Doktori értekezés tézisei

Fullér Róbert

Többkritériumú döntési modellek pontatlan információk esetén

Budapest

2014

1. Bevezetés

A *fuzzy* halmazokat Lotfi A. Zadeh vezette be 1965-ben [44] mint a pontatlanul rendelkezésre álló adatok reprezentálási és a manipulálási eszközeit. A fuzzy rendszerek jól használhatóak olyan esetekben, amikor a rendelkezésre álló információk emberi becslésekből származnak és ezért a rendszer pontos matematikai modellje nehezen származtatható. A fuzzy halmazok és rendszerek kutatásának az időszerűségét és jelentőségét a matematika tudományokban jól mutatja, hogy 2014 február 19-én a MathSci adatbázisban 24636 cikk címében szerepelt a *fuzzy* szó. Az ipari alkalmazások hatalmas száma [11, 14, 17, 31] pedig azt bizonyítja, hogy az elmélet a gyakorlatban is megállja a helyét.

A dolgozat a többkritériumu döntések, a fuzzy rendszerek stabilitása, a lehetőségeloszlások mennyiségi jellemzői és a fuzzy aritmetika területén 1989 és 2013 között elért eredményeimet ismerteti. Christer Carlssonnal (Åbo Akademi University, Turku, Finnország) 20 évig dolgoztam együtt finn és EU kutatás-fejlesztési projektekben és a tudományos eredményeim nagy részét az ezekben a projektben felmerült gyakorlati problémák matematikai modellezése alapozta meg. A stabilitási tételek egyrésze pedig akkor születtek amikor az Aacheni Műszaki Egyetemen Hans-Jürgen Zimmermann professzorral dolgoztam. Az általa vezetett kutatócsoport egy fuzzy szabálybázis által vezérelt modell autót épített fel [37] és ennek a sima és ütközésmentes mozgását a fenti stabilitási tételek alapozták meg elméletileg. További elméleti eredményeimet hatékonyan használtam finn és európai uniós ipari kutatás-fejlesztési projektekben. Ezeknek a projekteknek a részletes leírása a [4, 8, 11, 13, 14, 17] munkákban található.

Tudományos munkáimra 2909 független MTMT hivatkozás ismert. Google Scholar hivatkozások száma: 4536.

A fuzzy halmazok olyan tulajdonságok leírására szolgálnak amelyeket nem lehet karakterizálni a klasszikus *eleme* relációval, azaz a kétértékű logika - igen/nem - segítségével. A fuzzy logikában az elemek halmazhoz való tartozásának a mértéke az egységintervallumból bármi lehet és azt mutatja meg, hogy az adott elem mennyire rendelkezik a fuzzy halmaz által leírt tulajdonsággal.

1.1. Definíció. *Egy $X \neq \emptyset$ halmaz egy A fuzzy részhalmazát a μ_A-val jelölt tartalmazási függvényével karakterizálhatjuk, ahol $\mu_A \colon X \to [0,1]$, és $\mu_A(x)$ úgy interpretáljuk mint az x elemnek az A-hoz való tartozásának a mértéke, minden $x \in X$ esetén. Úgy is lehet mondani, hogy $\mu_A(x)$ azt mutatja meg, hogy az adott*

$x \in X$ pont mennyire rendelkezik az A által leírt tulajdonsággal.

Az egyszerűség kedvéért $\mu_A(x)$ helyett legtöbbször csak $A(x)$-et fogunk írni. Ha valamilyen $x_1 \in X$ elemre $A(x_1) = 1$, akkor azt mondjuk, hogy az x_1 elem teljes mértékben rendelkezik az A által leírt tulajdonsággal, továbbá, ha valamilyen $x_2 \in X$ elemre $A(x_2) = 0$, akkor x_2 semmilyen mértékben nem teljesíti az A által leírt tulajdonságot, ha pedig ha valamilyen $x_3 \in X$ elemre $0 < A(x_3) < 1$, akkor x_3 valamilyen közbülső mértékkel teljesíti az A által leírt tulajdonságot. Az X halmaz fuzzy (rész)halmazainak a családját $\mathcal{F}(X)$-el jelöljük. A valós számok egy A fuzzy halmazát fuzzy számnak nevezzük, ha a tartalmazási függvénye normális (azaz $A(x) = 1$ valamilyen $x \in \mathbb{R}$ esetén), kvázikonkáv, felülről félig folytonos és korlátos tartójú. A fuzzy számok halmazát $\mathcal{F}$-el jelöljük. A továbbiakban, hacsak másként nem mondjuk, az $X = \mathbb{R}^n$-beli fuzzy halmazokról lesz szó.

2. OWA operátorok optimális súlyainak meghatározása

Az intelligens rendszerekben nagyon fontos szerepe van az információ aggregálásának. A fuzzy logika lehetővé teszi az információ aggregálását és a döntéshozást olyan esetekben is, amikor csak emberi becslésekből származó pontatlan információ áll a rendelkezésünkre. 1988-ban Yager [43] egy új információ aggregálási teknikát vezetett be, a Rendezett Súlyozott Közepek - Ordered Weighted Averaging - (OWA) operátorát. Az OWA operátor egy alternatíva globális teljesítményét nem a részteljesítmények súlyozott összegeként definiálja, hanem a monoton csökkenő sorrendbe rendezett részteljesítmények súlyozott összegeként definiálja: az első súly tehát az a legjobb részteljesítmény súlya, a második súly a második legjobb részteljesítmény súlya, végül az utolsó súly a legrosszabb részteljesítmény súlya. A $W = (w_1, \dots, w_n)^T$ súlyvektorral definiált OWA operátor kompenzációs szintjére Yager 1988-ban [43] a következő mértéket vezette be,

$$\text{orness}(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (n-i) w_i$$

ami mutatja meg, hogy bizonyos kritériumokon mért rossz teljesítményeket milyen mértékben lehet kompenzálni más kritériumokon elért jobb teljesítményekkel. Az OWA operátorok entrópiája (vagy diszperziója), azt mutatja, hogy mennyire használjuk egyforma mértékben a részteljesítményeket az összteljesítmény kiszámításánál. 2001-ben Majlenderrel közösen [32] az adott kompenzációs szinttel rendelkező és maximális entrópiájú súlyvektor előállítására mutatottunk egy analitikus módszert, amelyben a Lagrange-szorzók segítségével visszavezették a fellépő matematikai programozási feladatot egy egy valós gyökkel rendelkező n-ed fokú polinomiális egyenlet megoldására. Az OWA operátorok súlyainak a varianciája azt mutatja, hogy mennyire nem használjuk a részteljesítményeket egyforma mértékben az összteljesítmény kiszámításánál. Az adott kompenzációs szint melletti minimális varianciájú súlyvektor meghatározása a következő kvadratikus programozási feladathoz vezet,

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \qquad && D^2(W) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} w_i^2 - \frac{1}{n^2} \\ &\text{subject to} && \text{orness}(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1}\cdot w_i = \alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 1, \\ & && w_1 + \cdots + w_n = 1,\ 0 \leq w_i,\ i = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

amit 2003-ban Majlenderrel közösen [34] oldottunk meg analitikusan a a Karush-Kuhn-Tucker tétel segítségével.

A fenti eredmények azért jelentősek, mert a (döntéstámogató) információs rendszerekben azok az aggregáló operátorok, amelyek a rendelkezésre álló információt a lehető legnagyobb mértékben veszik figyelembe az aggregálási folyamat során nagyon fontos szerepet játszanak. Az MTMT-ben olvasható, hogy a javasolt optimális súlyvektor meghatározó módszereinket többek között alkalmazzák a döntéstámogatásban, az anyagtudományokban, a szakértői rendszerekben, a vezeték nélküli szenzor hálózatokban, információ biztonság kockázatainak modellezésében, szélturbinák hibadiagnózisában, hulladékgazdákodásban, ivóvíz minőség meghatározásában, és ipari beszállítók kiválasztási problémáiban.

A témakörben publikált [3, 13, 32, 34] cikkeinkre 350 független MTMT hivatkozás ismert.

3. Lehetőségeloszlások mennyiségi jellemzői

A lehetőségeloszlások (amiket fuzzy számokkal reprezentálunk [46]) mennyiségi jellemzőinek a kutatását 1999-ben kezdtem el, amikor az E-MS Bullwhip kutatás-fejlesztési projektben felmerült az emberi becslésekből származó információk modellezésének és feldolgozásának a problémája. Olyan típusú becslések álltak csak rendelkezésemre, mint "valami értékét azt 20 és 30 közé várom, de semmiképpen sem lehet 10-nél kisebb és 40-nél nagyobb az értéke". Ezt az információt egy trapéz alakú fuzzy számmal jelenítettem meg, amelynek a tartója az $(10, 40)$ a teteje pedig $[20, 30]$ és mivel semmi egyéb adat nem állt rendelkezésemre arra, hogy egy adott szinthalmaz elemeinek milyen az eloszlása, ezért a szinthalmaz összes elemét egyformán lehetségesnek tartottam, és a *Laplace's principle of Insufficient Reason* elv alapján az egyformán lehetséges elemeket egyformán valószínűnek tekintve, egyenletes eloszlásokat vezettem be rájuk. Ezek az információk nem-statisztikai jellegű bizonytalanságot hordoznak, mégis az egyenletes eloszlások bevezetésével lehetővé vált a lehetőségeloszlások mennyiségi jellemzőinek és függőségi mértékeinek a szemléletes definiálása is. Ezekre a fogalmakra azért volt szükségünk, mert sok esetben a lehetőségeloszlásokat egyetlen valós számmal kellett jellemeznünk (várható érték), meg kellett határoznunk, hogy mekkora pontatlanságot hordoznak (variancia) és valahogyan mérnünk kellett azt, hogy milyen mértékben vehetik fel az értékeiket egymástól függetlenül (kovariancia és korreláció). A definíciókat 2011-ben tudtam véglegesíteni. A legnagyobb kihivást az jelentette, hogy olyan definíciókat kellett bevezetnünk, amelyek konzisztensek a Zadeh-féle kiterjesztési elvvel, mert ennek az elvnek a segitségével terjesszük ki a klasszikus halmazokon értelmezett függvényeket fuzzy halmazokra. Az egyenletes eloszlások segítségével definiált mennyiségi jellemzők teljesítették ezt az elvárást.

Időrendi sorrendben, 2001-ben Carlssonnal közösen [7] bevezettük a fuzzy számok (lehetőségeloszlások) lehetőségi várható értékét és varianciáját. A lehetőségi várható értéket (varianciát) úgy definiáltuk, mint a fuzzy szám szinthalmazain definiált egyenletes eloszlások várható értékeinek (varianciáinak) a súlyozott közepét. A lineáris súlyfüggvény a magasabban szinthalmazokhoz nagyobb súlyt rendel, mert azok az elemek fontosabbak, amik jobban teljesítik a fuzzy szám által leírt tulajdonságot. 2003-ban Majlenderrel közösen bevezettük [33] a súlyozott lehetőségi várható értékét és varianciát, amikor a szinthalmazok súlyfüggvénye nem szükségszerűen lineáris, aztán 2004-ben Majlenderrel közösen [35] bevezettük a lehetőségeloszlások peremeloszlásai közötti kovarianciát majd 2005-ben Carlssonnal és Majlenderrel közösen [15] a lehetőségi korrelációt amit 2011-ben Mezeivel és Várlakival közösen [36] terjesztettünk ki a lehetőségeloszlások teljes családjára.

3.1. Definíció (Carlsson and Fullér, [7]). *Legyenek $A \in \mathcal{F}$ fuzzy szám, $[A]^\gamma = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)]$ szinthalmazokkal. Legyen f egy nemnegatív monoton növekvő súlyfüggvény. Az A fuzzy szám lehetőségi várható értékét a*

$$E(A) = \int_0^1 (a_1(\gamma) + a_2(\gamma))\gamma d\gamma, \tag{1}$$

formulával értelmezzük.

3.2. Definíció (Fullér and Majlender, [35]). *Legyenek $A \in \mathcal{F}$ fuzzy szám, $[A]^\gamma = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)]$ szinthalmazokkal. Legyen f egy nemnegatív monoton növekvő súlyfüggvény. Az A fuzzy szám súlyozott lehetőségi várható értékét és varianciáját a*

$$E(A) = \int_0^1 \frac{a_1(\gamma) + a_2(\gamma)}{2} f(\gamma) d\gamma, \quad \mathrm{Var}(A) = \int_0^1 \frac{(a_2(\gamma) - a_1(\gamma))^2}{12} f(\gamma) d\gamma$$

formulákkal értelmezzük.

A 2001-ben bevezetett lehetőségi várható érték (1) a 2004-ben bevezetett súlyozott lehetőségi várható érték speciális esete $f(\gamma) = 2\gamma$ súlyfüggvénnyel.

3.3. Definíció (Fullér és Majlender, [35]). *Legyen C egy közös lehetőségeloszlás, A és B lehetőségi peremeloszlásokkal. Legyen f egy monoton növekvő súlyfüggvény. Az A és B közötti súlyozott lehetőségi kovarianciát a következő formulákkal értelmezzük,*

$$\mathrm{Cov}_f(A, B) = \int_0^1 \mathrm{cov}(X_\gamma, Y_\gamma) f(\gamma) d\gamma,$$

ahol X_γ és Y_γ valószínűségi változók amelyeknek a közös eloszlása egyenletes a $[C]^\gamma$ halmazon és $\mathrm{cov}(X_\gamma, Y_\gamma)$ jelöli a kovarianciájukat, minden $\gamma \in [0, 1]$ esetén.

3.4. Definíció (Fullér, Mezei és Várlaki, [36]). *Legyen C egy közös lehetőségeloszlás, A és B lehetőségi peremeloszlásokkal. Legyen f egy monoton növekvő súlyfüggvény. Az A és B közötti súlyozott lehetőségi korrelációt a következő formulákkal értelmezzük,*

$$\rho_f(A, B) = \int_0^1 \rho(X_\gamma, Y_\gamma) f(\gamma) \mathrm{d}\gamma$$

ahol X_γ és Y_γ valószínűségi változók amelyeknek a közös eloszlása egyenletes a $[C]^\gamma$ halmazon és $\rho(X_\gamma, Y_\gamma)$ jelöli a korrelációs együtthatójukat, minden $\gamma \in [0, 1]$ esetén.

A lehetőségi peremeloszlások szinthalmazait a közös lehetőségeloszlás szinthalmazainak a vetületeiként kapjuk. Például kétdimenziós esetben ha a közös eloszlás egy adott γ magasságú szinthalmaza (röviden γ-szinthalmaza) az téglalap alakú - mégpedig a két peremeloszlás γ-szinthalmazainak a Descartes szorzata - akkor ez azt jelenti, hogy a közös eloszlás a két szinthalmazból választható összes elempárt tartalmazza. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a két szinthalmaz elemei neminteraktívak, mert ha választok egy tetszőleges elemet az egyik szinthalmazból, ahhoz bármilyen elemet választhatok hozzá a másikból. Továbbá ilyenkor a közös lehetőségeloszlás γ-szinthalmazán definiált egyenletes eloszlás peremeroszlásai meg függetlenek. A téglalap alakú szinthalmazok tehát a nem-interaktivitás jellemzői. Ha a közös lehetőségeloszlás egy γ szinthalmaza az a két peremeloszlás γ-szinthalmazainak a Descartes szorzatának a főátlója, akkor az egyik peremeloszlás γ-szinthalmaza a másik peremeloszlás γ-szinthalmazának pozitív affin transzformáltja. Ha a közös lehetőségeloszlás egy γ szinthalmaza az a két peremeloszlás γ-szinthalmazainak a Descartes szorzatának a mellékátlója, akkor az egyik peremeloszlás γ-szinthalmaza a másik peremeloszlás γ-szinthalmazának negatív affin transzformáltja. Ebben a két szélső esetben a közös lehetőségeloszlás γ szinthalmaza csak egy elempárt tartalmaz.

Megjegyzem, hogy 2004-ben eredetileg a [35] cikkben a lehetőségi peremeloszlások kovarianciáját pusztán a szinthalmazaik közötti lehetőségi függőségi relációk alapján vezettük be, és az egyik bíráló megjegyzése alapján jöttünk rá arra, hogy az általunk adott definició az ugyanaz, mintha a közös lehetőségeloszlás szinthalmazain egyenletes eloszlásokat vezetnénk be. A könnyebb szemléltetés végett a 2005-ben megjelent [15] cikkünk óta csak a fenti formában írjuk fel a lehetőségeloszlások mennyiségi jellemzőit és függőségi mértékeit.

A lehetőségi várható értékét és varianciát 2002-ben Carlssonnal és Majlenderrel közösen [10] optimális portfólió kiválasztási problémára, 2003-ban Carlsonnal közösen [12] valós opciók értékelésére, 2007-ben Carlssonnal, Heikkilävel és Majlenderrel közösen [16] ipari kutatás-fejlesztési projektek kiértékelésére, illetve 2013-ban Carlssonnal közösen [18] az AssessGrid projektben alkalmaztuk.

Ezeket a fogalmakat az MTMT szerint többek között használják az optimális részvény portfólió kiválasztási problémákban, az optimális kutatás-fejlesztési portfólió kiválasztási problémákban amerikai típusú vételi és eladási opciók árazására, valós opciók árazására, a befektetési döntéseknél, az ellátásilánc-menedzsmentben, a robot kinematikában, a készletmodellezésben. A témakörben publikált cikkeinkre [7, 10, 12, 15, 18, 33, 35, 36] 941 független MTMT hivatkozás ismert.

4. Fuzzy rendszerek stabilitási tulajdonságai

1988-ban Kovács [40] cikkével megindult a fuzzy lineáris rendszerek stabilitási tulajdonságainak a vizsgálata. 1989-ben megmutattam [20], hogy a fuzzy lineáris programozási (LP) feladatok háromszög alakú fuzzy szám együtthatókkal korrekt felállításúak, azaz a fuzzy számok középpontjainak kis mérési és kerekítési hibái csak kis változást okozhatnak a fuzzy megoldásban. Más szavakkal, a fuzzy LP feladatok fuzzy megoldása folytonosan függ a bemenő paraméterektől. Tehát a fuzzy kiterjesztés azt eredményezi, hogy az általában nemkorrekt felállítású determinisztikus LP feladat korrekt felállításúvá válik, természetesen a fuzzy halmazokon értelmezett metrikában, ami egyben azt is jelenti, hogy pontatlanul rendelkezésre álló együtthatók esetén a megoldására nem kell használni a Tyihonov-féle regularizációs eljárást. Ezt a tételt 1990-ben általánosítottam Lipschitz tulajdonságú fuzzy szám együtthatós posszibilisztikus lineáris egyenletrendszerekre [21], majd 1991-ben teszőleges folytonos fuzzy szám együtthatókos posszibilisztikus lineáris egyenletrendszerekre [25]. A bizonyítás azon alapszik, hogy folytonos fuzzy számok esetén a szinthalmazok közötti maximális különbségből jó felső korlátot lehet adni a tartalmazási függvényeik közötti eltérésre.

1992-ben Fedrizzivel közösen a stabilitási tételeket sikerült kiterjeszteni posszibilisztikus LP-re [19], majd 1994-ben többcélfüggvényü posszibilisztikus LP-re [30]. Továbbá 1996-ban Gioveval és Canestrellivel posszibilisztikus kvadratikus programozási feladatokra [2].

1992-ben Wernerssel közösen [28] és 1993-ban Zimmermannal közösen [29] folytonos implikációs operátorral és folytonos fuzzy szám együtthatókkal rendelkező fuzzy következtetési rendszerekre terjesztettük ki őket. Ezek a tételek akkor születtek amikor az Aacheni Műszaki Egyetemen Hans-Jürgen Zimmermann professzorral dolgoztam 1990-től 1992-ig a Német Akadémiai Csereszolgálat keretében. Az általa vezetett team egy fuzzy szabálybázis által vezérelt modell autót épített fel [37] és ennek a sima és ütközésmentes mozgását a fenti stabilitási tételek alapozták meg elméletileg.

Végül 2000-ben Carlssonnal közösen [5] súlyozott OWA operátorok stabilitási tulajdonságát bizonyítottuk be folytonos fuzzy szám súlyok esetén.

A témakörben publikált [2, 5, 19, 20, 21, 25, 28, 29, 30] cikkeinkre 128 független MTMT hivatkozás ismert.

5. Fuzzy aritmetika

A trianguláris normákat (röviden t-norma) Schweizer és Sklar [42] vezették be 1963-ban a probabilisztikus metrikus terekben a távolság modellezésére. A fuzzy halmazok elméletében a t-normákat a logikai "és" művelet modellezésére használjuk. A klasszikus függvényeket a Zadeh kiterjesztési elve [45] szerint terjeszthetjük ki fuzzy terekre. Az LR-típusu fuzzy számokon végzett aritmetikai műveletek nagyon egyszerű formát öltenek, ha a Zadeh-féle sup-min kiterjesztési elv szerint értelmezzük őket. Azonban, ha az általánosabb, sup-t-norma kiterjesztési elvet használjuk, akkor az artitmetikai műveletek eredményének a tartalmazási függvényét csak egy - általában nemlineáris - programozási feladat egzakt megoldása adja. Ezzel magyarázható, hogy Dubois és Prade 1981-es problémafelvető [38] cikke után nem foglalkoztak érdemben a t-norma alapú aritmetikai operációkkal, mígnem rájöttem arra, hogy bizonyos típusú fuzzy számok végtelen összegének a kiszámitására a teljes indukció módszere alkalmazható [23, 24]. Az első eredményemet a témakörben 1991-ben értem el [23], ahol a szimmetrikus háromszög-alakú fuzzy számok végtelen összegének a határelosztására adtam zárt formulát arra az esetre, amikor az összeadás műveletét a szorzat t-norma segítségével terjesztettük ki. Az ilyen típusú tételek azért jelentősek, mivel a minimum norma nagyon sokszor nem megfelelő a logikai "és" operátor modellezésére, mivel túl nagy, azaz nem szorítja le eléggé a lényegtelen elemek szerepét (a sup-min végtelen összeg határeloszlása az általában az azonosan egy függvény).

5.1. Tétel (Fullér, [23]). *Legyenek $\tilde{a}_i$ szimmetrikus háromszög alakú fuzzy számok az a_i centrummal és $\alpha > 0$ szélességgel, $i \in \mathbb{N}$. Ha $A := \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ létezik és véges, akkor*

$$\Big[\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n\Big](z) = \exp(-|A - z|/\alpha),\ z \in \mathbb{R},$$

ahol $\tilde{A}_n := \tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_n,\ n \in \mathbb{N}$ jelöli az első n fuzzy szám szorzat-összegét.

Kiterjesztve a [23] cikkem eredményeit, 1991-ben a [24] cikkben zárt formulákat adtam az $\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2$ összeg tartalmazási függvényére, abban az esetre, amikor az összeadás műveletét a Hamacher-féle parametrizált t-norma család [39] segítségével terjesztettük ki, azaz

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)(y) &= \sup_{x_1+x_2=y} H_\gamma(\tilde{a}_1(x_1), \tilde{a}_2(x_2)) \\
&= \sup_{x_1+x_2=y} \frac{\tilde{a}_1(x_1)\tilde{a}_2(x_2)}{\gamma + (1-\gamma)(\tilde{a}_1(x_1) + \tilde{a}_2(x_2) - \tilde{a}_1(x_1)\tilde{a}_2(x_2))}, \ \gamma \geq 0.
\end{aligned}
$$

5.2. Tétel (Fullér, [24]). *Az (5.1) tétel jelöléseivel a H_0 összeg határeloszlása az a*

$$
\big[\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n\big](z) = \frac{1}{1 + |A - z|/\alpha}, \ z \in \mathbb{R},
$$

továbbá a H_2 összeg határeloszlása az a

$$
\big[\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n\big](z) = \frac{2}{1 + \exp(2|A - z|/\alpha)}, \ z \in \mathbb{R},
$$

zárt formulával adható meg.

Archimedeszi t-normák esetén az LR-típusu fuzzy számok sup-t-norma konvolúcióval definiált összegére 1992-ben Keresztfalvival közösen adtunk zárt formulát [26].

A Zadeh-féle kiterjesztési elv [45] elég bonyolult mivel a képhalmaz tartalmazási függvényének a meghatározása egy nemlineáris matematikai programozási feladat megoldását igényli minden egyes pontban. 1978-ban Nguyen azonban [41] megmutatta, hogy folytonos f esetén a sup-min kiterjesztéssel definiált képhalmaz α-szinthalmazai előállíthatóak a következő alakban:

$$
[f(A,B)]^\alpha = f([A]^\alpha, [B]^\alpha), \ \alpha \in [0,1],
$$

ahol $A \in \mathcal{F}(X)$, $B \in \mathcal{F}(Y)$ és $f(A,B) \in \mathcal{F}(Z)$-t a $\sup\text{-}\min$ kiterjesztéssel definiáltuk, és $f([A]^\alpha, [B]^\alpha) = \{f(x,y) \,|\, x \in [A]^\alpha, y \in [B]^\alpha\}$.

Nguyen tételét Keresztfalvival közösen terjesztettük ki a sup-t-norma konvolúcióval definiált függvényekre 1991-ben.

5.3. Tétel (Fullér és Keresztfalvi, [22]). *Legyenek X, Y és Z lokálisan kompakt topologikus terek, legyen T egy felülről félig folytonos t-norma, és legyen $f\colon X \times Y \to Z$ egy folytonos függvény. Ha $A \in \mathcal{F}(X)$ és $B \in \mathcal{F}(Y)$ kompakt tartójúak, akkor*

$$
[f(A,B)]^\alpha = \bigcup_{T(\xi,\eta)\geq\alpha} f([A]^\xi, [B]^\eta), \ \alpha \in (0,1].
$$

Ezt a tételt az irodalomban Nguyen-Fullér-Keresztfalvi (NFK) tételként említik [1]. Ez a tétel azért jelentős, mert a fuzzy rendszerekben a műveleteket nagyon sokszor a sup-t-norm konvolúciós kiterjesztési elvvel definiáljuk és az (5.3) tétel segítségével ki lehet számolni a műveletek eredményének a tartalmazási függvényét.

A témakörben publikált [22, 23, 24, 26, 27] cikkeinkre 166 független MTMT hivatkozás ismert.

Hivatkozások

[1] A. Bzowski and M.K. Urbański, A note on Nguyen-Fullér-Keresztfalvi-theorem and Zadeh's extension principle, *Fuzzy Sets and Systems*, 213(2013) 91-101.

[2] E. Canestrelli, S. Giove and R. Fullér, Sensitivity analysis in possibilistic quadratic programming, *Fuzzy Sets and Systems*, 82(1996) 51-56.

[3] C. Carlsson, R. Fullér and S. Fullér, OWA operators for doctoral student selection problem, in: R.R. Yager and J. Kacprzyk eds., *The ordered weighted averaging operators: Theory, Methodology, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997 167-178.

[4] C. Carlsson, R. Fullér, A fuzzy approach to the bullwhip effect, *Cybernetics and Systems '2000, Proceedings of the Fifteenth European Meeting on Cybernetics and Systems Research*, Vienna, April 25 - 28, 2000, Austrian Society for Cybernetic Studies, pp. 228-233. (Best Paper Award)

[5] C. Carlsson and R. Fullér, Benchmarking in linguistic importance weighted aggregations, *Fuzzy Sets and Systems*, 114(2000) 35-41.

[6] C. Carlsson and R. Fullér, Multiobjective linguistic optimization, *Fuzzy Sets and Systems*, 115(2000) 5-10.

[7] C. Carlsson, R. Fullér, On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2001) 315-326.

[8] C. Carlsson and R. Fullér, Reducing the bullwhip effect by means of intelligent, soft computing methods, in: *Proceedings of the 34-th Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS-34)*, Island of Maui, Hawaii, USA, January 3-6, 2001, vol. 3, pp. 3027-3036.

[9] C. Carlsson and R. Fullér, Optimization under fuzzy if-then rules, *Fuzzy Sets and Systems*, 119(2001) 11-120.

[10] C. Carlsson, R.Fullér and P. Majlender, A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score, *Fuzzy Sets and Systems*, 131(2002) 13-21.

[11] C. Carlsson and R. Fullér, *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*, Studies in Fuzziness and Soft Computing Series, Vol. 82, Springer-Verlag, Berlin/Heildelberg, 2002.

[12] C. Carlsson and R. Fullér, A fuzzy approach to real option valuation, *Fuzzy Sets and Systems*, 139(2003) 297-312.

[13] C. Carlsson, R. Fullér and P. Majlender, A note on constrained OWA aggregations, *Fuzzy Sets and Systems*, 139(2003) 543-546.

[14] C. Carlsson, M. Fedrizzi and R. Fullér *Fuzzy Logic in Management*, International Series in Operations Research and Management Science, Vol. 66, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.

[15] C. Carlsson, R. Fullér and P. Majlender, On possibilistic correlation, *Fuzzy Sets and Systems*, 155(2005) 425-445.

[16] C. Carlsson, R. Fullér, M. Heikkilä and P. Majlender, A fuzzy approach to R&D project portfolio selection, *International Journal of Approximate Reasoning* 44(2007) 93-105.

[17] C. Carlsson and R. Fullér, *Possibility for Decision: A Possibilistic Approach to Real Life Decisions*, Studies in Fuzziness and Soft Computing Series, vol. 270/2011, Springer, 2011.

[18] C. Carlsson and R. Fullér, Probabilistic versus possibilistic risk assessment models for optimal service level agreements in grid computing, *Information Systems and e-Business Management*, 11(2013) pp. 13-28.

[19] M. Fedrizzi and R. Fullér, Stability in possibilistic linear programming problems with continuous fuzzy number parameters, *Fuzzy Sets and Systems*, 47(1992) 187-191.

[20] R. Fullér, On stability in fuzzy linear programming problems, *Fuzzy Sets and Systems*, 30(1989) 339-344.

[21] R. Fullér, On stability in possibilistic linear equality systems with Lipschitzian fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 34(1990) 347-353.

[22] R. Fullér and T. Keresztfalvi, On Generalization of Nguyen's theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, 41(1991) 371-374.

[23] R.Fullér, On product-sum of triangular fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 41(1991) 83-87.

[24] R. Fullér, On Hamacher-sum of triangular fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 42(1991) 205-212.

[25] R. Fullér, Well-posed fuzzy extensions of ill-posed linear equality systems, *Fuzzy Systems and Mathematics*, 5(1991) 43-48.

[26] R. Fullér and T. Keresztfalvi, t-Norm-based addition of fuzzy intervals, *Fuzzy Sets and Systems*, 51(1992) 155-159.

[27] R. Fullér, A law of large numbers for fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 45(1992) 299-303.

[28] R. Fullér and B. Werners, The compositional rule of inference with several relations, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 1(1992) 39-44.

[29] R. Fullér and H.-J. Zimmermann, On Zadeh's compositional rule of inference, In: R.Lowen and M.Roubens eds., *Fuzzy Logic: State of the Art*, Theory and Decision Library, Series D (Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1993) 193-200.

[30] R. Fullér and M. Fedrizzi, Stability in multiobjective possibilistic linear programs, *European Journal of Operational Research*, 74(1994) 179-187.

[31] R. Fullér, *Introduction to Neuro-Fuzzy Systems*, Advances in Intelligent and Soft Computing Series, Vol. 2, Springer, 2000.

[32] R. Fullér and P. Majlender, An analytic approach for obtaining maximal entropy OWA operator weights, *Fuzzy Sets and Systems*, 124(2001) 53-57.

[33] R. Fullér and P. Majlender, On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 136(2003) 363-374.

[34] R. Fullér and P. Majlender, On obtaining minimal variability OWA operator weights, *Fuzzy Sets and Systems*, 136(2003) 203-215.

[35] R. Fullér and P. Majlender, On interactive fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 143(2004) 355-369.

[36] R. Fullér, J. Mezei and P. Várlaki, An improved index of interactivity for fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 165(2011) 56-66.

[37] C. von Altrock, B. Krause and H.-J. Zimmermann Advanced fuzzy logic control of a model car in extreme situations, *Fuzzy Sets and Systems*, 48(992) 41-52.

[38] D. Dubois and H. Prade, Additions of interactive fuzzy numbers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, (26)1981 926-936.

[39] H. Hamacher, Über logische Aggregationen nicht binär explizierter Entscheidung-kriterien, Rita G.Fischer Verlag, Frankfurt, 1978.

[40] M. Kovács, Fuzzification of ill-posed linear systems, in: D. Greenspan and P. Rózsa eds., *Colloquia mathematica societatis János Bolyai 50. Numerical methods (Miskolc, 1986)*, North-Holland, Amsterdam, 1988 521-532.

[41] H.T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 64(1978) 369-380.

[42] B.Schweizer and A.Sklar, Associative functions and abstract semigroups, *Publ. Math. Debrecen*, 10(1963) 69-81.

[43] R.R.Yager, Ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1988) 183-190.

[44] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8(1965) 338-353.

[45] L.A. Zadeh, The concept of linguistic variable and its applications to approximate reasoning, Parts I,II,III, *Information Sciences*, 8(1975) 199-251; 8(1975) 301-357; 9(1975) 43-80.

[46] L.A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1978) 3-28.