UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA

DIPLOMSKO DELO

MAJA BOJANC

UNIVERZA V LJUBLJANI

PEDAGOŠKA FAKULTETA

Študijski program: Matematika in tehnika

Diplomsko delo

RAVNINSKE KRIVULJE Z IMENOM GRŠKEGA IZVORA

Mentor: **dr. Marko Razpet**

Kandidatka: **Maja Bojanc**

Ljubljana, maj 2013

PROGRAM DELA

V diplomskem delu zberite čim več ravninskih krivulj, katerih imena so grškega izvora. Poleg tega omenite tudi pomembne matematike, po katerih so krivulje poimenovane. Diplomsko delo naj ima obliko slovarja, kjer bodo razložene in opisane besede.

Ljubljana, maj 2013 Mentor: dr. Marko Razpet

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju, dr. Marku Razpetu, ki me je z vztrajnostjo, vso podporo in strokovno pomočjo usmerjal pri pisanju diplomskega dela.

Zahvaljujem se tudi staršem, ki so mi omogočili študij, mi pomagali in mi ves čas stali ob strani ter me spodbujali. Zahvala gre tudi bratu Denisu, ki me je v času študija podpiral in mi svetoval.

Hvala vsem prijateljem in sošolkam, ki so me spodbujali v času mojega šolanja in mi vlivali pogum pri pisanju diplomskega dela.

POVZETEK

V diplomskem delu sem obravnavala nekaj matematikov in z njimi povezane krivulje. Osredotočila sem se na krivulje z imenom grškega izvora. Za posamezne krivulje sem poiskala grško ime, jih opisala ter jih za lažje razumevanje narisala še v programu GeoGebra. Del diplomskega dela, kjer so predstavljene krivulje, ima obliko slovarja.

Ključne besede

Tales, Pitagora, Aristotel, astroida, cisoida cikloida, tavtohrona, trohoida, epicikloida, nefroida, hipocikloida, epitrohoida, hipotrohoida, elipsa, hiperbola, hipopeda, Bernoullijeva lemniskata, Jakob Bernoulli, kardioida, kohleoida, konhoida, parabola, Arhimedova spirala, Arhimed, hiperbolična spirala, Fermatova spirala, Pierre de Fermat, René Descartes, logaritemska spirala, strofoida.

SUMMARY - **Planar curves with names of Greek origin**

In the thesis we presented few mathematicians and plane curves associated with them. We focused on the curves with the name of Greek orgin. We found a Greek name for each curve, described it and presented in a graphical form with the mathematical program GeoGebra. Part of the thesis, where the curves are presented, is in the form of a dictionary.

Key words:

Thales, Pythagoras, Aristotle, astroid, cissoid, cycloid, tautochrone curve, trochoid, epicycloid, nephroid, hypocycloid, epitrochoid, hypotrochoid, ellipse, hyperbola, hippopede, lemniscate of Bernoulli, Jakob Bernoulli, cardioid, cochleoid, conchoid, parabola, Archimedes' spiral, Archimedes, hyperbolic spiral, Fermat's spiral, Pierre de Fermat, René Descartes, logarithmic spiral, strophoid.

KAZALO

KAZALO SLIK

1 UVOD

Matematika je velikanski sklop idej, saj iz njene zgodovini izhaja nekaj najsijajnejših misli neštetih generacij. Večine izrednih dosežkov si ni mogoče zamisliti brez uporabe številnih široko in globoko razvitih področij matematike, ki so se razvijala tudi v starodavni Grčiji. V zgodovino se je zapisalo zelo veliko znanih matematikov, ki so odkrivali in dokazovali številne matematične trditve. Posebno mesto pri tem raziskovanju so imele tudi krivulje, ki jim je grški jezik pomagal dati imena.

Moje diplomsko delo temelji na nekaterih geometrijskih krivuljah, katerih ime je grškega izvora, in ima obliko slovarja. Krivulje so zapisane tudi v grščini, njihovemu natančnemu opisu pa sem za lažje razumevanje oz. predstavo dodala še slike.

1.1 TALES

gr. Θαλῆς ὁ Μιλήσιος

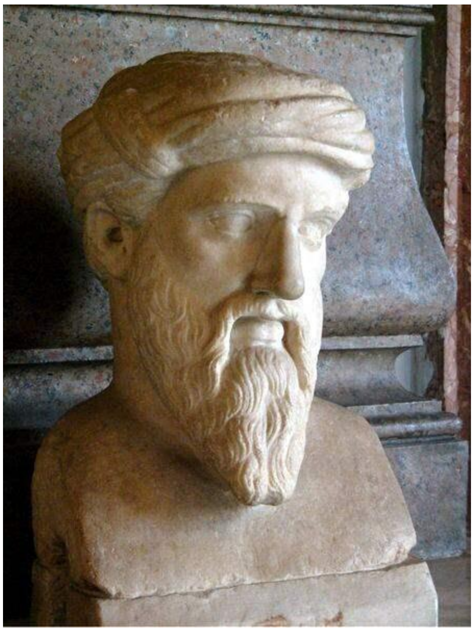
Tales je živel v prvi polovici 6. stoletja pred našim štetjem na otoku Milet. Bil je oče grške matematike. Poleg tega je bil še antični filozof, trgovec, inženir in državnik. V starem Egiptu je študiral matematiko, seznanil se je tudi z astronomijo in geometrijo. Kot matematik je postavil več temeljnih geometrijskih trditev, med katerimi je najslavnejši Talesov izrek, ki je podlaga za konstrukcijo pravokotnih trikotnikov s pomočjo polkroga. Napovedal je tudi Sončev mrk. V Egiptu je zaslovel po tem, da je znal izračunati višino piramide. Egipčani so ugotovili, da sta kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika enaka, Tales pa je poiskal dokaz za to trditev. Izpeljal ga je na enostaven način. Izdelal je dva identična enakokraka trikotnika in ugotovil, da se trikotnika pokrivata tudi, če enega obrne in položi osnovnico ob osnovnico. [8], [53], [57]

Slika 1: Tales [58]

1.2 PITAGORA

gr. Πυθαγόρας

Pitagora je eden zelo pomembnih grških matematikov in filozofov. Živel je od 569 pr. n. št. pa do 475 pr. n. št. Bil je Talesov sodobnik. Ustanovil je šolo, ki je doživela velikanski uspeh, saj je pitagorejsko sporočilo prinašalo nov, mistični in asketski pogled na življenje. Najbrž je šola kmalu dobila opazno politično moč, kar je povzročilo upor. Napadli naj bi stavbo, v kateri je šola imela sedež, in umorili naj bi skoraj vse najpomembnejše člane pitagorejske bratovščine. O njem domnevajo, da je bil mistik, znanstvenik in aristokratski državnik. Ob njem se je razvila skupina filozofov, ki se je zanimala za matematiko. Imenovali so se pitagorejci. Le-ti so se lotili proučevati nespremenljive elemente v naravi in družbi. Poučevali so tudi geometrijo, aritmetiko, astronomijo in glasbo. Pitagora je bil njihov učitelj in učenci so mu pripisovali znan Pitagorov izrek, ki pravi, da je kvadrat hipotenuze v pravokotnem trikotniku enak vsoti kvadratov obeh katet. Poskušal je izraziti lastnosti snovi s števili. Prvi splošen dokaz Pitagorovega izreka so dobili v pitagorejski šoli, poznali pa so ga tudi v Hamurabijevem Babilonu. [8], [53], [54]



Slika 2: Pitagora. [54]

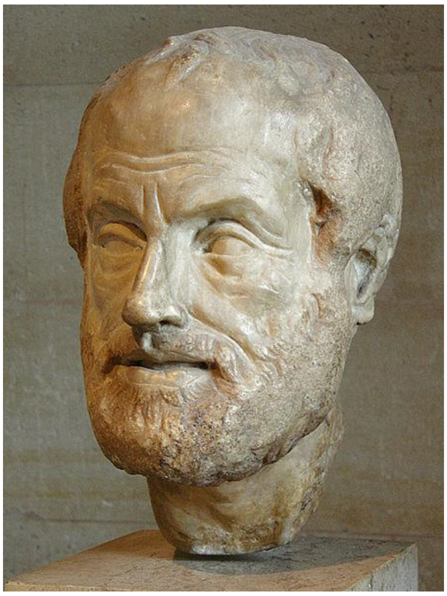
1.3 ARISTOTEL

gr. Ἀριστοτέλης

Aristotel je starogrški filozof, ki se je rodil 384 pr. n. št. v Stagiri. Bil je vodilna oseba Likeja. S 17 leti je prišel v Atene in postal Platonov učenec, kasneje pa je postal vzgojitelj kraljevskih sinov. Njegov učenec je bil med drugimi tudi Aleksander Veliki Makedonski, ki je osvojil Perzijo. V Atenah je ustanovil tudi filozofsko šolo Peripatos. Pred izbranimi učenci je imel ezoterična predavanja. Umrl je na otoku Evboja 475 pr. n. št.

Dokazal je, da je Zemlja okrogla, s tem, da je opozoril na senco na Luni, ki je med Luninim mrkom okrogla. Bil je največji mislec starega veka po Platonovi smrti. Napisal je tudi knjigo *Fizika*, ki označuje znanost o naravi, in knjigo z naslovom *Knjiga o živih bitjih*. Bil je utemeljitelj logike in metafizike.

Po Aristotelu je zelo znana razdelitev filozofije. V njegovem času sta bili filozofija in znanost identični. Filozofijo je razdelil na teoretično filozofijo (prva filozofija, matematika, fizika), praktično filozofijo (etika, politika, ekonomija) in poetično filozofijo.[8], [53], [55]



Slika 3: Aristotel. [55]

Čeprav Aristotela navadno ne uvrščamo med antične matematike, smo ga vseeno navedli, ker je bil vsestranski znanstvenik. Dobro je obvladal tudi matematiko in v svojih delih pogosto omenja matematike svojega časa.

1.4 JAKOB BERNOULLI

Jakob Bernoulli (tudi Jacob, Jacques) je bil švicarski matematiik, rojen 27. decembra leta 1654 v Baslu. Umrl je 16. avgusta leta 1705, prav tako v Baslu.

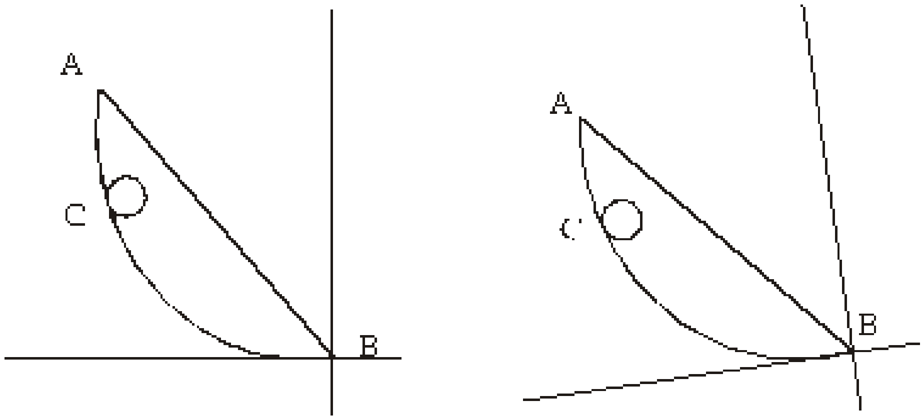
Jakob je bil starejši Johannov brat. Leta 1676 je na svojem potovanju v Anglijo srečal Roberta Boyla in Roberta Hooka. Ko se je vrnil domov, je posvetil svoje življenje znanosti in matematiki. Od leta 1682 je poučeval na Univerzi v Baslu, kjer je leta 1687 postal profesor matematike. Leta 1689 je za Mengolijem dokazal, da harmonična vrsta $1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{5} + \cdots$ divergira.

Dopisoval si je z Leibnizem in se pri tem naučil infinitezimalnega računa. Sodeloval je s svojim bratom Johannom. Njegova najzgodnejša dela o transcendentnih krivuljah (1696) in o izoperimetričnem problemu (1700, 1701) kažejo uporabo tega računa. Napisal je prvi učbenik infinitezimalnega računa, razširil je tudi uporabo novega računa v geometriji. Bil je predhodnik statistike. Njegovo odlično delo *Ars Conjectandi* iz leta 1713 predstavlja pionirsko delo iz teorije verjetnosti.

Slika 4: Jakob Bernoulli. [42]

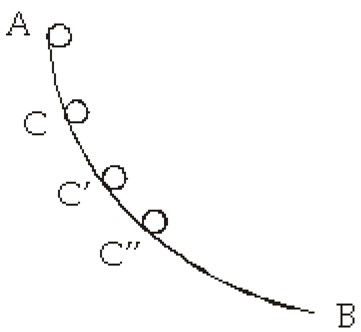
Jakob Bernoulli je problem brahistohrone razširil z novimi vprašanji. Eno izmed njih je: če imamo navpično premico, katera izmed obrnjenih cikloid z isto začetno točko in isto horizontalno osnovnico je tista, po kateri bo težko telo najhitreje doseglo dano vertikalno premico? S tem vprašanjem je izzval svojega brata Johanna. Ta se je odzval na provokacijo in pokazal, da je iskana obrnjena cikloida tista, ki seka dano premico vodoravno.

Če problem posplošimo, obrnjena cikloida, ki omogoča najhitrejši spust k dani poševni premici, je tista, ki jo seka pod pravim kotom.



Slika 5: Obrnjena cikloida. [41]

Posebna lastnost cikloide je, da je tavtohrona (ugotovi že Huygens leta 1659). To pomeni, da telesa, ki padajo po obrnjeni cikloidi, dosežejo dno v istem času, ne glede na to, s katere višine so bila spuščena. Ta lastnost spominja na lastnost, ki jo je opazil Galileo: čas spusta je enak za različne tetive iste krožnice. [40], [41], [42]

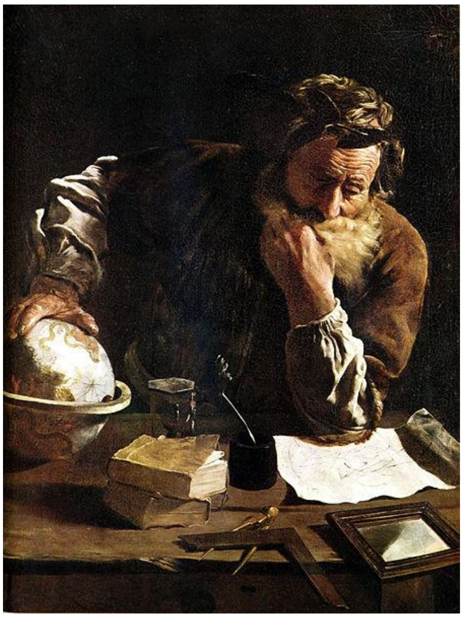


Slika 6: Telesa, ki padajo po obrnjeni cikloidi. [41]

1.5 ARHIMED

gr. Ἀρχιμήδης

Arhimed (287-212 pr. n. št.), starogrški matematik in fizik, se je rodil v Sirakuzah na Siciliji. Bil je tudi mehanik, izumitelj, inženir in astronom. V celoti se je posvetil raziskovanju, predvsem v matematiki. Veliko se je ukvarjal z geometrijskimi problemi in s prostorninami teles (integralni račun). Izračunal je približno vrednost konstante π. Napisal je tudi vrsto knjig. V ravninski geometriji sta najbolj znameniti njegovi deli *Merjenje kroga* in *O spiralah*, v kateri se lahko najde »Arhimedovo spiralo«. Arhimed je bil računsko zelo spreten, po čemer se je razlikoval od drugih matematikov tedanjega časa. Ubit je bil, ko so Rimljani zavzeli Sirakuze.



Slika 7: Arhimed. [46]

Arhimedova spirala se od logaritemske spirale razlikuje v tem, da so pri Arhimedovi spirali posamezni zavoji na enakih razdaljah. Pri logaritemski spirali tvorijo te razdalje geometrijsko zaporedje. [46], [47]

1.6 RENÉ DESCARTES

lat. Renatus Cartesius

René Descartes du Perron Cartesius je bil francoski filozof, matematik, fizik, učenjak in častnik. Izhajal je iz stare francoske rodbine, v kateri je bilo mnogo izobraženih ljudi. Bil je sin svetovalca v bretanskem parlamentu. Z osmimi leti je odšel na šolanje v jezuitsko šolo La Fleche v Anjou. Diplomiral je iz prava, ki pa ga nikoli ni prakticiral. Veliko bolj so ga zanimale matematične raziskave. Najbolj znani njegovi deli sta *Razprava o metodi za boljše vodenje razuma in iskanje resnice v znanosti* in *Géométrie*, ki je v algebro vključila celotno klasično geometrijo. [8], [50]

Slika 8: René Descartes. [51]

2 SLOVAR RAVNINSKIH KRIVULJ Z IMENOM GRŠKEGA IZVORA

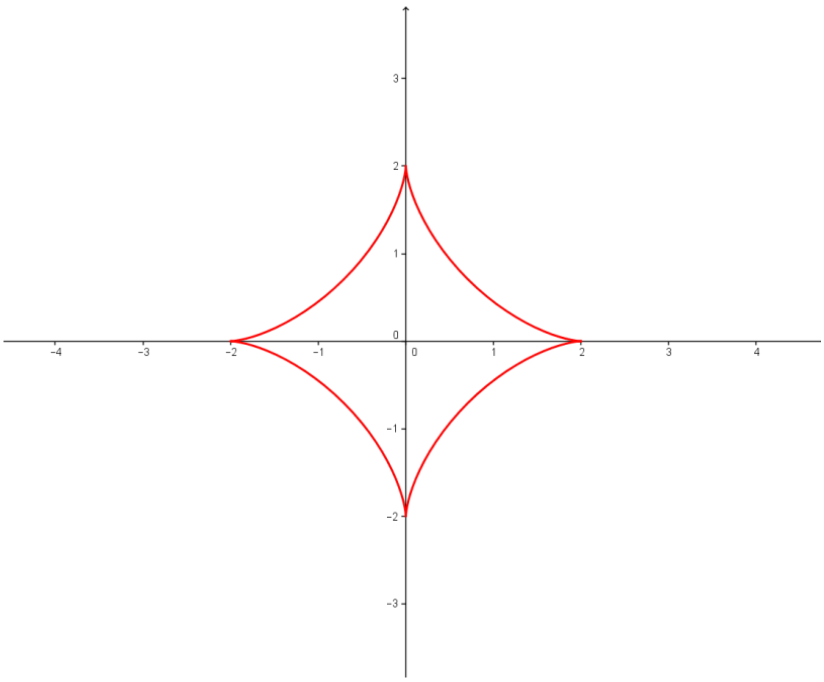
Glavni del diplomskega dela zajemajo krivulje v ravnini, ki imajo ime grškega izvora.

A

Astroida:

gr. ἀστήρ - zvezda + gr. ειδής – podoben, je oblike

Astroida ali asteroida je ravninska krivulja, ki jo sestavljajo štirje enako dolgi loki, ki oblikujejo konice. Astroida je lahko tudi ogrinjača družine elips. [5], [32]



Slika 9: Astroida.

V kartezičnem koordinatnem sistemu je določena z enačbo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

V parametrični obliki pa sta njeni enačbi

$$x = a(\cos t)^3,$$

$$y = a(\sin t)^3.$$

Ploščina lika, ki ga omejuje astroida, je

$$A = \frac{3}{8}\pi a^2 \ .$$

Dolžino celotne astroide pa izračunamo po obrazcu

$$o = 6a.$$

Astroida je tudi hipocikloida, ki jo opiše točka krožnice, ki se brez drsenja kotali po notranji strani 4–krat večje mirujoče krožnice.

C

Cisoida:

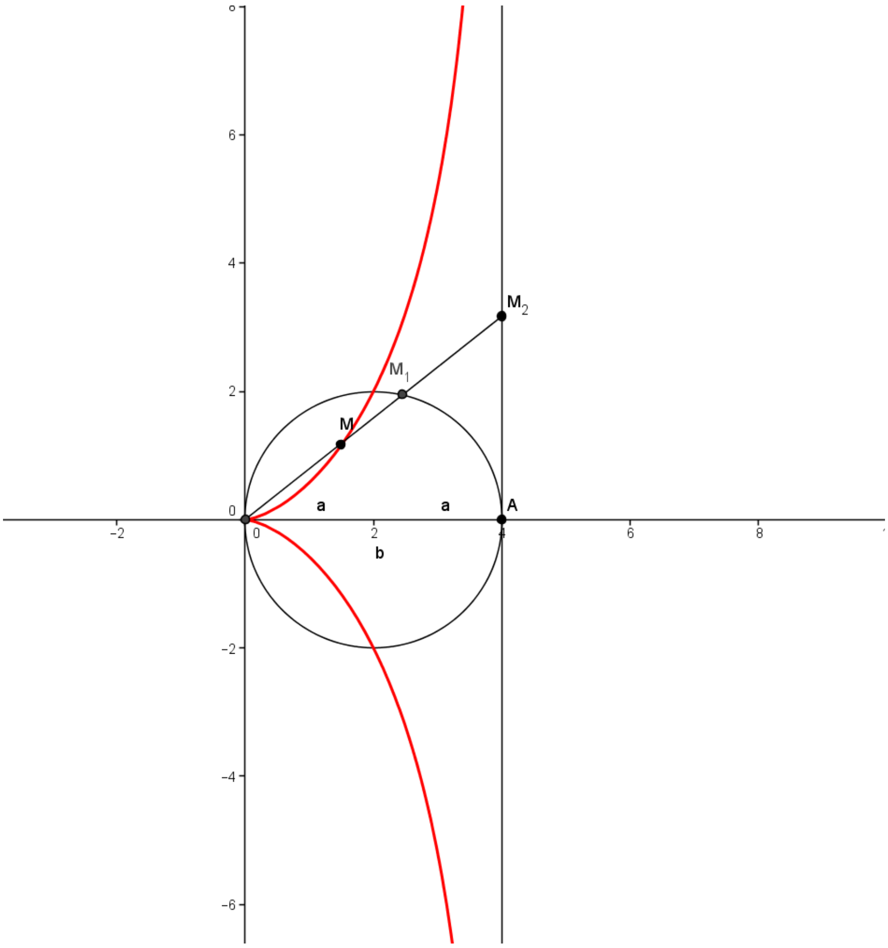
gr. κισσός – bršljan + gr. ειδής – v obliki

Cisoido so odkrili že stari Grki ob naporih, da bi rešili problem podvojitve kocke. Odkritje pripisujejo Dioklu.

Enačba cisoide je

$$(2a - x)y^2 - x^3 = 0,$$

kjer je a pozitivna konstanta. Krivulja premore navpično asimptoto $x = 2a$, točka $O\ (0,0)$ pa je zanjo singularna točka, kjer ima ost. Abscisna os je simetrala cisoide. [5], [30], [31]



Slika 10: Dioklesova cisoida.

Dioklova cisoida je ravninska krivulja, ki je dobila ime po starogrškem matematiku Dioklu (240-180 pr. n. št.), v grščini Διοκλῆς, ki se je rodil na jugu otoka Evboja. O Dioklesu je malo znanega. Vsekakor pa je prvi, ki je uporabljal cisoido za podvojitev kocke, in prvi, ki je proučeval odbojne lastnosti parabole. Parabola je namreč edina krivulja, ki snop vzporednih svetlobnih žarkov zbere v eni sami točki, v svojem gorišču.

Cikloida:

gr. κυκλοειδής – okrogel, iz gr. κύκλος – krog + gr. ειδής – je oblike

Cikloida je krivulja v ravnini, ki jo dobimo kot sled izbrane točke na krožnici, ki se brez drsenja kotali po premici. Navadno vzamemo za to premico abscisno os, krožnica pa se kotali po njeni zgornji strani.

V parametrični obliki je tedaj cikloida podana z enačbama

$$x(t) = r(t - \sin t),$$

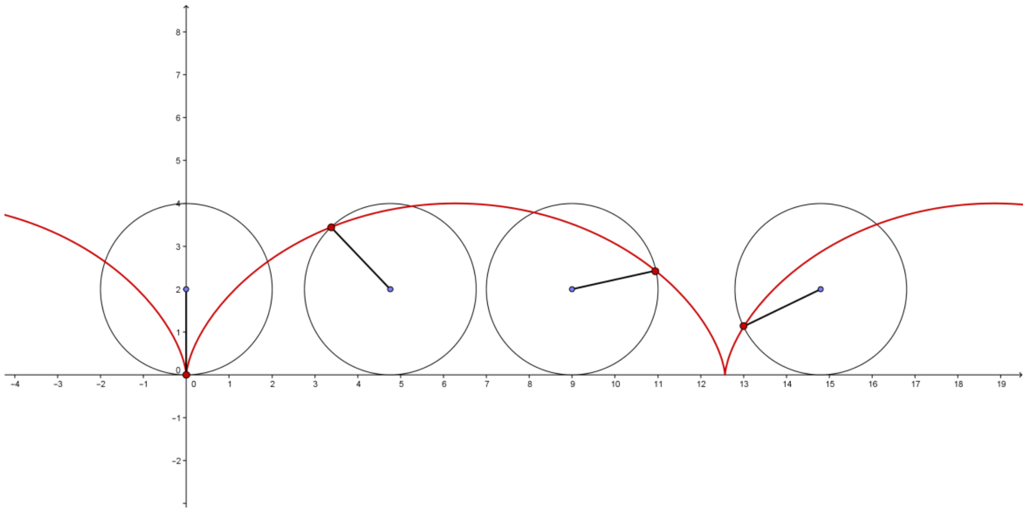
$$y(t) = r(1 - \cos t).$$

Pri tem je r polmer krožnice, t pa kot, ki ga pri vrtenju naredi točka P. Ko kot naredi poln obrat po premici, dobimo en lok cikloide. Pri nadaljevanju kotaljenja se loki periodično ponavljajo.

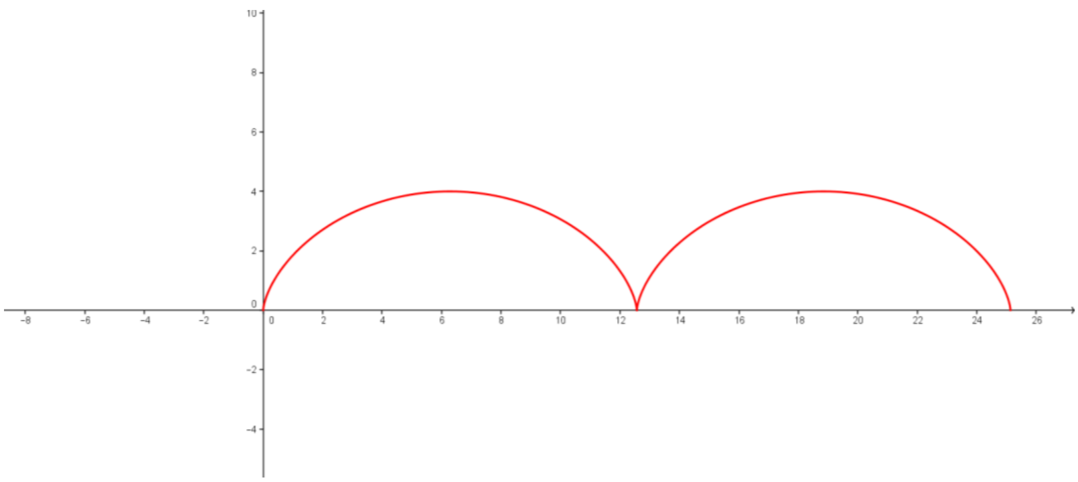
Ploščina pod enim lokom cikloide je

$$P = 3\pi r^2.$$

Cikloido so imenovali »Helena geometrov«, ker je povzročila večkratne spore med matematiki 17. stoletja. Cikloido je prvi raziskoval Kuzanski in kasneje Mersenne. Ime ji je dal Galilei leta *1599*. Leta *1634* je de Roberval pokazal, da je ploščina pod cikloido enaka trikratni ploščini kroga. [5], [18], [19], [20]



Slika 11: Nastanek cikloide.



Slika 12: Cikloida.

Krivulja, ki je v bistvu cikloida, je tavtohrona, le da je definirana drugače.

Tavtohrona

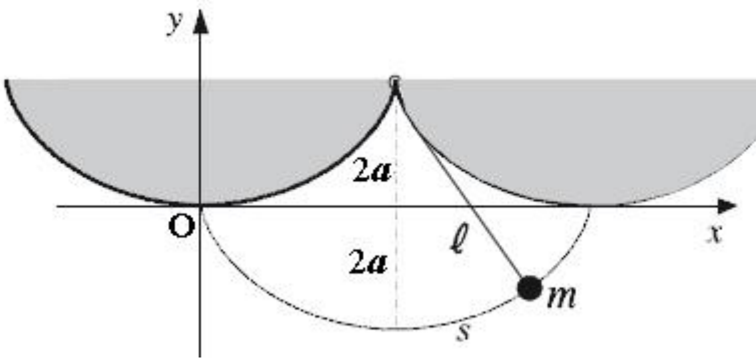
gr. ταὐτό - isti + gr. χρόνος - čas

Tavtohrona se imenuje krivulja, po kateri bi se moralo gibati točkasto telo, ki smo ga brez začetne hitrosti spustili, da bi se brez trenja zaradi težnosti spustilo v najnižjo točko, neodvisno od začetne točke. Krivulja, ki zadošča tem zahtevam, je cikloida.

Problem tavtohronosti išče krivuljo, po kateri bi se moralo gibati točkasto telo, da bi prišlo do najnižje točke v skladu z definicijo tavtohrone.

Problem je prvi rešil nizozemski astronom, fizik in matematik Christiaan Huygens (1629–1695) v letu 1650. Ugotovil je, da je iskana krivulja lok cikloide.

Problem tavtohronosti so pričeli intenzivneje proučevati, ko so ugotovili, da nihalo, ki niha po krožni poti, ni izohrono. To pa pomeni, da bo ura na nihalo kazala različne čase v odvisnosti od tega, kako daleč nihalo zaniha. [34]



Slika 13: Cikloidno nihalo. [35]

Trohoida:

gr. τροχοειδής – okrogel, kolesu podoben, iz gr. τροχός – kolo + gr. ειδής – je oblike

Trohoida je ravninska krivulja, ki nastane podobno kot cikloida. Dobimo jo, če opazujemo gibanje fiksne točke na polmeru krožnice ali njenem podaljšku, ko se krožnica brez drsenja kotali po premici. Točka lahko leži na obodu krožnice, zunaj ali v notranjosti.

Krožnica, ki se kotali, naj ima polmer a. V odvisnosti od velikosti razdalje b imamo tri primere: [22]

- $b < a$ (točka leži znotraj krožnice), dobimo skrčeno cikloido.
- $b = a$ (točka leži na obodu krožnice), dobimo običajno cikloido
- $b > a$ (točka leži zunaj krožnice) in dobimo razširjeno (raztegnjeno) cikloido.

Krivulje, ki nastanejo s kotaljenjem, so še na primer:

Epicikloida:

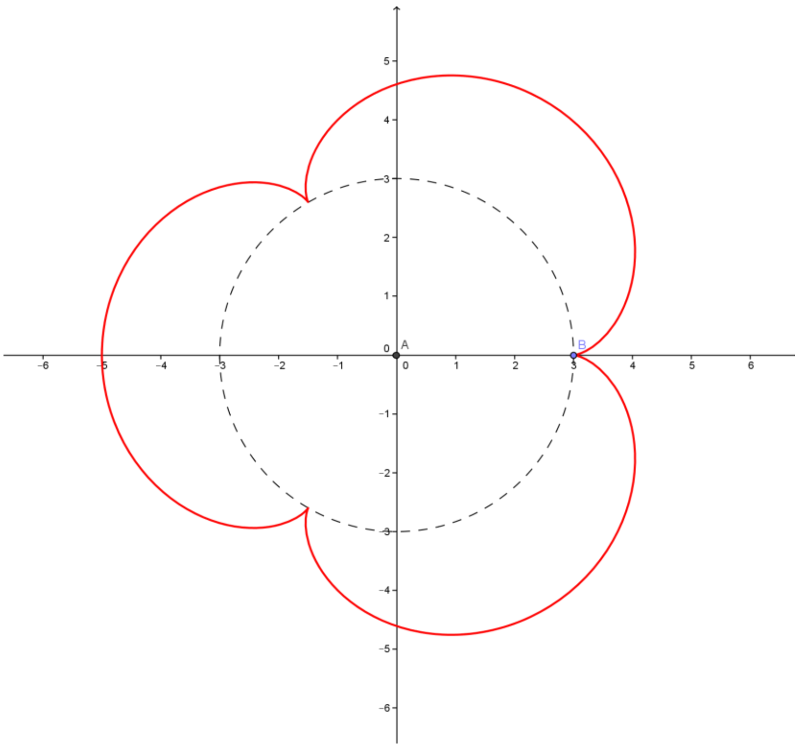
gr. ἐπί – pri, na, poleg, nad + gr. κυκλοειδής – okrogel

Epicikloida je ravninska krivulja, ki jo dobimo kot sled izbrane točke na krožnici, ki se brez drsenja kotali po zunanjosti druge fiksne krožnice.

Če ima manjša krožnica polmer r večja pa $R = kr$, potem je parametrična oblika epicikloide dana z enačbama

$$x(\theta) = (R + r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right),$$

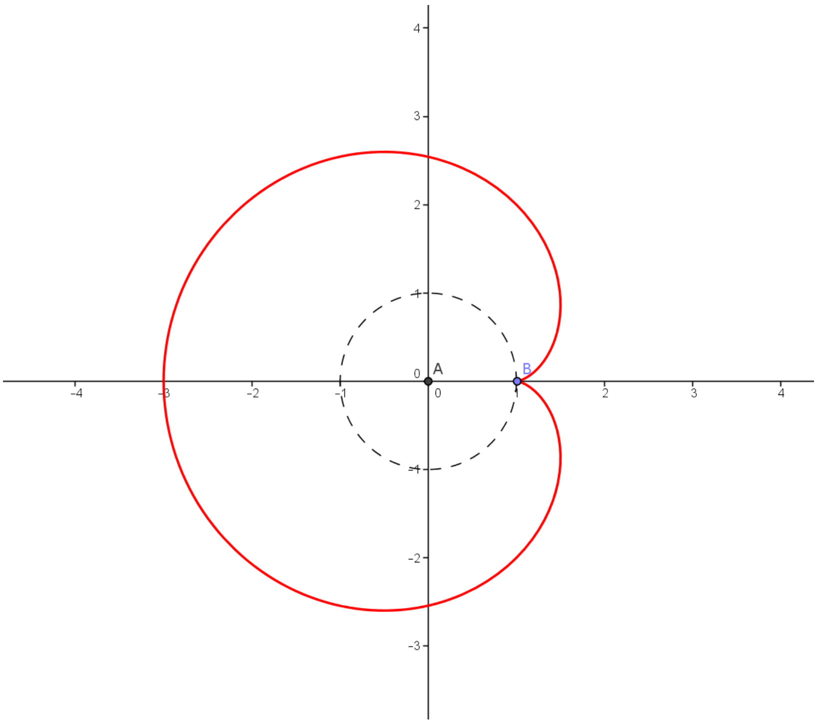
$$y(\theta) = (R + r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right).$$



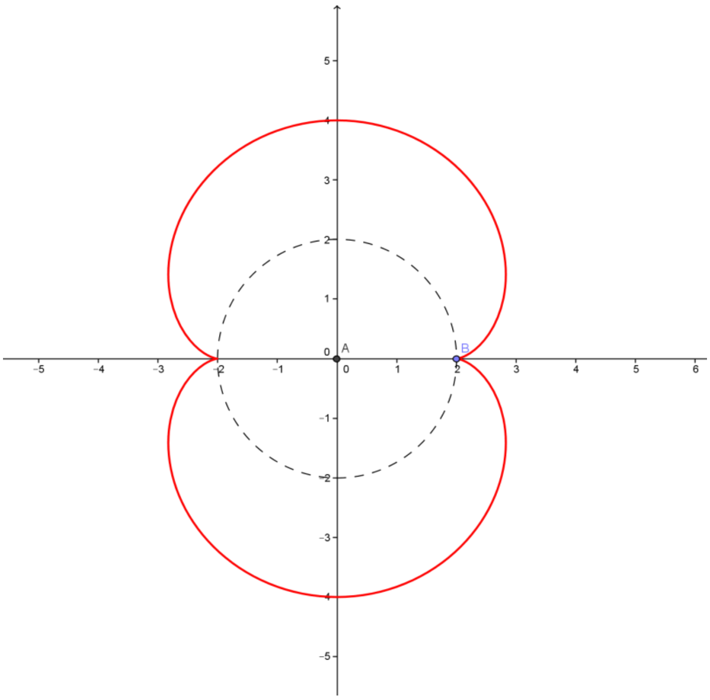
Slika 14: Epicikloida.

Kadar je k celo število, potem je krivulja sklenjena in ima natančno k ostrih kotov. [5], [23], [24], [25]

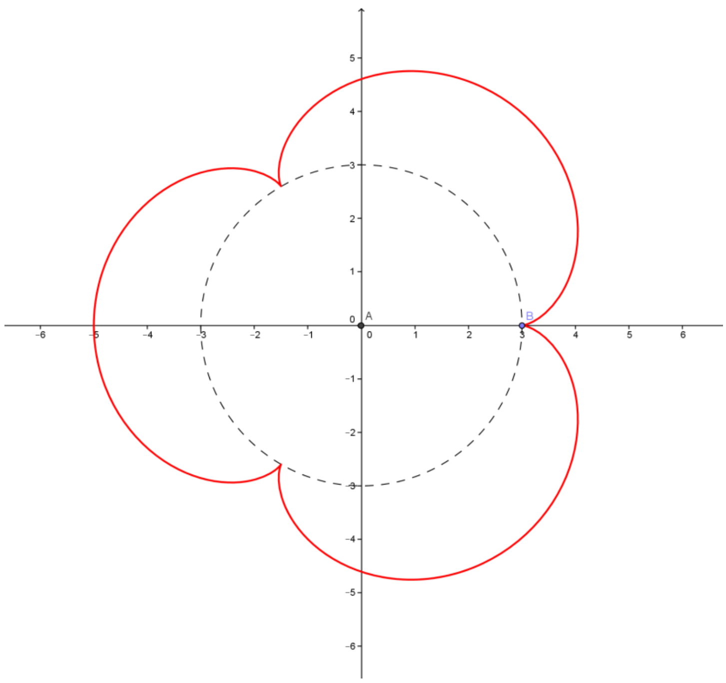
Epicikloida, kjer je $k = 1$ ($R = r$) in ima samo en lok, se imenuje tudi kardioida.



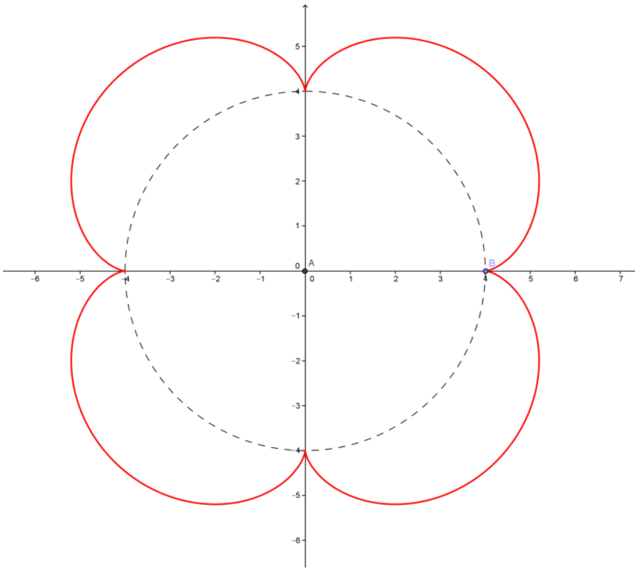
Slika 15: Epicikloida, kjer je k=1.



Slika 16: Epicikloida, kjer je k=2.

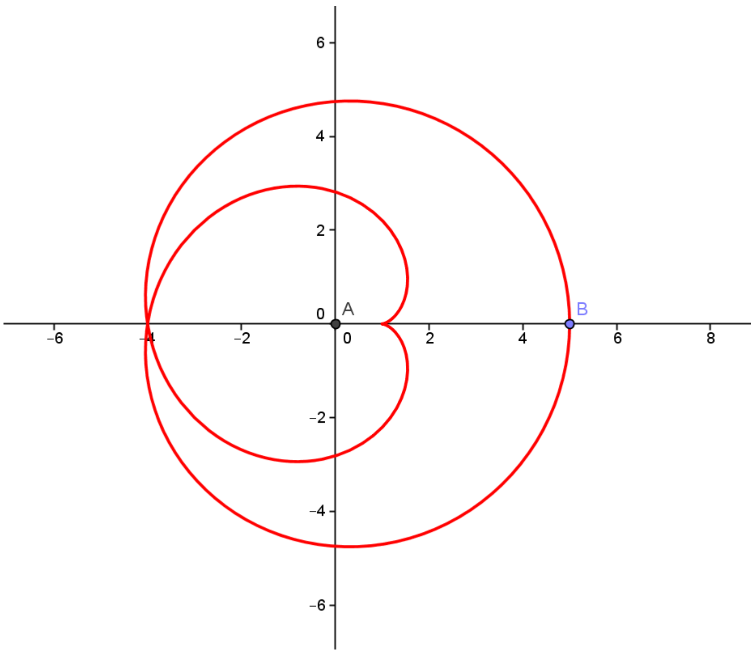


Slika 17: Epicikloida, kjer je k=3.

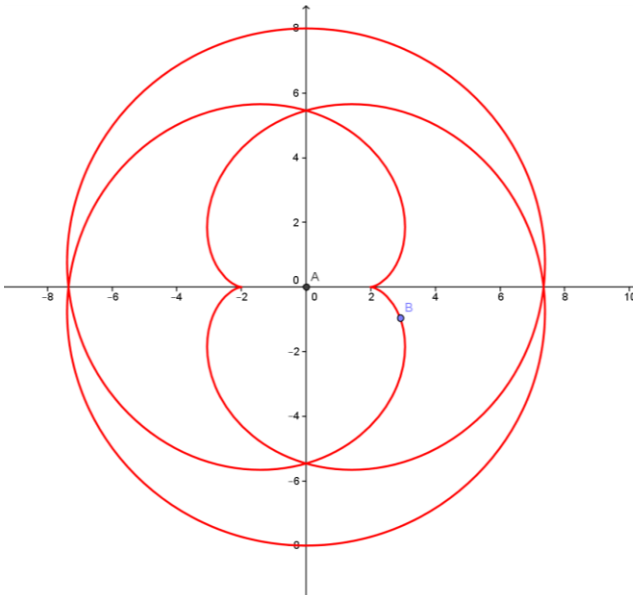


Slika 18: Epicikloida, kjer je k=4.

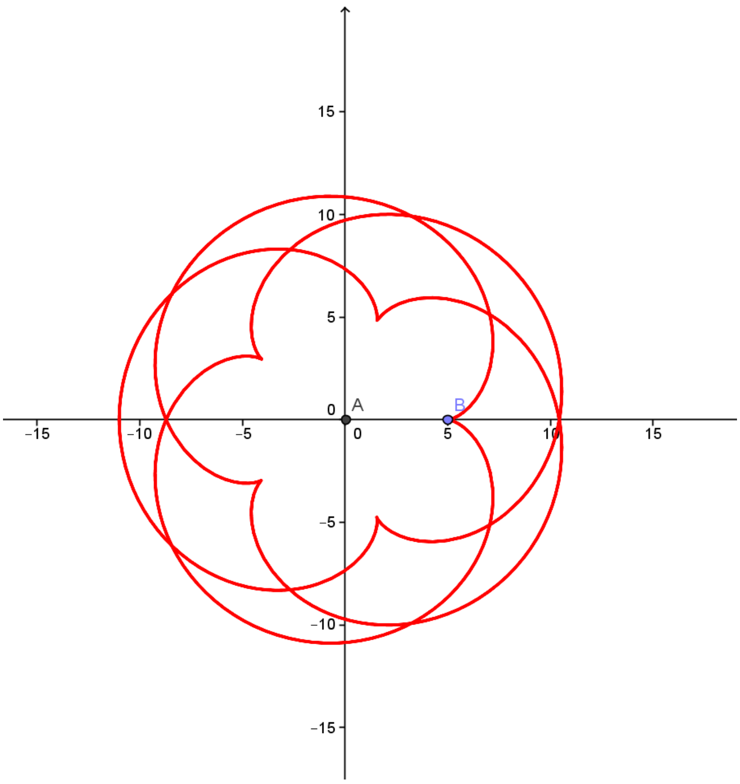
Kadar je k racionalno število, se posamezni loki sekajo med sabo. Poljubna opazovana točka se, potem ko preteče končno mnogo lokov, vrne v začetno lego. Spodaj na slikah so narisane epicikloide za racionalne k ($k = {}^{R}/_{r}$): $k = {}^{1}/_{2}$, $k = {}^{3}/_{2}$ in $k = {}^{3}/_{5}$.



Slika 19: Epicikloida, kjer je k=1/2.



Slika 20: Epicikloida, kjer je k=3/2.



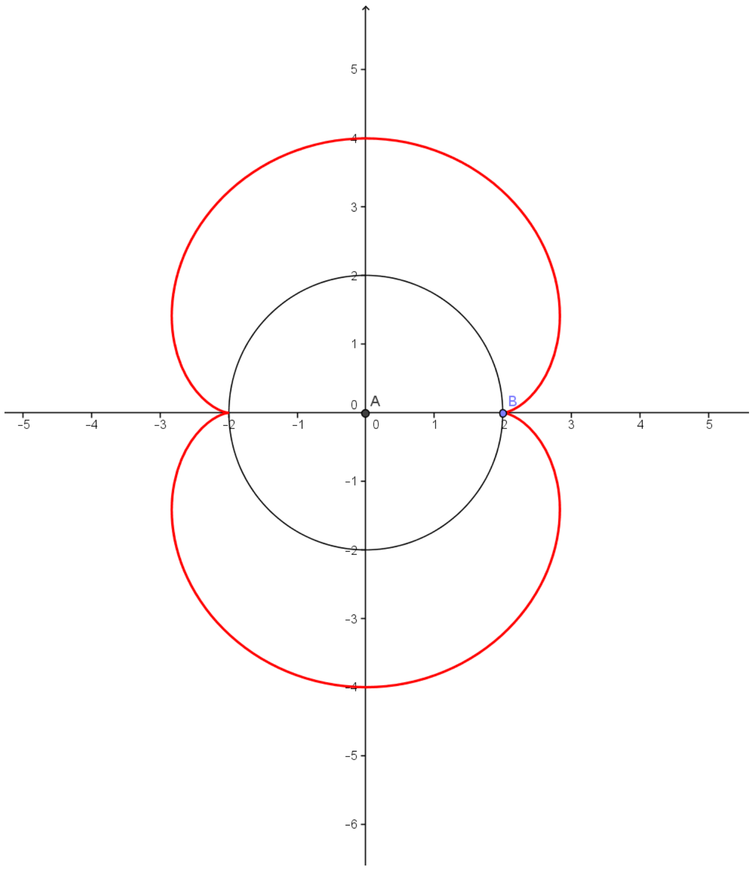
Slika 21: Epicikloida, kjer je k=3/5.

Epicikloida, kjer je njen $k = 2$, se imenuje nefroida.

Nefroida:

gr. νεφρός – ledvica + gr. ειδής – v obliki

Nefroida je ravninska krivulja, ki ima obliko ledvice. Ime krivulje pomeni, da je oblikovana kot ledvica. [43]



Slika 22: Nefroida je krivulja, označena z rdečo barvo.

Parametrična oblika nefroide je

$$x = a(3\cos t - \cos 3t),$$
$$y = a(3\sin t - \sin 3t).$$

Dolžina loka nefroide se izračuna po obrazcu

$$l = 24a.$$

Ploščina lika, ki ga ograjuje, pa je

$$P = 12\pi a^2.$$

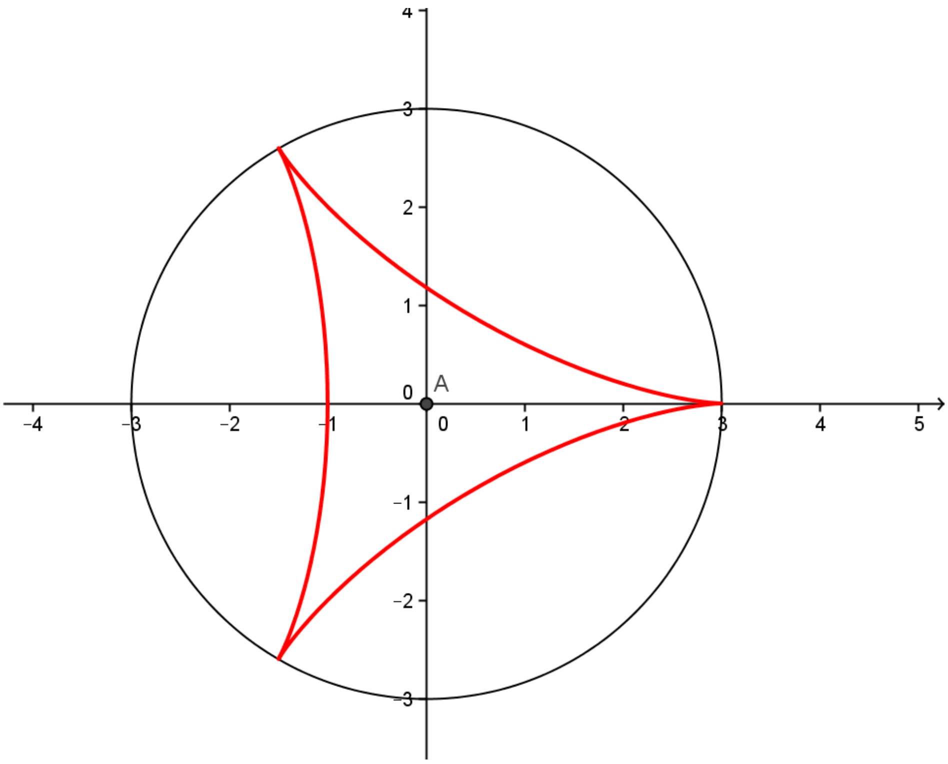
Hipocikloida:

gr. ὑπό – pod + gr. κυκλοειδής – okrogel

Hipocikloida je geometrijska ravninska krivulja, ki nastane kot sled izbrane točke na krožnici, ki se brez drsenja kotali po notranjosti druge krožnice. Po nastanku je podobna cikloidi, ki nastane s kotaljenjem krožnice po premici. Notranja (manjša) krožnica ima polmer enak r, zunanja (večja) krožnica pa $R = kr$. [5], [27], [28] Enačbi krivulje v parametrični obliki sta:

$$x(\theta) = (R - r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right),$$

$$y(\theta) = (R - r)\sin\theta + r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right).$$

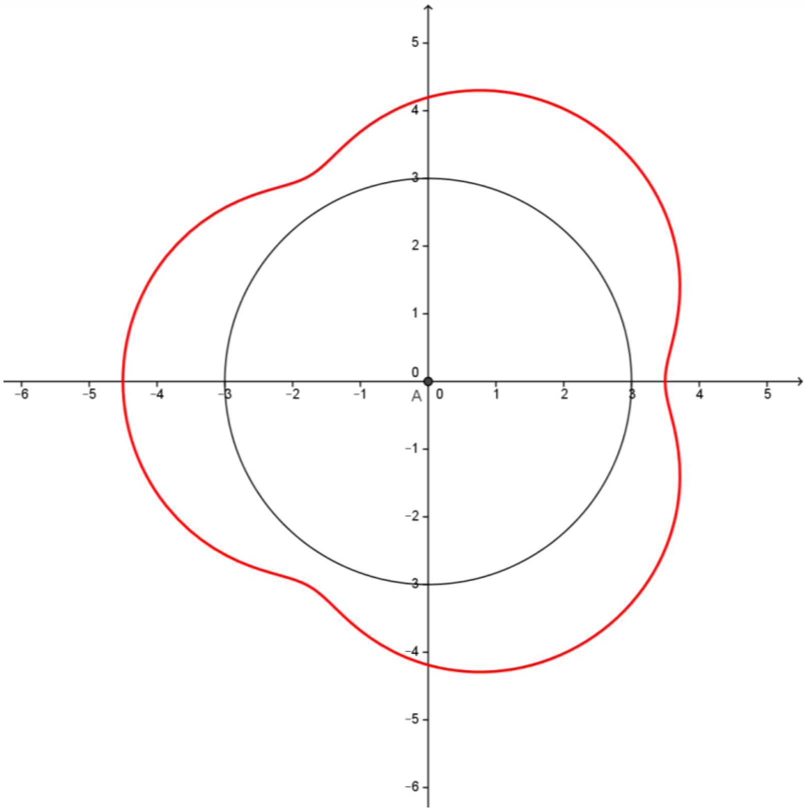


Slika 23: Hipocikloida, kjer je k=1/3.

Epitrohoida:

gr. ἐπί – pri, na, poleg, nad + gr. τροχοειδής – okrogel, kolesu podoben

Epitrohoida je krivulja, ki nastane podobno kot epicikloida. Dobimo jo kot sled izbrane točke na polmeru krožnice, ki se brez drsenja kotali po drugi krožnici. [26]

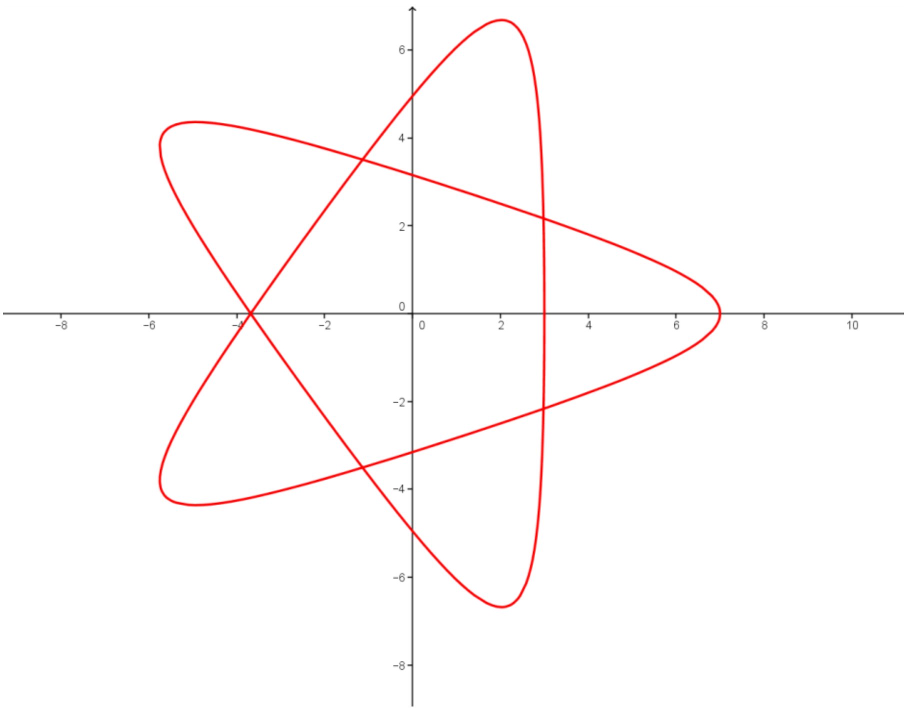


Slika 24: Epitrohoida.

Hipotrohoida:

gr. ὑπό – pod + gr. τροχοειδής –okrogel, kolesu podoben

Hipotrohoida nastane podobno kot hipocikloida. Dobimo jo kot sled izbrane točke na polmeru krožnice, ki se brez drsenja kotali v notranjosti fiksne krožnice. [29]



Slika 25: Hipotrohoida.

Če je d razdalja točke, ki pušča sled, od središča kotaleče se krožnice, potem sta parametrični enačbi hipotrohoid

$$x(\theta) = (R - r)\cos\theta + d\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right),$$

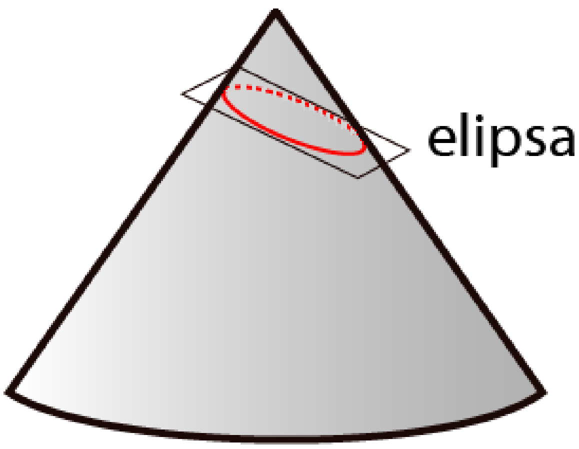
$$y(\theta) = (R - r)\sin\theta + d\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right).$$

E

Elipsa:

gr. ἔλλειψις – pomanjkanje, nedostatek, napaka, krivda

Elipso štejemo med algebrske krivulje 2. reda, to pomeni med stožnice. Krivuljo dobimo, če presekamo stožec z ravnino pod kotom, ki je manjši od naklonskega kota stranice stožca.

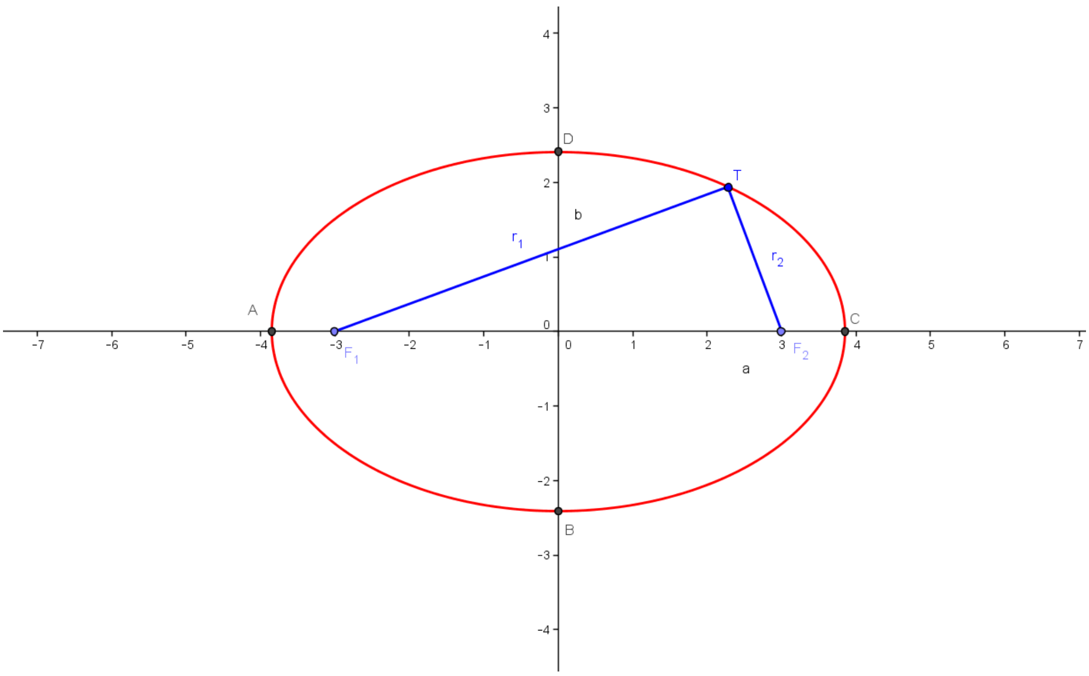


Slika 26: Stožec, pri katerem dobimo elipso. [59]

Elipsa je množica točk v ravnini, katerih vsota razdalj (prevodnic) od izbranih točk F_1 in F_2 (gorišč) je konstantna:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Pri tem r_1 predstavlja razdaljo točke na elipsi od enega oglišča, r_2 pa razdaljo od drugega oglišča, a pa veliko polos elipse.



Slika 27: Elipsa.

Razdalja od točke A do točke C se imenuje velika os elipse. Označimo jo $\overline{AC} = 2a$. Razdalja od točke B do točke D pa se imenuje mala os elipse, ki jo označimo z $\overline{BD} = 2b$. Središče elipse se nahaja v točki 0. Razdalji od točke A do izhodišča in od izhodišča do točke B označimo s črko a in ju imenujemo veliki polosi elipse. Razdalji od točk B do izhodišča in od izhodišča do točke D pa označimo s črko b in ju imenujemo mali polosi elipse. Temena elipse predstavljajo točke A, B, C in D. [4] [5], [7], [13], [14] Točki $F_1\,(-e,0)$ in $F_2\,(e,0)$ označujeta gorišči elipse, kjer e imenujemo linearna ekscentričnost. Linearno ekscentričnost izračunamo po formuli:

$$e^2 = a^2 - b^2, \text{ če je } a > b$$

Takrat ko je $a < b$ linearno ekscentričnost izračunamo po formuli:

$$e^2 = b^2 - a^2.$$

Enačba elipse s središčem v izhodišču se glasi

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

po deljenju z a^2b^2 pa v segmentni obliki, iz katere lahko preberemo odseke, ki jih naredi krivulja na obeh koordinatnih oseh

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elipso lahko vzporedno premaknemo za vektor $\vec{v} = (p, q)$ in dobimo enačbo premaknjene elipse

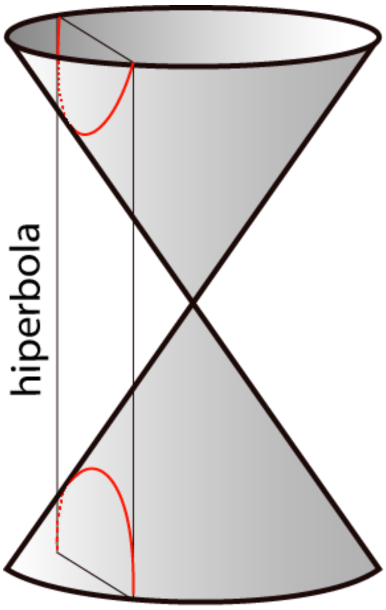
$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

H

Hiperbola:

gr. ὑπερβολή – pretiravanje, prekašanje iz gr. ὑπέρ – čez, nad + gr. βάλλω - mečem

Hiperbolo štejemo med algebrske krivulje 2. reda, se pravi med stožnic*e*. Krivuljo dobimo, če presekamo dvojni stožec s skupnim vrhom z ravnino pod pravim kotom glede na osnovno ploskev.

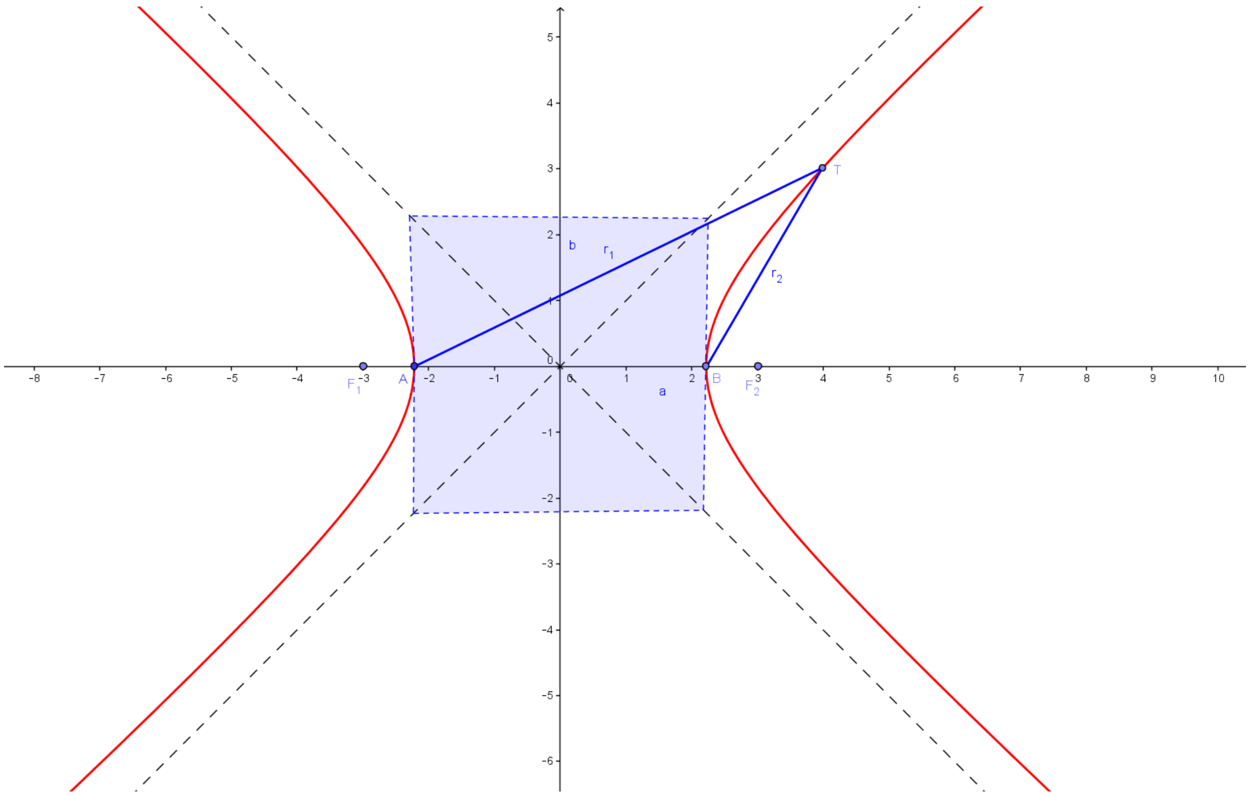


Slika 28: Dvojni stožec, pri katerem dobimo hiperbolo. [59]

Hiperbola je množica vseh točk v ravnini, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj od dveh izbranih točk F_1 in F_2 (gorišč) konstantna:

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Pri tem r_1 predstavlja razdaljo prve krožnice, r_2 razdaljo druge krožnice, a pa realno polos hiperbole.



Slika 29: Hiperbola.

Točki A in B prestavljata temeni hiperbole. Razdalja od izhodišča do točke A oz. od izhodišča do točke B se imenuje glavna ali realna polos. Označimo jo s črko a. S črko b pa označimo imaginarno polos.

Točki $F_1(e, 0)$ in $F_2(-e, 0)$ sta gorišči hiperbole. Število e imenujemo linearna ekscentričnost hiperbole, s katerim označujemo, da sta gorišči za e oddaljeni od izhodišča. [4] [5], [7], [10], [11], [12]

Linearno ekscentričnost izračunamo

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Enačba hiperbole se glasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hiperbola ima lahko gorišči na ordinatni osi. Taka enačba hiperbole pa se glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Hipopeda:

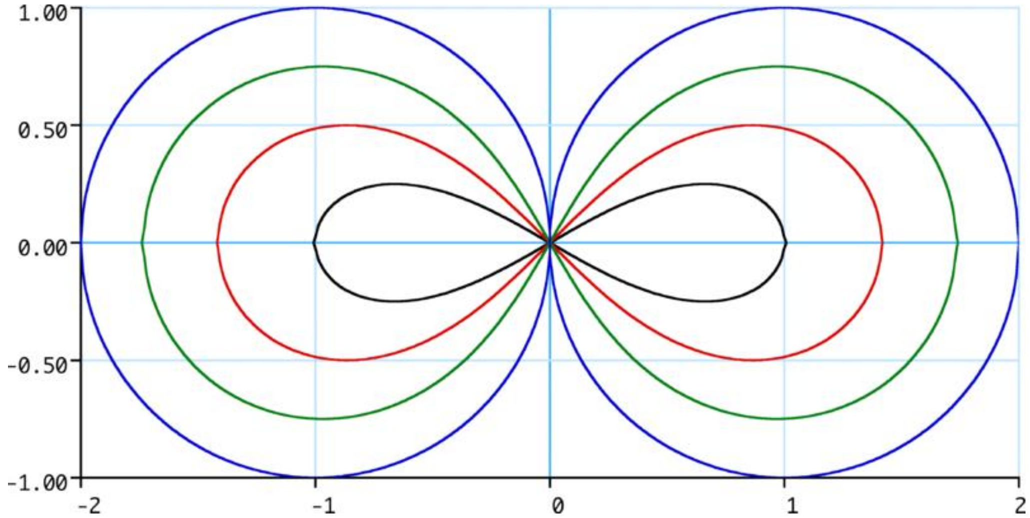
gr. ἱπποπέδη – konjski nožni okov iz gr. ἵππος – konj + gr. πέδη – veriga, spona, okov

Hipopeda dobesedno pomeni konjski nožni okov. Namestili so jo konju na sprednje noge, da se ni mogel neomejeno premikati, zlasti če ni bil v ogradi. Konjski tatovi pa so konja s hipopedo na nogah težko ukradli.

Hipopeda je ravninska krivulja, ki je znana tudi kot Boothova lemniskata ali Proklova hipopeda in je določena z enačbo

$$(x^2 + y^2)^2 = cx^2 + dy^2,$$

kjer je parameter $c > 0$. Za $d > 0$ imamo ovalno obliko. Zaradi tega je znana tudi kot Boothov oval. Kadar pa je $d < 0$, krivulja spominja na osmico oziroma lemniskato, zaradi tega tudi Boothova lemniskata. Če pa je $d = -c$, dobimo Bernoullijevo lemniskato. [38]



Slika 30: Boothove lemniskate. [38]

Hipopedo lahko definiramo tudi kot krivuljo, ki nastane kot presek torusa in ravnine, ki je vzporedna z osjo torusa in je tudi tangentna ravnina na notranji ekvator torusa. Takšna vrsta preseka se imenuje torični presek ali Perzejeva krivulja.

Vzemimo krožnico $x^2 + y^2 = a^2$ v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu. Na osi x v notranjosti krožnice izberemo točko E z absciso ma, kjer je $m^2 < 1$. Skozi točko E načrtamo premico z naklonskim kotom θ, ki seka krožnico v točkah A in B. Izračunajmo p tetive AB.

Konstruiramo premico skozi točko B in središče O krožnice. Premica seka krožnico še v točki D, skozi katero potegnemo k osi x vzporednico, ki seka premico skozi A in B v točki C. Nastali trikotnik DBA je pravokoten, trikotnik CDB in EOB pa sta si podobna. Očitno pa so razmerja njunih stranic 2:1. Zato je $|CD| = 2|EO| = 2ma$. Zato je kateta DA pravokotnega trikotnika CDA dolga je $|DA| = |CD| \sin\theta = 2ma \sin\theta$. Po Pitagorovem izreku je zato

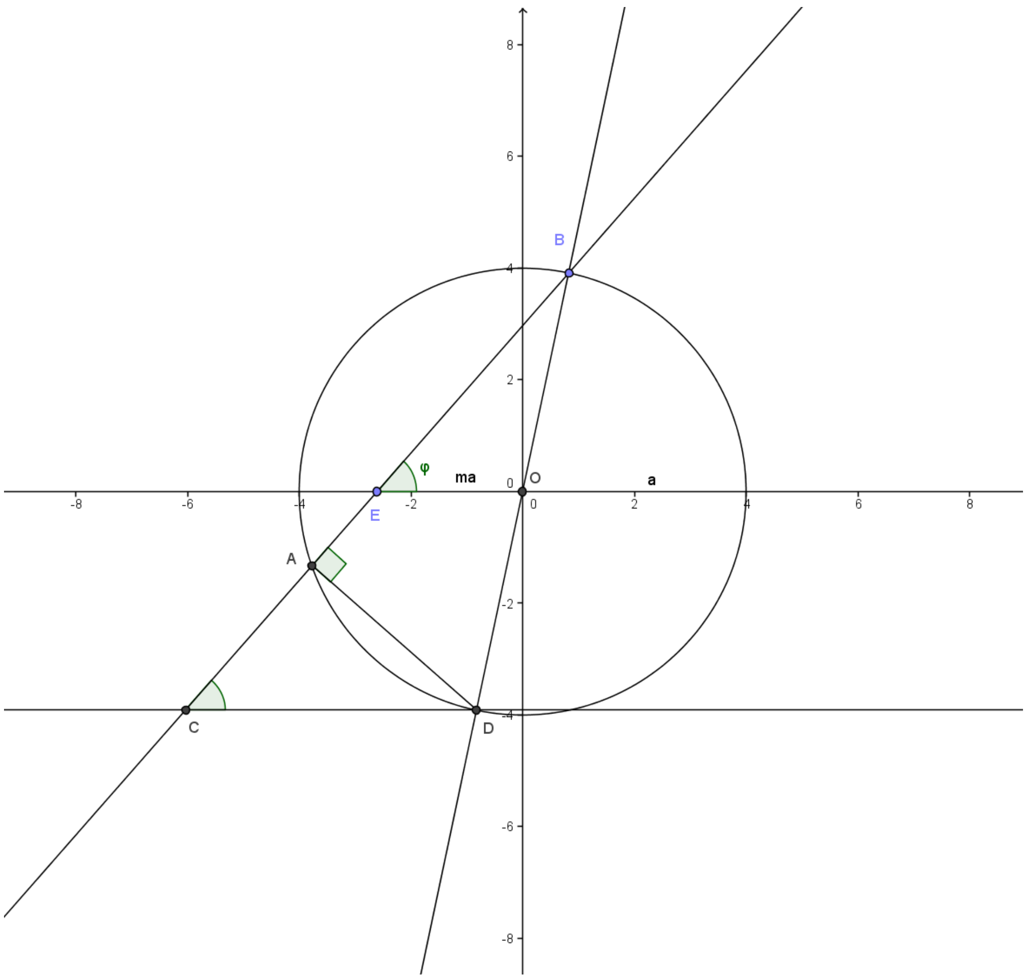
$$p^2 = |AB|^2 = |DB|^2 - |DA|^2 = 4a^2(1 - m^2 \sin^2\theta).$$

Sedaj ko poznamo dolžino tetive AB skozi točko E, lahko definiramo krivuljo v polarni obliki:

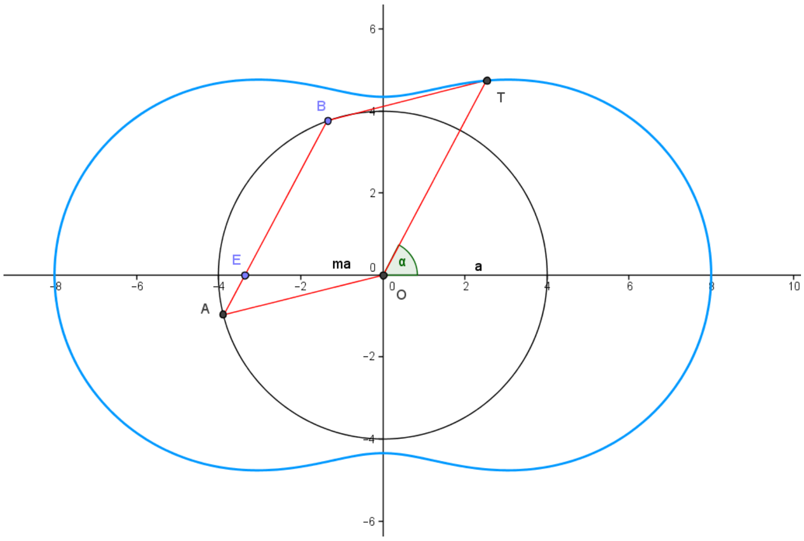
$$r^2 = 4a^2(1 - m^2 \sin^2\theta).$$

Do enake enačbe pridemo tudi takrat, ko je $m^2 \geq 1$ in je točka E na krožnici ali zunaj nje.

Do posamezne točke T na krivulji pridemo tako, da konstruiramo paralelogram $AOTB$, kakor kaže slika 32. Stranica OT ima isti naklonski kot θ kakor AB in pri tem je $p = |OT| = |AB| = r$. Dobljena krivulja je Proklova hipopeda. [60]



Slika 31: Tetiva krožnice.

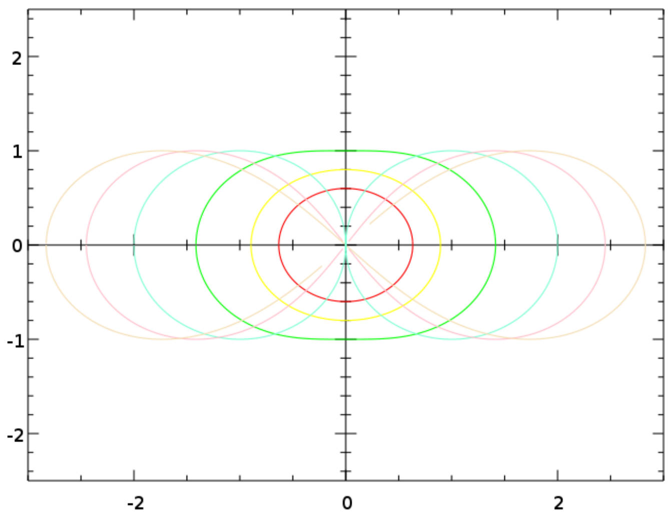


Slika 32: Konstrukcija hipopede.

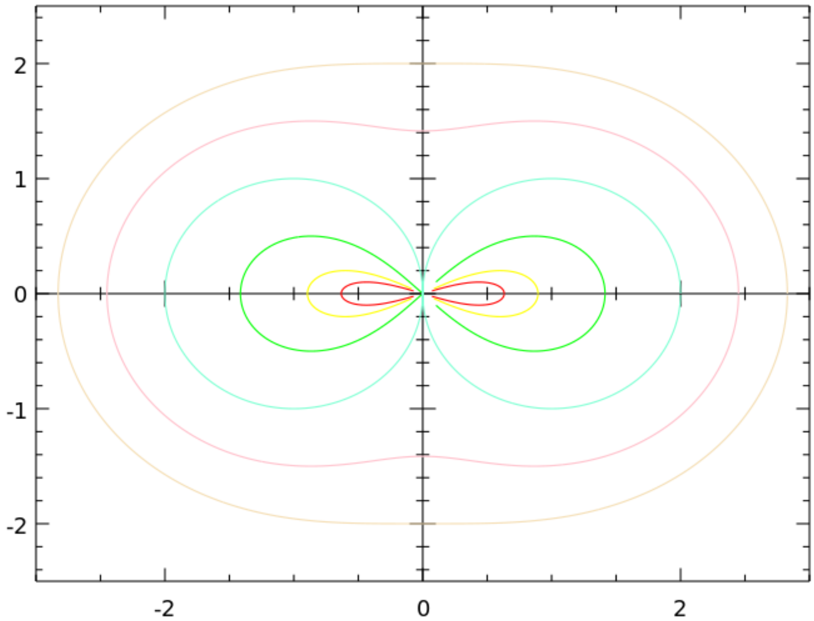
Enačba Proklove hipopede, zapisana v implicitni obliki, se glasi:

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 + (1 - m^2)y^2).$$

Polarna enačba hipopede je tudi $r^2 = 4B(A - B\sin^2\theta)$, pri čemer je $A = {}^{a}/_{m}$, $B = am$.



Slika 33: Hipopede z A=1,B=0,1;0,2;0,5;1,0;1,5 in 2,0. [38]



Slika 34: Hipopede z B=1, A=0,1;0,2;0,5;1,0;1,5 in 2,0. [38]

Bernoullijeva lemniskata:

gr. λημνίσκος – volnen trak, pentlja,

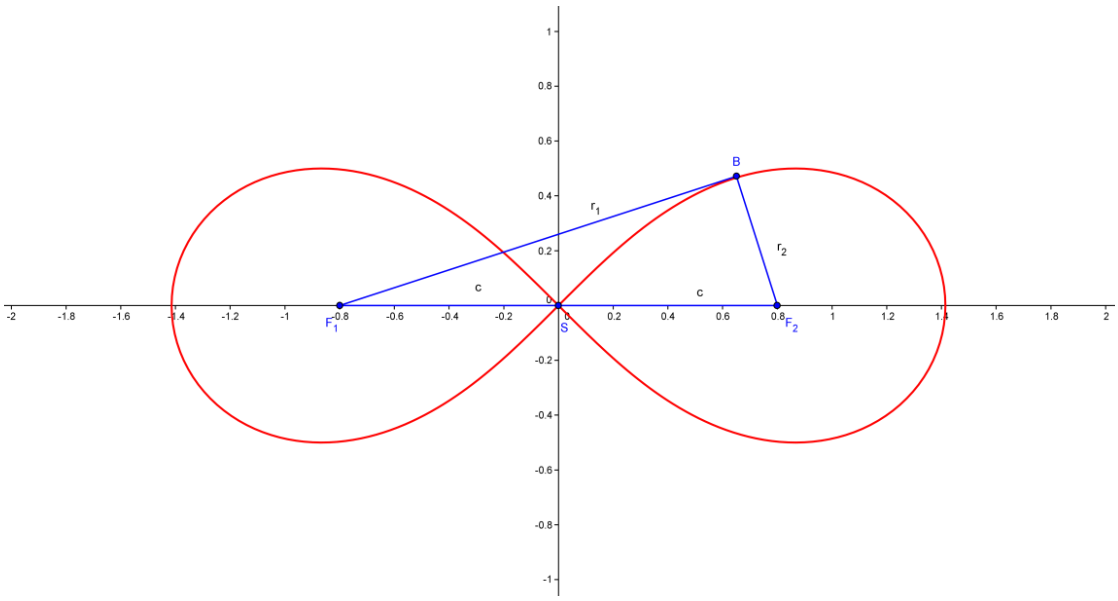
Bernoullijeva lemniskata je ravninska krivulja, ki jo definirata dani točki F_1in F_2, ki ju imenujemo gorišči. Točki sta na razdalji $2a$ tako, da je

$$PF_1 \cdot PF_2 = a^2.$$

Imenuje se po švicarskem matematiku Jakobu Bernoulliju (1654-1705), ki jo je prvi opisal v letu 1694 kot modifikacijo elipse. [39]

Bipolarna oblika enačbe za Bernoullijevo lemniskato je

$$r_1 \cdot r_2 = a^2.$$



Slika 35: Bernoullijeva lemniskata in njeni dve gorišči.

Enačba Bernoullijeve lemniskate v polarnem koordinatnem sistemu je

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

V kartezičnem koordinatnem sistemu je enačba Bernoullijeve lemniskate

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

K

Kardioida:

gr. καρδία – srce + gr. ειδής – v obliki

Kadioida ali srčnica je ravninska krivulja, ki nastane kot sled točke pri kotaljnju prve krožnice brez drsenja po drugi fiksni krožnici z enakim polmerom. Kardioida je poseben primer epicikloide ($k = 1$). Parametrična oblika srčnice je:

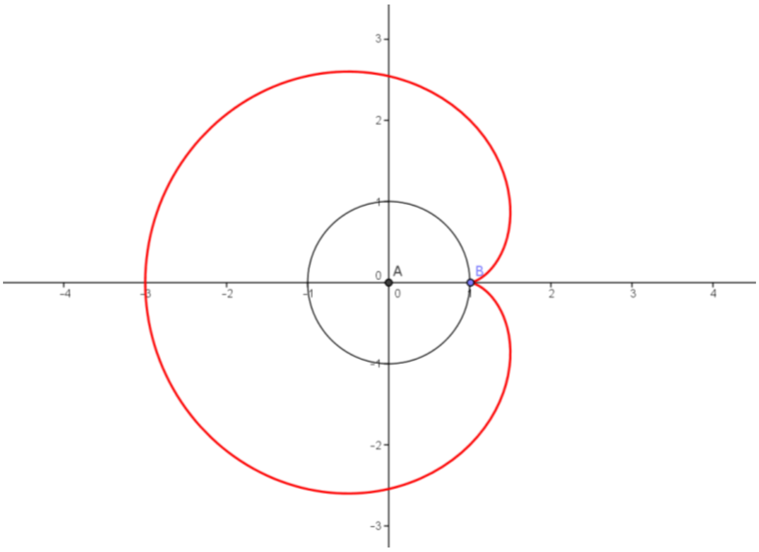
$$x = a(2\cos t - \cos 2t),$$

$$y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

Enačba kardioide v polarni obliki je

$$\rho = a(1 - \cos\theta).$$

Inverzna krivulja parabole je kardioida, če je središče inverzije njeno gorišče. Inverzija na krožnici polmera R je dana z relacijo $\rho\rho^* = R^2$.



Slika 36: Kardioida.

Kohleoida:

gr. κόχλος – školjka, polž + gr. ειδής – v obliki

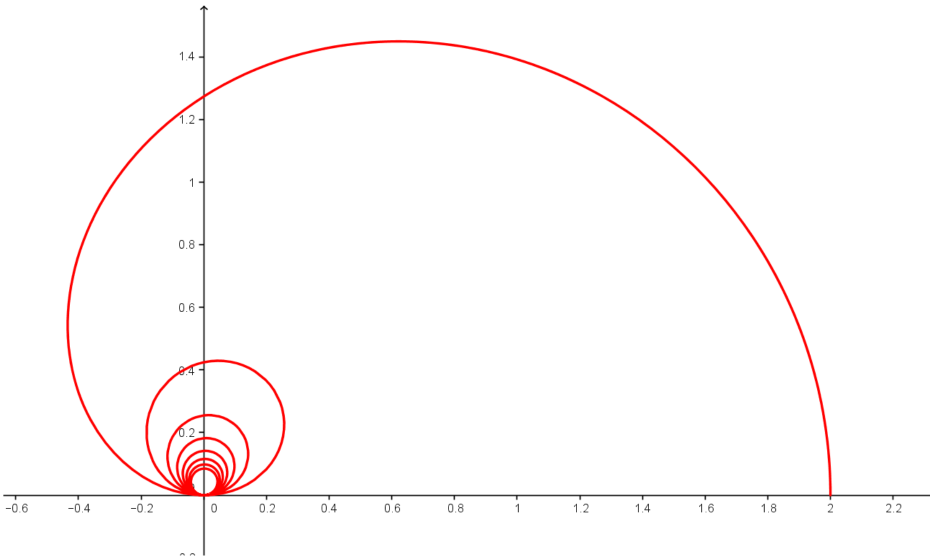
Kohleoida je krivulja s polžasto obliko. V polarnem koordinatnem sistemu je enačba kohleoide [37]

$$r = \frac{a \sin\theta}{\theta}.$$

Parametrična oblika enačbe kohleoide je

$$x = \frac{a \sin t \cos t}{t},$$

$$y = \frac{a \sin^2 t}{t}.$$



Slika 37: Kohleoida z a=1.

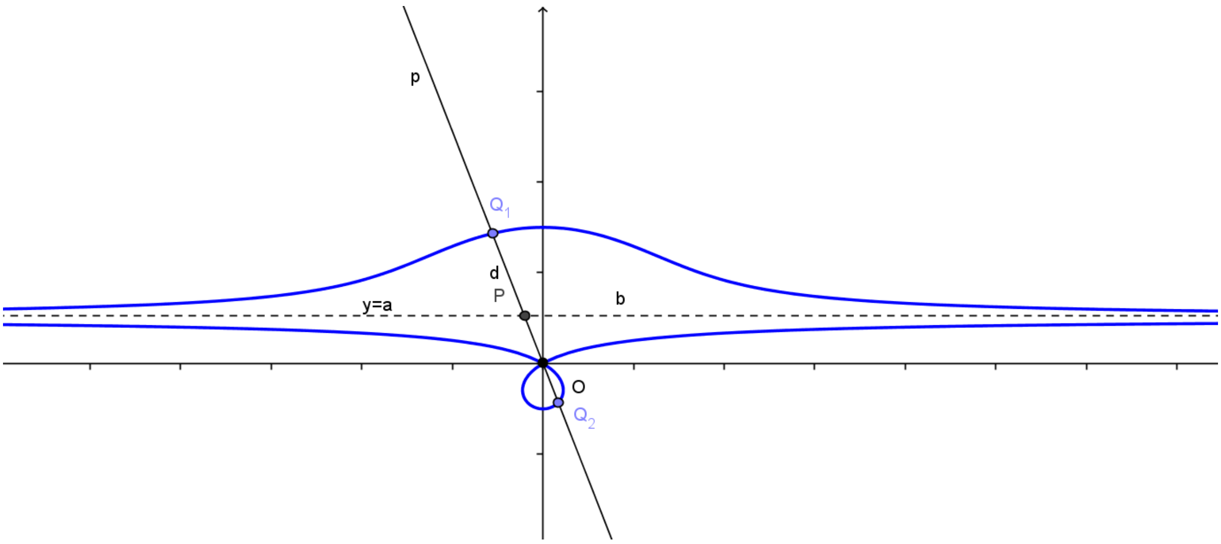
Konhoida:

gr. κόγχη – školjka + ειδής – v obliki

V grščini beremo γγ, γκ, γχ, γξ kot ng, nk, nh, nks.

Nikomedova konhoida (v nadaljevanju konhoida) je krivulja, ki je znana že iz antičnih časov. Odkrili so jo, ker so z njo hoteli rešiti problem tretjinjenja kota.

Naj bo b dana premica in O točka, ki je za $a > 0$ oddaljena od premice b. Konhoida z osnovnico b in polom O je geometrijsko mesto vseh tistih točk Q v ravnini premice b in točke O, ki so za v naprej dano razdaljo d oddaljene od presečišč vseh premic p skozi O s premico b. Pol O privzamemo h konhoidi. [5]



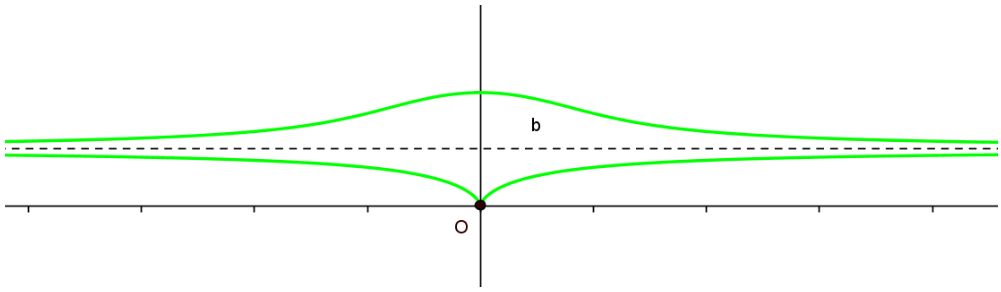
Slika 38: Nikomedova konhoida za d>a.

Koordinati sistem naj ima izhodišče v polu O konhoide, osnovnica b naj bo vzporedna z osjo x. Enačba premice naj bo $y = a$. Premica p skozi O naj seka osnovnico v točki $P(t, a)$. Njena enačba je $ax - ty = 0$. Krožnica s polmerom d in s središčem v P ima enačbo

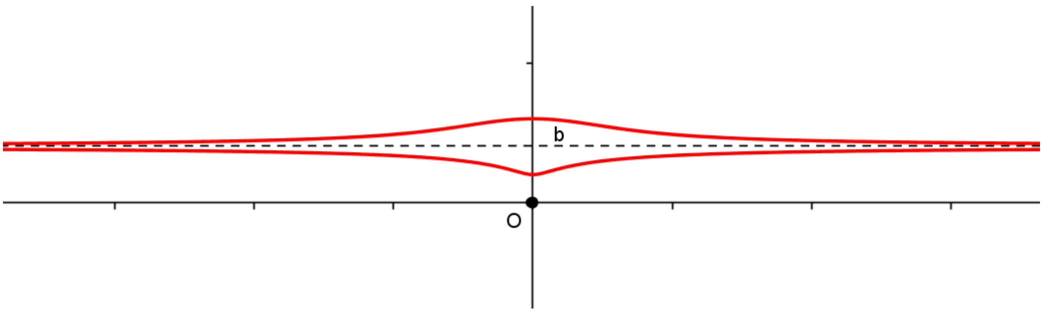
$$(x - t)^2 + (y - a)^2 - d^2 = 0.$$

Točki $Q_{1,2}$ konhoide sta presečišči te krožnice in premice p. Enačba konhoide se potem glasi

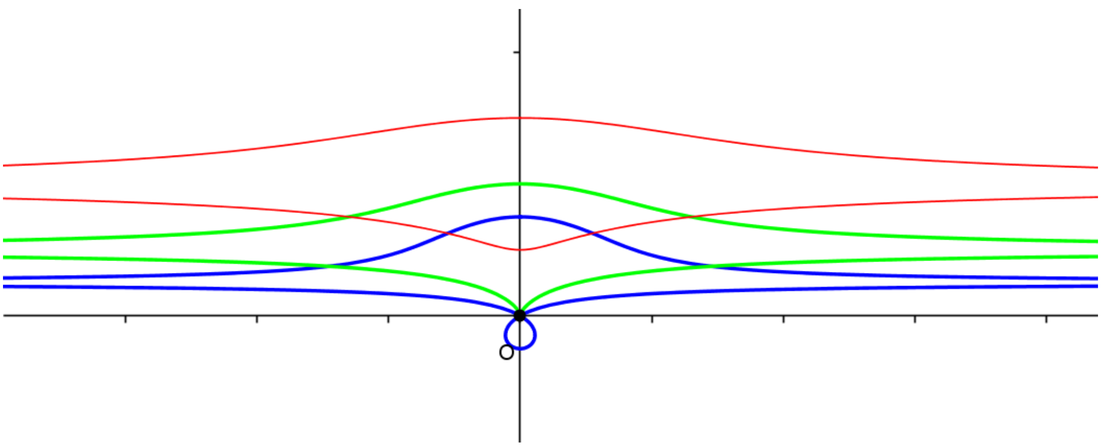
$$(y-a)^2(x^2+y^2)-d^2y^2=0.$$



Slika 39: Nikomedova konhoida za d=a.



Slika 40: Nikomedova konhoida za d<a.



Slika 41: Nikomedova konhoida.

Parametrična oblika konhoide pa je

$$x = a \tan\theta \pm d \sin\theta,$$

$$y = a \pm d \cos\theta.$$

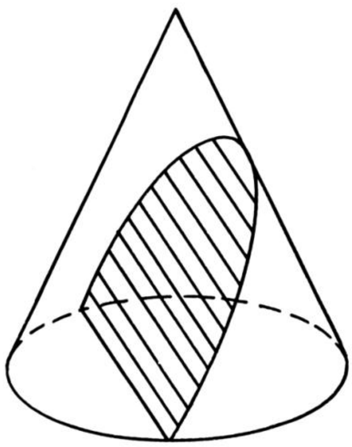
Pri tem je θ kot med premico p in pravokotnico na b skozi pol O.

P

Parabola:

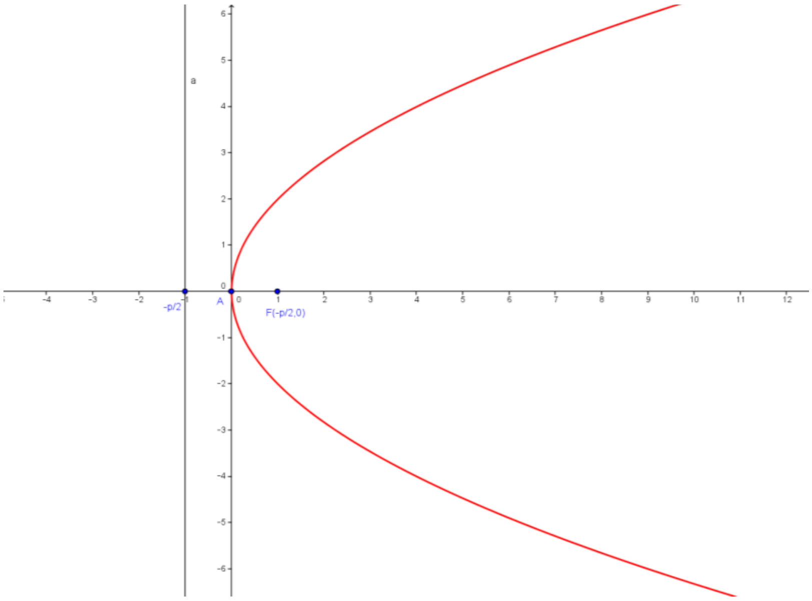
gr. παραβολή – prilika, primera, zgled, moder izrek, pregovor iz gr. παρά - od, ob, mimo, pri + gr. βάλλω - mečem

Parabolo štejemo med algebrske krivulje 2. reda,to pomeni med stožnice. Krivuljo dobimo, če presekamo stožec s presečno ravnino, katere naklonski kot proti osnovni ploskvi je enak naklonskemu kotu med stranico stožca in osnovno ploskvijo.



Slika 42: Stožec, pri katerem dobimo parabolo. [61]

Parabola je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od izbrane točke (gorišče) in od izbrane premice vodnice.



Slika 43: Parabola.

Točka A predstavlja teme parabole, ki je najbližja vodnici. Gorišče parabole označimo s točko $F(^p/_2, 0)$, vodnico pa označimo s črko a. Razdaljo med vodnico a do gorišča F označimo s črko p. Tako dobimo enačbo premice vodnice, ki se glasi

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Enačba parabole, ki ima teme v izhodišču koordinatnega sistema in je simetrična glede na abscisno os, imenujemo temenska enačba parabole. Zapišemo jo v obliki

$$y^2 = 2px.$$

Parabolo lahko v koordinatnem sistemu premaknemo za poljubni vektor $\vec{v} = (x_{0,}y_0)$. [4], [5], [6], [15], [16], [17]

Tako dobimo enačbo premaknjene parabole:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Če za središče inverzije izberemo teme parabole, dobimo Dioklesovo cisoido.

S

Spirala:

gr. σπεῖρα – kar je spleteno, zanka, mreža, vrv, ovinek

Spirala je v matematiki krivulja, ki se v zavojih približuje ali oddaljuje od središčne točke, kar je odvisno od smeri, v kateri sledimo krivulji. Navadno je njen opis najpripravnejša polarna oblika

$$\rho = r(\varphi),$$

kjer je r neka primerna realna funkcija.

Med spirale uvrščamo več različnih krivulj, kot so na primer: Arhimedova spirala, hiperbolična spirala, logaritemska spirala, Fermatova spirala … [5], [44]

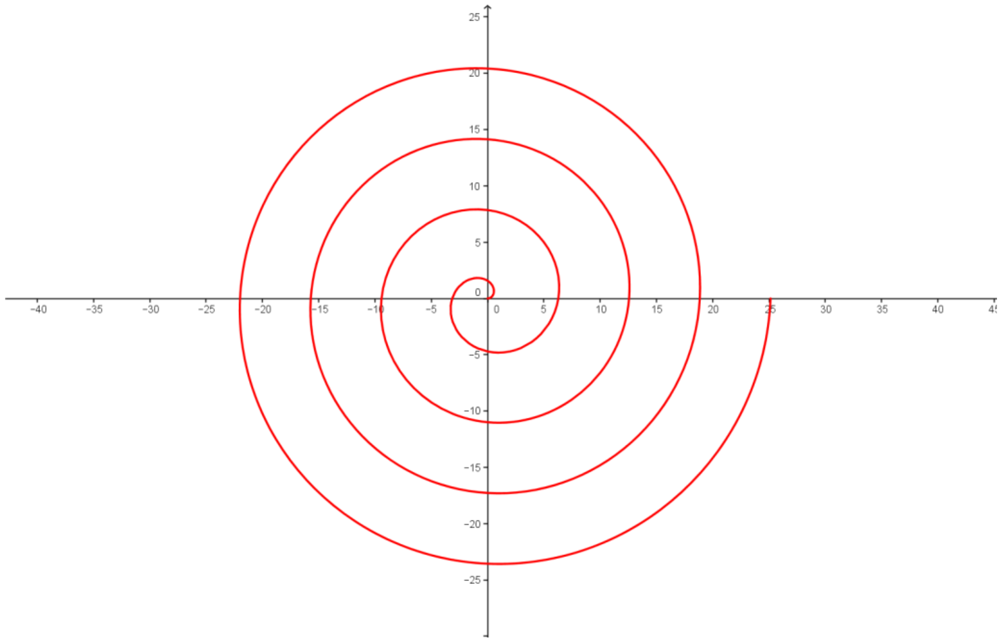
Arhimedova spirala:

gr. σπεῖρα τοῦ Ἀρχιμήδους

Arhimedova spirala, ki ji rečemo tudi aritmetična spirala, je sled točke, ki se giblje s konstantno hitrostjo vzdolž premice, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo okrog fiksne točke. Enačba Arhimedove spirale v polarnih koordinatah je

$$\rho = a\varphi,$$

kjer je a neka pozitivna konstanta. Koeficient a v enačbi Arhimedove spirale pomeni, kako hitro se z rastočim polarnim kotom φ veča polarni radij ρ. Spirala se imenuje po starogrškem matematiku, fiziku, mehaniku, izumitelju, inženirju in astronomu Arhimedu. Arhimed se je že ukvarjal s tangento na svojo spiralo in ploščinami likov, ki jih ta omejuje, povezal jo je tudi s kvadraturo kroga in tretjinjenjem kota. [5], [45]



Slika 44: Arhimedova spirala.

Hiperbolična spirala:

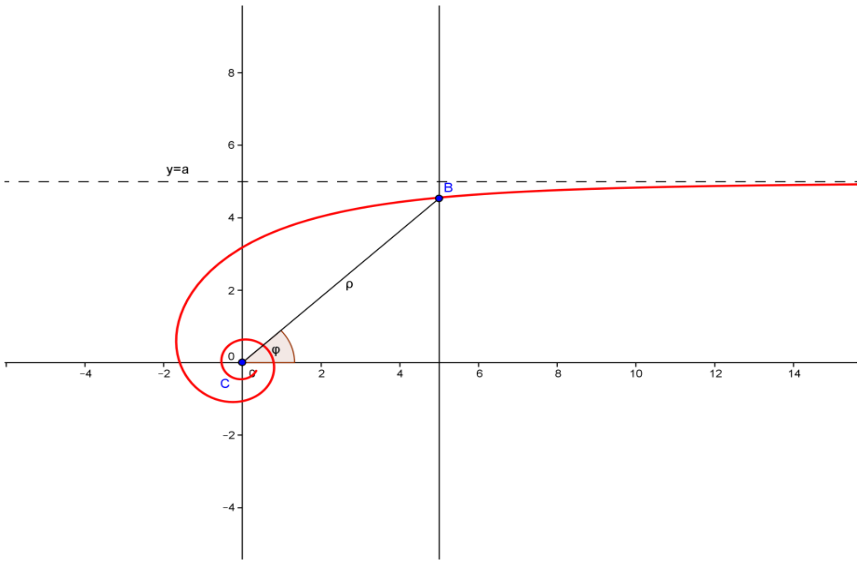
gr. ὑπερβολικῆς σπεῖρα

Hiperbolična spirala ali obratna spirala je transcendentna ravninska krivulja. Dobimo jo, če projiciramo vijačnico iz neke točke na njeni osi na ravnino, ki je pravokotna na to os.

V polarnih koordinatah ima spirala enačbo

$$\rho = \frac{a}{\varphi},$$

kjer je a pozitivna konstanta. Poudarek bomo dali samo na primer, ko je polarni kot φ pozitiven. Hiperbolično spiralo lahko dobimo tudi z zrcaljenjem Arhimedove spirale na krožnici s središčem v polu O polarnega koordinatnega sistema. Točka O je za hiperbolično spiralo asimetrična, kar pomeni, da se krivulja okrog nje neprestano ovija in se ji približa poljubno blizu.



Slika 45: Hiperbolična spirala.

V parametrični obliki pa je hiperbolična spirala podana z enačbama

$$x = a\frac{\cos t}{t},$$

$$y = a\frac{\sin t}{t},$$

kjer je parameter t ekvivalenten polarni koordinati φ. [5], [49]

Fermatova spirala:

gr. σπεῖρα τοῦ Φερμά

Fermatova ali parabolična spirala je ravninska krivulja, ki jo je leta 1636 raziskoval Pierre de Fermat. Obratna krivulja Fermatovi spirali je litus.

V polarni koordinatah Fermatova spirala je določena z

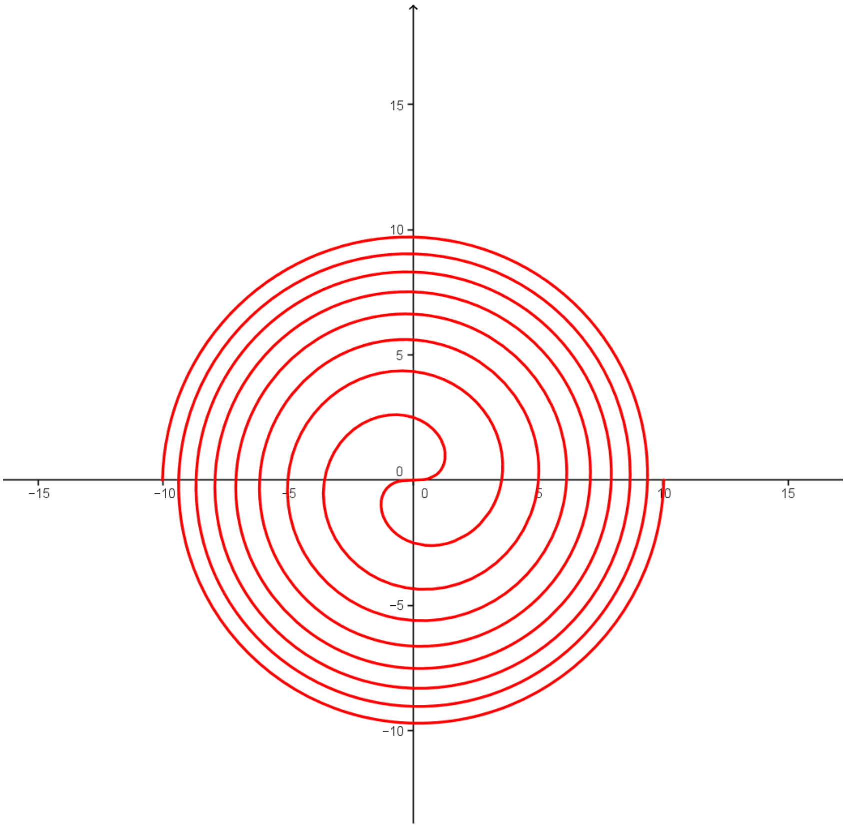
$$\rho^2 = a^2\varphi.$$

Parametrična oblika enačbe Fermatove spirale pa je

$$x = \pm a\sqrt{t}\cos t,$$
$$y = \pm a\sqrt{t}\sin t,$$

kjer je $t \in \mathbb{R}^+$.

Njeni zavoji si postajajo z rastočim φ vedno bliže. Za poljuben pozitiven φ obstajajo dve vrednosti ρ z različnima predznakoma. Krivulja je simetrična glede na koordinatno izhodišče. [5], [48]

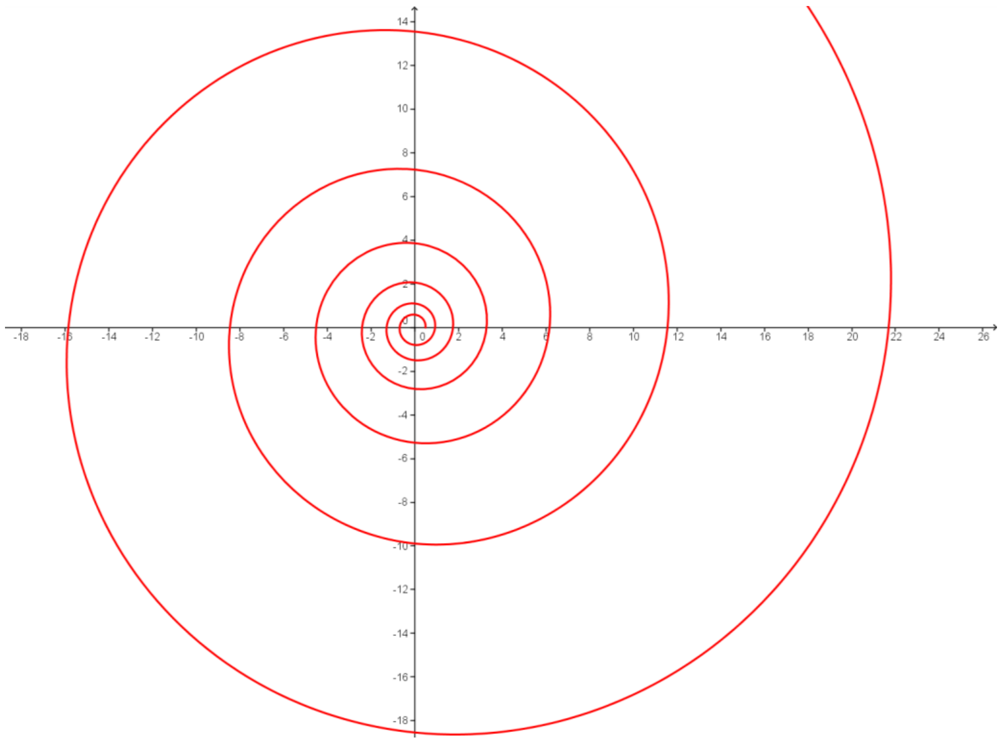


Slika 46: Fermatova spirala.

Logaritemska spirala:

gr. σπεῖρα + gr. λόγος – beseda, govor + gr. ἀριθμός - število

Prav tako zanimiva kot Arhimedova je tudi logaritemska spirala, ki je enakokotna spirala in spirala rasti. Ta spirala se pogosto pojavlja v naravi. Prvi jo je opisal francoski filozof, matematik, fizik, učenjak in častnik René Desscartes (1596-1650).



Slika 47: Logaritemska spirala.

Njena enačba v polarnih koordinatah je

$$\rho = a\, e^{b\varphi}.$$

Pri tem je a pozitivna, b pa poljubna realna konstanta. Če je b pozitivna konstanta, potem polarni radij ρ z rastočim kotom φ raste, pri negativnem b pa pada. Spirala je enkrat levosučna, enkrat desnosučna, pri dveh nasprotno predznačenih b in istem a sta si spirali simetrični glede polarno os. [5], [50]

Ta spirala seka svoje radijvektorje pod stalnim kotom. Zato ji rečemo tudi enakokotna spirala.

Strofoida:

gr. στροφή – obrat + gr. ειδής – v obliki

Strofoida je ravninska algebrska krivulja 3. reda. Zapisana je z enačbo

$$y^2(a-x)-(a+x)x^2=0,$$

kjer je a pozitivna konstanta.

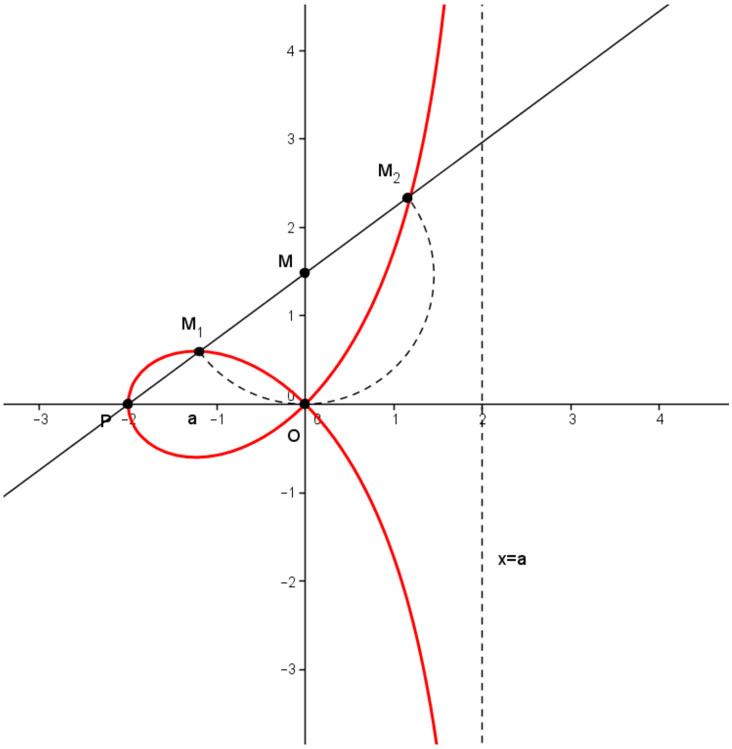
Strofoida je simetrična glede na abscisno os in ima navpično asimptoto $x=a$. Singularna točka strofoide je $O(0,0)$, ki tam seka sama sebe pod pravim kotom.

Strofoido parametriziramo, če vstavimo v njeno enačbo $y=tx$ in dobimo

$$x=\frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$$
$$y=\frac{at(t^2-1)}{t^2+1}\,.$$

Izberemo si točko $P(-a, 0)$ skozi katero potegnemo poljubno premico $y = k(x + a)$. Zaradi simetrije strofoide je smerni koeficient k lahko pozitiven ali nič. Poljubna premica seka strofoido razen v točki P še v dveh točkah M_1 in M_2.

Razdalja točk M_1 in M_2 od točke M enaka razdalji točke M od koordinatnega izhodišča O. To je značilna lastnost strofoide, kar omogoča opazovanje te krivulje tudi z računalniškimi programi za dinamično geometrijo. Očitno posameznih točk M strofoide ni težko konstruirati. Za spremenljivo točko izberemo M. [5]



Slika 48: Strofoida.

V polarnih koordinatah (ρ, θ) je določena z:

$$\rho = -a\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}.$$

Ploščina zanke strofoide je:

$$p = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2},$$

ploščina med strofoido in njeno asimptoto (brez zanke) pa je:

$$p = 2a^2 + \frac{\pi a^2}{2}.$$

Tudi strofoida je povezana s parabolo, podobno kot cisoida. Strofoida je namreč nožiščna krivulja parabole glede na presečišče njene simetrale in vodnice.

Nožiščna krivulja dane krivulje glede na pol P je množica pravokotnih projekcij ali nožišč pola P na tangente krivulje.

3 ZAKLJUČEK

V diplomskem delu sem poskušala zajeti čim več krivulj, katerih imena so grškega izvora, in z njimi povezane matematike. Večji del naloge ima obliko slovarja, krivulje pa sem za lažjo predstavo narisala tudi v programu GeoGebra.

Med iskanjem literature in prebiranjem le-te sem izvedela veliko o grških matematikih in z njimi povezanimi krivuljami, ki sem jih v nalogi obravnavala. Seznanila sem se s tem, kje so matematiki živeli in študirali, kaj so odkrili, dokazali itd. Ugotovila sem, da veliko idej, trditev in izrekov izhaja prav iz grške matematike. Značilnost grških matematikov pa je bila, da so v središče postavili logično sklepanje in dokaze.

Med zbiranjem ravninskih krivulj, katerih imena so grškega izvora, sem ugotovila, kakšna je njena zgodovina oz. kako posamezna krivulja nastane. Moje diplomsko delo opozarja na povezavo nekaterih krivulj med seboj in podobnosti med njimi. Opisala sem nekatere algebrske krivulje druge stopnje, kot so parabola, elipsa in hiperbola. Posvetila sem se še algebrskim krivuljam tretje stopnje, kjer sem vzela za primer strofoido, in četrte stopnje kamor spadata hipopeda in kardioida. Osredotočila sem se tudi na krivulje s spremenljivimi stopnjami, kjer sem opisala epicikloido, epitrohoido, hipocikloido, hipotrohoido in podobne. V diplomi sem zajela tudi transcendentne krivulje, kot so cikloida, kohleoida, spirala, Arhimedova spirala, hiperbolična spirala, Fermatova spirala in logaritemska spirala.

Vsebino, ki zajema moje diplomsko delo, lahko uporabimo v osnovni, predvsem pa v srednji šoli. Učencem oz. dijakom lahko pokažemo, kako nastane določena krivulja, kako zgleda in kaj je zanjo značilno. Za lažjo predstavo in obenem popestritev jim krivuljo lahko narišemo še v matematičnem računalniškem programu GeoGebra. Tako bodo učenci lahko spoznali še enostaven matematični program za risanje krivulj, likov in podobnega.

4 LITERATURA IN VIRI

[1] A. DOKLER: *Grško-slovenski slovar*, Ponatis, Ljubljana, Cankarjeva založba 1999

[2] D. NELSON: *The penguin dictionary of mathematics,* 2. izd., Penguin Books, 1998

[3] S. SCHWARTZMAN: *The Words of Mathematics,* The Mathematical Association of America, 1994

[4] M. RUGELJ, J. ŠPAROVEC., D. KAVKA, G. PAVLIČ: *Spatium – prostor, Matematika za 3. letnik gimnazij,* 4.izd., Ljubljana, Modrijan, 2006

[5] M. RAZPET: *Ravninske krivulje,* Ljubljana, DMFA Slovenije, 1998

[6] F. KRIŽANIČ: *Matematika 2,* Ljubljana, DZS, 1985

[7] F. KRIŽANIČ: *Matematika 3,* Ljubljana, DZS, 1983

[8] D. J. STRUIK: *Kratka zgodovina matematike,* Ljubljana, DMFA Slovenije, 1986

[9] V. DEVIDÉ: *Matematika skozi kulture in epohe,* Ljubljana, DMFA Slovenije, 1984

[10] Hiperbola,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Hiperbola (24. 1. 2013)

[11] Hiperbola,
http://scp.s-scptuj.mb.edus.si/~zoli/projekt/Hiperbola.html (24. 1. 2013)

[12] Hiperbola,
http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/k2r.html (24. 1. 2013)

[13] Elipsa,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Elipsa (24. 1. 2013)

[14] Elipsa,
http://scp.s-scptuj.mb.edus.si/~zoli/projekt/Elipsa.html (24. 1. 2013)

[15] Parabola,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Parabola (28. 1. 2013)

[16] Parabola,
http://scp.s-scptuj.mb.edus.si/~zoli/projekt/Parabola.html (28. 1. 2013)

[17] Parabola,
http://www.gimnazija-siska.si/mat/stoznice/razlaga/parabola.htm (28. 1. 2013)

[18] Cikloida,
http://www.e-studij.si/Cikloida (28. 1. 2013)

[19] Cikloida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Cikloida (28. 1. 2013)

[20] Cikloida,
http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2003/ura/monika/html/krivulje.html (28. 1. 2013)

[21] Cikloida,
http://gklt.blogspot.com/2012_06_01_archive.html (28. 1. 2013)

[22] Trohoida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Trohoida (28. 1. 2013)

[23] Epicikloida,
http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2003/ura/monika/html/krivulje.html (28. 1. 2013)

[24] Epicikloida,
http://www.e-studij.si/Epicikloida (28. 1. 2013)

[25] Epicikloida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Epicikloida (28. 1. 2013)

[26] Epitrohoida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Epitrohoida (28. 1. 2013)

[27] Hipocikloida,
http://www.e-studij.si/Hipocikloida (28. 1. 2013)

[28] Hipocikloida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Hipocikloida (28. 1. 2013)

[29] Hipotrohoida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Hipotrohoida (28. 1. 2013)

[30] Kardioida,
http://pl.wikipedia.org/wiki/Kardioida (28. 1. 2013)

[31] Kardioida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Sr%C4%8Dnica (28. 1. 2013)

[32] Astroida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Astroida (30. 1. 2013)

[33] Strofoida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Strofoida (19. 2. 2013)

[34] Tavtohhrona krivulja,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Tavtohrona_krivulja (19. 2. 2013)

[35] Cikloidno nihalo,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Slika:Moglfm1325_pendulo_cicloidal.jpg (19. 2. 2013)

[36] Konhoida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Konhoida (19. 2. 2013)

[37] Kohleoida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Kohleoida (19. 2. 2013)

[38] Hipopeda,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Hipopeda (19. 2. 2013)

[39] Bernoullijeva lemniskata,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Bernoullijeva_lemniskata (19. 2. 2013)

[40] Jakob Bernoulli,
http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2003/ura/monika/html/bernoulli-ja.htm
(20. 2. 2013)

[41] Jakob Bernoulli,
http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2003/ura/monika/html/resitev3.html (20. 2. 2013)

[42] Jakob Bernoulli,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli_I. (20. 2. 2013)

[43] Nefroida,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Nefroida (19. 2. 2013)

[44] Spirala,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Spirala (21. 2. 2013)

[45] Arhimedova spirala,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Arhimedova_spirala (21. 2. 2013)

[46] Arhimed,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Arhimed (21. 2. 2013)

[47] Arhimed,
http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2001/ura/jelovcan/Arhimed.htm (21. 2. 2013)

[48] Fermatova spirala,
http://sl.wikipedia.org/wiki/Fermatova_spirala (25. 2. 2013)

[49] Hiperbolična spirala,

http://sl.wikipedia.org/wiki/Hiperboli%C4%8Dna_spirala (25. 2. 2013)

[50] Logaritemska spirala,

http://sl.wikipedia.org/wiki/Logaritemska_spirala (25. 2. 2013)

[51] René Descartes,

http://sl.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes) (25. 2. 2013)

[52] Diokles,

http://www.pef.uni-lj.si/matwww/Cisoida.pdf (25. 2. 2013)

[53] Arhimed, Aristotel, Pitagora, Tales,

http://projekti.gimvic.org/2001/matematika/index.htm (26. 2. 2013)

[54] Pitagora,

http://sl.wikipedia.org/wiki/Pitagora (26. 2. 2013)

[55] Aristotel,

http://sl.wikipedia.org/wiki/Aristotel (26. 2. 2013)

[56] Arhimed,

http://sl.wikipedia.org/wiki/Arhimed (26. 2. 2013)

[57] Tales,

http://sl.wikipedia.org/wiki/Tales (26. 2. 2013)

[58] Tales,

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/t/fotos/tales.jpg (26. 2. 2013)

[59] Elipsa,

http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2003/ura/anja/elipsa/stoznica1.bmp (24. 1. 2013)

[60] Hipopeda,

http://www.pef.uni-lj.si/matwww/Hipopeda.pdf (19. 2. 2013)

[61] Parabola,

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Parabola_(PSF).png (28. 1. 2013)