ÉRTEKEZÉSEK

A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

XII. KÖTET. 11. SZÁM. 1885.

A FOLYTONOS SPEKTRUMOK ELMÉLETE.

IRTA

D^r KÖVESLIGETHY RADÓ.

(Fölolvasta a III. osztály ülésén 1885 október 19-én Konkoly M. t. t.)

Ára 20 kr.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1885.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet. — Második kötet. — Harmadik kötet. — Negyedik kötet. Ötödik kötet.

Hatodik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén I. rész. 1871—1873. Ára 20 kr. — II. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára 20 kr. — III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik *dr. Gruber Lajos* és *Kurländer Ignácz* kir. observatorok. 10 kr. — IV. *Schenzl Guido.* Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. 20 kr. — V. *Gruber Lajos.* A november-havi hullócsillagokról 20 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára 20 kr. — VII. *Konkoly Miklós.* A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára 20 kr. — VIII. *Konkoly Miklós.* Mercur átvonulás a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án 10 kr.

Hetedik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. 10 kr. — *Konkoly Miklós.* Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr. — III. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban IV. rész. Ára 10 kr. — IV. *Konkoly Miklós.* A nap felületének megfigyelése 1878-ban ó-gyallai csillagdán. 10 kr. — VI. *Hunyady Jenő.* A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében 10 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 10 kr. — VIII. *Dr. Weinek László.* Az instrumentális fényhajlás szerepe és Vénus-átvonulás photographiai felvételénél 20 kr. — IX. *Suppan Vilmos.* Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetitésben. (Két táblával.) 10 kr. — X. *Dr. Konek Sándor.* Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr. — XI. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. 10 kr. — XII. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878. végéig 20 kr. — XIII. *Konkoly Miklós.* Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) 30 kr. — XIV. *Konkoly Miklós.* Adatok Jupiter és Mars physikájához, 1879. (Három tábla rajzzal.) 30 kr. — XV. *Réthy Mór.* A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánositásával és bővitésével. (Székf. ért.) 10 kr. — XVI. *Réthy Mór.* A sarkitott fényrezgés elhajlitó rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleteire. 10 kr. — XVII. *Szily Kálmán.* A telitett gőz nyomásának törvényéről. 10 kr. — XVIII. *Hunyadi Jenő.* Másodfoku görbék és felületek meg-

ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUD. AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

A FOLYTONOS SPEKTRUMOK ELMÉLETE.

Dr. Kövesligethy Radó.

(Fölolvasta az osztályülésen 1885. október 19-én Konkoly M. t. t.)

I. A spektrum elemeinek meghatározása; hullámhosszaság, rezgési sík és amplitud.

Az izzó testek spektralanalytikus kutatásoknál csupán anyaguk tömecsmozgása által keltett éther-rezgésben hatnak érzékeinkre. Ujabb vizsgálódásaink szerint az anyag állapotját éppen legkisebb részeinek mozgása határozza meg s ennélfogva könnyű belátni, hogy ezen állapotot jelző tulajdonok legalább részben kifejezését találják az anyag-keltette rezgésben. Ha most másrészt az erőműtani hőelméletben azon tudományra találunk, mely az anyag állapotját — eltekintve minőleges állandóktól — hőmérséklet, nyomás és térbeli kiterjedés által fejezve ki, tanulmányozza, alig téveszthetjük el e két tudományág között fönnálló összefüggést, s bizonyára azon meggyőződésre kell jutnunk, hogy *a hőelmélet az alap, melyen a spektralanalysis elméleti fölépítése lehetségessé válik.* S látható egyszersmind, hogy a két tudományág gyakorlatilag egymásba csak úgy fog át, ha a spektralanalysis segítségével képesek vagyunk az anyagállapot variabiliseit meghatározni.

Minden rezgés három egymástól teljesen független változó által van adva, s így könnyű belátni, hogy a körülirt feladat azonos azon összefüggés fölkeresésével, mely hőmérséklet, nyomás és térfogat egyrészt, s másrészt rezgési tartam, amplitud és rezgési sík közt áll fönn. A folytonos spektrumok tanulmányozása, mit egyelőre czélomúl tűztem ki, csupán a hőmérséklet ismeretére vezet, mint az az értekezés folyamában kiderül.

Az egyedüli föltevés, melyre szükségünk lesz, az, hogy a testek egyes tömecsekből állanak, melyek közét az éther tölti ki, s hogy valamint a gázoknál úgy általában minden testnél a hőmérséklet a tömecsek elevenerejével van összefüggésben.

A rezgés egyenletei.

Egy étherrészecskén át fektetjük a derékszögű koordinátarendszert, s fölteszszük, hogy az étherrészecskék m, összekötési vonaluk irányában $f(r)$, a testrészecskék m_1 ellenben $f_1(r_1)$ erővel hatnak egy éthertömecsre. A rendszer ily alkotása mellett egyensúly áll be, ha

$$\Sigma m f(r) \frac{x}{r} + \Sigma m_1 f_1(r_1) \frac{x_1}{r_1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ha mind az éther-, mind a testrészecskéknek tetszés szerinti, de végtelen kicsiny kitéréseket ξ, η, ζ illetve $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ kölcsönözünk, akkor a kölcsönös távolságok lesznek:

$$(r_1 + \Delta r_1)^2 = (x_1 + \xi_1 - \xi)^2 + (y_1 + \eta_1 - \eta)^2 + (z_1 + \zeta_1 - \zeta)^2$$

$$(r + \Delta r)^2 = (x + \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2$$

a midőn

$$\Delta\xi = x\frac{\partial\xi}{\partial x} + y\frac{\partial\xi}{\partial\eta} + z\frac{\partial\xi}{\partial z}$$

$$\Delta\eta = x\frac{\partial\eta}{\partial x} + y\frac{\partial\eta}{\partial y} + z\frac{\partial\eta}{\partial z}$$

$$\Delta\zeta = x\frac{\partial\zeta}{\partial x} + y\frac{\partial\zeta}{\partial y} + z\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

Ez egyenletek nem azonosak a Briot*) által fölállítottakkal, melyek segítségével a fényszórást magyarázza. E physi-

*) Mathematische Theorie des Lichtes.

kus ugyanis csupán átlátszó testekre eső fénynyel foglalkozik; a ξ_1, η_1, ζ_1 kitérések tehát az éther-rezgés átvitele a testtömecsre. Miután ez, különösen átlátszó testeknél csak szerfölött kicsiny lehet, Briot e mennyiségeket egészen elhanyagolja. Nálunk éppen ezek a mozgások magyarázzák a spektrum keletkezését.

Ha a szilárd és folyékony testeket a gázokkal ellentétben olyanoknak definiáljuk, melyeknél a tömecsek súlypontja csak csekély helyváltoztatásban vesz részt, s másrészt e helyváltozások már a gázoknál is a gyakori összeütközések folytán csak a fényhullám-hosszasággal egyenlő rangú mennyiségek, föltehetjük, hogy mind a testrészecskék, mind az általok előidézett étherrészecskék kitérései végtelen kicsinyek. Physikailag mondva: izzó szilárd testek spektrumában összegezési színek nem fordulnak elő. Ennélfogva írhatunk:

$$\Delta r = \frac{1}{r}[x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta]$$

$$\Delta r_1 = \frac{1}{r_1}[x_1(\xi_1 - \xi) + y_1(\eta_1 - \eta) + z_1(\zeta_1 - \zeta)]$$

és

$$\frac{f(r)}{r} = \mathfrak{f}(r)_1 ; \frac{f_1(r_1)}{r} = \mathfrak{f}_1(r_1)$$

helyettesítés után:

$$\mathfrak{f}(r + \Delta r) = \mathfrak{f}(r) + \mathfrak{f}'(r) \, . \, \Delta r$$
$$\mathfrak{f}_1(r_1 + \Delta r_1) = \mathfrak{f}_1(r_1) + \mathfrak{f}^1(r_1) \, . \, \Delta r_1 .$$

E kitérések által azonban az egész rendszer egyensúlya fölbomolván, rugalmas erők keletkeznek, melyek az étherrészecskére mozgatólag hatnak, a következő törvény szerint:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r + \Delta r) \frac{x + \Delta\xi}{r + \Delta r} + \Sigma m_1 f_1(r_1 + \Delta r_1) \frac{x_1 + \xi_1 - \xi}{r_1 + \Delta r_1} \\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r + \Delta r) \frac{y + \Delta\eta}{r + \Delta r} + \Sigma m_1 f_1(r_1 + \Delta r_1) \frac{y_1 + \eta_1 - \eta}{r_1 + \Delta r_1} \quad . \quad (2) \\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r + \Delta r) \frac{z + \Delta\zeta}{r + \Delta r} + \Sigma m_1 f_1(r_1 + \Delta r_1) \frac{z_1 + \zeta_1 - \zeta}{r_1 + \Delta r_1}
\end{aligned}$$

Tekintettel az (1) egyensúlyi egyenletre s a fölírt rövidítésekre, e kifejezések a következőkké alakulnak át:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \Sigma m\mathfrak{f}(r)\Delta\xi + \Sigma m\mathfrak{f}^1(r) \, . \, [x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta]\frac{x}{r} +$$
$$+ \Sigma m_1\mathfrak{f}_1(r_1)(\xi_1 - \xi) + \Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)[x_1(\xi_1 - \xi) + y_1(\eta_1 - \eta) +$$
$$+ z_1(\zeta_1 - \zeta)]\frac{x_1}{r_1}$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \Sigma m\mathfrak{f}(r)\Delta\eta + \Sigma m\mathfrak{f}^1(r)[x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta]\frac{y}{r} +$$
$$+ \Sigma m_1\mathfrak{f}_1(r_1)(\eta_1 - \eta) + \Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)[x_1(\xi_1 - \xi) + y_1(\eta_1 - \eta) +$$
$$+ z_1(\zeta_1 - \zeta)]\frac{y_1}{r_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \Sigma m\mathfrak{f}(r)\Delta\zeta + \Sigma m\mathfrak{f}^1(r)[x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta]\frac{z}{r} +$$
$$+ \Sigma m_1\mathfrak{f}_1(r_1)(\zeta_1 - \zeta) + \Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)[x_1(\xi_1 - \xi) + y_1(\eta_1 - \eta) +$$
$$+ z_1(\zeta_1 - \zeta)]\frac{z_1}{r_1}$$

Rövidség okáért a következő definitiókat vezetjük be:

$$A = \Sigma m\mathfrak{f}(r) + \Sigma m\mathfrak{f}^1(r)\frac{x^2}{r} \qquad A^1 = -\Sigma m_1\mathfrak{f}_1(r_1) - \Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)\frac{x_1^2}{r_1}$$
$$B = \Sigma m\mathfrak{f}^1(r)\frac{xy}{r} \qquad B^1 = -\Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)\frac{y_1x_1}{r_1}$$
$$C = \Sigma m\mathfrak{f}^1(r)\frac{xz}{r} \qquad C^1 = -\Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)\frac{x_1z_1}{r_1}$$
$$B_1 = \Sigma m\mathfrak{f}(r) + \Sigma m\mathfrak{f}^1(r)\frac{y^2}{r} \qquad B_1^1 = -\Sigma m_1\mathfrak{f}_1(r_1) - \Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)\frac{y_1^2}{r_1}$$
$$C_1 = \Sigma m\mathfrak{f}^1(r)\frac{yz}{r} \qquad C_1^1 = -\Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)\frac{y_1z_1}{r_1}$$
$$C_2 = \Sigma m\mathfrak{f}(r) + \Sigma m\mathfrak{f}^1(r)\frac{z^2}{r} \qquad C_2^1 = -\Sigma m_1\mathfrak{f}_1(r_1) - \Sigma m_1\mathfrak{f}_1^1(r_1)\frac{z_1^2}{r_1}$$
$$A_1 = B \qquad A_1^1 = B^1$$
$$A_2 = C \qquad A_2^1 = C^1$$
$$B_2 = C_1 \qquad B_2^1 = C_1^1$$

melyek által (3) átváltozik a következővé:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = A\Delta\xi + B\Delta\eta + C\Delta\zeta + A^1(\xi - \xi_1) + B^1(\eta - \eta_1) + C^1(\zeta - \zeta_1)$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = A_1\Delta\xi + B_1\Delta\eta + C_1\Delta\zeta + A_1^1(\xi - \xi_1) + B_1^1(\eta - \eta_1) + C_1^1(\zeta - \zeta_1) \; (4)$$
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = A_2\Delta\xi + B_2\Delta\eta + C_2\Delta\zeta + A_2^1(\xi - \xi_1) + B_2^1(\eta - \eta_1) + C_2^1(\zeta - \zeta_1)$$

Ha, a mi a természetben leginkább előfordul, amorph homogen testtel van dolgunk, — s itt is csak ezen esetre szorítkozunk — akkor a test- és étherrészecskék zavartalan symmetriája miatt

$$B = C = C_1 = B^1 = C^1 = C_1^1 = 0$$

$$A = B_1 = C_2 = \Sigma m \mathfrak{f}(r) + \Sigma m \mathfrak{f}^1(r) \frac{r}{3} = k$$

$$A^1 = B_1^1 = C_2^1 = -\Sigma m_1 \mathfrak{f}_1(r_1) - \Sigma m_1 \mathfrak{f}_1^1(r_1) \frac{r_1}{3} = k_1$$

és egyenletünk eme egyszerűbb alakot ölti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= k\Delta\xi + k_1(\xi - \xi_1) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= k\Delta\eta + k_1(\eta - \eta_1) \quad \ldots \ldots \quad (5) \\ \frac{\partial \zeta^2}{\partial t^2} &= k\Delta\zeta + k_1(\zeta - t_1) \end{aligned}$$

Ha a testtömecs rezgése

$$\xi_1 = B e^{u^1 x + v^1 y + w^1 z - s^1 t} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

törvény szerint megy végbe, akkor az (5) egyenlet integrálja általánosan fölírható:

$$\xi = A e^{ux + vy + wz - st} + \frac{k_1 B}{k_1 + k(u^1 x + v^1 y + w^1 z)} \cdot e^{u^1 x + v^1 y + w^1 z - s^1 t} \quad (7)$$

$$s^2 = k_1 + k\,(ux + vy + wz)$$

hol A és B most két tetszésszerinti állandó, u, v, w, és u^1, v^1, w^1 pedig általában komplex mennyiségek.

De ha $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$-ben a kitérések magasb hatványait is tekintetbe veszszük, szem előtt tartva, hogy homogen közeggel van dolgunk, a mely számára tehát a symmetria miatt a páratlan hatvány kitevőű mennyiségek elesnek, lesz

$$\Delta\xi = \frac{1}{1\,.\,2}\left(x\frac{\partial\xi}{\partial x} + y\frac{\partial\xi}{\partial y} + z\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(x\frac{\partial\xi}{\partial x} + y\frac{\partial\xi}{\partial y} + z\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^4 + \ldots$$

a mely kifejezésben a hatványozás jelképileg veendő. Helyettesítés után találunk:

$$s^2 = k_1 + k\left\{\frac{1}{1\,.\,2}(ux + vy + wz)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(ux + vy + wz)^4\right\}. \quad (8)$$

Hullámhosszaság.

A tapasztalattal megegyezőleg fölleljük ezen mozgásban a periodikus jellemet, ha írunk:

$$u = \mathfrak{u} + iU$$
$$\upsilon = \mathfrak{v} + iV$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$s = \sigma + iS$$
$$\xi = \xi_1 + i\xi_2$$

s egyszerűség kedvéért még

$$\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z = \varphi$$
$$Ux + Vy + Wz = \Phi$$

Ha tehát (7)-ben a real mennyiséget szétválasztjuk a képzeletiektől, lesz:

$$\xi_1 = Ae^{\Phi - St}\cos(\varphi + \chi - \sigma t) + \frac{k_1 Be^{\Phi^1 - S^1 t}}{M^1}\sin(\varphi^1 + \chi^1 - \sigma t)$$
$$\xi_2 = Ae^{\Phi - St}\sin(\varphi + \chi - \sigma t) - \frac{k_1 Be^{\Phi^1 - S^1 t}}{M^1}\cos(\varphi^1 + \chi^1 - \sigma t) \quad (9)$$
$$M^1 \sin\chi^1 = k_1 + k\varphi^1 - \sigma^{12} + S^{12}$$
$$M^1 \cos\chi^1 = k\Phi^1 - 2\sigma^1 S^1.$$

Összehasonlítva e kifejezést a rezgés szokottabb törvényével

$$\xi = r\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{mx + ny + pz}{\lambda}\right),$$

melyben m, n, p a szögek kosinusai, melyeket a koordinata tengelyei a hullámfelület normálisával képeznek, látjuk a következő egyenletek helyességét:

$$\sigma = \frac{2\pi}{T}; \varphi = \mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z = \frac{mx + ny + pz}{\lambda}$$
$$m = \frac{\mathfrak{u}\lambda}{2\pi}, n = \frac{\mathfrak{v}\lambda}{2\pi}, p = \frac{\mathfrak{w}\lambda}{2\pi}$$

vagyis az

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1$$

viszony tekintetbe vételével:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2}}.$$

Ezen egyenletek segítségével megismerjük, hogy a rezgések az $ux + vy + wz = 0$ síkhoz egyenközű síkokban történnek, miután azon étherrészecskék, melyek ezen síktól egyenlő

$$\Delta = \frac{ux + vy + wz}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

távolságra esnek, egyenlő fázisokban vannak.

Ezek után már a (8) egyenletet is a következő alakban írhatjuk:

$$s^2 = k_1 + k\left\{\frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)^4\right\}$$

a mely, tekintettel arra, hogy

$$s = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi}{n\lambda}$$

hol n az absolut törési együttható, átváltozik a következővé:

$$\frac{1}{n^2} = a_0 + a_1\lambda^2 + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_3}{\lambda^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Ezen egyenlet, mely a fényszórási tüneményeket magyarázza, azonos a Ketteler*) által talált kifejezéssel. Briot,**) a ki csupán másodrendű tagokat vett föl $\Delta\xi$ kifejezésben, az

$$\frac{1}{n^2} = a_0 + a_1\lambda^3$$

egyenlethez jő, mely nyilván a tapasztalattal ellenkezik. Ő abból következtetve az

$$a_1 = 0 \text{ vagyis } k_1 = 0$$

egyenlet helyességét veszi föl, miből folyna, hogy a testrészecskék az étherre a Newton-féle törvény szerint hatnak.

Rezgési sík.

Az izzó anyag belsejében a tömecsek kétségkívül kevésbé szabad mozgási állapotban vannak, mint a felületen; a molekulák csoportosulása magával hozza, hogy a $\sin \sigma^1$-t kifejezésben σ^1 értéke két határ σ_1^1, σ_2^1 között váltakozik, s ezért egészen általánosan a (7) egyenlet így írható — ha csak realis rezgéseket veszünk:

---

*) Pogg. Ann. CXL. p. 1.

**) L. c.

$$\begin{aligned}
\xi &= \Sigma A_1 e^{\Phi - St}\cos(\varphi+\chi_1-\sigma t)+k_1\Sigma\frac{B_1 e^{\Phi^1-S^1t}}{M_1^1}\sin(\varphi^1+\chi_1^1-\sigma^1 t)\\
\eta &= \Sigma A_2 e^{\Phi - St}\cos(\varphi+\chi_2-\sigma t)+k_1\Sigma\frac{B_2 e^{\Phi^1-S^1t}}{M_2^1}\sin(\varphi^1+\chi_2^1-\sigma^1 t)\\
\zeta &= \Sigma A_3 e^{\Phi - St}\cos(\varphi+\chi_3-\sigma t)+k_1\Sigma\frac{B_3 e^{\Phi^1-S^1t}}{M_3^1}\sin(\varphi^1+\chi_3^1-\sigma^1 t)
\end{aligned} \tag{11}$$

Ezen egyenleteket még átalakítjuk az által, hogy a következő kifejezéseket képezzük:

$$\frac{\xi}{A_1}\sin\chi_2-\frac{\eta}{A_2}\sin\chi_1=\sin(\chi_2-\chi_1)\cos(\varphi-\sigma t)+$$
$$+\frac{B_1}{A_1}\sin\chi_2\sin(\varphi^1+\chi_1^1-\sigma t)-\frac{B_2}{A_2}\sin\chi_1\sin(\varphi^1+\chi_2^1-\sigma^1 t)$$

$$\frac{\eta}{A_2}\sin\chi_3-\frac{\zeta}{A_3}\sin\chi_2=\sin(\chi_3-\chi_2)\cos(\varphi-\sigma t)+$$
$$+\frac{B_2}{A_2}\sin\chi_3\sin(\varphi^1+\chi_2^1-\sigma^1 t)-\frac{B_3}{A_3}\sin\chi_2\sin(\varphi^1+\chi_3^1-\sigma^1 t)$$

$$\frac{\zeta}{A_3}\sin\chi_1-\frac{\xi}{A_1}\sin\chi_3=\sin(\chi_1-\chi_3)\cos(\varphi-\sigma t)+$$
$$+\frac{B_3}{A_3}\sin\chi_1\sin(\varphi^1+\chi_3^1-\sigma^1 t)-\frac{B_1}{A_1}\sin\chi_3\sin(\varphi^1+\chi_1^1-\sigma^1 t)$$

$$\frac{\xi}{A_1}\cos\chi_2-\frac{\eta}{A_2}\cos\chi_1=\sin(\chi_2-\chi_1)\sin(\varphi-\sigma t)+$$
$$+\frac{B_1}{A_1}\cos\chi_2\sin(\varphi^1+\chi_1^1-\sigma^1 t)-\frac{B_2}{A_2}\cos\chi_1\sin(\varphi^1+\chi_2^1-\sigma^1 t)$$

a melyekből most már könnyen vezetjük le a következő viszonylatokat:

$$\left(\frac{\xi}{A_1}\right)^2+\left(\frac{\eta}{A_2}\right)^2-\frac{2\xi\eta}{A_1A_2}\cos(\chi_1-\chi_2)=\sin^2(\chi_2-\chi_1)+$$
$$+\left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2\sin^2(\varphi^1+\chi_1^1-\sigma^1 t)+\left(\frac{B_2}{A_2}\right)^2\sin^2(\varphi^1+\chi_2^1-\sigma^1 t)+$$
$$+\frac{2B_1}{A_1}\sin(\chi_2-\chi_1)\sin(\varphi+\chi_2-\sigma t)\sin(\varphi^1+\chi_1^1-\sigma^1 t)-$$
$$-\frac{2B_2}{A_2}\sin(\chi_2-\chi_1)\sin(\varphi+\chi_1-\sigma t)\sin(\varphi^1+\chi_2^1-\sigma^2 t)-$$
$$-\frac{2B_1B_2}{A_1A_2}\cos(\chi_2-\chi_1)\sin(\varphi^1+\chi_1^1-\sigma^1 t)\sin(\varphi^1+\chi_2^1-\sigma^1 t)\quad(11)$$

és hasonlóképen:

$$\frac{\xi}{A_1}\sin(\chi_2-\chi_3)+\frac{\eta}{A_2}\sin(\chi_3-\chi_1)+\frac{\zeta}{A_3}\sin(\chi_1-\chi_2)=$$

$$=\frac{B_1}{A_1}\sin(\chi_2-\chi_3)\sin(\varphi^1+\chi_1^1-\sigma^1 t)+$$

$$+\frac{B_2}{A_2}\sin(\chi_3-\chi_1)\sin(\varphi^1+\chi_2^1-\sigma^1 t)+$$

$$+\frac{B_3}{A_3}\sin(\chi_1-\chi_2)\sin(\varphi^1+\chi_3^1-\sigma^1 t)\quad\ldots\ldots\quad(14)$$

Itt egyszerűség kedvéért mindenütt az $e^{\Phi-St}$ illetve $e^{\Phi^1-S^1t}$ faktort kihagytuk.

A (10)—(13) alatt talált s lényegileg egymástól nem különböző egyenletek, a szilárd testek által létrehozott étherrezgések egyenletei. Szerintök minden test, melynek részecskéi egy nem elenyésző csekély kölcsönhatás alatt állanak, két határ között minden képzelhető hullámhosszaságú sugarat lövel ki. Ezen sugarak a testben a hullámhosszaság kisebbedtével gyorsabban terjednek, s egy az idővel periodikusan változó kerülékes henger és sík átmetszési görbéi szerint vannak polarisálva. A rezgési sík tehát teljesen határozatlan, s így ez esetben a rezgés harmadik meghatározó eleme elesik, mint ezt Kirchhoff*) is hires tétele levezetésénél találta.

Amplitud és rezgési energia.

Behatóbb tanulmányozás kedvéért a rezgési (11) főegyenletet más alakban írjuk. Érzékeink ugyanis, mint minden egyéb fizikai készülék, a végtelen rövid idő alatt végbemenő periodikus változásokat, mint véges állandó tüneményt fogják föl. Ennélfogva szabad lesz a rezgés állandó s az időtől független hatását tanulmányozni — a mire legczélszerűbb az eleven erő képzése, mert ezt quantitativ is kimutathatjuk. Képezzük tehát a következő kifejezéseket:

$$2L=\Sigma m\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}+$$

$$+\Sigma m_1\left\{\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_1}{dt}\right)^2\right\}$$

hol L az eleven erőt jelenti; továbbá

*) Pogg. Ann. CIX.

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \Sigma B\sigma^1 \sin(\varphi^1 - \sigma^1 t + \chi^1)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \Sigma A\sigma \sin(\varphi + \chi - \sigma t) - k_1 \Sigma \frac{B}{M^1} \sigma^1 \sin(\varphi^1 + \chi^1 - \sigma^1 t)$$

Az eleven erőnek arithmetikai közepét keressük, még pedig oly hosszú időköz számára, melyet végtelen nagy megközelítéssel szabad legyen tekinteni, mint valamennyi az összegezési jel alatt álló rezgési tartam valamelyik sokszorosának; akkor tekintettel az

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(a + bx)dx = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(a + bx)dx = \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{n\pi}{b}, n = 0.\ 1, 2\ .\ .\ .$$

képletre, nyerünk:

$$\frac{4}{3} L = m_1 \Sigma B^2 \sigma^{12} + m \Sigma A^2 \sigma^2 + k_1^2 m \Sigma \frac{B^2}{M^{12}} \sigma^{12} - 2k_1^2 m \Sigma \frac{AB}{M^1} \sigma\sigma^1. \quad (14)$$

a hol az utolsó összegezés csak azon σ, σ^1-re vonatkozik, melyek számára $\sigma_1 = \sigma$. Ez egyenletben a test- és étherrészecskéknek három irány felé rezgése már tekintetbe van véve. Miután az amplitudoknak határozott iránya nincs, s ezek bizonyára a test belsejében egyenletesen felosztvák, mondhatjuk, hogy középben az amplitud egyes koordinatának négyzete, harmadrésze az egész amplitud négyzetének. A gyakorlatból még ezt a tételt merítjük: a spektralanalytikus tüneményeknek az időtől való függetlensége következtében az $e^{\Phi - St}$ kifejezésben áll ezen egyenlet:

$$S^1 = S = 0$$

úgy hogy az amplitudok csupán a távoltól függnek — körülmény, melyet, ha szükséges — később is lehet számításba hozni. Az amplituddal összekötött exponentiell-faktort tehát ezentúl elhagyhatjuk.

Az amplitud nagysága mindeddig ismeretlen. A testrezgés kitérését tetszés szerint vettük föl, az étherrészecskéké pedig az integral egyenletben, mint arbitrár állandó lépett föl. Hogy különben ezen meghatározó elem a hullámhosszaságtól teljesen független, Lippich*) kisérletei is bizonyítják. Ezen állandó meghatározása azonban lehetővé válik, ha egy folytonossági föltételt hozunk be a problemába, mely különben okadatolását teljesen a parány-elméletben találja. De előbb a tömecsek és az étherrészecskék összefüggéséről is kell nézetet alkotnunk.

Integral egyenletünkből kitünik, hogy két rezgéssel van dolgunk; az egyik megfelel az éthernek, a másik a testrészecskéknek. Ha e két rezgés teljesen független volna egymástól, ha tehát az egyik terjedelme teljesen különböznék a másikétól, akkor testszésszerinti hőmérsékletnél a spektrumban legalább is egyszer állna be egy megszakítása a folytonosságnak. S miután ennek a tapasztalat ellentmond, kell hogy egy bizonyos ether-*tömeg* rezegjen együtt egy-egy testrészecskével úgy, hogy az esetleg a molekulákhoz nem kötött éther legfölebb csak oly saját rezgésben lehet, mely a rendeshez képest végtelen csekély, s ennélfogva elhanyagolható. Ha tehát m jelenti az együtt rezgő test- és étherrészecskék tömegét, a az amplitudját, akkor az eleven erő képletét rövidebbben így írhatjuk:

$$2L = m\Sigma a^2\sigma^2 \quad \text{. . . . .} \quad (15)$$

Ezen okoskodás rávezetett egy nézetre a testek alkotásáról, melyet tudtom szerint először Redtenbacher**) nyilvánított, s segítségével a testek physikai tulajdonságai épp oly egyszerűen vezethetők le, mint a régibb egyszerűbb tömecselmélet segítségével. Hogy különben ezen föltevés semmi veszélylyel nem jár, világos; mert míg az étherrészecskék gyorsasága a tömecs rezgésével egyrangú, az éther sűrűsége végtelen kicsiny a tömecséhez képest. Grætz***) az éthersűrűség s, határait a következőkép határozza meg: $90 \,.\, 10^{-17} > s > 0 \,.\, 1 \,.\, 10^{-17}$ a mi állításomat számokkal is támogatja.

Miután a test tulajdonságait az egyes tömecsek és étherrészecskék egymásra gyakorolt hatásából magyarázzuk, világos, hogy ezek (talán megmásítva ugyan) mindaddig állnak fenn, míg ezen erők hatni meg nem szünnek, a mi akkor állna be, ha a hő-okozta kiterjedés következtében a disgregatio egy minden

*) Sitzber. der Wien Ak. d. W. LXXII. p. 355.

**) Das Dynamidensystem.

***) Repert. d. Phys. 21. Bd. 8.

testre jellemző állandó határt túllép. A bevezetendő folytonossági feltétel tehát — mely az előbbi szerint a testtulajdonok megmaradási elvének volna nevezhető — a következőképen hangzik: A testrészecske rezgési amplitudja a test physikai tulajdonságainak megmaradása mellett nem lehet nagyobb, mint azon távol, a melyből a rezgő részecske még visszatérhet egyensúlyi helyzetébe.

Az m-nek újabb jelentésével az egyensúlyi egyenlet vonatkoztatva egy tetszésszerinti derékszögű koordinata-rendszerre, így hangzik

$$\Sigma m \,.\, f(r) \frac{x}{r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Ha α, β, γ az amplitudának a koordinata-tengelyeken mért vetületei, akkor az egyensúly megzavarása után lesz:

$$\Sigma m f(r+\rho) \frac{x+\alpha}{r+\rho} = \delta$$

hol most δ ama erő, mely a rezgő rézecskét egyensúlyi helyzetébe tereli vissza.

Hasonló következtetéssel, mint előbb, ha megint

$$\frac{f(r)}{r} = \mathfrak{f}(r),$$

jutunk a következő egyenlethez:

$$\Sigma m\mathfrak{f}(r) \,.\, x + \Sigma m\mathfrak{f}(r)\alpha + \Sigma m\mathfrak{f}'(r)\rho x = \delta$$

mely tekintettel az egyensúlyi egyenletre s a tömecsek egyenletes elosztására, valamint a tömecs-rezgési egyenletből folyó viszonyra, mely szerint

$$\delta = m\alpha\sigma^2$$

átváltozik a következővé:

$$m\alpha\sigma^2 = \Sigma m\mathfrak{f}(r) \,.\, \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

mely most a disgregatio teljességének pillanatára érvényes. Ennek elérése előtt, kell hogy legyen:

$$m\alpha\sigma^2 > \Sigma m\mathfrak{f}(r) \,.\, \alpha$$

vagy egyenletbe öntve:

$$m\alpha\sigma^2 = \Sigma m\mathfrak{f}(r) \,.\, \alpha + m\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

E kifejezést az egyes tömecsek számára képezve, leend:

$$o = -\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \ldots + \varepsilon^1$$
$$o = \alpha_1 p_1 - \alpha_2\sigma_2^2 + \alpha_3 p_3 + \ldots + \varepsilon^{11} \quad . \quad . \quad (19)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$o = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \ldots - \alpha_n\sigma_n^2 + \varepsilon^{(n)}$$

s hasonló egyenleteket nyerünk a másik két összetevőre β, γ-ra is. Az ε-ok különbözőknek vannak föltüntetve, mert a disgregatio egy tömecsrendszer belsejében is különböző lehetne még; de minden esetre könnyű belátni, hogy az $\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)}$ kifejezések legalább is másodrendűek; sőt hiba nélkül zérusnak tekinthetők. Az előbb fölírt egyenletekben, mint azt egyszerre látjuk:

$$p_n = \mathfrak{f}(r\ ) = \frac{f(r_n)}{r_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Középben a tömecsek egyenletesen vannak fölosztva — mint ezt több ízben hangsúlyoztuk; ennélfogva a p mennyiségek egyáltalában állandóknak tekinthetők. Miután (19)-ben a $3n$ ismeretlenre ugyanannyi egyenlet van adva, a feloldás egyértelmű. Az (n) és (m) egyenlet levonása által származik:

$$\alpha_n = \alpha_m \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p} + \frac{\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)}}{\sigma_n^2 + p}$$
$$\beta_n = \beta_m \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p} + \frac{\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)}}{\sigma_n^2 + p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$
$$\gamma_n = \gamma_m \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p} + \frac{\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)}}{\sigma_n^2 + p}$$

melyek négyzetre emelve s összeadva adnak: *)

$$a_n^2 = a_n^2 \left(\frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p}\right)^2 + 3\left(\frac{\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)}}{\sigma_n^2 + p}\right)^2 +$$
$$+ \frac{2(\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)})}{\sigma_n^2 + p} \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p} (\alpha_m + \beta_m + \gamma_m) \quad . \quad . \quad . \quad (22$$

Az amplitud határozatlan iránya miatt az

$$a_m^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2 + \gamma_m^2$$

egyenletből ezen egyszerűbb alak következik:

$$a_m = \sqrt{3}\ .\ \alpha_m,$$

a melynek segítségével (22) is átváltozik:

---

*) Az $\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)}$ csekélysége miatt a koordináták szerinti szétválasztást mellőztem.

$$a_n^2 = a_m^2 \left(\frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p}\right)^2 + 3\left(\frac{\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)}}{\sigma_n^2 + p}\right)^2 + \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} a_m \frac{(\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)})(\sigma_m^2 + p)}{(\sigma_n^2 + p)^2}$$

Tekintve az $(\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)})$ mennyiség már említett elenyésző értékét, írhatunk még

$$a_n = a_m \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p} \left\{ 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{(n)} - \varepsilon^{(m)}}{\sigma_m^2 + p} \frac{1}{a_m} \right\} \quad \dots \quad (23)$$

vagy még egyszerübben, s legfölebb másodrangú mennyiségek elhanyagolása mellett:

$$a_n = a_m \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p} \quad \dots\dots\dots \quad (24)$$

Hullámhosszaságok bevezetése által, midőn, c-vel jelölve a fény terjedési sebességét:

$$\sigma = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

és még definiálva:

$$\mu^2 = \frac{4\pi^2 c^2}{p} = \frac{4\pi^2 c^2 r}{f(r)} \quad \dots\dots\dots \quad (25)$$

lesz:

$$a_n = a_m \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \left(\frac{\lambda_m^2 + \mu^2}{\lambda_n^2 + \mu^2} \right)$$

vagy

$$a = a_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right) \quad \dots\dots\dots \quad (26)$$

Ennélfogva a rezgés mechanicai intensitása, mely arányos $a^2\sigma^2$ kifejezéssel, lesz

$$L = L_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right)^2 \quad \dots\dots\dots \quad (27)$$

s ennélfogva a testben lévő összes eleven erő kifejezése átalakul:

$$L = L_0 \Sigma \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right)^2 \quad \dots\dots\dots \quad (28)$$

Ezen egyenlet útján ama fontos, a gyakorlat által helyesnek bemutatott és a Kirchhoff-féle törvény által követelt tételhez jutunk, hogy egy izzó szilárd test spektrumában az egymásra következő színek intenzitásai folytonosan és megszakítás nélkül mennek egymásba át, s hogy a spektrum bármelyik helyének intenzitása ismeretes, ha csak egy szín fényereje adva van.

II. A spektralegyenlet tárgyalása.

Azon föltevésre jutunk tehát, hogy a (27) alatt fölírt törvény azonos a Kirchhoff-féle még eddig ismeretlen függvénynyel, s ezért bővebb tanulmányozást kétségen kívül érdemel.

Miután a μ^2 mennyiség csupán az illető test tömecsalkotásától függ, nyilván, hogy ez főleg a hőmérséklettel fog változni: s ha az $f(r)$ törvényt az explicite adott

$$f(r) = C\frac{1}{r^n}$$

kifejezéssel cseréljük föl, akkor

$$\mu^2 = \frac{4\pi^2}{C} c^2 r^{n+1} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

ha c a fényterjedési sebesség, r pedig a tömecsek átlagos távola. A talált függvény tehát csupán csak a test minőségétől, a hőmérséklettől és a fény hullámhosszától függ; mindkét variabilisnek egyértelmű, folytonos és positiv függvénye, mely csupán $\lambda = 0$ és $\lambda = \infty$ számára válik zérussá. Mint a

$$\frac{dL}{d\lambda} = L\frac{2\lambda}{\lambda_0^2}\frac{(\lambda_0^2+\mu^2)^2(\mu^2-\lambda^2)}{(\lambda^2+\mu^2)^3}$$

differential képletből kitünik $\lambda = \mu$-nél egy s csak ezen egy maximummal bir. Azonkívül növekszik a függvény értéke az argumentuméval addig, míg $\lambda < \mu$, fogy a hullámhosszaság nagyobbodtával, ha $\lambda > \mu$. Nem kevesbbé érdekes μ^2-nek viszonya a spektrumhoz.

$$\frac{dL}{d(\mu^2)} = L\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\, 2\,\frac{\lambda_0^2+\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}\,\frac{\lambda_0^2-\lambda_0^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}$$

egyenletből következik ugyanis, hogy μ^2 növekedésével a spektrumnak a vörös végtől λ_0-ig terjedő részének intenzitása nagyobbodik, a λ_0-tól az ibolyáig terjedő rész fényereje pedig csökken.

Miután függvényünk egy maximumtól kezdve mindkét oldalon folytonosan egész zérusig fogy, természetes, hogy egy intensitáshoz mindig két hely találkozik a spektrumban. Tekintsük e két hely hullámhosszaságainak viszonyát; λ' és λ''-vel jelölve őket, nyerjük a mondottnak kifejezése gyanánt:

$$L_0 = \frac{\lambda'^2}{\lambda_0^2}\left(\frac{\lambda_0^2+\mu}{\lambda'^2+\mu^2}\right)^2 = L_0\frac{\lambda''^2}{\lambda_0^2}\left(\frac{\lambda_0'^2+\mu^2}{\lambda''^2+\mu^2}\right)^2$$

vagy pedig

$$\lambda'\lambda'' = \mu^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

és miután a spektrum physikai végei is eleget tesznek a követelménynek — ott ugyanis az intensitások egyenlőkép közelednek zérus felé, lesz, ezeket λ_1 és λ_2-vel jelölve

$$\lambda_1\lambda_2 = \mu^2$$

vagyis: két egyenlő intenzitású spektráltáj hullámhosszaságainak szorzata állandó, vagy más szóval, az egyenlő intenzitású színek egy egyenoldalú hyperbolán feküsznek, melyek assymptotái a koordináta-tengelyekkel esnek össze. Természetes e szerint az is, hogy a μ^2 mennyiség egyenlő a maximum-intenzitás hullámhosszaságának négyzetével. S ime itt egy egyszerű mód a μ^2-nek az észleletekből való kiszámítására, a mi azonban direkt a képlet megfordítása által is lehetséges. Fontosnak tartom azon megjegyzést, hogy μ^2 teljesen független az izzó test alakjától és felületi minőségétől, úgyszintén a távolságtól is, a melyben a hőforrás az észlelőtől áll.

Mielőtt e fontos képlet fejtegetésében tovább haladnánk, nem lesz fölösleges ennek helyességét egy egészen más oldalról világítani meg.

Az intensitás képletében előfordúl a közeg fénytörési együtthatója is; tekintetbe véve, hogy különben egyenlő körülmények között

$$\frac{\lambda^1}{\lambda} = \frac{c^1}{c} \text{ és } \frac{\mu'^2}{\mu^2} = \frac{c'^2}{c}$$

nyerjük egy más közeg számára az emissióképességet

$$L^1 = L\frac{c^2}{c'^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

mely egyenlethez Clausius*) már 1863-ban tisztán elméleti úton jutott, midőn a hő és fénysugarak concentrációjáról értekezik. Ő azonban ezen tételt csak az absolut fekete testek számára

*) Über die Concentration von Wärme und Lichtstralen Pogg. Ann. CXXI. p. 1.

vezette le, a mi összehasonlítva a (31) egyenlettel, mely tetszésszerinti testre érvényes, azon következtetésre juttat, hogy a testek elnyelési képessége független a környező mediumtól — a mi természetes is, miután az absorptio csak egy viszonyszámot fejez ki.

Egyenletünk e próbát is sikeresen kiállván, gyakorlati alkalmazásra gondoltam. Én magam nem voltam birtokában a módszereknek, melyek segítségével észleleteimet a spektrum látható részénél tovább kiterjeszthettem volna, s így mások tapasztalataira kelle támaszkodnom. E mellett szomorúan tapasztaltam, hogy talán senki sem gondolt arra, hogy a spektrum voltaképen még sem olyan, mint ezt műszereink mutatják, melyek a különböző színek iránt különböző elnyeletési és visszaverődési képességgel vannak. Az elnyeletés elhanyagolása mellett összeegyezés számítás és észlelet közt nem várható ugyan, de ide mellékelem számításaimat, mert más szempontból érdeket nyujtanak.

A Comptes Rendus-ben LXXXIX pag. 295. a következő, Mouton-tól eszközölt méréseket találom, melyek a látható spektrum mintegy ötszörösére terjednek.

Hullám-hosszúság	Izzó platina	Nap	Hullám-hosszúság	Izzó platina	Nap
0·396	—	0·30	1·150	0·739	0·248
431	0·030	66	230	—	162
486	050	37	305	896	207
526	072	96	400	962	129
560	—	1·00	500	0·997	080
589	125	98	530	1·000	092
655	201	88	610	0·975	130
686	—	81	750	849	090
760	314	69	850	751	056
800	—	60	980	607	000
900	471	465	2·140	408	000
1·050	—	32			

Ha e méréseket æquidistans hullámhosszaságokra redukáljuk, és az intenzitásokat platinánál $\mu^2 = 1{\cdot}530^2$ és a napnál $\mu^2 = 0{\cdot}560^2$-vel számítjuk — nyerjük a következő táblázatot:

	Platina		Nap	
λ	észlel.	számít.	észlel.	számít.
0·4	0·030	0·239	0·330	0·895
0·6	140	462	983	997
0·8	361	678	603	885
1·0	574	839	362	728
1·2	788	943	226	589
1·4	962	993	144	476
1·6	975	998	090	390
1·8	792	974	060	323
2·0	570	935	043	270
2·2	333	879	036	229

A nap μ^2-jénél szükséges lett volna ez értéket — miután ez csupán folytonos spektrumokra vonatkozik — a föld s a nap athmospherájának absorptiója miatt korrigálni, a mi itt elmaradt. E számok, mint azt a mondottaknál fogva várhattam is, keveset bizonyítanak, mert az absorptió mindenütt zerusnak van véve, holott ez egy pl. általam használt spektroskopra 0.85 értéket is túlhaladta. De megnyugtatásomra szolgált, hogy a számított és észlelt értékek görbéje, alakra nézve hasonló (az absorptiót ha nem is mennyilegesen, de minőlegesen tudjuk számba venni), s hogy a számított mindig a nagyobb.*)

Több bizonyító erővel bir a

$$\lambda'\lambda'' = \mu^2$$

egyenlet beválása. A következő értékeket nyerem:

Egyenlő intenzitású spektráltájak hullámhosszaságai:

Platinaspektrum

λ'	λ''	$\mu^2 = \lambda'\lambda''$
$\lambda' = 1{\cdot}530$	$\lambda'' = 1{\cdot}530$	$\mu^2 = \lambda'\lambda'' = 2{\cdot}341$
439	622	333
393	660	307
360	688	298
333	710	274
307	732	266
288	747	258
270	762	235

*) Ujabban sikerült, a Mouton által használt műszerek energia gyengítését egy a (27) egyenlettől független módszer nyomán kiszámítanom. Ha ezt az elméletileg számított értékekre alkalmazzuk, teljes összehangzást találunk, mint ezt egy későbbi alkalommal ki fogom mutatni.

Napspektrum

$\lambda' = 0{\cdot}560$	$\lambda'' = 0{\cdot}560$	$\mu^2 = \lambda'\lambda'' = 0{\cdot}314$
547	580	317
530	596	316
518	610	316
508	625	317
497	640	318
488	655	320
478	667	319
470	680	320
463	695	322

Azon tételt tehát, hogy az izzó test hőmérsékletétől függő μ^2 állandó két egyenlő intenzitású spektráltáj mértani arányosa, a gyakorlat is bizonyítja. A szorzat nem teljes állandósága nagyon könnyen magyarázható a használt műszer absorptiójából. A platinspektrum legintenzivebb része ugyanis a vörösben fekszik, s e vég felé a maximumtól kezdve (hol az absorptio egységül van véve) gyorsabban nő, mint az ibolya felé; túlsúlyban vannak tehát a kisebb hullámhosszaságok, s a μ^2 értéke az absorptio elhanyagolása mellett fogy. Ellenkezőképen áll a dolog a napnál, fénymaximuma az ibolyavéghez esik közelebb, ennélfogva a kisebb hullámok nyomúlnak közelebb a maximumhoz, miután az absorptio gyorsabban nő a törékenyebb részek felé; a μ^2 értéke tehát nagyobbodik. A napnál ezen törvény meglepő hűséggel majd az egész látható spektrumon át nyilvánul.

III. A spektral-egyenlet más levezetése.

Ha tehát az imént közölt észleletek segítségével konstatált törvényt helyesnek veszszük föl, akkor képesek vagyunk a Clausius-féle tisztán elméleti úton nyert tétellel együtt egyenletünket egészen más szempontból levezetni.

A spektrum megtekintése már arra enged következtetnünk, — mint ez említve is volt, — hogy bármely szín intenzitása visszavezethető egyetlen egy szín energiájára. Képletileg:

$$L = \varphi(\lambda)$$

hol φ egy még teljesen ismeretlen függvény, melyről csak azt tudjuk, hogy a függvény egyenlő értékeinek megfelelő argumentumok szorzata egy és ugyanazon spektrumban állandó. Miután ezen állandó egy mindig positiv mennyiség, μ^2-tel jelölhetjük, s nyerjük a következő functionalis egyenletet:

$$\varphi(\lambda)=\varphi\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)$$

melynek legáltalánosabb feloldása

$$L=\psi\left(\lambda^n+\frac{\mu^n}{\lambda^n}\right)^m \qquad \text{(32)}$$

hol m és n tetszésszerinti positiv vagy negativ, egész vagy törtszámok.

Tapasztalatból tudjuk, hogy a tisztán folytonos spektrum periodikus fénymaximumokkal nem bir, hogy tehát, ha ψ periodikus függvény volna is, a spektrum magyarázatára egy periodus határán túl nem kell terjeszkednünk. Ennélfogva L végtelen sorba bontható a következő módon:

$$L=\Sigma^n\Sigma^m a_n a_m\left(\lambda^n+\frac{\mu^{2n}}{\lambda^n}\right)^m \qquad \text{(34)}$$

hol a_n, a_m csupán a test minőségétől függő állandók.

Ha e kifejezés a Clausius-féle tételnek

$$Lc^2=\text{konst.} \qquad \text{(35)}$$

eleget akar tenni, akkor lesz először:

$$\frac{\mu^2}{c^2}=\text{konst.} \qquad \text{(36)}$$

s továbbá:

$$L^1=\Sigma^n\Sigma^m a_n a_m\left(\lambda^n+\frac{\mu^{2n}}{\lambda^n}\right)^m\left(\frac{c}{c^1}\right)^{mn}$$

a mi (35)-tel csak így egyeztethető össze, ha

$$mn=2$$

Miután m csak egész szám lehet, n legfölebb az $n=\frac{2}{m}$ alakú törtszámmal lehet azonos. De a sorbafejtésnél nincs ok, m-t egy tetszésszerinti magas számmal kezdenünk, ennélfogva n-nek is még egész számnak kell lennie. A sor alakja tehát csak ez lehet:

$$L=a\left(\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda}\right)^2+b\left(\frac{\lambda^4+\mu^4}{\lambda^2}\right)^1+c\left(\frac{\lambda^{-2}+\mu^{-2}}{\lambda^{-1}}\right)^{-2}+d\left(\frac{\lambda^{-4}+\mu^{-4}}{\lambda^{-2}}\right)^{-1}$$

Az intenzitás a spektrum végeinél nem lehet végtelen nagy, a mi mindig beállna, ha m positiv; ebből következik, hogy

$$a = b = 0$$

s ennélfogva az emissio egyenlete csak a következő alakú lehet:

$$L = A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} + B \frac{\lambda^2}{\lambda^4 + \mu^4} \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

hol most A és B csupán a test minőségével és hőmérsékletével változó együtt hatók.

Ezen egyenlet első része teljesen azonos az eredetileg a testtulajdonok megmaradási elvéből talált (27) egyenlettel, a miből következik, hogy B mindenesetre nagyon csekély lehet csak A-hoz képest — ha nem éppen zerus. Hogy gyakorlati alkalmazásoknál e második tag tekintetbe veendő-e, ezt csak a tapasztalat maga mutathatja. Én egyelőre inkább az első levezetésre támaszkodom, s ennélfogva $B = 0$ teszem. (Egy későbbi alkalommal ugyanezen törvénynek egy más, még pedig csak a legáltalánosabb tételekből kiinduló levezetését fogom adni, melyben $B = 0$ föltevést is indokolhatni. A nagyobb általánosság ki fogja tüntetni, hogy egyenletünk helyessége független azon hypothézistől, melyet az anyag és az éther természetéről képezünk.)

IV. A spektrum teljes energiája.

Ezen, nekem fontosnak látszó kitérés után, a folytonos spektrum tanulmányozását ismét fölvehetjük. Nyilvánvaló, hogy a folytonossági jellem következtében a (28) egyenlet helyébe léphet a következő:

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2 d\lambda \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

hol λ_1 és λ_2 a spektrum physikai határainak hullámhosszaságát jelenti. Szétbontás által találjuk:

$$\int \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} d\lambda = -\frac{1}{2\mu} \operatorname{arctang} \frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}$$

mely képlet fölhasználása által lesz:

$$L = L_0 \frac{(\lambda_0^2+\mu^2)^2}{\lambda_0^2}\left\{\frac{1}{2\mu}\left(\operatorname{arctg}\frac{\mu}{\lambda_1} - \operatorname{arctg}\frac{\mu}{\lambda_2}\right) - \frac{1}{2}\frac{(\mu^2-\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)^2}{(\lambda_1^2+\mu^2)(\lambda_2^2+\mu^2}\right\}$$

vagy tekintetbe véve, hogy a spektruma határai számára

$$\lambda_1\lambda_2 = \mu^2$$

az eleven erő képlete átváltozik a következővé: *)

$$L = L_0 \frac{1}{2\mu}\frac{(\lambda_0^2+\mu^2)^2}{\lambda_0^2}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\mu}{\lambda_1} - \operatorname{arctg}\frac{\mu}{\lambda_2}\right\} \quad . \quad (39)$$

Az arctang függvény ismert összeadási képlete szerint

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$$

egyenletünk végre ily alakba is önthető:

$$L = L_0 \frac{1}{2\mu}\frac{(\lambda_0^2+\mu^2)^2}{\lambda_0^2}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Miután a spektrum mathematikai határai $\lambda = 0$ és $\lambda = \infty$-nél fekszenek, s miután a tömecsek rezgésében végtelen nagy s végtelen kis sebességek előfordúlása is lehetséges, a (38) integrált egyáltalában $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$ határok között vehetjük; az így nyert eleven erőt Λ-vel jelölve lesz:

$$\Lambda = L_0 \frac{(\lambda_0^2+\mu^2)^2}{\lambda_0^2}\frac{\pi}{4\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Az integrálnak határai azonban kiszámíthatók, mihelyest tudjuk, mily eleven erővel bir a spektrum két vége; physikailag véve e határok persze nem esnek össze szigorúan zérussal, sőt függnek a használt műszer érzékenységétől. Legyen a λ_1 és λ_2 hullámhosszaságú spektralvég közös eleven ereje l, és fogadjuk el a következő definitiót:

$$\iota = \frac{\lambda_0}{\lambda_0^2+\mu^2}\sqrt{\frac{l}{L_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

akkor a (27) képletből a spektrum határainak hullámhosszaságai számára a következő egyenletet nyerjük:

$$\lambda^2\iota - \lambda + \mu^2\iota = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

a miből következik:

---

*) Alig kell említenem, hogy az összes sugárzási energia kiszámítására az L helyébe $\frac{4r^2\pi}{\omega}$ L kifejezés lép, hol r az észlelő távolsága a fényforrástól, ω pedig a megvizsgált sugárnyaláb keresztmetszete.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2\iota}(1 - \sqrt{1 - 4\mu^2\iota^2}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2\iota}(1 + \sqrt{1 - 4\mu^2\iota^2}) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

mint előbb is, $\iota = 0$ egyenletnek felel meg $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$, miképp ezt könnyü átlátni. A tényleges kiszámításhoz azonban a határ-energia ismerete szükséges, a mi legfölebb folytonos spektrummal elégő gáznál tehető föl. Ennek összes energiája ugyanis meghatározható, ha hőmérséklete ismeretes. Spektralphotometrikus mérésekből a λ_0 hullámhosszaságnak megfelelő L_0 érték vezethető le, melyek után (39) és (30)-ból λ_1 és λ_2 kiszámítható ezen gáz számára, s ennek segítségével egyszer s mindenkorra l. De a legegyszerűbb, s mindig alkalmazható út, az integralt 0 és ∞ határok közt venni föl.

A nap folytonos spektruma.

E tanulmányok után talán nem lesz érdektelen, ha a nap izzó magvának spektrumát fejtjük ki. Mouton mérései szerint a nap-spektrum maximalis intenzitása $\lambda_0 = 0{\cdot}56$-nél fekszik, a miből következik $\mu^2 = 0{\cdot}314$. Ezen érték még a földathmosphéra s a napphotosphéra absorptiója miatt javítandó. Vogel*) és Müller**) erre vonatkozó észleleteit graphicusan interpolálva, találom:

λ	a photosphéra	az athmosphéra fényátbocsátása
0·4	0·471	0·566
0·5	610	749
0·6	679	829

mely értékek miatti javítás után

$$\mu^2 = 0{\cdot}270.$$

Jelölve a nap izzó magvának mechanikai energiáját = 1-vel a $\lambda_0 = 0{\cdot}520$ hullámhosszaságnál, a napspektrumban az energia-elosztás a következőnek mutatkozik:

---

*) Spektralphotometrische Untersuchungen insbesonders zur Bestimmung der Absorption der die Sonne umgebenden Gashülle.

**) Untersuchungen über die Helligkeitsänderungen in versch. Theilen des Sonnenspektrums.

Astr. Nachr. 2464. p. 251.

λ	Energia	λ	Energia	λ	Energia	λ	Energia
0·0	0·000	1·0	0·671	2·0	0·237	3·0	0·113
0·1	138	1·1	597	2·1	218	3·1	106
0·2	450	1·2	533	2·2	200	3·2	100
0·3	751	1·3	476	2·3	185	3·3	095
0·4	936	1·4	426	2·4	171	3·4	089
0·5	1·000	1·5	383	2·5	159	3·5	085
0·6	0·981	1·6	346	2·6	148	3·6	080
0·7	917	1·7	313	2·7	138	3·7	076
0·8	836	1·8	284	2·8	129	3·8	072
0·9	751	1·9	259	2·9	121	3·9	069
1·0	671	2·0	237	3·0	113	4·0	065

A nap magvának összes energiája pedig a fölvett egységnek 1·633-szorosát teszi. A napspektrum eddig ismert határai 0·295 és 2·700-nál fekszenek. E határok között a nap-spektrum energiája 1·501, s ennélfogva az eddig még hozzá nem férhető részei a spektrumnak összes intensitásának csak 8 percentjével birnak.

Megjegyzem még, hogy a hullámhosszaságok a millimeter ezred részeiben vannak adva.

V. *a)* Az izzó test spektrumának és hőmérsékletének összefüggése.

Végre szükség lesz még, az egyenletünk baloldalán előforduló Λ mennyiséget tárgyalnunk. A test energiája egy bizonyos térfogata, hőmérséklete és külső munka legyőzésének fennállási föltétele. Ha tehát $Mc\mathfrak{A}\Theta$ a testben foglalt hőmennyiség mechanikai mértékben mérve, $v - v_0$ a pillanatnyi térfogat viszonyítva a kezdetlegeshez, π és p a belső és külső munka egységnyi térfogatra, végre $\mathfrak{k}$ a test köbkiterjedési együtthatója, akkor a test összes energiája

$$\Lambda = \Theta\,[\mathfrak{A}Mc + v_0\mathfrak{k}(\pi + p)] \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

a hol természetesen $c, \mathfrak{k}, \pi$ a hőmérséklettel folytonosan változik, úgy hogy korántsem szabad e mennyiségek ismert végértékeiből az eleven erő teljes nagyságára következtetnünk. Csupán az idealis gázoknál tudjuk, hogy az összes bent lakó eleven erő kifejezhető

$$\Lambda = CM\Theta\mathfrak{A}$$

mennyiséggel, ha C a gáz fajhője állandó nyomás alatt. Ezen fölirt munka fölhasználása által ugyanis a gázt zerus állapotjából egy állandó ráható nyomás mellett, a pillanatnyi hőmérsékletre és térfogatra hoztuk.

A test összes energiája, s különösen annak a belső munkára vonatkozó része, Stefan*) gondolatmenetét követve, még kissé bővebben tárgyalhatjuk.

Ha egy test felületegységére a merőleges P nyomás hat, akkor eredeti ν térfogata ν^1-re csökken, s a rugalmassági törvény szerint

$$aP\nu = \nu - \nu^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

a hol a az illető test térfogat-egységének csökkenése egységi nyomás alatt. Ezen képletből következik továbbá, hogy

$$P = \frac{1}{a} = E$$

ha

$$\nu^1 = 0$$

Az E erő hatása alatt a test térfogata zerusra változnék, vagy megfordítva, húzva ható erőkre nézve, az E erő hatása alatt a test térfogata kétszeresednék. E tehát az úgynevezett köbrugalmassági együttható. Ha ezen rugalmassági törvényt határtalan érvényességünek veszszük, azon belső munkát számíthatjuk, mely eredt, míg a test térfogata ν^1-ről ν-ig változott. A $\nu - \nu^1$ deformatió ugyanis (46) szerint arányos a ráható erővel s ennélfogva a $\nu - \nu^1$ végdeformatio s az annak megfelelő erő egy derékszögű háromszöget zár be, melynek csúcsa összeesik a koordinata-rendszer kezdőpontjával. Ezen háromszög területe

$$F = \frac{P(\nu - \nu^1)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

nyilvánvaló az összes kifejtett belső erő, mely az egész deformatio tartama alatt a ráható erőt egyensúlyozta. A P értékének (46)-ból való behelyettesítése után lesz

$$F = \frac{(\nu - \nu^1)^2}{2\nu} E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

---

*) Das Dulong-Petitsche Gesetz. Sitzber. der Wien. Ak. d. W. XXXVI. p. 85.

s ennélfogva azon belső erő, mely a test térfogatának 0-tól egész ν-ig való növekedtének felel meg:

$$F_0 = \frac{\nu}{2} E \qquad \qquad (49)$$

A testben foglalt melegmennyiség Q kifejezhető ennélfogva

$$Q = U + \frac{E\nu}{2\mathfrak{A}} \qquad \qquad (50)$$

ha $\mathfrak{A}$ a hőegység erőműtani egyenértéke, és U azon meleg, mely szükséges, hogy a test hőmérsékletét a *neki* megfelelő absolut zerusponttól jelenlegi állapotjára emelje. Ha $\mathfrak{k}$ a test kiterjedési együtthatója, akkor ezen absolut zeruspont fekvése a celsiusi skálán $-\frac{1}{\mathfrak{k}}$ által van adva. Mechanikai mértékben a test összes energia egyenlő tehát

$$\Lambda = \mathfrak{A}Mc\left(\Theta + \frac{1}{\mathfrak{k}}\right) + \frac{E\nu}{2} \qquad \qquad (51)$$

vagy helyesebben írva

$$\Lambda = \mathfrak{A}M\int_0^\Theta c d\Theta + \frac{1}{2}\int_0^\Theta E\mathfrak{k} d\Theta \qquad \qquad (52)$$

Az izzó test energiája tehát mindig meghatározható, ha spektrumában csak két szinnek megfelelő absolut intenzitás megmérhető; de pontos hőmérséklet-meghatározásokhoz szükséges az izzó test tömegének, s a fajhő, kiterjedési és összenyomhatósági együttható ismerete, s ez utóbbi mennyiségeknek függése a hőmérséklettől.

Szükebb határokban az $\mathfrak{A}Mc + \mathfrak{k}\nu_0(\pi + p)$ közel állandónak tekinthető, s ennélfogva (40) vagy (41)-ből látjuk, hogy a hőmérséklet nagyobbodtával μ^2 csökken. Szavakban kifejezve: minél magasabb egy test hőmérséklete, annál inkább tolódik spektrumának fénymaximuma az ibolyavég felé — a mit a tapasztalat tökéletesen bizonyit. A $\lambda_1\lambda_2 = \mu^2$ egyenletből látjuk továbbá, hogy magasbbodó hőmérséklet mellett, ha a μ^2 mennyiség kisebbedik, az egyik λ_1 faktornak erősebb mértékben kell fogynia, mint a mily arányban a másik λ_2 nő; tehát a spektrum ibolyahatára gyorsabban terjed az ultra ibolya felé, mint a vörös vég az ultra vörös felé.

Igen magas hőmérsékletnél, midőn $\mu^2 = 0$ közel, a spektrum ezen egyszerűbb alakot ölti

$$L = L_0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$$

míg igen alacsony hőmérsékletnél éppen megfordítva:

$$L = L_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}.$$

V. *b)* A Draper-féle törvény.

A (27) egyenlet még egy igen jelentékeny, s alkalmazásaiban fontos átváltoztatást enged meg. Ha csak a spektrum egyes színeit akarjuk tanulmányozni, akkor a L_0 állandó helyébe az izzó test összes energiáját is behozhatjuk; (27) és (41)-ből következik ugyanis:

$$L = \Lambda \frac{4\mu}{\pi} \cdot \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

A Draper*) által kisérleti úton talált, s később a Kirchhoff-féle tétel által elméletileg is bebizonyított törvény szerint minden test egy és ugyanazon hőmérsékletnél kezd vörös sugarakat, egyáltalában egy bizonyos törékenységű sugarat kibocsátani. Az (53) egyenletre alkalmazva ezen tételt, lesz:

$$\frac{\Lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} = \text{konst} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

hol az állandó csupán a hőmérséklet függvénye, de teljesen független az izzó test anyagi minőségétől. Ezen egyenlete szerint a következő alakban is írható:

$$\sqrt{\Lambda\mu} - \mu^2 \cdot \varphi(\Theta) = \lambda^2 \varphi(\Theta) \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

hol most λ azon hullámhosszaságot jelenti, a melynél Θ hőmérséklet mellett még éppen rezgési energia érezhető.

A spektrum határának hullámhosszasága helyett azon legkisebb intenzitást vezethetjük be, mely még éppen képes hatni a szemre (vagy más megfigyelési módnál, a reagáló készülékre); miután nagyon csekély intenzitásu rezgéseknél a színérzet általában megszünik, föltehetjük, hogy ezen vég-

*) Phil. Mag 30. p. 345.

intenzitás állandó, s majdnem független a hullámhosszaságtól. Az én szemem számára például ezen föltevés teljesen áll; ezen határintenzitás értéke 3·96 milligr. millim.

Ha tehát s a szem, vagy más észlelő közeg érzékenységi faktora, akkor a mondottak szerint a spektrum határa számára (53)-ból:

$$\frac{4}{\pi} s\mu\Lambda \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} = \text{konst} = i$$

a miből az ibolyavég hullámhosszasága

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu s\Lambda}{i}} - \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\mu s\Lambda}{i} - \mu^2}$$

Ezen kifejezésnek (55) be való behelyettesítése ad:

$$\frac{i}{s}\frac{1}{\varphi(\Theta)} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu\Lambda} - \sqrt{\frac{\mu\Lambda}{4} - \mu^2\frac{i}{s}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

hol most $\varphi(\Theta)$ egy hasonló kifejezés, melyben μ_0 és Λ_0 azonban úgy legyen választva, hogy ezen mennyiségek mint a hőmérséklet függvényei álljanak elé. Lesz ennélfogva:

$$\sqrt{\mu_0\Lambda_0} - \sqrt{\mu_0\Lambda_0 - 4\mu^2\frac{i}{s}} = \sqrt{\Lambda\mu} - \sqrt{\Lambda\mu - 4\mu^2\frac{i}{s}} \quad (57)$$

Miután $\frac{i}{s}$ elenyésző csekély Λ-hoz képest, a gyökmennyiségek sorba fejthetők. A második tagnál megállva nyerünk ily módon:

$$\frac{\mu_0^2}{\sqrt{\mu_0\Lambda_0}}\left[+ \frac{\mu_0^2}{\Lambda_0\mu_0}\frac{i}{s}\right] = \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu\Lambda}}\left[1 + \frac{\mu^2}{\Lambda\mu}\frac{i}{s}\right] \quad . \; . \quad (58)$$

vagy pedig csak másodrendű tagokig haladva, elég pontosan:

$$\frac{\mu_0^2}{\sqrt{\mu_0\Lambda_0}} = \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu\Lambda}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (59)$$

Miután a folytonos spektrummal izzó gázoknál a hőmérséklet és az eleven erő legalább megközelítve meghatározható, az (59.) egyenlet baloldala ismeretes. μ_0^2 a különböző hőmérsékletek számára vagy tisztán gyakorlatilag, vagy az elmélet segítségével fejthető meg. μ^2 definitiója ugyanis volt

$$\mu^2 = \frac{4\pi^2 c^2 r}{f(r)}$$

A gáz egyensúlyát most pl. az egyes tömecsek között ható $f(r)$ erő felvétele által magyarázzuk. Ha a gázra p nyomást gyakorolunk, akkor az egyes részecskék dr-vel közelednek egymás felé, s ha ezek száma N, akkor az így kifejtett munka

$$\frac{1}{2} N dr \Sigma m \,.\, m \,.\, f(r)$$

ha m a tömecsek tömegét jelenti. Miután az összegezésnél minden távolság kétszer fordult elő, a $\frac{1}{2}$ faktort helyezzük az összeg elé. Másrészt e munka, v-vel jelölve a gáz térfogatát, $pdv = 3pv \frac{dr}{r}$ által fejezhető ki. Tekintettel a Mariotte-Gay-Lussac törvényére

$$pv = R\Theta$$

ezen egyenlet így is írható:

$$R\Theta = \frac{r}{2} N \Sigma m m f(r)$$

Ebből következik

$$r f(r) = \alpha\Theta.$$

Alig szenved kétséget, hogy a gáztömecsek hatása távolságuk egy negativ hatványával egyenlő, tehát

$$f(r) = \frac{\beta}{r^n}$$

a miből:

$$\mu^2 = C \,.\, \frac{c^2 r^2}{\Theta} = C_1 \,.\, \frac{c^2}{\Theta \,.\, \Theta^{\frac{2}{n-1}}} = C \,.\, \frac{c^2}{\Theta^{\frac{n+1}{n-1}}}$$

A gázok törési együtthatója továbbá nagyon megközelítve az

$$\left(\frac{1}{c} - 1\right)\Theta = \text{konst} = \nu$$

törvényt követi. Ezt még tekintetbe véve nyerjük végre μ_2 számára a következő kifejezést:

$$\mu^2 = \frac{A}{\left(\frac{\nu}{\Theta} + 1\right)^2 \Theta^{\frac{n+1}{n-1}}} \quad \text{. . . . . (60)}$$

Az absolut zerusponttól számított hőmérséklet azonban a gáz összes eleven ereje mértéke is, és ennélfogva (59.) átváltozik:

$$\frac{\mu^2}{\sqrt{\mu \Lambda}} = \frac{\mathfrak{A}}{\left(\frac{\nu}{\Theta} + 1\right)^{\frac{3}{2}} \Theta^{\frac{5n+1}{4(n-1)}}} \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

úgy, hogy a kisérlet által csak n számértéke marad meghatározandó. $\mathfrak{A}$ pedig egy absolut állandó.

Ha a 45. egyenletet egy tökéletes gázra alkalmazzuk s (41)-vel összehasonlítjuk, akkor tekintetbe véve, hogy $L_0 \frac{(\lambda_0^2 + \mu^2)^2}{\lambda_0^2}$ a pillanatnyi hőmérsékletnél állandó, következik, hogy μ visszás arányban áll a hőmérséklettel. Ennélfogva a fent jelölt

$$\frac{n+1}{n-1} = 2$$

a miből $n = 3$. Ezen értékkel lesz továbbá:

$$\frac{5n+1}{4(n-1)} = 2$$

s ennélfogva:

$$\frac{\mu^2}{\sqrt{\mu \Lambda}} = \frac{\mu_0^2}{\sqrt{\mu_0 \Lambda_0}} \left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right)^2 \left(\frac{\frac{\nu}{\Theta_0} + 1}{\frac{\nu}{\Theta} + 1}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

Miután a spektrum tanulmányozása által, függetlenül az izzó test tömegétől, anyagi és felületi minőségétől μ^2 és Λ ismeretéhez jutunk, a most levezetett törvény segítségével az izzó testek hőmérséklet-meghatározásának kérdése teljesen meg van oldva.

Ha tekintettel a (25) egyenletre, végre μ^2 alatt mindig azon értéket értjük, mely a hőmérséklet által megváltozott c-hez tartozik, akkor (60) és (62)-ben egyszerűen eltekinthetünk a $\left(\frac{\nu}{\Theta} + 1\right)$ faktortól, s leend:

$$\frac{\mu^2}{\mu_0^2} = \left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} = \left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right)^2$$

$$\frac{\mu^2}{\sqrt{\mu \Lambda}} = \frac{\mu_0^2}{\sqrt{\mu_0 \Lambda_0}} \left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right)^2$$

hol, mint említettük, $\frac{\mu_0^2}{\sqrt{\mu_0 \Lambda_0}}$ a test anyagától teljesen független.

VI. Az absolut fekete testek; az absorptio törvénye.

Az emissioképesség levezetésénél semmi föltevést nem tettünk a testek ppysikai alkotása iránt, s ennélfogva természetes, hogy talált egyenletünk, melyet ez esetben így irunk:

$$e = e_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^0} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu_0^2} \right)^2$$

egyszersmind az absolut fekete testek kisugárzási törvénye, vagy a tulajdonképi Kirchhoff-féle függvény. Az absolut fekete testek tulajdonságait nem ismerjük — de azt hiszem, annak spektruma, bármily magas hőmérsékletre emeljük is, mindig folytonos marad, s főleg nem mehet át discontinuitásokon. Ennélfogva azt tartom, hogy a Kirchhoff-féle függvény — a fölírt kifejezésnél teljesebb egyenlet által pótlandó, (22) által. Alakja a következő:

$$a^2 = a_0^2 \frac{\lambda^4}{\lambda_0^4} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu_0^2}{\lambda^2 + \mu_0^2} \right)^2 + 3 \frac{\delta^2 \lambda^4}{(\lambda^2 + \mu_0^2)^2} \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 c^2} +$$
$$+ \frac{6}{\sqrt{3}} a_0 \frac{\delta(\lambda_0^2 + \mu_0^2)}{(\lambda^2 + \mu_0^2)^2} \frac{\lambda^4}{\lambda_0^2} \frac{\mu_0^2}{4\pi^2 c^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62)$$

hol most δ egy csekély a tömecsek eltolódási különbségétől függő mennyiség, mely nagyon valószinűleg a hőmérséklettől is függ. Ezen képletből maga az emissio nagysága:

$$e = e_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu_0^2}{\lambda^2 + \mu_0^2} \right)^2 + \frac{6}{\sqrt{3}} \sqrt{e_0} \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{\mu_0^2 \delta}{2\pi c} \frac{\lambda_0^2 + \mu_0^2}{(\lambda^2 + \mu_0^2)^2} + 3 \frac{\delta^2 \lambda^2 \mu_0^2}{(\lambda^2 + \mu_0^2)^2} \, . \quad (63)$$

A jobboldali második kifejezés $\frac{\delta}{2\pi c}$ faktor miatt, hol δ végtelen csekély, c pedig egy igen nagy szám, csak nagyon csekély lehet; a harmadik kifejezésben δ^2 legalább is negyedrendű mennyiség. Ennélfogva — s mint ezt a direct kezelés is mutatja — az e függvény maximuma nagyon közel esik a $\lambda = \mu_0$ értékéhez, s egyáltalában a függvény többi tulajdona is megegyezik az egyszerűbb kifejezés sajátságaival.

Alig kell kiemelnem, hogy az e függvény ismerete után a Kirchhoff-féle tétel segítségével, a szilárd testek absorptiója is tanulmányozható.

Több kisérletet tettem végre két folytonos spektrumadditió theoremájának meghatározása iránt, de minden arra utal, hogy egy ily törvény nem is létezik. Ezen tény így volna kifejezhető: Nincs test, mely a dissociatio határán belül bármily hőmérsékletre emelve oly spektrumot adna, mely egyenlő volna két tetszésszerinti hőmérsékletű izzó test egymásra vetített spektrumával.

Mióta Kirchhoff nevezetes törvényét fölállította, s az e függvényt legalább körvonalaiban jellemezte, tudtom szerint csak egy kisérlet történt ezen függvény alakjának meghatározására. Becquerel E.*) kisérletileg kimutatta, hogy a vörös, zöld és kék sugarak intenzitása az izzó test hőmérsékletével változik, még pedig egy a Dulong és Petit sugárzási képletéhez hasonló exponentialis törvény szerint. Az exponentialfüggvény alapjának logarai szerinte visszás arányban állanak a hullámhosszaságokkal. Képlete a következő:

$$I = a(b^{T-\Theta} - 1)$$

hol I a sugár intenzitása, T a test hőmérséklete, Θ pedig azon hőmérséklet, melynél a tekintetbe vett színű sugarak láthatókká válnak; a és b állandók, s a második csupán a hullámhosszaságtól függ. A számítások legalább a kisérlet pontosságának keretén belül a hő és fény emissió azonosságát mutatják ki.

*) La lumière.

határozásáról. 20 kr. — XIX. *Hunyady Jenő.* Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. 20 kr. — XX. *Dr. Frölich Izor.* Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 20 kr. XXI. *Hunyady Jenő.* Tételek a componalt determinánsoknak egy különös neméről. 10 kr. — XXII. *König Gyula.* A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr. — XXIII. *Silberstein Salamon.* Vonalgeometriai tanulmányok 20 kr. — XXIV. *Hunyady János.* A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében. 10 kr. — XXV. *Hunyady Jenő.* A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Nyolczadik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1880-ban. *Konkoly Miklóstól.* Egy tábla rajzzal. — II. szám. Adatok Jupiter physikájához az 1880-ik évből. Egy függelékkel. *Konkoly Miklóstól.* — III. szám. A Bólyai-féle algorithmus. *Dr. Farkas Gyulától.* — IV. szám. Napfoltok megfigyelése 1880-ban, és 1382 napfolt micrometricus mérése. *Konkoly Miklóstól.* Két tábla rajzzal. — V. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1880-ban a magyar korona területén. V-ik rész. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. 102 hullócsillag kisugárzási pont, levezetve 518 megfigyelésből, melyek a magyar korona területén 1879. és 1880-ban tétettek. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Új villámzáró vagy nyitókészűlék normálórán, és a Jürgenssen-féle óraszerkezet. *Konkoly Miklóstól* Egy képtáblával. — IX. szám. Adatok Jupiter forgási elemeihez. *Dr. Kobold Ármintól.* — X. szám. A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendü partialis differentiálegyenletek általános elmélete. Székfoglaló értekezés. *König Gyulától.* — XI. szám. A hadtudomány viszonya a többi tudományokhoz. *Kápolnai Pauer Istvántól.* Székfoglaló értekezés. — XII. szám. Egy negyedrendü felületről. *Hunyady Jenőtől.*

Kilenczedik kötet.

I. szám. Astrophisikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. (Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — II. szám. Az ó-gyallai csillagvizsgáló földrajzi szélessége. *Dr. Lakits Ferencztől.* — III. szám. A herényi astrophisikai observatorium leirása, és az abban tett megfigyelések 1881-ben. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. szám. Napfoltok és a nap felületének megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — V. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. Adatok Jupiter és Mars physikájához, az 1881. évi megfigyelésekből. (III. rész. Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Az üstökösök vegytani alkotása. *Konkoly Miklóstól.* — IX. szám. Az 1871—1880. években, Magyarországban megfigyelt hullócsillagok pályaelemei. *Kövesligethy Radótól.* — X. szám. Néhány determináns-egyenletről. *Hunyady Jenőtől.* — XI. Perspectiv helyzetű alakzatokról *Dr. Klug Lipóttól.* — XII. szám. Az elhajlott fény intenzitásának vizsgálata. (A math. és természettudományi állandó bizottság segélyezésével készült dolgozat. Tizenkét ábrával a szöveg között.) *Dr. Fröhlich Izortól.* — XIII. szám. Az algebrai egyenletek elméletéhez. *König Gyulától.*

Tizedik kötet.

I. A nap felületének megfigyelése 1882-ben. *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések 1882-ben. *a)* A Wells-üstökös szinképe. *b)* A szeptemberi nagy üstökös szinképe. *c)* 9 Meteor szinképe. *d)* 115 állócsillag spectruma. *e)* Coloremetricus megfigyelések. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — IV. Egy uj reversio-spectroscop s annak használata. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — V. Az ó-gyallai csillagvizsgálón eszközölt csillagászati megfigyelések eredménye. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — VI. Néhány szó az üstökösök vegytani alkotásáról, összehasonlitva a meteoritekkel. *Konkoly Miklóstól.* — VII. Egy uj szerkezetü spectroscop. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Astrophysikai megfigyelések a herényi observatoriumon, 1882. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. Adatok Jupiter és Mars bolygók physikájához. (Három táblával.) *Gothard Sándortól.* — X. Egy uj spectroscop. (Egy táblarajzzal.) *Gothard Jenőtől.* — XI. Astrophysikai megfigyelések 1883. (Egy táblával.) I. rész. *a)* γ Cassiopejae spectruma. *b)* α Ursae minoris spectruma. *l)* A Swift üstökös spectruma. *d)* A Brooks üstökös spectruma. *e)* Colorimetricus megfigyelése 65 állócsillagnak. *Konkoly Miklóstól.*

Tizenegyedik kötet.

I. Astrophysikai megfigyelések 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. (II-ik rész, 3 tábla.) *Konkoly Miklóstól.* — II. A nap felületének megfigyelése 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1883-ban *Konkoly Miklóstól.* — IV. 615 állócsillag spectruma. A déli öv átkutatásának I. része. *Konkoly Miklóstól.* — V. Megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon 1883-ban. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VI. A Pons-Brooks üstökös spectroscopicus megfigyelése a herényi astrophysikai observatoriumon. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VII. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagdán 1883-ban. *Monkoly Miklóstól.* — VIII. Előleges vizsgálatok néhány szénhydrogén-gáz spectrumán, spectroscoppal és spectralphotometerrel. (3 táblával s 2 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — IX. Adatok Bolyai Farkas életrajzához. *Szily Kálmántól.* — X. A herényi astrophysikai observatorium sarkmagasságának meghatározása. *Gothard Jenőtől.*

Tizenkettedik kötet.

I. A napfoltok és a nap felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (1 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (4 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — III. Az 1884. évi megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon. (2 ábra és 3 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. Hulló-csillagok megfigyelése a m. korona területén 1884-ben. 26 radiatio ponttal. *Konkoly Miklóstól.* — V. 615 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.* — VI. A napfoltok gyakoriassága 1872-től 1884 végéig. (2 kőnyomatu táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VII. Adatok Jupiter physikájához. (2 táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Tanulmányok az égitestek photographálása terén. (1 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. A Haynald-observatoriumban 1880—1884-ben megfigyelt napfoltok. *Hüninger Adolftól.*

FRANKLIN-TARSULAT NYOMDÁJA.