UNIVERZA V LJUBLJANI

PEDAGOŠKA FAKULTETA

Študijski program: Matematika in tehnika

RAČUNANJE KROŽNE KONSTANTE V 18. STOLETJU

DIPLOMSKO DELO

Mentor:
izr. prof. dr. Marko Razpet

Kandidatka:
Barbara Gantar

Ljubljana, junij 2014

Zahvala

Najprej bi se zahvalila gospodu profesorju dr. Marku Razpetu za strokovno vodenje in motiviranje pri pisanju diplomskega dela.

Zahvalila pa bi se tudi Matjažu, mami, očiju in Nejcu za vso pomoč in vzpodbudne besede med samim pisanjem.

Diplomsko delo posvečam hčerki Hani . . .

Program diplomskega dela

V diplomskem delu opišite računanje števila π z uporabo vrst v 18. stoletju. Napišite nekaj o glavnih osebah, ki so pri tem sodelovale.

Ljubljana, 15. januarja 2014 Mentor: dr. Marko Razpet

Povzetek

Diplomsko delo opisuje, kako so matematiki v 18. stoletju računali približke števila π s pomočjo vrst na podlagi funkcije arkus tangens. Opisan je tudi dokaz za iracionalnost krožne konstante.

V zadnjih dveh poglavjih so s pomočjo računalniškega programa Derive izračunani približki števila π z uporabo različnih matematičnih vrst in odstopanja pri računanju površine in prostornine krogle ter obsega in ploščine kroga z uporabo različnih približkov za število π.

Ključne besede:
Krožna konstanta, računanje števila π v 18. stoletju, funkcija arkus tangens, iracionalnost števila π.

MSC(2010): 01A50, 40A05.

Calculating the circular constant in the 18th century

Abstract

The thesis describes how mathematicians calculated the approximations of the number π by using the series, based on the arc-tangent function. It also describes the proof of irrationality of the circular constant.

The last two chapters show how to calculate the approximations of the number π, and the deviations in calculating the circumference and area of a circle and the volume and the area of a sphere by using different approximations for the number π, all with the help of the Derive computer program.

Key words:

Circular constant, calculating number π in the 18th century, arc-tangent function, irrationality of the number π.

Kazalo

Tabele

Slike

1 Kratka zgodovina računanja krožne konstante

Že stari Egipčani so pri preučevanju kroga opazili, da obstaja povezava med ploščino kroga in njegovim polmerom. Opazili so, da je ploščina kroga deljena s kvadratom njegovega polmera za vse kroge neka konstanta, ki jo od 18. stoletja naprej označujemo s π (pi).

Prvi, ki se je resno lotil določanja te konstante, je bil Arhimed (225 pr. n. št.). Njegova metoda je potekala preko računanja ploščine krogu včrtanega in očrtanega pravilnega 96-kotnika. S tem izračunom je dobil spodnjo in zgornjo mejo intervala, na katerem leži število π. Arhimedova metoda je ostala v uporabi več kot 1800 let. Povzeto po [1].

Slika 1: Arhimed

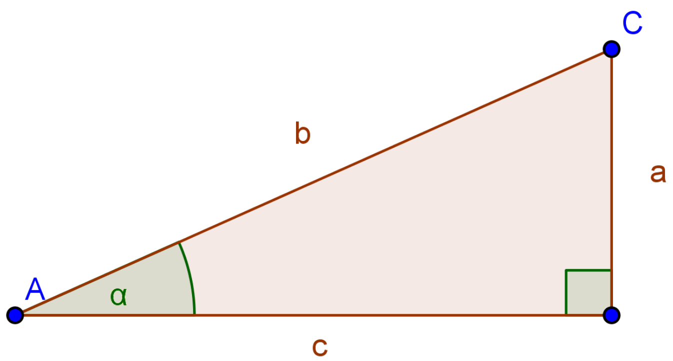
Arhimedova metoda je bila zelo zamudna in v računanju decimalk števila π ni prinesla večjega napredka. Prvi, ki je računanje decimalk števila π postavil na višjo raven, je bil Isaac Newton (1643–1727), in sicer s pomočjo številskih vrst. Izrazil je ploščino krožnega odseka s središčnim kotom $\frac{\pi}{3}$ in prišel do vrste

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(2n+3)(n-1)!n!2^{4n}}.$$

S seštevkom nekaj členov vrste je leta 1666 izračunal število π na 15 decimalnih mest natančno. Več o vlogi Newtona pri računanju krožne konstante si lahko bralec prebere v [2] in [3].

2 Funkcija tangens

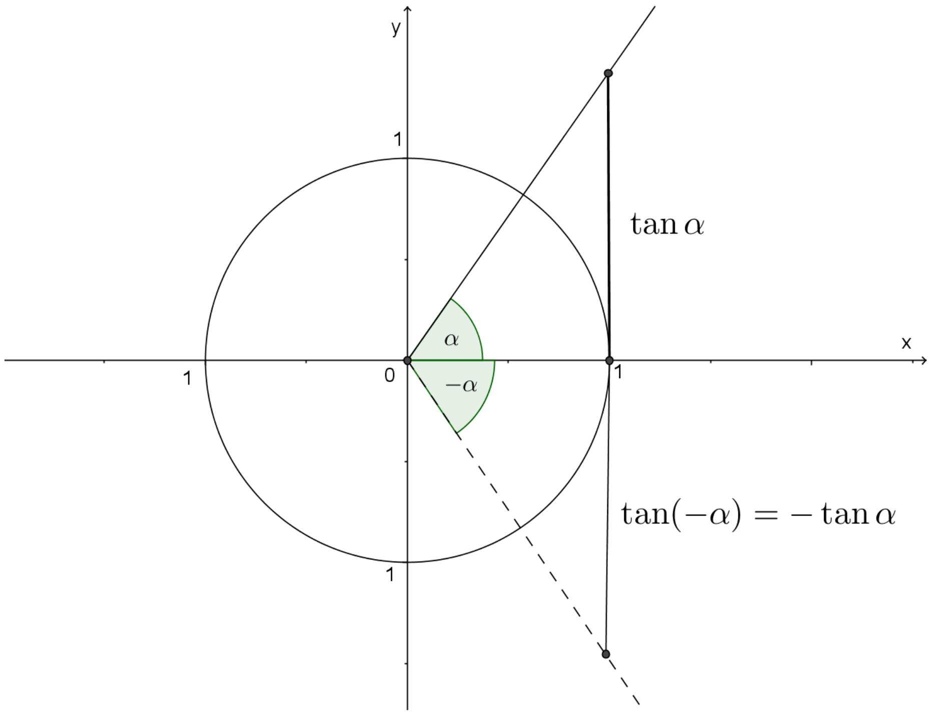
Kotna funkcija tangens (tan) je v pravokotnem trikotniku definirana kot razmerje dolžin kotu nasprotne katete in priležne katete (glej sliko 2).



Slika 2: Funkcija tangens, definirana v pravokotnem trikotniku

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Za ponazoritev funkcije tangens na enotski krožnici (glej sliko 3) narišemo tangenti v presečiščih krožnice z obema koordinatnima osema. Iz izhodišča potegnemo poltrak, ki z pozitivnim delom abcisne osi določa ostri kot α. Dobimo pravokoten trikotnik, ki ima dolžino ene od katet enako 1. Zato je razmerje nasprotne in priležne katete enako ordinati presešišča poltraka z navpično tangento, dolžina te daljice pa predstavlja velikost funkcije $\tan\alpha$.



Slika 3: Ponazoritev funkcije tangens na enotski krožnici

Na običajni način funkcijo tan razširimo na negativne kote, pa tudi na vse druge, razen na lihe mnogokratnike pravega kota.

Funkcija tangens je kvocient funkcij sinus in kosinus:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Funkcija tan je definirana za vsa realna števila razen v ničlah imenovalca zgornjega ulomka, to je v ničlah funkcije kosinus. Funkcija tan zavzame vse realne vrednosti.

$$\begin{aligned} D_{\tan} &= \mathbb{R}\setminus\{x; \cos x = 0\} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ Z_{\tan} &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Funkcija tan ima pole v točkah $\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$, v katerih ima njen graf navpične asimptote (glej sliko 4).

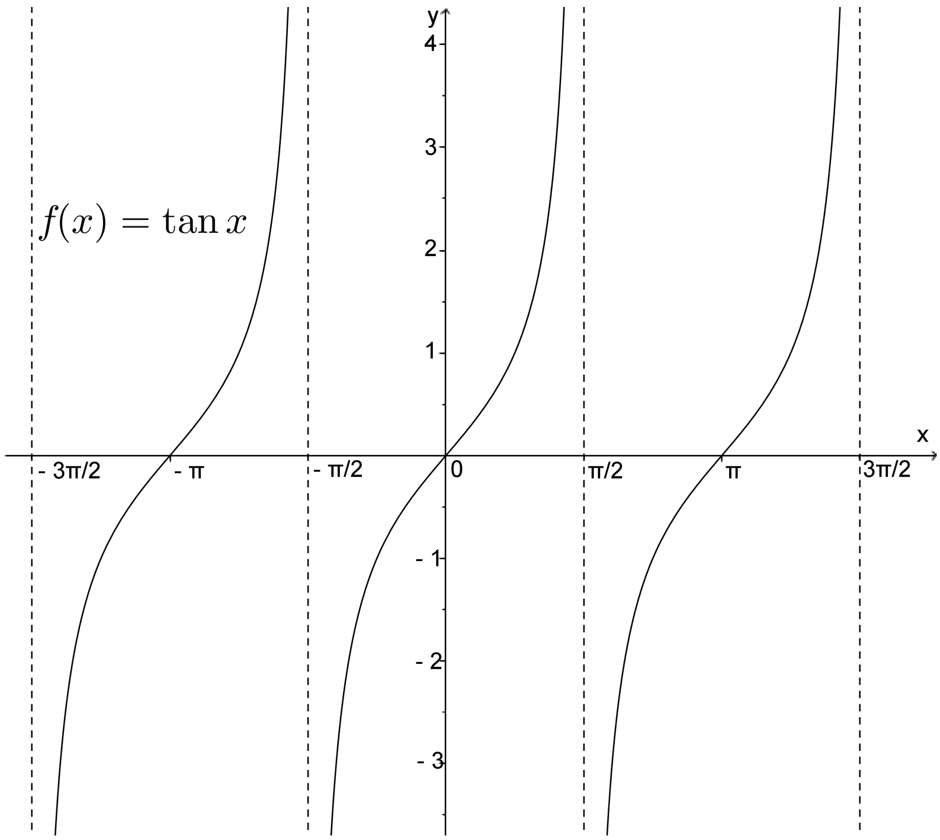
Ničle funkcije tangens so ničle funkcije sinus, to se pravi v točkah
$x_0 = k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija tan je periodična, njena osnovna perioda je π:

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

Funkcija tan je liha:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$



Slika 4: Graf funkcije tangens

Funkcija tangens je periodična z osnovno periodo π, je liha funkcija, ni povsod zvezna, odsekoma naraščajoča in ni omejena. Povzeto po [4].

2.1 Funkcija arkus tangens

Krožna funkcija arkus tangens (arctan) je inverzna funkcija zožitve funkcije tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Označimo jo tudi kot $\tan^{-1}$.

Definirana je za vsa realna števila, pri tem pa zavzame katerokoli vrednost na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ natanko enkrat:

$$\begin{aligned} D_{\text{arctan}} &= \mathbb{R}, \\ Z_{\text{arctan}} &= (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Vsaki realni vrednosti y priredi natanko en tak kot x na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, da je $\tan x = y:$

$$\begin{aligned} f^{-1} &: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \leftarrow \mathbb{R} \\ f^{-1} &: x \leftarrow y \\ f^{-1} &: \arctan y \leftarrow y \end{aligned}$$

Veljata relaciji:

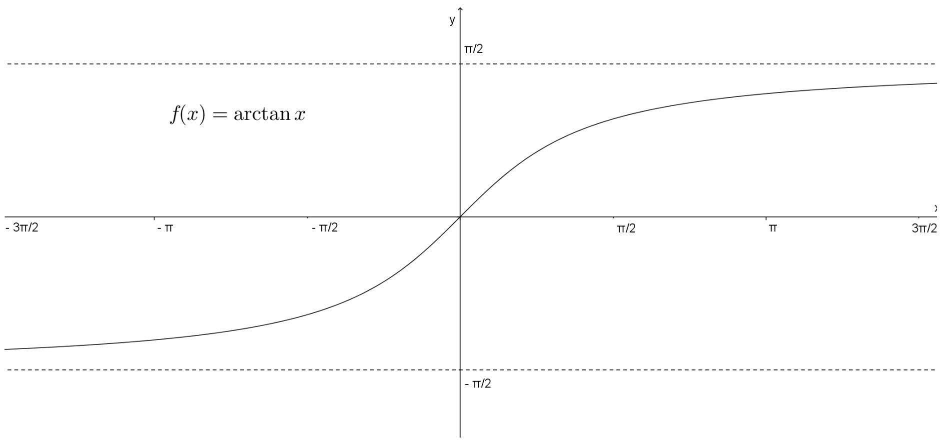
$$\begin{aligned} \arctan(\tan x) &= x \quad \text{za vsak} \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \tan(\arctan x) &= x \quad \text{za vsak} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Funkcija arkus tangens je liha:

$$\arctan(-x) = -\arctan x.$$

Posebni primeri:

$$\arctan 0 = 0, \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$



Slika 5: Graf funkcije arkus tangens

Funkcija arkus tangens je naraščajoča. Graf funkcije arctan (glej sliko 5) je simetričen grafu tangens glede na simetralo lihih kvadrantov. Povzeto po [4].

3 Računanje decimalk krožne konstante s pomočjo vrst

Do druge polovice 17. stoletja se je za računanje krožne konstante uporabljala Arhimedova metoda, potem pa so veliko vlogo v matematiki odigrale neskončne vrste. Matematiki so s pomočjo vrst za arkus tangens, ki dovolj hitro konvergirajo, dosti hitreje in z računanjem manj členov prišli do bolj natančnih rezultatov. V nadaljevanju so opisane metode računanja krožne konstante s pomočjo vrste arkus tangens, ki so se jih posluževali matematiki v 18. stoletju.

3.1 James Gregory

Večji preboj je uspel škotskemu matematiku Jamesu Gregoryju (1638–1675), ki je leta 1671 odkril neskončno vrsto za funkcijo arkus tangens, ki konvergira za $|x| \leq 1$.

Slika 6: James Gregory

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots . \tag{1}$$

Ker je

$$\left|\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| \leq \frac{|x|^{2n+3n}}{2n+3},$$

lahko vnaprej določimo število členov v (1), ki jih je treba sešteti za predpisano natančnost števila $\arctan x$.

V posebnem primeru dobimo za $x = 1$ vrsto za $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots . \tag{2}$$

Ta vrsta pa je za izračun števila π neuporabna, ker konvergira prepočasi. Z izbiro manjših vrednosti za x pa je postalo računanje decimalk števila π z vrstami za arctan veliko lažje in hitrejše. Več o prispevku Jamesa Gregoryja k računanju krožne konstante je napisano v [5].

3.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

Tri leta kasneje, natančneje leta 1674, je našel vrsto (1) tudi nemški matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Svoje odkritje je objavil leta 1682, zato včasih zasledimo, da se (2) imenuje Leibnizova vrsta.

Slika 7: Gottfried Wilhelm Leibniz

S pomočjo geometrijske vrste bomo dokazali Gregoryjevo in Leibnizovo vrsto (1):

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

V našem primeru je $\arctan x$ kot θ med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$, tako da je $\tan\theta = x$. Funkcja $\arctan x$ je inverzna funkcija funkcije tan. Odvod $\arctan t$ je $\frac{1}{1+t^2}$, z integracijo v mejah od 0 do x dobimo:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

Če je $|x| \leq 1$, se integral v zgornji vsoti nagiba k 0, ko gre n proti ∞, kar je razvidno iz ocene

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} \mathrm{d}t \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3},$$

ki dokazuje (1). Povzeto po [5].

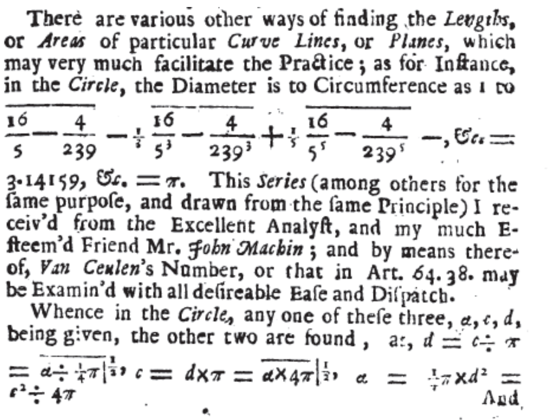
3.3 William Jones

William Jones (1675–1749) je bil angleški matematik, ki je najbolj znan po tem, da je predlagal, naj se krožna konstanta označi s črko π. Črka π je prva

Slika 8: William Jones

črka v besedi $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\acute{\epsilon}\rho\epsilon\iota\alpha$, kar v starem grškem jeziku pomeni krog, obod.

V svoji knjigi *Synopsis Palmariorum Matheseos*, ki jo je objavil leta 1706, je opisal Machinov dosežek in njegov izračun števila π na 100 decimalnih mest natančno. Povzeto po [2] in [6].



There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Inſtance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to $\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} -$, &c. $=$ 3.14159, &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the ſame purpoſe, and drawn from the ſame Principle) I receiv'd from the Excellent Analyſt, and my much Eſteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64. 38. may be Examin'd with all deſireable Eaſe and Diſpatch.

Whence in the *Circle*, any one of theſe three, a, c, d, being given, the other two are found, as, $d = c \div \pi = \overline{a \div \frac{1}{4}\pi}|^{\frac{1}{2}}$, $c = d \times \pi = \overline{a \times 4\pi}|^{\frac{1}{2}}$, $a = \frac{1}{4}\pi \times d^2 = c^2 \div 4\pi$

And

Slika 9: Objava števila π v knjigi *Synopsis Palmariorum Matheseos*

3.4 John Machin

Slika 10: John Machin

Ob koncu 17. stoletja je prevladovala želja po iskanju čim večjega števila decimalk števila π, Gregoryjeva vrsta (1) je nadomestila Arhimedovo metodo.

Ideja angleškega matematika Johna Machina (1680–1752) je bila, da obnovi $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$ kot vsoto arkus tangensov majhnih argumentov, za katere bi vrsti (1) in (4) konvergirali zadovoljivo hitro. Leta 1706 je uporabil formulo

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}, \tag{3}$$

s pomočjo katere je izračunal prvih 100 decimalk števila π.

Pri dvakratni uporabi formule $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ namreč dobimo

$$\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{12}$$

in

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right)=\frac{120}{119},$$

kar je le nekoliko večje kot

$$1=\tan\frac{\pi}{4}.$$

Če smo natančni, je

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239},$$

kar dokazuje (3).

Število π se tako izračuna kot razlika dveh Gregoryjevih vrst, in sicer

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{16}{5}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{100}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4^2}{100^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{4^3}{100^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{4^n}{100^n}+\ldots\right)\\ &- \frac{4}{239}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{57\,121}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(57\,121)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(57\,121)^n}+\ldots\right),\end{aligned}$$

ki zelo hitro konvergirata. Ostale zanimivosti je moč prebrati v [5].

3.5 Thomas Fantet de Lagny

Slika 11: Thomas Fantet de Lagny

Francoski matematik Thomas Fantet de Lagny (1660–1734) je leta 1719 s pomočjo vrste

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)},$$

ki jo dobimo iz (1) za $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, izračunal krožno konstanto na 127 decimalnih mest, vendar je bila 113. decimalka napačna. Naslednje (od 114. do 127.) pa so bile zopet pravilne (glej sliko 12). Vendar mu je bilo uradno priznanih le 112 točnih decimalk števila π. Po njem se zelo dolgo ni nihče ukvarjal z računanjem decimalk krožne konstante, saj so vsi navajali njegov približek z napačno 113. decimalko.

Mais en me ſervant de la Tangente de la douziéme partie de la circonference qui eſt égale à $V3$, le rayon étant égal à 2, & y employant les deux dernieres Series, j'ai trouvé par deux operations eſſentiellement differentes, l'une par addition continuelle, & l'autre par des additions & ſouſtractions alternatives, que le diametre étant exprimé par l'unité ſuivie de cent-vingt-ſept zero, la circonference du Cercle eſt
3141.5926.5358.9793.2384.6264.3383.2795.
0288.4197.1693.9937.5105.8209.7494.4592.
3078.1640.6286.2089.9862.8034.8253.4211.
7067.9821.4808.6513.2723.0664.7093.
8446.+ & 8447.—

Slika 12: Objava de Lagnyjevega približka 1000-kratnika krožne konstante, skupaj z napako na 113. decimalki (označena je s puščico).

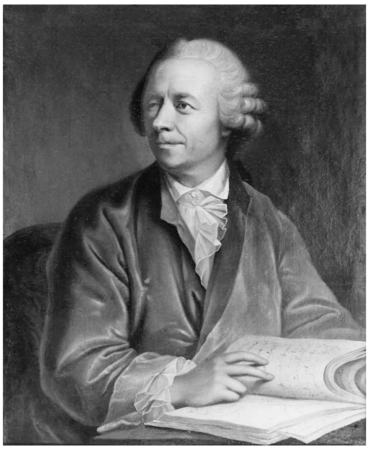
3.6 Leonhard Euler

Leta 1755 je Leonhard Euler (1707–1783) odkril razvoj, ki je veljaven za vse realne x:

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n. \tag{4}$$

Če v formulo vstavimo $x = 1$, dobimo vrsto, ki veliko hitreje konvergira, saj da vsota prvih 100 členov že 30 pravilnih decimalk števila π:

$$\pi = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$



Slika 13: Leonhard Euler

Da dokažemo zgornjo formulo, moramo v integralu $\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ uvesti novo spremenljivko $t = x\sqrt{1-s}$.

Izrazimo:

$$\mathrm{d}t = -\tfrac{x\mathrm{d}s}{2\sqrt{1-s}} \quad \text{in} \quad 1+t^2 = (1+t^2)\left(1-\tfrac{x^2}{1+x^2}s\right).$$

Od tod sledi:

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \frac{x}{1+x^2}\int_0^1 \frac{ds}{2\sqrt{1-s}\left(1-\frac{x^2}{1+x^2}s\right)} \\
&= \frac{x}{1+x^2}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}\frac{s^n}{2\sqrt{1-s}}\mathrm{d}s \\
&= \frac{x}{1+x^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n,
\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \frac{s^n}{2\sqrt{1-s}} \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Več zanimivosti in izpeljav Eulerjevih formul je zapisanih v [5].

3.7 Matsunaga Yoshisuke

Japonski matematik Matsunaga Yoshisuke (1692?–1744), ki še ni razumel, kot večina matematikov v 17. in začetku 18. stoletja, da je število π iracionalno, je upal, da bo našel mesto, od katerega naprej bo imelo število π ponavljajoče se decimalke.

Izračunal je krožno konstanto na 50 decimalnih mest natančno, čeprav naj bi v neobjavljenem rokopisu izračunal kar 52 pravilnih decimalk. Podal je naslednjo vrsto za izračun krožne konstante:

$$\pi^2 = 9 \cdot \left(1 + \frac{1^2}{3 \cdot 4} + \frac{1^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots\right).$$

Lahko jo zapišemo v obliki

$$\pi^2 = 18 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!}.$$

Povzeto po [6] in [7].

3.8 Charles Hutton

Angleški matematik Charles Hutton (1737–1823) je predlagal formulo Machinovega tipa v obliki:

$$\pi = 20 \arctan \frac{1}{7} + 8 \arctan \frac{3}{79}.$$

Slika 14: Charles Hutton

Vendar ni izračunal dovolj členov, da bi prišel do dobrega rezultata. Prav to formulo je razvil tudi Euler. Pri svojih izračunih pa si je z njo kasneje pomagal tudi slovenski matematik Jurij Vega. Povzeto po [2] in [6].

3.9 Franz Xaver von Zach

Madžarski matematik, astronom in geodet (1754–1832) Franz Xaver von Zach je leta 1785 odkril rokopis neznanega avtorja v Radcliffski knjižnici v Oxfordu v Angliji. V njem je bilo število π zapisano na 152 pravilnih decimalnih mest. Von Zach je ta približek števila π verjetno prepisal, kajti pojavil se je v nekaterih učbenikih in enciklopedijah. Na ta skrivnostni rokopis se je kasneje, leta 1841, opiral angleški matematik William Rutherford. Povzeto po [2] in [6].

Slika 15: Franz Xaver von Zach

3.10 Jurij Vega

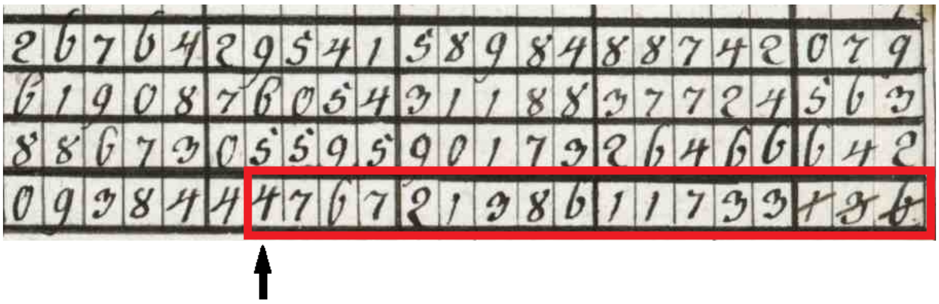
Pri računanju decimalk števila π pa ima za nas prav posebno vlogo slovenski matematik baron Jurij Vega (1754–1802). Njegov logaritmovnik, izdan leta 1783, na dveh straneh obravnava število π. Vega za računanje decimalk najprej uporabi potenčno vrsto za funkcijo arkus sinus, s katero dobi prvih 10 decimalk števila π. Sledi vrsta za funkcijo arkus tangens, kjer je uporabil Eulerjevo formulo:

$$\pi = 4\left(2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\right).$$

Na zadnji strani je napisanih 127 decimalk števila π, kjer gre le za prepis de Lagnyjevega izračuna, skupaj z napako na 113. mestu.

Slika 16: Jurij Vega

Leta 1789 Vega pošlje akademiji v Sankt Peterburg razpravo, napisano v nemškem jeziku, v kateri opiše metodo in račune, s katerimi je prišel do 140 decimalk števila π, točnih je bilo le prvih 126.



Slika 17: Vegov izračun decimalk, ki jih je poslal v Sankt Peterburg (s puščico je označena 127., prva nepravilno izračunana decimalka).

Besedilo, prevedeno v slovenski jezik, se glasi takole (povzeto po [3], prevod je priskrbel prof. Peter Legiša):

Jurija Vega

topniškega stotnika in profesorja matematike pri Cesarsko - kraljevskem avstrijskem topniškem korpusu

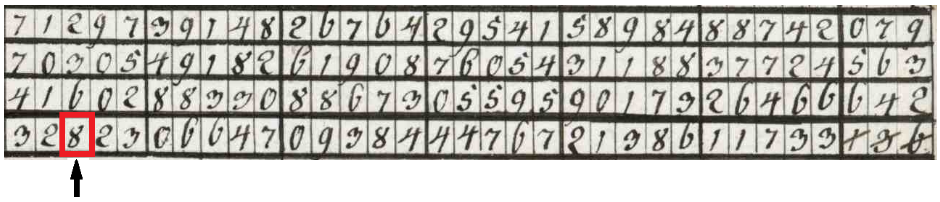
Izračun dolžine polovice obsega

$= \pi$

pri polmeru =1 po formuli

$$\pi = 8 \left\{ \begin{array}{l} \frac{73}{1\cdot 3}\overset{a}{\left(\frac{1}{343}\right)} + \frac{169}{5\cdot 7}\overset{b}{\left(\frac{a}{7^4}\right)} + \frac{265}{9\cdot 11}\overset{c}{\left(\frac{b}{7^4}\right)} + \frac{361}{13\cdot 15}\overset{d}{\left(\frac{c}{7^4}\right)} + \\ + \frac{457}{17\cdot 19}\overset{e}{\left(\frac{d}{7^4}\right)} + \frac{553}{21\cdot 23}\overset{f}{\left(\frac{e}{7^4}\right)} + \frac{649}{25\cdot 27}\cdots \\ + \frac{26}{1\cdot 3}\overset{\mathcal{A}}{\left(\frac{1}{27}\right)} + \frac{58}{5\cdot 7}\overset{\mathcal{B}}{\left(\frac{\mathcal{A}}{81}\right)} + \frac{90}{9\cdot 11}\overset{\mathcal{C}}{\left(\frac{\mathcal{B}}{81}\right)} + \frac{122}{13\cdot 15}\overset{\mathcal{D}}{\left(\frac{\mathcal{C}}{81}\right)} + \\ + \frac{154}{17\cdot 19}\overset{\mathcal{E}}{\left(\frac{\mathcal{D}}{81}\right)} + \frac{186}{21\cdot 23}\overset{\mathcal{F}}{\left(\frac{\mathcal{E}}{81}\right)} + \frac{218}{25\cdot 27}\cdots \end{array} \right.$$

S tem izračunom je popravil napako de Lagnyja, ki je imel na 113. mestu zapisano števko 7, pravilna pa je 8.



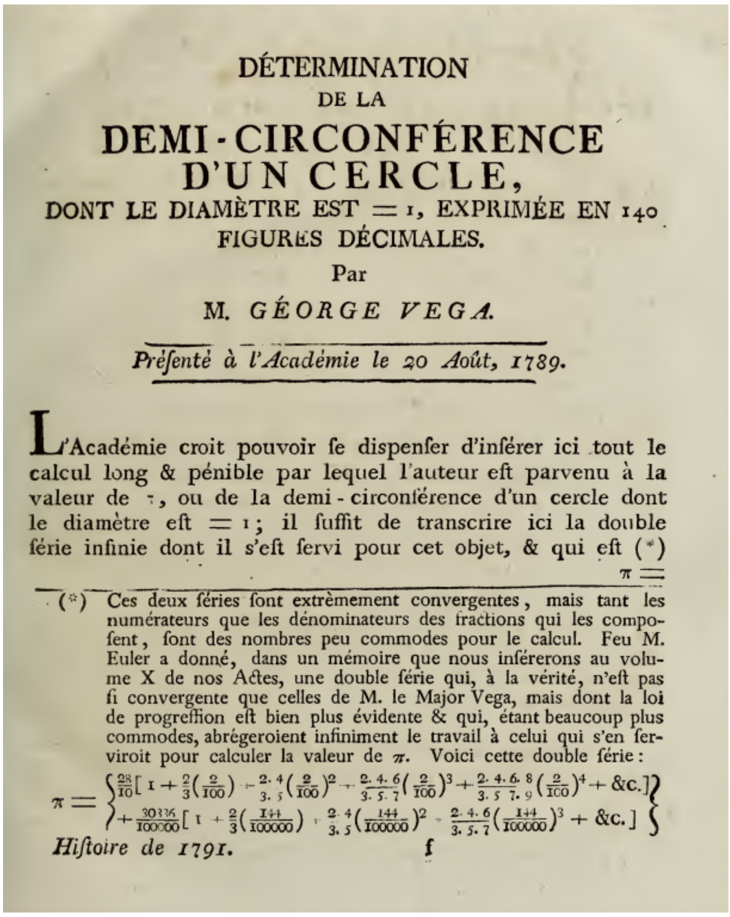
Slika 18: Vegov izračun decimalk s pravilno (s puščico označeno) 113. decimalko

Ker se urednikom obsežna razprava ni zdela zanimiva, so čez 6 let objavili le kratek izvleček. Vegovo besedilo so prevedli v francoski jezik in pri tem napravili veliko napako. V naslovu Vegovega dela so polmer prevedli v premer (glej sliko 19). Détermination de la demi-circonférence d'un cercle, dont le diamètre est = 1, exprimée en 140 figures décimales, kar v slovenskem prevodu pomeni Določitev polovičnega obsega kroga, katerega premer je = 1, izražena na 140 decimalk.

Tako je Vega leta 1794 svojo napako še pred objavo popravil kar sam in je leta 1794 v svoji knjigi *Popolna zakladnica logaritmov* (glej sliko 20) objavil nov izračun števila π, in sicer na 140 mest natančno.

Žal so bile zadnje 4 zopet napačne. 137. decimalka je bila 6 namesto 3. Pri tem izračunu si je pomagal z zvezo

$$\pi = 4\left(5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79}\right),$$



DÉTERMINATION
DE LA
DEMI-CIRCONFÉRENCE
D'UN CERCLE,
DONT LE DIAMÈTRE EST = 1, EXPRIMÉE EN 140
FIGURES DÉCIMALES.
Par
M. *GÉORGE VEGA.*

Préſenté à l'Académie le 20 Août, 1789.

L'Académie croit pouvoir ſe diſpenſer d'inſérer ici tout le calcul long & pénible par lequel l'auteur eſt parvenu à la valeur de π, ou de la demi-circonférence d'un cercle dont le diamètre eſt = 1; il ſuffit de transcrire ici la double ſérie infinie dont il s'eſt ſervi pour cet objet, & qui eſt (*)

$\pi =$

(*) Ces deux ſéries ſont extrèmement convergentes, mais tant les numérateurs que les dénominateurs des fractions qui les compoſent, ſont des nombres peu commodes pour le calcul. Feu M. Euler a donné, dans un mémoire que nous inſérerons au volume X de nos Actes, une double ſérie qui, à la vérité, n'eſt pas ſi convergente que celles de M. le Major Vega, mais dont la loi de progreſſion eſt bien plus évidente & qui, étant beaucoup plus commodes, abrégeroient infiniment le travail à celui qui s'en ſerviroit pour calculer la valeur de π. Voici cette double ſérie:

$$\pi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\left(\frac{2}{100}\right)^4 + \&c.\right] \\ + \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{144}{100000}\right)^3 + \&c.\right] \end{array} \right\}$$

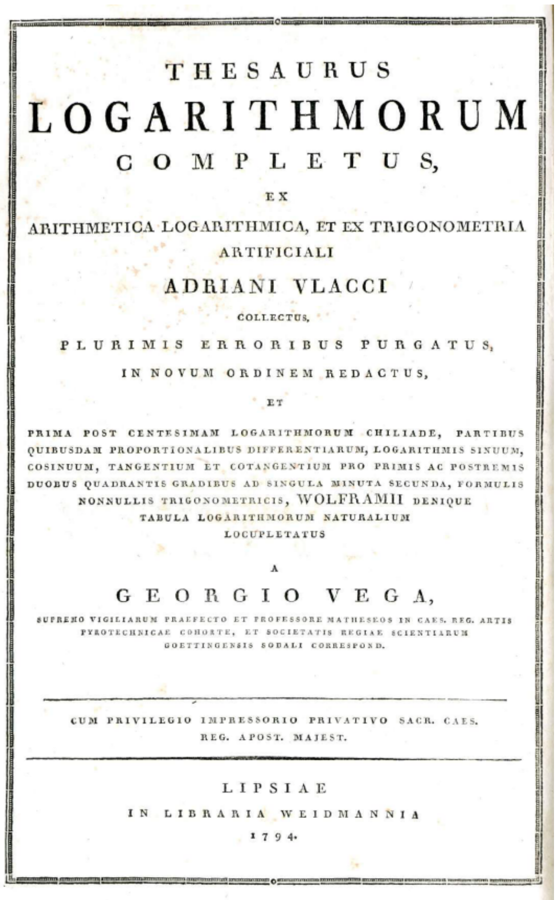
Hiſtoire de 1791. f

Slika 19: Vegova razprava Détermination de la demi-circonférence d'un cercle, dont le diamètre est = 1, exprimée en 140 figures décimales

ki zagotavlja hitro konvergenco. Če oba arctan razvijemo v vrsti, dobimo:

$$\begin{aligned} \pi &= 20\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} - \frac{1}{7\cdot 7^7} + \dots\right) \\ &+ 8\left(\frac{3}{79} - \frac{3^3}{3\cdot 79^3} + \frac{3^5}{5\cdot 79^5} - \frac{3^7}{7\cdot 79^7} + \dots\right). \end{aligned}$$

Napaka je bila storjena, ker je za arctan $\frac{1}{7}$ uporabil delni rezultat, ki ga je izra-



THESAURUS
LOGARITHMORUM
COMPLETUS,
EX
ARITHMETICA LOGARITHMICA, ET EX TRIGONOMETRIA
ARTIFICIALI
ADRIANI VLACCI
COLLECTUS,
PLURIMIS ERRORIBUS PURGATUS,
IN NOVUM ORDINEM REDACTUS,
ET
PRIMA POST CENTESIMAM LOGARITHMORUM CHILIADE, PARTIBUS QUIBUSDAM PROPORTIONALIBUS DIFFERENTIARUM, LOGARITHMIS SINUUM, COSINUUM, TANGENTIUM ET COTANGENTIUM PRO PRIMIS AC POSTREMIS DUOBUS QUADRANTIS GRADIBUS AD SINGULA MINUTA SECUNDA, FORMULIS NONNULLIS TRIGONOMETRICIS, WOLFRAMII DENIQUE TABULA LOGARITHMORUM NATURALIUM LOCUPLETATUS
A
GEORGIO VEGA,
SUPREMO VIGILIARUM PRAEFECTO ET PROFESSORE MATHESEOS IN CAES. REG. ARTIS PYROTECHNICAE COHORTE, ET SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARUM GOETTINGENSIS SODALI CORRESPOND.

CUM PRIVILEGIO IMPRESSORIO PRIVATIVO SACR. CAES. REG. APOST. MAJEST.

LIPSIAE
IN LIBRARIA WEIDMANNIA
1794.

Slika 20: Naslovna stran *Popolne zakladnice logaritmov*

čunal leta 1789 - arctan $\frac{3}{79}$ je sicer izračunal, vendar sta imela oba člena napake na zadnjih nekaj mestih. S temi napakami je tako dobil 136 pravilno izračunanih decimalk števila π.

Njegov rekord se je obdržal celih 47 let, ko ga je leta 1841 presegel angleški matematik William Rutherford s 152 pravilnimi decimalkami. O življenju barona Jurija Vege in njegovem delu je več napisanega v [2], [3] in [8].

4 Iracionalnost krožne konstante

Ogledali si bomo prvi dokaz iz leta 1766, ki dokazuje, da je število π iracionalno. Avtor tega dokaza je Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Uporabil je vrsti

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

in

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

iz katerih sledi

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x}{1 + A_1},$$

kjer je

$$A_1 = -x^{-2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2nx^{2n-2}}{(2n+1)!} / \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right\}.$$

Podobno je

$$A_1 = -\frac{x^2}{3 + A_2},$$

kjer je

$$A_2 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \left[1 - \frac{3(2n+2)}{(2n+2)(2n+3)} \right]}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+2)x^{2n}}{(2n+3)!}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{2n(2n+2)}{(2n+3)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{2n+}{(2n+3)!}} \\
&= -x^2\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+5)!}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{2n+2}{(2n+3)!}\right\},
\end{aligned}
$$

ali

$$A_2 = -\frac{x^2}{5+A_3},$$

kjer je

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{2n+2}{(2n+3)!}\left[1-5\frac{(2n+4)}{(2n+4)(2n+5)}\right]}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+5)!}} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} x^{2n+2}\frac{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}{(2n+7)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+5)!}},
\end{aligned}
$$

kar je napisano kot

$$A_3 = -\frac{x^2}{7+A_4}.$$

Če ta proces nadaljujemo, dobimo rekurzivno formulo:

$$\tan x = \frac{x}{1}{}_{+}\frac{(-x^2)}{3}{}_{+}\frac{(-x^2)}{5}{}_{+}\cdots{}_{+}\frac{(-x^2)}{b_k+A_k},$$

z $b_k = 2k-1$ in

$$A_k = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \frac{(2n+2)(2n+4)\dots(2n+2k)}{(2n+2k+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} x^{2n} \frac{(2n+2)(2n+4)\dots(2n+2k-2)}{(2n+2k-1)!}}.$$

Zatorej lahko sklepamo, da velja sledeče:

$$\tan x = \frac{x}{1} {}_{+} \frac{(-x^2)}{3} {}_{+} \frac{(-x^2)}{5} {}_{+} \dots {}_{+} \frac{(-x^2)}{(2k-1)} {}_{+} \dots.$$

V dokaz temu rekurzivno izračunajmo zaporedne konvergente, kakor je to storil Lambert. Naporno računanje nas privede do sledečih izrazov, ki komaj bežno nakazujejo splošno obliko:

$$P_1 = x, \qquad P_2 = 3x, \qquad P_3 = 3 \cdot 5x - x^3, \qquad P_4 = 3 \cdot 5 \cdot 7x - 2 \cdot 5x^3,$$
$$Q_1 = 1, \qquad Q_2 = 3 - x^2, \qquad Q_3 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3x^2, \qquad Q_4 = 3 \cdot 5 \cdot 7 - 3 \cdot 15x^2 + x^4.$$

Tako je Lambert naredil prve korake k sledečim, bolj sugestivnim formulam, ki temeljijo na rekurziji:

$$\begin{aligned} P_3 &= 3 \cdot 5 \left(x - \frac{x^3}{3!} \frac{2}{5} \right), \\ P_4 &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \left(x - \frac{x^3}{3!} \frac{4}{7} \right), \\ P_5 &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \left(x - \frac{x^3}{3!} \frac{2}{3} + \frac{x^5}{5!} \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 7} \right). \end{aligned}$$

in analogno za Q_3, Q_4, Q_5.

Z uporabo rekurzivne relacije, ki nam z $b_{n+1} = 2n + 1$ da

$$P_{n+1} = b_{n+1}P_n - x^2 P_{n-1}; Q_{n+1} = b_{n+1}Q_n - x^2 Q_{n-1},$$

izpeljemo vrednosti za P_n in Q_n:

$$\begin{aligned} P_n &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \times [x - \frac{x^3}{3!}\frac{2n-4}{2n-1} + \frac{x^5}{5!}\frac{(2n-6)(2n-8)}{(2n-1)(2n-3)} \\ &- \frac{x^7}{7!}\frac{(2n-8)(2n-10)(2n-12)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \ldots \\ &+ (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\frac{(2n-2k)(2n-2k-2)\ldots(2n-4k+4)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+3)} + \ldots] \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} Q_n &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \times [1 - \frac{x^2}{2!}\frac{2n-2}{2n-1} + \frac{x^4}{4!}\frac{(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-3)} + \ldots \\ &+ (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{(2n-2k)(2n-2k-2)\ldots(2n-4k+2)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)} + \ldots]. \end{aligned}$$

Razmislimo o n-ti konvergenti[1] $R_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_n}{q_n}$, ko n teži k neskončnosti. Naj bo n-ta konvergenta R_n verižnega ulomka

$$\frac{a_1}{b_1 +}\frac{a_2}{b_2 +}\cdots\frac{a_k}{b_k +}\cdots$$

ulomek $\frac{a_1}{b_1 +}\frac{a_2}{b_2 +}\cdots\frac{a_n}{b_n}$.

[1]Konvergenta je končen verižen ulomek, ki nastane s prekinitvijo neskončnega verižnega ulomka na nekem mestu. V našem primeru je izraz $\frac{p_n}{q_n}$ n-ta konvergenta.

Napišimo ga v obliki $\frac{P_n}{Q_n}$, kjer sta P_n in Q_n števec in imenovalec generično izračunanega ulomka brez poenostavitve, kot npr. $P_1 = a_1, Q_1 = b_1; P_2 = a_1 b_2, Q_2 = b_1 b_2 + a_2; \ldots$.

Prvih k izrazov p_n in q_n enakomerno konvergira k ustreznima izrazoma $\sin x$ in $\cos x$. Vsota sledečih izrazov v vsakem od obeh polinomov p_n in q_n je navzgor omejena z izrazom

$$\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} + \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!} + \ldots,$$

ki je ostanek enakomerno konvergentne vrste na vsaki omejeni podmnožici v $\mathbb{R}$; ker sta razvoja $\sin x$ in $\cos x$ sama po sebi konvergentna, $p_n(x)$ teži enakomerno k $\sin x$ in q_n k $\cos x$ v vsaki omejeni podmnožici v $\mathbb{R}$.

Zatorej R_n konvergira k vrednosti $\tan x$ na vsakem intervalu, kjer je $\tan x$ omejen. S tem je dokaz formule $\tan x = \frac{x}{1+} \frac{(-x^2)}{3+} \frac{(-x^2)}{5+} \cdots + \frac{(-x^2)}{(2k-1)+} \cdots$ zaključen.

Lambertov dokaz iracionalnosti števila π se nanaša na naslednje rezultate iracionalnosti za določene verižne ulomke:

Trditev 1: Naj bo $\frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \cdots \frac{a_n}{b_n+} \cdots$ neokrajšan verižni ulomek, ki konvergira k številu x. Recimo, da sta števili a_i in b_i neničelni celi števili, za kateri velja $|a_i| < |b_i|$ za vse i.

1. Potem je $|x| \leq 1$.

2. Naj bo x_n število, h kateremu konvergira verižni ulomek

$$\frac{a_n}{b_n +} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1} +} \cdots \frac{a_{n+m}}{b_{n+m} +} \cdots .$$

Če ne obstaja celo število n, da je $x_n = \pm 1$, potem je število π iracionalno.

Dokaz:

1. Neenakost $\left|\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right| \leq 1$ ali $-1 < \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} < +1$ pomeni neenakost

$$b_i - 1 < b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} < b_i + 1,$$

in ker sta a_i in b_i celi števili, je

$$\left|b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right| > |b_i| - 1 \geq |a_i| .$$

Tako imajo ne glede na vrednosti i, $\frac{a_i}{b_i +} \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ isti predznak kot $\frac{a_i}{b_i}$ in absolutna vrednost manjša od 1.

Isti argument kaže, da imajo

$$\frac{a_{i-1}}{b_{i-1} + \frac{a_i}{b_i} + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}}$$

isti predznak kot $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$ in absolutna vrednost manjša od 1 in tako naprej...
Tako smo dobili naslednji rezultat: verižni ulomek x ima isti predznak kot $\frac{a_1}{b_1}$ in $|x| \leq 1$.

2. Po eni strani predvidevajmo, da je $|x_n| \neq 1$ za vsak n po drugi pa, da je x racionalen.

Zapišimo x kot okrajšan ulomek $\frac{p_1}{p_0}$, kjer sta p_1 in p_0 celi števili in zadoščata pogoju $|p_1| \leq |p_0|$; potem je $x = \frac{a_1}{b_1 + x_1}$.

Število $x_1 = \frac{p_0 a_1 - p_1 b_1}{p_1} = \frac{p_2}{p_1}$ zadošča istim hipotezam kot x.

Tako je $|x_1| \leq 1$, in ker smo predvidevali, da $x_1 \neq \pm 1$, imamo strogo neenakost $|x_1| < 1$, iz česar sledi $|p_2| < |p_1|$.

Če postopek ponavljamo, dobimo strogo pojemajoče neskončno zaporedje $|p_0| \geq |p_1| > |p_2| > \ldots$ pozitivnih celih števil. Ta absurden rezultat dokazuje, da je število x iracionalno.

$\square$

Opomba 1: V naslednjem odstavku bomo izhajali iz pogojev

$$|a_n| < |b_n| \quad \text{in} \quad |x_n| \neq 1$$

za vse dovolj velike n, ki zadostujeta pri trditvi, da je število x iracionalno. Pri spodnjih dokazih se bomo opirali na te pogoje.

Lambertov rezultat dokaza je naslednji:

Izrek 1: Če je a neničelno racionalno število, potem je število $\tan x$ iracionalno. Natančneje, število $\frac{\pi}{4}$ je iracionalno, iz česar sledi, da je tudi število π iracionalno.

Dokaz izreka 1: Naj bo $x = \frac{p}{q}$ neničelno racionalno število, kjer sta p in q celi števili in $q \geq 1$ in $p \neq 0$. Razvoj v verižni ulomek za $\tan x$, dobljen zgoraj, nam da

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{(p/q)}{1} {}_{+} \frac{(-p^2/q^2)}{3} {}_{+} \frac{(-p^2/q^2)}{5} {}_{+} \cdots \frac{(-p^2/q^2)}{2n+1} {}_{+} \cdots \\ &= \frac{p}{q} {}_{+} \frac{-p^2}{3q} {}_{+} \frac{-p^2}{5q} {}_{+} \cdots \frac{-p^2}{(2n+1)q} {}_{+} \cdots \end{aligned}$$

Za vsako celo število $n \geq 3$, tako da je $p^2 < 2nq$, razvoj v verižni ulomek pa

$$y_n = \frac{-p^2}{(2n+1)q+} \frac{-p^2}{(2n+3)q+} \cdots \frac{-p^2}{(2n+r)q+} \cdots$$

zadošča hipotezi iz trditve 1. Tako je $|y_n| \leq 1$. Vendar

$$y_n = -\frac{p^2}{(2n+1)q + y_{n-1}},$$

od koder

$$|y_n| \leq \frac{p^2}{(2n+1)q + |y_{n+1}|} \leq \frac{p^2}{2nq} < 1.$$

Tako je $y_n \neq \pm 1$ za vse dovolj velike n, ki v skladu s točko 2 trditve 1 dokazuje, da je $\tan x$ iracionalen. Povzeto po [5].

$\square$

5 Izračun decimalk krožne konstante s pomočjo vrst s programom Derive

V tem poglavju so s pomočjo računalniškega programa Derive v tabelah predstavljeni rezultati hitrosti izračuna glede na število seštetih členov vrst, ki so jih uporabljali različni matematiki v 18. stoletju. Rezultati so zaokroženi na 60 decimalnih mest.

π = 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912
98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132
00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235
42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960
51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859
50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881
71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303
59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989

Slika 21: Tisoč decimalk števila π

n	n-ti približek števila π
1	3.14903 81056 76657 97014 55847 56129 40427 52071 03940 35778 54710 41855
2	3.14234 16771 05229 39871 70133 27557 97570 37785 32511 78635 68996 13283
10	3.14159 26541 65068 11554 17997 46458 02141 64098 20885 09922 87991 05185
20	3.14159 26535 89793 35498 34596 47026 55999 67659 26074 00661 70154 06533
30	3.14159 26535 89793 23846 26864 65927 10020 45004 23312 79892 95278 43692
40	3.14159 26535 89793 23846 26433 83300 21348 42734 67124 11733 08826 46751
50	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50289 57418 67247 95025 39569 29434
100	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944

Tabela 1: Približki števila π pri Newtonovem izračunu.

Pri računanju delnih vsot Newtonove vrste (glej tabelo 1),

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(2n+3)(n-1)!n!2^{4n}},$$

vidimo, da nam da že seštevek prvih 10 členov približek za število π na 8 decimalnih mest natančno. Vsota prvih 100 členov pa nam da že zavidljivo dober rezultat, in sicer na 60 mest natančno.

Gregoryjeva in Leibnizova vrsta (glej tabelo 2),

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots,$$

konvergira zelo počasi. Z vsoto prvih 200 členov dobimo število π izračunano na le 2 decimalni mesti natančno. Za 3 decimalna mesta moramo sešteti 5 000 členov. Da dobimo izračun na 6 decimalnih mest pravilno, pa moramo sešteti 10 000 000

n	n-ti približek števila π
1	2.66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666
2	3.46666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666
10	3.23231 58094 05592 68732 64334 56464 41621 67381 98162 34676 91579 14668
20	3.18918 47822 77594 72924 39110 47136 09434 50813 85006 96739 72801 83001
50	3.16119 86129 87050 08247 35790 13913 45282 89613 73605 76735 56504 47503
100	3.15149 34010 70990 57525 26878 70117 71653 63035 51896 84438 65966 63293
200	3.14656 77471 82956 40128 77876 60189 83241 80868 62424 05071 59511 47312
500	3.14408 64152 98759 28825 77496 91090 57812 17641 42138 17389 56245 73205
1 000	3.14259 16543 39543 05090 11277 37252 20456 61535 38256 31695 58736 75303
2 000	3.14209 24036 83527 60760 22995 11137 60379 55869 16340 98506 91691 83657
5 000	3.14179 26135 95792 83840 26393 95879 46011 81977 79858 83055 36196 56522
10 000	3.14169 26435 90543 21346 07683 20877 94022 25448 25752 13871 07339 99805
100 000	3.14160 26534 89793 98846 01433 64529 44039 40409 17831 47276 20368 46331
1 000 000	3.14159 36535 88793 23921 26431 33279 31538 41346 70383 75009 01905 72600
10 000 000	3.14159 27535 89783 23846 33933 83254 50288 23221 69336 87520 42584 74788

Tabela 2: Približki števila π pri Gregory-Leibnizovem izračunu.

členov. Iz tega vidimo, da Gregory-Leibnizova vrsta nikakor ni primerna za računanje decimalk števila π.

n	n-ti približek števila π
1	3.14059 70293 26060 31430 45311 06579 22889 81497 76599 17261 44873 84520
2	3.14162 10293 25034 42504 68325 17116 40806 97062 44618 21343 05548 60639
3	3.14159 17721 82177 29501 82122 91112 32979 50265 35173 50058 98831 02848
4	3.14159 26824 04399 51724 02598 36073 57586 04897 57996 72013 55063 01754
5	3.14159 26526 15308 60814 93507 47666 50275 53674 75045 52815 39298 54613
10	3.14159 26535 89793 29474 73748 57715 34354 33787 47221 02783 99039 41588
20	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 81813 20873 20415 22806 09055 09207
30	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69401 63012 71684 48923
40	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74962
50	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944

Tabela 3: Približki števila π pri Machinovem izračunu.

Machinova formula (glej tabelo 3)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

konvergira veliko hitreje kot vrste, s katerimi so računali približke števila π do tedaj. Že vsota prvih 10 členov nam da rezutat natančen na 16 decimalnih mest. Da dobimo približek, ki je natančen na 60 decimalnih mest, pa moramo sešteti prvih 50 členov. Machinova formula je pomenila velik preboj v računanju decimalk števila π in so jo uporabljali še dolgo po njem.

n	n-ti približek števila π
1	2.66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666 66666
2	2.93333 33333 33333 33333 33333 33333 33333 33333 33333 33333 33333 33333
10	3.14110 60216 01377 63852 93413 15719 02469 73528 70727 48373 05797 05811
20	3.14159 22987 40339 63270 19224 96024 25888 00944 70957 29600 64931 20928
30	3.14159 26533 01159 72300 80146 99505 78227 61569 93734 41497 98771 96132
40	3.14159 26535 89546 59348 63293 84242 26052 86605 09438 62862 88164 21922
50	3.14159 26535 89793 02165 55470 53627 22996 31190 95370 56825 82668 32577
100	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 36493 66604 58427 02650 04569 98497
200	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944

Tabela 4: Približki števila π pri Eulerjevem izračunu.

Tudi Eulerjeva vrsta (glej tabelo 4)

$$\pi = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

konvergira zadovoljivo hitro in je tako primerna za računanje decimalk števila π. Za pravilnih prvih 30 decimalnih mest moramo sešteti prvih 100 členov. Da dobimo izračun natančen na 60 decimalnih mest, pa moramo sešteti prvih 200 členov.

n	n-ti približek števila π
1	3.07920 14356 78004 07738 21268 29343 77309 67872 09340 10734 33387 65879
2	3.15618 14715 69954 17931 66800 00077 36742 42068 89573 61002 69222 35026
10	3.14159 33045 03081 51312 14608 20590 66977 41056 15906 30823 26865 73763
20	3.14159 26535 95634 95837 24274 85018 28178 31639 18803 39733 51879 81141
50	3.14159 26535 89793 23846 26433 95047 79220 47452 54492 06192 18045 82807
100	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37511 41189 51981
200	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944

Tabela 5: Približki števila π pri de Lagnyjevem izračunu.

Boljšo konvergenco kot Euler je dosegel de Lagny s svojo vrsto (glej tabelo 5)

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)},$$

saj je s seštevkom prvih 20 členov dobil število π na 10 mest natančno. Pri seštevku prvih 100 členov pa že na 49 decimalnih mest natančno. Da dobimo število π izračunano na 60 decimalnih mest natančno, pa moramo sešteti prvih 200 členov.

n	n-ti približek števila π
1	3.12249 89991 99199 10292 34465 60469 89723 05364 79988 99582 81542 26485
2	3.13847 09652 95043 15884 48595 91431 46748 07643 39723 39906 98634 04662
5	3.14157 12146 90142 42839 64477 91855 90521 23792 55768 55691 85637 07013
10	3.14159 26441 32424 71807 66850 13126 30436 83446 95381 95524 35368 10931
20	3.14159 26535 89789 56596 43702 43406 44747 21704 32373 63950 90425 05023
50	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50200 01317 87263 36355 22673 34655
80	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 54327 93205
90	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74632
100	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944

Tabela 6: Približki števila π pri Yoshisukinem izračunu.

Japonski matematik Matsunaga Yoshisuke je s svojo vrsto (glej tabelo 6)

$$\pi^2 = 18 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!}$$

dosegel kar dobro konvergenco, boljšo kot Euler in de Lagny. Če seštejemo prvih 5 členov vrste, dobimo število π izračunano na 4 decimalna mesta natančno. Za 20 seštetih členov dobimo 13 pravilnih decimalk. Če seštejemo prvih 50 členov, dobimo že 33 pravilnih decimalk, če pa želimo pravilnih 60 decimalk moramo sešteti 100 členov. Glede na dokaj hitro konvergenco je vrsta primerna za računanje decimalk števila π.

n	n-ti približek števila π
1	3.14135 79464 57894 87858 32117 61805 78038 55085 86005 70278 38555 73937
2	3.14159 60688 85484 77250 67632 92482 48686 15754 77870 59108 13491 88653
3	3.14159 25994 24821 55052 61912 47306 12204 51721 06228 26886 73941 13384
4	3.14159 26544 93705 80326 04479 30043 89440 05860 44083 83814 22109 46214
5	3.14159 26535 74190 52072 43349 39627 82125 36436 26971 33126 88626 51415
10	3.14159 26535 89793 23849 38301 02840 96947 98848 30194 59479 46425 33890
20	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 44060 79010 83495 04109 08640
30	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58227 61458
40	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944

Tabela 7: Približki števila π pri Vegovem izračunu.

Slovenski matematik Jurij Vega je imel zelo pomembno vlogo v tistem času, saj je izpopolnil Machinovo formulo in z Eulerjevo formulo (glej tabelo 7)

$$\pi = 4\left(2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\right)$$

dosegel veliko boljšo konvergenco. Za pravilnih prvih 10 decimalk števila π moramo sešteti le prvih 5 členov. Za pravilnih 60 decimalnih mest pa le prvih 40 členov. Vidimo, da je Eulerjeva formula, med naštetimi, najbolj primerna za izračuna decimalk števila π.

6 Primerjava pri izračunu obsegov in ploščin z različnimi približki krožne konstante

Da bi videli, do kakšne napake pride, kadar vzamemo različne približke krožne konstante, bomo naredili dve nalogi in na podlagi teh videli, kakšna so odstopanja.

Vsako nalogo bomo izračunali na isti način, le približek števila π bo zmeraj drugačen. V prvem primeru bomo vzeli $\pi = 3.14$, v drugem $\pi = \frac{22}{7}$, v tretjem $\pi = 3.1415926535$ in v zadnjem, četrtem primeru pa najbolj natančen približek, in sicer na 50 decimalk natančno -
$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\text{4}$.

V prvi nalogi bomo računali površino in prostornino, v drugi pa obseg in ploščino. Rezultate bomo - za lažjo primerjavo - zaokrožili na 2 decimalni mesti.

1. naloga: Izračunaj površino in prostornino Zemlje. Za polmer Zemlje vzemi 6371 km.

- $\pi = 3.14$:

  $P = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

  $P = 4 \cdot 3.14 \cdot 6371^2$

  $P = 509\,805\,890.96\ \text{km}^2$

  $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

  $V = \frac{4 \cdot 3.14 \cdot 6371^3}{3}$

  $V = 1\,082\,657\,777\,102.05\ \text{km}^3$

- $\pi = \frac{22}{7}$:

  $P = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

  $P = 4 \cdot \frac{22}{7} \cdot 6371^2$

  $P = 510\,269\,772.57 \text{ km}^2$

  $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

  $V = \frac{4 \cdot \frac{22}{7} \cdot 6371^3}{3}$

  $V = 1\,083\,642\,907\,017.52 \text{ km}^3$

- $\pi = 3.1415926535$:

  $P = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

  $P = 4 \cdot 3.1415926535 \cdot 6371^2$

  $P = 510\,064\,471.90 \text{ km}^2$

  $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

  $V = \frac{4 \cdot 3.1415926535 \cdot 6371^3}{3}$

  $V = 1\,083\,206\,916\,814.79 \text{ km}^3$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510$:

  $P = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

  $P = 4 \cdot 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 \cdot 6371^2$

  $P = 510\,064\,471.91 \text{ km}^2$

$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

$V = \frac{4 \cdot 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 \cdot 6371^3}{3}$

$V = 1\,083\,206\,916\,845.75 \text{ km}^3$

Približek π	Površina [km^2]	Prostornina [km^3]
3.14	509 805 890.96	1 082 657 777 102.05
$\frac{22}{7}$	510 269 772.57	1 083 642 907 017.52
3.14159 26535	510 064 471.90	1 083 206 916 814.79
3.14 ...	510 064 471.91	1 083 206 916 845.75

Tabela 8: Površina in prostornina Zemlje z različnimi približki števila π.

V zgornji tabeli (glej tabelo 8) je predstavljena razlika izračunane površine in prostornine Zemlje glede na izračun le-teh z uporabljenim približkom števila π na 50 decimalnih mest natančno.

Približek π	Površina [km^2]	Prostornina [km^3]
3.14	258 580.95	549 139 743.70
$\frac{22}{7}$	205 300.66	435 990 171.77
3.14159 26535	0.01	30.96

Tabela 9: Razlika rezultatov površine in prostornine Zemlje.

Lahko vidimo, da sta približka 3.14 in $\frac{22}{7}$ enako "natančna". Odstopanja so pri velikih številih tudi zelo velika. Vendar lahko za naš izračun še vseeno trdimo, da je približek $\frac{22}{7}$ za število π še vseeno natančnejši in prinese manjša odstopanja.

Pri uporabi približka na 10 decimalnih mest natančno ali na 50 decimalnih mest pa skoraj ni odstopanj.

2. naloga: Imamo okroglo gredico s polmerom 1 m. Okoli gredice bi radi postavili ograjico. Koliko metrov ograjice potrebujemo? Da pa bodo sadike zaščitene pred vremenskimi vplivi, jih bomo pokrili s folijo. Koliko m^2 folije potrebujemo, da pokrijemo gredico?

- $\pi = 3.14$:

  $o = 2 \cdot \pi \cdot r$

  $o = 2 \cdot 3.14 \cdot 1$

  $o = 6.28$ m

  $p = \pi \cdot r^2$

  $p = 3.14 \cdot 1^2$

  $p = 3.14\ \mathrm{m}^2$

- $\pi = \frac{22}{7}$:

  $o = 2 \cdot \pi \cdot r$

  $o = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 1$

$o = 6.29 \text{ m}$

$p = \pi \cdot r^2$

$p = \frac{22}{7} \cdot 1^2$

$p = 3.14 \text{ m}^2$

- $\pi = 3.1415926535$:

  $o = 2 \cdot \pi \cdot r$

  $o = 2 \cdot 3.1415926535 \cdot 1$

  $o = 6.28 \text{ m}$

  $p = \pi \cdot r^2$

  $p = 3.1415926535 \cdot 1^2$

  $p = 3.14 \text{ m}^2$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510$:

  $o = 2 \cdot \pi \cdot r$

  $o = 2 \cdot 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 \cdot 1$

  $o = 6.28 \text{ m}$

  $p = \pi \cdot r^2$

  $p = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 \cdot 1^2$

  $p = 3.14 \text{ m}^2$

Približek π	Obseg [m]	Ploščina [m^2]
3.14	6.28	3.145
$\frac{22}{7}$	6.29	3.14
3.14159 26535	6.28	3.14
3.14 ...	6.28	3.14

Tabela 10: Obseg in ploščina z različnimi približki števila π.

Pri manjših številih pa se bolj obnese približek 3.14 in ne $\frac{22}{7}$. Pri približkih na 10 ali 50 decimalnih mest tudi ni razlike. Tako lahko rečemo, da je uporaba približka 3.14 pri računanju z manjšimi števili najprimernejša.

7 Sklepna beseda

Z računanjem obsega in ploščine kroga in s tem krožne konstante se učenci prvič spoznajo v 8. razredu devetletne osnovne šole. Učenci izvejo, da število π predstavlja razmerje med obsegom in premerom kroga. Prav tako se s številom π srečajo v 9. razredu pri računanju površin in prostornin geometrijskih teles (krogla, valj, stožec).

Naloga učitelja je, da jim čim bolje predstavi število π. Da si učenci lažje zapomnijo, je priporočljivo, da se o številu π seznanijo z lastno aktivnostjo. En način je, da učenci prinesejo od doma različne okrogle predmete (različni pokrovčki, zamaški . . .) in si v šoli s pomočjo vrvice izmerijo obseg in z ravnilom premer. Rezultate vpišejo v tabelo in na koncu izračunajo obseg in količnik med obsegom in premerom. Učenci vidijo, da je količnik pri vseh krogih enak, ne glede na velikost. Učenci tako spoznajo število π in pa njegove približke (3.14 in $\frac{22}{7}$).

Svojo diplomsko delo bi uporabila tako v 8. kot tudi v 9. razredu osnovne šole, kjer bi s pomočjo računalniškega programa Derive učenci računali obseg in ploščino kroga ter površino in prostornino geometrijskih teles z različnimi približki za število π.

Pri tem bi učenci aktivno sodelovali pri pouku in spoznali (poleg obrazcev za obseg, ploščino, površino in prostornino) različne približke števila π in pa zgodovino računanja krožne konstante. Spoznali bi se s programom Derive in z odstopanji pri uporabi različnih približkov števila π.

Literatura

[1] Samo Stanič, *Dvajset tisoč decimalk števila* π, Presek **17** (1989/90), številka 3, str. 129–131.

[2] Marko Razpet, *Več kot 150 decimalk krožne konstante pred letom 1800*, Obzornik za matematiko in fiziko **60** (2013), številka 4, str. 129–136.

[3] Peter Legiša in Marko Razpet, *Vegovih 140 decimalk krožne konstante*, Obzornik za matematiko in fiziko **60** (2013), številka 6, str. 212–224.

[4] Marina Rugelj, Janez Šparovec, Dušan Kavka, Gregor Pavlič, *Spatium*, Matematika za 3. letnik gimnazij, Modrijan, Ljubljana 2008.

[5] Pierre Eymard, Jean-Pierre Lafon *The number* π, AMS, Providence, Rhode Island, 1999.

[6] Ravi P. Agarwal, Hans Agarwal, Syamal K. Sen, *Birth, growth and computation of pi to ten trillion digits*,Advances in Difference Equations, 2013, `http://www.advancesindifferenceequations.com/content/pdf/1687-1847-2013-100.pdf`.

[7] Fukagawa Hidetoshi, Tony Rothman, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 2008.

[8] Martin Juvan, *Število* π *in Jurij Vega: ob 250-letnici rojstva Jurija Vege*, Presek **31** (2003/04), številka 4, str. 213–219.