Doktori értekezés tézisei

Loopok és csoportok

Csörgő Piroska

Budapest, 2009

I. Kitűzött kutatási problémák

A doktori munka, ahogy a cím is mutatja, két nagy részre tagolódik. Az első rész a loopokkal kapcsolatos kutatási eredményekre épül, a második rész a klasszikus csoportelmélet bizonyos területein végzett vizsgálatok eredményeit mutatja be. Bár a loop mint algebrai struktúra lényegesen különbözik a csoporttól, hiszen nem érvényes benne az asszociativitás, de egy, a loopok szorzáscsoportjára vonatkozó karakterizációs tétel lehetőséget teremt arra, hogy bizonyos loopelméleti problémákat átfordíthassunk a csoportelmélet nyelvére. Így ez a két terület szorosan összekapcsolódik.

A loopelméleti részben az első probléma az Abel-féle belső permutációcsoportokkal rendelkező loopok nilpotencia-osztályával kapcsolatos. Több mint 60 évvel ezelőtt Bruck, aki a loopelmélet alapjait fektette le, bebizonyította, hogy ha a loop nilpotencia-osztálya kettő, akkor a belső permutációcsoportja Abel-féle. Hosszú ideig probléma volt Bruck eredményének megfordítása, vagyis igaz-e, hogy a belső permutációcsoport kommutativitása maga után vonja, hogy a loop nilpotencia-osztálya legfeljebb kettő. Bizonyos loop-osztályokban (pl. LCC loopokban), valamint különböző szerkezetű belső permutációcsoportok esetén elemeztük a nilpotencia-osztályt. Végül a Bruck-tétel megfordításával kapcsolatos problémára illetve sejtésre is választ adtunk.

A probléma vizsgálata során egy másik, korábban felvetett kérdésre is további válaszokat kaptunk, nevezetesen hogy, milyen Abel-csoportok jelenhetnek meg (illetve nem jelennek meg) valamely loop belső permutációcsoportjaként.

A következő problémakör a Buchsteiner loopok vizsgálata során merült fel, hogy mit mondhatunk általánosan az olyan loopok szorzáscsoportjáról, ahol a nucleus feletti faktorloop Abel-csoport, és milyen összefüggés van a fenti tulajdonság és aközött, hogy a loop a centruma felett csoport.

A loopelmélet utolsó részében feloldhatósági problémákkal foglalkoztunk. Bruck bebizonyította, hogy a loop nilpotenciája maga után vonja a szorzáscsoport feloldhatóságát. A megfordítás azonban nem igaz, ismert, hogy véges loop esetén a szorzáscsoport feloldhatóságából a loopnak csak a feloldhatósága következik. A probléma természetesen vetődött fel: a belső permutációcsoport milyen tulajdonságai garantálják a szorzáscsoport feloldhatóságát, következésképpen a loop feloldhatóságát.

A dolgozat második része a klasszikus véges csoportokkal kapcsolatos. Először bizonyos minimális részcsoportok bizonyos jól meghatározott tulajdonságainak hatását vizsgáltuk a csoport szerkezetére, elsősorban a szuperfeloldhatóság szempontjából. Az egyik tulajdonság a normálosztóság egy gyengített változata az S-quasinormalitás. A cél korábbi eredmények kiterjesztése és telített formációkra való általánosítása volt. Hasonló eredményeket akartunk elérni S-quasinormalitás helyett $\mathcal{H}$-tulajdonságot feltételezve. Bizonyos esetekben mindkét területen igyekeztünk pontos szerkezeti leírást is adni a kapott csoportosztályokra.

A szuperfeloldhatóságra vonatkozóan újabb karakterizációs tételeket is kaptunk. Ezeket a $\mathcal{H}$-tulajdonsággal ötvözve feloldható T-csoportok új szerkezeti leírását adtuk.

Felhasználva az S-quasinormalitás vizsgálatakor kapott tulajdonságokat, a feloldható T-csoportokra vonatkozó korábbi tételeket igyekeztünk kiterjeszteni T^*-csoportokra (vagy PST-csoportokra). Ezen a területen is sikerült új szerkezeti leírásokat adni.

II. Módszerek és források

a) A loopelméleti részben a fő vizsgálati módszer a következő volt: A felmerülő problémákat áttranszformáltuk a loop szorzáscsoportjában megjelenő csoportelméleti problémává. Itt a transzverzálisok technikáját alkalmazva, a csoportelmélet klasszikus módszereivel és eszközeivel dolgoztunk, majd a kapott eredményt egy karakterizációs tétel segítségével visszafordítottuk a loopok nyelvére.

Ebben a részben a legfőbb forrásmunkák Bruck eredményei [Br], M. Niemenmaanak és T. Kepkának elsősorban a loopok szorzáscsoportjára vonatkozó munkái [KN1], [NK1], [NK2], [NK3]. Niemenmaanak a feloldhatósággal és az Abel-féle belső permutációcsoporttal kapcsolatos eredményei [N3], [N4], [N5], [MN], A. Drápalnak a CC és LCC loopokkal kapcsolatosan végzett vizsgálatai [D1], [D2] voltak.

b) A csoportelméleti részben a tudományágban szokásos klasszikus vizsgálati módszerekkel dolgoztunk. Elsősorban az alábbi forrásokra támaszkodtunk:

Az S-quasinormalitással kapcsolatosan J. Buckley [Bu], O. H. Kegel [Ke], A. Yokoyama [Yo1], [Yo2], A. Shaalan [Sha], M. Asaad, A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera [AsBP] munkái, a $\mathcal{H}$-tulajdonsághoz fűződően M. Bianchi, A. G. B. Mauri, M. Herzog, A. Verardi [BMHV] cikke, a T- és T^*-csoportokra vonatkozóan G. Zacher [Za], W. Gaschütz [Ga], R. K. Agrawal [Ag], T. A. Peng [Pe] munkái.

Az itt említett cikkek adatai a III. rész végén lévő irodalomjegyzékben találhatók.

III. Eredmények

1. Loopelmélet

Egy Q halmaz *kvázicsoport*, ha értelmezett rajta egy olyan bináris művelet, hogy minden $a, b \in Q$ esetén az $ax = b$ és $ya = b$ egyenleteknek egyetlen megoldása van. Egy Q kvázicsoport *loop*, ha létezik neutrális eleme 1, amelyre $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ teljesül minden $x \in Q$ esetén.

Az $ax = b$ és $ya = b$ egyenletek megoldásait jelöljük $x = a \setminus b$ és $y = b/a$.

A loopelmélet viszonylag fiatal terület, aminek gyökerei a projektív geometriára és a latin négyzetekre nyúlnak vissza.

A véges kvázicsoportok szorzástáblája nyilván latin négyzet, a véges loopok szorzástáblájának pedig az úgynevezett normált latin négyzet felel meg, vagyis ahol az első sorban és az első oszlopban az elemek természetes sorrendben vannak.

A Desargues axiómáknak eleget tevő projektív síkok algebrai koordinátázásakor nem asszociatív, de invertálható kétváltozós műveletekkel megadható algebrai struktúrák jelentek meg, ez vezetett többek között a kompozíció algebrák, osztásgyűrűk, majd a kvázicsoportok és a loopok vizsgálatához.

Az első nagyobb munkák a 30-as évekből Ruth Moufangtól [M1], [M2] és G. Boltól származnak, akik olyan speciális tulajdonságú loopokat vizsgáltak, amelyek bizonyos geometriai konfigurációk alapján születtek, nevezetesen a hiperbolikus tér transzlációit és a nemnulla oktávokat.

A kvázicsoportok elméletének kidolgozása A. Albert [Al1], [Al2] és R. Baer [Bae1] nevéhez fűződnek. Végül 1946-ban R. Bruck [Br] fektette le a loopelmélet alapjait egy több mint 100 oldalas munkájában. Ő definiálta a szorzáscsoport és a belső permutációcsoport fogalmát, megteremtve ezzel a loopelmélet és a csoportelmélet közötti kapcsolatot. A 60-as, 70-es, 80-as években számos looposztály vizsgálata fűződik pl. Baer, Glauberman, Doro, Smith és Liebeck nevéhez. Később egészen új területeken is alkalmazták az elméletet, pl. J. H. Conway egy speciális típusú loopot használt a Fischer–Griess Monster konstruálásakor a csoportelméletben.

A 90-es években T. Kepka és M. Niemenmaa a loopok szorzáscsoportjának egy karakterizációját adta meg, ezzel lehetőséget nyújtva arra, hogy bizonyos loopelméleti problémák, például a nilpotencia és a feloldhatósági kérdések, csoportelméleti problémaként jelenjenek meg.

1.1. Definíciók, alapfogalmak és eredmények a loopelméletben

Definíciók:

Egy Q loop *kommutatív*, ha benne a művelet kommutatív.

Egy $H \subseteq Q$ *részloop*, ha H is loop a Q-beli műveletre. Jele: $H \leq Q$.

Egy $H \leq Q$ *normális részloop*, ha $aH = Ha$, $a(bH) = (ab)H$ és $(Hb)a = H(ba)$ minden $a, b \in Q$ esetén. Jele: $H \trianglelefteq Q$.

$H \trianglelefteq Q$ esetén a különböző Hx mellékosztályok a $(Hx)(Hy) = H(xy)$ szorzásra loopot alkotnak, amelynek neve Q-nak H-szerinti *faktorloopja*. Jele: Q/H.

A Q loop *bal nucleusa*:
$N_\lambda = N_\lambda(Q) := \{a \in Q \mid (ax)y = a(xy) \textit{ minden } x, y \in Q \textit{ esetén.}\}$

Q középső nucleusa:
$N_\mu = N_\mu(Q) := \{a \in Q \mid (xa)y = x(ay) \textit{ minden } x, y \in Q \textit{ esetén.}\}$

Q jobb nucleusa:
$N_\rho = N_\rho(Q) := \{a \in Q \mid (xy)a = x(ya) \textit{ minden } x, y \in Q \textit{ esetén.}\}$

Q nucleusa:
$N = N_\lambda \cap N_\mu \cap N_\rho$

Q centruma:
$Z(Q) = \{a \in N \mid xa = ax \textit{ minden } x \in Q \textit{ esetén } \}$

Az *$x, y \in Q$ elemek kommutátora* $[x, y] = (yx)\backslash(xy)$.

Az *$x, y, z \in Q$ elemek asszociátora* $[x, y, z] = (x(yz))\backslash((xy)z)$.

A Q loop *asszociátor részloopja* $\mathcal{A}(Q)$ az a legkisebb normális részloopja Q-nak, amelyre $Q/\mathcal{A}(Q)$ csoport.

A Q loop *kommutátor-asszociátor részloopja* Q' az a legkisebb normális részloopja Q-nak, amelyre Q/Q' Abel-csoport.

Definíció: *Egy Q loop feloldható, ha létezik a következő típusú lánca:*
$1 = Q_0 \leq Q_1 \leq \cdots \leq Q_n = Q$, *ahol* $Q_{i-1} \trianglelefteq Q_i$ *és* Q_i/Q_{i-1} *Abel-csoport minden* $1 \leq i \leq n$ *esetén.*

Definíció: *Legyen Q egy loop és legyen $Z_0 = 1$, $Z_1 = Z(Q)$, $Z_i/Z_{i-1} = Z(Q/Z_{i-1})$. Így normális részloopok egy sorozatát kapjuk. Ha $Z_{n-1} \neq Q$, de $Z_n = Q$, akkor azt mondjuk hogy Q centrálisan nilpotens és nilpotencia-osztálya n, vagyis* $\mathrm{cl}\, Q = n$.

Definíció: *Legyen Q egy loop és $a \in Q$. Ekkor az $L_a(x) = ax$ (bal eltolás) és $R_a(x) = xa$ (jobb eltolás) leképezések permutációk Q elemein.*
Q bal szorzáscsoportja: $\mathcal{L} = \langle L_a \mid a \in Q\rangle$
Q jobb szorzáscsoportja: $\mathcal{R} = \langle R_a \mid a \in Q\rangle$
Q szorzáscsoportja: $\mathrm{Mlt}\, Q = \langle L_a, R_a \mid a \in Q\rangle$
Q belső permutációcsoportja $\mathrm{Inn}\, Q$ *az* 1 *elem stabilizátora Q szorzáscsoportjában.*
Megjegyezzük, hogy ha a Q loop csoport, akkor $\mathrm{Inn}\, Q$ a csoport szokásos belső automorfizmuscsoportját jelenti.

Tudjuk, hogy egy Q loop pontosan akkor csoport, ha minden $a, b \in Q$ esetén létezik $c \in Q$, hogy $L_a L_b = L_c$.

A szorzáscsoport tulajdonságai: Legyen Q egy loop. Jelölje $A = \{L_a \mid a \in Q\}$, $B = \{R_a \mid a \in Q\}$. Ekkor A és B bal transzverzálisok $\mathrm{Inn}\, Q$-hoz $\mathrm{Mlt}\, Q$-ban, $[A, B] \le \mathrm{Inn}\, Q$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{Mlt}\, Q$ és $\mathrm{core}_{\mathrm{Mlt}\, Q}\mathrm{Inn}\, Q = 1$.

M. Niemenmaa és T. Kepka bebizonyította, hogy a fenti tulajdonságok karakterizálják is a loop szorzáscsoportját.

1. Tétel. *Egy G csoport izomorf egy loop szorzáscsoportjával akkor és csak akkor, ha G-nek van egy olyan H részcsoportja, amelyre $\mathrm{core}_G H = 1$ és léteznek a H-hoz A és B „H-connected” bal transzverzálisok, (a „H-connected” azt jelenti, hogy $[A, B] \le H$), valamint $\langle A, B\rangle = G$.*

Nyilván G játssza $\mathrm{Mlt}\, Q$ szerepét, H $\mathrm{Inn}\, Q$ lesz, A és B pedig a bal és jobb eltolások halmaza.

A G csoportból megkonstruálhatjuk a Q loopot a következő módon:
Q elemei a G csoport H-szerinti bal mellékosztályai lesznek. Tetszőleges $a, b \in A$ esetén $(aH)(bH) = (cH)$ akkor és csak akkor, ha $abH = cH$, ahol $c \in A$.

1.2. Az Abel-féle belső permutációcsoport és a nilpotencia-osztály kapcsolata

Jól ismert tény, hogy egy csoport nilpotencia-osztálya akkor és csak akkor legfeljebb kettő, ha a belső automorfizmuscsoportja Abel-féle. 1946-ban Bruck [Br] bebizonyította, hogy egy 2 nilpotencia-osztályú loop belső permutációcsoportja Abel-féle. A kérdés Bruck eredményeinek megfordítása volt:

1.2.1. Probléma. *Vajon minden Abel-féle belső permutációcsoporttal rendelkező loop nilpotencia-osztálya legfeljebb 2?*

T. Kepkának és M. Niemenmaanak sikerült bebizonyítani [NK2], [NK3] a véges loopok nilpotenciáját Abel-féle belső permutációcsoport esetén, de a nilpotencia-osztályra nem tudtak felső korlátot adni. Sok évig az volt az előzetes vélemény, hogy Bruck eredményének megfordítása igaz. Ezt számos tény támasztotta alá. Bizonyos looposztályokban pl. LCC loopok esetén A. Drápallal igazoltuk [CsD1] a 2 nilpotencia-osztályt.

Különböző szerkezetű belső permutációcsoportoknál is a vizsgálatok mindig legfeljebb 2 nilpotencia-osztályt mutattak. [NK2], [NK3], [CsJK], [CsK], [Cs2].

Ismert, hogy egy loop nilpotencia-osztálya akkor és csak akkor 2, ha a szorzáscsoport kommutátor részcsoportja benne van a belső permutációcsoport normalizátorában, vagyis $(\operatorname{Mlt} Q)' \leq N_{\operatorname{Mlt} Q}(\operatorname{Inn} Q)$.

Így a Niemenmaa–Kepka-féle karakterizációs tételt használva (1. Tétel) véges loopok esetén az 1.2.1. Probléma ekvivalens lesz a következő problémával:

1.2.2. Probléma. *Legyen G véges csoport és H olyan Abel-féle részcsoportja G-nek, melyre $\operatorname{core}_G H = 1$. Tegyük fel, hogy léteznek A és B „H-connected" (vagyis $[A, B] \leq H$) bal transzverzálisok H-hoz a G-ben, amelyekre $\langle A, B\rangle = G$. Igaz-e, hogy ekkor $G' \leq N_G(H)$?*

Az eredeti célom a Bruck-eredmény megfordításának igazolása volt. Az 1.2.2. Probléma vizsgálata során egy minimális rendű G ellenpéldát tekintettem. Majd bevezettem az úgy nevezett „nice subclass" fogalmát:

Definíció: *Jelölje $\mathcal{F}$ azon (G, H) párok osztályát, ahol G véges csoport, H Abel-féle valódi részcsoport G-ben, léteznek A és B bal transzverzálisok H-hoz a G-ben, melyekre $[A, B] \leq H$ és $\langle A, B\rangle = G$.*

Legyen $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$, azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}^*$ „nice subclass" $\mathcal{F}$-ben, ha minden $(G, H) \in \mathcal{F}^*$ és $(G/N, HN/N) \in \mathcal{F}$ esetén, ahol N normálosztó G-ben, $(G/N, HN/N) \in \mathcal{F}^*$ is teljesül.

Ezután tetszőleges $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$ „nice subclass" esetén az olyan minimális rendű G csoport tulajdonságait vizsgáltuk, amelyre $(G, H) \in \mathcal{F}^*$ és $G' \nleq N_G(H)$:

1.2.3. Tétel. [Cs2, Proposition 3.4] *Legyen $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$ „nice subclass" $\mathcal{F}$-ben. Tegyük fel, hogy G minimális rendű olyan csoport, hogy $(G, H) \in \mathcal{F}^*$ és $G' \nleq N_G(H)$. Jelölje G_0 a H-nak a normális lezártját G-ben. Ekkor igazak a következők:*

i, $G_0 \cap Z(G)$ *p^k rendű ciklikus csoport valamely p prímre.*

ii, *Jelölje Z_0 a $G_0 \cap Z(G)$ ciklikus csoport minimális részcsoportját. Ekkor H és Z_0H p-csoportok és $Z_0H \trianglelefteq G_0$, továbbá $Z_0H \neq G_0$.*

iii, *G_0 p-csoport.*

iv, *Jelölje $U = \operatorname{core}_G Z_0H$ és $H_0 = U \cap H$. Ekkor H_0 elemi Abel p-csoport, $U = H_0 \times Z_0 \leq Z(G_0)$, és $G_0' \leq U$.*

v, *$H(Z(G) \cap G_0) \trianglelefteq G_0$, és $G_0/H(Z(G) \cap G_0)$ elemi Abel p-csoportok.*

vi, *$H/Z(G_0) \cap H$ elemi Abel p-csoport.*

vii, *$G_0/Z(G_0)$ elemi Abel p-csoport.*

viii, *$G_0/H(Z(G) \cap G_0) \cong H/H \cap Z(G_0)$.*

ix, *Nem létezik olyan $a \in A$, hogy $H^a(H(Z(G) \cap G_0)) = G_0$.*

Miután a minimális rendű ellenpélda vizsgálata során nem jutottam ellentmondásra, figyelembe véve az 1.2.3. Tételben kapott tulajdonságokat a $p = 2$, $|H_0| = 2^3$ és $|H| = 2^6$

választással megpróbáltam ellenpéldát konstruálni. Szemidirekt szorzatokkal dolgoztam (kézzel, nem számítógéppel), miközben tekintetbe vettem a belső permutációcsoport normális lezártjával kapcsolatos a 2 nilpotencia-osztályra vonatkozó (később bemutatandó) 1.2.5. és 1.2.6. Tételeket. Végül sikerült a konstrukció, negatív választ adva így az 1.2.2. Problémára.

Ellenpélda az 1.2.2. Problémára: [Cs1] *Egy* $8192 (= 2^{13})$ *elemű* G *csoport konstrukciója, amelynek van egy* 2^6 *rendű elemi Abel-féle* H *részcsoportja, amelyre* $\mathrm{core}_G H = 1$. *A* G *csoportban léteznek olyan* A *és* B *bal transzverzálisok a* H*-hoz, hogy* $[A, B] \leq H$ *és* $\langle A, B \rangle = G$*, valamint* $G' \not\leq N_G(H)$.

Felhasználva az 1. Tételt az 1.2.1. Problémára is választ kaptam:

Ellenpélda az 1.2.1. Problémára: [Cs1] *A fenti* G *csoport egy 128 elemű* Q *loop szorzáscsoportja lesz,* $\mathrm{Inn}\, Q \cong H$ *elemi Abel* 2^6 *rendű csoport,* A *és* B *elemei pedig a bal és jobb eltolások lesznek,* Q *nilpotencia-osztálya 2-nél nagyobb. A konstrukcióból kiderül, hogy ez a nilpotencia-osztály pontosan 3. A belső permutációcsoport normális lezártja* M_0 *pedig* 2^{10} *elemű, és* $\mathrm{Mlt}\, Q/M_0$ *elemi Abel* 2^3 *rendű csoport.*

Miután én csak a loop szorzáscsoportját adtam meg, a következő lépés a loop szorzástáblájának megadása lett volna. A méretek miatt azonban ez kézzel reménytelen vállalkozásnak tűnt számomra.

G. P. Nagy és P. Vojtěchovský a GAP programmal [NV1] megnézték a loop szerkezetét és ezt felhasználva, mohó algoritmussal sikerült egy újabb 128 elemű loopot találniuk, aminek a nilpotencia-osztálya 3, és a belső permutációcsoportja természetesen Abel-féle.

Mivel az eredeti ellenpélda nem tartozott egyetlen jól ismert loop osztályhoz sem, nemrégiben A. Drápal és P. Vojtěchovský [DV] a GAP program LOOP csomagjával ismét analizálta az ellenpéldám loop szerkezetét, majd két módszert is kifejlesztve, számítógép segítségével számtalan hasonló 128 elemű 3 nilpotencia-osztályú loopot konstruáltak. Kiderült, ahogy cikkükben fogalmazták, hogy ezek között az én általam megadott „very natural”.

Azóta G. P. Nagy és P. Vojtěchovský [NV2] Moufang loopok körében is konstruáltak egy 2^{14} elemű Abel-féle belső permutációcsoporttal rendelkező 3 nilpotencia-osztályú loopot. Ugyanakkor azt is bebizonyították, hogy a páratlan rendű Moufang loopok esetén a nilpotencia-osztály legfeljebb 2 lehet.

Nemrégiben A Drápal és M. K. Kinyon [DK] konstruált egy 3 nilpotencia-osztályú 128 elemű Buchsteiner loopot Abel-féle felső permutációcsoporttal.

A fenti konstrukciók után természetesen vetődik fel a kérdés:

(a) Létezik-e egyáltalán páratlan rendű ellenpélda az az 1.2.1. Problémára, vagyis legalább 3 nilpotencia-osztályú Abel-féle belső permutációcsoporttal rendelkező páratlan rendű loop?

(b) Létezik-e Abel-féle belső permutációcsoporttal rendelkező legalább 4 nilpotencia-osztályú loop?

A minimális rendű ellenpélda vizsgálata során a bevezetett „nice subclass” tulajdonságainak felhasználásával sikerült 2 nilpotencia-osztályt igazolni különböző szerkezetű belső permutációcsoport esetén, kiterjesztve ezzel a korábbi eredményeket is. Megjegyezzük, hogy a 2 nilpotencia-osztály vizsgálatának létjogosultságát, éppen az ellenpélda bizonyítja.

A loopelméleti reprezentációja a [CsJK, Theorem 4.2] eredménynek, ha $\mathrm{Inn}\,Q = C_{p_1} \times C_{p_1} \times C_{p_2} \times C_{p_2} \times \cdots \times C_{p_r} \times C_{p_r}$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_r$ különböző prímek, akkor Q nilpotencia-osztálya 2. Sikerült ezt a tételt általánosítani:

1.2.4. Tétel. [Cs2, Corollary 4.6] *Legyen Q véges loop. Tegyük fel, hogy* $\mathrm{Inn}\,Q$ *Abel-csoport, aminek a Sylow részcsoportjai legfeljebb p^3-rendű elemi Abel-csoportok. Ekkor Q nilpotencia-oszálya legfeljebb* 2.

A belső permutációcsoport normális lezártjára – jelöljük ezt M_0-lal – vonatkozóan is kaptunk elégséges feltételeket a 2 nilpotencia-osztályra:

1.2.5. Tétel. [Cs2, Corollary 4.3] *Legyen Q véges loop és* $\mathrm{Inn}\,Q$ *Abel-féle. Tegyük fel, hogy* $|\mathrm{Inn}\,Q|$ *és* $|\mathrm{Mlt}\,Q : M_0|$ *relatív primek. Ekkor* $\mathrm{cl}\,Q \leq 2$.

1.2.6. Tétel. [Cs2, Corollary 4.4] *Legyen Q véges loop és* $\mathrm{Inn}\,Q$ *Abel-csoport. Tegyük fel, hogy* $\mathrm{Mlt}\,Q/M_0$ *ciklikus. Ekkor* $\mathrm{cl}\,Q \leq 2$.

Az ellenpéldánkban $\mathrm{Mlt}\,Q$ 2-csoport és $\mathrm{Mlt}\,Q/M_0$ elemi Abel 2^3 rendű csoport, ami azt igazolja, hogy ha az utolsó két tételben az M_0-ra vonatkozó elégséges feltételek nem teljesülnek, akkor a 2 nilpotencia-osztály már nem garantált.

1.3. Abel-csoportok, mint belső permutációcsoportok

Számos probléma kapcsolódik az Abel-féle belső permutációcsoporttal rendelkező loopokhoz. Ezek egyike a következő:

1.3.1. Probléma. *Milyen véges Abel-csoportok jelenhetnek meg (vagy nem jelennek meg) valamely loop belső permutációcsoportjaként.*

A kérdést, hogy milyen Abel-csoport lehet valamely csoport belső automorfizmus csoportja, Baer [Bae2] teljes egészében megoldotta:

Legyen G véges Abel-csoport, $G = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$ ciklikus csoportok direkt szorzata, amelyekre $|C_{i+1}|$ osztója $|C_i|$-nek $(1 \leq i \leq n-1)$. Ekkor G-hez akkor és csak akkor létezik olyan H csoport, amelyre $\mathrm{Inn}\,H \cong G$, *ha $n \geq 2$ és $|C_1| = |C_2|$.*

Az eddigi vizsgálatok azt mutatják, hogy loopok körében hasonló eredmény várható. Így a kutatások irányát is ez határozza meg.

M. Niemenmaa meg is fogalmazta ezt a sejtést [N1]:

Sejtés: *Legyen Q véges loop és* $\mathrm{Inn}\,Q = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$ *ciklikus csoportok direkt szorzata, ahol $|C_{i+1}|$ osztója $|C_i|$-nek minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén. Ekkor $n \geq 2$ és $|C_1| = |C_2|$.*

Ennek a problémának a motivációja eredetileg T. Kepka és M. Niemenmaa egy eredménye [NK1] volt: bebizonyították, hogy nem létezik ciklikus belső permutációcsoporttal rendelkező nem asszociatív loop (vagyis ami nem csoport). Ezután számos negatív válasz született az 1.3.1. Problémára. M. Niemenmaa megmutatta [N1], hogy véges loopok esetén $\operatorname{Inn} Q \not\cong C_n \times D$, ahol C_n n-ed rendű ciklikus csoport, D pedig véges Abel-csoport, melyre $(|D|, n) = 1$. Később T. Kepka végtelen loopokra is megmutatta ugyanezt. M. Niemenmaa bebizonyította [N2], hogy véges loopok esetén $\operatorname{Inn} Q \not\cong C_{p^k} \times C_p$, ahol p páratlan prím és $k \geq 2$. [CsJK] szerint ez minden p prímre igaz. [N2]-ben M. Niemenmaa azt is belátta, hogy ha Q véges loop, p és q különböző prímek, p páratlan, q pedig nem osztója $|Q|$-nak, akkor $\operatorname{Inn} Q \not\cong C_{p^k} \times C_p \times D$, ahol $k \geq 2$, D pedig Abel-féle q-csoport. T. Kepkával általánosítottuk ezt az eredményt, felhasználva [CsK, Remark 5.3, Remark 5.5]-t könnyen látható, ha Q véges loop és q olyan prím, hogy $q \nmid |Q|$, akkor $\operatorname{Inn} Q$ nem lehet izomorf egy olyan Abel-csoporttal, ami tartalmaz q-csoportot. A [CsJK, Theorem 4.2] eredményünk loopelméleti következménye: Ha Q véges loop, akkor $\operatorname{Inn} Q \not\cong C_{p_1^{m_1}} \times C_{p_1} \times C_{p_2^{m_2}} \times C_{p_2} \times \cdots \times C_{p_r^{m_r}} \times C_{p_r}$, ahol $p_q, \ldots p_r$ különböző prímek és $m_1 \geq 2, m_2 \geq 0, \ldots, m_r \geq 0$.

A fenti eredményeket próbáltam kiterjeszteni. Ismét a „H-connected” transzverzálisokkal dolgoztam:

Tehát G véges csoport Abel-féle H részcsoporttal. Feltesszük, hogy léteznek G-ben A és B „H-connected” (vagyis $[A, B]$ transzverzálisok H-hoz, $[A, B] \leq H$) és $\langle A, B \rangle = G$.

Két feltételt definiálunk:

$$\text{(a) } G' \leq N_G(H), \qquad \text{(b) } \operatorname{core}_G H \neq 1.$$

A (b) feltétel teljesülése azt jelenti, hogy H nem izomorf valamely Q loop belső permutációcsoportjával, az (a) feltétel pedig a 2 nilpotencia-osztállyal kapcsolatos.

Először az (a) felétételt vizsgáltam a „nice subclass” tulajdonságainak (ld. 1.2.3. Tételt) segítségével:

1.3.2. Tétel. [Cs2, Theorem 3.7] *Ha $H \leq L_p \cong C_p \times C_p \times C_p$, vagy $H \leq M_p \cong C_{p^k} \times C_p$, ahol p tetszőleges prím és $k \geq 2$, akkor H kielégíti* (a)*-t, vagyis $G' \leq N_G(H)$.*

Ennek a tételnek az általánosítása:

1.3.3. Tétel. [Cs2, Theorem 3.9] *Tegyük fel, hogy $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_r$, ahol $H_i \in \operatorname{Syl}_{p_i}(H)$, $H_i \leq L_i \cong C_{p_i} \times C_{p_i} \times C_{p_i}$ vagy $H_i \leq M_i \cong C_{p_i^{k_i}} \times C_{p_i}$, ahol $k_i \geq 2$. Ekkor H kielégíti* (a)*-t, vagyis $G' \leq N_G(H)$.*

Felhasználva ezeket az eredményeket, a (b) feltételhez kapcsolódó állítást kaptunk:

1.3.4. Tétel. [Cs2, Theorem 3.11] *Tegyük fel, hogy $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_r$, ahol $H_i \in \operatorname{Syl}_{p_i}(H)$, $H_1 \cong C_{p_1^{k_1}} \times C_{p_1}$ ahol $k_1 \geq 2$ és minden $2 \leq i \leq r$ esetén $H_i \leq L_i \cong C_{p_i} \times C_{p_i} \times C_{p_i}$ vagy $H_i \leq M_i \cong C_{p_i^{k_i}} \times C_{p_i}$, ahol $k_i \geq 2$. Ekkor H kielégíti* (b)*-t, vagyis $\operatorname{core}_G H \neq 1$.*

A Niemenmaa–Kepka féle karakterizáció (1. Tétel) a következő loopelméleti eredményhez vezetett:

1.3.5. Tétel. [Cs2, Corollary 4] *Ha Q véges loop, akkor* $\operatorname{Inn} Q \ncong H_1 \times \ldots H_r$*, ahol* $H_1 \cong C_{p_1^{k_1}} \times C_{p_1}$*,* $k_1 \geq 2$*, és minden* $2 \leq i \leq r$ *esetén* $H_i \leq L_i \cong C_{p_i} \times C_{p_i} \times C_{p_i}$ *vagy* $H_i \leq M_i \cong C_{p_i^{k_i}} \times C_{p_i}$*,* $k_i \geq 2$ *és* $p_1, p_2, \ldots, p_r$ *különböző prímek.*

A kapott negatív válasz általánosítása a korábbi negatív válaszoknak, és erősíti a sejtést, hogy a csoportokra vonatkozó Baer tételhez hasonló állítás igaz a loopok körében is.

Nemrégiben M. Niemenmaa [N3] kiterjesztette ezt az 1.3.5. Tételt. Bebizonyította, hogy a belső permutációcsoport nem lehet izomorf $C_{p^k} \times C_p \times C_p$ típusú csoportok direkt szorzatával, ahol p páratlan prím és $k \geq 2$. A bizonyítás erősen támaszkodik az 1.3.5. Tételre.

1.4. LCC loopok és a nilpotencia-osztály

Egy Q loopot CC (conjugancy closed) loopnak nevezünk, ha az $A = \{L_x \mid x \in Q\}$ és $B = \{R_x \mid x \in Q\}$ halmazok zártak a konjugálásra, vagyis minden $a, b \in Q$ esetén létezik $c, d \in Q$ olyan, hogy $L_a^{-1} L_b L_a = L_c$ és $R_a^{-1} R_b R_a = R_d$. A konjugálásra zártság fogalmát Soikis vezette be [So], később tőle függetlenül Goodaire és Robinson [GR] definiálta ugyanezt a fogalmat. Meg kell még említenünk, M.K. Kinyon, K. Kunen, J.D. Phillips [KKP] valamint P. Nagy és K. Strambach [NStr] cikkeit, akiknek az eredményei kielmelkedőek ezen a területen.

Egy Q loopot LCC (left conjugancy closed) loopnak nevezünk, ha csak az $A = \{L_x \mid x \in Q\}$ halmaz zárt a konjugálásra. Az LCC loopok fogalmát Soikis [So] és Basarab [Bas] vezette be. Ezenkívül A. Drápal [D2] és P. Nagy és K. Strambach [NStr] cikkei tekinthetők még fő forrásoknak. Ez utóbbi cikk nagy része az LCC loopok geometriáját tárgyalja. A. Drápal [D1]-ben vizsgálta a CC loopok szorzáscsoportját, majd [D2]-ben sikerült a CC loopok bizonyos alaptulajdonságait bebizonyítania LCC loopokra is. Ezek egyike, ami igen meghatározó volt az LCC loopokkal kapcsolatos kutatásokban, a következő:

1.4.1. Tétel. [D2] *Legyen Q LCC loop. Ekkor egyetlen olyan* $\Lambda : \mathcal{L} \to \operatorname{Inn} Q$ ($\mathcal{L} = \langle L_x \mid x \in Q \rangle$) *homomorfizmus létezik, amelyre* $\Lambda(L_x) = T_x$ ($T_x = R_x^{-1} L_x$) *létezik minden* $x \in Q$ *esetén. Ez a* Λ *homomorfizmus az* $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap \operatorname{Inn} Q$ *elemein az identitás lesz és* $\operatorname{Ker} \Lambda = \{R_x \mid x \in Q\} \cap \mathcal{L} = \mathrm{Z}(\mathcal{L})$*, továbbá ha* $R_x \in \mathrm{Z}(\mathcal{L})$*, akkor* $x \in N_\rho$*.*

[Cs3]-ban vizsgáltam ennek a homomorfizmusnak a különböző lehetséges kiterjesztéseit, valamint ezen kiterjesztések egyértelműségét.

Épp a fenti homomorfizmus tétel segítségével sikerült pozitív választ adni LCC loopok esetén a Bruck tétel megfordítására [Br]. Emlékeztetnék, hogy Bruck bebizonyította, hogy 2 nilpotencia-osztályú loopok belső permutációcsoportja Abel-féle.

A Bruck-eredménytől függetlenül, LCC loopokra A. Drápallal bebizonyítottuk a következő ekvivalenciát:

1.4.2. Tétel. [CsD1, Theorem 2.7] *Legyen Q egy LCC loop. Ekkor $Q/Z(Q)$ Abel-csoport, vagyis Q nilpotencia-osztálya legfeljebb 2, akkor és csak akkor, ha* $\operatorname{Inn} Q$ *Abel-csoport.*

LCC loopok esetén a Bruck eredmény megfordításának eredeti bizonyítása klasszikus csoportelméleti eszközökkel az „H-connected" transzverzálisok segítségével történt.

A disszertációban ezt a csoportelméleti bizonyítást mutatom be, ami különbözik a cikkben megjelenttől, a lényeges ideák persze ugyanazok. Összehasonlítva a két bizonyítást, jól látható, mennyire különbözik a „connected" transzverzálisok nyelve a tiszta loopelmélettől.

Tehát a tétel a csoportelmélet nyelvén:

1.4.3. Tétel. *Legyen G véges csoport egy H Abel-féle részcsoporttal, melyre* $\operatorname{core}_G H = 1$. *Tegyük fel, hogy létezik A és B „H-connected" ($[A, B] \leq H$) bal transzverzális H-hoz a G-ben, olyan, hogy $\langle A, B\rangle = G$ és $A^a = A$ minden $a \in A$ esetén. Ekkor $G' \leq N_G(H)$.*

A következőkben megvizsgáltuk, hogy egy 2 nilpotencia-osztályú loop milyen tulajdonságai garantálják, hogy a loop LCC legyen. Munkánk az alábbi tételt eredményezte:

1.4.4. Tétel. [CsD1, Corollary 3.2, Corollary 3.4, Theorem 4.4] *Legyen Q nilpotencia-osztálya 2. Ekkor a kovetkező állítások ekvivalensek:*

i, *Q LCC loop*
ii, $\mathcal{L}/\mathrm{Z}(\mathrm{Mlt}\, Q)$ *Abel-csoport, ahol* $\mathcal{L} = \langle L_a \mid a \in Q\rangle$
iii, $L(x, y) = L(y, x)$ *minden* $x, y \in Q$ *esetén* $\big(L(x, y) = L_{xy}^{-1} L_x L_y\big)$
iv, $[x, y, z] = [x, z, y]$ *minden* $x, y, z \in Q$ *esetén*
v, $[x, y, z] = [x, y, z]^{-1}[x, z]^{-1}[y, z]^{-1}$ *minden* $x, y, z \in Q$ *esetén*

A [CsD1] cikkben teljes szerkezeti leírást adtunk a p^2 rendű nilpotens LCC loopokról.

Később A. Drápallal [CsD2] olyan LCC loopok szerkezeti tulajdonságait analizáltuk, amelyek bal szorzáscsoportja $\mathcal{L} = \langle L_a \mid a \in Q\rangle$ normálosztó a szorzáscsoportban.

1.5. Buchsteiner loopok és olyan loopok, amelyek a nucleus felett Abel-csoportok

1976-ban H. H. Buchsteiner [Buch] vezette be azt a looposztályt, amely a következő azonosságot elégíti ki:

$$x \setminus ((xy)z) = (y(zx)) \,/\, x.$$

Később ez a looposztály kapta a Buchsteiner-loopok elnevezést. Buchsteiner a cikkében számos problémát hagyott nyitva, így néhány évvel ezelőtt A. Drápallal és M. K. Kinyonnal vizsgálni kezdtük ezen loopok alaptulajdonságait és kiderült, hogy igen közel vannak a CC loopok osztályához. A főbb eredmények egyike, hogy a Buchsteiner loopok nucleusa normális részloop, és a faktorloop a nucleus felett Q/N Abel-csoport [CsDK], mint a CC loopok esetében is. Ugyanebben a cikkben sikerült kimutatni, hogy Q/N

exponense 4, és ez az exponens meg is jelenik Drápal és Kinyon egy konstrukciójában [CsDK]. A másik főbb eredmény, ami a Buchsteiner loopoknak a CC loopokhoz való közelségét mutatja, A. Drápallal egy közös tételünk [CsD3], mely szerint a Buchsteiner loop centrum szerinti faktora CC loop. Buchsteiner nem használta a CC loop fogalmát, és mint cikkéből kiderült, az általa konstruált példák mindegyike CC loop volt. A. Drápallal közösen írt cikkünkben [CsD4] Drápal bemutatja a konstrukcióját az első olyan Buchsteiner loopnak, amely nem CC loop.

Ide kívánkozik az az állításunk, hogy egy Q CC loop pontosan akkor Buchsteiner loop, ha minden $x \in Q$ esetén x^2 eleme a nucleusnak.

A Buchsteiner loopokra vonatkozó fent említett két fő eredmény szolgált motivációként a további kutatásokban. A. Drápallal közösen írt cikkünkben [CsD3] olyan loopokat vizsgáltunk általánosan, amelyekben a nucleus normális részloop és a nucleus szerint vett faktorloop Abel-csoport. Olyan feltételeket kerestünk – és ezeket a Buchsteiner loopok tulajdonságai közül választottuk – amelyek már garantálják, hogy a centrum szerinti faktorloop CC loop legyen. Ekkor a következő eredményeket kaptuk:

A tételekben $A = \{L_x \mid x \in Q\}$, $B = \{R_x \mid x \in Q\}$. Azt mondjuk, hogy Q $A_{l,r}$-loop, ha $\langle A \rangle \cap \operatorname{Inn} Q \leq \operatorname{Aut} Q$ és $\langle B \rangle \cap \operatorname{Inn} Q \leq \operatorname{Aut} Q$ ahol $\operatorname{Aut} Q$ a Q loop automorfizmuscsoportját jelenti.

1.5.1. Tétel. [CsD3, Theorem 3.1] *Legyen Q olyan loop, amelyre a nucleus $N \trianglelefteq Q$, $\langle A \rangle \trianglelefteq \operatorname{Mlt} Q$, $\langle B \rangle \trianglelefteq \operatorname{Mlt} Q$, Q $A_{l,r}$-loop. Ha Q/N Abel-csoport, akkor $Q/Z(Q)$ CC-loop.*

Ezen feltételek gyengíthetők a következőképpen:

1.5.2. Tétel. [CsD3, Theorem 3.2] *Legyen Q $A_{l,r}$-loop, a nucleus $N \trianglelefteq Q$, Q/N Abel-csoport. Ha $[A, B] \leq \operatorname{Aut} Q$, akkor $Q/Z(Q)$ CC loop.*

A [Cs4] cikkben további vizsgálatokat végeztem ebben az irányban. Feltéve, hogy Q/N Abel-csoport és $[A, B] \leq \operatorname{Aut} Q$ szükséges és elégséges feltételt kerestem arra, hogy $Q/Z(Q)$ CC loop legyen. Ehhez bevezettem a következő halmazokat:

$$L_F(Q) = \left\{ L_v^{-1} L_x^{L_y} \mid L_v^{-1} L_x^{L_y} \in \operatorname{Inn} Q, x, y \in Q \right\},$$

$$R_F(Q) = \left\{ R_w^{-1} R_x^{R_y} \mid R_w^{-1} R_x^{R_y} \in \operatorname{Inn} Q, x, y \in Q \right\}.$$

Nyilvánvalóan CC loopok esetén $L_F(Q) = R_F(Q) = \{e\}$. A definíció mutatja, hogy ezen halmazok bizonyos értelemben a loop „távolságát” mérik attól, hogy CC loop legyen.

1.5.3. Tétel. [Cs4, Proposition 3.7] *Legyen Q olyan loop, hogy a nucleus $N \trianglelefteq Q$, Q/N Abel-csoport. Tegyük fel, $[A, B] \leq \operatorname{Aut} Q$. Ekkor $Q/Z(Q)$ CC loop akkor és csak akkor, ha $L_F(Q) \subseteq \operatorname{Aut} Q$ és $R_F(Q) \subseteq \operatorname{Aut} Q$.*

$L_F(Q)$ és $R_F(Q)$ segítségével egy másik ekvivalenciát is kaptunk:

1.5.4. Tétel. [Cs4, Proposition 3.9] *Legyen Q olyan loop, amelyre $N \trianglelefteq Q$, Q/N Abel-csoport. Tegyük fel, hogy $[A, B] \subseteq \operatorname{Aut} Q$. Ekkor $Q/Z(Q)$ CC loop akkor és csak akkor, ha $L_F(Q) \cup R_F(Q) \subseteq Z(\operatorname{Inn} Q)$.*

A. Drápal és M. Kinyon közösen írt cikkükben a Buchsteiner loopokra a következőt igazolták:

1.5.5. Tétel. [DK, Lemma 7.2] *Legyen Q Buchsteiner loop. Ekkor $Q/Z(Q)$ akkor és csak akkor csoport, ha $[A, B] \leq Z(\operatorname{Inn} Q)$.*

A következőkben vizsgálataink tárgya olyan feltételek keresése, amelyek, feltéve, hogy Q/N Abel-csoport, garantálják, hogy $Q/Z(Q)$ csoport legyen.

1.5.6. Tétel. [Cs4, Proposition 3.11] *Legyen Q olyan loop, hogy $N \trianglelefteq Q$, Q/N Abel-csoport, $[A, B] \leq Z(\operatorname{Inn} Q)$. Ekkor $Q/Z(Q)$ csoport.*

$[A, B] \leq \operatorname{Aut} Q$ teljesülése esetén a fenti elégséges feltétel szükséges is lesz:

1.5.7. Tétel. [Cs4, Proposition 3.12] *Legyen Q olyan loop, hogy $N \trianglelefteq Q$, Q/N Abel-csoport, $[A, B] \leq \operatorname{Aut} Q$. Ekkor $Q/Z(Q)$ akkor és csak akkor csoport, ha $[A, B] \leq Z(\operatorname{Inn} Q)$.*

Tudjuk, hogy ha Q Buchsteiner loop, akkor $Q/Z(Q)$ CC loop. A Drápallal közös eredményünk (1.4.2. Tétel), hogy Abel-féle belső permutációcsoport esetén az LCC loopok nilpotencia-osztálya 2. Így az Abel-féle belső permutációcsoporttal rendelkező Buchsteiner loopok esetén a nilpotencia-osztályra felső korlátot kapunk a 3-t. Ez a korlát éles, mert A. Drápal és M. Kinyon [DK]-ban bemutatta a konstrukcióját egy 3 nilpotencia-osztályú 128 elemű Buchsteiner loopnak, amelyre $\operatorname{Inn} Q$ Abel-féle.

Kiderült, hogy nemcsak Buchsteiner loopokra, hanem minden olyan Q loop esetén, melyre Q/N és $\operatorname{Inn} Q$ Abel-csoport, kapjuk a következőt:

1.5.8. Tétel. [Cs4, Theorem 3.14] *Legyen Q loop, $\operatorname{Inn} Q$ Abel-csoport. Tegyük fel, hogy $N \trianglelefteq Q$, Q/N Abel-csoport. Ekkor a következők igazak:*

i, $Q/Z(Q)$ csoport.

ii, Q nilpotencia-oszálya legfeljebb 3.

Ismert, hogy a szorzáscsoport nilpotenciája maga után vonja a loop nilpotenciáját. A fordított állítás általában nem igaz.

Abel-féle belső permutációcsoport esetén tudjuk, hogy a loop nilpotens. Kérdés, hogy ekkor vajon milyen feltételek elégségesek a szorzáscsoport nilpotenciájához. A vizsgálatok azt mutatták, hogy Buchsteiner loopok esetén a szorzáscsoport is nilpotens és a nilpotencia-osztálya nemcsak a loopnak, hanem a szorzáscsoportnak is legfeljebb 3. [Cs4, Proposition 3.19]

A fenti eredmény csupán következménye az alábbi erősebb állításnak:

1.5.9. Tétel. [Cs4, Theorem 3.16] *Legyen Q $A_{l,r}$-loop, $\operatorname{Inn} Q$ Abel-csoport. Tegyük fel, hogy $[A, B] \leq \operatorname{Aut} Q$. Ekkor Q és $\operatorname{Mlt} Q$ nilpotencia-oszálya legfeljebb* 3.

A. Drápallal beláttuk, hogy Abel-féle belső permutációcsoporttal rendelkező Buchsteiner loopokra Q/N elemi Abel 2-csoport [CsD4, Lemma 7.2, Proposition 7.3]. Felhasználva ezt az állítást, teljes jellemzését adtam ezen Buchsteiner loopoknak:

1.5.10. Tétel. [Cs4, Theorem 3.20] *Legyen Q véges loop. Ekkor Q Buchsteiner loop Abel-féle* $\mathrm{Inn}\, Q$*-val akkor és csak akkor, ha $Q = Q_1 \times Q_2$, ahol Q_1 2^t rendű Buchsteiner loop és* $\mathrm{Inn}\, Q_1$ *Abel-csoport, Q_2 pedig páratlan rendű csoport,* $\mathrm{Inn}\, Q_2$ *Abel-csoport, valamint* $\mathrm{Mlt}\, Q = \mathrm{Mlt}\, Q_1 \times \mathrm{Mlt}\, Q_2$*, ahol* $\mathrm{Mlt}\, Q_1 \in \mathrm{Syl}_2\,(\mathrm{Mlt}\, Q)$

1.6. Loopok és csoportok feloldhatósága

Bruck bebizonyította [Br], ha egy Q loop nilpotens, akkor a szorzáscsoportja $\mathrm{Mlt}\, Q$ feloldható. Az állítás megfordítása nem igaz: Legyen Q egy 6 elemű diédercsoport, ekkor $\mathrm{Mlt}\, Q$ feloldható, de Q nem nilpotens. 1996-ban [Ve, Theorem 1] megmutatta, ha Q véges loop, akkor a szorzáscsoport feloldhatósága maga után vonja a loop feloldhatóságát. Ezután természetesen vetődik fel a következő kérdés:

1.6.1. Probléma. *A belső permutációcsoport milyen tulajdonságai garantálják a szorzáscsoport feloldhatóságát?*

T. Kepka és M. Niemenmaa kezdte meg a kutatásokat ebben az irányban. Első eredményük a szorzáscsoport feloldhatóságának bizonyítása véges Abel-féle belső permutációcsoport esetén [NK3], ekkor a loop nilpotenciája is következik. Később M. Niemenmaa tanulmányozni kezdte a nem Abel-féle belső permutációcsoport esetet. Először sikerült belátnia tetszőleges 6-od rendű $\mathrm{Inn}\, Q$ esetén $\mathrm{Mlt}\, Q$ feloldhatóságát [N4]. Következő eredménye a szorzáscsoport feloldhatóságának bizonyítása, ha a belső permutációcsoport diéder 2-csoport [N5], ekkor a loopról kimutatható a nilpotencia is.

1.6.2. Probléma. *Igaz-e a loop szorzáscsoportjának feloldhatósága, ha a belső permutációcsoport rendje 2 különböző prím szorzata?*

Niemenmaa a véges egyszerű csoportok klasszifikációjának felhasználásával részleges választ adott a fenti problémára. Speciális p és q esetén: $q = 2$ és $p \leq 61$, $q = 3$ és $p \leq 31$, $q = 5$ és $p \leq 11$ esetekben bizonyította a szorzáscsoport feloldhatóságát [N6]. Niemenmaanak Myllyläval elért eredménye $\mathrm{Mlt}\, Q$ feloldhatóságának bizonyítása az $|\mathrm{Inn}\, Q| = 2p$ esetben, ha $p = 4t + 3$ alakú páratlam prím.

M. Niemenmaaval közös cikkünkben [CsN1], sikerült az előző állítást tetszőleges p páratlan prím esetén igazolni. Először a csoportokban dolgoztunk, és a transzverzálisok elméletének felhasználásával a következő eredményt kaptuk:

1.6.3. Tétel. [CsN1, Theorem 2.4] *Legyen G csoport, $H \leq G$, $|H| = 2p$, ahol p páratlan prím. Tegyük fel, hogy létezik A és B „H-connected” ($[A, B] \leq H$) transzverzális H-hoz G-ben. Ekkor G feloldható.*

A Niemenmaa és Kepka féle karakterizáció (1. Tétel) és Vesanen tétele adta meg az előző eredmény loopelméleti következményét:

1.6.4. Tétel. [CsN1, Theorem 3.2] *Legyen Q olyan loop, amelyben a belső permutáció-csoport rendje $2p$, ahol p páratlan prím, ekkor* $\mathrm{Mlt}\, Q$ *feloldható. Ha Q véges loop, akkor Q feloldhatósága is következik.*

Kiterjesztve a vizsgálatot olyan loopokra, amelyek belső permutációcsoportja $2p^n$ rendű diéder csoport, ahol p páratlan prím, M. Niemenmaaval és K. Myllyläval közösen írt cikkünkben [CsMN] sikerült bebizonyítani a következőt:

1.6.5. Tétel. [CsMN, Theorem 4.2] *Legyen Q olyan loop, amelynek a belső permutáció-csoportja $2p^n$ rendű diéder csoport p páratlan prímmel. Ekkor* $\mathrm{Mlt}\, Q$ *feloldható csoport, és véges Q esetén Q feloldható loop.*

Később M. Myllylä [My] általánosította az eredményünket $2n$ rendű diéder csoportra, ahol n tetszőleges páratlan szám.

Végül M. Niemenmaaval az 1.6.2 Problémára a korábbinál általánosabb esetben adtunk megoldást.

A csoportban kapott eredmény:

1.6.6. Tétel. [CsN2, Theorem 3.1] *Legyen G csoport, $H \leq G$, $|H| = pq$, ahol $p > q$ olyan páratlan prímek, hogy $p = 2q^m + 1$. Tegyük fel, hogy léteznek A és B „H-connected” transzverzálisok H-hoz G-ben. Ekkor G feloldható.*

A bizonyításban a q-Sylow részcsoportok normalizátorának tulajdonságait elemeztük. Szükségünk volt többek között a transzfer homomorfizmusra és a páratlan rendű csoportok feloldhatóságára is.

A fenti tétel az 1. Tétellel és Vesanen eredményének felhasználásával a következő loopelméleti állításhoz vezetett:

1.6.7. Tétel. [CsN2, Theorem 4.3] *Ha Q olyan véges loop, amelyre* $\mathrm{Inn}\, Q$ *rendje pq, ahol q tetszőleges páratlan prím és $p = 2q^m + 1$ alakú prím, akkor* $\mathrm{Mlt}\, Q$ *feloldható csoport, Q pedig feloldható loop.*

Végül 2002-ben A. Drápalnak sikerült [D3] lezárni az 1.6.2. Problémát, pozitív választ adva az általános p, q esetre. Ő a belső permutációcsoport orbitjainak vizsgálatával ért célba.

2. Klasszikus véges csoportelmélet

2.1. A minimális részcsoportok hatása a véges csoportok struktúrájára

S-quasinormalitás

Kegel nyomán azt mondjuk [Ke], hogy egy H részcsoport „S-quasinormális” (v. π-quasinormális) egy G csoportban, ha H felcserélhető G minden Sylow részcsoportjával. Nyilván minden normálosztó S-quasinormális is.

Ennek a területnek a kialakulását Buckley egy eredménye motiválta [Bu], nevezetesen, ha egy páratlan rendű csoport minden minimális részcsoportja normálosztó, akkor a csoport szuperfeloldható (vagyis minden főfaktora ciklikus). Később tetszőleges véges csoportban a normálosztóság helyett csak az S-quasinormalitást követelték, de kiderült, hogy a szuperfeloldhatósághoz a minimális részcsoportokon kívül a negyedrendű részcsoportok S-quasinormalitására is szükség van [Sha]. Ezután számos szerző vizsgálta bizonyos részcsoportok S-quasinormalitásának hatását, amelyek biztosítják a csoport szuperfeloldhatóságát [Sha], [ARS], [Sr].

Felhasználva a formáció elméletet, az eredményeket kiterjesztették olyan telített formációkra, amelyek tartalmazzák a szuperfeloldható csoportok osztályát [Yo1], [Yo2], [La], [AsBP].

Kiderült, hogy a teljes csoportnak, illetve bizonyos részcsoportoknak a Fitting részcsoportjára vonatkozó S-quasinormalitási feltételek játszanak jelentős szerepet. A következőkben egy G csoport Fitting részcsoportját mindig $F(G)$-vel jelöljük.

M. Asaaddal közösen írt cikkünkben [ACs1] bizonyos minimális és negyedrendű részcsoportokról tettük fel az S-quasinormalitást, és így kaptunk egy telített formációkra vonatkozó ekvivalencia állítást:

2.1.1. Tétel. [ACs1, Theorem 1] *Legyen $\mathcal{F}$ telített formáció, amely tartalmazza a szuperfeloldható csoportok oszályát és legyen G véges csoport. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- *i, $G \in \mathcal{F}$*
- *ii, Létezik G-ben egy olyan H feloldható normálosztó, amelyre $G/H \in \mathcal{F}$ és $F(H)$ minden minimális és negyedrendű részcsoportja S-quasinormális G-ben.*

2.1.2. Következmény. [ACs1, Corollary 4] *Legyen $\mathcal{F}$ telített formáció, amely tartalmazza a szuperfeloldható csoportok oszályát. Tegyük fel, G egy csoport, amelynek H feloldható normálosztója és $G/H \in \mathcal{F}$. Ekkor $G \in \mathcal{F}$ a következő feltételek bármelyikének teljesülése esetén:*

- *i, G 2-nilpotens és $F(H)$ minden páratlan prím rendű részcsoportja S-quasinormális G-ben.*
- *ii, G-nek 2-Sylow részcsoportjai Abel-félék és $F(H)$ minden prímrendű részcsoportja S-quasinormális G-ben.*

Később Li és Wang általánosította eredményünket [LW1], úgy, hogy a normálosztó feloldhatóságát elhagyták és a Fitting részcsoport helyett az általánosított Fitting részcsoportot használták. Bizonyításukban erősen támaszkodtak eredményünkre.

[Cs5]-ben teljes szerkezeti leírást adtam azokról a feloldható csoportokról, amelyek Fitting részcsoportjában lévő minden minimális és negyedrendű részcsoport S-quasinormális a teljes csoportban:

2.1.3. Tétel. [Cs5, Theorem 5] *Legyen G feloldható csoport. Ekkor $F(G)$ minden minimális és negyedrendű részcsoportja S-quasinormális G-ben akkor és csak akkor, ha*

$G = M(N \times K)$, ahol M páratlan rendű nilpotens normálosztó G-ben, N nilpotens részcsoport, K pedig nilpotens Hall-részcsoport G-ben, amelyekre $M \cap (N \times K) = 1$, $F(G) \cap N = 1$ és M minden minimális részcsoportja normálosztó M-ben és S-quasinormális G-ben.

A fenti tételben szereplő M részcsoport Sylow részcsoportjainak szerkezetéről szól az alábbi eredményem, amivel az előző tételt kiegészítve teljes karakterizációt kapunk:

2.1.4. Tétel. [Cs5, Theorem 4] *Legyen G szuperfeloldható csoport, U pedig olyan p-csoport, ami normálosztó G-ben, $p \neq 2$ prím. Ekkor az U minden minimális részcsoportja normálosztó U-ban és S-quasinormális G-ben, akkor és csak akkor, ha U-ban létezik a következő típusú lánc: $1 = U_0 \lhd U_1 \lhd \cdots \lhd U_k = U$, ahol $U_i \lhd G$, $|U_i/U_{i-1}| = p$ minden $1 \leq i \leq k$ esetén és $\Omega_1(U) = U_l \leq Z(U)$ valamilyen l-re, ahol $1 \leq l \leq k$. Továbbá minden olyan $g \in G$-hez, amelyre $(o(g), p) = 1$, létezik egy természetes szám t_g, $1 \leq t_g \leq p-1$, hogy tetszőleges $a \in D$ esetén $a^g = a^{t_g}$, ahol $D = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} (U_i/U_{i-1})$.*

Később M. Asaaddal olyan csoportokat tekintettünk, amelyek nem tartalmazzák a nyolc elemű kvaterniócsoportot. Ebben a részosztályban teljes leírást adtunk azokról a csoportokról, amelyek általánosított Fitting részcsoportjában lévő minden minimális rendű részcsoport S-quasinormális a teljes csoportban:

2.1.5. Tétel. [ACs2, Theorem 1.1] *Legyen G olyan összetett rendű csoport, amely nem tartalmazza a nyolc elemű kvaterniócsoportot. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

i, Az általánosított Fitting részcsoport $F^*(G)$ minden prímrendű részcsoportja S-quasinormális G-ben.

ii, $G = UW$, ahol U páratlan rendű nilpotens Hall féle részcsoport G-ben, $U \lhd G$, W pedig szuperfeloldható Hall-részcsoport G-ben, $(|U|, |W|) = 1$ és U minden prímrendű részcsoportja S-quasinormális G-ben.

iii, G feloldható és $F(G)$ minden prímrendű részcsoportja S-quasinormális G-ben.

Később 2.1.1. Tételünknek számos általánosítása született. Többek között Li és Wang [LW2] az S-quasinormalitást egy gyengébb fogalomra az S-quasinormálisan beágyazottságra cserélték. Azután M. Asaad és Heliel nyomán egy új beágyazási tulajdonság jelent meg a 3-permutabilitás vagy Σ-permutabilitás [AH]. A. A. Heliel, Xianhua Li és Yangming Li [HLL] kiterjesztették 2.1.1. Tételünket 3-permutabilitásra. Bizonyításukban erősen támaszkodtak nemcsak tételünkre, hanem az egyszerű csoportok klasszifikációjára is. Majd Li Fang Wang és Yan Ming Wang [WW] elemi bizonyítást adott ugyanerre az állításra.

$\mathcal{H}$-tulajdonság

M. Herzog és munkatársai vezették be a $\mathcal{H}$-tulajdonság fogalmát. [BMHV]. A G csoport egy K részcsoportja $\mathcal{H}$-részcsoport vagy rendelkezik a $\mathcal{H}$-tulajdonsággal, ha

$$N_G(K) \cap K^g \leq K \text{ minden } g \in G \text{ esetén.}$$

M. Herzoggal azt vizsgáltuk [CsH], hogy milyen hatással vannak a csoport struktúrájára a $\mathcal{H}$-tulajdonsággal rendelkező prímrendű és negyedrendű ciklikus részcsoportok.

A következő karakterizációs tételt kaptuk:

2.1.6. Tétel. [CsH, Theorem 10] *Egy G csoport minden prímrendű és ciklikus negyedrendű részcsoportja $\mathcal{H}$-tulajdonságú, ha G-ben léteznek olyan L és K részcsoportok, amelyekre:*

i, $G = L \rtimes K$

ii, *L és K nilpotens Hall-részcsoportok G-ben*

iii, *L minden prímrendű és ciklikus negyedrendű részcsoportja normálosztó G-ben*

iv, *K minden prímrendű és ciklikus negyedrendű részcsoportja normálosztó K-ban.*

Az előzőekben szuperfeloldhatóságra vonatkozó olyan elégséges feltételeket láttunk, amelyek bizonyos minimális részcsoportok S-quasinormalitásával voltak kapcsolatosak.

Herzoggal hasonló elégséges feltételeket adtunk a szuperfeloldhatóságra, de S-quasinormalitás helyett a $\mathcal{H}$-tulajdonságot kívántuk:

2.1.7. Tétel. [CsH, Theorem 11] *Legyen G csoport, $H \trianglelefteq G$. Tegyük fel G/H szuperfeloldható és H minden prímrendű és ciklikus negyedrendű részcsoportja $\mathcal{H}$-részcsoport, akkor G szuperfeloldható.*

2.1.8. Tétel. [CsH, Theorem 12] *Legyen G csoport, és H feloldható normálosztó benne. Tegyük fel, hogy G/H szuperfeloldható és $F(H)$ minden prímrendű és ciklikus negyedrendű részcsoportja $\mathcal{H}$-részcsoport, akkor G szuperfeloldható.*

Később M. Asaad [As2] a $\mathcal{H}$-tulajdonság segítségével bevezette a gyengén szuperfeloldhatóan beágyazottság fogalmát, és felhasználva Herzoggal közös eredményeinket, további szükséges és elégséges feltételeket adott a szuperfeloldhatóságra.

2.2. Szuperfeloldhatóság

Az előző fejezetben bemutattunk néhány elégséges feltételt a szuperfeloldhatóságra bizonyos minimális részcsoportok S-quasinormalitása ill. $\mathcal{H}$-tulajdonsága alapján. Számos esetben ezek az elégséges feltételek szükségesnek is tűntek. Ám általában a következőt kaptuk: Egy G csoport szuperfeloldható akkor és csak akkor, ha létezik G-ben egy H normálosztó, amelyre G/H szuperfeloldható, és H rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal. Minden egyes esetben a szükségesség bizonyítása nagyon egyszerű volt. Feltételezve G szuperfeloldhatóságát, H-t az egységelemből álló részcsoportnak választhatjuk, és ez természetesen rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

A másik probléma az eddigi elégséges feltételekkel, ahogy a strukturális leírásokból kiderül, hogy ezek a szuperfeloldható csoportoknak csak viszonylag szűk alosztályait írják le.

[Cs5]-ben a szuperfeloldható csoportoknak egy természetes faktorizációját adtam meg:

2.2.1. Tétel. [Cs5, Theorem 1] *Legyen G egy csoport, G rendje prímosztóinak a halmaza $\pi(G) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. G akkor és csak akkor szuperfeloldható, ha minden $p_i \in \pi(G)$ esetén létezik egy P_i p_i-Sylow részcsoport G-ben és P_i-nek olyan ciklikus P_{i_l} részcsoportja $(1 \leq l \leq t_i)$, hogy*

i, $P_i = P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_{t_i}}$

ii, $P_{i_1} \ldots P_{i_l} \lhd P_i$ *minden* $1 \leq l \leq t_i$ *esetén*

iii, $P_{i_l} \cdot P_{j_m} = P_{j_m} \cdot P_{i_l}$ *minden* $1 \leq i < j \leq k$, $1 \leq l \leq t_i$, $1 \leq m \leq t_j$ *esetén.*

A Fitting részcsoport struktúrája alapján az előző faktorizáció segítségével egy másik karakterizációt is kaptam. Ehhez bevezettem a következő definíciót:

Definíció. Egy G csoport H részcsoportját *gyengén S-quasinormálisnak* nevezzük, ha minden $p \in \pi(G)$-re létezik legalább egy p-Sylow részcsoportja G-nek, ami felcserélhető H-val.

2.2.2. Tétel. [Cs5, Theorem 2] *Egy G csoportra a következő állítások ekvivalensek:*

i, G szuperfeloldható

ii, $G' \leq F(G)$, $F(G)$ ciklikus, prímhatvány rendű, gyengén S-quasinormális részcsoportok szorzata

iii, Létezik egy olyan N nilpotens normálosztó G-ben, amelyre $G' \leq N$ és N ciklikus, prímhatvány rendű, gyengén S-quasinormális részcsoportok szorzata.

Erre az állításra támaszkodva sikerült egy erősebb karakterizációt is nyerni:

2.2.3. Tétel. [Cs5, Theorem 3] *Legyen G olyan csoport, amelyre $G' \leq F(G)$. G akkor és csak akkor szuperfeloldható, ha létezik egy olyan H normálosztó G-ben, amelyre G/H szuperfeloldható, és $F(H)$ ciklikus, gyengén S-quasinormális részcsoportok szorzata.*

Később az irodalomban a gyengén S-quasinormalitáshoz hasonló fogalom jelent meg, a Σ-quasinormalitás (v. 3-permutabilitás). Azt mondjuk, hogy Σ *Sylow-rendszer* G-ben, ha Σ a G rendjének minden p prímosztójához pontosan egy p-Sylow részcsoportot tartalmaz. A G csoport egy H részcsoportját Σ-*quasinormálisnak* nevezzük, ha H felcserélhető a Σ Sylow-rendszer minden elemével.

A Σ-quasinormalitás fogalmát és az általánosított Fitting részcsoportot használva, M. Asaaddal [ACs3] kiterjesztettük az előzőekben a szuperfeloldhatóságra vonatkozó természetes faktorizációt és az ehhez kapcsolódó karakterizációs tételeket:

2.2.4. Tétel. [ACs3, Theorem 1.1] *A következő állítások ekvivalensek:*

i, G szuperfeloldható csoport

ii, G-ben létezik H normálosztó, melyre G/H szuperfeloldható, és létezik egy olyan Σ Sylow-rendszer, hogy minden $P_i \in \Sigma$ esetén $P_i \cap H$ ciklikus Σ-quasinormális részcsoportok szorzata.

2.2.5. Tétel. [ACs3, Theorem 1.2] *Legyen G csoport. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

i, G szuperfeloldható

ii, Létezik egy olyan Σ Sylow-rendszer G-ben, hogy minden $P_i \in \Sigma$ esetén $P_i^* = F^*(G) \cap P_i$ ciklikus Σ-quasinormális részcsoportok szorzata.

2.2.6. Tétel. [ACs3, Theorem 1.3] *Legyen $\mathcal{F}$ telített formáció, amely tartalmazza a szuperfeloldható csoportok osztályát. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

i, G szuperfeloldható csoport

ii, Létezik Σ Sylow-rendszer G-ben, $\Sigma = \{G_{p_1}, \ldots, G_{p_n}\}$, H olyan normálosztó G-ben, hogy $G/H \in \mathcal{F}$ és $\mathcal{F}^*(H) \cap G_{p_i}$ minden $1 \leq i \leq n$-re kielégíti a következőt:

(a) *$\mathcal{F}^*(H) \cap G_{p_i} = A_{i_1} \ldots A_{i_{t_i}}$, ahol A_{i_l} ciklikus, Σ-quasinormális részcsoportja G-nek minden $1 \leq l \leq t_i$ esetén.*

(b) *$A_{i_1} \ldots A_{i_l} \lhd G_{p_i}$ minden $1 \leq l \leq t_i$ esetén.*

Herzoggal közös mukánkban [CsH] felhasználva a szuperfeloldható csoportokra vonatkozó természetes faktorizációt (2.2.1. Tétel) a $\mathcal{H}$-tulajdonság segítségével jellemeztük az olyan szuperfeloldható csoportokat, amelyekben minden Sylow részcsoport Abel-féle (röviden SSA-csoport):

2.2.7. Tétel. [CsH, Theorem 18] *Legyen G SSA-csoport. G akkor és csak akkor szuperfeloldható, ha G minden Sylow részcsoportja ciklikus $\mathcal{H}$-részcsoportok szorzata.*

Szintén a természetes faktorizáció felhasználásával a Fitting részcsoport struktúrájára épülő másik karakterizációt is adtunk:

2.2.8. Tétel. [CsH, Theorem 19] *Legyen G SSA-csoport. Ekkor a következő álltások ekvivalensek:*

i, G szuperfeloldható

ii, $G' \leq F(G)$ és $F(G)$ ciklikus prímhatvány rendű $\mathcal{H}$-részcsoportok szorzata

iii, Létezik egy olyan N nilpotens normálosztó G-ben, hogy $G' \leq N$ és N ciklikus prímhatvány rendű $\mathcal{H}$-részcsoportok szorzata.

Később M. Asaad [As2] megjavította ezt az eredményt úgy, hogy csak a 2-Sylow részcsoportoktól követelte a kommutativitást.

2.3. T-csoportok és T^* csoportok

T-csoportok

Egy G csoportot T*-csoportnak* nevezünk, ha minden szubnormális részcsoportja normálosztó. A T-csoportok tanulmányozása viszonylag régi keletű. Az első eredmény 1896-ból R. Dedekindtől származik [De]. Dedekind meghatározta mindazokat a véges csoportokat, amelyeknek minden részcsoportja normálosztó. Ezek vagy Abel-csoportok, vagy egy nyolc elemű kvaterniócsoport és egy olyan Abel-csoport direkt szorzata, amely nem tartalmaz negyedrendű elemet. Ezeket azóta Dedekind-csoportoknak nevezzük. Először Zacher [Za] karakterizálta a feloldható T-csoportokat:

2.3.1. Tétel. [Za] *Legyen G feloldható csoport, $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$ G rendjének prímosztói, $S_1, \ldots, S_k$ Sylow-rendszer, $S_i \in \mathrm{Syl}_{\mathrm{p_i}}(G)$. G akkor és csak akkor T-csoport, ha a következő állítások igazak:*

- *i, S_i Abel-féle, vagy Hamilton-csoport $(1 \leq i \leq k)$*
- *ii, Ha $1 \leq i < j \leq k$, akkor $S_j \leq N_G(S_i)$*
- *iii, Ha egy $1 \leq i < j \leq k$ és $y \in S_j$, akkor létezik olyan n természetes szám, hogy $yxy^{-1} = x^n$ minden $x \in S_i$ esetén.*

W. Gaschütztől [Ga] származik a következő döntő jelentőségű struktúra tétel a feloldható T-csoportokra:

2.3.2. Tétel. [Ga] *Egy G csoport feloldható T-csoport, akkor és csak akkor, ha létezik benne egy L páratlan rendű Abel-féle Hall-részcsoport, ami normálosztó G-ben, G/L Dedekind-csoport és G elemei a hatványozást indukálják a konjugálással az L elemein.*

A $\mathcal{H}$-tulajdonságot bevezető cikkben [BMHV] szereplő T-csoportokkal kapcsolatos karakterizációs tételeket Gaschütz egy eredményével kombinálva kapjuk:

2.3.3. Tétel. [CsH, Theorem 4] *A következő állítások ekvivalensek:*

- *i, G feloldható T-csoport*
- *ii, G szuperfeloldható T-csoport*
- *iii, G minden részcsoportja $\mathcal{H}$-részcsoport*
- *iv, G minden prímhatványrendű részcsoportja $\mathcal{H}$-részcsoport.*

Herzoggal közösen írt munkánkban egyik célunk az volt, hogy a feloldható T-csoportokra szerkezeti leírást adjunk a $\mathcal{H}$-tulajdonság segítségével:

2.3.4. Tétel. [CsH, Theorem 14] *Legyen G feloldható csoport. G akkor és csak akkor T-csoport, ha G-nek létezik egy L részcsoportja, amelyre:*

i, L Hall-részcsoport és normálosztó G-ben

ii, G/L Dedekind-csoport

iii, L minden prímhatvány rendű részcsoportja $\mathcal{H}$-részcsoport.

2.3.5. Következmény. [CsH, Corollary 15] *Legyen G feloldható páratlan rendű csoport. G T-csoport akkor és csak akkor, ha G' Hall-részcsoport G-ben, és G' minden prímhatvány rendű részcsoportja $\mathcal{H}$-részcsoport G-ben.*

A 2.3.4. Tételben kapott szerkezeti leírás finomítható a következőképpen:

2.3.6. Tétel. [CsH, Corollary 16] *G feloldható T-csoport akkor és csak akkor, ha léteznek olyan H és K részcsoportok G-ben, melyekre:*

i, $G = L \rtimes K$

ii, L nilpotens Hall-részcsoport G-ben

iii, K Dedekind-csoport

iv, L minden prímhatvány rendű részcsoportja $\mathcal{H}$-részcsoport.

T^*-csoportok

Egy csoportot *T^*-csoportnak* (v. PST-csoportnak) nevezünk, ha minden szubnormális részcsoportja S-quasinormális (π-quasinormális) G-ben.

A feloldható T^*-csoportok struktúráját először R. Agrawal határozta meg:

2.3.7. Tétel. [Ag] *Egy G csoport feloldgató T^*-csoport (PST-csoport) akkor és csak akkor, ha létezik G-ben egy olyan páratlan rendű Abel-féle L normálosztó, hogy G/L nilpotens és G elemei a konjugálással a hatványozást indukálják az L elemein.*

M. Asaaddal [ACs4] közös munkánkban T-csoportokra vonatkozó korábbi eredményeket [Za], [Ga], [Pe], [Cs7] próbáltunk kiterjeszteni T^*-csoportokra.

Példákkal igazolható, hogy a feloldható T^*-csoportok osztálya valódi módon bővebb a feloldható T-csoportok osztályánál. Miután megmutattuk, hogy egy feloldható T^*-csoport szuperfeloldható [ACs4, Lemma 1], példával alátámasztottuk, hogy a feloldható T^*-csoportok osztálya valódi módon szűkebb a szuperfeloldható csoportok osztályánál.

Beláttuk, hogy a feloldható T^*-csoportság öröklődik a faktorcsoportokra [ACs4, Lemma 1]. Lényegesen nehezebb bizonyítást igényelt a részcsoportokra való öröklődés igazolása:

2.3.8. Tétel. [ACs4, Theorem 1] *Legyen G feloldható T^*-csoport, ekkor G minden részcsoportja is feloldható T^*-csoport.*

Megpróbáltunk Agrawal tételénél finomabb szerkezeti leírást adni:

2.3.9. Tétel. [ACs4, Theorem 2] *G feloldható T^*-csoport akkor és csak akkor, ha $G = HK$, ahol H nilpotens Hall-részcsoportja G-nek, $H \lhd G$, K nilpotens Hall-részcsoport G-ben, $H \cap K = 1$, továbbá tetszőleges $x \in H$, $y \in K$ esetén létezik olyan n természetes szám, hogy $x^y = x^n$.*

Majd megvizsgáltuk a szerkezetét az olyan csoportoknak, amelyek nem T^*-csoportok, de minden valódi részcsoportjuk T^*-csoport [ACs4, Corollary 5].

Peng korábban belátta [Pe], hogy egy G csoport akkor és csak akkor feloldható T-csoport, ha minden prímhatvány rendű részcsoportja pronormális G-ben. (Azt mondjuk, hogy $H \leq G$ pronormális G-ben, ha tetszőleges $x \in G$ esetén H és H^x már $\langle H, H^x \rangle$-ben is konjugáltak.) Páratlan rendű csoportok esetén egy korábbi eredményem [Cs7, Theorem 1], hogy egy páratlan rendű csoport akkor és csak akkor feloldható T-csoport, ha G' Hall-részcsoport G-ben és G minden prímhatvány rendű részcsoportja pronormális G-ben.

Ezt az állítást próbáltuk Asaaddal kiterjeszteni T^*-csoportokra:

2.3.10. Tétel. [ACs4, Theorem 6] *Tegyük fel, hogy G csoport $H \lhd G$, H Hall-részcsoport G-ben, H minden prímhatvány rendű részcsoportja pronormális G-ben, G/H feloldható T^*-csoport. Ekkor G feloldható T^*-csoport.*

2.3.11. Tétel. [ACs4, Theorem 7] *G feloldható T^*-csoport akkor és csak akkor, ha $G = N \cdot M$, ahol M és N nilpotens Hall-részcsoportok G-ben, $M \lhd G$ és M minden prímhatvány rendű részcsoportja pronormális G-ben.*

Majd megmutattuk, ha egy csoport olyan feloldható T^*-részcsoportot tartalmaz, amelyek indexei páronként relatív prímek, akkor a csoport feloldható T^*-csoport [ACs4, Theorem 8].

Végül kapcsolatot kerestünk a T^*-csoportok és a feloldhatóság között:

2.3.12. Tétel. [ACs4, Theorem 9] *G feloldható T^*-csoport akkor és csak akkor, ha G T^*-csoport és minden valódi részcsoportja is T^*-csoport.*

Később folytattam a T^*-csoportok tanulmányozását [Cs6].

Először a korábban már említett Zacher-tételt általánosítottam T^*-csoportokra. A cikkben a quasinormalitás szót használtam az S-quasinormalitásra:

2.3.13. Tétel. [Cs6, Theorem 1] *Legyen G csoport, rendjének prímosztói $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$. Legyen $P_1, \ldots, P_n$ egy Sylow rendszer, $P_i \in \mathrm{Syl}_{\mathrm{p_i}}(G)$. G feloldható T^*-csoport akkor és csak akkor, ha a következők teljesülnek:*

i, Ha $1 \leq i < j \leq k$, akkor $P_j \leq N_G(P_i)$.

ii, Minden $1 \leq i < j \leq k$ esetén, ha $x \in P_i$, $y \in P_j$, akkor létezik egy n természetes szám, hogy $x^y = x^n$.

Megvizsgáltam, hogy egy feloldható T^*-csoportban a szubnormális részcsoportok milyen tulajdonságokkal rendelkeznek:

2.3.14. Tétel. [Cs6, Theorem 3] *Legyen G feloldható T^*-csoport. Ekkor G tetszőleges szubnormális p-részcsoportja (p prím), vagy normálosztó G-ben, vagy minden q-Sylow részcsoport centralizálja, ahol $q \neq p$.*

A továbbiakban egy karakterizációt adtam a feloldható T^*-csoportokra az S-quasinormalitással kapcsolatosan:

2.3.15. Tétel. [Cs6, Theorem 2] *G feloldható T^*-csoport akkor és csak akkor, ha minden A p-részcsoportja (p prím) S-quasinormális $N_G(P_0)$-ban, ahol P_0 egy A-t tartalmazó p-részcsoport.*

6 évvel később Ballester-Bolinches és Esteban-Romero [BR] bevezették a következő fogalmat:

Definíció: *Legyen p prím. Egy G csoportról azt mondjuk, hogy Y_p-csoport, ha minden olyan H és S p-részcsoportra, ahol $H \leq S$, H S-quasinormális $N_G(S)$-ben.*

Miután tanulmányozták az Y_p csoportok tulajdonságait, karakterizálták a T^*-csoportokat (PST-csoportokat) és megkapták az itt szereplő 2.3.15. Tételt más formában:

2.3.16. Tétel. [BR, Theorem 4] *Egy G csoport feloldható PTS csoport (T^*-csoport) akkor és csak akkor, ha G Y_p-csoport minden p prímre.*

[Cs6]-ban végül a 2.3.15. Tétel segítségével a Sylow részcsoportok tulajdonságaira vonatkozóan adtam egy jellemzést a feloldható T^*-csoportokra:

2.3.17. Tétel. [Cs6, Theorem 4] *G feloldható T^*-csoport akkor és csak akkor, ha minden P Sylow részcsoportja kielégíti a következő feltételek egyikét:*

i, P minden részcsoportja normálosztó G-ben.

ii, $N_G(P)$ minden P-től különböző Sylow részcsoportja centralizálja P-t.

A T^*-csoportok (PST-csoportok) tanulmányozása napjainkban is intenzív kutatások tárgya ([ABRP], [ABP], [Ra1], [BRR], [BR], [Ro]).

Irodalomjegyzék

[ABP] M. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera, Finite Soluble Groups, *J. Algebra* 240 (2001), no. 2, 705–722.

[ABRP] M. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. C. Pedraza-Aguilera, *Permutability and subnormailty in finite groups*, Groups St Andrews 2001 in Oxford, London Math. Soc. Lecture Note Series 304, 1–11.

[ACs1] M. Asaad, P. Csörgő, The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups, *Arch. Math.* 72 (1999), no. 6, 401–404.

[ACs2] M. Asaad, P. Csörgő, Characterization of Finite Groups With Some S-quasinormal Subgroups, *Monatsh. Math.* 146 (2005), no. 4, 263–266.

[ACs3] M. Asaad, P. Csörgő, Some results on supersolvability of finite groups, *Monatsh. Math.* 154 (2008), 265–269.

[ACs4] M. Asaad, P. Csörgő, On T^* groups, *Acta Math. Hung.* 74 (1997), no. 3, 235–243.

[Ag] R. K. Agrawal, Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups, *Proc. Amer. Math. Soc* 47 (1975), 77–83.

[AH] M. Asaad, A. A. Heliel, On permutable subgroups of finite groups, *Arch. Math.* 80 (2003), no. 2, 113–118.

[Al1] A. A. Albert, Quasigroups I, *Trans. Amer. Math. Soc.* 54 (1943), 507–519.

[Al2] A. A. Albert, Quasigroups II, *Trans. Amer. Math. Soc.* 55 (1944), 401–419.

[ARS] M. Asaad, M. Ramadan, A. Shaalan, Influence of π-quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroups of a finite group, *Arch. Math.* 56 (1991), no. 6, 521–527.

[As1] M. Asaad, Some results on p-Nilpotence and Supersolvability of Finite Groups, *Comm. Algebra* 34 (2006), 4217–4224.

[As2] M. Asaad, On p-Nilpotence and Supersolvability of Finite Groups, *Comm. Algebra* 34 (2006), 189–195.

[AsBP] M. Asaad, A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera, A note on minimal subgroups of finite groups, *Comm. Algebra* 24 (1996), no. 8, 2771–2776.

[Bae1] R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppen, *Sitz-Ber. Heidelberg Akad. Wiss.* 2 (1933), 12–17.

[Bae2] R. Baer, Groups with preassigned central and central quotient group, *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1938), 387–412.

[Bas] A. S. Basarab, Klass LK-lup, *Matematicheskie issledovanija* 120 (1991), 3–7.

[BMHV] M. Bianci, A. G. B. Mauri, M. Herzog, A, Verardi, On finite solvable groups in which normality is a transitive relation, *J. Group Theory* 3 (2000), 147–156.

[Br] R. H. Bruck, Contributions to the theory of loops, *Trans. Amer. Math. Soc.* 60 (1946), 245–354.

[BR] A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, Sylow Permutable Subnormal Subgroups of Finite Groups, *J. Alg.* 251 (2002), no. 2, 727–738.

[BRR] A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romeo, M. Ragland, A note on finite PST-groups, *J. Group Theory* 10 (2007), no. 2, 205–210.

[Bu] J. Buckley, Finite groups whose minimal subgroups are normal, *Math. Z.* 116 (1970), no. 1, 15–17.

[Buch] H. H. Buchsteiner, O nekotorom klasse binarnych lup, *Mat. Issled.* 39 (1976), 54–66.

[Cs1] P. Csörgő, Abelian inner mappings and nilpotency class greater than two, *Europ. J. Combinatorics* 28 (2007), 856–867.

[Cs2] P. Csörgő, On connected transversals to abelian subgroups and loop theoretical consequences,, *Arch. Math.* 86 (2006), 499–516.

[Cs3] P. Csörgő, Extending the structural homomorphism of LCC loops, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 46 (2005), no. 3, 385–389.

[Cs4] P. Csörgő, On loops that are abelian groups over the nucleus and Buchsteiner loops, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 49 (2008), no. 2, 197–208.

[Cs5] P. Csörgő, On supersolvability of finite groups, *Glasgow Math. J.* 43 (2001), no. 3, 327–333.

[Cs6] P. Csörgő, The properties of T^* groups, *Publ. Math* 49 (1996), no 1–2, 93–97.

[Cs7] P. Csörgő, On π-t groups, *Publ. Math.* 35 (1988), 255–259.

[CsD1] P. Csörgő, A. Drápal, Left conjugancy closed loops of nilpotency class two, *Result. Math.* 47 (2005), 242–265.

[CsD2] P. Csörgő, A. Drápal, On left conjugancy closed loops in which the left multiplication group is normal, *Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg* 76 (2006), 17–34.

[CsD3] P. Csörgő, A. Drápal, On loops rich in automorphisms that are abelian modulo the nucleus, *Forum Mathematicum*, közlésre elfogadva.

[CsD4] P. Csörgő, A. Drápal, Buchsteiner loops and conjugacy closedness, *Comm. Algebra*, közlésre elfogadva.

[CsDK] P. Csörgő, A. Drápal, M. K. Kinyon, Buchsteiner loops, közlésre benyújtva.

[CsH] P. Csörgő, M. Herzog, On Supersolvable Groups and the Nilpotator, *Comm. Algebra* 32 (2004), no. 2, 609–620.

[CsJK] P. Csörgő, A. Jancarik, T. Kepka, Generalized capable abelian groups, Non-Associative Algebras and its Applications, A series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 246, Ch. 10, 129–136.

[CsK] P. Csörgő, T. Kepka, On loops whose inner permutations commute, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 45 (2004), 213–221.

[CsMN] P. Csorgo, K. Myllylä, M. Niemenmaa, On Connected Transversals to Dihedral Subgroups, *Alg. Colloquium* 7 (2000), no. 1, 105–112.

[CsN1] P. Csorgo, M. Niemenmaa, Solvability Conditions for Loops and Groups, *J. Algebra* 232 (2000), 336–342.

[CsN2] P. Csorgo, M. Niemenmaa, On Connected Transversals to Nonabelian Subgroups, *Europ. J. Combinatorics* 23 (2002), 179–185.

[D1] A. Drápal, Conjugacy closed loops and their multiplication groups, *J. Algebra* 272 (2004), 838–850.

[D2] A. Drápal, On multiplication groups of left conjugancy closed loops, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 45 (2004), 223–236.

[D3] A. Drápal, Orbits of Inner Mapping Groups, *Monatsh. Math.* 134 (2002), 191–206.

[De] R. Dedekind, Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind, *Math. Ann* 48 (1897), no. 4, 548–561.

[DK] A. Drápal, M. Kinyon, Buchsteiner loops; associators and construction, közlésre benyújtva.

[DV] A. Drápal, P. Vojtěchovský, Explicit constructions of loops with commuting inner mappings, *European J. Combinatorics* 29/7 (2008), 1662–1681.

[Ga] W. Gaschütz, Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist, *J. Reine Angew. Math.* 198 (1957), 87–92.

[GR] E. G. Goodaire, D. A. Robinson, A class of loops which are isomorphic to all loop isotopes, *Canad. J. Math* 34 (1982), 662–672.

[HLL] A. A. Heliel, Xianhua Li, Yangming Li, On $\mathfrak{Z}$-permutability of minimal subgroups of finite groups, *Archiv Math.* 83 (2004), no. 1, 9–16.

[Ke] O. H. Kegel, Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen, *Math. Z.* 78 (1962), no. 1, 205–221.

[KKP] M. K. Kinyon, K. Kunen, J. D. Phillips, Diassociativity in Conjugacy Closed Loops, *Comm. Alg.* 32 (2004), 767–786.

[KN1] T. Kepka, M. Niemenmaa, On loops with cyclic inner mapping groups, *Arch. Math.* 60 (1993), 233–236.

[La] R. Laue, Dualization for saturation for locally defined formulations, *J. Algebra* 52 (1978), no. 1, 347–353.

[LW1] Y. Li, Y. Wang, The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 131 (2003), no. 2, 337–341.

[LW2] Y. Li, Y. Wang, On π-quasinormally embedded subgroups of finite group, *J. Algebra* 281 (2004), 109–123.

[My] K. Myllylä, On connected transversals to diherdal subgroups, *Acta Univ. Oulu* A–350 (2000).

[M1] R. Moufang, Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit, *Abh. Math. Seminar Hamburg Univ.* 2 (1933), 207–222.

[M2] R. Moufang, Zur Struktur von Alternativkörpern, *Math. Annalen* 110 (1934), 416–430.

[MN] M. Niemenmaa, K. Myllylä, On the solvability of commutative loops and their multiplication groups, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 40 (1999), no. 2, 209–213.

[N1] M. Niemenmaa, On the structure of the inner mapping groups of loops, *Comm. Algebra* 24 (1996), 135–142.

[N2] M. Niemenmaa, On finite loops whose inner mapping groups are abelian, *Bull. Austr. Math. Soc.* 65 (2002), 477–484.

[N3] M. Niemenmaa, On the structure of finite loop capable Abelian groups, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 48 (2007), no. 2, 217–224.

[N4] M. Niemenmaa, Transversals, commutators and solvability in finite groups, *Bollettino. U.M.I.* 7 (1995), no. 9–A, 203–208.

[N5] M. Niemenmaa, On loops which have dihedral 2-groups as inner mapping groups, *Bull. Austr. Math. Soc.* 52 (1995), 153–160.

[N6] M. Niemenmaa, On Connected Transversals to Subgroups Whose Order is a Product of Two Primes, *Europ. J. Combinatorics* 18 (1997), 915–919.

[NK1] M. Niemenmaa, T. Kepka, On multiplication groups of loops, *J. Algebra* 135 (1990), 112–122.

[NK2] M. Niemenmaa, T. Kepka, On connected transversals to abelian subgroups, *Bull. Austral. Math. Soc.* 49 (1994), 121–128.

[NK3] M. Niemenmaa, T. Kepka, On Connected Transversals to Abelian Subgroups in Finite Groups, *Bull. London Math. Soc.* 24 (1992), 343–346.

[NStr] P. Nagy, K. Strambach, Loops as invariant sections in groups and their geometry, *Canad. J. Math.* 46 (1994), 1027–1056.

[NV1] G. P. Nagy, P. Vojtěchovský, Computing with small quasigroups and loops, *Quasigroups and Related Systems* 15 (2007), 77–94.

[NV2] G. P. Nagy, P. Vojtěchovský, Moufang loops with commuting inner mappings, közlésre benyújtva.

[Pe] T. A. Peng, Finite groups with pronormal subgroups, *Proc. Amer. Math. Soc* 20 (1969), 232–234.

[Ra1] M. Ramadan, Finite groups in which permutability is a transitive relation on their Frattini factorgroups, *Acta Math. Hung.* 114 (2007), no. 3, 187–193.

[Ro] D. J. S. Robinson, Finite groups in which normality or permutability is transitive, *Advandes in Group Theory* 2002, Proc. Intensive Bimester, Napoli (Italy).

[Sha] A. Shaalan, The influence of π-quasinormailty of some subgroups on the structure of finite groups, *Acta Math. Hung.* 56 (1990), no. 3-4, 287–293.

[So] L. R. Soikis, O specialnych lupach, in Voprosy teorii kvazigrupp i lup (V. D. Belousov, ed.), *Akademia Nauk Moldav. SSR, Kishinev* (1970), 122–131.

[Sr] S. Srinivasan, Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups, *Israel J. Math.* 35 (1980), no. 3, 210–214.

[Ve] A. Vesanen, Solvable Groups and Loops, *J. Algebra* 180 (1996), 862–876.

[WW] Li Fang Wang, Yan Ming Wang, A Remark on 3-permutability of Finite Groups, *Acta Math. Sinica, English series* 23 (2007), 1985–1990.

[Yo1] A. Yokoyama, Finite solvable groups whose $\mathfrak{F}$-hypercenter contains all minimal subgroups, *Arch. Math.* 26 (1975), no. 1, 123–130.

[Yo2] A. Yokoyama, Finite solvable groups whose $\mathfrak{F}$-hypercenter contains all minimal subgroups II, *Arch. Math.* 27 (1976), no. 1, 572–575.

[Za] G. Zacher, Caratterizzazione dei t-gruppi finiti risolubili, *Ricerche Mat.* 1 (1952), 287–294.

IV. A szerzőnek a disszertáció témaköréhez tartozó publikációi

1, Asaad, M.; Csörgő, P.: Some results on supersolvability of finite groups, *Monatsh. Math.* 154 (2008), 265–269.

2, Csörgő, P.: On loops that are abelian groups over the nucleus and Buchsteiner loops, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 49 (2008), no. 2, 197–208.

3, Csörgő, P.: Abelian inner mappings and nilpotency class greater than two, *European J. Combin.* 28 (2007), no. 3, 858–867.

4, Csörgő, P.; Drápal, A.: On left conjugancy closed loops in which the left multiplication group is normal, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 76 (2006), 17–34.

5, Csörgő, P.: On connected transversals to abelian subgroups and loop theoretical consequences, *Arch. Math. (Basel)* 86 (2006), no. 6, 499–516.

6, Csörgő, P.; Jancarik, A.; Kepka, T.: *Generalized capable abelian groups, Non-Associative Algebra and its Applications*, A series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 246, Chapt. 10, 2006, 129–136. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

7, Asaad, M.; Csörgő, P.: Characterization of finite groups with some S-quasinormal subgroups, *Monatsh. Math.* 146 (2005), 263–266.

8, Csörgő, P.: Extending the structural homomorphism of LCC loops, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 46 (2005), no. 3, 385–389.

9, Csörgő, P.; Drápal, A.: Left conjugancy closed loops of nilpotency class two, *Results Math.* 47 (2005), no. 3–4, 242–265.

10, Asaad, M.; Heliel, A. A.; Ezzat Mohamed, M.; Csörgő, P.: Finite groups with some subgroups permutable with all Sylow subgroups, *JP J. Algebra Number Theory Appl.* 4 (2004), no. 3, 437–446.

11, Csörgő, P.; Herzog, M.: On supersolvable groups and the nilpotator, *Comm. Algebra* 32 (2004), no. 2, 609–620.

12, Csörgő P.; Kepka T.: On loops whose inner permutations commutate, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 45 (2004), no. 2, 213–221.

13, Csörgő, P.; Niemenmaa, M.: On connected transversals to nonabelian subgroups, *European J. Combin.* 23 (2002), no. 2, 179–185.

14, Csörgő, P.: On supersolvability of finite groups, *Glasgow Math. J.* 43 (2001), no. 3, 327–333.

15, Csörgő, P.; Myllylä, K.; Niemenmaa, M.: On connected transversals to dihedral subgroups of order 2 p^n, *Algebra Colloq.* 7 (2000), no. 1, 105–112.

16, Csörgő, P.: On π-T^*-groups, *J. Egyptian Math. Soc.* 8 (2000), no. 2, 121–126.

17, Csörgő, P.: *On the natural factorization of finite supersolvable groups*, Groups-Korea '98 Proc. of Intern. Conf. at Pusan Nat. Univ. 91–94, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2000.

18, Csörgő, P.; Niemenmaa, M.: Solvability conditions for loops and groups, *J. Algebra* 232 (2000), no. 1, 336–342.

19, Asaad, M.; Csörgő, P.: The influence of minimal subgroups on the sructure of finite groups, *Arch. Math. (Basel)* 72 (1999), no. 6, 401–404.

20, Asaad, M.; Csörgő, P.: On T^*-groups, *Acta Math. Hungar.* 74 (1997), no. 3, 235–243.

21, Csörgő, P.: The properties of T^*-groups, *Publ. Math. Debrecen* 49 (1996), no. 1–2, 93–97.

22, Csörgő, P.: Some properties of π-t groups, Ann. Univ. Sci. Budapest. *Eötvös Sect. Math.* 32 (1989), 97–100.

23, Csörgő, P.: On $(\pi,\ k,\ t)$-groups, Notes on Algebraic systems, V 3–5, DM, 88–3, Karl Marx Univ. Econom., Budapest, 1988.

24, Csörgő, P.: On π-t groups, *Publ. Math. Debrecen* 35 (1988), 255–259.

25, Csörgő, P.; Drápal, A.: On loops rich in automorphisms that are abelian modulo the nucleus, *Forum Mathematicum*, közlésre elfogadva.

26, Csörgő, P.; Drápal, A.: Buchsteiner loops and conjugacy closedness, *Comm. Algebra* közlésre elfogadva.

27, Csörgő, P.; Drápal, A.; Kinyon, M. K.: Buchsteiner loops, közlésre benyújtva.

Mellékelem a disszertációban részletesen bemutatott közös munkák társszerzőinek nyilatkozatát arról, hogy dolgozataink mindegyike egyenlő arányú közös teljesítmény.