Reprezentiranje matematičnih pojmov pri pouku matematike na razredni stopnji

Tatjana Hodnik Čadež
Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani
tatjana.hodnik-cadez@pef.uni-lj.si

Reprezentacija je v prvi vrsti nekaj, kar stoji namesto nečesa drugega. Pri vsaki reprezentaciji moramo opredeliti: (1) reprezentirajoči svet, (2) svet, ki ga reprezentirajoči svet reprezentira (v nadaljevanju svet, ki ga reprezentira), (3) kateri vidiki sveta, ki ga reprezentira, so reprezentirani, (4) kateri vidiki reprezentirajočega sveta reprezentirajo ter (5) povezavo med svetom, ki ga reprezentira, in reprezentirajočim svetom.
Pri pouku matematike je dejavnost reprezentiranja abstraktnih matematičnih pojmov najpomembnejša. Razlikujemo med notranjimi (miselne predstave) in zunanjimi reprezentacijami (okolje). Zunanje reprezentacije so sestavljene iz strukturiranih simbolnih elementov, katerih vloga je 'zunanja' predstavitev določene matematične 'realnosti'. Pri pouku matematike v glavnem uporabljamo konkretne reprezentacije, grafične reprezentacije in reprezentacije z matematičnimi simboli ter druge, v zadnjem času predvsem IKT-reprezentacije.
V prispevku se osredotočamo na pomen uporabe različnih zunanjih reprezentacij v procesu poučevanja in učenja matematike. Kot ključni dejavnik pri učenju matematike izpostavimo povezovanje reprezentacij, ki ga ponazorimo z modelom reprezentacijskih preslikav. V okviru tega modela definiramo dva koncepta: razumevanje in pomenjanje. Učenčevo razumevanje matematičnega pojma razumemo kot njegovo sposobnost prehajanja med različnimi zunanjimi reprezentacijami, pomenjanje pa kot sposobnost rokovanja z določeno zunanjo reprezentacijo. Pri tem nakažemo tudi omejitve, saj nekateri matematični pojmi zaradi svoje narave ne omogočajo prehajanja med vsemi različnimi reprezentacijami, ampak zgolj med nekaterimi.

Ključne besede: *reprezentacija, razumevanje matematičnih pojmov*

Representation is primarily something that stands in place of something else. For each representation we need to define: (1) representational world, (2) world that representational world represents (hereinafter world that represents), (3) which aspects of the world that it represents, are represented, (4) which aspects of the representational world represent, and (5) the link between the world that represents and representational world.
The most important activity in math class is the activity of abstract mathematical concepts' representation. A distinction is made between internal (mental images) and external representations (environment). External representations consist of structured symbolic elements, whose role is an 'external' presentation of certain mathematical 'reality'. At math class we mainly use exact representations, graphic representations, representations of mathematical symbols, and other representations, recently especially ICT representations.

In this paper, we focus on the importance of using different external representations in the process of teaching and learning mathematics. We highlight the integration of representations as a key factor in learning mathematics, which we illustrate with a model of representational mapping. Under this model, we define two concepts: understanding and signification. Students' understanding of the mathematical concept we understand as his ability to transfer between the various external representations, and the signification as his ability of handling a particular external representation. At the same time we also indicate limitations because some mathematical concepts by their nature do not allow transitions between all the different representations, but only between some.

Key words: *representation, understanding mathematical concepts*

Uvod

Reprezentacije matematičnih pojmov igrajo ključno vlogo v matematičnem izobraževanju. Te vloge so lahko opredeljene kot način mišljenja (interpretiranje reprezentiranega), način zapisovanja, predstavljanja idej (reprezentiranje razmišljanja) in kot sredstvo komunikacije (npr. razlagalna vloga) (Chapman, 2010). Reprezentacije omogočajo učencem, da komunicirajo na matematičen način, da modelirajo in interpretirajo realen, socialen in matematičen kontekst ter da raziskujejo in interpretirajo pomene matematičnih pojmov, relacij in procedur (Chapman, 2010). Reprezentacije oziroma načini učenčevega ravnanja z njimi omogočajo tudi spremljanje in ocenjevanje učenčevega napredovanja v matematičnem znanju. Bruner (1966) je z zaporedjem uporabe reprezentacij pri obravnavi matematičnih pojmov (najprej neaktivna, nato ikonična in nazadnje simbolična) opredelil tudi potek razvoja matematičnih pojmov pri učencu. Novejše raziskave kažejo, da so bolj kot zaporedje reprezentacij pomembne relacije med reprezentacijami določenega matematičnega pojma (Chapman, 2010).

Fleksibilna uporaba strategij in reprezentacij je ključna kompetenca, ki jo je treba razvijati pri učencih pri pouku matematike. V procesu učenja matematike običajno ni najpomembnejše, da učenec čim hitreje reši zadano nalogo, ampak da izbere med različnimi strategijami reševanja določene naloge najbolj ustrezno, upoštevajoč vrsto naloge in matematični pojem, ki je v nalogi obravnavan (Baroody in Dowker, 2003; Kilpatrick, Swafford in Findell, 2001; Verschaffel, Greer in De Corte, 2007). Učenec bi npr. matematično nalogo 2,5 x 8 lahko rešil s pomočjo pisnega algoritma, s pomočjo množenja ulomkov ali s premislekom, da se zmnožek ne spremeni, če en faktor k-krat povečamo/zmanjšamo in drugega tolikokrat zmanjšamo/povečamo. V našem primeru preoblikujemo račun v 5 x 4 in nalogo rešimo s pomočjo znanja poštevanke. Seveda je način reševanja odvisen predvsem od učenčevega znanja, razumevanja matematičnih pojmov, pri čemer pa ne gre zanemariti vlogo učitelja, ki z nenehnim spodbujanjem učencev k izbiri ustreznih strategij za reševanje določenih nalog spodbuja učence k tovrstnemu razmisleku pri reševanju nalog.

Učitelji začetniki največkrat ne izhajajo iz svojega matematičnega znanja, ampak iz učbeniških gradiv in drugih materialov (Brown in Borko, 1992), ki so lahko problematična z vidika reprezentiranja matematičnih pojmov, zato je zelo pomembno problematizirati šolsko matematiko na način, da pomagamo učiteljem ponovno premisliti o njihovem matematičnem znanju in o njihovih okvirih, na katerih temelji njihovo poučevanje (Llinares in Krainer, 2006; Herbel-Eisenmann in Phillips, 2008; Feiman-Nemser in Buchman, 1985). Učiteljeva refleksija dela v razredu je nujna komponenta učenja in poučevanja, ki vodi do kakovostnih sprememb stališč in znanja o poučevanju in učenju (Llinares in Krainer, 2006), ki temelji na smiselni uporabi in kreiranju matematičnih reprezentacij.

Kot smo že izpostavili, je ključna kompetenca, ki jo je treba razvijati pri pouku matematike, sposobnost prehajanja med posameznimi reprezentacijami istega matematičnega pojma (Heinze et al., 2009). Pouk matematike, ki temelji na raziskovanju različnih reprezentacij določenega matematičnega pojma in spodbuja učence, da tekoče in fleksibilno prehajajo med temi različnimi reprezentacijami, je učinkovitejši in omogoča učencem boljše razumevanje matematičnih pojmov, kot pouk, ki tega ne omogoča (Duval, 2002; Griffin in Case, 1997; Kaput, 1989). Pri pouku matematike je za učenčevo uspešno in produktivno interakcijo z različnimi reprezentacijami pomembno, da (Jong et al., 1998):

1. tekoče rokuje z različnimi reprezentacijami in med njimi tudi prehaja (npr. zna s konkretnim materialom izračunati dani račun in računanje 'prevesti' v simbolni zapis);
2. izbere ustrezno reprezentacijo izmed ponujenih za reprezentiranje določenega pojma (reprezentiranje seštevanja trimestnih števil z desetiškimi enotami je primernejša reprezentacija kot reprezentiranje računanja v obsegu do 1000 z nestrukturiranim materialom).

Reprezentacije pri matematiki so različne. Lahko vključujejo slike, diagrame, simbole, konkreten material, jezik in realne sitaucije iz življenja (Van de Walle, 2004). Eisner (2004) poudarja pomen različnega reprezentiranja pri ustvarjanju razumevanja, ki se nadgradi v ustvarjanje novega/ drugačnega razumevanja izbranega matematičnega pojma.

Izbira reprezentacije ni odvisna le od matematičnega konteksta, ampak tudi od posameznika, ki rešuje določeno matematično nalogo ali problem (Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen in Verschaffel, 2009). V raziskavi Bieda and Nathan (2009) se je izkazalo, da je tekoča uporaba reprezentacij – spretno rokovanje s posamezno reprezentacijo in prehajanje med reprezentacijami, ko je to potrebno, bolj učinkovita kot osredotočanje na reprezentacijo, ki ne temelji na relaciji z matematičnim pojmom. Npr. učenec se pri pisnem odštevanju osredotoča na reprezentacijo z desetiškimi enotami, ki ne odraža relacije s tem algoritmom, saj temelji na pravilu razlike, česar pa z desetiškimi enotami ne prikazujemo. Drugače je seveda pri pisnem seštevanju, kjer rokovanje z desetiškimi enotami odraža postopek pisnega algoritma in se reprezentaciji – simbolna in konkretna – med seboj dopolnjujeta.

Prehajanje med zunanjimi reprezentacijami je torej ključno, saj so le-te v tesni korelaciji z notranjimi reprezentacijami, ki jih opredelimo kot miselne predstave oziroma miselne prezentacije (ne re-prezentacije): nekaj, kar nima originala, notranji svet izkušenj. Notranje reprezentacije, poznamo jih tudi pod izrazom kognitivne reprezentacije (Palmer, 1978), razumemo kot miselne predstave, ki ustrezajo našim notranjim formulacijam 'realnosti'. Kognitivni razvoj temelji na dinamičnem procesu prepletanja miselnih predstav in okolja (Karmiloff-Smith, 1992). To pomeni, da je uspešno učenje aktivno oblikovanje znanja v procesu interakcij med zunanjimi in notranjimi reprezentacijami.

V nadaljevanju se bomo osredinili na zunanje reprezentacije, ki so sestavljene iz strukturiranih simbolnih elementov, katerih vloga je 'zunanja' predstavitev določene matematične 'realnosti'. Z izrazom 'simbolni elementi' označujemo elemente, ki jih izberemo za reprezentacijo nečesa drugega. Objekt, ki reprezentira drug objekt (pojem), razumemo kot simbol. Pri pouku matematike v glavnem ločimo tri vrste simbolnih elementov oziroma tri vrste zunanjih reprezentacij: *konkreten oziroma didaktičen material*, *grafične, vizualne ponazoritve* in *matematične simbole*.

Zunanje reprezentacije: konkreten material, grafične in simbolne reprezentacije

Konkreten material

Didaktičen material bomo opredelili kot material, ki ga učenci in učitelji uporabljajo pri pridobivanju znanja. Didaktičen material pri pouku matematike je konkreten material, s katerim poskušamo učencem na različne načine približati abstraktne matematične ideje.

Uporaba didaktičnega materiala ima pomembno vlogo pri oblikovanju matematičnih pojmov, saj pomaga učencem razumeti matematične pojme, procedure, algoritme in simbole. Seveda pa didaktičen material ne reprezentira sam po sebi, ključen je učenec, ki reprezentaciji da pomen. Didaktičen material se med seboj razlikuje po kompleksnosti in ga delimo na strukturiranega in nestrukturiranega. Osnovno vprašanje pri rokovanju z didaktičnim materialom je zagotovo to, kako sta povezana fizično manipuliranje z materialom in miselni procesi, ki ob tem nastajajo, oziroma kako rokovanje z materialom pomaga pri razvijanju izbranega matematičnega pojma oziroma pri reševanju matematičnih problemov.

Manipuliranje z materialom naj bi se odražalo v miselni aktivnosti, ki je potrebna za razumevanje abstraktnega matematičnega pojma. Če didaktičen material ne zagotavlja določenega miselnega napora, je po besedah Markovca (1990) didaktično neustrezen. Ta trditev med drugim vodi do vprašanja, kako dolgo lahko učenec uporablja izbran didaktičen material. Markovac (1990) na to vprašanje odgovarja: učenci naj uporabljajo didaktičen material toliko časa, dokler ne znajo rešiti naloge brez uporabe tega materiala. Ko to dosežejo, določen material za učence ni več potreben. Učenci se običajno sami ne odločijo za opustitev določenega materiala, zato je vloga učitelja, da spodbuja k reševanju nalog brez uporabe didaktičnega materiala in s tem preverja učenčevo zrelost za njegovo opustitev. Ni pa prav, da mora učenec material opustiti, če za to opustitev ni zrel oziroma mu uporaba materiala omogoča rokovanje z izbranim matematičnim pojmom, s proceduro, z algoritmom. Didaktičen material ima vlogo mediatorja med učnimi cilji, ki vodijo pouk matematike, in rezultati tega procesa – matematično izobraženi učenci (Gellert, 2004). Ob tem se kar samo ponuja vprašanje, če se učenci zavedajo didaktične vrednosti materiala, ali ga uporabljajo na način, ki se od njih pričakuje, oziroma, če material resnično vodi k uresničevanju izbranih matematičnih ciljev. Tudi če učitelj presodi, da izbran didaktičen material pomaga učencem pri napredovanju v matematičnem znanju oziroma spodbuja določeno miselno aktivnost, to še ne pomeni, da se bo to v praksi tudi zgodilo. Učenci namreč v materialu lahko ne prepoznajo matematičnih odnosov, material zaznajo npr. kot fizične objekte. Ob tem se postavi že naslednje vprašanje: Koliko matematičnega znanja je treba imeti, da nekomu didaktičen material pomaga pri učenju matematičnih pojmov? Vzemimo za zgled desetiške enote, s katerimi učenci rokujejo pri učenju o računskih algoritmih. Za učinkovito uporabo tega materiala je treba dobro poznati desetiški sistem ter odnose med posameznimi desetiškimi enotami. Ali je ta material pri poučevanju algoritmov sploh potreben tistim učencem, ki te odnose poznajo, oziroma, kako lahko koristi tistim učencem, ki teh odnosov sploh ne poznajo? Na to vprašanje so odgovarjale različne raziskave ob koncu 20. stoletja. Labinowicz (1985) je opazoval učence razredne stopnje pri rokovanju z Dienesovimi ploščami in ugotovil, da imajo učenci težave s povezovanjem teh plošč z zakonitostmi desetiškega sistema, po drugi strani pa sta Fuson in Briars (1990) ugotovila pozitivno vlogo teh plošč pri učenčevem razumevanju seštevanja in odštevanja naravnih števil. Fennema (1972) in Friedman (1978) utemeljujeta pomen uporabe Dienesovih plošč v nižjih razredih osnovne šole in je ne zagovarjata v višjih razredih, Suydam in Higgins (1977) pa poročata o pozitivni vlogi uporabe tega konkretnega materiala za vse učence. Thompson (1992) ter Resnick in Omanson (1987) so ugotovili, da imajo Dienesove plošče zelo malo vpliva na učenčevo razumevanje algoritmov na razredni stopnji. Za učence, ki imajo pri matematiki težave, ena paličica, ki predstavlja desetico, in ena kocka, ki predstavlja enico, pomenita isto količino – ena; razločijo, da se objekta fizično razlikujeta, ne znajo oziroma ne morejo pa vzpostaviti odnosa med tema objektoma (Gravemeijer, 1991). V letih 1960 do 1970 so na primer na Nizozemskem zelo poudarjali uporabo Dienesovih plošč pri učenju aritmetike, a izkušnje na tem področju so jih pripeljale do ugotovitve, da so plošče po eni strani zelo primerne in uporabne za ponazoritev strukture desetiškega sistema, po drugi strani pa manj uporabne pri reprezentacijah kompleksnih računskih operacij (Beishuizen, 1999), kar jih je vodilo do uporabe drugačnih ponazoril, med drugim do nestrukturiranega materiala (Anghileri, 2001).

Te nasprotujoče si ugotovitve nas opozarjajo, da konkreten material sam po sebi ne zagotavlja uspešnega učenja, oziroma, da je učenje kompleksen proces, katerega sestavni del je tudi rokovanje s konkretnim materialom. Rokovanje s konkretnim materialom, ki ni osmišljeno z natančno refleksijo procesa rokovanja in ni obravnavano v relaciji z drugimi reprezentacijami v matematiki, ne more voditi k uspešnemu učenju o matematičnih pojmih. Narava matematičnega pojma, način uporabe didaktičnega materiala in material sam so dejavniki, ki vplivajo na proces učenja in poučevanja.

Novejše raziskave (Anghileri, 2001) pri pouku aritmetike npr. zagovarjajo holistično obravnavo števil pri učenju o računskih algoritmih. Za učence je ustreznejše, da obravnavajo število v celoti in ne ločeno po posameznih desetiških enotah. To bi pri operaciji deljenja predstavljalo pristop, ki ga prikazujemo na primeru deljenja 165 : 12. Učenec najprej zapiše nekatere večkratnike števila 12: 5 x 12 = 60, 10 x 12 = 100, 2 x 12 = 24 …) in nato te večkratnike odšteva od deljenca. Zapis takega računanja je naslednji:

```
  165  : 12 = 13
- 120         10
   45
  -24          2
   21
  -12          1
   9 ost
```

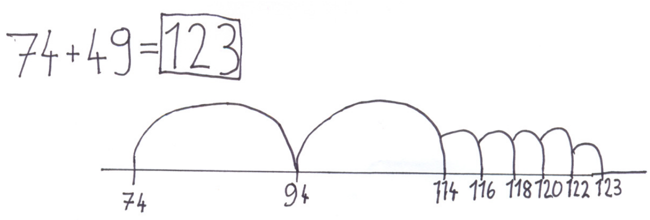
Učenec torej ves čas operira s celotnim številom; računanje temelji na dobrem poznavanju številskih odnosov oziroma na učenčevih številskih predstavah. Anghileri (2001) bolj kot uporabo konkretnega materiala za računanje zagovarja njegovo uporabo za razvoj številskih predstav, saj le-te omogočajo uspešno računanje in spretno uporabljanje pravil računanja v različnih obsegih števil.

Ključno vprašanje, ki ga je zastavil Gravemeijer (1991), je: Ali je fizična aktivnost z materialom izomorfna z miselno aktivnostjo? Oglejmo si primer računanja na številski osi. Številska os povzroča nemalo težav učencem, saj ponazoritev števil na osi vključuje tako ordinalni kot kardinalni vidik števil.

Po eni strani je število predstavljeno kot pozicija na osi, po drugi strani pa število predstavlja tudi število premikov po številski osi – 'ena' na številski osi ustreza razdalji med posameznima številoma, oziroma pomeni en premik in nima nobene povezave s številom 1, ki je zapisano na številski osi.

Učenec pri računanju, npr. 5 + 3, ob uporabi številske osi, prične s številom 5 in šteje ‘ena, dve, tri’ od števila 5 naprej in konča pri številu 8, kar je iskana vsota. Ta postopek računanja pa se razlikuje od računanja v mislih, saj običajno učenec računa tako, da šteje od 5 naprej, tj. ‘šest, sedem, osem’. Učenec, ki lahko računa na predstavljeni način, prav gotovo ne potrebuje številske osi za izračun npr. vsot v obsegu do 10. Seveda pa je mogoče številsko os uporabiti tudi na način, da podpira miselni proces pri računanju. To je ‘prazna številska os’, ki omogoča preslikovanje miselnega procesa računanja na prazno številsko os, ki v tem primeru služi kot prava podpora učenčevemu računanju – ponazoritev in miselni proces se dopolnjujeta.

'Prazno številsko os' so na Nizozemskem razvili kot odgovor na izkušnje učiteljev, ki so pokazale, da učenci predolgo uporabljajo konkreten material, kot so link kocke in Dienesove plošče ter reprezentacije na številski osi, oziroma, da so pri računanju na nek način pasivni; zgolj berejo rezultate, ki jih ponujajo ponazorila. 'Prazna številska os' omogoča učencem, da se poljubno premikajo po osi, si predstavljajo števila na svoj način in razvijajo lastne strategije računanja (Anghileri, 2001).



Slika 1: 'Prazna številska os'

Anghileri (1998) celo zagovarja, da rokovanje s konkretnim materialom ni ključnega pomena pri učenju računanja, oziroma, da bi učencem računanje do 100 lahko predstavili zgolj na simbolni ravni.

Problematična pri računanju do 100 je uporaba stotičnega kvadrata. Učenec se nauči rokovati z materialom, in sicer tako, da se ustrezno premika po kvadratu, opustitev le-tega pa ni mogoča, saj učenec ob tovrstnem rokovanju ne razvija miselnih procesov, ki bi podpirale razumevanje računanja do 100 (ne brez prehoda in ne s prehodom). Stotični kvadrat je ustrezno ponazorilo za ponazoritev števil do 100, njihovih pozicij v izbranem stolpcu, vrstici, kot pomoč pri štetju, prav gotovo pa ne za računanje v obsegu do 100. Poleg konkretnih ponazoril je uporabna predvsem številska os, kjer seštevanje pomeni pomikanje v desno, odštevanje pa v levo.

Markovac (1990) pri rokovanju z didaktičnim materialom izpostavi tudi vlogo jezika, ki predstavlja most med fizično in miselno aktivnostjo. Ko rokujemo z didaktičnim materialom, fizična manipulacija ni bistvena, bistven je miselni proces, ki se odvija v ozadju. Ta miselni process pa postane bolj transparenten, ko je dejavnost podkrepljena z verbaliziranjem, saj je s tem fizična aktivnost transformirana v miselni process in tako ponotranjena in je s tem okrepljeno učenčevo razmišljanje (če mora učenec svoje rokovanje z materialom glasno pojasnjevati, njegovo rokovanje z materialom postane bolj osredotočeno na matematični pojem). (Markovac, 1990)

Po Markovcu (1990) je uporaba didaktičnega materiala brez verbaliziranja nesmiselna, saj ne vodi učencev do višjih miselnih procesov, kar je bistveni razlog uporabe didaktičnega materiala pri pučevanju matematike.

Grafične reprezentacije

Grafične reprezentacije so v matematiki na razredni stopnji najbolj zastopane pri ponazarjanju matematičnih idej. Matematični učbeniki, delovni zvezki ter drugo matematično gradivo so polni grafičnih reprezentacij, ki se med seboj razlikujejo po domiselnosti, izvirnosti ter korektnosti. Nekatere so celo matematično vprašljive in didaktično neustrezne.

Ključen je razmislek o tem, kaj slika prikazuje. Ali prikazuje tisto, kar vidim (npr. pravi kot v trikotniku), ali je to lahko katerikoli kot. V katerem primeru sliki lahko popolnoma verjamem, v katerem primeru mi slika služi le kot podpora za nekaj, česar na sliki neposredno ni mogoče razbrati? Pomembno je sprejeti oziroma določiti pravila grafičnega ponazarjanja matematičnih idej glede na matematično vsebino in spodbujati diskusijo pri učencih, ko pride do različnih interpretacij. Npr. zgornjo ploskev mize, ki ima obliko pravokotnika, grafično predstavimo kot pravokotnik in ne kot paralelogram, kot bi mizo narisali v poševni projekciji.

Poglejmo si primer grafičnih reprezentacij, s katerimi ponazarjamo koncept števil. Konkretna reprezentacija za števila so vsi števni predmeti, ki nas obkrožajo. Štejemo predmete, ki imajo določene skupne lastnosti in jih hkrati lahko razločujemo. Grafične reprezentacije števil so v glavnem ilustracije predmetov, živali in oseb, ki jih učenci izrazijo tudi s simboli oziroma s številkami. Grafičnih reprezentacij pa ne uporabljamo zgolj za matematične pojme, ampak tudi pri ponazarjanju določenih matematičnih simbolov. Učenje o matematičnih pojmih in simbolih zanje poteka v glavnem sočasno (npr. simboli za relacije: <, >, =).

Grafične reprezentacije predstavljajo nekakšen most med konkretnimi reprezentacijami in reprezentacijami z matematičnimi simboli. Heedens (1986) je most, ki vodi od konkretnega proti abstraktnemu, predstavil kot most grafičnih reprezentacij, ki so bodisi semikonkretne bodisi semiabstraktne.

Konkretna reprezentacija	Grafična reprezentacija		Reprezentacija z matematičnimi simboli
	Semikonkretna reprezentacija	**Semiabstraktna reprezentacija**	
Računsko operacijo izvedemo s konkretnimi objekti, npr. odvzamemo tri jabolka iz košare s petimi jabolki.	Računsko operacijo grafično prikažemo, npr. operacijo odštevanja prikažemo tako, da npr. narišemo pet jabolk in tri prečrtamo. Pri tej reprezentaciji rišemo objekte, ki so bili predmeti konkretne reprezentacije.	Računsko operacijo grafično prikažemo, a ne nujno z reprezentacijami konkretnih objektov. Npr. za primer z jabolki bi lahko narisali pet krogov in tri prečrtali. Ta reprezentacija ni več povezana s konkretno izkušnjo v smislu uporabljenih objektov.	Računsko operacijo zapišemo z matematičnimi simboli. V primeru z jabolki: 5 – 3 = 2.

Grafične reprezentacije operacij odštevanja in deljenja so bistveno bolj kompleksne kot reprezentacije seštevanja in množenje. Poglejmo si primer reprezentiranja operacije odštevanja za primer računa 5 – 2 = 3. Situacijo lahko predstavimo vsaj na tri različne načine: predstavimo začetno in končno stanje – dve reprezentaciji (na prvi sliki npr. pet krofov na pladnju, na drugi trije krofi in sledi dveh, ki ju več ni), končno stanje – ena reprezentacija (trije zaviti bonboni in dva papirčka), začetna in končna situacija – ena reprezentacija (narisanih pet jabolk, dve prečrtani). Slednja se najpogosteje uporablja pri matematiki. Prav gotovo je zelo kompleksna in učenec dostikrat ne zazna povezave med prečrtavanjem objektov in odvzemanjem, saj pogosto ob situaciji, ki smo jo opisali z jabolki za račun 5 – 2 = 3, zapiše račun 3 – 2. Vidi namreč, da tri jabolka niso prečrtana, dve pa sta. Učenec v tem primeru ne da pomena grafični reprezentaciji, oziroma ne uvidi povezave med konkretno in grafično reprezentacijo odštevanja. Težava nastopi že takrat, ko imamo namreč situacijo 5 – 4, saj bi bila v tem primeru štiri jabolka prečrtana in eno ne bi bilo prečrtano, napačna interpretacija narisanega pa bi vodila v še bolj nesmiseln zapis računa, in sicer 1 – 4.

Pri učenju matematike se torej srečujemo z različnimi grafičnimi reprezentacijami, ki za učenca niso nujno enostavnejše od konkretnih. Izbiro grafične reprezentacije določa narava matematičnega pojma in uporaba konkretnega materiala pri obravnavi tega pojma. Ključno pa je sprotno vzpostavljanje povezav med različnimi reprezentacijami.

Matematični simboli

Učenci v prvih letih šolanja spoznajo števke od 0 do 9, znake za operacije (-, +, :, x) ter simbole za relacije (<, >, =). Število znakov je majhno, a je neskončno število kombinacij teh simbolov, in pravila, ki veljajo za posamezne kombinacije, so tisto, kar povzroča učenem nemalo težav pri rokovanju z matematičnimi simboli. Nemalokrat učenci rokujejo s simboli mehanično, brez razumevanja. V procesu zgodnjega učenja matematike je rokovanje s simboli tesno povezano s konkretnimi in grafičnimi reprezentacijami.

Hiebert (1988) definira matematične simbole kot reprezentacijski simbol, opredeljen s petimi stopnjami, ki jih mora usvojiti učenec, da lahko s simboli uspešno rokuje.

Omenili bomo zgolj prvo stopnjo, to je 'zagotavljanje relacij med simboli in referencami za simbole', kar pomeni, da moramo v procesu učenja in poučevanja omogočiti učencem rokovanje s konkretnim in grafičnim materialom in vzpostavljati relacije med temi reprezentacijami in simboli. Vsekakor pa vzpostavljanje relacij ni preprosto. Ni namreč nujno, da za posamezen simbol v matematiki obstaja le ena relacija 'simbol – referenca za simbol'. Vzemimo za primer matematični simbol *enačaj*. Ta simbol se učencem prikazuje kot relacijski simbol (npr. že v prvem razredu, ko primerjajo števila po velikosti), a ga učenci pri obravnavanju računskih operacij, ki sledi obravnavi enačaja kot relacijskega znaka, razumejo kot operacijski simbol, ki jim pomeni 'je rezultat' (Cross et al., 2009). To je po eni strani povsem logično, saj pri demonstriranju, npr. seštevanja, učenci združijo dve skupini elementov in dobijo novo, večjo skupino, kar neposredno implicira, da izvedba procesa združevanja rezultira v združeni množici, oziroma da združevanje enačimo s simbolom '+', rezultiranje pa z znakom '=' (tudi jezik, ki ga ob tem uporabljamo, neposredno vodi v tovrstno razumevanje simbolov).

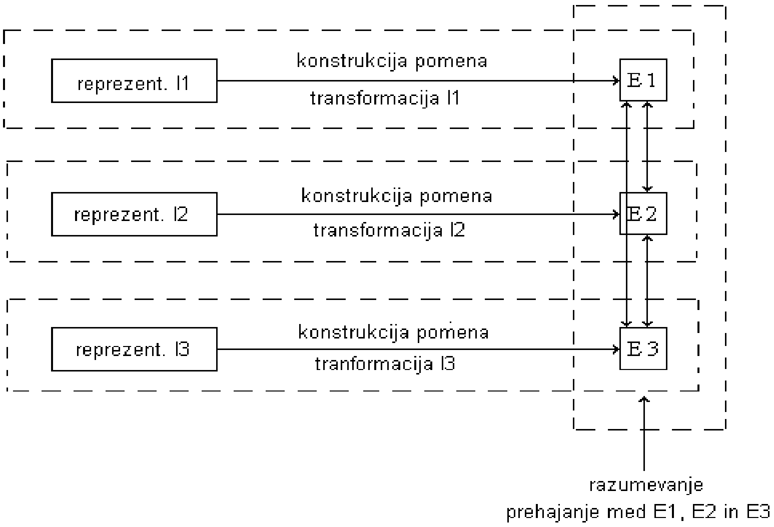
Težava napačnega oziroma neustreznega razumevanja enakosti se največkrat pokaže pri situacijah, ko učenci iščejo npr. vsoto, ki je kot neznani člen zapisana na levi strani enačaja. Po drugi strani pa je ideja enakosti tako kompleksna v matematiki, da je praktično nemogoče od prvošolcev pričakovati, da bi enakost razumeli kot ujemanje leve in desne strani enačaja. Pri reševanju enačb pa dobi enakost drugačen pomen oziroma drugo referenco. Konkretna reprezentacija v tem primeru je lahko šolska tehtnica, ki zelo nazorno pokaže idejo enakosti. Vprašamo se lahko, kaj moramo storiti, da bo tehtnica v ravnovesju, če je na eni strani 6, na drugi pa so 4 frnikule (vse so enako težke). Rešitev je neskončno, nekaj jih z učenci zapišemo in pri tem poudarjamo enakost na levi in desni strani tehtnice oziroma na levi in desni strani enačaja. Nekaj primerov: na obeh straneh odvzamemo vse frnikule (6 – 6 = 4 – 4), eno frnikulo prenesemo z ene strani na drugo (6 – 1 = 4 + 1), na eno stran tehtnice dodamo dve frnikuli (4 + 2 = 6) … Situacija s tehtnico nas vodi v iskanje enakosti, kjer znak '=' dobi popolnoma drugačen pomen kot pri enostavnih računskih operacijah oziroma računih, o katerih se učenec uči v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju. Na učencu pa je, da bo izbral pravi referenčni okvir pri posamezni nalogi, v kateri nastopi enačaj. Učenec, ki tega ne zmore, bo npr. kot rešitev enačbe 8 = x + 2, zapisal x = 10.

Specifični so simboli v geometriji, s katerimi se prav tako učenci srečajo že v prvih dveh vzgojno-izobraževalnih obdobjih osnovne šole. Nekateri simboli so v tesni povezavi z matematično idejo, ki jo predstavljajo (podobno izgledajo), npr. simbol za vzporednost, pravokotnost, kot ipd., nekateri drugi pa te neposredne povezave z referenco oziroma grafičnim prikazom pojma nimajo. Mednje sodijo oznake za presečišča, oglišča, poimenovanje daljic, poltrakov itd. Pri opazovanju ene od situacij v razredu je bilo mogoče ugotoviti, kako učenci lahko razumejo povezavo med enakimi simboli v različnih vlogah: črke abecede in črke za označevanje oglišč. Nekateri učenci so namreč prišli do sklepa, da je presečišč lahko največ 25, toliko, kot je črk abecede (učiteljica je namreč poudarila, da če je na sliki več presečišč, to označimo z različnimi črkami abecede). Lahko ugotovimo, da je učencem zahtevno uporabljati iste simbole za različne ideje (referenčni svet za veliko črko v matematiki je nekaj čisto drugega kot pri jeziku).

Relacije med različnimi reprezentacijami. Model reprezentacijskih preslikav

Poznamo veliko različnih razlag pojmov razumevanje in pomenjanje. Mi bomo definirali pomenjanje kot proces, tesno povezan s specifično reprezentacijo, razumevanje pa kot učenčevo sposobnost prehajanja (prevajanja) med različnimi reprezentacijami. S pomenjanjem torej opredelimo učenčevo sposobnost dati določeni reprezentaciji pomen oziroma izvesti predvideno transformacijo v okviru določene reprezentacije. Razložimo oba procesa na primeru operacije deljenja. Če učenec lahko izvede operacijo deljenja s konkretnim materialom, pomeni, da tej reprezentaciji da določen pomen. Učenec, ki reprezentacijo s konkretnim materialom lahko prevede (spremeni) v grafično reprezentacijo in/ali reprezentacijo z matematičnimi simboli, pa operacijo deljenja tudi razume.

Model reprezentacijskih preslikav smo grafično predstavili s spodnjim prikazom (Hodnik Čadež, 2001, 2003).



Uuuuuu68
I 1: konkretna reprezentacija
I 2: grafična reprezentacija
I 3: reprezentacija z matemat. simboli
E 1, E 2, E 3: reprezentacije I 1, I 2, I 3.

Prikaz 1: Model reprezentacijskih preslikav

Model reprezentacijskih preslikav smo uporabili za analiziranje učenčevega razumevanja operacij seštevanja in odštevanja, a verjamemo, da bi ga lahko uporabili tudi pri preučevanju drugih matematičnih konceptov. V naši raziskavi (Hodnik Čadež, 2001, 2003) smo potrdili osnovno hipotezo, da učenec, ki popolnoma prehaja med različnimi reprezentacijami seštevanja in odštevanja do 100, lahko razvije svojo učinkovito strategijo računanja (za seštevanje in odštevanje) v obsegu števil do 1000.

Razložimo zgornji model reprezentacijskih preslikav z naslednjim primerom. Implicitna reprezentacija I1 je lahko reprezentacija s strukturiranim materialom. Če učenec lahko izvede operacijo, npr. 28 + 5 s tem materialom, pomeni, da je implicitno reprezentacijo spremenil (tranformiral) v eksplicitno reprezentacijo, dal ji je pomen. To z drugimi besedami pomeni, da nobena reprezentacija ne reprezentira sama po sebi, vedno je nujen interpretor, ki implicitno reprezentacijo pretvori v eksplicitno. Če je učenec nato sposoben vzpostavljanja relacij med posameznimi eksplicitnimi reprezentacijami, ali z drugimi besedami, prepozna isti pojem, predstavljen na različne načine, z različnimi reprezentacijami, lahko rečemo, da razume matematični algoritem, v našem primeru prištevanje enic k poljubnemu dvomestnemu številu. Razumevanje pa običajno rezultira v transferu že usvojenega na novo učenje. V naši raziskavi je to pomenilo, da je bil učenec sposoben prenesti znanje računskih algoritmov v obsegu do 100 na samostojno oblikovanje računskih algoritmov v obsegu števil do 1000 (učenci se o algoritmih v obsegu do 1000 niso učili na klasičen način, ustvarili so jih samostojno).

Oglejmo si uporabo modela v praksi pri obravnavi deljenja v tretjem razredu, ki se navezuje na poštevanko. Učenec najprej operacijo deljenja izvede na konkretnem primeru, izhajajoč iz situacije, ki jo pozna. Vzemimo, da deli karte pred pričetkom družabne igre. Lahko deli na dva načina, ki ju v matematiki opišemo kot 1) iskanje števila elementov v enako močnih množicah in 2) iskanje števila enako močnih množic. Pri prvem primeru bi učenec lahko karte delil po principu 'najprej vsakemu eno, nato še eno ..., dokler kart ne zmanjka', število igralcev bi bilo znano. Pri drugem primeru pa število igralcev ni znano, znano je, koliko kart dobi vsak. Ker na slednji način običajno ne začnemo igre, ta izhodiščna situacija z vidika obravnavanega pojma ni ustrezna. S tem primerom smo hoteli ilustrirati zaplet, ki običajno nastane že pri izbiri konkretne reprezentacije – deljenje kart pred igro je običajna izbira, ki pa je z vidika obravnave matematičnega pojma deljenja, ki sledi obravnavi poštevanke, ne-ustrezna. Zakaj? Učenec, ki ima znanje poštevanke, bo račun deljenja 12 : 4 izračunal tako, da si bo pomagal s situacijo, pri kateri bo 12 elementov delil po 4 in tako dobil število enako močnih množic. Ravno obrnjeno pa bo pri situaciji, kjer bo iskal dele celote, npr. ¼ od 12, oziroma bo delil celoto na 4 enake dele oziroma iskal število elementov v enako močnih množicah. Za naš primer obravnave deljenja (vezano na učenčevo znanje poštevanke) je torej najprimernejša konkretna situacija, pri kateri iščemo število enako močnih množic, npr. situacija, ko imamo 12 rož in želimo v vsak šopek povezati po 4 rože. Vprašamo se, koliko šopkov bomo naredili. Več takih konkretnih reprezentacij potrebujemo, preden učenca spodbudimo, da situacijo tudi grafično prikaže. Omogočimo mu, da poskuša sam osmisliti konkretno reprezentacijo z grafično. Lahko si predstavljamo, da je najustreznejše narisati za naš primer 12 rož in jih povezati (obkrožiti) v šopke po 4 rože. Spet ni dovolj le ena grafična reprezentacija; učenec naj različne konkretne situacije 'prevede' v grafične. Naslednji korak je seznanitev s simbolno reprezentacijo deljenja. Učitelj se lahko odloči, da bo le-to uvedel ob učenčevem dobrem pomenjanju konkretne reprezentacije, ali pa jo bo vpeljal po tistem, ko učenci že znajo konkretno reprezentacijo prevesti v grafično. Učencem mora biti jasno, kako s simbolom predstavimo deljenec, kaj je v našem primeru delitelj, in kaj je količnik. Vse te pojme morajo znati povezati z grafičnimi oziroma s konkretnimi objekti. Nato pa morajo znati različne reprezentacije deljenja povezati še z operacijo množenja. Zanimivo je namreč, da se proces rokovanja s konkretnimi reprezentacijami pri opisanem deljenju bistveno ne razlikuje od množenja (pri reprezentaciji množenja npr. oblikujemo enako močne skupine in iščemo število vseh predmetov, ki pri deljenju predstavlja izhodiščno situacijo), miselna procesa pa sta zagotovo drugačna. Še enkrat poudarimo, da prikazani model reprezentacijskih preslikav zagovarja smiselno vzpostavljanje povezav med različnimi reprezentacijami – nemalokrat se namreč zgodi, da uporabljene reprezentacije prikazujejo različne vidike izbranega matematičnega pojma, kar učencem povzroča nemalo težav pri razumevanju tega pojma, saj smiselnih povezav ne morejo vzpostaviti, ker jih ni, oziroma nimajo ustreznega vodenja, da bi se to zgodilo v primeru, ko so izbrane reprezentacije ustrezne.

Sklep

Poudarimo še enkrat, da reprezentacije v matematiki, bodisi konkretne, grafične ali s simboli, ne reprezentirajo same po sebi, potrebujejo interpretorja. Obstaja veliko zunanjih reprezentacij, ki obkrožajo učenca pri učenju matematike; učenec je tisti, ki jih interpretira, vzpostavlja miselne interakcije s temi reprezentacijami. Velikega pomena je način predstavitve matematičnega pojma z zunanjimi reprezentacijami. V procesu poučevanja in učenja matematike pogosto razumemo prehajanje med konkretnimi, grafičnimi in simbolnimi reprezentacijami kot nekaj naravnega, spontanega. Nemalokrat pozabimo, da zunanje reprezentacije potrebujejo razlago, interpretacijo, v kateri so udeleženi tako učenci kot tudi učitelj. Ne pozabimo, da učenci lahko samostojno ustvarjajo zunanje reprezentacije, jih predstavljajo drugim, o njih diskutirajo. Napačno je predvidevati, da raznovrstne reprezentacije, ki so po navadi tudi zelo privlačne na pogled, vedno služijo svojemu namenu, to je, ustvarjanju povezav med miselnim procesom in reprezentacijami. V veliko pomoč pri osmišljanju reprezentacij je jezik, prav tako reprezentacijski sistem, ki je v tesni relaciji s konkretnimi, grafičnimi in simbolnimi reprezentacijami.

Potreben je razmislek o naravi matematičnega pojma. Bodimo kritični, katere so tiste reprezentacije, ki pomagajo učencu pri razumevanju pojmov, katere so odveč oziroma učenca odvračajo od bistvenega. Ključna odločitev pri poučevanju matematike je izbira učnega pristopa oziroma učiteljeva avtonomna presoja o ustreznosti učnih pristopov, ki mu jih ponujajo/narekujejo matematična učna gradiva z raznovrstnimi reprezentacijami. Strokovni razmislek učitelja, upoštevajoč učenca in znanja s področja didaktike matematike, je pri izbiri pristopa in z njim povezanih reprezentacij, ključen. To z drugimi besedami pomeni, da je treba upoštevati učenca, njegove sposobnosti za interpretacijo reprezentacij, njegove morebitne težave, mu ponuditi čim več različnih reprezentacij in spoštovati njegovo izbiro za reprezentiranje izbranih matematičnih pojmov. Pomembno je, da učenci osmislijo zapisano, narisano, povedano, konkretno prikazano in ob tem razvijajo kompetence za reševanje matematičnih nalog, pri katerih so reprezentacije ključno orodje, ki sicer temeljijo na določenih zakonitostih, a kljub vsemu dopuščajo izvirnost in kreativnost pri interpretaciji in uporabi teh zakonitosti ter ustvarjanju novih.

Literatura in viri

- Anghileri, J. (1998). A Discussion of Different Approaches to Arithmetic Taeching. V: Olivier, A., Newstead, K. (ur.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Stellenbosch, Stellenbosch, South Africa, Vol. 2, str. 17–24.
- Anghileri, J. (2001). Contrasting Approaches that Challenge Tradition. V: Anghileri, J. (ur.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching.* Buckingham: Open University Press.
- Baroody, A. J., Dowker, A. (2003). *The development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Beishuizen, M. (1999). The Empty Number Line as a New Model. V: Thompson, I. (ur.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*. Buckingham: Open University Press.
- Bieda, K. N., Nathan, M. J. (2009). Representational Disfluency in Algebra: Evidence from Student Gestures and Speech. *ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41.*
- Brown, C. A., Borko, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher. V: Grouws, D. A. (ur.), *Handbook on Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company, str. 209–239.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Belkapp Press.
- Chapman, J. O. (2001). Teachers’ Self-representations in Teaching Mathematics. *Mathematics Teacher Education 13*, str. 289–294.
- Cross, C. T., Woods, T. A., Schweingruber, H. (2009). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths toward Excellence and Equity*. National academic press: Washington, str. 162–187.
- Duval, R. (2002). The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 1(2)*, str. 1–16.
- de Jong, T., Ainsworth, S., Dobson, M., van der Hulst, A., Levonen, J., Reimann, P. (1998). Acquiring Knowledge in Science and Math: The Use of Multiple Representations in Technology Based Learning Environments. V: van Someren, M. W., Reimann, P., Boshuizen, H. P. A., de Jong, T. (ur.), *Learning with Multiple Representations*. Amsterdam: Pergamon, str. 9–40.
- Eisner, E. (2004). Preparing for Today and Tomorrow. *Educational Leadership 61(4)*, str. 6–10.
- Feiman-Nemser, S., Buchman, M. (1985). Pitfalls of Experience in Teacher Preparation. *Teachers College Record 87(1)*, str. 53–65.
- Fennema, E. H. (1972). Models and Mathematics. *Arithmetic Teacher 18*, str. 635–640.
- Friedman, M. (1978). The Manipulative Materials Strategy: The Latest Pied Piper?. *Journal for Research in Mathematics Education 9,* str. 78–80.
- Fuson, K. C., Briars, D. J. (1990). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First and Second Grade Place Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education 21*, str. 180–206.
- Gellert, U. (2004). Didactic Material Confronted with the Concept of Mathematical Literacy. *Educational Studies in mathematics 55,* str. 163–179.

- Gravemeijer, K. P. E. (1991). An Instruction – Theoretical Reflection on the Use of Manipulatives. In: Streefland, L. (ur.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute.
- Griffin, S., Case, R. (1997). Re-thinking the Primary School Math Curriculum: An Approach Based on Cognitive Science. *Issues in Education 3*, str. 1–49.
- Heddens, J. W. (1986). Bridging the Gap between the Concrete and the Abstract. *Arithmetic Teacher 33(6),* str. 14–17.
- Heinze, A., Star, J. R., Verschaffel, L. (2009). Flexible and Adaptive Use of Strategies and Representations in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education 41, s*tr. 535–540.
- Hiebert, J. (1988). A Theory od Developing Competence with Written Mathematical Symbols. *Educational Studies in Mathematics 19*, str. 333–355.
- Herbel-Eisenmann, B., Phillips, E. D. (2008). Analyzing Students' Work: A context for Connecting and Extending Algebraic Knowledge for Teaching. V: Greenes, C. E., Rubenstein, R. (ur.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth yearbook*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., str. 295–311.
- Hodnik Čadež, T. (2001). *Vloga različnih reprezentacij računskih algoritmov na razredni stopnji*. Doktorska disertacija. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Filozofska fakulteta.
- Hodnik Čadež, T. (2003). Pomen modela reprezentacijskih preslikav za učenje računskih algoritmov. *Didactica Slovenica 18(1)*, str. 3–22.
- Kaput, J. J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. V: Wagner, S., Kieran, C. (ur.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Hillsdale, NY: Erlbaum, str. 167–194.
- Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond Modularity: A Developmental Perspective on Cognitive Science*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (2001). *Adding it Up. Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Labinowicz, E. (1985). *Learning from Children: New Biginnings for Teaching Numerical Thinking*. California: Addison-Wesley Publishing Co.
- Llinares, S., Krainer, K. (2006). Mathematics (student) Teachers and Teacher Educators as Learners. V: Gutiérrez, A., Boero, P. (ur.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present, and Future*. Rotterdam: Sense Publishers, str. 429–459.
- Markovac, J. (1990). *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
- Nistal, A. A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, Investigating, and Stimulating Representational Flexibility in Mathematical Problem-solving and Learning: A Critical Review. *ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41*.
- Palmer, S. E. (1978). Fundamental Aspects of Cognitive Representation. V: Rosch, E., Lloyd, B. B. (ur.), *Cognition and categorization*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, str. 259–303.
- Resnick, L., Omanson, S. (1987) Learning to Undrestand Arithmetic. V: Glaser, R. (Ur.) *Advances in Instructional Psychology 3*. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum Assocciates. Str. 41–95.
- Suydam, M. M., Higgins, J. L. (1977). *Activity-Based Learning in Elementary School Mathematics: Recommendations from the Research*. Columbus. Ohio: ERIC/SMEE.
- Thompson, P. W. (1992). Notations, Conventions, and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Schools. *Journal for Research in Mathematics Education 25*, str. 297–303.
- Van de Walle, J. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston, MA.: Pearson Education, Inc.
- Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2007). Whole Number Concepts and Operations. V: Lester, F. (ur.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, str. 557–628.