tanulmányok 8/1973

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

Kandidátusi értekezés

Irta

Klafszky Emil

Aspiránsvezető

Dancs István

a matematikai tudományok kandidátusa

Budapest, 1973.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

(tézisek)

A geometriai programozás mind elméleti érdekességénél, mind a gyakorlati felhasználás szempontjából a matematikai programozás rendkivül gyorsan fejlődő ága. Kialakulására döntő hatással volt egyrészt a kémiai egyensúly problémának matematikai programozásként való megfogalmazása, másrészt az a felismerés, hogy az elemi optimum számitási feladatoknál nagyon jó eszköznek bizonyuló számtani-mértani közép egyenlőtlenséget a matematikai programozási feladatra is eszközként használjuk. A geometriai egyenlőtlenség (súlyozott számtani-mértani közép egyenlőtlenség) kulcsfontosságú szerepe adja a "geometriai programozás" elnevezést.

A keverék kémiai egyensúly egyenletét, egy matematikai programozási feladatként, formulázta meg White - S. M. Johnson - Dantzig [79] . Ez a modell lényegében a geometriai programozási duál feladat, ahol a célfüggvény a keverék szabad energiája (Gibbs [38]). Ezt követően Dantzig - White - S. M. Johnson [14] dolgozatukban a célfüggvényt szakaszonkénti lineáris függvénnyel közelitve egy megoldási algoritmust javasolnak a feladatra. A kémiai egyensúly duál feladatát, a tulajdonképpeni geometriai programozási primál feladatot adja Clasen [13], és egyúttal egy numerikus megoldási algoritmust javasol a kémiai egyensúly megoldására. A geometriai programozás duál feladatát, mint a kémiai egyensúly matematikai modelljét tárgyalja S h a p i r o [71] , S h a p i r o - S h a p l e y [72, 73]

A másik oldalról, - egyenlőtlenségek (főleg geometriai egyenlőtlenség) felhasználása matematikai programozási feladatokban - R.C. J o h n s o n [43], F e i n [33] , Z e n e r [83] , C h a r n e s - C o o p e r [11] D u f f i n [17] , S h e r w o o d [74] munkáiban található. Ezt a gondolatot fejlesztette tovább Z e n e r [84, 85, 86] D u f f i n [18] D u f f i n - P e t e r s o n [20] , D u f f i n - Z e n e r [27]

1966-ban megjelent az addigi eredmények összefoglalása D u f f i n - P e t e r s o n - Z e n e r [26] könyve. A könyv tárgyalja a geometriai programozást és dualitási problémakörét, a geometriai programozás alkalmazását, és a geometriai programozás kiterjesztését.

A geometriai programozás számos müszaki alkalmazását mutatja be D u f f i n - P e t e r s o n - Z e n e r [26] könyve. További alkalmazások találhatók W i l d e [80] , W i l d e - B e i g h t l e r [81] , és A v r i e l - W i l d e [1,3] munkáiban. Egy nagyon érdekes közgazdasági alkalmazást mutat be T h e i l [78] dolgozata. A fizikai-müszaki alkalmazások számos példája található Z e n e r [87] könyvében.

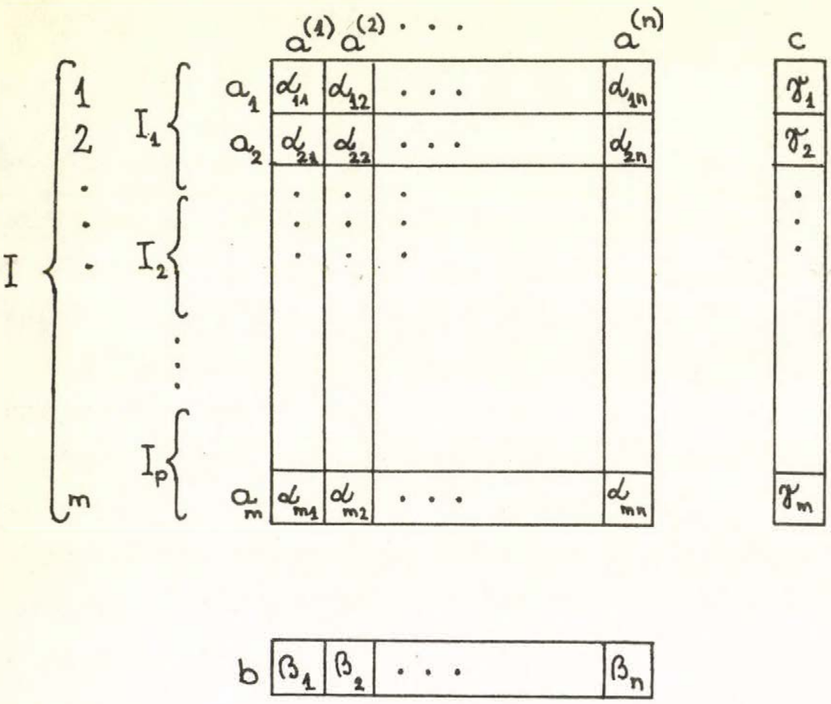
A következőkben tézisszerüen áttekintést adunk a disszertáció eredményeiről.

A disszertáció 1.§-tól a 7.§-ig terjedő részében a geometriai programozás elméletében ezideig elért eredményeket ö s s z e f o g l a l ó a n tárgyalom. Az ezekben a paragrafusokban leirt eredmények nagy részükben a már emlitett [26] könyvben megjelentek, azonban a dualitási problémakörnek az ott szereplő eredeti tárgyalása rendkivül körülményes és hosszadalmas. A könyvet követően jelent meg D u f f i n - P e t e r s o n [21] dolgozata, amely a geometriai programozás dualitástételére a könyvben szereplő tárgyalásnál egyszerübbet ad. D u f f i n [19] dolgozatában ujra visszatér a dualitási tételnek egy más, a lineáris programozás dualitás tételét felhasználó bizonyitására. Az utóbbi időben D u f f i n - P e t e r s o n [22] ismét egy más, a differenciálszámitáson alapuló nagyon érdekes bizonyitást ad. Ezek azonban még mindig elég hosszadalmas uton történnek. D u f f i n - P e t e r s o n [23] egy rövid közlésükben felvetnek egy egyszerüsitési lehetőséget azonban ennek kimunkálását későbbre igérik. Ötletük A v r i e l - W i l l i a m s [5] észrevételének továbbfejlesztése. A dualitási tételnek az itt általunk adott bizonyitásában a problémát a duál feladat oldaláról közelitjük meg, s igy egy egyszerü tárgyalásmódot találunk a problémakörre. E közben néhány olyan eredményre jutunk, amelyek a feladat természetét jobban megvilágitják. Például a primál-, duál feltételi halmazok kapcsolatára A v r i e l - W i l l i a m s [4] a dualitási tételre támaszkodva egy érdekes összefüggést kap, amely tárgyalásmódunkban közbülső következményként adódik.

Az értekezés ezen részében összefoglaló jellege miatt irodalmi hivatkozást nem teszünk.

Rátérve a geometriai programozás főbb eredményeinek ismertetésére mindenekelőtt a feladat megfogalmazását adjuk.

Legyen az $A=(a_i)=(a^{(j)})=(\alpha_{ij})$ $m \times n$ -es mátrix, valamint a $b=(\beta_j)$ n dimenziós vektor, a $c=(\gamma_j)$ pedig m dimenziós vektor. Legyen az $I=\{1,2,\ldots m\}$ index halmaz az $I_1, I_2 \ldots I_p$ diszjunkt index halmazokra particionálva. A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:



Geometriai programozási feladatnak az alábbi matematikai programozási feladatot nevezzük:

PRIMÁL GEOMETRIAI PROGRAM: Meghatározandó azon $y=(\eta_j)\in R^{(n)}$ vektor, melyre

$$by \qquad \text{maximális} \tag{1}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \leqq 1, \qquad (k=1,2,\ldots p). \tag{2}$$

DUÁL GEOMETRIAI PROGRAM: Meghatározandó azon $x=(\xi_i)\in R^{(m)}$ vektor, melyre

$$xc+\sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k}\xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}} \qquad \text{minimális} \tag{3}$$

feltéve, hogy

$$\left.\begin{array}{l} xA=b, \\ x\geqq 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Azon $y\in R^{(n)}$ vektorok halmazát, melyek a (2) feltételt kielégitik p r i m á l   f e l t é t e l i   h a l m a z n a k nevezzük és $\mathcal{P}$ szimbólummal jelöljük. Hasonlóan a (4) feltételt kielégitő $x\in R^{(m)}$ vektorok halmazát d u á l   f e l t é t e l i   h a l m a z n a k nevezzük és $\mathcal{D}$-vel jelöljük.

A programot (primál, vagy duál) konzisztensnek nevezzük, ha $\mathcal{P}$ (illetve $\mathcal{D}$) nem üres. Az optimális megoldások halmazát $\mathcal{P}^*$ illetve $\mathcal{D}^*$-al jelöljük.

A továbbiakban a duál célfüggvényben szereplő, a linearitást módositó tagot jelöljük:

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{p}\ln\frac{\prod_{i\in I_k}\xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k}\xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}}$$

Az alábbi lemma a geometriai programozás fő lemmája összefüggést ad a lehetséges megoldásokhoz tartozó célfüggvény értékekre.

LEMMA (1.§.) Ha $y\in\mathcal{P}$ és $x\in\mathcal{D}$ akkor

$$by\leqq xc+\psi(x)$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$e^{a_i y-\gamma_i}\sum_{i\in I_k}\xi_i=\xi_i \text{ minden } i\in I_k (k=1,\dots p) \text{ indexre.}$$

A konvex függvényekre vonatkozó F a r k a s tételnek a primál feladatra történő egyszerü adaptációjával nyerhető a geometriai programozás u.n. g y e n g e d u a l i t á s i t é t e l e .

TÉTEL (2.§.) Ha a primál feladatnak van $y^*\in\mathcal{P}^*$ optimális megoldása és van olyan $\bar{y}\in\mathcal{P}$ megengedett megoldás, hogy a nem-lineáris feltételekre a

$$\sum_{i\in I_k}e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}<1$$

feltétel teljesül, akkor van $x^*\in\mathcal{D}$ optimális megoldása a primálnak és

$$by^*=x^*c+\psi(x^*).$$

A tételt R o c k a f e l l e r [67] oly értelemben élesitette, hogy nem kivánja meg, hogy legyen y^* optimális megoldás, hanem csak azt, hogy a primál célfüggvény felülről korlátos legyen.

A duál feladat célfüggvényére, illetve annak linearitását módositó $\psi(x)$ tagjára a geometriai egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy:

TÉTEL (3.§.) a $\psi(x)$ függvényre az alábbi tulajdonságok állnak fenn.

a./ $\psi(0)=0$,

b./ $\psi(\lambda x)=\lambda\psi(x)$, ha $\lambda \geqq 0$,

c./ $\psi(x_1+x_2) \leqq \psi(x_1)+\psi(x_2)$.

A lineáris függvényekre vonatkozó F a r k a s - tétel felhasználásával a primál célfüggvény korlátosságára kapunk feltételt a következő tételben.

TÉTEL (4.§.) a konzisztens primál feladat célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos felülről, ha a duál feladat konzisztens.

A következő tétel a geometriai programozás legalapvetőbb tétele. Ez szolgál a dualitás tétel alapjául is.

TÉTEL (5.§.) Ha a duál feladatnak van pozitiv megengedett megoldása és célfüggvénye alulról korlátos, akkor a primál feladat célfüggvénye felveszi maximumát a feltételi halmaz valamely y^* pontjában és

$$by^* = \inf_{x\in\mathcal{D}} (xc + \psi(x))$$

Az olyan tipusu geometriai programozási feladatok, amelyek duál feltételi halmazában van pozitiv pont, nemcsak elméleti szempontból, hanem a megoldó algoritmusok szempontjából is fontosak, ezeket az egyszerübb hivatkozás érdekében k a n o n i k u s f e l a d a t n a k nevezik. A következőkben megmutatjuk, hogy minden feladat "tetszőlegesen jól közelithető" az ő kanonikus "redukáltjával". Legyen a geometriai programozási feladat olyan, hogy a $\mathcal{D}$ duál feltételi halmaz nem üres. Jelöljük $\bar{I}$-vel azon $i \in I$ indexek halmazát, melyre van olyan $x \geqq 0$ lehetséges megoldása $xA=b$ feltételi halmaznak, hogy $\xi_i > 0$. A geometriai programozási feladatot r e d u k á l j u k úgy, hogy csak az $i \in \bar{I}$ tagokat hagyjuk meg. A redukált feladat kanonikus feladat. Nyilvánvaló, hogy a duál feladat és a redukált duál feladat feltételi halmaz közt teljes equivalencia van abban az értelemben, hogy a redukált duál feladat egy lehetséges megoldása zérusokkal kiegészitve az eredeti lehetséges megoldása és forditva is, az eredeti egy lehetséges megoldása a redukciónak megfelelően zérus koordináták elhagyásával a redukált egy megoldása és a célfüggvények értékei megegyeznek. A következő tételben megmutatjuk, hogy a primál és a redukált primál feladat feltételi halmazai közt is fennáll egy "gyengébb equivalencia", nevezetesen az, hogy ha $\bar{y}$ a redukált egy lehetséges megoldása, akkor van olyan y lehetséges megoldása az eredeti primálnak, melyre a két célfüggvény érték tetszőlegesen kicsit tér el egymástól. Ezt az alábbi tételben mondjuk ki pontosan.

TÉTEL (6.§.) Legyen a geometriai programozási feladat olyan, hogy $\mathcal{P}$ és $\mathcal{D}$ feltételi halmazok nem üresek. Jelölje $\bar{\mathcal{P}}$ a redukált primál feladat feltételi halmazát, ekkor bármely $\bar{y} \in \bar{\mathcal{P}}$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $y \in \mathcal{P}$, hogy

$$|by - b\bar{y}| \leqq \varepsilon.$$

A fenti eredményekből egyszerüen nyerhető a geometriai programozás dualitási tétele.

TÉTEL (7.§.) a./ Ha a primál- és duál feladat konzisztens, akkor a primál célfüggvény szuprémuma megegyezik a duál célfüggvény infinumával.

b./ Ha a primál feladat konzisztens és véges szuprémuma van, akkor a duál is konzisztens és a primál szuprémum a duál infinummal megegyezik.

Az értekezés 8.§-től a 10.§-ig terjedő részében a geometriai programozás néhány további összefüggését ismertetjük. Ezen vizsgálatok kiindulópontjául a lineáris programozás elméletében jól ismert eredmények szolgáltak. Ezen fejezetek legalapvetőbb eredményeit az alábbiakban ismertetjük.

Az A, b, c együtthatóju, és adott particióju geometriai programozás L a g r a n g e - f ü g g v é n y é n e k nevezzük a

$$\Phi(x, y) = xc + by - xAy + \psi(x)$$

függvényt. Az x^*, y^* pontot a Lagrange-függvény nyeregpontjának mondjuk, ha tetszőleges y és $x \geqq 0$ vektorokra:

$$\Phi(x^*, y) \leqq \Phi(x^*, y^*) \leqq \Phi(x, y^*).$$

A geometriai programozás optimális megoldásai és a programozási feladat Lagrange-függvénye között az alábbi kapcsolatot kaptuk:

TÉTEL (8.§.) Az $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ vektorpár akkor és csak akkor optimális megoldása a geometriai programozásnak, ha a feladat Lagrange-függvényének nyeregpontja.

A geometriai programozási primál feladatot p r i m á l - r e g u l á r i s n a k nevezzük, ha optimális megoldásainak halmaza nem-üres korlátos halmaz. Hasonlóan, a duál feladatot d u á l - r e g u l á r i s n a k nevezzük, ha a duál optimális halmaz nem-üres és korlátos. A lineáris programozásbani K u h n - T u c k e r feltétellel analóg, alábbi regularitási feltételt kaptuk.

TÉTEL (9.§.) a./ Ha a primál feladat konzisztens, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy reguláris legyen az, hogy az alábbi p r i m á l r e g u l a r i t á s i feltétel teljesüljön: Az

$$Ay \leqq 0, \quad by \geqq 0, \quad y \neq 0$$

egyenlőtlenség rendszernek n i n c s megoldása.

b./ Ha a duál feladat konzisztens, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy reguláris legyen az, hogy az alábbi d u á l r e g u l a r i t á s i feltétel teljesüljön: Az $xA=0, x \geqq 0, xc+\psi(x) \leqq 0, x \neq 0$ egyenlőtlenség rendszernek n i n c s megoldása.

Az optimális halmazoknak a Lagrange-függvénnyel és a regularitással való viszonya lehetővé teszi az ugynevezett p e r - t u r b á c i ó s v i z s g á l a t o k a t . A geometriai programozás dualitási tétele szerint, ha mindkét feladat konzisztens, akkor a szuprémum megegyezik az infinummal. Ezt a közös értéket nevezzük a geometriai programozás értékének. A perturbációs vizsgálatok alapfeladata a következő: Legyenek $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ az A, b, c mátrix, illetve vektorokkal megegyező dimenziójuak; ekkor mit mondhatunk az $A+\tau\hat{A}$, $b+\tau\hat{b}$, $c+\tau\hat{c}$ együtthatóju geometriai programozás értékéről zérushoz közeli τ esetében.

A perturbációs problémát lineáris programozásra M i l l s [51] és W i l l i a m s [82] vizsgálta. Az ő eredményeikkel teljesen megegyezőt nyertünk a geometriai programozásra is.

TÉTEL (10.§.) a./ Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $A+\tau\hat{A}$, $b+\tau\hat{b}$, $c+\tau\hat{c}$ együtthatóju perturbált feladat konzisztens legyen valamely $[0, \tau_0)$ intervallumon tetszőleges, de fix $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ perturbációs együtthatóknál az, hogy az A, b, c együtthatóju feladatra a regularitási feltételek teljesüljenek.

b./ Ha az A, b, c együtthatóju feladatra a regularitási feltételek teljesülnek, akkor tetszőleges $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ perturbációs együtthatókhoz van olyan $[0, \tau_0)$ intervallum, hogy a perturbált primál feladatnak is és a duáljának is van optimális megoldása minden $\tau \in [0, \tau_0)$ esetén és amennyiben $\omega(\tau)$-vel jelöljük a program értékét, akkor

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\omega(\tau)-\omega(0)}{\tau} = \max_{y \in \mathcal{D}^*} \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y) .$$

Az értekezés 11.§-ban P r é k o p a [64] valószinüséggel korlátozott lineáris programozási modelljének analógjára bevezetjük a valószinüséggel korlátozott geometriai programozási modellt, majd P r é k o p a [65] eredményére támaszkodva megmutatjuk, hogy ha a korlátozó vektor valószinüségi változó vektor log-konkáv sürüség függvénnyel, akkor ezen sztohasztikus geometriai programozási feladat egy konvex matematikai programozási feladat.

A disszertáció következő fejezeteiben a geometriai programozásnak elméleti szempontból érdekes és a gyakorlatban hasznosnak bizonyuló két alkalmazását adjuk.

Az értekezés 12.§.-ban az input-output tábla előrebecslésére szolgáló u.n. RAS módszerre a geometriai programozás dualitási tételét használva egy információ elméleti alapon nyugvó megalapozást adunk. Érdekessége, hogy matematikai programozási eszközzel egy, a gyakorlatban jól bevált, heurisztikus alapon nyugvó módszernek elméleti hátterét lehet feltárni.

Az alábbiakban ismertetjük az input-output tábla előrebecslési problémáját, a RAS módszert és az általunk adott információ elméleti hipotézist.

Legyenek $I_1, I_2, \dots I_i, \dots I_m$ kibocsájtóhelyek, $J_1, J_2, \dots J_j, \dots J_n$ fogadóhelyek. Az $\alpha_{ij} \geqq 0$ szám jelölje azt a mennyiséget, amennyi az I_i helyről a J_j helyre megy, vagy másképpen szólva amennyit az I_i helyen termeltből a J_j hely elfogyaszt. Tömören az α_{ij} számokat az $A=(\alpha_{ij})$ mátrixba foglalhatjuk össze és ezt nevezzük input-output táblázatnak.

A $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$ mennyiség az I_i hely teljes kibocsájtása, a $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}$ mennyiség a J_j hely összes befogadása. Ezeket nevezzük az input-output marginális értékeinek.

A feladat az, hogy amennyiben ismerjük a jelenlegi $A=(\alpha_{ij})$ input-output mátrixot és ismerjük a megváltozott

$b=(\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_i,\ldots\beta_m)>0$ marginális input és a

$c=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_j,\ldots\gamma_n)>0$ output értékeket, akkor

mit mondhatunk az uj $X=(\xi_{ij})$ input-output tábláról.

A feladat megoldására elterjedt eljárás az ugynevezett RAS módszer, ami a következőkben áll: Olyan $\xi_{ij}\geqq 0$, $(i=1,2,\ldots m;$ $j=1,2,\ldots n)$, $\varrho_i>0$, $(i=1,2,\ldots m)$ és $\sigma_j>0$, $(j=1,2,\ldots n)$számokat keresünk, melyre

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}&=\beta_i, \qquad (i=1,2,\ldots m),\\ \sum_{i=1}^{m}\xi_{ij}&=\gamma_j, \qquad (j=1,2,\ldots n),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

és

$$\xi_{ij}=\varrho_i\alpha_{ij}\sigma_j. \qquad (2)$$

Az uj hipotézisünk a RAS helyett a következő:

Akkor tartjuk "jónak" az $X=(\xi_{ij})$ előrebecslést, ha - természetesen az (1) egyenletrendszer kielégitése mellett - az információnyereség (I-divergencia), amelyet az X tábla az A táblához képest ad minimális, azaz, ha a

$$\varphi(x)=\sum_{i,j}\frac{\xi_{ij}}{\sum_{i,j}\xi_{ij}}\,\ln\left(\frac{\dfrac{\xi_{ij}}{\sum_{i,j}\xi_{ij}}}{\dfrac{\alpha_{ij}}{\sum_{i,j}\alpha_{ij}}}\right)$$

függvény értéke minimális.

A két hipotézisre az alábbi összefüggés áll fenn:

TÉTEL: Ha az előrebecslési feladat a RAS módszerrel megoldható, akkor az I-divergencia minimalizálásával történő előrebecslés is ugyanazt eredményezi.

<u>Az értekezés 13.§-ban</u> a geometriai programozást alkalmazzuk a sorozatgyártási modellre.

A modell első leirását E v a n s [31] és egy megoldását E v a n s [32] adta. Már C h a r n e s - K i r b y [12] észrevették, hogy ez a probléma egy geometriai programozási feladat, azonban ennek lehetőségeit ők nem használták ki és a feladatot áttranszformálva, mint szeparábilis konvex programozási feladatot oldják meg. M i t r o f f [52] és R u t e n b e r g - S h a f t e l [68] a modellre néhány konkrét, a gyakorlatban megvalósitott alkalmazást mutat be.

Az alábbiakban a sorozatgyártási modellt ismertetjük és vázoljuk a megoldó algoritmust.

Jelöljenek $A_1, A_2, \dots A_m$ gyártási folyamatokat, és $B_1, B_2, \dots B_n$ objektumokat, amelyek a gyártási folyamatokkal létrehozhatók.

Jelentse $\alpha_{ij} \geqq 0$ szám azt az időszükségletet, amennyi ideig az egységnyi intenzitásu A_i folyamatot üzemeltetni kell, hogy a B_j objektumhoz szükséges terméket előállitsa.

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & B_1 & \dots & B_j & \dots & B_n \\
\hline
A_1 & \alpha_{11} & & \alpha_{ij} & & \alpha_{1n} \\
\hline
\vdots & & & & & \\
\hline
A_i & \alpha_{i1} & & \alpha_{ij} & & \alpha_{in} \\
\hline
\vdots & & & & & \\
\hline
A_m & \alpha_{m1} & & \alpha_{mj} & & \alpha_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Legyen adott $\gamma_i > 0$ $(i=1,\dots,m)$, az A_i folyamat egységnyi intenzitáson történő üzemeltetésének költsége

Legyen adott $\pi_j > 0$ $(j=1,\dots,m)$, az igény a B_j objektumból.

A feladat megadnunk a gyártási folyamatokra egy $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)>0$ intenzitási előirást és egy $y=(\eta_1,\eta_2,\dots\eta_n)>0$ időpolitikát, amely alatt a következőket értjük: Előirjuk, hogy az A_i termelési folyamat ξ_i intenzitáson müködjön $(i=1,\dots,m)$ és ekkor a B_j objektum előállitásához szükséges müködtetési idő η_j legyen.

Nyilvánvaló, hogy az igény ki legyen elégitve fenn kell, hogy álljon:

$$\xi_i \eta_j \geq \alpha_{ij} \tag{1}$$

Az X intenzitásu gyártási folyamat rendszer egy időegységre eső összköltsége:

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \xi_i$$

Az összes objektum előállitásának időszükséglete:

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \eta_j$$

Igy az objektumok előállitásához szükséges összes költség:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \xi_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \pi_j \eta_j\right) \tag{2}$$

<u>A modellünk tehát olyan</u> $\xi_i>0$, $\eta_j>0$ <u>számok keresése, melyre (1) feltételek teljesülnek és (2) függvényérték minimális.</u>

A feladat matematikailag egy nem-lineáris hozzárendelési feladat. Azonban egy egyszerü transzformációval g e o m e t r i a i p r o g r a m o z á s i feladattá transzformálható. Mint geometriai programozást tekintve a dualitási tétellel nyerünk egy optimalitási kritériumot. Igy feladatunk (1) -et és az optimalitási kritériumot kielégitő $\xi_i > 0, \eta_j > 0$ számok keresése lesz. Erre a szállitási feladatra ismeretes "magyar módszert" egy kevés módositással alkalmazni lehet és igy egy jó hatásfoku algoritmust kapunk eredeti feladatunkra.

Az értekezéshez három függelék csatlakozik. Az A. Függelék az általánositott számtaniközép-mértaniközép közti egyenlőtlenséget az u.n. g e o m e t r i a i e g y e n l ő t l e n s é g e t tartalmazza. Habár számos bizonyitása ismeretes, a geometriai programozásban betöltött kulcsfontosságu szerepe miatt azt a függelékben bizonyitással együtt adjuk. A B. Függelék a konvex-függvényekre vonatkozó Farkas-tételt tartalmazza, amely tárgyalásunkban fontos szerepet játszik és a függelékben adott formában kerül felhasználásra. A C. Függelék mind a RAS modell, mind a sorozatgyártási modell megoldásában fontos szerepet játszó K ő n i g - H a l l tétel konstruktiv, algoritmust adó, bizonyitását tartalmazza.

———— • ————

Az értekezés egyes részei a szerző [45,46,47] dolgozataiban kerültek publikálásra.

———— • ————

Az utóbbi időszakban a geometriai programozás kutatási irányát két főbb csoportra lehet osztani: a.) általánositott geometriai programozás (generalized geometric programming) b.) kiterjesztett geometriai programozás (extended geometric programming).

a.) Az "előjeles geometriai programozás" vagy másnéven "általánositott polinom programozás" az eredeti (prototipusú) geometriai programozást oly értelemben általánositja, hogy a (2) feltételben bizonyos k indexekre az eredeti $\leq$ reláció, bizonyos k indexekre pedig a forditott $\geq$ reláció teljesülését irja elő. Ezzel a modell tipussal az utóbbi időben nagyon sok dolgozat foglalkozik, ezek közül néhányat megemlitünk: Blau-Wilde [8, 9], Passy-Wilde [58], Avriel-Williams [5, 6], Pascual-Ben Israel [54], Passy [57], Morris [53], Duffin-Peterson [24, 25].

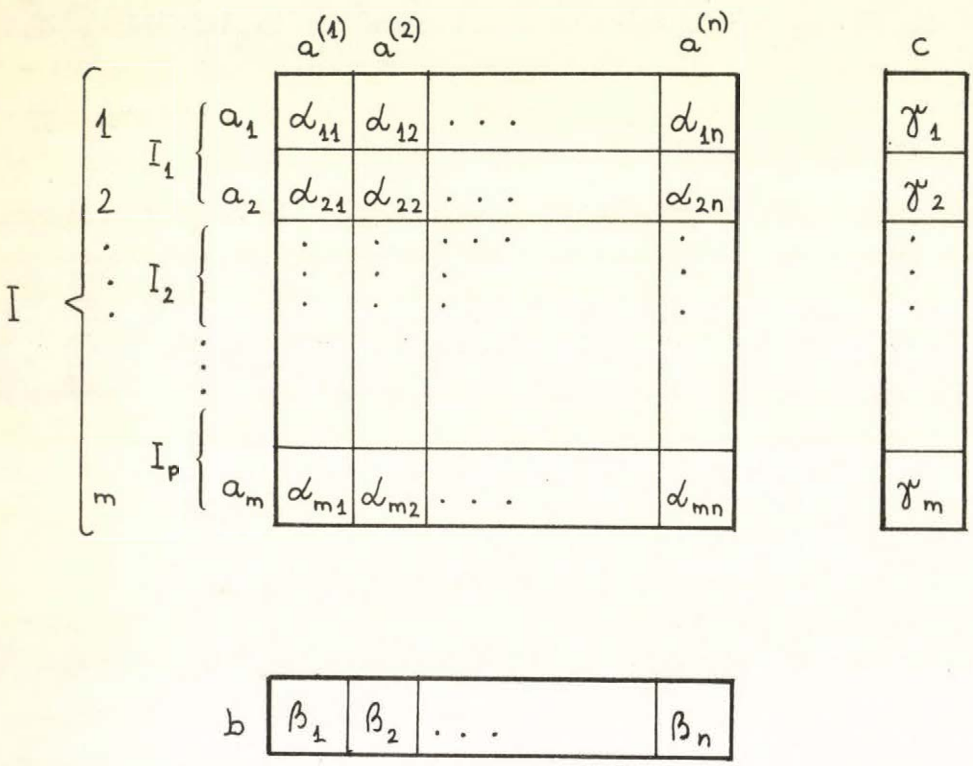
b.) A "kiterjesztett geometriai programozás" alapgondolata az, hogy a matematikai programozásban a sulyozott számtani közép - mértani közép egyenlőtlenség mintájára egy általánosabb geometriai egyenlőtlenséget használjon. Ezzel a modellel Duffin-Peterson-Zener [26] könyve is foglalkozik, azonban részletesebb kidolgozása Peterson-Ecker [60, 61, 62, 63], Peterson [59], Passy [56], Eber-Ferron [29], Hamala [41] és Bachmann-Elster-Petry [7] munkáiban található.

———— • ————

Köszönettel tartozom munkahelyemnek, az MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetnek, amely alkotó légkörével lehetővé tette, hogy a téma kutatásával foglalkozzam, biztositotta a szükséges számitógépi kapacitást, továbbá vállalta a disszertáció technikai előállitását. A kézirat gondos átolvasásával Kéry Gerzson és Mayer János kollégák nagy segitségemre voltak. Végül szeretnék köszönetet mondani Dancs István aspiránsvezetőmnek értékes tanácsaiért és baráti segitségéért.

1.§. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSI FELADAT ÉS FŐ LEMMÁJA

Legyen az $A=(a_i)=(a^{(j)})=(\alpha_{ij})$ $m\times n$-es mátrix, valamint a $b=(\beta_j)$ n dimenziós vektor, a $c=(\gamma_i)$ pedig m dimenziós vektor. Legyen az $I=\{1,2,\dots,m\}$ index halmaz az $I_1, I_2,\dots,I_p$ diszjunkt index halmazokra particionálva. A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:



Geometriai programozási feladatnak az alábbi matematikai programozási feladatot nevezzük:

PRIMÁL GEOMETRIAI PROGRAM: Meghatározandó azon $y=(\eta_j)\in R^{(n)}$ vektor, melyre

$$by \qquad \text{maximális} \tag{1}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \leq 1, \qquad (k=1,2,\dots,p). \tag{2}$$

DUÁL GEOMETRIAI PROGRAM: Meghatározandó azon $x=(\xi_i)\in R^{(m)}$ vektor, melyre

$$xc+\sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}} \qquad \text{minimális,} \tag{3}$$

feltéve, hogy

$$\left.\begin{array}{r} xA=b, \\ x\geq 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Azon $y\in R^{(n)}$ vektorok halmazát, melyek a (2) feltételt kielégitik, primál feltételi halmaznak nevezzük és $\mathcal{P}$ szimbólummal jelöljük. Hasonlóan a (4) feltételt kielégitő $x\in R^{(m)}$ vektorok halmazát duál feltételi halmaznak nevezzük és $\mathcal{D}$-vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy a program (primál, vagy duál) konzisztens, ha a feltételi halmaza nem üres.

A geometriai programozási primál feladat elég tág matematikai programozási feladat, például az $I_1=\{1\}, I_2=\{2\}, \ldots, I_p=\{m\}$ speciális esetben a lineáris programozási feladatot adja. Az alábbi megjegyzésekben a geometriai programozási feladat más, szokásos megadási formáit mutatjuk meg.

1. Megjegyzés: Tekintsük az alábbi matematikai programozási feladatot:

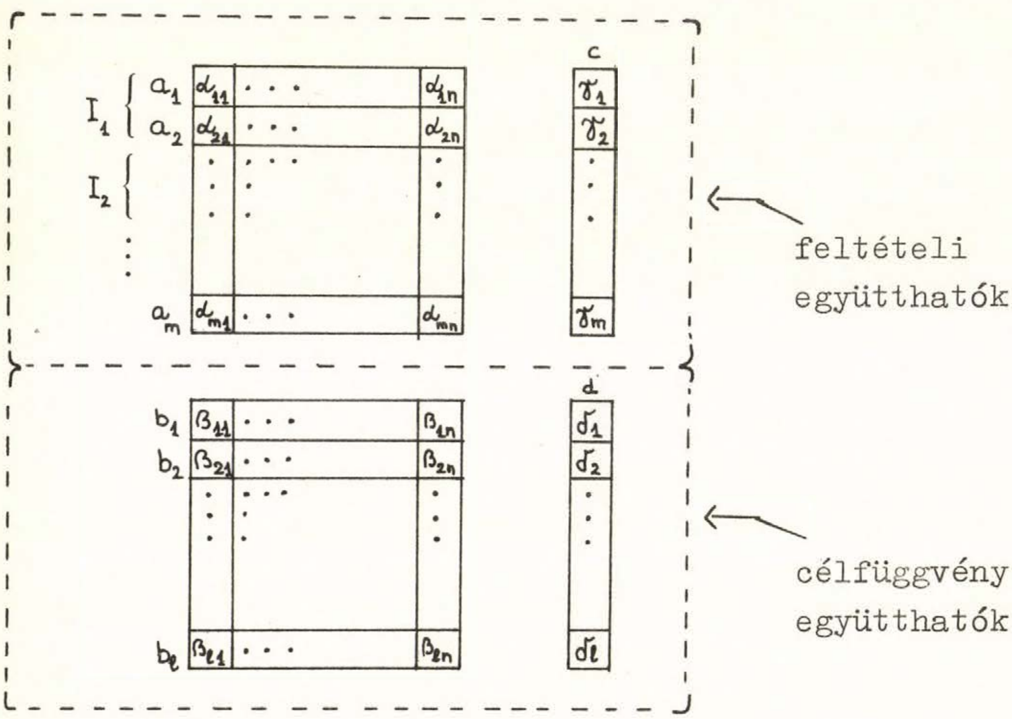
Meghatározandó azon $y \in R^{(n)}$ vektor, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\ell} e^{b_i y - \delta_i} \quad \text{minimális},$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leqq 1, \qquad (k=1, \ldots, p).$$

A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:



Általában ezt a feladatot tekintik g e o m e t r i a i p r o g r a m o z á s n a k . Megmutatjuk, hogy ez a feladat egyszerüen visszavezethető a fent definiált PRIMÁL GEOMETRIAI PROGRAM-ra.

A feladat nyilvánvalóan equivalens a következővel: keresendő azon $(y, \omega) \in R^{(n+1)}$ vektor, melyre

$$e^{-\omega} \quad \text{minimális}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leqq 1, \qquad (k = 1, \dots, p)$$

és

$$\sum_{i=1}^{\ell} e^{b_i y - \delta_i} \leqq e^{-\omega}$$

De ezt irhatjuk a következőképp is:

$$(\overset{1}{0}, 0, \dots, \overset{n}{0}, 1) \cdot (y, \omega) \quad \text{maximalizálandó}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{(a_i, 0)(y, \omega) - \gamma_i} \leqq 1, \qquad (k = 1, \dots, p),$$

és

$$\sum_{i=1}^{\ell} e^{(b_i, 1)(y, \omega) - \delta_i} \leqq 1.$$

2. M e g j e g y z é s : Az $e^{\eta_j}=\tau_j$, $e^{-\gamma_i}=\tilde{\gamma}_i$, $e^{-\delta_i}=\tilde{\delta}_i$ egy-egy értelmü transzformációval ($\eta_i=\ln\tau_i$, $\gamma_i=-\ln\tilde{\gamma}_i$, $\delta_i=-\ln\tilde{\delta}_i$) és most már a $\tau_i>0$, $\tilde{\gamma}_i>0$, $\tilde{\delta}_i>0$ megkötéssel az 1. Megjegyzésnél adott modell a következő formát ölti:

a célfüggvény

$$\sum_{i=1}^{\ell}\tilde{\delta}_i\prod_{j=1}^{n}\tau_j^{\beta_{ij}}, \tag{5}$$

a feltételi egyenlőtlenség

$$\sum_{i\in I_k}\tilde{\gamma}_i\prod_{j=1}^{n}\tau_j^{a_{ij}}\leq 1, \qquad (k=1,\dots,p). \tag{6}$$

Az (5) és (6) -ban lévő függvényeket p o z i n o m n a k nevezzük. A geometriai programozás alkalmazásaiban a modell általában pozinomos formában van megfogalmazva.

3. M e g j e g y z é s : Ezen megjegyzésünk hasonló az 1. megjegyzéshez. Megmutatjuk, hogy a geometriai programozás tárgyalásánál elég lenne csak arra az esetre szoritkozni, amikor az I_k indexhalmazok egy, vagy két elemből állnak. Ugyanis tekintsünk egy r tagból álló feltételi egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=1}^{r}e^{a_i y-\gamma_i}\leq 1. \tag{7}$$

Egy uj ϑ változó bevezetésével (7) az alábbival helyettesithető:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}e^{a_i y-\gamma_i}\leq e^{\vartheta}\\ &e^{\vartheta}+\sum_{i=3}^{r}e^{a_i y-\gamma_i}\leq 1\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

De ezt a következő formába is irhatjuk

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} e^{(a_i,-1)(y,\vartheta)-\gamma_i} \leq 1 \\ &e^{(\sigma,1)(y,\vartheta)-0} + \sum_{i=3}^{r} e^{(a_i,0)(y,\vartheta)-\gamma_i} \leq 1 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Látható, hogy (7) feltétel, a feltételek számának eggyel növelésével és a változó koordináta számának eggyel növelésével egy taggal csökkenthető. Ezzel az eljárással minden feltétel, amely eredetileg nem egy tagból állt leredukálható két tagból álló feltételre.

A dolgozatban a továbbiakban nem tételezzük fel, hogy a feltételek csak egy vagy két taguak, mivel ennek lehetőségét nem tudtuk hasznositani, de úgy tünik, hogy ez az észrevétel a geometriai programozás még megoldatlan problémáinak tisztázásához eszközként szolgálhat.

A következő lemmában, a geometriai egyenlőtlenség alkalmazásával, (A. Függelék) egy alapvető összefüggést adunk a lehetséges megoldáshoz tartozó célfüggvény értékekre. A lemma rávilágit a duál feladat bevezetésének célszerüségére is.

(Duffin-tól származik a "the main lemma of geometric programming" elnevezés).

LEMMA: (a geometriai programozás fő lemmája)

Ha $y \in \mathcal{P}$ és $x \in \mathcal{D}$, akkor

$$by \leq xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}} \qquad (10)$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$e^{a_i y-\gamma_i}\sum_{i\in I_k}\xi_i=\xi_i,\quad \text{minden } i\in I_k \text{ indexre } (k=1,\dots,p). \tag{11}$$

B i z o n y i t á s : A (2) feltételi egyenlőtlenségre alkalmazva a geometriai egyenlőtlenséget (A. Függelék) a következőket kapjuk:

$$1\geqq\left(\sum_{i\in I_k}e^{a_i y-\gamma_i}\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}\geqq\prod_{i\in I_k}\left(\frac{e^{a_i y-\gamma_i}}{\xi_i}\right)^{\xi_i}\cdot\left(\sum_{i\in I_k}\xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}=$$

$$=\frac{\left(\sum_{i\in I_k}\xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}}{\prod_{i\in I_k}\xi_i^{\xi_i}}\cdot e^{\left(\sum_{i\in I_k}\xi_i a_i y-\sum_{i\in I_k}\xi_i\gamma_i\right)}. \tag{12}$$

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\sum_{i\in I_k}\xi_i=0 \quad \text{vagy} \quad \sum_{i\in I_k}e^{a_i y-\gamma_i}=1 \tag{13}$$

és

$$e^{a_i y-\gamma_i}\sum_{i\in I_k}\xi_i=\xi_i\sum_{i\in I_k}e^{a_i y-\gamma_i}. \tag{14}$$

A (13) és (14) -et egybefoglalva:

$$e^{a_i y-\gamma_i}\sum_{i\in I_k}\xi_i=\xi_i,\qquad (i\in I_k). \tag{15}$$

A (12) -öt $k=1,\dots,p$ indexekre összeszorozva pedig a következőkhöz jutunk:

$$1 \geqq \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}}{\sum_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{\sum_{i\in I} \xi_i a_i y - \sum_{i\in I} \xi_i \gamma_i} = \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}}{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{xAy - xc}$$

Az $xA=b$ teljesülése miatt pedig

$$1 \geq \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}}{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{by - xc}$$

Ebből logaritmizálás és rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$by \leqq xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}} ,$$

és ezzel a lemma első részét beláttuk, második része (15)-ből adódik. ∎

KÖVETKEZMÉNY: Legyenek $\bar{y} \in \mathcal{P}, \bar{x} \in \mathcal{D}$ és $\bar{x} > 0$ olyanok, hogy (10) egyenlőséggel teljesül. Akkor tetszőleges $x \in \mathcal{D}$ esetén:

$$b\bar{y} = xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \bar{\xi}_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \bar{\xi}_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}} . \qquad (16)$$

B i z o n y i t á s : Mivel $\bar{y}, \bar{x}$ vektorokra (11) fennáll, igy azt minden i-re a ξ_i hatványra emelve és összeszorozva kapjuk (16)-ot. ∎

2.§. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS "GYENGE" DUALITÁS TÉTELE

A primál geometriai programozási feladat feltételei függvényeiről, az exponenciális függvény konvexitása miatt azonnal látható, hogy konvex függvények. Igy kézenfekvő, hogy a feladatra a Farkas tételt alkalmazzuk (B. Függelék). Azonban a Farkas tétel alkalmazhatósága egy erős feltételezést kiván az u.n. S l a t e r - féle feltételt, ami abból áll, hogy létezzen olyan $\bar{y} \in \mathcal{P}$ lehetséges megoldás, melyre a nem-lineáris feltételi függvények esetén a

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} < 1$$

szigoru egyenlőtlenség teljesüljön. Ezen "erős" feltételezés miatt nevezik a tételt "gyenge" dualitási tételnek.

TÉTEL: Tegyük fel, hogy a primál feltételi egyenletrendszer eleget tesz a S l a t e r - féle feltételnek és a primál célfüggvény felveszi a maximumát a feltételi halmaz valamely y^* pontjában. Ekkor létezik olyan x^* vektor, hogy x^* optimális megoldása a duál feladatnak és a két optimum érték megegyezik.

B i z o n y i t á s : Az, hogy y^* optimális, azt jelenti, hogy nincs olyan a

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} - 1 \leq 0, \qquad (k=1,\dots,p)$$

feltételeknek eleget tevő y, melyre

$$by^* - by < 0$$

teljesülne. De ekkor a Farkas tétel szerint vannak olyan $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ nem-negativ számok, hogy

$$by^* - by + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} - 1 \right) \geqq 0 \text{ minden } y \in R^{(n)} \text{ vektorra.} \quad (1)$$

az (1) egyenlőtlenséget az $y = y^*$ vektorra alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} - 1 \right) \geqq 0 .$$

De ez csak ugy lehet, ha

$$\left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} - 1 \right) \lambda_k = 0,$$

az az

$$\lambda_k = \lambda_k \sum_{i \in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} . \quad (2)$$

Legyen

$$\xi_i^* = \lambda_k e^{a_i y^* - \gamma_i}, \qquad (i \in I_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p). \quad (3)$$

Először megmutatjuk, hogy az igy definiált ξ_i^* kielégiti a duál feladatot. Átalakitjuk (1) baloldalát behelyettesitve (3)-ból λ_k értékét, és felhasználva (2)-t.

$$by^* - by + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \Big(\sum_{i\in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} - 1\Big) = by^* - by + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \sum_{i\in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k =$$

$$= by^* - by + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i\in I_k} \lambda_k e^{a_i y - \gamma_i} - \sum_{k=1}^{p} \sum_{i\in I_k} \lambda_k e^{a_i y^* - \gamma_i} =$$

$$= -b(y-y^*) + \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* e^{a_i(y-y^*)} - \sum_{i=1}^{m} \xi_i^*$$

Az (1) egyenlőtlenséget figyelembe véve igy azt kapjuk, hogy

$$-b(y-y^*) + \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* \big(e^{a_i(y-y^*)} - 1\big) \geq 0 \qquad (4)$$

egyenlőtlenség teljesül minden $y \in R^{(n)}$ pontra.

A (4)-ben egyenlőség van, ha $y = y^*$, tehát y^* a baloldali függvény minimumhelye, de akkor kell, hogy a baloldal függvény η_j szerinti parciális deriváltja az y^* helyen zérus legyen, azaz

$$-\beta_j + \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* e^{a_i(y-y^*)} \cdot \alpha_{ij} = 0 .$$

átrendezve:

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \alpha_{ij} = \beta_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

tehát x^* kielégiti a duál feltételt.

Megmutatjuk, hogy x^* kielégiti az optimalitási kritériumot is. A (3)-at összegezve $i \in I_k$ indexekre és felhasználva (2)-t kapjuk, hogy

$$\sum_{i \in I_k} \xi_i^* = \lambda_k \sum_{i \in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} = \lambda_k = \frac{\xi_i^*}{e^{a_i y^* - \gamma_i}}$$

azaz

$$e^{a_i y^* - \gamma_i} \sum_{i \in I_k} \xi_i^* = \xi_i^*$$

tehát ξ_i^* megoldás optimális is.∎

3.§. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSI FELADAT ALAPTULAJDONSÁGAI

Az alábbiakban a geometriai programozás néhány elemi tulajdonságát tárgyaljuk.

1. LEMMA: Jelöljük a primál feladat feltételi függvényét:

$$\psi_k(y)=\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} .$$

A $\psi_k(y)$ függvény logaritmikusan konvex függvény, azaz tetszőleges $0\leq\lambda\leq 1$ számra fennáll, hogy

$$\psi_k(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leq(\psi_k(y_1))^{\lambda}\cdot(\psi_k(y_2))^{1-\lambda} \tag{1}$$

És egyenlőség a $\lambda=0$ és a $\lambda=1$ triviálistól eltérő esetben akkor és csak akkor, ha a

$$(a_{i_1}-a_{i_2})(y_1-y_2)=0 \tag{2}$$

egyenlőség teljesül, minden $i_1\in I_k$ és $i_2\in I_k$ esetre.

B i z o n y i t á s : az (1)-be ψ értéket visszahelyettesitve a bizonyitandó egyenlőtlenségünk:

$$\sum e^{a_i(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)-\gamma_i}\leq\left(\sum e^{a_i y_1-\gamma_i}\right)^{\lambda}\left(\sum e^{a_i y_2-\gamma_i}\right)^{1-\lambda}$$

Ezt az alábbi formára hozhatjuk:

$$\sum\left(e^{a_i y_1-\gamma_i}\right)^{\lambda}\left(e^{a_i y_2-\gamma_i}\right)^{1-\lambda}\leq\left(\sum e^{a_i y_1-\gamma_i}\right)^{\lambda}\left(\sum e^{a_i y_2-\gamma_i}\right)^{1-\lambda} \tag{3}$$

Ezen (3) forma éppen a Hölder egyenlőtlenség (A. Függelék), és egyenlőség a $\lambda=0$, $\lambda=1$ triviális esettől eltekintve akkor és csak akkor, ha a

$$e^{a_{i_0}y_1-\gamma_{i_0}}\sum e^{a_iy_2-\gamma_i}=e^{a_{i_0}y_2-\gamma_{i_0}}\sum e^{a_iy_1-\gamma_i}$$

egyenlőség teljesül minden $i_0\in I_k$ esetben. De ez akkor és csak akkor teljesül, ha (2) teljesül. ∎

2. LEMMA: Jelöljük a duál feladat célfüggvényében:

$$f_k(x)=\ln\frac{\prod_{i\in I_k}\xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k}\xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}},\qquad (x\geqq 0)$$

a $f_k(x)$ függvényre az alábbiak teljesülnek:

a./ $f_k(0)=0$,

b./ $f_k(\lambda x)=\lambda f_k(x)$, ha $\lambda\geqq 0$

c./ $f_k(x+\bar{x})\leqq f_k(x)+f_k(\bar{x})$,

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\xi_i\sum_{i\in I_k}\bar{\xi}_i=\bar{\xi}_i\sum_{i\in I_k}\xi_i$$

fennáll minden $i\in I_k$ esetben.

Azaz $f_k(x)$ pozitiv-homogén konvex függvény.

B i z o n y i t á s : Az a) rész triviális. A b) rész egyszerü számolással adódik:

$$\ln\frac{\prod(\lambda\xi_i)^{\lambda\xi_i}}{\left(\sum(\lambda\xi_i)\right)^{\sum\lambda\xi_i}}=\ln\frac{\prod\lambda^{\lambda\xi_i}\cdot\prod\xi_i^{\lambda\xi_i}}{\left(\lambda\sum\xi_i\right)^{\lambda\sum\xi_i}}=\ln\frac{\lambda^{\lambda\sum\xi_i}\left(\prod\xi_i^{\xi_i}\right)^{\lambda}}{\lambda^{\lambda\sum\xi_i}\left(\left(\sum\xi_i\right)^{\sum\xi_i}\right)^{\lambda}}=\lambda\ln\frac{\prod\xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum\xi_i\right)^{\sum\xi_i}}$$

A c) rész belátásához azt kell megmutatni, hogy

$$\ln \frac{\prod (\xi_i+\bar{\xi}_i)^{\xi_i+\bar{\xi}_i}}{\left(\sum(\xi_i+\bar{\xi}_i)\right)^{\sum(\xi_i+\bar{\xi}_i)}} \leq \ln \frac{\prod \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum \xi_i\right)^{\sum \xi_i}} + \ln \frac{\prod \bar{\xi}_i^{\bar{\xi}_i}}{\left(\sum \bar{\xi}_i\right)^{\sum \bar{\xi}_i}},$$

vagy a logaritmus függvény monotonitása miatt azt, hogy

$$\frac{\prod (\xi_i+\bar{\xi}_i)^{\xi_i+\bar{\xi}_i}}{\left(\sum(\xi_i+\bar{\xi}_i)\right)^{\sum(\xi_i+\bar{\xi}_i)}} \leq \frac{\prod \xi_i^{\xi_i} \cdot \prod \bar{\xi}_i^{\bar{\xi}_i}}{\left(\sum \xi_i\right)^{\sum \xi_i} \cdot \left(\sum \bar{\xi}_i\right)^{\sum \bar{\xi}_i}} . \tag{4}$$

Alkalmazzuk a geometriai egyenlőtlenséget (A. Függelék) az

$$\alpha_i = \xi_i + \bar{\xi}_i \quad \text{és} \quad \beta_i = \xi_i$$

megválasztásával, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{\sum(\xi_i+\bar{\xi}_i)}{\sum \xi_i}\right)^{\sum \xi_i} \geq \prod \left(\frac{\xi_i+\bar{\xi}_i}{\xi_i}\right)^{\xi_i} \tag{5}$$

majd pedig az

$$\alpha_i = \xi_i + \bar{\xi}_i \quad \text{és} \quad \beta_i = \bar{\xi}_i$$

választásokkal a következőhöz jutunk:

$$\left(\frac{\sum(\xi_i+\bar{\xi}_i)}{\sum \bar{\xi}_i}\right)^{\sum \bar{\xi}_i} \geq \prod \left(\frac{\xi_i+\bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_i}\right)^{\bar{\xi}_i} \tag{6}$$

Az (5) és (6) összeszorzásából végül is kapjuk a (4) egyenlőtlenséget.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\xi_i \sum (\xi_i + \bar{\xi}_i) = (\xi_i + \bar{\xi}_i) \sum \xi_i \tag{7}$$

teljesül minden $i \in I_k$ -ra.

De (7)-ből egyszerüsitéssel kapjuk, hogy equivalens a

$$\xi_i \sum \bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i \sum \xi_i$$

egyenlőséggel. ∎

3. LEMMA: a) Ha $y \in \mathcal{P}$ és valamely $\bar{y}$ vektorra $A\bar{y} \leq 0$, akkor tetszőleges $\vartheta \geq 0$ számra $(y + \vartheta\bar{y}) \in \mathcal{P}$.
b) Ha $y \in \mathcal{P}$, akkor $Ay \leq c$.

B i z o n y i t á s : a) Mivel $e^{a_i \bar{y}} \leq 1$, ezért

$$1 \geq \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \geq \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \bar{y}} = \sum e^{a_i (y + \vartheta\bar{y}) - \gamma_i},$$

tehát $(y + \vartheta\bar{y}) \in \mathcal{P}$.

b) A feltételi egyenlőtlenségekből:

$$1 \geq \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \geq e^{a_i y - \gamma_i}$$

és igy

$$a_i y - \gamma_i \leq 0 \text{ minden } i \in I\text{-re}. \;\blacksquare$$

A 3. lemmából azonnal adódnak az alábbi következmények:

1. KÖVETKEZMÉNY: a) Ha a $\mathcal{P}$ halmaz nem üres, akkor korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A mátrix sorvektorai által generált kup kiadja az egész $R^{(n)}$ teret.
b) Ha a $\mathcal{P}$ nem üres halmaz korlátos, akkor $xA = 0$ egyenletnek van $x > 0$ megoldása.
c) Ha a $\mathcal{P}$ nem üres, korlátos halmaz és $\mathcal{D}$ nem üres halmaz, akkor $\mathcal{D}$ nem korlátos.

B i z o n y i t á s : a) A 3. lemmából nyilvánvaló, hogy a nem üres $\mathcal{P}$ feltételi halmaz korlátosságára szükséges és elégséges feltétel az, hogy az $Ay \leqq 0$ egyenlőtlenségnek ne legyen az $y \equiv 0$ triviális megoldástól különböző megoldása. Jelöljük $\mathcal{C}_A$-val, az A mátrix sorvektorai által kifeszitett kupot, akkor $\mathcal{C}_A^*$ duális kup adja az $Ay \leqq 0$ egyenlőtlenség megoldásainak összességét. De $\mathcal{C}_A^*$ akkor és csak akkor a zérus elem, ha $\mathcal{C}_A$ az egész tér.

b) Az a) miatt $\mathcal{C}_A$ az egész tér, és igy léteznek olyan $\bar{\xi}_i \geqq 0$ skalárok, hogy

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i a_i \,.$$

Ebből pedig átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} (1 + \bar{\xi}_i) a_i = 0 ,$$

tehát a $\xi_i = 1 + \bar{\xi}_i$ megoldás kielégiti b)-t.

c) A b)-ből nyilvánvaló. ∎

A lemmából levonható további következményekhez szükségünk van az alábbi fogalomra:

DEFINICIÓ: $\mathcal{P}_\omega$ felsőnivóhalmaznak nevezzük a $\mathcal{P}$ halmaz azon részhalmazát, ahol $by \geqq \omega$.

2. KÖVETKEZMÉNY: a) A nem üres $\mathcal{P}_\omega$ halmaz korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A mátrix sorvektorai és a $-b$ vektor által generált kup kiadja az egész $R^{(n)}$ teret.

b) Ha $\mathcal{P}_\omega$ korlátos, akkor az $xA=b$ egyenletnek van $x>0$ megoldása.

B i z o n y i t á s : A $\mathcal{P}_\omega$ felsőnivóhalmaz a

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \leqq 1 \qquad (k=1,\dots,p)$$

$$e^{-by+\omega} \leqq 1,$$

feltételi halmaz. Erre alkalmazzuk az 1. következményt.∎

4.§. A PRIMÁL CÉLFÜGGVÉNY KORLÁTOSSÁGÁNAK SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE

Az alábbi tétel, amely a primálfüggvény szuprémumának végességére ad szükséges és elégséges feltételt, fontos szerepet játszik a geometriai programozás dualitási tételénél.

TÉTEL: A konzisztens primál feladat célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos felülről, ha a duál feladat konzisztens.

B i z o n y i t á s : Ha a duál feladat konzisztens, akkor van olyan $\bar{x} \geqq 0$, hogy

$$\bar{x}A = b. \tag{1}$$

A 3. lemma b) szerint bármely $y \in \mathcal{P}$ esetén

$$Ay \leqq c. \tag{2}$$

Megszorozva a (2) egyenlőtlenséget $\bar{x}$-vel, és felhasználva (1)-et kapjuk, hogy:

$$\bar{x}Ay \leqq \bar{x}c,$$

$$by \leqq \bar{x}c \text{ minden } y \in \mathcal{P} \text{ esetén,}$$

tehát by felülről korlátos.

Forditva, ha a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása, akkor a Farkas-lemma szerint van olyan $\bar{y}$, hogy

$$A\bar{y} \leqq 0,$$

$$b\bar{y} > 0.$$

Ha $y \in \mathcal{P}$, akkor 3. lemma a) miatt $y + \vartheta\bar{y} \in \mathcal{P}$, $(\vartheta \geqq 0)$. De ezen lehetséges megoldásra a célfüggvény értéke:

$$b(y+\vartheta\bar{y}) = by + \vartheta b\bar{y} \to \infty, \text{ ha } \vartheta \to \infty. \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a tétel egyik iránya - "ha a duál konzisztens, akkor a primál célfüggvény felülről korlátos" - a geometriai programozás fő lemmájából is nyilvánvaló.

A tételből a 3.§. 1.a) következményének egy élesitését nyerhetjük, amely a geometriai programozás pozinomos formájában lehet érdekes.

1. KÖVETKEZMÉNY: a) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $y \in \mathcal{P}$ minden koordinátájában felülről korlátos legyen az, hogy az A mátrix sorvektorai által generált kup a pozitiv ortánst tartalmazza (pozinom formában y felső korlátossága azt jelenti, hogy $t = (\tau_j)$ lehetséges vektorok halmaza korlátos).

b) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $y \in \mathcal{P}$ minden koordinátájában alulról korlátos legyen az, hogy az A mátrix sorvektorai által generált kup a negativ ortánst tartalmazza (pozinom formában ez azt jelenti, hogy a t lehetséges vektorok halmaza zárt).

B i z o n y i t á s : a) Az $y \in \mathcal{P}$ vektor η_j koordinátájában akkor és csak akkor korlátos felülről, ha a megoldáshalmazon az $u_j y$ célfüggvény korlátos, azaz a tétel szerint van megoldása az $xA = u_j$, $x \geqq 0$ rendszernek. $(u_j = (0, 0, \ldots, \overset{j}{1}, \ldots, 0))$

b) A bizonyitás analóg az a) résszel, $-u_j y$ célfüggvénnyel.∎

Az alábbi következmény a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{D}$ halmazok közt ad egy kapcsolatot.

2. KÖVETKEZMÉNY: a) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a nem üres $\mathcal{P}$ halmazon az $e^{a_i y - \gamma_i}$ tag, mint célfüggvény zérustól el legyen választva az, hogy az $xA = 0$, $x \geqq 0$ egyenletnek legyen $\xi_i > 0$ megoldása.

(A "zérustól való elválasztás" azt jelenti, hogy van olyan $\epsilon > 0$, hogy $e^{a_i y - \gamma_i} \geqq \epsilon$ ha $y \in \mathcal{P}$.)

b) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely nem üres $\mathcal{P}_\omega$ nivóhalmazon az $e^{a_i y - \gamma_i}$ tag zérustól el legyen választva az, hogy az $xA - \vartheta b = 0$, $x \geqq 0$, $\vartheta \geqq 0$ rendszernek legyen $\xi_i > 0$ megoldása.

B i z o n y i t á s : a) Az $e^{a_i y - \gamma_i}$ akkor és csak akkor van zérustól elválasztva, ha $-a_i y$ felülről korlátos, de a tétel szerint ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy legyen megoldása az $xA = -a_i$, $x \geqq 0$ rendszernek, ez azonban equivalens azzal, hogy legyen $\xi_i > 0$ megoldása $xA = 0$, $x \geqq 0$ rendszernek.

b) Az a) rész alkalmazása a $\mathcal{P}_\omega$ felsónivóhalmazra.∎

5.§. KANONIKUS FELADAT

A *kanonikus geometriai programozási* feladat a geometriai programozás elméletében, a megoldó algoritmusokban és számos alkalmazásnál döntő szerepet játszik.

DEFINICIÓ: *Kanonikusnak* nevezzük a geometriai programozási feladatpárt, ha a duál feladatnak van minden koordinátájában pozitiv lehetséges megoldása.

Az alábbi lemma, amely a konvex függvényekre vonatkozó Farkas-tétel (B. Függelék) egy adaptációja, alapvető a kanonikus feladat tárgyalásában.

LEMMA: Ha $xA = 0$ egyenletnek van $x > 0$ megoldása, és minden $x \geqq 0$ megoldásra

$$xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}} \geqq 0,$$

akkor van olyan $\bar{y}$, hogy

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i} \leqq 1, \qquad (k=1,\ldots,p).$$

Bizonyitás: A Farkas-tétel szerint a feltétel fennállása esetén léteznek olyan $\bar{\eta}_1,\ldots,\bar{\eta}_n$ számok, hogy

$$xc+\sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}} \geqq \sum_{j=1}^{n} xa^{(j)}\bar{\eta}_j, \text{ minden } x\geqq 0 \text{ esetén.} \quad (1)$$

Rögzitsünk egy k_0 indexet. Legyen ezen rögzitett index mellett:

$$\bar{\xi}_i = \begin{cases} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}, & i\in I_{k_0} \\ 0, & i\notin I_{k_0} \end{cases}$$

A $\bar{\xi}_i$ értékét, az $i\notin I_{k_0}$ esetben, (1)-be helyettesitve:

$$\sum_{i\in I_{k_0}} \bar{\xi}_i (a_i\bar{y}-\gamma_i) \leqq \sum_{i\in I_{k_0}} \bar{\xi}_i \ln \bar{\xi}_i - \ln\left(\sum_{i\in I_{k_0}} \bar{\xi}_i\right)^{\sum_{i\in I_{k_0}} \bar{\xi}_i}$$

Behelyettesitve $\bar{\xi}_i$ értékét $i\in I_{k_0}$ esetre is:

$$\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}(a_i\bar{y}-\gamma_i) \leqq \sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}(a_i\bar{y}-\gamma_i) - \ln\left(\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}\right)^{\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}}$$

Ebből

$$\ln\left(\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}\right)^{\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}} \leqq 0,$$

azaz

$$\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i} \leqq 1 \text{ tetszőleges } k_0\text{-ra.} \blacksquare$$

TÉTEL: Ha a kanonikus geometriai programozási duál feladat célfüggvénye alulról korlátos, akkor a primál feladat konzisztens és a célfüggvény felveszi maximumát a feltételi halmaz valamely $\bar{y}$ pontjában és

$$b\bar{y} = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left\{ xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}} \right\}.$$

B i z o n y i t á s : Jelölje $f(x)$ a duál feladat célfüggvényében a nem-lineáris tagot, azaz

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) = \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}},$$

legyen továbbá

$$\mu = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left(xc + f(x)\right).$$

Az előző lemmát az alábbi

$$xA + \xi_0(-b) = 0, \qquad x \geqq 0, \qquad \xi_0 \geqq 0, \tag{2}$$

feltételi egyenletre és az

$$xc + \xi_0(-\mu) + f(x) \tag{3}$$

függvényre alkalmazzuk.

A lemma alkalmazható, mert a (2) egyenletnek van $x>0$, $\xi_0>0$ megoldása, és a (3) függvény a (2) feltételnek eleget tevő helyen nem-negativ. Ha ugyanis negativ lenne, azaz valamely $\bar{x}, \bar{\xi}_0$ helyre a

$$\bar{x}c+\bar{\xi}_0(-\mu)+\varphi(\bar{x})<0 \tag{4}$$

fennállna, akkor a következő két eset fordulna elő:

a) Ha $\bar{\xi}_0=0$. Akkor $\bar{x}A=0$, és ha $x\in\mathcal{D}$, akkor $x+\vartheta\bar{x}\in\mathcal{D}$ bármely $\vartheta\geqq 0$ esetén. Ezen megoldáshoz tartozó célfüggvényre, felhasználva 3.§. 2 lemmát:

$$(x+\vartheta\bar{x})c+\varphi(x+\vartheta\bar{x})\leqq xc+\varphi(x)+\vartheta(\bar{x}c+\varphi(\bar{x}))\longrightarrow -\infty,$$

ellentétbe azzal, hogy aduál feladat célfüggvénye alulról korlátos.

b) Ha $\bar{\xi}_0>0$. Legyen ekkor $\xi_i=\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_0}$, $(i=1,\dots,m)$. A (2) és (3)-ből az igy definiált x-re

$$xA=b,$$

és

$$xc+\varphi(x)<\mu,$$

amely ellentétes μ definiciójával.

Mivel a lemma feltételei teljesülnek, ezért létezik olyan $\bar{y}$ hogy

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i\bar{y}-\gamma_i}\leqq 1,\quad (k=1,\dots,p) \tag{5}$$

és

$$e^{-b\bar{y}+\mu} \leqq 1. \qquad (6)$$

Az (5) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy $\bar{y} \in \mathcal{P}$. A (6) egyenlőtlenségből pedig azt kapjuk, hogy

$$\mu \leqq b\bar{y} \qquad (7)$$

Összevetve ezt a geometriai programozás fő lemmájával, végül is

$$\mu = b\bar{y}$$

amit bizonyitani akartunk. ∎

KÖVETKEZMÉNY: Ha a kanonikus geometriai programozási primál feladat konzisztens, akkor a célfüggvény felveszi maximumát a primál feltételi halmaz valamely $\bar{y}$ pontjában.

B i z o n y i t á s : Ha a primál feladat konzisztens, akkor a főlemma szerint a duál célfüggvény korlátos, és igy a tételből adódik a következmény állitása. ∎

M e g j e g y z é s : A geometriai programozás fő lemmájából adódik a duál célfüggvény alsó korlátosságára elégséges feltétel, hogy a primál feladat konzisztens legyen. A feltétel nem szükséges, mint azt az alábbi egyszerü példa illusztrálja:

P r i m á l   f e l a d a t :

$$e^{\eta_1 - \ln 2} + e^{-\eta_1 - \ln 2} + e^{\eta_2} \leqq 1,$$

$$\sup \{(0,0)(\eta_1, \eta_2)\}$$

A feltételi egyenlőtlenséget az alábbi formába is irhatjuk:

$$\frac{e^{\eta_1} + e^{-\eta_1}}{2} + e^{\eta_2} \leqq 1,$$

és ebből a formából azonnal látható, hogy a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

D u á l   f e l a d a t :

$$\xi_1 - \xi_2 = 0,$$

$$\xi_3 = 0,$$

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \geqq 0,$$

$$\inf\left\{\xi_1 \ln 2 + \xi_2 \ln 2 + \ln \frac{\xi_1^{\xi_1} \xi_2^{\xi_2}}{(\xi_1 + \xi_2)^{(\xi_1 + \xi_2)}}\right\}.$$

A duál feladat minden megoldása $\xi_1 = \xi_2 = \xi \geqq 0$ és $\xi_3 = 0$ formájú és a célfüggvény értéke:

$$2\xi \ln 2 + \ln \frac{\xi^{2\xi}}{(2\xi)^{2\xi}} = 2\xi \ln 2 + \ln \frac{1}{2^{2\xi}} = 0,$$

tehát véges.

Azonban a fenti tételt figyelembe véve, a kanonikus feladatra a 4.§. tételéhez hasonló tételhez jutunk:

a kanonikus duál feladat célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos alulról, ha a primál feladat konzisztens.

6.§. REDUKÁLT FELADAT

Legyen a geometriai programozási feladat olyan, hogy a $\mathcal{D}$ duál feltételi halmaz nem üres. Jelöljük $\bar{I}$-al azon $i \in I$ indexek halmazát, melyre van olyan $x \geq 0$ lehetséges megoldása $xA = b$ feltételi halmaznak, hogy $\xi_i > 0$. A geometriai programozási feladatot r e d u k á l j u k úgy, hogy csak az $i \in \bar{I}$ tagokat hagyjuk meg. A redukált feladat kanonikus feladat. Nyilvánvaló, hogy a duál feladat és a redukált duál feladat közt teljes equivalencia van. Azaz a redukált duál feladat egy lehetséges megoldása zérusokkal kiegészitve az eredeti lehetséges megoldása és forditva is az eredeti egy lehetséges megoldása a redukciónak megfelelő zérus koordináták elhagyásával a redukált egy megoldása és a célfüggvények értékei megegyeznek. Látni fogjuk, hogy a primál és a redukált primál feladat közt is fennáll egy "gyengébb equivalencia", nevezetesen az, hogy ha $\bar{y}$ a redukált egy lehetséges megoldása, akkor van olyan y lehetséges megoldása az eredeti primálnak, melyre a két célfüggvényérték tetszőleges kicsit tér el egymástól. Mielőtt ezt tételben pontosan kimondanánk, egy lemmát bizonyitunk, amely voltaképpen a Farkas-lemmának rendszerre való általánositása, és a Tucker-féle komplementaritási tételek egyike. A teljesség kedvéért ezt itt a Farkas-lemma felhasználásával be is bizonyitjuk.

Tekintsük az

$$\left.\begin{aligned} xA &= 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

egyenletrendszert.

Legyen I_+ : azon i indexek halmaza, melyre van olyan $x \geqq 0$, hogy $xA = 0$ és $\xi_i > 0$.

I_-:azon i indexek halmaza, melyre van olyan y, hogy $Ay \leqq 0$ és $a_i y < 0$.

LEMMA: A fent definiált I_+ és I_- index halmazokra:

a) $I_+ \cap I_- = \emptyset$,
b) $I_+ \cup I_- = I$.

B i z o n y í t á s : Az (1) y -al való szorzásából adódó

$$0 = xAy = \sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i y$$

összefüggésből a) rész nyilvánvaló.

A b) rész igazolásához tegyük fel, hogy $i_0 \notin I_+$, ez azt jelenti, hogy a

$$-a_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \xi_i a_i$$

egyenletnek nincs $x \geqq 0$ megoldása. De akkor a Farkas-lemma szerint van olyan y, hogy

$$a_i y \leqq 0, \quad i \neq i_0,$$

$$-a_{i_0} y > 0,$$

azaz $Ay \leqq 0$ és $a_{i_0} y < 0$, tehát $i_0 \in I_-$. ∎

KÖVETKEZMÉNY: Ha $\bar{I}$ az i indexek azon legbővebb halmaza, melyre $xA=b$, $x\geqq 0$ feltételi halmaznak van $\xi_i>0$ megoldása, akkor van olyan $\hat{y}$, hogy

$$\left.\begin{aligned} b\hat{y} &= 0, \\ a_i\hat{y} &= 0, \text{ ha } i\in\bar{I}, \\ a_i\hat{y} &< 0, \text{ ha } i\notin\bar{I}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

B i z o n y i t á s : A lemmából, az $xA+\xi_0(-b)=0$ egyenletre alkalmazva, nyilvánvaló. ∎

TÉTEL: Legyen a geometriai programozási feladat olyan, hogy $\mathcal{P}$ és $\mathcal{D}$ feltételi halmazok nem üresek. Jelölje $\bar{\mathcal{P}}$ a redukált primál feladat feltételi halmazát, ekkor bármely $\bar{y}\in\bar{\mathcal{P}}$ és tetszőleges $\epsilon>0$ esetén létezik olyan $y\in\mathcal{P}$, hogy $|by-b\bar{y}|\leqq\epsilon$.

B i z o n y i t á s : Legyen y_0 a feltevés szerint nem üres $\mathcal{P}$ halmaz egy rögzitett eleme, az $\bar{y}$ pedig $\bar{\mathcal{P}}$ rögzitett eleme. Ha $y_0\equiv\bar{y}$, vagy $b\equiv 0$, akkor készen vagyunk. Egyébként válasszuk δ számot a következőképp:

$$0<\delta\leqq\max\left(\frac{\epsilon}{\|b\|\cdot\|y_0-\bar{y}\|},1\right).$$

Legyen

$$y = \delta y_0 + (1-\delta)\bar{y} + \vartheta\hat{y},$$

ahol $\hat{y}$ a következmény (2) szerint biztositott, rögzitett vektor, a δ számot pedig később fogjuk alkalmasan megválasztani, úgy, hogy $y \in \mathcal{P}$ legyen. Egyszerü számolással kapjuk, hogy

$$|by - b\bar{y}| = |b(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y} + \vartheta\hat{y} - \bar{y})| =$$

$$= |b(y_0 - \bar{y})|\,\delta \leqq \delta\|b\|\cdot\|y_0 - \bar{y}\| \leqq \epsilon .$$

Meg kell még mutatni, hogy δ választásával elérhető, hogy $y \in \mathcal{P}$ teljesül. Vizsgáljuk a k-adik feltételt:

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i\in I_k\cap\bar{I}} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y}) - \gamma_i} +$$

$$+ \sum_{i\in I_k\cap(I-\bar{I})} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y}) - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \hat{y}}$$

Három eset lehetséges

a) Ha $I_k \cap (I - \bar{I}) = \Lambda$, ($\Lambda$ jelöli az üres halmazt) akkor

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i\in I_k\cap\bar{I}} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y}) - \gamma_i} \leqq 1,$$

ugyanis $y_0 \in \bar{\mathcal{D}}$ és $\bar{\mathcal{D}}$ konvexitása miatt $(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y}) \in \bar{\mathcal{D}}$.

b) Ha $I_k \cap \bar{I} = \Lambda$, akkor

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i \in I_k \cap (I - \bar{I})} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y}) - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \hat{y}} \leqq 1,$$

ugyanis $a_i \hat{y} < 0$ miatt ϑ elég nagyra választásával elérhető.

c) Ha $I_k \cap (I - \bar{I}) \neq \Lambda$ és $I_k \cap \bar{I} \neq \Lambda$, akkor

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i \in I_k \cap \bar{I}} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y}) - \gamma_1} +$$

$$+ \sum_{i \in I_k \cap (I - \bar{I})} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y}) - \gamma_i} e^{\vartheta a_i \hat{y}} \leqq 1.$$

ugyanis, mivel

$I_k \cap (I - \bar{I}) \neq \Lambda$, ezért $\sum_{i \in I_k \cap \bar{I}} e^{a_i y_0 - \gamma_i} < 1$, és $\delta > 0$ miatt

$$\sum_{i \in I_k \cap \bar{I}} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)\bar{y}) - \gamma_i} < 1,$$

Igy $a_i \hat{y} < 0$ miatt ϑ elég nagyra választásával elérhető. ∎

A tételből azonnal adódik a következő fontos állitás:

KÖVETKEZMÉNY:

$$\sup_{y \in \mathcal{P}} by = \sup_{y \in \bar{\mathcal{P}}} by .$$

B i z o n y i t á s : Mivel $\mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{P}}$, ezért

$$\sup_{y \in \mathcal{P}} by \leq \sup_{y \in \bar{\mathcal{P}}} by ,$$

de egyenlőtlenség a tétel alapján nem állhat fenn. ∎

7.§. DUALITÁSI TÉTEL

Az eddigi vizsgálatokból egyszerüen nyerhető a geometriai programozás dualitási tétele.

TÉTEL: a) Ha a primál- és a duál feladat-konzisztens, akkor a primál célfüggvény szuprémuma megegyezik a duál célfüggvény infinumával.

b) Ha a primál feladat konzisztens és véges szuprémuma van, akkor a duál is konzisztens és a primál szuprémum a duál infinummal megegyezik.

B i z o n y i t á s : a) A geometriai programozás fő lemmájából, a kanonikus feladat és a redukált feladat alaptételéből azonnal adódik.

b) A primál célfüggvény korlátosságának szükséges és elégséges feltételéből, valamint az a) részből adódik. ∎

M e g j e g y z é s : Abból, hogy a duál feladat konzisztens és véges infinuma van, nem következik még a primál feladat konzisztenciája. Azonban a redukált feladat alaptételét és annak bizonyitását, valamint a kanonikus feladat alaptételét figyelembe véve egy gyengébb, úgynevezett s z u b k o n z i s z t e n c i á t tudunk biztositani:

Ha a duál feladat konzisztens és a célfüggvényének véges μ infinuma van, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a módositott

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \leq 1+\epsilon, \quad (k=1,\dots,p)$$

feladat konzisztens és

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{y\in \mathcal{P}_\epsilon} by = \mu .$$

A geometriai programozás dualitás tétele nemcsak elméleti szempontból jelentős, hanem a primál-duál feladatpárt megoldó iterativ eljárás esetén tájékoztatást ad az iteráció pontosságáról.

A dualitási tételből az optimális halmazok strukturájára az alábbi következmény vonható le:

KÖVETKEZMÉNY: Jelölje $\mathcal{P}^*$ és $\mathcal{D}^*$ a primál, illetve duál feladat optimális megoldásainak halmazát.

a) Az $y^*\in\mathcal{P}^*$ és $x^*\in\mathcal{D}^*$ optimális megoldására az alábbi komplementalitás teljesül:

$$\Big(\sum_{i\in I_k} e^{a_i y^*-\gamma_i} -1\Big)\cdot \sum_{i\in I_k} \xi_i^* = 0, \quad (k=1,2,\dots p).$$

b) A $\mathcal{D}^*$ duál optimális halmaz polihedrikus halmaz (félterek közös része) és $x_1\in\mathcal{D}^*$, $x_2\in\mathcal{D}^*$ optimális megoldásokra:

$$\xi_i^{(1)} \sum_{i\in I_k} \xi_i^{(2)} = \xi_i^{(2)} \sum_{i\in I_k} \xi_i^{(1)}, \quad i\in I_k, \; (k=1,2,\dots p).$$

B i z o n y i t á s : a) Mivel y^*, x^* optimálisak, ezért a dualitás tétel szerint a hozzájuk tartozó célfüggvényértékek megegyeznek, de a geometriai programozás fő lemmája (1.§.) szerint ez csak akkor lehetséges, ha

$$e^{a_i y^*-\gamma_i} \sum_{i\in I_k} \xi_i^* = \xi_i^* \text{ minden } i\in I_k, \; (k=1,\dots p) \text{ esetben.}$$

Ezt $i\in I_k$ -ra összegezve:

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} \cdot \sum_{i\in I_k} \xi_i^* = \sum_{i\in I_k} \xi_i^*$$

Azaz

$$\Big(\sum_{i\in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} - 1\Big)\cdot \sum_{i\in I_k} \xi_i^* = 0.$$

Ezzel a következmény a) részét igazoltuk.

b) A duál feladatról feltehető, hogy kanonikus, mert ellenkező esetben a redukáltját tekintenénk csak. A kanonikus feladat dualitási tétele szerint (5.§.) létezik $y^*\in\mathcal{P}^*$ optimális megoldás.

Legyen $\lambda_i = e^{a_i y^* - \gamma_i}$ a geometriai programozás fő lemmája szerint igy $\mathcal{D}^*$ az alábbi lineáris egyenlőtlenség rendszer megoldás halmaza:

$$\begin{cases} xA = b, \\ x \geqq 0, \\ \lambda_i \sum_{i\in I_k} \xi_i = \xi_i, \qquad i\in I_k.\ (k=1,2,\dots p). \end{cases}$$

A $\lambda_i > 0$ miatt bármely k indexre vagy $\xi_i = 0$, $(i\in I_k)$ vagy $\xi_i > 0$, $(i\in I_k)$.

Legyen $x_1\in\mathcal{D}^*$, $x_2\in\mathcal{D}^*$. Ekkor $\frac{x_1+x_2}{2}\in\mathcal{D}^*$.

Jelöljük a duál feladat optimum értékét μ-vel, ekkor

$$\mu = \Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)c + \varphi\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big\{(x_1+x_2)c + \varphi(x_1+x_2)\Big\} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\Big\{x_1 c + \varphi(x_1) + x_2 c + \varphi(x_2)\Big\} = \mu$$

tehát a fenti képletsorban egyenlőtlenség nem teljesülhet, de akkor 3.§. 2. lemma c) szerint

$$\xi_i^{(1)} \sum_{i \in I_k} \xi_i^{(2)} = \xi_i^{(2)} \sum_{i \in I_k} \xi_i^{(1)} , \quad i \in I_k, \ (k = 1, 2, \ldots p)$$

kell, hogy teljesüljön. ∎

8.§. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS LAGRANGE-FÜGGVÉNYE

Ebben a fejezetben egy összefüggést adunk a geometriai programozás optimális megoldásai és a programozási feladathoz tartozó Lagrange függvény nyeregpontja között.

A továbbiakban is a duál feladat célfüggvényének linearitását módositó tagra a

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}}$$

jelölést használjuk.

DEFINICIÓ. Az $[A, b, c]$ együtthatóju, és adott particióju geometriai programozás Lagrange-függvényének nevezzük a

$$\Phi(x,y)=xc+by-xAy+\varphi(x), \qquad x\geqq 0$$

függvényt. Az x^*, y^* pontot a Lagrange-függvény nyeregpontjának mondjuk, ha tetszőleges y és $x\geqq 0$ vektorokra:

$$\Phi(x^*, y)\leqq \Phi(x^*, y^*)\leqq \Phi(x, y^*).$$

Látható, hogy a Lagrange függvényben az első három tag csak az A, b, c együtthatóktól, az utolsó csak a particionálástól függ.

TÉTEL: Az $\overset{*}{x}\ \overset{*}{y}$ vektorpár akkor és csak akkor optimális megoldása a geometriai programozásnak, ha a Lagrange függvénynek nyeregpontja.

B i z o n y i t á s : a) Legyenek $\overset{*}{x}\ \overset{*}{y}$ optimális megoldások. Ekkor a geometriai programozás dualitási tétele szerint

$$\overset{*}{x}c + \varphi(\overset{*}{x}) = b\overset{*}{y}.$$

A nyeregpont egyenlőtlenség baloldala

$$\Phi(\overset{*}{x}, y) \leqq \Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}),$$

azaz

$$\overset{*}{x}c + by - \overset{*}{x}Ay + \varphi(\overset{*}{x}) \leqq \overset{*}{x}c + b\overset{*}{y} - \overset{*}{x}A\overset{*}{y} + \varphi(\overset{*}{x})$$

egyenlőséggel teljesül.

A nyeregpont egyenlőtlenség jobb oldalának

$$\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) \leqq \Phi(x, \overset{*}{y})$$

teljesüléséhez csak azt kell belátni, hogy az

$$xA\overset{*}{y} \leqq xc + \varphi(x)$$

egyenlőtlenség teljesül az $x \geqq 0$ esetben. Ezt a geometriai egyenlőtlenség (A. Függelék) felhasználásával egyszerü számolással beláthatjuk. Mivel y^* a primál feladat megoldása, igy:

$$1 \geq \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i}, \qquad (k=1,2,\ldots,p).$$

Erre a geometriai egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy:

$$1 \geq \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i}\right)^{\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i} \geq \prod_{i \in I_k} \left(\frac{e^{a_i y^* - \gamma_i}}{\xi_i}\right)^{\xi_i} \cdot \left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod\limits_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} e^{\left(\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i a_i y^* - \sum\limits_{i \in I_k} \xi_i \gamma_i\right)}$$

Ezt minden k-ra összeszorozva:

$$1 \geq \prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod\limits_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} e^{\sum\limits_{i \in I} \xi_i a_i y^* - \sum\limits_{i \in I} \xi_i \gamma_i} \geq \prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod\limits_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} e^{xAy^* - xc}.$$

Logaritmizálva kapjuk, hogy

$$0 \geq \ln \prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum\limits_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod\limits_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} + xAy^* - xc,$$

azaz

$$xc + \varphi(x) \geq xAy^*.$$

Ezzel a tétel egyik irányát beláttuk.

b) Tegyük fel, hogy $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ nyeregpontja a Lagrange függvénynek. A nyeregpont egyenlőtlenség baloldalából, a $\Phi(\overset{*}{x},y) \leqq \Phi(\overset{*}{x},\overset{*}{y})$ egyenlőtlenségből kiindulva kapjuk, hogy

$$(b-\overset{*}{x}A)y \leqq (b-\overset{*}{x}A)\overset{*}{y}$$

egyenlőtlenség minden y vektorra fennáll. De ez csak úgy lehet, hogy ha $b-\overset{*}{x}A=0$, mert különben y alkalmas választásával ez nem teljesülne. Igy $\overset{*}{x}$ a duál feladat lehetséges megoldása. A nyeregpont egyenlőtlenség jobboldalából, a $\Phi(\overset{*}{x},\overset{*}{y}) \leqq$ $\leqq \Phi(x,\overset{*}{y})$ egyenlőtlenségből kiindulva kapjuk, hogy az

$$\overset{*}{x}c-\overset{*}{x}A\overset{*}{y}+\varphi(\overset{*}{x}) \leqq xc-xA\overset{*}{y}+\varphi(x) \tag{1}$$

egyenlőtlenség fennáll minden $x \geqq 0$ vektorra.

Mint előbb láttuk, az $\overset{*}{x}$ a duál feladat lehetséges megoldása, azaz $\overset{*}{x}A=b$, s ezt (1)-be helyettesitve kapjuk, hogy

$$\overset{*}{x}c-b\overset{*}{y}+\varphi(\overset{*}{x}) \leqq xc-xA\overset{*}{y}+\varphi(x), \tag{2}$$

minden $x \geqq 0$ -ra.

De ekkor az x helyébe az $(x+\overset{*}{x})$ vektort téve:

$$\overset{*}{x}c-b\overset{*}{y}+\varphi(\overset{*}{x}) \leqq xc+\overset{*}{x}c-xA\overset{*}{y}-\overset{*}{x}A\overset{*}{y}+\varphi(x+\overset{*}{x}),$$

azaz:

$$\varphi(\overset{*}{x}) \leqq xc-xA\overset{*}{y}+\varphi(x+\overset{*}{x}).$$

A φ függvény konvexitása miatt azonban a

$$\varphi(\overset{*}{x}) \leqq xc-xA\overset{*}{y}+\varphi(x)+\varphi(\overset{*}{x})$$

egyenlőtlenség is fennáll, s igy az

$$xA\overset{*}{y} \leqq xc+\varphi(x) \tag{3}$$

egyenlőtlenség teljesül minden $x \geqq 0$ esetben.

Rögzitsünk egy tetszőleges k_0 indexet, és legyen

$$\xi_i = \begin{cases} e^{a_i y^* - \gamma_i}, & \text{ha } i \in I_{k_0} \\ 0, & \text{ha } i \notin I_{k_0} \end{cases}$$

Helyettesitsük ezt (3)-ba, először csak az $i \notin I_{k_0}$ esetre:

$$\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i (a_i y^* - \gamma_i) \leq \sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i \ln \xi_i - \ln \Big(\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i \Big)^{\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i} .$$

Ezután ξ_i értékét az $i \in I_{k_0}$ esetben is behelyettesitve:

$$\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} (a_i y^* - \gamma_i) \leqq \sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} (a_i y^* - \gamma_i) -$$
$$- \ln \Big(\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} \Big)^{\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i}}$$

Rendezve:

$$\ln \Big(\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} \Big)^{\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i}} \leq 0,$$

azaz

$$\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} \leq 1.$$

Ez, minthogy minden k_0 indexre fennáll, azt adja, hogy y^* lehetséges megoldása a primál feladatnak.

A (2) egyenlőtlenséget $x=0$ pontra alkalmazva kapjuk, hogy

$$x^*c+\varphi(x^*)\leqq by^*. \tag{4}$$

A (3) egyenlőtlenséget $x=x^*$ pontra alkalmazva kapjuk, hogy

$$by^*\leqq x^*c+\varphi(x^*). \tag{5}$$

A (4) és (5) egybevetéséből adódik, hogy

$$x^*c+\varphi(x^*)=by^*,$$

azaz x^*, y^* megoldások optimálisak is. ∎

Megjegyezzük, hogy a tétel első része - "az optimális megoldások nyeregpontjai a Lagrange függvénynek" - egy általános dualitási tétel következményeként található R o c k a f e l l a r [66] könyvében (pp. 326).

9.§. REGULARITÁS A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSBAN

Ebben a fejezetben az optimális megoldások halmazának struktúráját vizsgáljuk a nem-üresség és a korlátosság szempontjából. A lineáris programozásbani analógiát követve itt is célszerűnek látszott az ottaniakhoz analóg módon a r e g u l a r i t á s i fogalmat bevezetni. A regularitás különösen fontos szerepet játszik a geometriai programozás perturbációs vizsgálataiban.

DEFINICIÓ. Azt mondjuk, hogy a geometriai programozási primál feladat reguláris, ha teljesül az alábbi p r i m á l r e g u l a r i t á s i f e l t é t e l ; Az

$$Ay \leqq 0,$$
$$by \geqq 0,$$
$$y \neq 0,$$

egyenlőtlenségrendszernek n i n c s megoldása.

Azt mondjuk, hogy a geometriai programozási duál feladat reguláris, ha teljesül az alábbi d u á l r e g u l a r i t á s i f e l t é t e l . Az

$$xA = 0,$$
$$x \geqq 0,$$
$$xc + \varphi(x) \leqq 0,$$
$$x \neq 0$$

egyenlőtlenségrendszernek n i n c s megoldása.

A geometriai programozást regulárisnak nevezzük, ha az primál reguláris is és duál reguláris is.

Az alábbi tétel a regularitási feltételek és feltételi halmazok konzisztenciája között ad kapcsolatot.

Mielőtt a tételt kimondanánk szükségünk van egy uj fogalomra.

DEFINICIÓ. S z u p e r k o n z i s z t e n s n e k nevezzük a primál feladatot, ha a $\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} < 1, \; (k = 1, 2, \dots p)$ egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ez erősebb feltétel, mint a Slater feltétel (2.§.) mivel ott a szigoru egyenlőtlenséget csak a nem-lineáris feltételekre követeltük meg.

1. TÉTEL: a) Ha a primál regularitás teljesül, akkor a duál feladat kanonikus.

b) A duál regularitás akkor és csak akkor teljesül, ha a primál feladat szuperkonzisztens.

B i z o n y i t á s : a) Az $Ay \leqq 0, by \geqq 0, y \neq 0$ egyenlőtlenségrendszer nemmegoldhatósága azt jelenti, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_m,$ $-b$ vektorok által generált kup duálisa csak a zérus elemet tartalmazza. De ekkor ez a kup kell, hogy az egész teret kiadja, azaz előállitható a következő vektor

$$b - (a_1 + a_2 + \dots + a_m) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i + \vartheta(-b)$$

ugy, hogy $\xi_i \geqq 0, \quad \vartheta \geqq 0.$

Ebből:

$$b = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1+\xi_i}{1+\vartheta} \right) a_i$$

legyen $\bar{\xi}_i = \frac{1+\xi_i}{1+\vartheta}$ és igy $b = \bar{x}A, \ \bar{x} > 0.$

Ezzel a tétel a) részét igazoltuk.

b) A duál regularitás azt jelenti, hogy az

$$xA = 0,$$
$$x \geqq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1$$

feltételü és

$$\min(xc + \varphi(x))$$

célfüggvényü geometriai programozási feladat vagy nem konzisztens vagy a célfüggvény minimuma pozitiv.

Az ennek megfelelő primál párja:

$$\sum_{i \in I_k} e^{(a_i,1)(y,\eta) - \gamma_i} \leqq \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$
$$\sup\{(0,1)\cdot(y,\eta)\}.$$

Azaz:

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \leqq e^{-\eta}, \qquad (k=1,2,\dots,p),$$

$$\sup \eta .$$

Ezen primál feladat mindig konzisztens. Ha a duál nem konzisztens, akkor $\eta \to \infty$, azaz

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \to 0.$$

Ha a duál konzisztens, akkor a dualitási tétel szerint van olyan primál megoldás, melyre $\eta > 0$, tehát szuperkonzisztens a feladat.

Forditva, ha a primál szuperkonzisztens, akkor a geometriai programozás fő lemmája alapján az $xA = 0$, $x \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1$ egyenlőtlenség minden megoldására $xc + \varphi(x) > 0$. De igy a duál regularitás sem teljesülhet. ∎

Megjegyezzük, hogy a tétel a) része nem megfordítható, mivel a kanonikusságból csak az következik, hogy az

$$Ay \leqq 0$$
$$by \geqq 0$$

egyenlőtlenségrendszernek csak $Ay=0$, $by=0$ megoldása lehet.

A következő tétel a regularitási feltételek és az optimális megoldáshalmazok közötti kapcsolatot mutatja. Jelölje $\mathcal{P}$ a primál feladat feltételi halmazát, $\mathcal{P}^*$ a primál feladat optimális megoldásainak halmazát, és hasonlót jelöl a $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$ a duál feladatra.

2. TÉTEL: a) A nem üres $\mathcal{P}^*$ akkor és csak akkor korlátos, ha teljesül a primál regularitási feltétel.

b) Ha $\mathcal{P}$ nem üres és a primál regularitási feltétel teljesül, akkor $\mathcal{P}^*$ sem üres.

c) A nem üres $\mathcal{D}^*$ akkor és csak akkor korlátos, ha teljesül a duál regularitási feltétel.

d) Ha $\mathcal{D}$ nem üres és a duál regularitási feltétel teljesül, akkor $\mathcal{D}^*$ sem üres.

B i z o n y i t á s : a) A 3.§. 2. következménye szerint a nem üres $\mathcal{P}_\omega$ felső nivóhalmaz korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A mátrix sorvektorai és a $-b$ vektor által generált kup kiadja az egész $R^{(n)}$ teret. Ez azonban a Farkas lemma szerint equivalens a primál regularitási feltétellel.

b) A primál regularitás biztositja, hogy tetszőleges felső nivóhalmaz korlátos, igy azon a célfüggvény felveszi szuprémumát.

c) Először azt látjuk be, hogy ha $\mathcal{D}^*$ nem korlátos, akkor nem teljesül a duál regularitás. Ugyanis ekkor van olyan

$x_1, x_2, \dots, x_q, \dots \in \mathcal{D}^*$ sorozat, hogy $\|x\| \to \infty \cdot \left(\|x\| = \sum_{i=1}^{m} \xi_i\right)$.

Legyen

$$\tilde{x}_q = \frac{x_q}{\|x_q\|} .$$

Az $\tilde{x}_q$ sorozatból kiválasztható egy konvergens részsorozat, (tegyük fel, hogy maga az $\tilde{x}_q$ sorozat az), amelynek határpontját jelölje $\tilde{x}$. Az x_q kielégiti a feltételi egyenletet, azaz

$$x_q A = b.$$

Ebből $\|x_q\|$ normával való osztással

$$\tilde{x}_q A = \frac{1}{\|x_q\|} b.$$

Igy az $\tilde{x}$ torlódási pontra kapjuk, hogy

$$\tilde{x} A = 0, \quad \|\tilde{x}\| = 1, \quad \tilde{x} \geq 0.$$

A célfüggvényben pedig az

$$\omega = x_q c + \varphi(x_q) = \|x_q\|(\tilde{x}_q c + \varphi(\tilde{x}_q)),$$

azaz az

$$\frac{\omega}{\|x_q\|} = \tilde{x}_q c + \varphi(\tilde{x}_q)$$

egyenlőségből határértékben kapjuk, hogy

$$0 = \tilde{x} c + \varphi(\tilde{x}).$$

Vagyis a duál regularitás nem teljesül.

Forditva, ha a duál regularitás nem teljesül, akkor van olyan $\tilde{x} \geqq 0$ vektor, hogy

$$\|\tilde{x}\| = 1, \quad \tilde{x}A = 0, \quad \text{és} \quad \tilde{x}c + \varphi(\tilde{x}) \leqq 0.$$

De akkor tetszőleges $\overset{*}{x} \in \mathcal{D}^*$ optimális megoldásra és tetszőleges nagy $\vartheta \geqq 0$ számra fennáll, hogy

$$\omega \leqq c(\overset{*}{x} + \vartheta\tilde{x}) + \varphi(\overset{*}{x} + \vartheta\tilde{x}) \leqq c\overset{*}{x} + \varphi(\overset{*}{x}) + \vartheta(c\tilde{x} + \varphi(\tilde{x})) \leqq c\overset{*}{x} + \varphi(\overset{*}{x}) = \omega.$$

Igy $c(\overset{*}{x} + \vartheta\tilde{x}) + \varphi(\overset{*}{x} + \vartheta\tilde{x}) = \omega,$ azaz $\mathcal{D}^*$ nem korlátos.

d) Az 1. tétel b) értelmében, ha a duál regularitás teljesül, akkor a primál feladat szuperkonzisztens, ekkor nyilván konzisztens is és igy a geometriai programozás fő lemmája (1.§.) szerint a duál feladatnak véges ω infinuma van. Ha a duál nem veszi fel infinumát, akkor van olyan $x_1, x_2, \dots, x_q, \dots$ sorozat, hogy

$$\|x_q\| \to \infty, \quad \text{és} \quad cx_q + \varphi(x_q) \to \omega.$$

Azonban

$$cx_q + \varphi(x_q) = \|x_q\|(c\tilde{x}_q + \varphi(\tilde{x}_q)), \quad \text{ahol} \quad \tilde{x}_q = \frac{x_q}{\|x_q\|}.$$

Igy x_q, illetve $\tilde{x}_q$ vektorokra fennáll, hogy

$$\tilde{x}_q A = \frac{1}{\|x_q\|} b,$$

$$c\tilde{x}_q + \varphi(\tilde{x}_q) = \frac{1}{\|x_q\|}(x_q c + \varphi(x_q)).$$

De ekkor az $\tilde{x}$ torlódási pontra kapjuk, hogy

$$\tilde{x}A=0, \quad \|\tilde{x}\|=1, \quad \tilde{x}\geqq 0, \quad c\tilde{x}+\varphi(\tilde{x})=0,$$

ellentétben a duál regularitással.∎

A következőkben a regularitásnak egy fontos tulajdonságát vizsgáljuk. Legyenek adva az $A, \hat{A}$ $m\times n$ méretü mátrixok, a b és $\hat{b}$ n dimenziós, a c és $\hat{c}$ pedig m dimenziós vektorok, valamint a τ tetszőleges szám. Legyen rögzitve az I indexhalmaz valamely particionálása. A regularitás az alábbi "nyilt" tulajdonsággal rendelkezik.

3. TÉTEL: Az $A+\tau\hat{A}$, $b+\tau\hat{b}$, $c+\tau\hat{c}$ együtthatójú geometriai programozási feladatnál azon τ számok halmaza, ahol a primál regularitás teljesül, nyilt halmaz. Hasonlóan, ahol a duál regularitás teljesül, szintén nyilt halmaz.

B i z o n y i t á s : A bizonyitást a primál regularitásra végezzük el; duál regularitáson teljesen analóg az eljárás.

Az egyszerüség kedvéért tegyük fel, hogy $\tau=0$ helyen teljesül a regularitás. Ha nem lenne olyan $\tau_0>0$, hogy a $[0,\tau_0)$ intervallumban teljesül a regularitás, akkor lenne olyan $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_q,\dots$ zérushoz tartó pozitiv számsorozat, hogy

$$\left.\begin{aligned}(A+\tau_q\hat{A})y_q &\leqq 0,\\ (b+\tau_q\hat{b})y_q &\geqq 0,\\ y_q &\neq 0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Legyen: $\tilde{y}_q = \dfrac{y_q}{\|y_q\|}$.

A (6) egyenlőtlenségrendszerből az $\| y_q \|$ normával való osztással kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} (A+\tau_q\hat{A})\tilde{y}_q &\leqq 0, \\ (b+\tau_q\hat{b})\tilde{y}_q &\geqq 0, \\ \|\tilde{y}_q\| &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

A (7) egyenlőtlenségrendszert kielégitő $\tilde{y}_q$ vektorokból kiválasztható konvergens részsorozat, mondjuk maga $\tilde{y}_q$ ilyen, melynek limeszpontja legyen $\tilde{y}$. Nyilván (7) a torlódási pontra is fennáll, azaz:

$$A\tilde{y} \leqq 0,$$

$$b\tilde{y} \geqq 0,$$

$$\|\tilde{y}\| = 1.$$

Ez ellentétes azon feltevésünkkel, hogy a $\tau = 0$ helyen a primál regularitás teljesül. ▮

10.§. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS ÉRTÉKÉNEK VÁLTOZÁSA

Ebben a §-ban megmutatjuk, hogy azok a perturbációs vizsgálatok, melyeket M i l l s [51] és W i l l i a m s [82] a lineáris programozásra végeztek, átültethetők a geometriai programozásra is, és a geometriai programozásnál kapott eredmények teljesen megegyeznek a lineáris programozásnál kapottakkal. A geometriai programozásban perturbációs vizsgálatokat már D u f f i n - P e t e r s o n - Z e n e r a [26] könyvükben végeztek (Appendix B, pp. 247-254), azonban az itt tárgyalásra kerülő probléma ettől eltérő természetü.

A geometriai programozás dualitás tétele szerint, (7.§.) ha mindkét feladat konzisztens, akkor a szupremum megegyezik az infinummal. Ezt a közös értéket nevezzük a g e o m e t r i a i p r o g r a m o z á s é r t é k é n e k . A továbbiakban rögzitsük a particionálást, és a geometriai programozási feladatot $[A, b, c]$ együtthatóju feladatnak nevezzük. Legyenek $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ az A, b, c mátrix, illetve vektorokkal megegyező dimenziójuak. A probléma: m i t m o n d h a t u n k a $z[(A+\tau\hat{A}), (b+\tau\hat{b}), (c+\tau\hat{c})]$, e g y ü t t h a t ó j u , a z u g y n e v e z e t t p e r t u r b á l t f e l a d a t é r t é k é r ő l z é r u s h o z k ö z e l i τ e s e t é b e n .

A következő tételben feltételt adunk a perturbált feladat konzisztenciájára és egy formulát a perturbált feladat változásainak értékére.

TÉTEL: (I) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $[(A+\tau\hat{A}), (b+\tau\hat{b}), (c+\tau\hat{c})]$ együtthatóju perturbált feladat konzisztens legyen valamely $[0, \tau_0)$ intervallumon tetszőleges, de fix $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ perturbációs együtthatóknál az, hogy az $[A, b, c]$ együtthatóju feladatra a regularitási feltételek teljesüljenek.

(II) Ha az $[A, b, c]$ feladatra a regularitási feltételek teljesülnek, akkor tetszőleges $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ perturbációs együtthatókhoz van olyan $[0, \tau_0)$ intervallum, hogy a perturbált primál feladatnak is és a duáljának is van optimális megoldása minden $\tau \in [0, \tau_0)$ esetén és amennyiben $\omega(\tau)$ -val jelöljük a program értékét, akkor

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = \max_{y \in \mathcal{P}^*} \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y).$$

Ezt a derivált értéket M i l l's terminológiáját követve "a geometriai programozás marginális értékének" nevezzük.

B i z o n y i t á s : A tétel bizonyitását, hogy áttekinthetőbbé tegyük, több lépésben végezzük el.

a) Először azt mutatjuk meg, hogy a f e l t é t e l e k s z ü k s é g e s e k . Az, hogy a duál konzisztens equivalens azzal, hogy a primál célfüggvény korlátos, ez viszont equivalens azzal, hogy nincs olyan primál megoldás, melyre

$$\left.\begin{aligned} (A+\tau\hat{A})y &\leqq 0, \\ (b+\tau\hat{b})y &> 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Azonban, ha van olyan y melyre:

$$\left.\begin{aligned} Ay &\leqq 0, \\ by &\geqq 0, \\ y &\neq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

teljesül, akkor $\hat{A}=0$ és $\hat{b}$ olyan megválasztásával, hogy $\hat{b}y>0$ legyen, semmilyen kicsi $\tau>0$ számra nem lehet elérni, hogy (8) ne teljesüljön. Vagyis szükséges, hogy (9) ne teljesüljön, azaz a primál regularitás fennálljon.

A primál konzisztencia azt jelenti, hogy

$$\sum_{i\in I_k} e^{(a_i+\tau\hat{a}_i)y-(\gamma_i+\tau\hat{\gamma}_i)} \leqq 0, \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

egyenlőtlenség fennálljon.

Ebből az $\hat{A}=0,\ \gamma_i=-1,\ (i=1,2,\ldots,m)$ megválasztással a

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \leqq e^{-\tau}, \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

egyenlőtlenségeknek kell teljesülniök. Ennek valamely $\tau > 0$ számra való teljesülése azzal equivalens, hogy a primál feladat szuperkonzisztens, de a 9.§. 1b) tétel szerint csak akkor szuperkonzisztens, ha a duál regularitás teljesül.

b) A 9.§. 3. tétele biztositja, hogy van olyan $[0, \hat{\tau})$ intervallum, ahol mind a primál, mind a duál regularitás teljesül az $A + \tau\hat{A}, b + \tau\hat{b}, c + \tau\hat{c}$ együtthatóju feladatra $\tau \in [0, \hat{\tau})$ esetekben. A 9.§. 1. és 2. tételei szerint minden $\tau \in [0, \hat{\tau})$ értékre a megfelelő $\mathcal{P}^*$ és $\mathcal{D}^*$optimális halmazok korlátosak.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{P}^*_\tau$ és $\mathcal{D}^*_\tau$ e g y e n l e t e s e n i s k o r l á t o s a k valamely $[0, \tau_0)$, $\tau_0 \leqq \hat{\tau}$ intervallumon.

Indirekte, tegyük fel, hogy nincs olyan $[0, \tau_0)$ intervallum, ahol $\mathcal{P}^*_\tau$ és $\mathcal{D}^*_\tau$ egyenletesen korlátosak lennének. Ekkor létezik olyan $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q, \ldots$ zérushoz tartozó pozitiv számsorozat, amelyekhez tartozó valamely x^*_q, y^*_q optimális megoldáspárra az alábbi három eset valamelyike áll fenn:

1) $\|x^*_q\| \to \infty$ és $\|y^*_q\|$ korlátos,

2) $\|x^*_q\|$ korlátos és $\|y^*_q\| \to \infty$,

3) $\|x^*_q\| \to \infty$ és $\|y^*_q\| \to \infty$.

Jelöljük:

$$\tilde{x}^*_q = \frac{x^*_q}{\|x^*_q\|}, \quad \text{és} \quad \tilde{y}^*_q = \frac{y^*_q}{\|y^*_q\|} .$$

Az $\tilde{x}_q^*$ korlátos ponthalmozásból kiválasztható konvergens részsorozat. Az egyszerübb indexezés kedvéért feltehető, hogy ez már az, és legyen $\tilde{x}_q^* \longrightarrow \tilde{x}^*$. Hasonlóan $\tilde{y}_q^* \longrightarrow \tilde{y}^*$. Irjuk fel, hogy mit jelent az, hogy ezek optimális megoldások.

A duál feltételt kielégitik:

$$x_q^*(A+\tau_q\hat{A}) = b+\tau_q\hat{b}, \qquad x_q \geqq 0. \tag{10}$$

A primál feltételt kielégitik:

$$\sum_{i\in I_k} e^{(a_i+\tau_q\hat{a}_i)y_q^*-(\gamma_i+\tau_q\hat{\gamma}_i)} \leqq 1, \quad (k=1,2,\ldots,p),$$

de ekkor fennáll, hogy

$$(A+\tau_q\hat{A})y_q^* \leqq c+\tau_q\hat{c}. \tag{11}$$

A két célfüggvény értéke megegyezik:

$$\omega_q = (b+\tau_q\hat{b})y_q^* = x_q^*(c+\tau_q\hat{c}) + \varphi(x_q^*). \tag{12}$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy mindegyik esetben ellentétbe kerülünk a regularitási feltételek teljesülésével.

1. eset. A (10) és (12) összefüggésekből, $\|x_q^*\|$ normával való osztás után kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}_q^*(A+\tau_q\hat{A}) = \frac{1}{\|x_q^*\|}(b+\tau_q\hat{b}), \\ &\tilde{x}_q^*(c+\tau_q\hat{c}) + \varphi(\tilde{x}_q^*) = \frac{1}{\|x_q^*\|}(b+\tau_q\hat{b})y_q^*. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Mivel $\|y_q^*\|$ korlátos, a (13)-ból az $\tilde{x}^*$ torlódási pontra nyerjük, hogy:

$$\tilde{x}^* A = 0, \quad \|\tilde{x}^*\| = 1, \qquad \tilde{x}^* \geqq 1, \quad \text{és} \quad \tilde{x}^* c + \varphi(\tilde{x}^*) = 0,$$

ami ellentmond a duál regularitásnak.

2. eset. A (11) és (12) összefüggésekből $\|y_q^*\|$ normával való osztás után kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} (A + \tau_q \hat{A}) \tilde{y}_q^* &\leqq \frac{1}{\|y_q^*\|} (c + \tau_q \hat{c}), \\ (b + \tau_q \hat{b}) \tilde{y}_q^* &= \frac{1}{\|y_q^*\|} [x_q^* (c + \tau_q \hat{c}) + \varphi(x_q^*)]. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Mivel $\|x_q^*\|$ korlátos, a (14)-ből az $\tilde{y}^*$ tolódási pontra nyerjük, hogy

$$A \tilde{y}^* \leqq 0, \quad b \tilde{y}^* = 0 \quad \text{és} \quad \|\tilde{y}^*\| = 1,$$

amely ellentmond a primál regularitási feltételnek.

3. eset. A (10), (11) és (12) összefüggésekből $\|\tilde{x}_q^*\|$ illetve $\|y_q^*\|$ normával való osztás után nyerjük, hogy

$$\tilde{x}_q^* (A + \tau_q \hat{A}) = \frac{1}{\|x_q^*\|} (b + \tau_q \hat{b}), \qquad (15)$$

$$(A + \tau_q \hat{A}) \tilde{y}_q^* \leqq \frac{1}{\|y_q^*\|} (c + \tau_q \hat{c}), \qquad (16)$$

$$\|y_q^*\| \{(b + \tau_q \hat{b}) \tilde{y}_q^*\} = \|x_q^*\| \{\tilde{x}_q^* (c + \tau_q \hat{c}) + \varphi(\tilde{x}_q^*)\}. \qquad (17)$$

A (15) és (16)-ból a torlódási pontokra kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{lll} \tilde{x}^* A = 0, & \|\tilde{x}^*\| = 1, & \tilde{x}^* \geqq 0, \quad \text{és} \\ A\tilde{y}^* \leqq 0, & \|\tilde{y}^*\| = 1. & \end{array}\right\} \quad (18)$$

Azonban a regularitási feltételek teljesülése miatt a torlódási pontokra, melyekre (18) fennáll, kell, hogy az

$$\left.\begin{array}{r} \tilde{x}^* c + \varphi(\tilde{x}^*) > 0 \quad \text{és} \\ b\tilde{y}^* < 0 \end{array}\right\} \quad (19)$$

egyenlőtlenségek teljesüljenek.

De (17)-ből adódik, hogy

$$(b + \tau_q \hat{b})\tilde{y}_q \longrightarrow by$$

és

$$\tilde{x}^*_q(c + \tau_q \hat{c}) + \varphi(\tilde{x}^*_q) \longrightarrow \tilde{x}^* c + \varphi(\tilde{x}^*),$$

ezért kell, hogy legyen olyan τ_{q_0}, melyre

$$(b + \tau_{q_0} \hat{b})\tilde{y}^*_{q_0} < 0 \quad \text{és} \quad \tilde{x}^*_{q_0}(c + \tau_{q_0}\hat{c}) + \varphi(\tilde{x}^*_{q_0}) > 0,$$

Ami ellentmond a (17) egyenlőségnek.

Ezzel az egyenletes korlátosságot igazoltuk.

c) Legyenek a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q, \ldots, \longrightarrow 0$ zérushoz tartó sorozat valamely megfelelő optimális megoldásai az $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_q^*, \ldots$ illetve az $y_1^*, y_2^*, \ldots y_q^*, \ldots$ vektor sorozatok. M e g m u t a t - j u k , h o g y a z x_q^* s o r o z a t b á r m e l y t o r l ó d á s i p o n t j a $\mathcal{D}^*$ h a l m a z h o z , é s h a s o n l ó a n y_q^* s o r o z a t t o r l ó d á s i p o n t j a i $\mathcal{P}^*$ h a l m a z h o z t a r t o z n a k .

Az egyszerüség kedvéért feltehető, hogy az indexezés már olyan, hogy $x_q^* \longrightarrow x^*$ és $y_q^* \longrightarrow y^*$.

Mivel x_q^*, y_q^* optimális megoldásai a τ_q paraméterü perturbált feladatnak, ezért fennáll, hogy

$$\begin{gathered} x_q^*(A+\tau_q\hat{A}) = b+\tau_q\hat{b}, \qquad x_q^* \geqq 0, \\ \sum_{i\in I_k} e^{(a_i+\tau_q\hat{a}_i)y_q^* - (\gamma_i+\tau_q\hat{\gamma}_i)} \leqq 1, \quad (k=1,2,\ldots,p) \\ (b+\tau_q\hat{b})y_q^* = x_q^*(c+\tau_q\hat{c}) + \varphi(x_q^*). \end{gathered} \tag{20}$$

Határértékben (20)-ból kapjuk, hogy

$$x^*A = b$$

$$x^* \geqq 0,$$

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} \leqq 1, \qquad (k=1,2,\ldots,p),$$

$$by^* = x^*c + \varphi(x^*),$$

azaz

$$x^* \in \mathcal{D}^* \quad \text{és} \quad y^* \in \mathcal{P}^* .$$

d) A következőkben meghatározzuk a program marginális értékét, felhasználva a geometriai programozás Lagrange függvényének nyeregpont egyenlőtlenségét. (8.§.). A továbbiakban a Lagrange függvényben a programegyütthatókat is feltüntetjük.

Tetszőleges $\tau \in (0, \tau_0)$ paraméterre a Lagrange függvény nyeregpont egyenlőtlenségét az $x = \overset{*}{x}_0$, $y = \overset{*}{y}_0$ helyen felirva kapjuk, hogy

$$\Phi(A+\tau\hat{A}, b+\tau\hat{b}, c+\tau\hat{c}, \overset{*}{x}_\tau, \overset{*}{y}_0) \leqq \omega(\tau) \leqq \Phi(A+\tau\hat{A}, b+\tau\hat{b}, c+\tau\hat{c}, \overset{*}{x}_0, \overset{*}{y}_\tau). \quad (21)$$

A $\tau = 0$ paraméternél az $x = \overset{*}{x}_\tau$, és $y = \overset{*}{y}_\tau$ helyen a nyeregpont egyenlőtlenségből -1-gyel való szorzás útján a

$$-\Phi(A, b, c, \overset{*}{x}_\tau, \overset{*}{y}_0) \leqq -\omega(0) \leqq -\Phi(A, b, c, \overset{*}{x}_0, \overset{*}{y}_\tau) \quad (22)$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

A (21) és (22) egyenlőtlenségeket összeadva és $\tau > 0$ számmal osztva nyerjük, hogy

$$(\overset{*}{x}_\tau \hat{c} + \hat{b}\overset{*}{y}_0 - \overset{*}{x}_\tau \hat{A}\overset{*}{y}_0) \leqq \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} \leqq (\overset{*}{x}_0 \hat{c} + \hat{b}\overset{*}{y}_\tau - \overset{*}{x}_0 \hat{A}\overset{*}{y}_\tau)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $\overset{*}{x}_0 \in \mathcal{D}^*$ és $\overset{*}{y}_0 \in \mathcal{D}^*$ esetén.

De akkor fennáll a

$$\max_{y \in \mathcal{D}^*} (\overset{*}{x}_\tau \hat{c} + \hat{b}y - \overset{*}{x}_\tau \hat{A}y) \leqq \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} \leqq \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}\overset{*}{y}_\tau - x\hat{A}\overset{*}{y}_\tau) \quad (23)$$

egyenlőtlenség is.

Minthogy bizonyitásunk c) részében megmutattuk, hogy y^*_τ torlódási pontjai $\mathcal{P}^*$ elemei, igy tetszőleges $\epsilon > 0$ -ra, ha τ elég kicsi, fennáll, hogy

$$\min_{x\in\mathcal{D}^*}(x\hat{c}+\hat{b}y^*_\tau-x\hat{A}y^*_\tau) \leqq \max_{y\in\mathcal{P}^*}\min_{x\in\mathcal{D}^*}(x\hat{c}+\hat{b}y-x\hat{A}y)+\epsilon. \qquad (24)$$

Hasonlóan, mivel x^*_τ torlódási pontjai egyuttal $\mathcal{D}^*$ pontjai is:

$$\max_{y\in\mathcal{P}^*}(x^*_\tau\hat{c}+\hat{b}y-x^*_\tau\hat{A}y) \geqq \min_{x\in\mathcal{D}^*}\max_{y\in\mathcal{P}^*}(x\hat{c}+\hat{b}y-x\hat{A}y)-\epsilon. \qquad (25)$$

A (23), (24) és (25) egybevetésével adódik, hogy

$$-\epsilon \leqq \frac{\omega(\tau)-\omega(0)}{\tau} - \max_{y\in\mathcal{P}^*}\min_{x\in\mathcal{D}^*}(x\hat{c}+\hat{b}y-x\hat{A}y) \leqq +\epsilon$$

egyenlőtlenség teljesül tetszőleges $\epsilon > 0$ számra, ha τ elég kicsi, ami a tétel formulájával equivalens.∎

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyitásának c) része önmagában is egy érdekes összefüggést ad a $\mathcal{P}^*_\tau$ és a $\mathcal{D}^*_\tau$, $\tau\in[0,\tau_0)$ paraméterü geometriai programozási feladat optimális megoldáshalmaz rendszereiről. Ez az összefüggés D a n t z i g - F o l k m a n - S h a p i r o [15] egy általános halmazkonvergencia tételéből is kikövetkeztethető.

11.§. SZTOHASZTIKUS GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS

A lineáris programozás sztohasztizálása két igen fontos sztohasztikus döntési modell tipushoz vezetett: az egyik a "valószinüséggel korlátozott programozás" /chance constrained programming/, a másik a "kétlépcsős sztohasztikus programozás" /two stage programming under uncertainty/.

A Dantzig - Madansky féle kétlépcsős sztohasztikus lineáris programozás mintájára Avriel - Wilde [2] megadta a kétlépcsős sztohasztikus geometriai programozást. Ennek a modellnek vizsgálatában ők erősen támaszkodnak Mangasarian - Rosen [50] és Lieu [49] eredményeire.

A valószinüséggel korlátozott programozási modellek egyik legszellemesebb és a gyakorlati felhasználásban fontosnak bizonyuló modelljei Prékopa [64] által adott modell tipusok.

Ebben a §-ban a valószinüséggel korlátozott lineáris programozás analógjára megadjuk a valószinüséggel korlátozott geometriai programozást, majd Prékopa [65] eredményét használva megmutatjuk, hogy ez a modell is, bizonyos feltétel esetén konvex programozási problémához vezet.

A felhasználásra kerülő tétel [65] a következő:

Legyenek a $f_k(y,c)$, $(k=1,2,\dots p)$ függvények konvexek $(y,c)\in R^{(n+m)}$-ben. $(y\in R^{(n)}, c\in R^{(m)})$.

Legyen $\tilde{c}$ valószinüségi változó vektor, amelynek sürüség függvénye konkáv $R^{(n)}$-ben, akkor a

$$P\{f_k(y,\tilde{c}) \leqq 0,\ (k=1,\dots p)\}$$

függvény log-konkáv $y \in R^n$-ben.

Valószinüséggel korlátozott geometriai programozási feladat:

A feladat megfogalmazására a valószinüséggel korlátozott lineáris programozás feladatából indulunk ki. Az

$$Ay \leqq c$$

$$\max by$$

lineáris programozási feladat valószinüséggel korlátozott alapesete:

Feltétel:

$$P\{Ay - \tilde{c} \leqq 0\} \geqq 1-\varepsilon$$

és meghatározandó:

$$\sup by$$

(ahol $0 < \varepsilon < 1$ adott, célszerüen kicsi szám, és $\tilde{c}$ valószinüségi változó ismert sürüség függvénnyel.)

Ennek analógiájára az

$$\ln \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leqq 1, \quad (k=1,\dots p)$$

feltételü és

$$\sup by$$

célfüggvényü geometriai programozás valószinüséggel korlátozott alapesete:

Feltétel:

$$P\left\{\ln \sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\tilde{\gamma}_i} \leqq 0, \quad (k=1,2,\dots p)\right\} \geqq 1-\varepsilon$$

és meghatározandó

$$\sup by$$

Az idézett tételt használva kapjuk, hogy amennyiben $\tilde{c}$ valószinüségi változó vektor sürüség függvénye log-konkáv, akkor ezen valószinüséggel korlátozott geometriai programozási feladat k o n v e x p r o g r a m o z á s i f e l a d a t .

Ehhez csak azt kell megmutatnunk még, hogy az $\ln \sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i}$ függvény (y, c) -ben konvex, ami azt jelenti, hogy az

$$\ln \sum e^{a_i(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)-(\lambda\gamma_i^{(1)}+(1-\lambda)\gamma_i^{(2)})} \leqq \lambda \ln \sum e^{a_i y_1-\gamma_i^{(1)}} + (1-\lambda)\ln \sum e^{a_i y_2-\gamma_i^{(2)}}$$

egyenlőtlenségnek teljesülni kell tetszőleges $0 \leqq \lambda \leqq 1$ számra.

A logaritmus függvény monotonitása miatt viszont ez azzal equivalens, hogy a

$$\sum e^{a_i(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)-(\lambda\gamma_i^{(1)}+(1-\lambda)\gamma_i^{(2)})} \leqq \left(\sum e^{a_i y_1-\gamma_i^{(1)}}\right)^{\lambda} \left(\sum e^{a_i y_2-\gamma_i^{(2)}}\right)^{1-\lambda}$$

egyenlőtlenség teljesül.

Ezt az alábbi formára hozhatjuk

$$\sum \left(e^{a_i y_1-\gamma_i^{(1)}}\right)^{\lambda} \left(e^{a_i y_2-\gamma_i^{(2)}}\right)^{1-\lambda} \leqq \left(\sum e^{a_i y_1-\gamma_i^{(1)}}\right)^{\lambda} \left(\sum e^{a_i y_2-\gamma_i^{(2)}}\right)^{1-\lambda}$$

ami épp a Hölder egyenlőtlenség.

12.§. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS ALKALMAZÁSA A RAS MÓDSZERRE

Ebben a §-ban megmutatjuk, hogy az input-output tábla előrebecslésére szolgáló RAS modell felfogható ugy is, mint egy geometriai programozási feladat. Ily módon a RAS modellre egy matematikai megalapozást tudunk adni. Abból a tényből, hogy a RAS modell equivalens egy geometriai programozási feladattal egyszerüen nyerhető a RAS modell megoldásának exisztenciája és unicitása, és lehetőség adódik más előrebecslési módszerek és a RAS kapcsolatának megmutatására is.

1. Az input-output tábla előrebecslési feladata: Jelöljön az $I_1, I_2, \dots I_i, \dots I_m$ kibocsátóhelyek, a $J_1, J_2, \dots J_j, \dots J_n$ pedig fogadóhelyeket. Az $\alpha_{ij} \geqq 0$ szám jelölje azt a mennyiséget, amennyi az I_i helyről a J_j helyre megy, vagy másképpen szólva amennyit az I_i helyen termeltből a J_j hely elfogyaszt. Tömören az α_{ij} számokat az $A=(\alpha_{ij})$ mátrixba foglalhatjuk össze és ezt nevezzük input-output táblázatnak.

A $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$ mennyiség az I_i hely teljes kibocsájtása, a

$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}$ mennyiség a J_j hely összes befogadása. Ezeket nevezzük az input-output marginális értékeinek.

A feladat az, hogy amennyiben ismerjük a jelenlegi $A=(\alpha_{ij})$ input-output mátrixot és ismerjük a megváltozott

$b=(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_i, \dots \beta_m) > 0$ marginális input és a

$c=(\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_j, \dots \gamma_n) > 0$ output értékeket, akkor milyen prognozist adhatunk az uj $X=(\xi_{ij})$ input-output tábláról.

A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:

	$\exists_1$	$\dots$	$\exists_j$	$\dots$	$\exists_n$
I_1	α_{11}	$\dots$	α_{1j}	$\dots$	α_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
I_i	α_{i1}	$\dots$	α_{ij}	$\dots$	α_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
I_m	α_{m1}	$\dots$	α_{mj}	$\dots$	α_{mn}

(Jelenlegi input-output tábla)

	γ_1	$\dots$	γ_j	$\dots$	γ_n
β_1	ξ_{11}	$\dots$	ξ_{1j}	$\dots$	ξ_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
β_i	ξ_{i1}	$\dots$	ξ_{ij}	$\dots$	ξ_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
β_m	ξ_{m1}	$\dots$	ξ_{mj}	$\dots$	ξ_{mn}

(Prognosztika az új input-output táblára)

2. A RAS módszer: A feladat megoldására elterjedt eljárás az ugynevezett RAS módszer. A módszert az első alkalmazókról, S e l e j k o v s z k i j , illetve F r a t a r módszernek is nevezik, valamint a módszer indoklásául szolgáló gravitációs elvről "Graviti" modellnek is (F r a t a r [35], S e l e j k o v s z k i j [69] , S t o n e - B a t e s - B a c h a r a c h [77] S t o n e - B r o w n [76] G l a t t f e l d e r - V á c z i [39].

A RAS modell a következőkben áll: olyan

$\xi_{ij} \geq 0$, $(i = 1,2,\dots m;\ j = 1,2,\dots n)$, $\varrho_i > 0$, $(i = 1,2,\dots m)$ és

$\sigma_j > 0$, $(j = 1,2,\dots n)$ számokat keresünk, melyre

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} &= \beta_i, \quad (i = 1,2,\dots m), \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} &= \gamma_j, \quad (j = 1,2,\dots n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

és

$$\xi_{ij} = \varrho_i \alpha_{ij} \sigma_j . \qquad (2)$$

A (2) feltevés - az, hogy ξ_{ij} értékét ilyen szorzat alakban keressük - adja az eljárás nevét. Ugyanis, ha a ϱ_i számokból alkotott diagonál mátrixot R-el, a σ_j számokból képzettet S-el jelöljük, akkor a (2) feltétel az

$$X = RAS$$

formát ölti.

Azonnal adódik, hogy: ha (1) (2) egyenletrendszer megoldható, akkor (1) egyenletrendszernek van olyan megoldása, hogy

$$\left.\begin{aligned} \xi_{ij} &= 0, \text{ ha } \alpha_{ij} = 0, \\ \text{és} \quad \xi_{ij} &> 0, \text{ ha } \alpha_{ij} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Meg fogjuk mutatni, hogy az a feltétel e l é g s é g e s is és megoldásra u n i c i t á s t is biztosit, azaz a RAS modellre fennáll az alábbi:

1. TÉTEL: Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy (1) (2) rendszer megoldható az, hogy az (1) rendszernek legyen (3) tipusu megoldása, és a feltétel fennállása esetén a megoldás ξ_{ij} -ben egyértelmü.

A tételt majd a 3. pontban oly módon fogjuk igazolni, hogy RAS modellt egy a szokásostól eltérő más módon, mint matematikai programozási feladatot vezetjük be.

Mielőtt azonban erre rátérnénk a RAS modell egy fontos tulajdonságát mutatjuk meg, amely a fenti tétel következménye.

Legyenek az A kezdeti input-output érték, valamint a b, c marginális értékek olyanok, hogy a tétel feltételét teljesitik. Ekkor a RAS módszer szerint egyértelmüen adódik az uj input-output X mátrix, amelyet a következőképp jelöljük:

$$X = \mathcal{R}(A, b, c)$$

A tétel következménye: Legyenek A, b, c; b^*, c^* olyanok, hogy a tétel feltétele az A, b, c -re és az A, b^*, c^* -ra is teljesül, akkor

$$\mathcal{R}(A, b, c) = \mathcal{R}(\mathcal{R}(A, b^*, c^*), b, c).$$

Azaz, lépésenkénti előrebecslés ugyanazt eredményezi, mint az egy lépésbeni előrebecslés.

A következmény bizonyitása: Az állitás jobb oldala az alábbi formába irható:

$$\mathcal{R}(\mathcal{R}(A, b^*, c^*), b, c) = \mathcal{R}(R^*AS^*, b, c) = R^{**}(R^*AS^*)S^{**} = (R^{**}R^*)A(S^*S^{**})$$

A bal oldalból kapjuk, hogy

$$\mathcal{R}(A,b,c) = RAS.$$

De az u n i c i t á s miatt

$$RAS = (R^{**}R^{*})A(S^{*}S^{**}). \blacksquare$$

3. A RAS mint geometriai programozási feladat. A továbbiakban a számolás egyszerüsitése érdekében, az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m}\beta_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n}\gamma_j = 1.$$

Az előrebecslésre az alábbi h i p o t é z i s t tesszük:

Akkor tartjuk "jónak" az $X = (\xi_{ij})$ előrebecslést, ha - természetesen az (1) egyenletrendszer kielégitése mellett - az információnyereség (I-divergencia), amelyet az X tábla az A táblához képest ad minimális, azaz, ha a

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}\ln\frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} \tag{4}$$

függvény értéke minimális.

A $\xi_{ij}\ln\frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}}$ függvényt folytonos kiterjesztéssel a zárt pozitiv ortánson értelmezzük ugy, hogy ha $\xi_{ij} = 0$ akkor

$\xi_{ij}\ln\frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} = 0$ legyen.

A (4) függvénynek a feltételi halmazon akkor lehet csak véges infinuma, ha $\alpha_{ij}=0$ esetén $\xi_{ij}=0$.

Jelöljük Q-val azon (i,j) indexpárok, cellák halmazát, ahol $\alpha_{ij}>0$ azaz:

$$Q=\{(i,j)|\alpha_{ij}>0\}.$$

Igy feladatunk olyan $X=(\xi_{ij})$ értékek meghatározása, melyekre:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{ij}\geqq 0, && (i=1,2,\dots m;\ j=1,2,\dots n) \\ &\xi_{ij}=0, \text{ ha } && (i,j)\notin Q, \\ &\sum_{j|(i,j)\in Q}\xi_{ij}=\beta_i, && (i=1,2,\dots m), \\ &\sum_{i|(i,j)\in Q}\xi_{ij}=\gamma_j, && (j=1,2,\dots n), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

és

$$\varphi(x)=\sum_{(i,j)\in Q}\xi_{ij}\ln\frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} \tag{6}$$

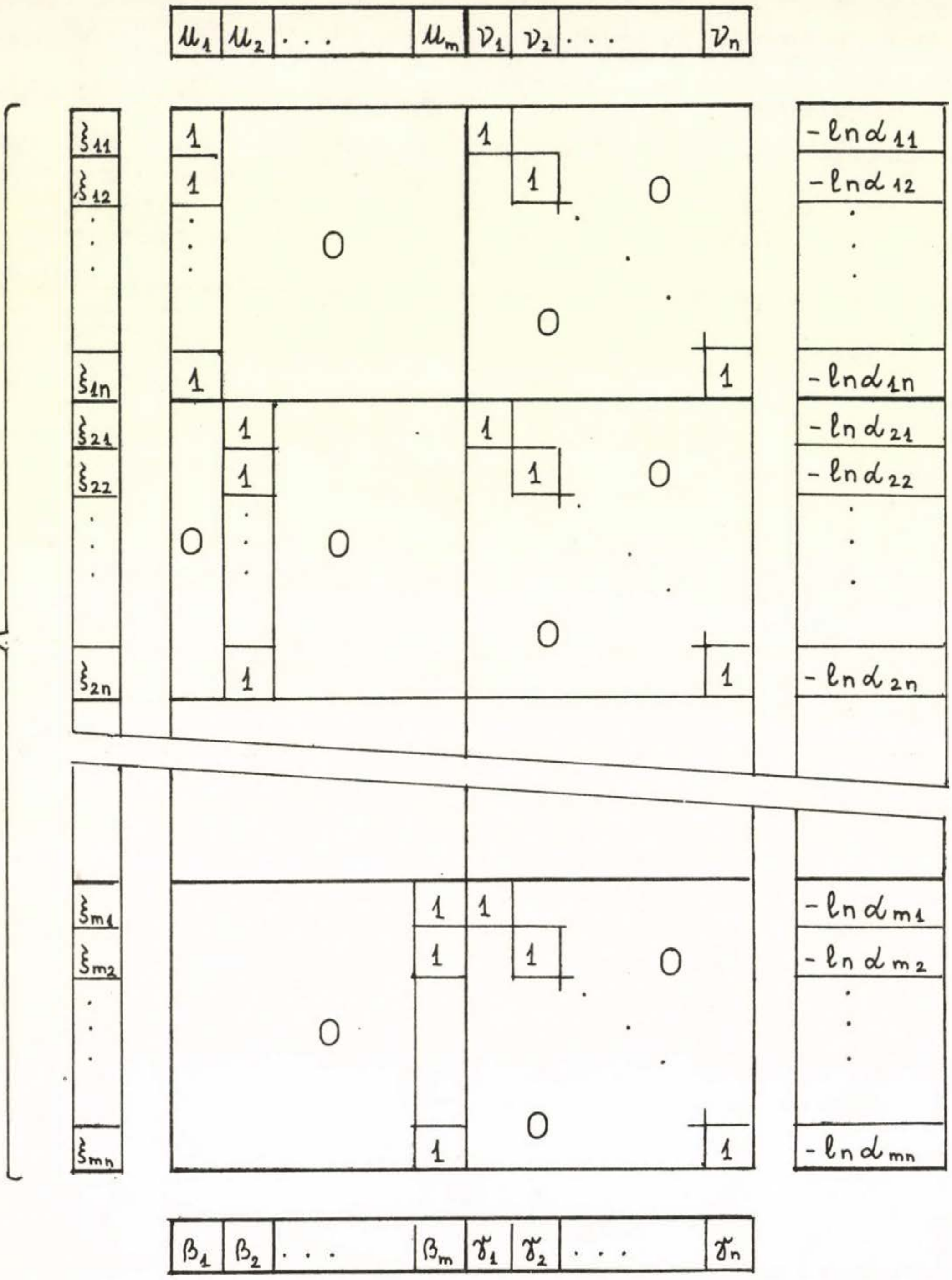
minimális.

Az (5), és (6) által leirt matematikai programozási feladat egy geometriai programozási duál feladat. Hogy pontosabban lássuk ennek strukturáját átirjuk a (6)-os célfüggvényt:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(X) &= \sum_{(i,j)\in Q} \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} = \sum_{(i,j)\in Q} \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\sum\limits_{(i,j)\in Q} \xi_{ij}} \cdot \frac{1}{\alpha_{ij}} = \\ &= \sum_{(i,j)\in Q} \xi_{ij}(-\ln \alpha_{ij}) + \ln \frac{\prod\limits_{(i,j)\in Q} \xi_{ij}^{\xi_{ij}}}{\left(\sum\limits_{(i,j)\in Q} \xi_{ij}\right)^{\sum\limits_{(i,j)\in Q} \xi_{ij}}}\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Amennyiben az (5) által meghatározott feltételi halmaz nem üres (konzisztens a feladat) akkor a (7) célfüggvény felveszi minimumát, ugyanis a feltételi halmaz korlátos.

Irjuk fel ezen geometriai programozási duál feladat primál párját. Legyenek a primál változók μ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és v_j $(j = 1, 2, \ldots n)$. A feladat együtthatóit az alábbi sémán szemléltetjük:



A primál geometriai programozási feladat: Meghatározandó a μ_i, $(i = 1, 2, \ldots m)$ és ν_j, $(j = 1, 2, \ldots n)$ változók értéke ugy, hogy

$$\sum_{(i,j)\in Q} e^{\mu_i + \nu_j + \ln d_{ij}} \leqq 1 \qquad (8)$$

feltétel teljesüljön és a

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \nu_j \qquad (9)$$

célfüggvényérték maximális legyen.

A következőkben a feladat egyrészt a "k a n o n i k u s s á g" feltételezésével, majd e nélkül tárgyaljuk.

A./ Tegyük fel, hogy ez (5), (7) által adott geometriai programozási duál feladat k a n o n i k u s , azaz, hogy az (5) egyenletrendszernek van $\xi_{ij} > 0$ (ha $(i,j) \in Q$) megoldása. Ez pontosan azzal equivalens, hogy a (3) feltétel teljesül.

A geometriai programozás eredményeit használva a következő megállapitásokat tehetjük:

(i) A geometriai programozási duál feladat kanonikus igy konzisztens és mivel feltételi halmaza korlátos, ezért van a (7)-es célfüggvényt minimalizáló

ξ^*_{ij}, $(i = 1, 2, \dots m;\quad j = 1, 2, \dots n)$ megoldása (5)-nek.

Mivel a (7)-es célfüggvény szigoruan konvex (3.§. 2. lemma) igy csak egy minimumpont van.

(ii) A feladat kanonikus és a duál célfüggvény korlátos, ((i) miatt) igy van a primál feladatnak optimális μ_i^*, $(i=1,2,\dots m)$ és ν_j^*, $(j=1,2,\dots n)$ megoldása (5.§.)

(iii) A μ_i, ν_j, ξ_{ij} megoldáspár akkor és csak akkor optimális, ha

$$e^{\mu_i+\nu_j+\ln\alpha_{ij}} \sum_{(i,j)\in Q} \xi_{ij} = \xi_{ij} \quad \text{minden } (i,j)\in Q \text{ esetén}$$

(1.§. és 7.§.)

Azaz

$$\xi_{ij} = e^{\mu_i+\nu_j}\alpha_{ij}, \text{ minden } (i,j)\in Q \text{ esetben.} \quad (10)$$

A fentiekből a RAS módszerrel és az I-divergencia minimalizálásával való előrebecslésekre az alábbi equivalenciát lehet kimondani.

2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy az A, b, c paraméterü előrebecslési feladat a (3) feltételt ("kanonikusssági feltétel") teljesiti. Akkor a RAS módszerrel és az I-divergencia minimalizálásával kapott előrebecslések megegyeznek.

B i z o n y i t á s : a) Ha $X=(\xi_{ij})$ és ϱ_i, σ_j a RAS módszerrel kapott, akkor legyen $\mu_i=\ln\varrho_i$, $\nu_j=\ln\sigma_j$. A ξ_{ij} értékek (5)-öt teljesitik. Ugyszintén a ξ_{ij}, μ_i, ν_j értékek (10)-et is teljesitik. Egyszerüen adódik, hogy μ_i, ν_j (8)-at is teljesiti, ugyanis

$$\sum_{(i,j)\in Q} e^{\mu_i+\nu_j+\ln\alpha_{ij}} = \sum_{i,j} \xi_{ij} = 1 .$$

Igy ξ_{ij}, μ_i, ν_j optimális megoldáspár.

b) Ha $X=(\xi_{ij})$ és μ_i, ν_j a minimalizálással kapott, akkor legyen $\varrho_i = e^{\mu_i}$, $\sigma_j = e^{\nu_j}$. Mivel ezek optimális megoldáspárok, ezért (10)-et teljesitik, azaz $\xi_{ij} = \varrho_i \alpha_{ij} \sigma_j$. ∎

A 2. tételből az (i) megállapitást is figyelembe véve nyilvánvalóan adódik az 1. tétel bizonyitása.

B./ Tegyük fel, hogy az (5)-ös feltételi halmaz konzisztens. Hogy a konzisztencia teljesül-e equivalens azzal, hogy ez a kereslet-kinálat modell megoldható-e (lásd C. Függelék).

Jelöljön $E=(e_i)=(e^{(j)})=(\varepsilon_{ij})$ $m\times n$-es mátrixot, ahol

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \alpha_{ij} > 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha_{ij} = 0. \end{cases}$$

Legyen

$$\|E\| = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}, \quad \|e_i\| = \sum_j \varepsilon_{ij}, \quad \|e^{(j)}\| = \sum_i \varepsilon_{ij} .$$

Nyilván

$$\|E\| = \sum_i \|e_i\| = \sum_j \|e^{(j)}\|$$

Tekintsük a módositott $A, b_\varepsilon, c_\varepsilon$ előrebecslési feladatot, ahol

$$\left.\begin{aligned} \beta_i^{(\varepsilon)} &= \frac{\beta_i + \|e_i\|\varepsilon}{1 + \|E\|\varepsilon} \\ \\ \gamma_j^{(\varepsilon)} &= \frac{\gamma_j + \|e^{(j)}\|\varepsilon}{1 + \|E\|\varepsilon} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

és $\varepsilon \geqq 0$ tetszőleges, de rögzitett szám.

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon \to 0$ esetén $\beta_i^{(\varepsilon)} \to \beta_i^{(0)}$ és $\gamma_j^{(\varepsilon)} \to \gamma_j^{(0)}$ (ahol $\beta_i^{(0)} = \beta_i$ és $\gamma_j^{(0)} = \gamma_j$)

A módositott feladat minden $\varepsilon > 0$ esetén kanonikus és igy RAS formában előállitható az optimális $\xi_{ij}^{(\varepsilon)*}$ megoldás. (2. tétel).

Megmutatjuk, hogy ha "kicsit" módositjuk a feladatot, akkor az optimális megoldás is kicsit módosul, azaz fennáll az alábbi:

3. TÉTEL. Az optimum hely folytonosan változik, azaz ha $\varepsilon \longrightarrow 0$ akkor $X_\varepsilon^* \longrightarrow X_0^*$. (ahol $X_0^* = X^*$)

Bizonyitás: Indirekte tegyük fel, hogy van olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_k, \dots \to 0$ sorozat, hogy $X_{\varepsilon_k}^* \longrightarrow \overline{X}$ és $\overline{X} \neq X_0^*$.

Ekkor

$$\varphi(X_0^*) < \varphi(\overline{X}) \qquad (12)$$

mivel, hogy az eredeti $(\varepsilon = 0)$ feladatnak csak egy minimum helye van.

A φ függvény folytonossága miatt:

$$\varphi(X_0^* + \varepsilon_k E) \to \varphi(X_0^*), \quad \text{ha} \quad \varepsilon_k \to 0,$$

és

$$\varphi(X_{\varepsilon_k}^*) \to \varphi(\bar{X}), \quad \text{ha} \quad \varepsilon_k \to 0.$$

De ekkor (12) miatt kell, hogy legyen olyan k_0 index, melyre már

$$\varphi(X_0^* + \varepsilon_{k_0} E) < \varphi(X_{\varepsilon_{k_0}}^*) \qquad (13)$$

Azonban $X_0^* + \varepsilon_{k_0} E$ megengedett /lehetséges/ megoldása az ε_{k_0} -ás módositott feladatnak és (13) ellentétes azzal, hogy $X_{\varepsilon_{k_0}}^*$ az optimális megoldás az ε_{k_0} -ás feladatra.∎

A 3. tételnek számitástechnikai jelentősége van. Ugyanis mint emlitettük a konzisztencia a Kőnig-Hall tétel feltételével egyszerüen ellenőrizhető és majd a kicsi pozitiv ε számmal módositott feladat megoldása RAS formában kereshető.

<u>4. Algoritmus</u>. Tegyük fel, hogy az (5) feltételi halmaz konzisztens. Ekkor a RAS modell megoldására, azaz a

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} &= \beta_i, && (i=1,\ldots,m), \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} &= \gamma_j, && (j=1,\ldots,n), \end{aligned}\right\} \qquad (1^*)$$

$$\xi_{ij} = \varrho_i \alpha_{ij} \sigma_j, \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n), \qquad (2^*)$$

$$\varrho_i > 0, \qquad (i=1,\ldots,m),$$

$$\sigma_j > 0, \qquad (j=1,\ldots,n),$$

egyenletrendszer ξ_{ij} megoldására kézenfekvő eljárás az, hogy a (2^*) kifejezést (1^*) -ba helyettesitve adódó

$$\varrho_i = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \sigma_j} ,$$

$$\sigma_j = \frac{\gamma_j}{\sum_{i=1}^{m} \varrho_i\, \alpha_{ij}} ,$$

egyenletrendszerre iterációt alkalmazunk:

az iteráció kezdő lépése:

$\varrho_i^{(0)}$ = tetszőleges pozitiv szám.
/szokásos például a $\varrho_i^{(0)}=1, (i=1,\dots,m)$ illetve a $\varrho_i^{(0)}=\beta_i, (i=1,\dots,m)$ választás/

a z i t e r á c i ó k - d i k l é p é s e :

$$\sigma_j^{(k)} = \frac{\gamma_j}{\sum_{i=1}^{m} \varrho_i^{(k)}\, \alpha_{ij}} , \qquad (j=1,\dots n),$$

$$\varrho_i^{(k)} = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \sigma_j^{(k-1)}} , \qquad (i=1,\dots m),$$

$$\xi_{ij}^{(k)} = \varrho_i^{(k)}\, \alpha_{ij}\, \sigma_j^{(k)} , \qquad (i=1,\dots m;\ j=1,\dots n).$$

A fenti eljárást a megoldást adó ξ_{ij} előállitására már Selejkovszkij a 30-as években alkalmazta, mint ahogy az Dinkin [28] munkájából kiderül. Ugy szintén ezt az eljárást javasolják D'Esopo-Lefkowitz [30], és dolgozatukban az eljárás gyorsaságára és konvergenciájára vonatkozóan kedvező számitástechnikai tapasztalatokról számolnak be. Az eljárás konvergenciájának bizonyitását azonban csak később Bregman [10] adta.

Természetesen azon feltevés, hogy az (5) feltételi halmaz konzisztens a $\varrho_i^{(k)}$ és $\sigma_j^{(k)}$ konvergenciáját nem biztositja. Azonban számos - főleg közlekedési áramlási - előrebecslési feladatnál szükséges a ϱ_i, σ_j értékeknek ismerete is, ezek ugyanis közlekedési modelleknél "taszitási", illetve "vonzási" együttható szerepeket töltenek be, és a kibocsájtó, illetve fogadó helyekre jellemzőül szolgálnak. Ilyenkor célszerü a fenti, 2.B. alatt leirt módositást kicsi $\varepsilon > 0$ pozitiv számmal elvégezni. A 3. tétel szerint ekkor a ξ_{ij} megoldás is csak kicsit tér el a ténylegestől, és ebben az esetben már módunk van a ϱ_i, σ_j közelitő értékének meghatározására is.

Az elmult években az Intézetben több különböző megbizásként /EVM Pécsi Tervező Iroda, UVATERV, KÖTUKI, VÁTI/ foglalkoztunk a RAS modellel, mint a közlekedési és a tömegáramlási modellek részfeladatával és a modellt megoldó algoritmus gépi programjának elkészitésével.

5. A RAS módszer kapcsolata az ugynevezett "statisztikai előrebecslési" módszerhez. A RAS módszer mellett egy szintén elterjedt eljárás a D e m i n g - S t e p h a n [16] által javasolt, a négyzetes kontingenciát minimalizáló hipotézisen alapuló eljárás.

A módszer az alábbi h i p o t é z i s e n alapul:

> Akkor tartja "jónak" az $X=(\xi_{ij})$ előrebecslést, ha - természetesen az (1) egyenletrendszer kielégitése mellett - ha az X táblának az A táblához viszonyitott "távolsága" minimális, azaz ha a
>
> $$\chi(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\xi_{ij}-\alpha_{ij})^2}{\alpha_{ij}} \tag{14}$$
>
> függvény értéke minimális.

A (14) függvényt még az alábbi formába is irhatjuk:

$$\chi(X)=\sum_{i,j}\frac{1}{\alpha_{ij}}\xi_{ij}^2-1. \tag{15}$$

A $\chi(X)$ függvény (15) formája "sugallja", hogy a hipotézist interdiszciplináris elven, az elektromos hálózatok analógiáját követve is feltehetjük. Nevezetesen, ha az α_{ij} jelöli az i és j pontok közötti "vezetőképességet" akkor ξ_{ij} értéket, "árammennyiségnek" feltételezve (15) éppen a végzett munkát jelenti.

A (14) minimalizálásából azonnal látszik, ha $\alpha_{ij}=0$ akkor $\xi_{ij}=0$ kell, hogy legyen. Igy azon (i,j) éleket (cellákat) letiltva ahol $\alpha_{ij}=0$, elég csak az $\alpha_{ij}>0$ esettel foglalkozni.

Akár az elektromos analógiát követve, és használva az elektromos hálózatok elméletét, akár a modellt mint kvadratikus matematikai programozási feladatot tekintve a (14) célfüggvény akkor és csak akkor optimális az X^* helyen, ha a

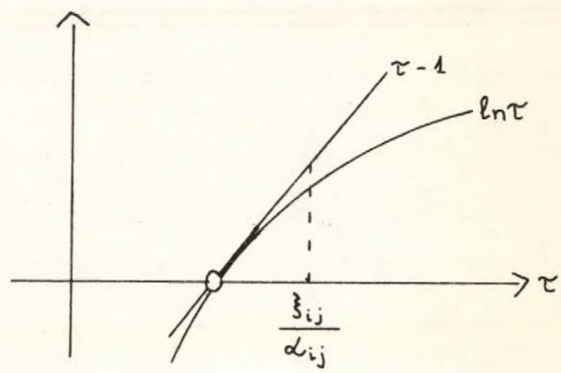
$$\xi_{ij}^{*} = \alpha_{ij} (\mu_i + \nu_j)$$

egyensulyi (optimalitási) kritérium teljesül. Ahol μ_i, ν_j számokat "potenciálok"-nak nevezik. Innen a módszer gyakori másik elnevezése: a potenciálok módszere.

A megoldásra Friedlander [36] javasol egy computeren jó hatásfokunak bizonyuló eljárást.

Nem célom a potenciál módszer részletes taglalása, csak egy apró észrevételt szeretnék tenni a RAS és a potenciál módszer kapcsolatára, amely ugy gondolom hasznos ahhoz a vitához, amely a RAS kontra potenciál ellenzői-követői közt fennáll.

A $\ln \tau$ függvény $\tau = 1$ helyen vett első foku közelitése $\tau - 1$. És ez a közelités $\tau = 1$ helyhez közeli helyeken "jó" közelités



Ezt a "közelitést" a $\rho(X)$ függvényre tagonként elvégezve kapjuk, hogy:

$$\rho(X) = \sum_{i,j} \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} \approx \sum_{ij} \xi_{ij} \left(\frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} - 1 \right) = \sum_{i,j} \frac{(\xi_{ij} - \alpha_{ij})^2}{\alpha_{ij}} = \chi(X).$$

13.§. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS ALKALMAZÁSA A SOROZATGYÁRTÁSI MODELL EGY MEGOLDÁSÁRA

Ebben a §-ban egy algoritmust adunk a sorozatgyártási modell megoldására. A sorozatgyártási modellt mint egy speciális geometriai programozási primál feladatot tekintjük. Ennek duálisa egy nem-lineáris szállitási feladatot ad. A geometriai programozás dualitási tételét használva az optimális megoldásra egy optimalitási kritériumot kapunk. Majd megmutatjuk, hogy a szállitási feladatra közismert "magyar módszert" egy kevés módositással alkalmazni lehet a duálisként kapott nemlineáris szállitási feladatra is, s igy egy jó hatásfokunak bizonyuló algoritmust kapunk eredeti feladatunkra.

1. Modul tervezési modell. Sorozatgyártási modell. Az alábbiakban először a modul tervezési modellt ismertetjük. Ez egy integer programozási feladatot ad, majd ezen modell folytonos változata adja a sorozatgyártási modellt. A későbbiekben a folytonos változatra adunk egy algoritmust, azonban mind a történeti hüség, mind az érthetőség kedvéért célszerü a sorozatgyártási modellt megelőzően a modul tervezési modellt bemutatni.

Modul tervezési modell /modular design/: Jelöljenek $A_1, A_2, \dots A_m$ alkatrész tipusokat és $B_1, B_2, \dots B_n$ berendezéseket, amelyeket az alkatrészekből lehet összeszerelni. Az $\alpha_{ij} \geqq 0$ egész szám jelenti azt, hogy a B_j berendezés hány darab A_i tipusu alkatrészt igényel.

A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:

	B_1	...	B_j	...	B_n
A_1	α_{11}	...	α_{1j}	...	α_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
A_i	α_{i1}	...	α_{ij}	...	α_{in}
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
A_m	α_{m1}	...	α_{mj}	...	α_{mn}

Egy egységcsomagot akarunk összeállitani az alkatrészekből és egy utasitást a berendezést összeszerelők számára. Az egységcsomag megadásához egy $x=(\xi_1,\dots \xi_m)>0$ egészértékü koordinátáju vektort keresünk, ahol $\xi_i>0$ egész szám mutatja, hogy az A_i alkatrészből hány darabot tartalmaz. Az utasitáshoz egy $y=(\eta_1,\dots \eta_n)>0$ egészértékü vektort keresünk, ahol $\eta_j>0$ egész szám mutatja, hogy hány darab csomagból szerelhető össze a B_j berendezés.

Nyilvánvalóan fenn kell, hogy álljon:

$$\xi_i\eta_j \geqq \alpha_{ij} \qquad (1)$$

Legyen adott $\gamma_i>0$ $(i=1,\dots, m)$ az A_i alkatrész ára. /Feltehető, hogy egész/. Ekkor a csomag ára: $\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\xi_i$

Jelentse a $\pi_j>0$ szám $(j=1,\dots, n)$ a B_j berendezés előfordulási számát. Ekkor a vásárolt csomagok száma: $\sum_{j=1}^{n}\pi_j\eta_j$.

Az összes kifizetés:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\xi_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\eta_j\right), \qquad (2)$$

és célunk, hogy ezt minimalizáljuk.

Sorozatgyártási modell. Jelöljenek most $A_1, A_2, \dots A_m$ gyártási folyamatokat, és $B_1, B_2, \dots B_n$ objektumokat, amelyek a gyártási folyamatokkal létrehozhatók. Az $\alpha_{ij} \geqq 0$ szám azt az időszükségletet jelenti, amennyi ideig az egységnyi intenzitásu A_i folyamatot üzemeltetni kell, hogy a B_j objektumhoz szükséges terméket előállitsa. A $\gamma_i > 0$ szám az A_i folyamat egységnyi intenzitáson történő üzemeltetésének költségét jelöli. A $\pi_j > 0$ szám$(j=1, \dots n)$jelölje az igényt a B_j objektumból. Feladatunk megadni a gyártási folyamatokra egy $X=(\xi_1, \dots \xi_m) > 0$ intenzitási előirást és egy $y=(\eta_1, \dots \eta_n) > 0$időpolitikát, amelyek alatt a következőket értjük: előirjuk, hogy az A_i termelési folyamat ξ_i intenzitáson müködjön $(i=1, \dots m)$ és ekkor a B_j objektum előállitásához szükséges müködtetési idő η_j legyen.

Nyilvánvaló ahhoz, hogy a termelési folyamat müködjön, fenn kell, hogy álljon a

$$\xi_i \eta_j \geqq \alpha_{ij} \tag{1*}$$

egyenlőtlenség minden i, j esetben.

Az $X=(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m)$intenzitásu gyártási folyamatrendszer egy időegységre eső összköltsége: $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \xi_i$

Az összes objektum előállitásának időszükséglete: $\sum_{j=1}^{n} \pi_j \eta_j$.

Igy az objektumok előállitásához szükséges összes költség:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \xi_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \pi_j \eta_j \right) \tag{2*}$$

A modellünk tehát olyan $\xi_i > 0$, $\eta_j > 0$ számok megkeresése, melyre (1^*) feltételek teljesülnek és a (2^*) függvényérték minimális.

Általában a sorozatgyártás üzemeltetési idejére a

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \, \eta_j \leqq \varkappa$$

korlátozó feltételt is megadják /adott $\varkappa$-val/, ez azonban egyszerüen látható, hogy modellünkre ujabb kikötést nem jelent, csak az η_j értékekre ir elő normális faktort.

Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $\sum_i \alpha_{ij} > 0$, és $\sum_j \alpha_{ij} > 0$, mert különben az a sor vagy oszlop, ahol ez nem teljesül, elhagyható lenne.

Ebben a folytonos változatokat feltételező esetben feltehetjük, hogy $\gamma_i = 1, (i = 1, 2, \ldots m)$ és $\pi_j = 1, (j = 1, 2, \ldots n)$. Ugyanis a $\hat{\xi}_i = \gamma_i \xi_i$, $\hat{\eta}_j = \pi_j \eta_j$, valamint az $\hat{\alpha}_{ij} = \gamma_i \alpha_{ij} \pi_j$ helyettesitéssel a feladat ilyen formába megy át.

A feladat első leirását Evans [31] és egy megoldását Evans [32] adta. Már Charnes-Kirby [12] észrevették, hogy ez a probléma egy geometriai programozási feladat, azonban ennek lehetőségeit ők nem használták ki, és a feladatot áttranszformálva, mint szeparábilis konvex programozási feladatot oldják meg. Passy [55] a geometriai programozás dualitási tételét használva javasol egy algoritmust, ez azonban eltér az általunk javasolttól. Mitroff [52] és Rutenberg-Shaftel [68] a modellre néhány konkrét alkalmazási területet mutat be. Az egészértékü modellt a $\gamma_i = 1$, $\pi_j = 1$ speciális esetben tárgyalja Shaftel [70] alkalmazva Balas egy a $0-1$ programozásra kidolgozott enumerációs technikáját.

2. A feladat mint geometriai programozási probléma. A sorozatgyártási modell a következő matematikai programozási feladatot adja:

Adott $\alpha_{ij} \geqq 0$ $(i=1,2,\dots m;\ j=1,2,\dots n)$ számok esetén keresendők azon. ξ_i, $(i=1,2,\dots m)$ és η_j, $(j=1,2,\dots n)$ számok, melyekre a

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_i > 0, & (i=1,2,\dots m), \\ \eta_j > 0, & (j=1,2,\dots n), \\ \xi_i \eta_j \geqq \alpha_{ij}, & (i=1,2,\dots m;\ j=1,2,\dots n) \end{array}\right\} \quad (3)$$

feltételek teljesülnek, és a

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j\right) \quad (4)$$

célfüggvényérték minimális.

A továbbiakban a triviális sorok, illetve oszlopok kiszűrése érdekében feltesszük, hogy $\sum_i \alpha_{ij} > 0,\ (j=1,2,\dots n)$ és $\sum_j \alpha_{ij} > 0,\ (i=1,2,\dots m)$.

A feladat egy speciális szerkezetü geometriai programozási feladat, a nem-lineáris hozzárendelési feladatok egyik tipusa. A feladatot egy ujabb változó bevezetésével az alábbi formába irhatjuk.

Feltételek:
$$\left.\begin{array}{ll} \xi_i \eta_j \omega \geqq \alpha_{ij}, & (i=1,\dots m;\ j=1,\dots n), \\ \xi_i > 0, & (i=1,2,\dots m), \\ \eta_j > 0, & (j=1,2,\dots n), \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_i \leqq 1, & \\ \sum_{j=1}^{n} \eta_j \leqq 1. & \end{array}\right\} \quad (5)$$

És minimalizálandó ω értéke.

Ahhoz, hogy a feladat duál párjához jussunk, a feladatot exponenciális formába irjuk át. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\xi_i = e^{\mu_i}$$

$$\eta_j = e^{y_j}$$

$$\lambda = -\ln \omega$$

Jelölje Q azon (i, j) indexpárok halmazát, ahol $\alpha_{ij} > 0$, azaz

$$Q = \{(i,j) \mid \alpha_{ij} > 0\}$$

Ezen jelölésekkel feladatunk a következő Primál Geometriai programozási feladat:

Feltételek:

$$e^{-\mu_i - y_j + \lambda + \ln \alpha_{ij}} \leq 1, \quad (i,j) \in Q,$$

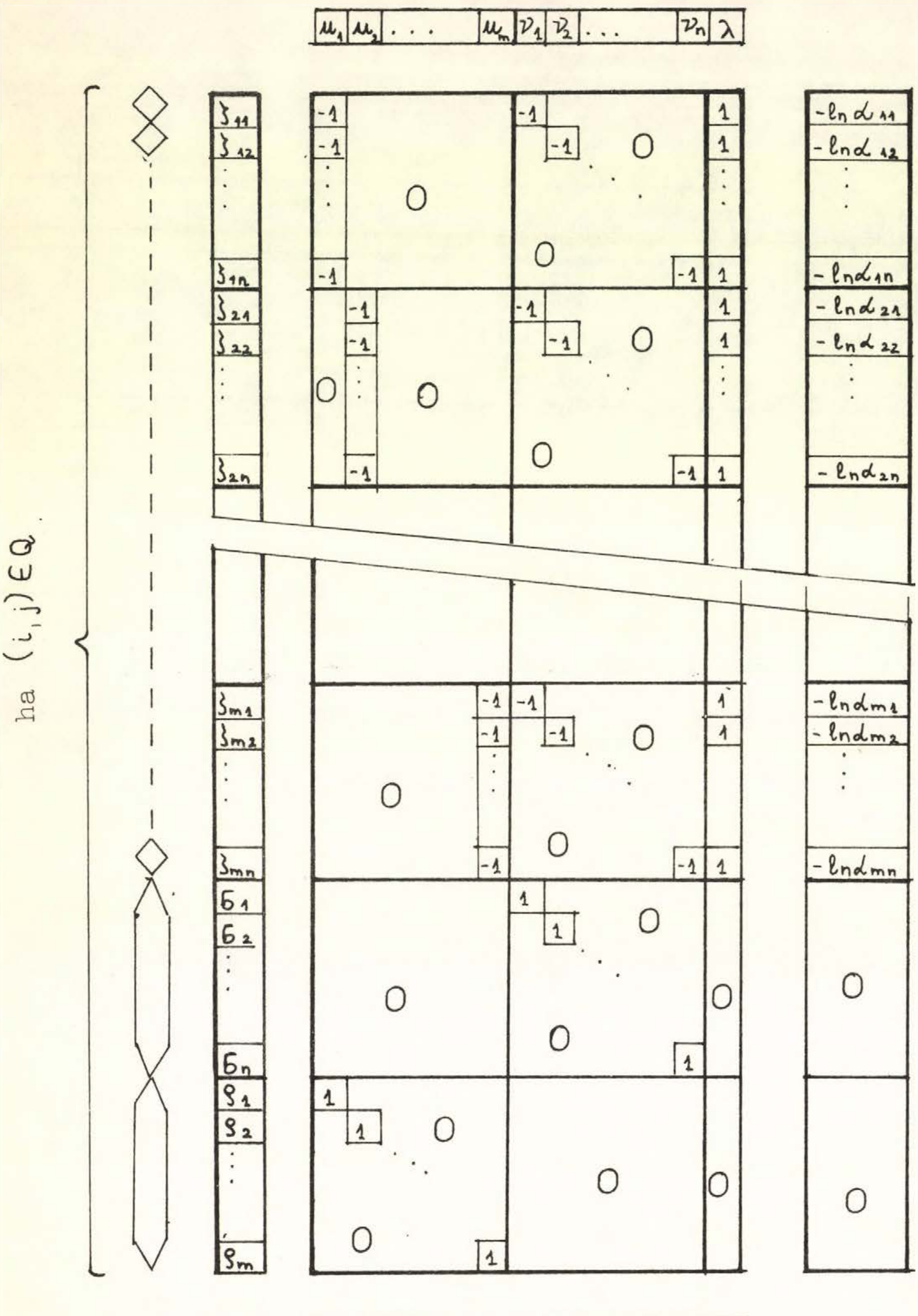
$$\sum_{i=1}^{m} e^{\mu_i} \leq 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} e^{y_j} \leq 1,$$

És maximalizálandó λ értéke.

A feladat együtthatóit az alábbi táblázatba foglaljuk össze:

Együttható táblázat:



Ennek Duál Geometriai programozási feladat párja:

Feltételek:

$$\zeta_{ij} \geqq 0,$$

$$\sum_{j|(i,j)\in Q} \zeta_{ij} = \varrho_i,$$

$$\sum_{i|(i,j)\in Q} \zeta_{ij} = \sigma_j,$$

$$\sum_{(i,j)\in Q} \zeta_{ij} = 1.$$

És minimalizálandó a

$$\sum_{(i,j)\in Q} \zeta_{ij}(-\ln\alpha_{ij}) + \ln \prod_{j|(i,j)\in Q} \sigma_j^{\sigma_j} + \ln \prod_{i|(i,j)\in Q} \varrho_i^{\varrho_i}$$

célfüggvény értéke.

Ezen geometriai programozási feladat kanonikus /mivel a $\sum_i \alpha_{ij} > 0$ és a $\sum_j \alpha_{ij} > 0$ feltételezést tettünk/. A duál feltételi halmaz korlátos. Igy a kanonikus feladat dualitási tételét és a geometriai programozás alapvető lemmáját használva (1.§. és 5.§.) kapjuk, hogy a feladat párnak van optimális megoldása és ezekre az alábbi optimalitási kritérium teljesül:

$$\left.\begin{aligned} \left(e^{-\mu_i^* - \nu_j^* + \lambda^* + \ln\alpha_{ij}}\right)\zeta_{ij}^* &= \zeta_{ij}^*, \quad (i,j)\in Q, \\ e^{\mu_i^*} &= \varrho_i^*, \quad (i=1,2,\dots m), \\ e^{\nu_j^*} &= \sigma_j^*, \quad (j=1,2,\dots n). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Vagyis (6)-ban az eredeti jelölésre visszatérve kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} &(\xi_i^* \eta_j^* \omega^* - \alpha_{ij})\zeta_{ij}^* = 0, \quad (i,j)\in Q, \\ &\xi_i^* = \sum_{j|(i,j)\in Q} \zeta_{ij}^*, \quad (i=1,2,\dots m), \\ &\eta_j^* = \sum_{i|(i,j)\in Q} \zeta_{ij}, \quad (j=1,2,\dots n). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ezen (7)-es optimalitási feltételeken egyszerüsithetünk ugy, hogy az optimalitási kritériumot minden (i, j)-re előirjuk oly módon, hogy $\alpha_{ij} = 0$ esetén $\zeta_{ij} = 0$ kell, hogy teljesüljön.

Igy most feladatunk olyan $\xi_i, \eta_j, \omega, \zeta_{ij}$ számok megadása, melyekre:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i \eta_j \omega \geqq \alpha_{ij}, \\ &\xi_i > 0, \\ &\eta_j > 0, \\ &\sum_{i=1}^m \xi_i = 1, \\ &\sum_{j=1}^n \eta_j = 1, \\ &\zeta_{ij} \geqq 0, \\ &\sum_{i=1}^m \zeta_{ij} = \eta_j, \\ &\sum_{j=1}^n \zeta_{ij} = \xi_i, \\ \text{és} \quad &\zeta_{ij} = 0, \text{ ha } \xi_i \eta_j \omega > \alpha_{ij}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Megjegyezzük, hogy a $\sum_i \zeta_{ij} = \eta_j$ és $\sum_j \zeta_{ij} = \xi_i$ kritériumból azonnal adódik, hogy eredeti feladatunknak <u>egy és csak egy optimális megoldása</u> van.

3. Algoritmus. Az algoritmus abból áll, hogy kiindulunk egy lehetséges primálmegoldásból, és megkisérelünk olyan duál lehetséges megoldást keresni, amely az egyensulyi feltételeket is teljesiti (8). Amennyiben ilyet nem találunk, jobb primálmegoldást tudunk adni. Az algoritmust egy tételbe foglaljuk össze és a tételre adandó bizonyitás konstruktiv volta adja az iterativ eljárást. A tétel bizonyitása során az u.n. kereslet-kinálat modellt fogjuk használni, amely a Kőnig-Hall modell egy általánositása. (C. Függelék)

TÉTEL: Legyenek ξ_i, η_j, ω a primál lehetséges megoldásai. Ekkor (I) vagy meg tudunk adni olyan ζ_{ij} duálfeltételt kielégitő változókat, melyekre az egyensulyi feltétel is teljesül, (II) vagy elő tudunk állitani olyan $\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_j, \hat{\omega}$ lehetséges primál megoldást, hogy $\hat{\omega} < \omega$.

Bizonyitás: Készitsük el a kereslet-kinálat modellt a következőképpen. Legyen ξ_i az i-dik hely kinálata, η_j a j-dik hely kereslete. Legyen megengedett a szállitás az i helyről a j helyre, ha: $\xi_i \eta_j \omega = \alpha_{ij}$ (Nem megengedett, ha $\xi_i \eta_j > \alpha_{ij}$).

(I) Ha a kereslet-kinálat kielégithető, akkor jelöljünk ζ_{ij} -vel az i-ből j-be szállitott mennyiségeket. Ez a duál feladat feltételét kielégiti és kielégiti az egyensulyi feltételeket is (8).

Igy ezen $\xi_i, \eta_j, \omega, \zeta_{ij}$ értékek optimális megoldáspárok.

(II) Tekintsük most azt az esetet, amikor a kereslet-kinálat modell nem kielégithető. Jelölje $I = \{1, 2, \ldots i, \ldots m\}$ a termelőhelyek index halmazát és $J = \{1, 2, \ldots j, \ldots n\}$ a fogyasztóhelyek index halmazát. Tegyük fel, hogy a ξ_i, η_j, ω primál lehetséges megoldások olyanok, hogy a qualifikációs mátrixban minden sorban és minden oszlopban van megengedett cella. Mivel a kereslet-kinálat feladat nem kielégithető, azért a K ő n i g - H a l l tétel szerint van olyan $P\subset I$ és $R\subset J$ index halmaz, hogy P-beli helyről csak R-beli helyre lehet szállitani és

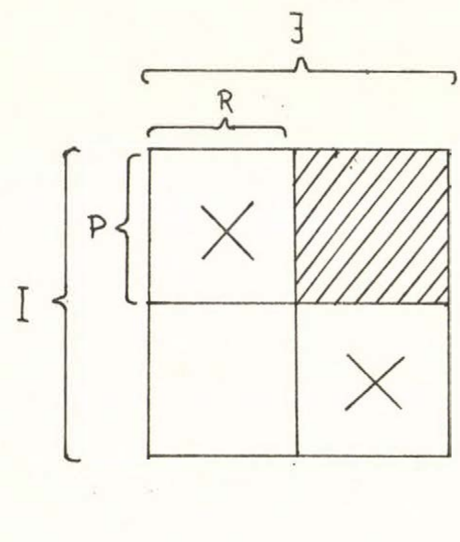
$$\sum_{i\in P} \xi_i > \sum_{j\in R} \eta_j$$

/Megjegyezzük, hogy a Kőnig-Hall tételnek a Ford-Fulkerson max.folyam-min. vágás technikán alapuló bizonyitása konstruktivan elő is állitja ezeket a P és R indexhalmazokat, lásd C. Függelék).
Jelöljük a továbbiakban:

$$\sum_{i\in P} \xi_i = p, \quad \sum_{j\in R} \eta_j = r \qquad (\text{igy } p>r).$$

Mivel feltettük, hogy minden sorban és minden oszlopban van megengedett cella, ezért $p \neq 1$ és $r \neq 0$.

A Ford-Fulkerson technikával kapottakat az alábbi ábrán szemléltetjük:



Ha $i \in P$ és $j \notin R$ akkor nincs szállitási lehetőség, azaz itt $\xi_i \eta_j \omega > \alpha_{ij}$. Ha $i \notin P$ és $j \in R$ akkor ugyan lehet, hogy van szállitási lehetőség, de ténylegesen nem szállitunk. Minden ξ_i mennyiség $i \notin P$ elszállitásra kerül és minden η_j, $j \in R$ kereslet kielégitődik. Ebből adódik, hogy az ábrán X jellel jelölt qualifikációs almátrixok olyan tulajdonságuak, hogy minden sorban és minden oszlopban van megengedett cella.

Jelöljük

$$\delta = \min_{\substack{i \in P \\ j \notin R}} \frac{\xi_i \eta_j \omega}{\alpha_{ij}} .$$

Nyilván $\delta > 1$.
(Ha $\alpha_{ij} = 0$, akkor a $\dfrac{\xi_i \eta_j \omega}{\alpha_{ij}}$ értéket ∞-nek tekintjük.)

A következőkben uj primál megoldást konstruálunk.

Legyen $1 \leqq \varepsilon \leqq \delta$ egyenlőre tetszőleges szám.

Legyenek:

$$\bar{\xi}_i = \frac{\xi_i}{\varepsilon} \quad, \text{ ha } i \in P,$$

$$\bar{\xi}_i = \xi_i \quad, \text{ ha } i \notin P,$$

$$\bar{\eta}_j = \eta_j \varepsilon \quad, \text{ ha } j \in R,$$

$$\bar{\eta}_j = \eta_j \quad, \text{ ha } j \notin R.$$

Megmutatjuk, hogy a $\bar{\xi}_i \bar{\eta}_j \omega \geqq \alpha_{ij}$ egyenlőtlenség teljesül.

Ha $i \in P$ és $j \in R$ akkor $\bar{\xi}_i \bar{\eta}_j \omega = \frac{\xi_i}{\varepsilon} \eta_j \varepsilon \omega = \xi_i \eta_j \omega \geqq \alpha_{ij}$.

Ha $i \in P$ és $j \notin R$ akkor $\bar{\xi}_i \bar{\eta}_j \omega = \frac{\xi_i}{\varepsilon} \eta_j \omega \geqq \alpha_{ij}$. /$\varepsilon$ definiciója miatt; jobb oldal/

Ha $i \notin P$ és $j \in R$ akkor $\bar{\xi}_i \bar{\eta}_j \omega = \xi_i \eta_j \varepsilon \omega \geqq \alpha_{ij}$. /$\varepsilon$ definiciója miatt; bal oldal/

$(\bar{\xi}_i \bar{\eta}_j > \alpha_{ij}$, ha $1 < \varepsilon)$

Ha $i \notin P$ és $j \notin R$ akkor $\bar{\xi}_i \bar{\eta}_j \omega = \xi_i \eta_j \omega \geqq \alpha_{ij}$.

Legyen most már:

$$\hat{\xi}_i = \frac{\bar{\xi}_i}{\sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i}, \qquad i \in I,$$

$$\hat{\eta}_j = \frac{\bar{\eta}_j}{\sum_{j=1}^{n} \bar{\eta}_j}, \qquad j \in J,$$

$$\hat{\omega} = \omega \sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i \sum_{j=1}^{n} \bar{\eta}_j .$$

Ezen $\hat{\xi}_i$, $\hat{\eta}_j$, $\hat{\omega}$ számok kielégitik a primál feltételt.

Vizsgáljuk meg a célfüggvényértékének csökkenését (h):

$$h=\omega-\hat{\omega}=\omega-\omega\sum_{i=1}^{m}\bar{\xi}_i\sum_{j=1}^{n}\bar{\eta}_j=\omega\left(1-\sum_{i=1}^{m}\bar{\xi}_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\bar{\eta}_j\right)=$$

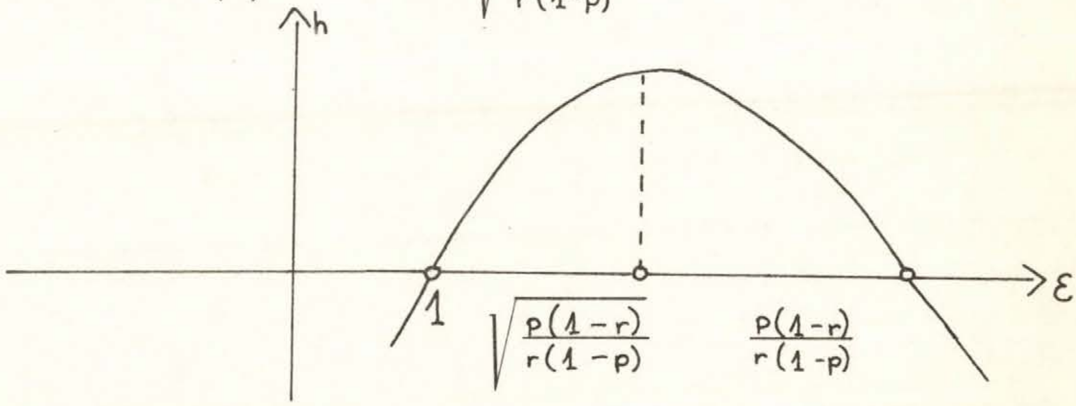
$$=\omega\left[1-\left(\frac{p}{\varepsilon}+1-p\right)(r\varepsilon+1-r)\right]=$$

$$=\omega\left(rp\varepsilon-r\varepsilon+p+r-2rp+\frac{rp}{\varepsilon}-\frac{p}{\varepsilon}\right)= \qquad (9)$$

$$=\omega\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\left[p(1-r)-\varepsilon r(1-p)\right]. \qquad (10)$$

A függvény zérushelyei (10)-ből: $\varepsilon=1$ és $\varepsilon=\frac{p(1-r)}{r(1-p)}$,

és maximumhelye (9)-ből: $\varepsilon=\sqrt{\frac{p(1-r)}{r(1-p)}}$



A célfüggvény változásának vizsgálatából leszürhetjük, hogy ε értékét az $\varepsilon=\min\left(\delta,\sqrt{\frac{p(1-r)}{r(1-p)}}\right)$

értéknek kell választani. Mivel $\delta>1$ és $p>r$, igy $\varepsilon>1$ és ezért

$\hat{\omega}<\omega$. ∎

Az eljárás konvergenciáját nem sikerült még exaktan bizonyitani, de számos numerikus példát computeren lefuttatva az algoritmus kevés lépésszámu interáció után pontos optimumot szolgáltatott. Az algoritmust könnyü computerre programozni, hiszen teljesen analóg a szállitási feladat "magyar módszer" algoritmusával, sőt az eljárás gerincét, ugyanugy mint a szállitási feladatnál a Kőnig-Hall modell megoldása adja.

A. Függelék

GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉG

Az alábbi tételben kimondott egyenlőtlenséget nevezzük *geometriai egyenlőtlenségnek*.

A geometriai egyenlőtlenség a sulyozott számtani-mértani közép egy általánosabb alakja. (Hardy-Littlewood-Pólya [42]). A geometriai programozásban kulcsfontosságu szerepe van. S ugy gondoljuk épp ezen szerepe miatt célszerü a teljességre való törekvés céljából egy bizonyitását is adni.

TÉTEL: Ha α_i, β_i $(i=1,2,\dots,m)$ tetszőleges nem-negativ számok, akkor

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i}\right)^{\sum_{i=1}^{m}\beta_i} \geqq \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i}$$

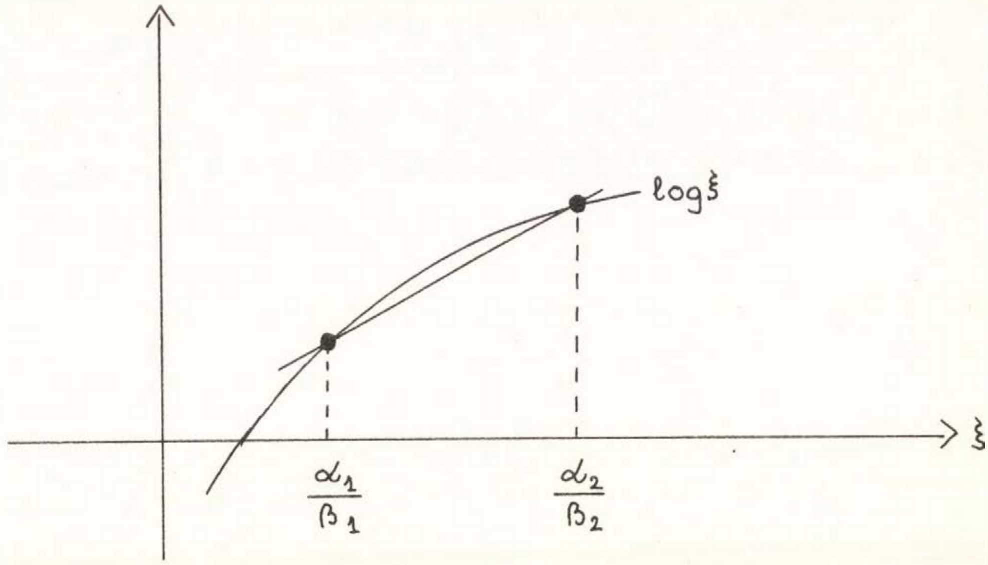
ahol $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = 1$, bármely α, β esetén.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$\alpha_i \sum_{i=1}^{m}\beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^{m}\alpha_i$, minden $i=1,2,\dots,m$ esetén.

Bizonyitás: Először az $m=2$ esetre igazoljuk. Feltehetjük, hogy $\alpha_1>0, \alpha_2>0$, $\beta_1>0$, $\beta_2>0$, mert ellenkező esetben az egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

A logaritmus függvény konkávitásából adódik, hogy



$$\log\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)\geqq\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\log\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\log\frac{\alpha_2}{\beta_2}\,.$$

Ebből a logaritmus függvény monotonitása miatt azt kapjuk, hogy

$$\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2}\geqq\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\,.$$

azaz

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\right)^{(\beta_1+\beta_2)}\geqq\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}\,,$$

tehát ha

$$\alpha_1\beta_2=\alpha_2\beta_1\,.$$

Mindkét oldalhoz $\alpha_1 \beta_1$ illetve $\alpha_2 \beta_2$ értékeket hozzáadva kapjuk, hogy:

$$\alpha_1(\beta_1+\beta_2)=\beta_1(\alpha_1+\alpha_2),$$

és

$$\alpha_2(\beta_1+\beta_2)=\beta_2(\alpha_1+\alpha_2),$$

vagyis összefoglalva:

$$\alpha_i(\beta_1+\beta_2)=\beta_i(\alpha_1+\alpha_2), \qquad (i=1,2).$$

Tegyük fel most, hogy $(m-1)$ -re igaz az egyenlőtlenség, belátjuk, hogy akkor m-re is igaz.

Az indukciós feltevés és az $m=2$ eset felhasználásával a következőket kapjuk:

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+(\alpha_{m-1}+\alpha_m)}{\beta_1+\beta_2+\ldots+(\beta_{m-1}+\beta_m)}\right)^{(\beta_1+\beta_2+\ldots+(\beta_{m-1}+\beta_m))} \geqq$$

$$\geqq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\cdots\left(\frac{\alpha_{m-2}}{\beta_{m-2}}\right)^{\beta_{m-2}}\cdot\left(\frac{\alpha_{m-1}+\alpha_m}{\beta_{m-1}+\beta_m}\right)^{(\beta_{m-1}+\beta_m)} \geqq$$

$$\geqq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\cdots\left(\frac{\alpha_{m-2}}{\beta_{m-2}}\right)^{\beta_{m-2}}\cdot\left(\frac{\alpha_{m-1}}{\beta_{m-1}}\right)^{\beta_{m-1}}\cdot\left(\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right)^{\beta_m}.$$

Az indukciós lépés, valamint az $m=2$ eset vizsgálatából megállapithatjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha:

egyrészt az $m-1$ -es indukciós feltevésből

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \qquad (i=1,2,\dots,m-2) \text{ és} \\ \\ (\alpha_{m-1}+\alpha_m) \sum_{i=1}^{m} \beta_i = (\beta_{m-1}+\beta_m) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i , \end{array}\right\} \qquad (1)$$

másrészt az $m=2$ esetből

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{m-1}(\beta_{m-1}+\beta_m) = \beta_{m-1}(\alpha_{m-1}+\alpha_m) \text{ és} \\ \\ \alpha_m(\beta_{m-1}+\beta_m) = \beta_m(\alpha_{m-1}+\alpha_m). \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Az (1) és (2) eseteket egybefoglalva; egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\alpha_i \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \text{ minden } i=1,2,\dots,m \text{ esetben.} \blacksquare$$

A geometriai egyenlőtlenségből egyszerüen nyerhető a H ö l d e r egyenlőtlenség, amelyet tárgyalásunkban (3.§.) az alábbi tételben kimondott formában használjuk.

TÉTEL: Ha α_i, β_i, $(i=1,2,\dots m)$ tetszőleges nem-negativ számok és $0 \leqq \lambda \leqq 1$ tetszőleges szám, akkor

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{\lambda} \beta_i^{1-\lambda} \leqq \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)^{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i\right)^{1-\lambda} .$$

Egyenlőség, a triviális $\lambda = 0$, illetve a $\lambda = 1$ eseteken kivül, akkor és csak akkor, ha az

$$\alpha_i \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

egyenlőség teljesül minden i-re.

B. Függelék

FARKAS TÉTEL

A geometriai programozás tárgyalásánál a gyenge dualitási tétel bizonyitásánál is és a kanonikus feladat dualitási tételének bizonyitásakor is felhasználjuk a konvex függvényekre vonatkozó általános Farkas tételt. Ezért ugy gondoljuk célszerü itt a függelékben idézni ezt (S t o e r - W i t z g a l l [75] pp. 268).

Slater-féle regularitási feltétel: Legyenek a $g_1, \dots g_n$ konvex függvények értelmezve a $C \subset R^{(m)}$ konvex halmazon. Tekintsük a következő feltételi rendszert:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x) \leqq 0 \\ \vdots \\ g_n(x) \leqq 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Jelöljük: $C_g = \{ x \mid x \in C$ és $g_j(x) \leqq 0, \ (j = 1, \dots n) \}$.

Jelölje C^I a C halmaz belső pontjainak összességét.

D e f i n i c i ó : Az (1) egyenlőtlenségrendszert S l a - t e r r e g u l á r i s n a k nevezzük, ha létezik olyan x^* pont, melyre a következők teljesülnek:

(i) $x^* \in C_g \cap C^I$.

(ii) $g_j(x^*) < 0$, minden nem-lineáris $g_j(x)$ függvényre.

Farkas tétel: Legyenek a $g_1, \dots, g_n$ és az f függvények értelmezve a $C \subset R^{(m)}$ konvex halmazon.

Tekintsük a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} g_1(x) \leqq 0, \\ \vdots \\ g_n(x) \leqq 0, \end{array}\right\} (1) \\ \\ f(x) < 0. \end{array}\right\} (2)$$

TÉTEL: Tegyük fel, hogy az (1) egyenlőtlenségrendszer S l a t e r reguláris. Ekkor a (2) egyenlőtlenségrendszer akkor és csak akkor nem oldható meg, ha létezik olyan $y=(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) \geqq 0$ nem-negativ vektor, hogy a

$$f(x)+\sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j(x) \geqq 0$$

egyenlőtlenség teljesül minden $x \in C$ vektorra.

C. Függelék

KŐNIG-HALL TÉTEL

A geometriai programozás alkalmazásaként bemutatott modellek, mind a RAS modell, mind a "standardizálási" modell felhasználja az u.n. általános Kőnig-Hall tételt, illetve a Kőnig-Hall modell megoldására szolgáló eljárást. Ez, az itt tárgyalásra kerülő általánositott forma az eredeti K ő n i g [48] - H a l l [40] modellnek egy kézenfekvő kiterjesztése. Tárgyalása teljesen analóg az eredeti formának a Ford-Fulkerson konstruktiv technikán alapuló tárgyalásához, (F o r d - F u l k e r s o n [34] , K l a f s z k y [44]) azonban az irodalomban nem találkoztam a tételnek ilyen általánosabb értelemben kimondott formájával és bizonyitásával azért célszerünek láttam ezt itt a függelékben ismertetni.

Kőnig-Hall modell: Jelöljenek $I_1, I_2, \ldots I_m$ személyeket, a $J_1, J_2, \ldots J_n$ pedig bankokat. Jelöljön Q egy $m \times n$ -es ugynevezett "qualifikációs mátrixot", amelynek elemei 0 vagy 1 lehetnek. A Q mátrix (i, j) eleme 1, ha az I_i személy a J_j bankot számára megbizhatónak tartja. Rendelkezzenek a személyek rendre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ nem-negativ mennyiségü pénzzel, amelyet a számukra megbizható bankba akarnak elhelyezni.

Jelölje $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ nem-negativ egész szám a bankok befogadóképességét. A probléma a következő:

a./ Elhelyezhető-e a személyek összes pénze, a korlátozott befogadóképességü bankokba, ugy, hogy mindenki a számára megbizható bankba helyezhet el pénzt (ez lehet több bank is)?

b./ Hogyan lehet a lehető legtöbb pénzt elhelyezni?

A probléma a./ részére az alábbiakban adandó tétel ad választ, mig a b./ részre a tételre adott konstruktiv bizonyitás.

A tárgyalás egyszerüsitése érdekében a következő jelöléseket vezetjük be.

Jelölje I a személyek halmazát: $I = \{I_1, I_2, \ldots I_m\}$, és $J = \{J_1, J_2, \ldots J_n\}$ a bankok halmazát

Legyen $P \subset I$ esetén $\|P\|_\alpha = \sum_{I_i \in P} \alpha_i$ és $R \subset J$ esetén $\|R\|_\beta = \sum_{J_j \in R} \beta_i$

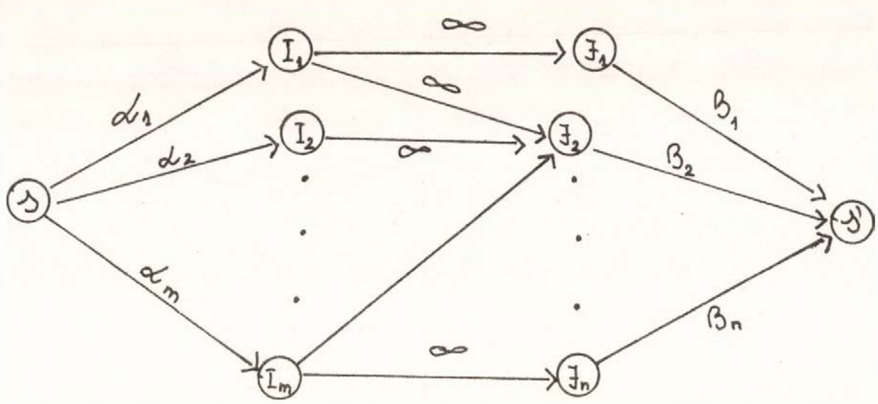
Jelölje $J(P)$ a P által "együttesen" qualifikált bankok halmazát, azaz $J_j \in J(P)$ ha van legalább egy olyan $I_i \in P$ hogy a Q mátrix (i, j) eleme 1.

TÉTEL: Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy mindegyik α_i mennyiség elhelyezhető legyen az, hogy bármely $P \subset I$ esetén a

$$\|P\|_\alpha \leqq \|J(P)\|_\beta$$

egyenlőtlenség teljesüljön.

B i z o n y i t á s : A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségességet a Ford-Fulkerson max.folyam-min. vágás tétellel igazoljuk. Készitsük el az alábbi ábrán szemléltetett módon az s forrás pontu és s' nyelő pontu hálózatot:



Legyenek a nem-zérus kapacitásu élek:

$$k(s, I_i) = \alpha_i$$

$$k(J_j, s') = \beta_j$$

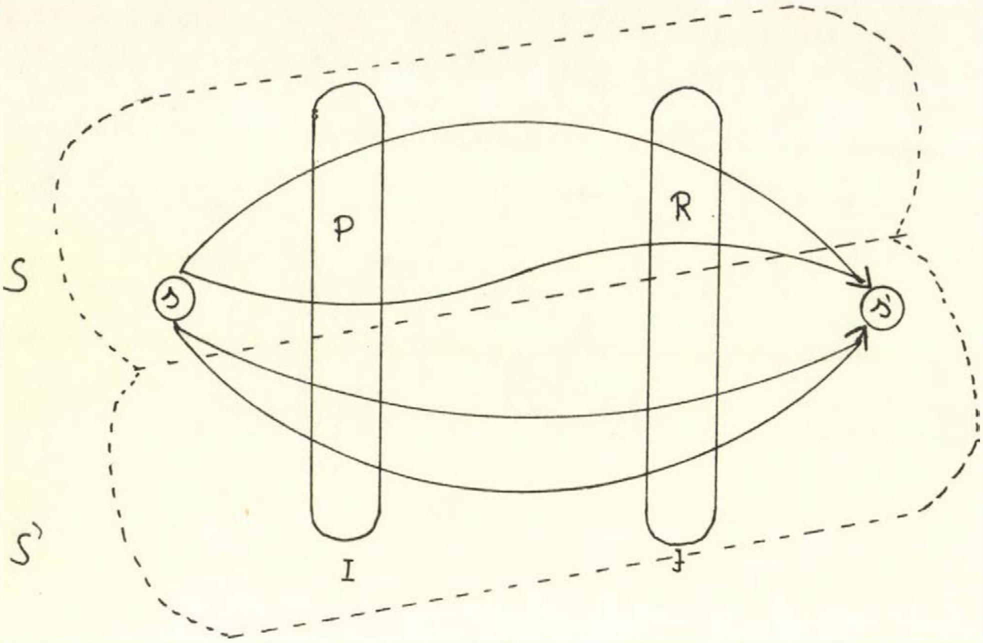
$$k(I_i, J_j) = \infty, \text{ ha } I_i \text{ qualifikált } J_j\text{-re.}$$

(Itt a ∞ szimbolumot, mint a végtelen számot csak abban az értelemben használjuk, hogy tetszőleges γ számra: (i) $\infty + \gamma = \infty$ és (ii) $\gamma < \infty$).

Jelölje f a maximális folyamot. Ha a max.folyam értéke $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ akkor a feladatot megoldottuk. ($f(I_i, J_j)$ jelöli azt a mennyiséget amennyit az I_i személy a J_j bankba elhelyez).

Ha a max.folyam értéke kisebb, mint $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy a minimális (s, s') vágás a következő:

$$S = \{ s, I_1, I_2, \ldots I_p, \quad J_1, J_2, \ldots J_r \}.$$



Abból a tényből, hogy a maximális folyam teliti a vágásbeli éleket következik, hogy:

a.) ha $I_i \in P$ és $J_j \notin R$, akkor I_i nem lehet J_j -hez qualifikálva

b.) ha $I_i \notin P$ és $J_j \in R$, akkor $f(I_i, J_j) = 0$

c.) ha $I_i \notin P$ akkor $f(s, I_i) = \alpha_i$

d.) ha $J_j \in R$ akkor $f(J_j, s') = \beta_j$

Az a./ és d./-ből adódik, hogy $J(P) = R$

Mivel a max.folyam érték és a minimális vágás érték megegyezik; kapjuk, hogy

$$k(S, S') = \sum_{I_i \notin P} \alpha_i + \sum_{J_j \in R} \beta_j < \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

Ebből

$$\|P\|_\alpha > \|J(P)\|_\beta$$

Vagyis a P halmazra a Kőnig-Hall tétel feltétele nem teljesül.∎

IRODALOMJEGYZÉK

[1] M.Avriel-D.J.Wilde, Optimal Condenser Design by Geometric Programming, I & EC Process Design and Development, 6 (1967), pp. 256-263.

[2] M.Avriel-D.J.Wilde, Stochastic Geometric Programming, (Előadás: International Symposium on Mathematical Programming-on) Princeton, N.J., (1967, August.)

[3] M.Avriel-D.J.Wilde, Fundamentals of geometric programming, (in Applications of Mathematical Programming Techniques (E.M.L. Beale ed.), American Elsevier, New York, (1970), pp. 295-316.

[4] M.Avriel-A.C.Williams, On the Primal and Dual Constaint Sets in Geometric Programming, Journal of Math. Anal. and Appl., 32 (1970), pp. 684-688.

[5] M.Avriel-A.C.Williams, Complementary Geometric Programming, SIAM J. Appl. Math. Vol. 19. No.1. (July 1970), pp. 127-141.

[6] M.Avriel-A.C.Williams, An extension of geom. progr. with appl-s in engineering optimization, J. of Engin. Math. v.5.No.3, pp. 187-194, (1971)

[7] G.Bachmann-K.H.Elster-K.Petry, Zur Problemstellung der geometrischen Optimierung, Section Mathematik, Rechentechnik und ökonomische Kybernetik 19, (1973) Heft 1, (Ilmenau). pp. 3-39.

[8] G.E.Blau-D.J.Wilde, Second order characterization of generalized polynomial programs, (Előadás: International Symposium on Mathematical Programming-on) Princeton, New Jersey, 1967.

[9] G.E.Blau-D.J.Wilde, Generalized Polynomian Progr., The Canad. J. of Chemical Engrg. v.47. (1969) pp. 317-326.

[10] П.Брегман, Доказательство сходимости метода Г.В.Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями, Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, 1967 №1, 147-156.

[11] A.Charnes-W.Cooper Optimizing engineering designs under inequality constraints, ONR Research Memorandum 64, Northwestern University Evanston, Illinois, 1962.

[12] A.Charnes-M.Kirby, Modular Design, Generalized Inverses and Convex Programming Opns.Res.13 pp. 836-847. (1965)

[13] R.J.Clasen, The Linear-Logarithmic Programming Problem, RAND Corp. Memo RM-3707-PR, (June 1963).

[14] G.B.Dantzig-S.Johnson-W.White, A Linear Programming Approach to the Chemical Equilibrium Problem, Management Sci., 5 (1958), pp. 38-43.

[15] G.B.Dantzig-J.Folkman-N.Shapiro, On the continuity of the minimum set of a continuous function, J. Math. Anal. Appl., 17 (1967), pp. 519-548.

[16] W.E.Deming-F.F.Stephan, "On a least squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known" Ann. math. Statist., 11 (1940) pp. 427-444.

[17] R.J.Duffin, Dual programs and minimum cost, Operations Res., 10 (1962), pp. 119-123.

[18] R.J.Duffin, Cost minimalization problems treated by geometric means, Operations Res., 10 (1962), pp. 668-675.

[19] R.J.Duffin, Linearizing Geometric Programs, SIAM Review, Vol. 12. No. 2. (April 1970). pp. 211-227.

[20] R.J.Duffin-E.L.Peterson, Constrained minima treated by geometric means, Westinghouse Scientific Paper, 64-158-129-P3, (1964).

[21] R.J.Duffin-E.L.Peterson, Duality theory for geometric programming, SIAM J. Appl. Math., 14 (1966), pp. 1307-1349.

[22] R.J.Duffin-E.L.Peterson, Geometric Programs Treated with Slack Variables, Applicable Analysis, 1972. Vol. 2 pp. 255-267. (1972).

[23] R.J.Duffin-E.L.Peterson, The proximity of (algebraic) geometric programming to linear programming (Short communication). Mathematical Programming No.3 (1972) pp. 250-253.

[24] R.J.Duffin-E.L.Peterson, Reversed geometric programs treated by harmonic means, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 22. No.6 (1972) pp. 531-550.

[25] R.J.Duffin-E.L.Peterson, Geometric programming with signomials, Journal of Optimization Theory and Applications Vol. 11. No.1 (1973) pp. 3-35.

[26] R.J.Duffin-E.L.Peterson-C.Zener, Geometric Programming, John Wiley, New York, 1966.

[27] R.J.Duffin-C.Zener, Optimization of engineering problems, Westinghouse Engineer, 24 (1964),154.

[28] А.Г.Дынкин-Э.В.Мовчан, Методология расчета перспективных пассажиропотоков, (A "Применение матем. методов и ЭВМ в градостроительстве" c.könyvben Київ, Будівельник, 1966.

[29] C.D.Eben-J.R.Ferron, A conjugate inequality for general means with appl-s to extremum problems, Am. Inst. of Chem. Eng. (1968) pp. 32-37.

[30] D.A.D'Esopo-B.Lefkowitz, An algorithm for computing intersonal transfers using the gravity model. Oper.Res., 1963, 11. No.6, pp. 901-907.

[31] D.H.Evans, Design by Algorythm: A Mathematical Method of Designing Standard Assemblines for Minimum Manufacturing Cost, IRE Trans. on Prod.Tech., (June 1959.) pp. 4-10.

[32] D.H.Evans, Modular Design - A Special Case in Nonlinear Programming, Opns.Res, 11, pp. 637-647 (1963).

[33] A.E.Fein, A mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs, II. Proc. Nat. Acad. Sci., 47 (1961).

[34] L.R.Ford-D.R.Fulkerson, Flow in Networks, Princeton University Press. (1962).

[35] Fratar, J.Thomas, Vehiculer Trip Distribution by Successive Approximations Traffic Quarterly pp. 53-65. (January 1954).

[36] D.Friedlander, A Technique for Estimating a Contingency Table, Given the Marginal Totals and Some Supplementary Data, Journal of the Royal Statistical Society Series A. CXXIV Pt.3. (1963) pp. 412-420.

[37] D.Gale, Theory of linear economic models, New York, McGraw-Hill, 1960.

[38] J.W.Gibbs, On the Equilibrum of Heterogenens Substances, The Scientific Papers of I. Willard Gibbs, Vol. I., (Dover Publications, 1961). Eredetiben a fenti cimen a Collected Works-ben jelent meg, Yale University Press, 1876.

[39] Glattfelder O.,-Váczi P. Néhány megjegyzés a RAS módszer elméletéhez., II. Magyar ÁKM konferencia, (Siklós 1971. okt).

[40] P.Hall, On Representatives of Subsets, J. Lond.Math. Soc. 10. (1935) pp. 26-30.

[41] M.Hamala: "Geometric programming in terms of counjugate functions" discussion paper no. 6811. Center for Op. Res. and Econometrics (Lauvain, Belgium) 1968.

[42] G.H.Hardy-J.E.Littlewood-G.Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

[43] R.C.Johnson, Optimum Design of Mechanical Elements, John Wiley, New York, 1961.

[44] Klafszky Emil, Hálózati folyamok, A Bólyai János Matematikai Társulat kiadványa, Budapest, 1969.

[45] Klafszky Emil, Geometriai Programozás, MTA Számitástechnikai Központ KÖZLEMÉNYEK 8. (1972) pp. 41-65.

[46] Klafszky Emil, Marginális értékek a geometriai programozásban, MTA Számitástechnikai Központ KÖZLEMÉNYEK 9. (1972) pp. 51-68.

[47] Klafszky Emil, Az input-output tábla előrebecsléséről, MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete KÖZLEMÉNYEK 10. (1973).

[48] D.Kőnig, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Akad. Verlagsgesellschaft. Leipzig (1936).

[49] B.T.Lieu, A Study of Some Inequalities for Nonlinear Stochastic Programming, Nonlinear Programmingban, (J.Abadie ed.), North-Holland, Amsterdam, 1967.

[50] O.L.Mangasarian-J.B.Rosen, Inequalities for Stochastic Nonlinear Programming problems, Operations Research, 12 (1964), pp. 143-154.

[51] H.D.Mills, Marginal values of matrix games and linear programs, Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1956), pp. 183-193.

[52] I.I.Mitroff, Simulating Engineering Design: A Case Study of the Inter face Between the Technology and Social-Psychology of Design, IRE Trans. on Eng. Management (1968, dec.)

[53] A.J.Morris, Approximation and complementary geom. progr., SIAM J. Appl. Math. vol.23. (1972), pp.526-531.

[54] L.D.Pascual-A.Ben Israel, Constrained Maximization of Posynomials by Geometric Programming, JOTA Vol.5. No.2. (1970) pp. 73-80.

[55] U.Passy, Modular Design: An Application of Structured Geometric Programming, Opns.Res.18. pp. 441-453 (1970)

[56] U.Passy, Generalized weighted mean programming, SIAM J. Appl. Math., Vol. 20. No.4. (June 1971), pp. 763-778.

[57] U.Passy, Condensing Generalized Polynomials, J. of opt. Theory and Appl. Vol.9. No.4. (1972).

[58] U.Passy-D.J.Wilde, Generalized Polynomial optimization, SIAM J. Appl. Math. Vol.15. No. 5. (September 1967).

[59] E.L.Peterson, Symmetric duality for generalized unconstrained geometric programming, SIAM J. Appl. Math. 19. (1970) pp. 487-526.

[60] E.L.Peterson-J.G.Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and ℓ_p-approximation I., International Symposium on Mathematical Programming, Princeton, N.J., (1967, August).

[61] E.L.Peterson-J.G.Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and ℓ_p-approximation II., (Canonical Programs), SIAM J. Appl. Math., 17 (1969), pp. 317-340.

[62] E.L.Peterson-J.G.Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and ℓ_p-approximation III., (Degenerate Programs), J. Math. Anal. Appls. 29 (1970), pp. 365-383.

[63] E.L.Peterson-J.G.Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and ℓ_p-approximation IV., (Computational Procedures), in preparation, to be submitted to Math. of Comp.

[64] Prékopa András, Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról, (Doktori értekezés) Budapest, 1970.

[65] A.Prékopa, A Class of Stochastic Programming Decision Problems, Math. Operationsforsch. u. Statist. Vol. 3. No. 5. pp. 349-354.

[66] R.T.Rockafellar, Convex Analysis, Princeton, New Yersey, University Press, 1970.

[67] R.T.Rockafellar, Some Convex Programs Whose Duals Are Linearly Constrained, a Nonlinear Programming c. könyvben (ed. J.B.Rosen) Academic Press 1970.

[68] D.P.Rutenberg-T.L.Shaftel, Product Design: Subbasemblines for multiple markets, Manag.Sci. Vol. 18. No.4. (I) (1971 dec.) pp. B-220-B-231.

[69] Г.В.Шелейховский, Транспортные основания композиции городского плана, Гипргор, Л., I963.

[70] T.L.Shaftel, An Integer Approach to Modular Design, Opns.Res. 19 pp. 130-134 (1971).

[71] N.Z.Shapiro, A Generalized Technique for Eliminating Species in Complex Chemical Equilibrum Calculations, RAND Corp. Memo RM-4205-PR, (Sept. 1964).

[72] N.Z.Shapiro-L.S.Shapley, Mass Action Lows and the Gibbs Free Energy Function, RAND Corp. Memo RM-3935-1-PR, (Sept. 1964).

[73] N.Z.Shapiro-L.S.Shapley, Mass Action Lows and the Gibbs Free Energy Function, J.Soc.Indust. Appl. Math., 13 (1965), pp. 353-375.

[74] T.K.Sherwood, A course in Process Design, MIT Press, Cambridge, 1963.

[75] J.Stoer-Ch.Witzgall, Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Springer-Verlag, 1970.

[76] R.Stone,-A.Brown, A long term growth modell for the British Economy, (Az "Europes Future in Figures" c. könyvben. Szerk: R.C. Geary).

[77] R.Stone-J.Bates-M.Bacharach, A programme for Growth Input-Output relationsships 1954-66, University of Cambridge, 1963.

[78] H.Theil, Substitution Effects in Geometric Programming, Management Science Vol.19, No.1. (1972 sept.)

[79] W.B.White-S.M.Johnson-G.B.Dantzig, Chemical Equilibrium in Complex Mixtures, J. Chem. Phys., 28 (1958), pp. 751-755.

[80] D.J.Wilde, A review of Optimization Theory, Industrial and Engineering Chemistry 57 No.8. (August 1965).

[81] D.J.Wilde-C.L.Beightler, Foundations of Optimization, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1967.

[82] A.C.Williams, Marginal values in linear programming, J.Soc.Indust. Appl. Math. Vol. 11, 1 (March, 1963), pp. 82-94.

[83] C.Zener, A mathematical aid in optimizing engineering designs, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47 (1961), pp. 537-539.

[84] C.Zener, A further mathematical aid in optimizing engineering designs, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48 (1962), pp. 518-522.

[85] C.Zener, An example of design for minimum total cost, counter-flow heat exchangers, IEEE Trans. Mil. Elec. MIL-8 (1964).

[86] C.Zener, Minimization of system cost in terms of subsystem cost, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 51 (1964).

[87] C.Zener, Enginering Design by Geometric Programming, Wiley Interscience (1971).

A TANULMÁNYOK sorozatban eddig megjelentek:

1/1973 Pásztor Katalin: Módszerek Boole-függvények minimális vagy nem redundáns, {$\wedge$, $\vee$, $\neg$} vagy {NOR} vagy {NAND} bázisbeli, zárójeles vagy zárójel nélküli formuláinak előállitására

2/1973 Вашкеви Иштван: Расчленение многосвязных промышленных процессов с помощью вычислительной машины

3/1973 Ádám György: A számitógépipar helyzete 1972 második felében

4/1973 Bányász Csilla: Identification in the presence of drift

5/1973* Gyürki J.-Laufer J.-Girnt M.-Somló J.: Optimalizáló adaptiv szerszámgépirányitási rendszerek

6/1973 Szelke Erzsébet, Tóth Károly: FELHASZNÁLÓI KÉZIKÖNYV /USER MANUAL/ a Folytonos Rendszerek Szimulációjára készült ANDISIM programnyelvhez

7/1973 Legendi Tamás: A CHANGE nyelv/multiprocesszor

---

*-gal jelölt kivételével a TANULMÁNYOK megrendelhetők az Intézet Könyvtáránál /Budapest, I. Uri u. 49./

A kiadásért felelős:

Dr. Vámos Tibor

az

MTA Számitástechnikai és Automatizálási
Kutató Intézet
igazgatója

Jelen felhasználói kézikönyv a 3.10.3 - 3.10-5 "A matematikai programozás" és "A hálózati folyamok" c. intézeti alapkutatási téma keretében készült.

736235 MTA KESZ Sokszorosító. F. v.: Szabó Gyula