}_{pq} u_q = -s_p^*, \quad p=1, \dots, N.$$

Az \underline{u} potenciál-vektor komponenseit ismeretleneknek tekintve nemlineáris egyenletrendszer adódott. A továbbiakban ebből kiindulva megfogalmazzuk az átviteli hálózatokra vonatkozó hálózatszámítási ("load flow") feladatot.

Ehhez a villamos mennyiségekre vonatkozóan új jelölésrendszert fogunk bevezetni, ily módon igazodva a téma műszaki irodalmához. A függelék további részeiben már kizárólag ezt a jelölésrendszert használjuk.

A tárgyalásmód egyszerűsítése kedvéért a továbbiakban feltételezzük, hogy valamennyi csúcshoz csatlakozik β -típusú kapacitív ág, a $C_i = 0, i = N_c + 1, \dots, N$ előírással.

A továbbiakban vizsgálatainkat az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ hálózatra fogjuk koncentrálni. Ennek N csúcsa és $N_c + M$ éle van. A csomóponti potenciálokkal fogunk dolgozni, jelölje ezek vektorát $\underline{U} \in \mathbb{C}^N$.

Legyen $U_k = V_k e^{j\theta_k}, k = 1, \dots, N$ ahol V_k a potenciál abszolút értéke, θ_k a fázisszöge. A V_k ill. $\theta_k, k = 1, \dots, N$ komponensekből alkotott vektorokat jelölje \underline{V} ill. $\underline{\theta}$.

Szükségünk lesz a Descartes-koordinátás alakra is, itt kisbetűket fogunk a jelölésrendszerben alkalmazni, amivel az ütemezési modell jelölésrendszeréhez igazodunk.

Ennek megfelelően legyen $\underline{U} = \underline{v} + j\underline{w}, \underline{v} \in \mathbb{R}^N, \underline{w} \in \mathbb{R}^N$.

A fentiekben megmutattuk, hogy a csomóponti potenciálok a modellben az α -típusú ágak ágfeszültségeiként interpretálhatók. A továbbiakban a csomóponti potenciálokat csomóponti feszültségeknek, ill. röviden feszültségeknek fogjuk nevezni. Fizikai tartalmukat tekintve ezek a sineknek a földponthoz viszonyított feszültségei, és a rendszer fontos, mért paraméterei.

Jelölje $\underline{S} \in \mathbb{C}^N$ a fa-ágakhoz rendelt teljesítmények (-1) -szereiből alkotott vektort, melynek komponensei a fentiek szerint az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ gráf csúcsaira történő teljesítmény-betáplálásként interpretálhatók.

Legyen $\underline{S} = \underline{P} + j\underline{Q}, \underline{P} \in \mathbb{R}^N, \underline{Q} \in \mathbb{R}^N$; ahol \underline{P} komponensei a hatásos, \underline{Q} komponensei a meddő teljesítmények. A fogyasztást negatív betáplálásként értelmezzük.

Jelölje $\underline{I} \in \mathbb{C}^M$ a hálózat γ -típusú éleihez tartozó ág-áramok vektorát és legyen $\underline{I} = \underline{I}^P + j\underline{I}^Q$, ahol $\underline{I}^P \in \mathbb{R}^M$ komponenseit valós áramoknak, míg $\underline{I}^Q \in \mathbb{R}^M$ komponenseit képzetes vagy meddő áramoknak fogjuk nevezni.

A továbbiakban az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_\beta^D \cup \mathcal{A}_\gamma^D)$ éleinek olyan 1-től $N_c + M$ -ig terjedő sorszámozását tételezzük fel, mely a β -típusú élekkel kezdődik.

Az F2. részben tárgyaltak alapján a hálózat ág-admittanciái a következők lesznek:

$$(F3.33) \quad Y_{N+1,i} = j\omega C_i, \quad i=1, \dots, N_c$$

$$(F3.34) \quad Y_{i,l} = \frac{1}{R_{il} + j\omega L_{il}}, \quad (i,l) \in \mathcal{A}_\gamma^D.$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$(F3.35) \quad \left. \begin{aligned} X_{il} &= \omega L_{il} \\ G_{il} &= \frac{R_{il}}{R_{il}^2 + X_{il}^2} \\ B_{il} &= \frac{X_{il}}{R_{il}^2 + X_{il}^2} \end{aligned} \right\} (i,l) \in \mathcal{A}_\gamma^D.$$

Legyen $Y_{li} = Y_{il}$, $X_{li} = X_{il}$, $G_{li} = G_{il}$ és $B_{li} = B_{il}$, minden $(i,l) \in \mathcal{A}_\gamma^D$ esetén. Így a γ -típusú élek ág-admittanciáira az alábbi összefüggés adódik:

$$(F3.36) \quad Y_{il} = G_{il} - j B_{il}, \quad (i,l) \in \mathcal{A}_\gamma.$$

Az (F3.14) reláció jobboldalán szereplő Y_{KK} mátrix diagonális elemei a fentebb megadott ág-admittanciák.

Könnyű belátni, hogy az (F3.14) relációval definiált \hat{Y} mátrix közvetlenül is megadható az alábbi formában:

$$(F3.37) \quad \hat{Y}_{i,k} = \begin{cases} \sum_{l \in J(i)} Y_{i,l} + Y_{n+1,i} & \text{ha } i=k, \\ -Y_{i,k} & \text{, ha } i \neq k, k \in J(i), \\ 0 & \text{, különben} \end{cases}$$

A (F3.37) előállításban és a továbbiak során is az Fl. részben bevezetett $J(i)$ jelölés az $(\mathcal{N}_Y, \mathcal{A}_Y^D)$ gráfra vonatkozik.

Szükség lesz az \hat{Y} mátrix elemeinek valós és képzetes részeire is, így bevezetjük az alábbi jelölést:

$$(F3.38) \quad \hat{Y}_{ik} = \hat{G}_{ik} + j\hat{B}_{ik}; \quad \hat{G}_{ik} \text{ és } \hat{B}_{ik} \text{ valósak, } i, k=1, \dots, N.$$

Kisebb átalakítások után új jelölésrendszerünkben az (F3.32) relációk a következő alakot öltik:

$$(F3.39) \quad U_i \sum_{k=1}^N \hat{Y}_{ik}^* U_k^* = S_i, \quad i=1, \dots, N.$$

Ebből egyszerű átrendezéssel, (F3.37) előállítást felhasználva, a következő összefüggést kapjuk:

$$(F3.40) \quad |U_i|^2 Y_{n+1,i}^* + \sum_{k \in J(i)} U_i (U_i - U_k)^* Y_{ik}^* = S_i, \quad i=1, \dots, N.$$

Az (F3.39) egyenlőségeknek megfelelő valós összefüggések a feszültségek polár-koordinátás alakját véve, (F3.38) felhasználásával, a következők lesznek:

$$(F3.41) \quad V_i \sum_{k=1}^N V_k [\hat{G}_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - \hat{B}_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)] = P_i,$$

$$V_i \sum_{k=1}^N v_k [\hat{G}_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + \hat{B}_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k)] = Q_i,$$

$$i=1, \dots, N.$$

Az ekvivalens valós relációk Descartes-koordináták esetén:

$$(F3.42) \quad \sum_{k=1}^N (\hat{G}_{ik} [v_i v_k + w_i w_k] + \hat{B}_{ik} [v_k w_i - v_i w_k]) = P_i,$$

$$\sum_{k=1}^N (\hat{G}_{ik} [v_k w_i - v_i w_k] - \hat{B}_{ik} [v_i v_k + w_i w_k]) = Q_i,$$

$$i=1, \dots, N.$$

Jelölje a továbbiakban $\phi_i(\underline{V}, \underline{\theta})$, ill. $\psi_i(\underline{V}, \underline{\theta})$ (F3.41) egyenlőségekben a hatásos, ill. meddő teljesítménynél az összefüggések baloldalán szereplő függvényt, hasonlóan definiáljuk az $f_i(\underline{v}, \underline{w})$ ill. $g_i(\underline{v}, \underline{w})$ függvényeket az (F3.42) relációkra vonatkozóan.

Ezekkel a jelölésekkel (F3.41) és (F3.42) az alábbi módon írhatók:

$$(F3.43) \quad \begin{aligned} \phi_i(\underline{V}, \underline{\theta}) &= P_i \\ \psi_i(\underline{V}, \underline{\theta}) &= Q_i \end{aligned} \quad i=1, \dots, N.$$

$$(F3.44) \quad \begin{aligned} f_i(\underline{v}, \underline{w}) &= P_i \\ g_i(\underline{v}, \underline{w}) &= Q_i \end{aligned} \quad i=1, \dots, N.$$

Az (F3.39) komplex, illetve az ekvivalens (F3.43) és (F3.44) valós összefüggések a csomóponti teljesítmény-betáplálások és a csomóponti potenciálok közötti kapcsolatot írják le. A továbbiakban a valós relációkat vizsgáljuk. Ezek nemlineáris összefüggések, a $2N$ teljesítmény-típusú és a $2N$ feszültség típusú változót összesen $2N$ reláció köti össze.

Csomópontonként 2 összefüggésünk és 4 változónk van. A változók közül csomópontonként kettőt lerögzítve és a másik kettőt ismeretlennek tekintve, az így nyert egyenletrendszerben az egyenletek száma meg fog egyezni az ismeretlenek számával.

Röviden diszkutálni fogjuk, hogy csomópontonként mely változók rögzíthetők le.

A hálózat referenciapontjánál a komplex feszültséget rögzítjük le, polár reprezentációban a fázisszöveget 0-nak véve. Ismeretlennek tekintjük a komplex teljesítmény-betáplálást. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a referenciapont 1-es sorszámu.

A fogyasztói gyűjtősineknek megfelelő csomópontokon adott a komplex teljesítmény-fogyasztás, ezt lerögzítjük, ismeretlennek véve a komplex feszültséget.

Ugyanez a helyzet azoknál a csomópontoknál, melyeknél a kapcsolódó erőművi generátorok rögzített meddő teljesítmény betáplálásra vannak szabályozva.

A kétféle rögzítéshez képest közbülső esetnek tekinthetők azok a csomópontok, melyeken a hatásosteljesítmény- betáplálást és a feszültség abszolút értékét rögzítjük le. Ez a rögzítés feltételezi, hogy a csomóponthoz csatlakozó berendezésekkel egyrészt az említett mennyiségek szabályozhatók, másrészt az (F3.43) alapján adódó meddő teljesítmény betáplálása megtörténik. Ilyenek azok a csomópontok, amelyekhez erőmű, ill. szinkronkompensátor kapcsolódik. Az erőművek esetén a rögzítést indokolja, hogy az erőművi teljesítményszabályozással vezérelhető a hatásosteljesítmény-kibocsátás, a szinkrongenerátorok forgórészének áramával (gerjesztés) pedig a generátor kapocsfeszültsége és ezeken keresztül az erőművi gyűjtősin földhöz képesti feszültségének abszolút értéke. A szinkronkompensátorral hasonló a helyzet, hiszen az is szinkrongép. Ezeket a csomópontokat feszültségtartó- vagy meddőforrás csomópontoknak nevezzük és az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy sorszámuk: $2, \dots, L$.

Ezen kitérő után, a fentiek alapján adódik a csomópontok következő osztályozása és jelölése:

- a) Referenciapont: $V_1, \theta_1=0$, rögzített; ismeretlenek: P_1 és Q_1 .
- b) (P, Q) -csomópontok: P_k és Q_k rögzített; ismeretlenek: V_k és $\theta_k, k=L+1, \dots, N$. Ilyen típusú a hálózati csomópontok zöme, 80-90%-uk.
- c) (P, V) -csomópontok: P_k és V_k rögzített; ismeretlenek Q_k és $\theta_k, k=2, \dots, L$.

A hálózatszámítás alapfeladata ezek után a következőképp fogalmazható meg. Megoldandó az (F3.43) illetve az (F3.44)

egyenletrendszer, azzal a kiegészítéssel, hogy a csomópontok típusától függően a megfelelő változók értékei rögzítettek. Az így kapott $2N$ egyenletből álló egyenletrendszerben $2N$ számú ismeretlen van.

Az egyenletrendszerekben a referenciapontnak, illetve a reaktív teljesítményre vonatkozó résznél a (P, V) -csomópontoknak megfelelő egyenleteket elhagyjuk, mert ezekben az egyik, csak abban az egyenletben szereplő ismeretlen a többivel az egyenletek által explicite ki van fejezve, így értéke a többi ismeretlen meghatározása után helyettesítéssel megkapható.

Megkaptuk a nagyfeszültségű villamosenergia-hálózatok hálózatszámítási feladatának egyenletrendszerét, az ún. "load-flow" egyenletek.

Jelölje V_k^0 , $k=1, \dots, L$ a lerögzített feszültségi abszolút értékeket.

A polár-koordinátás esetben a következő egyenletrendszer adódott:

$$\begin{aligned}
 P_i - \phi_i(\underline{V}, \underline{\theta}) &= 0, \quad i=2, \dots, N \\
 Q_i - \psi_i(\underline{V}, \underline{\theta}) &= 0, \quad i=L+1, \dots, N \\
 V_k &= V_k^0, \quad k=1, \dots, L \\
 \theta_1 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{F3.45}$$

Az egyenletrendszerben a rögzítések végrehajtása után ismeretlenek: V_i , $i=L+1, \dots, N$; θ_i , $i=2, \dots, N$; az ismeretlenek száma: $2N-L-1$, ami megegyezik az egyenletek számával.

A Descartes-koordinátás változatnál adódik az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
 P_i - f_i(\underline{v}, \underline{w}) &= 0, \quad i=2, \dots, N \\
 Q_i - g_i(\underline{v}, \underline{w}) &= 0, \quad i=L+1, \dots, N \\
 v_k^2 + w_k^2 &= (V_k^0)^2, \quad k=1, \dots, L \\
 v_1 &= V_1^0 \\
 w_1 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{F3.46}$$

A rögzítések végrehajtása után az ismeretlenek: v_i , $i=2, \dots, N$, w_i , $i=2, \dots, N$, az ismeretlenek száma: $2N-2$, és ennyi egyenletünk van.

Megjegyezzük, hogy a meddőforrás-csomópontokon a meddő teljesítmény kibocsátására ill. nyelésre vonatkozóan a kapcsolódó berendezések karakterisztikáitól függő korlátok érvényesek. Ha egy (P, V) csomóponton (F3.43) csak ezek megsértésével lenne ki-elégíthető, akkor azt (P, Q) csomóponttá kell átminősíteni. Hasonló a helyzet a (P, Q) csomópontok és a feszültség vonatkozásában. Ezt a problémát úgy szokás megoldani, hogy az (F3.43) hálózatszámítási feladatot megfogalmazzák a csomópontok egy rögzített minősítésével és a megoldó algoritmust módosítják úgy, hogy az menet közben szükség szerint átminősíti a csomópontokat. E kérdés részleteivel jelen dolgozatunk keretei között nem foglalkozunk, lásd pl. [19].

F4. TELJESÍTMÉNYÁRAMLÁS, STOTT MÓDSZERE A HÁLÓZATSZÁMITÁSI FELADAT MEGOLDÁSÁRA

Modellünk az áramok helyett a csomópontokon betáplált teljesítményekre épül, ezért használni fogjuk a csomóponttról az ágra "kiáramló" teljesítmény fogalmát. Ennek definiálása után a hálózatszámítási feladat megoldó algoritmusának konstrukciójának előkészítése céljából röviden összefoglaljuk a villamosenergia-rendszerek átviteli hálózatának számunkra fontos jellemző tulajdonságait. Ezután Stott módszerének ismertetése következik, végül a hálózati hatásos teljesítmény áramlásra és veszteségre vonatkozó néhány összefüggést ismertetünk.

A teljesítményáramlás definíciójánál az (F3.40) összefüggésből indulunk ki. Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$(F4.1) \quad S_{ik}^Y = U_i (U_i - U_k) * Y_{ik}^*, \text{ ha } (i, k) \in \mathcal{A}_T^D \text{ vagy } (k, i) \in \mathcal{A}_T^D,$$

$$(F4.2) \quad S_{n+1,k}^{\beta} = |U_i|^2 Y_{n+1,i}^* \quad i=1, \dots, N.$$

Jelöléseinkkel (F3.40) a következő alakot ölti:

$$(F4.3) \quad S_{n+1,i}^{\beta} + \sum_{k \in J(i)} S_{ik}^{\gamma} = S_i, \quad i=1, \dots, N.$$

Itt az S_i az i -edik csomópontra betáplált teljesítmény és amennyiben az S_{ik}^{γ} , S_{ik}^{β} mennyiségeket az i -edik csomóponttól a csatlakozó ágakra kiráamló teljesítményeknek tekintjük, akkor (F4.3) formálisan Kirchhoff csomóponti törvényének analogonja teljesítményáramlásra. Könnyen látható, hogy fizikailag S_{ik}^{γ} , S_{ik}^{β} valóban teljesítményt reprezentál.

Mindezek alapján az $(\mathcal{N}, \mathcal{A}_{\beta}^D \cup \mathcal{A}_{\gamma}^D)$ hálózatra vonatkozó teljesítményáramlásnak fogjuk nevezni az (F4.1), (F4.2) relációkkal definiált S_{ik}^{β} , S_{ik}^{γ} mennyiségek összességét. A megfelelő valós, illetve képzetes részek összességét hatásos, illetve reaktív teljesítmény-áramlásnak nevezzük.

Ilymódon minden $(i,k) \in \mathcal{A}_{\gamma}^D$ ághoz két teljesítmény-értéket rendeltünk, melyek az ebben az összefüggésben irányítatlannak tekintett ág végpontjairól az ágra "kiáramlanak". Fontos megjegyzés, hogy $S_{ik}^{\gamma} \neq -S_{ki}^{\gamma}$, azaz az i -edik csomóponttól kiáramló teljesítmény nem azonos a másik csomópont "befolyó" teljesítménnyel. Valóban, a k -edik csomópontra befutó teljesítmény felfogható úgy, mint az ebből a csomópontból az (i,k) ágra kimenő teljesítmény -1 -szerese. Ilymódon, ha a két teljesítmény különbségét S_{ik}^{ν} -vel jelöljük, az alábbi adódik:

$$(F4.4) \quad S_{ik}^{\nu} = S_{ik}^{\gamma} + S_{ki}^{\gamma} = |U_i - U_k|^2 Y_{ik}^*, \quad (i,k) \in \mathcal{A}_{\gamma}^D.$$

A kapott S_{ik}^{ν} mennyiségek fizikai tartalmukat tekintve az $(\mathcal{N}_{\gamma}, \mathcal{A}_{\gamma}^D)$ hálózat élein létrejövő teljesítmény veszteségek.

Az F3. részben definiált S^{ν} hálózati teljesítmény veszteségre a következő reláció adódik:

$$(F4.5) \quad S^v = \sum_{k=1}^N |U_k|^2 Y_{n+1,k}^* + \sum_{(i,k) \in \Theta_Y^D} |U_i - U_k|^2 Y_{ik}^*.$$

Összefüggésünk könnyen megkapható az (F3.22) egyenlőségből, (F3.14) és (F3.37) felhasználásával.

A következőkben az algoritmus-konstrukció előkészítéseként az átviteli hálózat néhány sajátosságát tekintjük.

A hálózat egyes ágai transzformátorokat reprezentálnak, az ilyen ágak végpontjai között számottevő potenciálkülönbség van. A hálózatszámítási feladat megoldását célzó algoritmusok stabilitása megkívánja a csomóponti feszültségek megfelelő normálását, amelynek ezen túlmenően számos más előnye is van [19]. Kétféle eljárás használatos.

Az elsőt ezek közül közös feszültségalapra redukálásnak nevezzük. Lerögzítünk egy feszültségértéket, majd valamennyi csomóponti feszültséget e körüli értékre normáljuk. A rögzített értéket nevezzük feszültségi konstansnak. A [100kV, 200kV), [200kV, 400 kV), [400kV, 700kV), [700kV, 900kV) feszültség-intervallumok mindegyikéhez tartozik egy-egy névleges feszültség-érték, a transzformáció ezek után a következő lesz:

$$(F4.6) \quad V'_{ij} = V_{régi} \frac{\text{feszültségi konstans}}{V_{névleges}}$$

Ahhoz, hogy ugyanazok a teljesítmény-értékek adódjanak, mint a transzformáció előtt, természetesen a többi elektromos mennyiséget is ennek megfelelően transzformálnunk kell.

A második eljárás a viszonylagos egységek (*v.e.*) bevezetését jelenti. Ez leggyakrabban azt jelenti, hogy a csomóponti feszültségeket 1-körüli értékekre normáljuk. A transzformáció az alábbi:

$$(F4.7) \quad V_{v.e.} = \frac{V_{régi}}{V_{névleges}}.$$

Ezzel az eljárással fizikai dimenzió nélküli értékek adódnak és az előző eljárásnál tett megjegyzésnek megfelelően itt is transzformálnunk kell a többi elektromos mennyiséget is.

Következő lépésként összefoglaljuk a villamosenergia-rendszerek átviteli hálózata azon jellemzőit, melyek a hálózatszámítási feladat megoldására irányuló algoritmusok konstrukciójánál fontos szerepet játszanak.

- a) A nagyfeszültségű villamos hálózatoknál a távvezetékek kábelek X_{ik} induktív reaktanciája általában sokkal nagyobb az R_{ik} ohmos ellenállásnál és egy nagyságrenddel nagyobb az arány a transzformátoroknál. Ez azt eredményezi, hogy

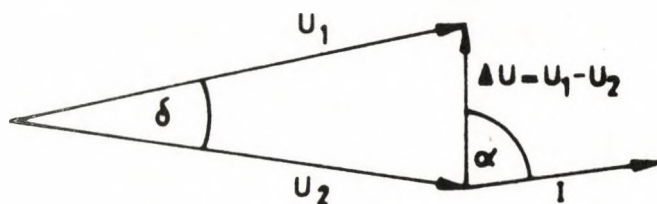
$$G_{ik} \ll B_{ik}, \text{ minden } (i,k) \in \mathcal{D}_Y^D \text{-re.}$$

- b) A rendszer stabil működése során a referenciapontra vonatkoztatott θ_k fázisszögek kicsik, $|\theta_k| < 20^\circ$, $k=1, \dots, N$. Az egyes ágakra vonatkozó fázis-különbségek is kicsik, $|\theta_i - \theta_k| < 10^\circ$, minden $(i,k) \in \mathcal{D}$.

- c) Normál üzemmenet esetén a normált feszültségek eltérése kevesebb, mint 15%.

Tapasztalati tény, hogy a hatásosteljesítmény-áramlás és a feszültségeloszlás összefüggésében (melyet az (F3.43) egyenlőségrendszerben a P_i -re vonatkozó relációk írják le) a feszültségek fázisszögei játsszák a domináns szerepet. Hasonló a tapasztalat a reaktívteljesítmény-áramlás és a feszültségek abszolút értékei vonatkozásában. A jelenség magyarázatához felvontatunk néhány heurisztikus jellegű érvet [33].

Tételezzük fel először, hogy az $(1,2)$ ág két végén adódó U_1 , illetve U_2 komplex potenciálra $|U_1| = |U_2|$ teljesül. Az ágon folyó áram legyen I .



F8. ábra.

A fenti jellemzők szerint δ kicsi, továbbá $G_{12} \ll B_{12}$ miatt α közel 90° , így I és U_1 , illetve U_2 majdnem azonos fázisban vannak. Ezért a teljesítmény hatásos komponense nagy a reaktív komponenshez képest abszolút értékben.

Ezután azt tételezzük fel, hogy a potenciálok azonos fázisban vannak, nagvságuk különböző.

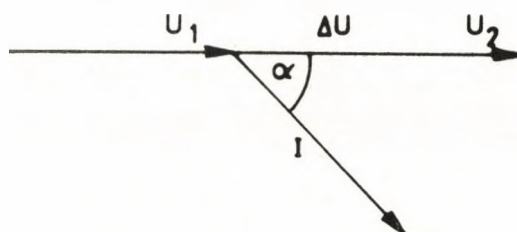


Fig 9. ábra.

Ekkor I és U_1 , illetve U_2 fázisszögei közel 90° -kal különböznek, így a teljesítmény reaktív komponense nagy a hatásos komponenshez képest.

A jelenségek további analízise céljából az (F3.41) egyenletrendszer felbontjuk a valós és képzetes részeknek megfelelő egyenletrendszerekre és egyszerű átalakításokat hajtunk végre. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$(F4.8) \quad \begin{aligned} \delta_{ik} &= \theta_i - \theta_k, \\ A(V_i, V_k, \delta_{ik}) &= V_i^2 - V_i V_k \cos \delta_{ik} \\ B(V_i, V_k, \delta_{ik}) &= V_i V_k \sin \delta_{ik} \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$(F4.9) \quad \begin{aligned} P_i &= \sum_{k \in J(i)} [G_{ik} A(V_i, V_k, \delta_{ik}) + B_{ik} B(V_i, V_k, \delta_{ik})] \\ Q_i &= \sum_{k \in J(i)} [B_{ik} A(V_i, V_k, \delta_{ik}) - G_{ik} B(V_i, V_k, \delta_{ik})] - \omega C_i V_i^2 \\ i &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Kiszámítjuk $A(V_i, V_k, \delta_{ik})$ és $B(V_i, V_k, \delta_{ik})$ parciális deriváltjait.

$$(F4.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial V_i} &= 2V_i - V_k \cos \delta_{ik}, & \frac{\partial A}{\partial V_k} &= -V_i \cos \delta_{ik}, \\ \frac{\partial A}{\partial \delta_{ik}} &= V_i V_k \sin \delta_{ik}, \\ \frac{\partial B}{\partial V_i} &= V_k \sin \delta_{ik}, & \frac{\partial B}{\partial V_k} &= V_i \sin \delta_{ik}, \\ \frac{\partial B}{\partial \delta_{ik}} &= V_i V_k \cos \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Az előzőek szerint δ_{ik} kicsi, és ha a viszonylagos egységekre való normálást választjuk, akkor a feszültségek abszolút értéke 1-hez közeli. Ekkor $\left| \frac{\partial A}{\partial V_i} \right|$ és $\left| \frac{\partial A}{\partial V_k} \right|$ lényegesen nagyobbak (1-hez közeli), mint $\left| \frac{\partial A}{\partial \delta_{ik}} \right|$, (ami legfeljebb $\sin 10^\circ$ körüli érték lehet), azaz az $A(V_i, V_k, \delta_{ik})$ függvény elsősorban a potenciálok abszolút értékére érzékeny. Hasonlóan látható, hogy a $B(V_i, V_k, \delta_{ik})$ függvény elsősorban a fázisszög-különbségekre érzékeny.

Figyelembe véve, hogy $B_{ik} \gg G_{ik}$ minden $(i,k) \in \mathcal{A}_Y^D$ ágra, (F4.9)-ből adódik, hogy a hatásosteljesítmény-áramlás elsősorban a fázisszög-különbségekre, míg a reaktívteljesítmény-áramlás elsősorban a feszültségek abszolút értékére érzékeny.

Ezek után rátérünk az átviteli hálózat sajátosságait kihasználó (F3.45) hálózatszámítási feladat megoldására vonatkozó Stott-módszer ismertetésére [65]. Az algoritmus a Newton-módszer egy variánsa. A választást indokolja, hogy az átviteli hálózat fentebb tárgyalt sajátosságai következtében általában könnyű megadni elegendően jó induló megoldást.

Egy ilyen indulópont az ún. "flat voltage start", melynél valamennyi (P,Q) csomópont komplex feszültsége megegyezik a referenciapontéval, ugyanez igaz a (P,V) -csomópontoknál a fázisszögre. A Newton-módszer választását gyors konvergenciája is indokolja.

A teljesítményáramlás e részben vizsgált tulajdonságaira támaszkodva adódik Newton módszerének egy dekomponált változata.

Tételezzük fel, hogy adott egy $\underline{V}^{(0)}$, $\underline{\theta}^{(0)}$ induló vektorpár, ahol $V_1^{(0)}, \dots, V_L^{(0)}$ az (F3.45)-ben előírt értékek. Ekkor, ha az $n+1$ -edik iteráció ($n \geq 0$) előtt adott $\underline{V}^{(n)}$, $\underline{\theta}^{(n)}$, az algoritmus egy iterációja a következő lépésekből áll:

1. lépés: Végrehajtunk egy Newton-korrekciós lépést, $\underline{\theta}^{(n)}$ -ből kiindulva, a következő egyenletrendszer megoldására:

$$(F4.11) \quad P_i - \Phi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}) = 0, \quad i=2, \dots, N,$$
$$\theta_1 = \theta_1^{(0)}.$$

Az ilymódon kapott vektor legyen $\underline{\theta}^{(n+1)}$.

2. lépés: Végrehajtunk egy Newton-korrekciós lépést $\underline{V}^{(n)}$ -et tekintve kiindulópontnak, a következő egyenletrendszerre.

$$(F4.12) \quad Q_i - \Psi_i(\underline{V}, \underline{\theta}^{(n+1)}) = 0, \quad i=L+1, \dots, N,$$

$$V_k = V_k^{(0)}, \quad k=1, \dots, L.$$

Az így kapott vektor legyen $\underline{V}^{(n+1)}$.

Stott módszere [65] ebből az algoritmus-vázból kiindulva úgy konstruálható meg, hogy a Newton-lépéseknél alkalmazott Jacobi-mátrixokban a villamosenergia-hálózat sajátosságait kihasználva elhanyagolásokat hajtunk végre.

Az (F4.11) egyenletrendszerhez tartozó Jacobi-mátrix elemei:

$$(F4.13) \quad \left. \frac{\partial(P_i - \Phi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}))}{\partial \theta_k} \right|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^{(n)}} = -V_i^{(n)} V_k^{(n)} [G_{ik} \sin(\theta_i^{(n)} - \theta_k^{(n)}) - B_{ik} \cos(\theta_i^{(n)} - \theta_k^{(n)})],$$

ha $i \neq k$,

$$\left. \frac{\partial(P_i - \Phi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}))}{\partial \theta_i} \right|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^{(n)}} = \Psi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}^{(n)}) + B_{ii} (V_i^{(n)})^2,$$

$i, k=2, \dots, N.$

Az (F4.12) egyenletrendszer esetében a Jacobi-mátrix elemei:

$$(F4.14) \quad \left. \frac{\partial(Q_i - \Psi_i(\underline{V}, \underline{\theta}^{(n+1)}))}{\partial V_k} \right|_{\underline{V}=\underline{V}^{(n)}} = -V_i^{(n)} [G_{ik} \sin(\theta_i^{(n+1)} - \theta_k^{(n+1)}) - B_{ik} \cos(\theta_i^{(n+1)} - \theta_k^{(n+1)})],$$

ha $i \neq k$,

$$\left. \frac{\partial(Q_i - \Psi_i(\underline{V}, \underline{\theta}^{(n+1)}))}{\partial V_i} \right|_{\underline{V}=\underline{V}^{(n)}} = \frac{1}{V_i^{(n)}} [-\Psi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}^{(n+1)}) + B_{ii} (V_i^{(n)})^2],$$

$i, k=L+1, \dots, N.$

Az elhanyagolások alapját az e részben tárgyaltakból következő alábbi relációk képezik:

$$(F4.15) \quad \cos(\theta_i - \theta_k) \sim 1, \quad |G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)| \ll B_{ik},$$

minden $(i, k) \in \mathcal{A}_Y^D$ -ágra.

Ennek megfelelően az (F4.13) ill. (F4.14) relációban a $G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)$ tagokat elhanyagoljuk, és $\cos(\theta_i - \theta_k)$ -t 1-gyel helyettesítjük.

A módszer kifejlesztése során végzett számítógépes experimentáció eredményeképp az is kiderült, hogy a Jacobi-mátrixban $|\Psi_i|$ elhanyagolható a $B_{ii} V_i^2$ -hez képest.

Bevezetünk néhány jelölést. Legyen $\Delta \underline{\theta} = \underline{\theta}^{(n+1)} - \underline{\theta}^{(n)}$, ekkor persze $\Delta \theta_1 = 0$ teljesül; $\Delta \underline{V} = \underline{V}^{(n+1)} - \underline{V}^{(n)}$, ekkor $\Delta V_i = 0$, $i=1, \dots, L$.

Jelöléseinkkel a Newton-korrekciókra vonatkozó lineáris egyenletrendszerek az elhanyagolások és átrendezés után a következő alakot öltik:

$$(F4.16) \quad V_i^{(n)} \sum_{k=2}^N B_{ik} V_k^{(n)} \Delta \theta_k = \Phi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}^{(n)}) - P_i, \quad i=2, \dots, N.$$

$$(F4.17) \quad V_i^{(n)} \sum_{k=L+1}^N B_{ik} \Delta V_k = \Psi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}^{(n+1)}) - Q_i, \quad i=L+1, \dots, N.$$

Még egy elhanyagolással élünk, az (F4.16)-ban szereplő $V_k^{(n)}$, $k=2, \dots, N$ feszültség szintek értékét azonosnak vesszük. Ez a közös érték az F2. részben említett v.e. skálázás esetében 1, ha pedig a másik skálázást vesszük, akkor a feszültségi konstans (jelölje V_{SKAL}) értéke. Az utóbbi skálázást tekintve a korrekció egyenletrendszerei:

$$(F4.18) \quad \sum_{k=2}^N B_{ik} \Delta \theta_k = \frac{\Phi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}^{(n)}) - P_i}{V_i^{(n)} V_{SKAL}}, \quad i=2, \dots, N.$$

$$\sum_{k=L+1}^N B_{ik} \Delta V_k = \frac{\Psi_i(\underline{V}^{(n)}, \underline{\theta}^{(n+1)}) - Q_i}{V_i^{(n)}}, \quad i=L+1, \dots, N.$$

A megfelelő Newton-lépések ezek után a következők lesznek:

$$(F4.19) \quad \underline{\theta}^{(n+1)} = \underline{\theta}^{(n)} + \Delta \underline{\theta}$$

$$\underline{V}^{(n+1)} = \underline{V}^{(n)} + \Delta \underline{V}$$

A módszer nagy előnye, hogy az iterációk során a korrekciók kiszámításánál szereplő lineáris egyenletrendszerek mátrixa azonos. Így, ha a Gauss-eliminációt alkalmazzuk, a triangulárisációt elegendő egyszer végrehajtani, a további iterációkban a megoldás már egyszerű visszahelyettesítéssel adódik.

A továbbiakban visszatérünk a teljesítményáramlás, illetve a hálózati veszteségek tárgyalására. A napi menetrend optimalizálásának modelljében szükségünk lesz a γ -típusú ágak esetében az (F4.1) egyenlőséggel definiált, az i -edik csomóponttól az (i, k) ágra áramló teljesítmény abszolút értékére, azaz a látzólagos teljesítményre. A csomóponti feszültségektől való függés kiemelése céljából jelölje ezt a teljesítményt

$S_{ik}(v_i, v_k, w_i, w_k)$. Az (F4.1) egyenlőségben szereplő felső indexet elhagyva az (F4.1) összefüggésből az alábbi alak adódik a látzólagos teljesítmény négyzetére:

$$(F4.20) \quad |S_{ik}(v_i, v_k, w_i, w_k)|^2 = (v_i^2 + w_i^2) [(v_i - v_k)^2 + (w_i - w_k)^2] |Y_{ik}|^2,$$

$$(i, k) \in \mathcal{A}_\gamma^D.$$

Itt a feszültségeket valós és képzetes részre bontva, azaz Descartes-koordinátákkal tekintettük, azt a szempontot szem előtt tartva, hogy a napi menetrend optimalizálására vonatkozó modellben a feszültségek valós és képzetes részei szerepelnek

változókként. A Függelék befejező részében továbbra is ezt az alakot fogjuk használni.

Az (N_Y, U_Y^D) hálózat élein létrejövő, az (F4.4) egyenlőségekkel megadott veszteséggel kapcsolatban bevezetjük a következő jelölést:

$$(F4.21) \quad S_{ik}^v = P_{ik}^v + jQ_{ik}^v, \quad P_{ik}, Q_{ik} \text{ valósak, } (i, k) \in \mathcal{A}_Y^D.$$

Innen a hatásos teljesítmény veszteségre az alábbi adódik:

$$(F4.22) \quad P_{ik}^v = G_{ik} |U_i - U_k|^2.$$

A β -típusú ágak kapacitív jellege miatt nyilvánvaló, hogy azokon hatásos teljesítmény veszteség nem jön létre.

Az (F4.22) összefüggést a távvezetékét vagy transzformátort helyettesítő π -kapcsolás felhasználásával kaptuk. Pontosabb érték kapható, amennyiben - figyelembe véve, hogy a π "szárai" az ág felének kapacitív reaktanciáját helyettesítik - a kapacitás által termelt képzetes áramot a megfelelő ág-áram képzetes részéhez hozzáadjuk. Ezáltal tulajdonképpen a π -kapcsolással való helyettesítés révén keletkező, π elemen belüli hibát koorigáljuk.

Az F2. részben a fizikai modell konstrukciója során az egyes távvezetéseket, kábeleket helyettesítő π -kapcsolások "szárait" csomópontként párhuzamosan kötött impedanciáknak tekintve egyetlen ággal helyettesítettük. A fentebb körvonalazott korrekcióhoz most szükségünk lesz az eredeti "szárakra". Jelölje C_{ik} az $(i, k) \in \mathcal{A}_Y^D$ ághoz az F2. részben tekintett helyettesítő kapcsolatban hozzárendelt kapacitás-értéket; amennyiben az ág transzformátort reprezentál, akkor legyen $C_{ik} = 0$. A π "szárai" a távvezeték, kábel kapacitásának felét reprezentálják, így a hozzájuk rendelt ág-admittancia $\frac{1}{2}j\omega C_{ik}$ lesz.

Ismeretes, hogy a hatásosteljesítmény-veszteségre érvényes a következő formula [19]:

$$(F4.23) \quad P_{ik}^v = R_{ik} |I_{ik}|^2.$$

A veszteség meghatározásához eszerint a komplex ág-áramot kell megadnunk. Alkalmazzuk az Ohm-törvényt:

$$(F4.24) \quad I_{ik} = \frac{U_i - U_k}{R_{ik} + jX_{ik}} + j \frac{1}{2} v_i \omega C_{ik}, \quad (i,k) \in \mathcal{A}_Y^D.$$

Az (F4.24) egyenlőségben a feszültségek Descartes-koordinátás alakját véve, az ág-áram az alábbi lesz:

$$(F4.25) \quad I_{ik} = (v_i - v_k)G_{ik} + (w_i - w_k)B_{ik} + j[(w_i - w_k)G_{ik} - (v_i - v_k)B_{ik} + \frac{1}{2} v_i \omega C_{ik}].$$

Innen a következő összefüggések olvashatók le:

$$(F4.26) \quad I_{ik}^P = -G_{ik}(v_k - v_i) - B_{ik}(w_k - w_i),$$

$$(F4.27) \quad I_{ki}^P = -I_{ik}^P,$$

$$(F4.28) \quad I_{ik}^Q = B_{ik}(v_k - v_i) - G_{ik}(w_k - w_i) + \frac{1}{2} v_i \omega C_{ik},$$

$$(F4.29) \quad I_{ki}^Q = -B_{ik}(v_k - v_i) + G_{ik}(w_k - w_i) + \frac{1}{2} v_k \omega C_{ik}.$$

Behelyettesítve (F4.23)-ba adódik a veszteség korrigált értéke:

$$(F4.30) \quad P_{ik}^v = \frac{1}{2} R_{ik} [2(I_{ik}^P)^2 + (I_{ik}^Q)^2 + (I_{ki}^Q)^2].$$

A továbbiakban az $(i,k) \in \mathcal{A}_Y^D$ ágon létrejövő hatásosteljesítmény-veszteséget a feszültségtől való függés kiemelésé céljából $P_{ik}^v(v_i, v_k, w_i, w_k)$ -val jelöljük, minden $(i,k) \in \mathcal{A}_Y^D$ ágra.

Ennek megfelelően a hálózaton létrejövő összes veszteséget jelöljük $P^v(\underline{v}, \underline{w})$ -vel. Értéke az egyes ágakon létrejövő veszteségek összege:

$$(F4.31) \quad P^v(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{(i,k) \in \mathcal{A}_Y^D} P_{ik}^v(v_i, v_k, w_i, w_k).$$

Befejezésként néhány, a teljesítményáramlásra vonatkozó összefüggést tárgyalunk. Jelöljük $T_{ik}(v_i, v_k, w_i, w_k)$ -val az i -edik csomóponttól az $(i,k) \in \mathcal{A}_Y^D$ ágra áramló hatásos teljesítményt. Az (F4.1) egyenlőségből leolvasható, hogy ennek értéke az alábbi:

$$(F4.32) \quad T_{ik}(v_i, v_k, w_i, w_k) = G_{ik}[v_i(v_i - v_k) + w_i(w_i - w_k)] + \\ + B_{ik}[w_i v_k - w_k v_i].$$

Amennyiben az (i,k) ágra a kezdőpontból áramló hatásos teljesítményt meghatároztuk, akkor ebből és az ágon létrejövő veszteségből a k végpontból az ágra áramló teljesítmény meghatározható. Jelöljük ez utóbbit $T_{ki}(v_i, v_k, w_i, w_k)$ -val. A veszteség definíciójából adódik:

$$(F4.33) \quad T_{ki}(v_i, v_k, w_i, w_k) = -T_{ik}(v_i, v_k, w_i, w_k) + \\ + P_{ik}^v(v_i, v_k, w_i, w_k).$$

I R O D A L O M

- [1] BENDERS, J.F., "Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems", *Numerische Mathematik* 4(1962) 238-252.
- [2] BILLINGTON, R., SACHDEVA, M.S., "Real and reactive power optimization by suboptimum techniques," *IEEE Trans. PAS-90* 2(1971) 950-956.
- [3] BÓKAY, B., RÁCZ, L., "Nagyfeszültségű hálózatok számítási módszerei", *BME Továbbképző Intézet kiadványa*, Budapest, 1971.
- [4] CARPENTIER, J.W., "Differential injections method, a general method for secure and optimal load flows", in: *Proceedings of 8th PICA Conference*, (Minneapolis, 1973) 255-262.
- [5] CARPENTIER, J., SIROUX, J., "L'optimisation de la production à l'Electricité de France", *Bulletin de la Société Française des Electriciens* (1963).
- [6] COHEN, A.I., YOSHIMURA, M., "A branch-and-bound algorithm for unit commitment", *IEEE Trans PAS-102* 2(1983) 444-450.
- [7] COHN, N., *Control of Generation and Power Flow on Inter-connected Power Systems* (John Wiley & Sons, New York, 1961).
- [8] CSIDA, S., NÉMETH, A., "Villamosenergia-rendszerek teljesítményszabályozásának néhány kérdése", *ERŐTERV Közlemények* 18(1978) 53-63.

- [9] DANTZIG,G.B., Linear Programming and Extensions (Princeton University Press,Princeton,1963).
- [10] DAY,J.T., "Forecasting minimum production costs with linear programming" IEEE Trans PAS-90, 2(1971)814-823.
- [11] DEÁK,I., HOFFER,J.,MAYER,J.,PRÉKOPA,A.,STRAZICKY,B., " A magyar villamosenergia-termelés optimális napi ütemezése" (modell és programleírás), Budapest,1981.
- [12] DEÁK,I., HOFFER,J.,MAYER,J., NÉMETH,Á.,POTECZ,B.,PRÉKOPA,A., STRAZICKY,B., "A short description of the optimal daily scheduling of the electricity production in Hungary", MTA SzTAKI Working Paper MO/20, 1980.
- [13] DEÁK,I.,HOFFER,J.,MAYER,J.,NÉMETH,Á., POTECZ,B.,PRÉKOPA,A., STRAZICKY,B., "Optimal daily scheduling of the electricity production in Hungary", in:Large scale linear programming, Proceedings of a IIASA Workshop, editors:G.B.Dantzig,M.A.H. Dempster,M.Kallio. IIASA,Laxenburg,Austria,1981,923-960.
- [14] DEÁK,I.,HOFFER,J.,MAYER,J.,NÉMETH,Á.,POTECZ,B.,PRÉKOPA,A., STRAZICKY,B., "Optimal daily scheduling of the electricity production in Hungary", Operations Research in Progress, editors:G.Feichtinger,P.Kall (D.Reidel Publ.Co.,)1982,103-114.
- [15] DILLON,T.S., MARTIN,R.W.,SJELOGREN,D., "Stochastic optimization and modelling of large hydrothermal systems for long-term regulation", IPC Business Press Electrical Power & Energy Systems Vol.,2. 1(1980)2-20.
- [16] DILLON,T.S., EDWIN,K.W., KOCHS,H.D.,TEND,R.J., "Integer programming approach to the problem of optimal unit commitment with probabilistic reserve determination, IEEE Trans.PAS-97 6(1978)2154-2166.

- [1] DOMMEL, H.W., TINNEY, W.F., "Optimal power flow solutions", IEEE Trans. PAS-87, (1968) 1866-1876.
- [18] DOPAZZO, J.F., KLITIN, O.A., STAGG, G.W., WATSON, M., "An optimization technique for real and reactive power allocation", in: Proceedings of the IEE, Vol. 55 11 (1967) 1877-1885.
- [19] ELGERD, O.I., Electrical Energy Systems Theory: An Introduction (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [20] ERISMAN, A.M., NEVES, K.W., DWARAKANATH, M.H., Electric Power Problems: The Mathematical Challenge (SIAM, Philadelphia, 1980).
- [21] ESCUDERO, L.F., "Operation goals in maintenance scheduling for energy generators", IBM Working Paper.
- [22] GESZTI, P.O., VILLAMOSMŰVEK 1-2. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1967).
- [23] GROSS, C.A., Power System Analysis (John Wiley & Sons, London, 1979).
- [24] HANO, I., TAMURA, Y., NARITA, S., MATSUMOMOTO, K., "Real time control of system voltage and reactive power", IEEE Trans. PAS-88, 10 (1969) 1544-1559.
- [25] HAPP, H.H., JOHNSON, R.C., WRIGHT, W.J., "Large scale hydro thermal unit commitment - method and results", IEEE Trans. Pas-90 3 (1971) 1373-1384.
- [26] HAPP, H.H., "Optimal power dispatch - A comprehensive survey", IEEE Trans. PAS-96 (1977) 841-854.
- [27] HAPP, H.H., WIRGAU, K.A., "Static and dynamic VAR compensation in system planning", IEEE Trans. PAS-97 5 (1978) 1564-1578.

- [28] HARHAMMER, P.G., "Economic dispatch using mixed integer programming", in: Proceedings of 5th Power System Computation Conference (Cambridge, England, 1975) 1-17.
- [29] HARHAMMER, P.G., "Economic operation of multiple reservoir systems", in: Proceedings of 6th Power System Computation Conference, Darmstadt, 1978).
- [30] HARHAMMER, P.G., "Economic operation of electric power systems", in: Survey of Mathematical Programming, ed. A. Prékopa, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979, Vol. 3., 179-194.
- [31] HOFFER, J., "Megengedett megoldások vizsgálatával bővített Benders dekompozíciós algoritmus", Alkalmazott Matematikai Lapok 5 (1979) 177-190.
- [32] HOFFER, J., "Döntésektől függő ellátási feladatok megoldása Benders dekompozícióval", Alkalmazott Matematikai Lapok 7 (1981) 73-82.
- [33] JOLLISAIN, CH.H., ARVANITIDES, N.V., LUENBERGER, D.G., "Decomposition of real and reactive power flows: A method suited to on-line applications", IEEE Trans. PAS-91 (1972) 661-670.
- [34] KELÉNYI, F., KISS, F., "Irodalmi áttekintés a KGST tagországokban alkalmazott operatív üzemelőkészítő programrendszerokről", VEIKI, kutatási jelentés, 1979.
- [35] KÉRI, G., MOLNÁR, M., NÉMETH, Á., POTE CZ, B., PRÉKOPA, A., TURCHÁNYI, P., VIZVÁRI, B., A magyar villamosenergia-rendszer napi menetrendjét meghatározó optimalizáló programozási modellek, MTA SZTAKI Operációkutatási Osztály, Budapest, 1974.

- [36] KIRCHMAYER, L.K., Economic Control of Interconnected Systems (John Wiley & Sons, New York, 1959).
- [37] KIRCHMAYER, L.K., Economic Operation of Power Systems (John Wiley & Sons, New York, 1958).
- [38] KISS, L., POTE CZ, B., "Gazdaságossági optimalizációs eljárások villamosenergia-rendszerek irányításában", *Ipargazdaság*, 7/1965).
- [39] KLOS, A., "Algebraic model of electrical network", *IEEE Trans. PAS-89* (1970) 240-262.
- [40] KOVÁCS, L.B., A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1969).
- [41] KRUMM, L.A., "Obobsenie metoda Niutona pri upravlenii energetitskimi sistemami", *Izvesztiya Akademii Nauk USSR, Energetika i Transport* 3(1976) 3-20.
- [42] LAMONT, J.W., ZESSO, W.G., RANTZ, M.W., "Daily fossil fuel management", in: *Proceedings of PICA Conference, 1979*, 288-235.
- [43] LASDON, L.S., Optimization for Large Systems (The Macmillan Company, New York, 1972).
- [44] LAUER, G.S., SANDELL, N.R., BERTSEKAS, D.P., POSBERGH, T.A., "Solution of large-scale optimal unit commitment problems", *IEEE Trans. PAS-101* 1(1982) 79-86.
- [45] LAUSANNE, B., VERET, C., "Description de la nouvelle version du modèle ORESTE de choix des démarrages des groupes thermiques", EDF-DER, Service Etudes de Réseaux HR 32-0504.

- [46] LÉVAI, A., ZETTNER, T., Hőerőművek IV. (Műszaki Könyvkiadó, 1971).
- [47] MVM-T-ERŐTERV-VEIKI-HITACHI, "Hungarian Automatic Load Dispatching (HALDIS), System Function Specification, Program Specification" (Budapest, 1979).
- [48] NÉMETH, A., NAGY, I., "Daily load forecasting in the Hungarian National Control Center", in: Proceedings of VIIth Power System Computation Conference (Lausanne, 1981), 520-525.
- [49] MARIANI, E., DI PERNA, A., "Programmazione giornaliera delle centrali idroelettriche a bacine e a serbatoio in un sistema di produzione misto", L'Energia Elettrica 7(1971) 427-448.
- [50] PANG, C.K., SHEBLE, G.B., ALBUYEH, F., "Evaluation of dynamic programming based methods and multiple area representation for thermal unit commitments", IEEE Trans. PAS-100 3(1981) 1212-1218.
- [51] PESCHON, J., PIERCY, D.S., TINNEY, W.F., TVEIT, O.J., "Optimum control of reactive power flow", IEEE Trans. PAS-87 (1968) 40-48.
- [52] POTE CZ, B., "Megszakításos üzemvitel rendszerszintű vizsgálata", Műszaki doktori disszertáció, 1967.
- [53] POTE CZ, B., "Üzemállapot optimalizációs menetrend program", "Számítástechnika a villamosenergiaiparban" konferencia kiadványa, Pécs, 1973.
- [54] POTE CZ, B., "Számológépes módszerek használata az energiarendszer operatív üzemelőkészítésben", VI. Országos Erőművi Konferencia kiadványa, Budapest, 1974.

- [55] PRÉKOPA, A., "Lineáris programozás I. (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968).
- [56] QUAZZZA, G., "Highlights on technological trends in the on-line optimization of power system operation", in: Proceedings of IEE International Conference on On-line Operation and Optimization of Transmission and Distribution Systems (London 22-25, June, 1976).
- [57] RÓZSA, P., Lineáris algebra és alkalmazásai (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.)
- [58] SACHDEVA, M.S., BILLINGTON, R., PETERSON, C.A., "Representative bibliography on load forecasting", IEEE Trans. PAS-96, 2(1977) 697-700.
- [59] SASSON, A.M., ABOYTES, F., CARDENAS, K., GOMEZ, F., VILORIA, F., "A comparison of power systems static optimization techniques, ETZ-A Bd. 93(1972)4.9.
- [60] SESHU, S., REED, M.B., "Linear Graphs and Electrical Networks", (Addison-Wesley, London, 1961).
- [61] SGEF, Système de gestion énergétique prévisionnelle. Az Electricité de France, Service des Mouvements d'Energie kiadványa, Paris, 1981.
- [62] SHEN, C.M., LAUGHTON, M.A., "Power system load scheduling with security constraints using dual linear programming", in: Proceedings of IEE Vol. 117, 11(1970)2117-2127.
- [63] STAGG, G.W., EL-ABIAD, A.H., Computer Methods in Power System Analysis (MacGraw-Hill, New York, 1968).
- [64] STOTT, B., "Decoupled Newton load flow", IEEE Trans. PAS-91 1955-1959.

- [65] STOTT, B., ALSAÇ, O., "Fast decoupled load flow", IEEE Trans. PAS-93 (1974) 859-869.
- [66] STOTT, B., "Review of Load Flow Calculation Methods", in: Proceedings of IEEE Vol-62, 7(1974) 916-929.
- [67] SZENDY, K., Korszerű hálózatszámítási módszerek, (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967).
- [68] SZILÁGYI, L., "Villamos hálózatok optimális wattos teljesítményelosztásának modellje" (VEIKI, kutatási jelentés, Budapest, 1978).
- [69] VAGÓ, I., A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számításában, (Műszaki Kiadó, Budapest, 1976).
- [70] VAMOS, T., "Az energetikai optimalizálás néhány fő kérdéséről", (VILLENKI Tanulmányok 427., Budapest, 1962).
- [71] VAMOS, T., "Erőművek számítógépes irányítása (a stockholmi IFAC/IFIP konferencia anyagából)" (VILLENKI Tanulmányok, Budapest, 1965).
- [72] WAIGHT, J.G., ALBUYEH, F., BOSE, A., "Scheduling of generation and reserve margin using dynamic and linear programming", IEEE Trans. PAS-100 5(1981) 2226-2230.
- [73] WEEDY, B.M., Electric Power Systems, (John Wiley & Sons., London, 1967).

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1983-BAN MEGJELENTEK

- 140/1983 Operation Research Software Descriptions (Vol.1.)
Szerkesztette: Prékopa András és Kéri Gerzson
- 141/1983 Ngo The Khanh: Prefix-mentes nyelvek és egyszerű
determinisztikus gépek
- 142/1983 Pikler Gyula: Dialógussal vezérelt interaktív
gépészeti CAD rendszerek elméleti és gyakorlati
megfogalmazása
- 143/1983 Márkus Zsuzsanna: Modellelméleti és univerzális
algebrai eszközök a természetes és formális nyelvek
szemantikaelméletében
- 144/1983 Publikációk '81 /Szerkesztette: Petróczy Judit/
- 145/1983 Telcs András: Belső állapotú bolyongások
- 146/1983: Varga Gyula: Numerical Methods for Computation of
the Generalized Inverse of Rectangular Matrices
- 147/1983 Proceedings of the joint Bulgarian-Hungarian
workshop on "Mathematical Cybernetics and data
Processing" /Szerkesztette: Uhrin Béla/
- 148/1983 Sebestyén Béla: Fejezetek a részecskefizikai
elektronikus kísérleteinek adatgyűjtő, -feldolgozó
rendszerei köréből
- 149/1983 L. Keviczky, J. Héthéssy: A general approach for
deterministic adaptive regulators based on explicit
identification
- 150/1983 IFIP TC.2 WORKING CONFERENCE "System Description
Methodologies" May 22-27. 1983. Kecskemét.
/Szerkesztette: Knuth Előd/

- 151/1983 Márkus Zsuzsanna: On First Order Many-Sorted
LOGIC
- 152/1983 Operations Research Software Descriptions /Vol.2./
Edited by A. Prékopa and G. Kéri
- 153/1983 T.M.R. Ellis: The automatic generation of user-
-adaptable application-oriented language processors
based on quasi-parallel modules
- 154/1983 Publikációk'82 /Szerkesztette: Petróczy Judit/

