EEN PAK MET EEN KORTE BROEK

PAPERS PRESENTED TO

H.W. LENSTRA, JR.

ON THE OCCASION OF THE PUBLICATION OF HIS
"EUCLIDISCHE GETALLENLICHAMEN"

EDITED BY

P. VAN EMDE BOAS
J.K. LENSTRA
F. OORT
A.H.G. RINNOOY KAN
T.J. WANSBEEK

AMSTERDAM, MAY 18, 1977

EEN PAK MET EEN KORTE BROEK

HENDRIK WILLEM LENSTRA JUNIOR

"Your pictures are not unlike you, sir,
if I may say so."

A. Conan Doyle
The Adventure of the Three Garridebs

A

EEN PAK MET EEN KORTE BROEK

PAPERS PRESENTED TO

H.W. LENSTRA, JR.

ON THE OCCASION OF THE PUBLICATION OF HIS
"EUCLIDISCHE GETALLENLICHAMEN"

EDITED BY

P. VAN EMDE BOAS
J.K. LENSTRA
F. OORT
A.H.G. RINNOOY KAN
T.J. WANSBEEK

AMSTERDAM, MAY 18, 1977

PREFACE

At first, only a few of us knew. Some may have guessed when for the first time in years he asked for family addresses in order to distribute Easter cards. Others may have noticed the unusually high frequency of his contacts with those whose knowledge and experience in matters of taste and typography were required, or his increasing awareness of career paths in academia.

In any case, the news of Hendrik W. Lenstra, Jr.'s impending elevation to doctoral status came to all of us as a relief more than anything else. In celebrating this, we rejoice as in the long awaited arrival of a tenth-month baby.

It was in Hendrik's own spirit of grudging surrender to academic tradition that we set out on project LABEL. As editors of this polygraph, we consider ourselves fortunate to have found these feelings shared by so many of his friends and relatives. We are grateful to all those who have contributed and feel confident that they will be amply rewarded by receiving a free copy.

With respect to the technical realization of this book, particular gratitude is due to Professor P.C. Baayen for some essential efforts, Tobias Baanders for his picture of Hendrik's shorts, Messrs. D. Zwarst, J. Suiker, J. Schipper, E.A. Michel and J.W. van der Werf for the printing, and the Typographical Consulting Group "Oosterpark" for the general supervision.

Peter van Emde Boas
Jan Karel Lenstra
Frans Oort
Alexander Rinnooy Kan
Tom Wansbeek

ZIJN LEVEN

He was, I take it, the most perfect
reasoning and observing machine
that the world has seen:
but, as a lover, he would have
placed himself in a false position.

A. Conan Doyle
A Scandal in Bohemia

Een pak met een korte broek - netjes, maar ongezond. Hendrik, doctor in de wiskunde, maar hij heeft kou gevat. Zie daar, lezer, de twee determinanten van zijn bestaan.

Hendriks kleutertijd heeft maar kort geduurd. Nauwelijks vijf jaar oud werd hij, op aandringen van zijn toen 72-jarige oudoom, naar de tweede klas der lagere school te Drachten gestuurd, om de door kinderziekte van één zijner broers opengevallen plaats tijdelijk te bezetten. Het ging prima. Vooral met de sommen had hij niet de minste moeite. Ja, de meester heeft nooit geweten dat hij Hendrik en niet zijn wiskundig toen al markant geprofileerde broer Jan Karel voor zich had. Dat Hendrik, enthousiast begonnen op de bovenste regel van het ruitjespapier, er niet in slaagde de stok van de "zes" op het blad te krijgen is de enige schaduw die over dit aardige voorval wordt geworpen. De nu 95-jarige oom Jan is Hendrik overigens niet vergeten, zoals moge blijken uit zijn in deze bundel opgenomen "Mijn beste jonge docter".

Kort na deze valse start werd het ernst. Een 22-jarige periode van opleiding en studie, waarvan wij vandaag de afsluiting feestelijk vieren, ving aan. Door de bank genomen hebben Hendriks prestaties reden tot tevredenheid gegeven. Alleen in het begin hebben zich een paar nare incidenten voorgedaan. Zo heeft juffrouw Pot Hendrik eens een dag van school moeten sturen toen hij hardop "poep" had gezegd. Eerder al had dezelfde juffrouw Pot contact opgenomen met Hendriks vader en moeder wegens zijn teleurstellende resultaten in het rekenen. Tot grote opluchting van zijn ouders bleek het meegebrachte schrift dat van zijn klasgenoot H.W. *Labbers* Jr. te zijn. Eind goed al goed: Hendrik werd meteen een klas hoger geplaatst. Dat Labbers het incident sportief heeft opgevat, moge blijken uit zijn spontane reactie toen wij hem vroegen aan deze bundel een bijdrage te leveren.

Fysiek heeft Hendrik nooit tot de sterksten behoord. De basis voor zijn huidige constitutie werd al vroeg gelegd. Als kind at hij rauwe slakken. Voorts herinneren wij ons de wijze waarop de kleine Hendrik met zijn grotere broer Hans hun toenmalige woonplaats Drachten verkende. Eerst nam Hendrik de autoped en Hans holde er achteraan; daarna ging Hans lopen terwijl Hendrik de autoped mocht hebben. Een hondebeet op jeugdige leeftijd heeft hem ook geen goed gedaan. In zijn eigen woorden: "Ooit ben ik door een hond gebeten. Mijn redding mag een wonder heten." Zes weken "Zwartendijk" brachten geen verbetering in zijn ongezonde uiterlijk. Tot op de dag van vandaag gaat hij gekleed in drie lagen leder. Dat moet van de dokter.

Zijn lichamelijke handicap heeft een verdere intellectuele ontplooiing niet in de weg gestaan. Gedreven door een onverzadigbare nieuwsgierigheid verkende zijn flexibele geest een breed terrein. De monomanie die zo typerend is voor de geboren mathematicus ontbrak hem volkomen. Het heeft maar weinig gescheeld, of Hendrik was terecht gekomen in het bedrijfsleven; zijn gedegen maatschappelijke opstelling was hem daarbij goed van pas gekomen. Zijn gevatte slagzinnen voorzagen in een gevoelde behoefte. Al heeft "Saroma Is De Hoofdstad Van Luilekkerland" de media niet gehaald, zijn "Nee Dus, Ja-Min Is Plus, Niet Min" bezorgde hem een tegoedbon van vijf gulden. Ook Jonker Fris was lang niet mis: een gratis kindermiddag in de Groningse Harmonie.

De definitieve keuze voor een carrière in de wiskunde werd pas in de puberteit gemaakt. Nog steeds bevindt Hendrik zich wèl bij deze combinatie. Nu wij het gereedkomen van zijn dissertatie vieren, staan wij, zonder aanspraak op volledigheid, graag even stil bij enige hoogtepunten op zijn weg naar de wiskundige wasdom. Wij noemen een onverwachte tweede plaats bij de Wiskunde Olympiade, drie tienen voor wiskunde op het eindexamen, lof voor het kandidaatsexamen, en een best doctoraal.

Tenslotte een blik vooruit. Wij zijn ervan overtuigd dat Hendrik na vandaag niet op zijn lauweren gaat rusten. Het hoogtepunt dat de "Getallenlichamen" voor hem betekent zal op zijn beurt weer worden overtroffen door een volgende top. Als Hendrik de door de wet voorgeschreven levenservaring zal hebben opgedaan, ligt er misschien wel een hoog ambt in het verschiet! Zijn gemakkelijke omgang met anderen staat er borg voor dat deze voorwaarde geen hinderpaal hoeft te zijn. Ondanks zijn zwakke gestel beweegt hij zich vlot en maakt hij vele vrienden. Zo introduceerde hij in huize Lenstra Ernst Roscam Abbing, Peter van Emde Boas, Tom Wansbeek, Eduard Looijenga, Alexander Rinnooy Kan; nodeloos te zeggen dat ook zij deze gelegenheid hebben aangewend om van hun gevoelens jegens Hendrik in ruime kring te laten blijken.

Hendrik, moge je "sabattical" in Parijs je de rust geven om na je terugkeer opnieuw een stuk belofte in te lossen!

ZIJN WERK

"Is he not the celebrated author of
Euclidean Number Bodies -
a book which ascends to such
rarefied heights of pure mathematics
that it is said that there was
no man in the scientific press
capable of criticizing it?"

Naar A. Conan Doyle
The Valley of Fear

P. V. EMDE BOAS, H.W. LENSTRA (1969) A transfinite generalisation of a combinatorial problem on Abelian groups. Rapport WN-29, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

(1970) Aantal oplossingen van vergelijkingen in eindige lichamen. Hoofdstuk I in: Notities Colloquium Jager-Oort, Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam.

H.W. LENSTRA, N.J.P. OOTES (1971) Eindige groepenschema's. Hoofdstuk I in: F. OORT, P.S. STOBBE (red.) Seminarium over abelse variëteiten. Rapport ZC 85/71, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H.W. LENSTRA, JR. (1972) Two theorems on perfect codes. *Discrete Math.* 3, 125-132.

H.W. LENSTRA JR (1972) Rational functions invariant under a finite abelian group. Report 72-02, Department of Mathematics, University of Amsterdam.

H.W. LENSTRA JR., PROF.DR. F. OORT (1972) Galoistheorie. Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam.

H.W. LENSTRA, JR. (1973) De kleinste algoritme van enkele euclidische ringen. Doctoraalscriptie, Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam.

H.W. LENSTRA JR., F. OORT (1973) Simple abelian varieties having a prescribed formal isogeny type. Report 73-02, Department of Mathematics, University of Amsterdam.

P. VAN EMDE BOAS, H.W. LENSTRA, JR. (1973) Bases for Boolean rings. Report 73-05, Department of Mathematics, University of Amsterdam.

A.E. BROUWER, H.W. LENSTRA JR. (1973) Multiplicative division algorithms on the integers. Rapport ZN 54/73, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H.W. LENSTRA, JR (1973) The acyclic subgraph problem. Rapport BW 26/73, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

W. KUIJK (±1973) Solutions complètes au problèmes d'E. Noether (cas abélien) [d'après H.W. Lenstra, jr.]. Antwerpen.

HENDRIK W. LENSTRA JR., FRANS OORT (1974) Simple abelian varieties having a prescribed formal isogeny type. *J. Pure Appl. Algebra* 4, 47-53.

H.W. LENSTRA, JR. (1974) Rational functions invariant under a finite abelian group. *Invent. Math.* 25, 299-325.

H.W. LENSTRA JR. (1974) Euclid's algorithm in cyclotomic fields. Report 74-01, Department of Mathematics, University of Amsterdam.

H.W. LENSTRA, JR. (1974) Lectures on euclidean rings. Bielefeld.

M. BEST, P. VAN EMDE BOAS, H.W. LENSTRA JR. (1974) A sharpened version of the Aanderaa-Rosenberg conjecture. Rapport ZW 30/74, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H.W. LENSTRA JR. (1974) Eindige lichamen. In: Vakantiecursus 1974: Algebraische vergelijkingen. Rapport VC 28/74, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

D. BARSKY (1974) Erratum à l'article "Sur les systèmes complets de restes modulo les ideaux d'un corps de nombres". *Acta Arith.* 26, 115-116.

M. KERVAIRE (1975) Fractions rationnelles invariantes [d'après H.W. Lenstra], Séminaire Bourbaki, Exposé 445. In: *Séminaire Bourbaki, Vol. 1973/74: Exposés 436-452.* Lecture Notes in Mathematics 431, Springer, Berlijn.

W. KUIJK, H.W. LENSTRA, JR. (1975) Abelian extensions of arbitrary fields. *Math. Ann.* 216, 99-104.

H. JAGER, H.W. LENSTRA JR. (1975) Linear independence of cosecant values. *Nieuw Arch. Wisk.* 23, 131-144.

H.W. LENSTRA, JR. (1975) Euclid's algorithm in cyclotomic fields. *J. London Math. Soc.* (2) 10, 457-465.

H.W. LENSTRA JR. (1975) Arithmetische codes. In: Studieweek inleiding in de coderingstheorie. Rapport ZC 87/75, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H.W. LENSTRA, JR. (1975) Necessary conditions for the existence of perfect Lee codes. Rapport ZN 59-75, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H.W. LENSTRA JR. (1976) Arithmetische codes. In: J.H. VAN LINT (red.) *Inleiding in de Coderingstheorie*. MC Syllabus 31, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H.W. LENSTRA, JR. (1976) Euclidean number fields of large degree. Report 76-09, Department of Mathematics, University of Amsterdam.

H.W. LENSTRA, JR. (1976) K_2 of a global field consists of symbols. In: M.R. STEIN (ed.) *Algebraic K-Theory; Proceedings of the Conference Held at Northwestern University, Evanston, January 12-16, 1976*. Lecture Notes in Mathematics 551, Springer, Berlijn.

W.G. VALIANT (1976) A(14,6,7) < 52 or the nonexistence of a certain constant weight code. Rapport ZW 71/76, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

A.H.G. RINNOOY KAN (1976) *Machine Scheduling Problems: Classification, Complexity and Computations*. Nijhoff, The Hague.

E.L. LAWLER, H.W. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, T.J. WANSBEEK (eds.) (1976) *Een Tuyltje Boskruyd: Essays in Honor of Dr J.-K. Lenstra*. Paris/Amsterdam/Delft/Leyden.

H.W. LENSTRA II (1976) A short proof that P equals NP. In: E.L. LAWLER, H.W. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, T.J. WANSBEEK (eds.) *Een Tuyltje Boskruyd: Essays in Honor of Dr J.-K. Lenstra*. Paris/Amsterdam/Delft/Leyden.

H.W. LENSTRA, JR. (1977) On Artin's conjecture and Euclid's algorithm in global fields. Report 77-03, Department of Mathematics, University of Amsterdam.

HENDRIK WILLEM LENSTRA (1977) *Euclidische Getallenlichamen*. Academisch Proefschrift, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H.W. LENSTRA JR. (1977) Euclidische getallenlichamen. Rapport ZN 73/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H.W. LENSTRA, JR. (1977) Euclidean number fields of large degree. *Invent. Math.*, te verschijnen.

H.W. LENSTRA, JR. (1977) On the algebraic closure of two. Aangeboden aan *Indag. Math.*

H.W. LENSTRA, JR. ($\geq$1977) Perfect arithmetic codes of order one. In voorbereiding.

ZIJN VRIENDEN

"A singular set of people, Watson..."

A. Conan Doyle
The Adventure of Wisteria Lodge

LIST OF CONTRIBUTIONS

HOSIA W. LABBERS, JR., Een Speciaal Geval Van De Stelling Van Dirichlet.

B.J. LAGEWEG, J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, Open problems.

G. LAMAN, Op zoek naar de vijfde cylinder.

E.L. LAWLER, J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, An algorithm for finding this paper.

C.G. LEKKERKERKER, Meetkundige voorstelling van recurrente rijen.

A.K. LENSTRA, An ALGOL68 simulator of the HP25.

F. LENSTRA, A.J. OORT, The prime of primes.

J.A. LENSTRA, Een talenwonder.

J.A. LENSTRA, Rekenmachines in de biochemie.

W.C.H. LENSTRA, A new Mersenne prime number.

K.C.E. LENSTRA-DE GROOT, Henderik de Zaendam.

A. LENSTRA-MULDER, De brave Hendrik is Total Loss, weet je wel.

J.H. VAN LINT, Een oud probleem uit de computerindustrie.

E.J.N. LOOIJENGA, Theta invariants for affine root systems.

BALTHASAR ELIAS LUB, De beteekenis van het getal 33.

HEINER MÜLLER-MERBACH, My friend Meierdierks.

EVELINE VAN NIEROP, Een kruiswoordraadsel.

S. NOOT, TH. KRAAK, Over enkele open problemen I.

A.M. ODLYZKO, N.J.A. SLOANE, A projective plain of order ten.

W.T. OMAN, In memoriam Abel Grunior.

VLAD. PATROVAČ, Proof of a conjecture of Marenin.

IR. ZEGER PLUG, The first table of the LCB system.

IR. ZEGER PLUG, The second table of the LCB system.

H.J.J. TE RIELE, Enkele opmerkingen over monotone aliquote rijen.

E.W. ROSCAM ABBING. Promotie-probleem.

PIERRE SAMUEL, La chasse aux anneaux principaux non-euclidiens dans l'enseignement.

R. SATTLER, Variaties over een thema van o.a. H.W. Lenstra jr.

LEX SCHRIJVER, Which (0,1)-matrices are unimodularizable?

SENIOR, Cryptogram.

C.L. STEWART, On the transcendence of γ and e^{γ}.I.

JAN R. STROOKER, Over een vraag van Bass.

ROB TIJDEMAN, Het wijnprobleem van Oom Jan.

ROBERT W. VAN DER WAALL, Beste Hendrik.

T.J. WANSBEEK, Wiskunde en samenleving: een methodologische studie.

THE INDEPENDENCE OF FERMAT'S LAST THEOREM

Dedicated to H.W. Lenstra II

P.C. Baayen

ABSTRACT

It is shown that by means of COHEN's method of forcing models can be obtained both for FERMAT's last theorem and for its negation. In this manner the independence of FERMAT's theorem from the ZERMELO-FRAENKEL axioms of set theory is established. It is indicated that the method used can be applied with high promise of success to other open problems in number theory.

KEY WORDS AND PHRASES

Forcing, COHEN models, FERMAT's last theorem, maximal linked systems, boolean algebra's, order extension principle, general abstract nonsense.

"Well! I've often seen a cat without a grin", thought Alice; "but a grin without a cat! It's the most curious thing I ever saw in all my life!"
Lewis Carrol: Alice in Wonderland.

0. Introduction.

Since the introduction by P.J. COHEN of the method of forcing (see e.g. [1] or [2]), several open problems (in particular, but not exclusively, in set theory and topology) have been shown to be independent. In this paper, COHEN models are applied in order to obtain an independence result in number theory.

It will become clear that our approach as described below, is applicable to several other number-theoretic open problems. FERMAT's last theorem (henceforth referred to as FLT) was selected for these investigations because it seems to be well known.

Our strategy is quite straightforward. We have to show that both the (closed) sentence FLT and its negation (interpreted in the obvious manner, as set-theoretic statements) are consistent with ZF, the usual ZERMELO-FRAENKEL axiom system for set theory (without the axiom of choice). This is obtained through the construction of both a model M_+ for ZF $\cup$ {FLT} and a model M_- for ZF $\cup$ {$\neg$FLT}. (It turns out to be possible to have one and the same model M perform the tasks both of M_+ and M_-; the deeper consequences of this serendipitous fact have not yet fully been investigated).

The organization of the remainder of this paper is as follows. In section 1, we develop some results from number theory that will be used in studying the properties of the model M. In section 2, the existence of a suitable model M is shown, and it is established that M has the required properties. In section 3 we have collected some notes and additional observations.

The author is indebted to Jan van MILL, Lex SCHRIJVER and Evert WATTEL for several helpful discussions. A crucial step in our proof is due to Lex SCHRIJVER (cf. section 2).

1. Set-theoretic preliminaries.

We assume the concepts of *filter* (dual ideal) and *ultrafilter* (dual prime ideal) in a boolean algebra to be known to the reader; cf. SIKORSKI [10]. From the axiom of choice (which is most profitably applied here under the guise of ZORN's lemma) we easily derive the well-known boolean Prime Ideal Theorem, in the form

(PIT) *Every boolean algebra contains an ultrafilter.*

Though the use of factor algebra's, one sees at once that PIT is equivalent to the statement

(PIT') *Every filter (in arbitrary boolean algebra) is contained in an ultrafilter.*

Thus the statement PIT asserts, in essence, that in an arbitrary boolean algebra all ultrafilters exist.
It is true, but not germane to our argument, that PIT is strictly weaker than the axiom of choice (HALPERN [4]; HALPERN & LEVY [5]). As PIT suffices to prove the compactness theorem for first order predicate logic, it is almost immediate that PIT implies the following Order Extension Principle:

(OEP) *Every partial order (on an arbitrary set) can be extended to a total order.*

A *linked system* in a boolean algebra A (with underlying set A) is a non-void subset L of A such that $a_1 \wedge a_2 \neq 0$ for all $a_1, a_2 \in A$. A *maximal linked system* is a linked system not properly contained in any larger one. Obviously any filter is a linked system and any ultrafilter is a maximal linked system.
Once again, from ZORN's lemma (i.e. from the axiom of choice) one easily obtains

(MLS) *Every boolean algebra contains a maximal linked system.*

As it is not possible to factor a boolean algebra over an arbitrary linked system, it is not trivial that MLS is equivalent to

(MLS') *Every linked system (in an arbitrary boolean algebra) is contained in a maximal linked system.*

Nevertheless, A. SCHRIJVER [9] recently succeeded in proving the equivalence. Hence, MLS asserts essentially that in an arbitrary boolean algebra all maximal linked systems exist.

As every (ultra) filter is a (maximal) linked system, MLS implies in particular that PIT holds. Since this observation is applied in the sequel, we record it as a lemma.

<u>Lemma 1.1</u>. MLS *implies* PIT.

Note that in this way we obtain a second derivation of PIT from the axiom of choice.

2. Independence of FLT from ZF.

Take a model M for ZF such that OEP holds in M but PIT does not hold in M; such a model can be obtained by standard forcing techniques, cf. JECH [6], chapter 5. We will show that FLT is valid in M.

Suppose FLT were not valid in M; we want to derive a contradiction. As PIT is not satisfied in M, it follows from lemma 1.1 that a fortiori MLS cannot be valid. Thus there exists in M a boolean algebra A not containing any maximal linked system. Without loss of generality we may assume that A is not generated by a subset of cardinality less than the first exponent n for which FERMAT's assertion does not hold.
Let $\leq$ be the boolean order in A; i.e. $a \leq b$ if and only if $a \wedge b = a$. As M is a model for OEP, there exists a total order $\preccurlyeq$ on A which extends $\leq$. Define

$$L: = \{a \in A \mid a^c \preccurlyeq a\},$$

where a^c denotes the boolean complement of a in A. It was first observed by A. SCHRIJVER [9] that L is a linked system. In fact, assume $a \in L$, $b \in L$ and $a \wedge b = 0$. Then $a \leq b^c$ and $b \leq a^c$; hence $a^c \preccurlyeq a \preccurlyeq b^c \preccurlyeq b \preccurlyeq a^c$. So $a = b = 0$; but this is impossible, as $1^c = 0 \leq 1$ implies that $1 \in L$ and hence $0 \notin L$. Observing that either $a \in L$ or $a^c \in L$, for arbitrary $a \in A$, we conclude that L is a *maximal* linked system in A. This our desired contradiction.

We conclude that FLT is indeed valid in M; i.e. FERMAT's last theorem is consistent with the usual axioms of set theory. In order to complete the proof of the independence of FLT, we must now establish the consistency of $\neg$FLT. It is left to the reader to check that this objective can be obtained through the simple expedient of changing FLT into $\neg$FLT throughout the above proof (the modification in the selection restriction on A can be safely left to the reader).

Now the model, like the Cheshire cat, may fade away, leaving only a grin; for we have established our main result:

Theorem 2.1. FERMAT's *last theorem is independent from the usual* (ZERMELO-FRAENKEL) *axioms of set theory.*

3. Additions and historical notes.

The construction and proof in the previous section were presented in an informal way, in the hope that this will make them sufficiently accessible for algebraists and number theorists. Those who prefer a more formal (but hardly more rigorous!) presentation, will have little trouble in reorganizing the argument, bringing out more clearly the purely logical kernel of our proof.

It is common knowledge (or used to be, before true geometry was practically eliminated from the secondary school curriculum) that the Greeks started the study of filters and linked systems, albeit not in boolean algebras. In EUCLID's compilation, one observes that simple filters in the collection of all straight lines in an affine plane are studied, particularly two-element filters (angles, as EUCLID calls them) and fixed ultrafilters (line bundles, or points, by duality). As regards linked systems of lines, the Greeks were especially interested in linked systems with three elements; however, they also studied arbitrary n-gons.

The regular use of ultrafilters seems to have been started by F. RIESZ [8]; it was popularized by Henri CARTAN and Nicolas BOURBAKI. The study of maximal linked systems was advocated by J. de GROOT, cf. [3] or [11].

As this paper has been especially written with people working in number theory or algebra in mind, it seems superfluous to survey the history and development of FERMAT's theorem. In retrospect, knowing that the validity of FERMAT's famous assertion is independent, it is moving to see how much effort has been vainly spent on this issue. The author humbly submits that his result may now free the attention and energy of a lot of worthy people for more profitable endeavours. It is sad to realize that, just as there are still circle-squarers and angle-trisectors among us, there always will remain a few misguided, uninformed (or just plainly dumb) people who will keep trying to prove or disprove FERMAT's last theorem. However, the mainstream of mathematics will pass them by.

REFERENCES

[1] P.J. COHEN, *The independence of the Continuum Hypothesis*, I, II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 1143-1148; 51 (1964), 105-110.

[2] P.J. COHEN, *Set theory and the Continuum Hypothesis.* W.A. Benjamin, Inc., New York/Amsterdam 1966.

[3] J. DE GROOT, *Supercompactness and Superextensions.* In: *Contributions to Extension Theory of Topological Structures*, Proc. Symp. Berlin 1967 (VEB Deutsche Verlag Wiss., Berlin, 1969), 89-90.

[4] J.D. HALPERN, *The independece of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem*, Fund. Math. 55 (1964), 57-66.

[5] J.D. HALPERN & A. LEVY, *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice.* In: *Axiomatic Set Theory*, Proc. Symp. Pure Math., Univ. of California, Los Angeles (1967), 83-134.

[6] T.J. JECH, *The Axiom of Choice.* North-Holland Publ. Cy, Amsterdam/London, 1973.

[7] T.J. JECH, *Lectures in Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing*, Lecture Notes in Math. 217, Springer, Berlin, 1971.

[8] F. RIESZ, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*. In: Atti del IV Congresso Internaz. Mat. Roma 1908, Rome, 1909, Vol. II, 18-24.

[9] A. SCHRIJVER, *The dependence of some logical axioms on disjoint transversals and linked systems*, Report ZW 75/76, Math. Centre, Amsterdam 1976.

[10] R. SIKORSKI, *Boolean Algebras*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1964 (2nd edition).

[11] A. VERBEEK, *Superextensions of topological spaces*, Math. Centre Tracts 41, Math. Centre, Amsterdam 1972.

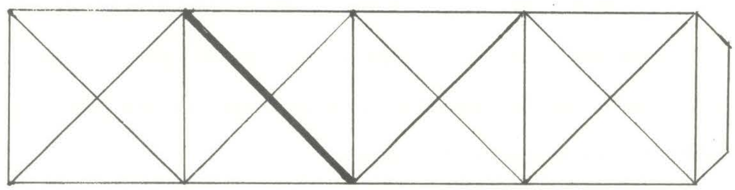
HENDRIKS BREIN: FLEXIBEL EN RECHTLIJNIG

J.H. de Boer

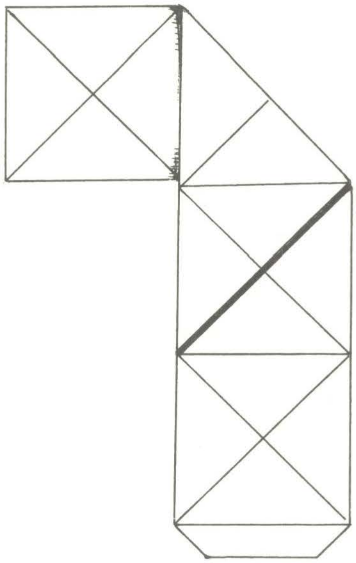
De laatste tijd zie ik Hendrik niet zo vaak en daarom moet ik het voorzichtig opschrijven: Het is wel eens voorgekomen dat er iets Hendriks begrip te boven leek te gaan. Zo kon hij soms maar moeilijk begrijpen dat wij er zo lang over deden om te begrijpen wat hij allang door had.

En iets dat, op onze beurt, óns begrip te boven gaat is hoe Hendriks geest zo scherp en rechtlijnig kan werken en tegelijk zo flitsend en flexibel.

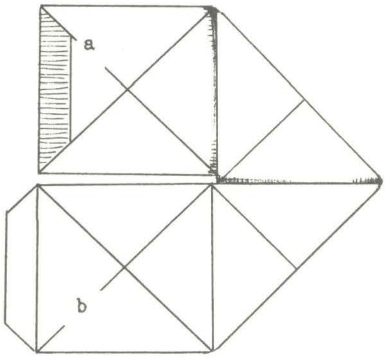
Als men in de wetenschap iets wil begrijpen dat men niet kan begrijpen, dan grijpt men naar een zogenaamd model, dat bepaalde aspekten van dat iets zo goed mogelijk benadert. In het geval dat ons hier bezig houdt, het binnenste-buiten willen keren van Hendriks brein, gebruikt men als model een flexagon. Dit is eenvoudig te maken van een reep stevig papier, zoals aangegeven in de volgende figuur, waarbij langs alle lijnen een paar keer scherp naar beide kanten moet worden omgevouwen om de nodige flexibiliteit te krijgen.



Dan vouwe men als volgt, langs de wat dikker getekende lijn naar voren:



en nog eens langs de wat dikker getekende lijn naar voren:



En nu komt er even iets heel moeilijks: driehoek a moet naar achteren worden gevouwen en driehoek b naar voren en dan moet het plaklipje op de aangegeven parkeerhaven worden geplakt. Men heeft nu een vierkant geval dat de symmetrie van de diëdergroep van orde 8 vertoont. Het model is echter pas klaar als dit aan de buitenkant geheel, naar eigen smaak, wordt gekleurd of gestreept.

Dan gaat men even rusten en vervolgens werken aan de opdracht: het binnenste-buiten keren van Hendriks brein, anders gezegd: het geheel naar binnen wegwerken van de aangebrachte kleur.

DIVERSE CITATEN

P.J.M. Bongaarts

MATHEMATICI zyn die genen, die in de Wiskunde geoeffent zyn. Het gemeene volk by de Romeinen noemde dus zomwylen die genen, die anderszins den name van Genethliaci, Chaldaei, Waarzeggers en Sterrekykers hadden. Waarom ook zelfs in het Corpus Juris de Mathematici en Malefici, dat is Boosdoenders, by elkander gevoegt worden.

ARITHMETICA. Reken-kunst, leert hoe men uit opgegeven getallen een ander nog onzeker getal wiskunstig opmaken kan. Zy behelst behalven de vyf species, Numeratio, Multiplicatio, en Divisio ook een zoogenaamde Extractio Radicum, Rhabdologia, het cyfferen in 't gebrooken, de Regel van Drie zynde Regula Directa, Inversa, en Composita, de Regula Societas, Alligationes, Coeci en Falsi, Italiaans Boekhouden,Arithmetica Decimalis, Progressionum, Logarithmica, Sexagenaria, Litteralis, Surdorum, Infinitorum, enz.

ALGEBRA . Analysis, de Oploskunst,Regel Cos, by de Nederlanders Stel-konst genaamt, leert men hoe men door Aequationes allerhande zware voorstellingen door cyfferen oplossen, en nieuwe waarheden vinden kan.

GEOMETRIA SUBLIMIOR is de verheve Geometrie, en handelt van de kromme linien, en door dezelve voortkomende vlaktens en ligchamen. Deze wetenschap is hedendaags door de nieuwe ontleding (Analysis) van Leibnitius en Newton grootelyks uitgebreidt en voltooid.

(Algemeen Kunstwoordenboek der Wetenschappen. Leiden, 1734.)

Je suis assez contente de ma situation, mes jours se passent vite et ne se passent pas inutilement. Si j'étais mariée, je ne donnerai pas tant d'heures au clavecin ni aux mathématiques, et cela m'affligerait; car je veux absolument entendre Newton,..

Ce que je voulais vous dire, c'est que je ne m'aperçois point encore que mon esprit se rétrécisse, que mon imagination devienne stérile; mais je sais bien qu'une heure ou deux de mathématiques me rendent l'esprit libre et le coeur plus gai: il me semble que j'en dors et mange mieux quand j'ai vu des verités évidentes et indisputables; cela me console des obscurités de la réligion et de la métaphysique ou plutôt cela me les fait oublier: je suis fort aise de ce qu'il y a quelques chose de sûr dans ce monde.

(Belle van Zuylen, in brieven aan Constant D'Hermenches.1764.)

Herinner U - of weet, als ge dit nooit mocht hebben vernomen - dat wiskunde in-geenen deele 'n zoogenaamd droog vak is....

't Weinige dat ik er van weet, was steeds een der rijkste en zuiverste bronnen van poëzie. Aan de inspanning om waarheid te zoeken op 't terrein van exacte wetenschap, heb ik de heerlijkste oogenblikken van m'n leven te danken, en de kracht die mij tot-nog-toe staande hield. Ik noem niemand 'n dichter die dit niet begrijpt.

(Multatuli, Ideën III, 599, 600. 1870 .)

MATHÉMATIQUES. Dessèchent le coeur.
SAVANTS. Les blaguer.-Pour être savant, il ne faut pas que de la mémoire et du travail.

(Flaubert, Le dictionnaire des idées reçues. ±1880.)

"Deze schijven" , hernam heer Ollie, "zijn ellipsvormig. Zij hebben dus een defect van de zijdenverhouding. Het vierkant op de ordinaat is elliptisch aan te passen aan de zogenaamde orthia, doch...."
"Excuseer, heer Olivier! "zei Joost onthutst. "Ik ben op school niet verder gekomen dan de repeterende breuken."
"Zo ", zei heer Bommel, "Repeterende kettingbreuken, die hun wijzergetallen herhalen, waarschijnlijk ? Hm ! Zulke cijfers worden gerepeteerd, Joost. Onthoudt dat !"

(Marten Toonder, Tom Poes en het Slaagsysteem. ± 1955.)

Geen vierkante meter Hollandse bodem of er staat een vormingscentrum, een jeugdhonk, een cultuurhuis dan wel een opvangherberg met een staf onder leiding van iemand die Dirk-Jan of Arnold heet, een baard draagt, de hele dag over communicatiepatronen en tolerantiegrenzen praat,..., maar die niet weet wat de sinus van 90 graden is omdat het , zal hij zeggen, in dit leven niet niet om de sinus gaat, maar om de mens,..

(Jan Blokker, X = X, in Ben ik wel links genoeg ? 1974.)

HET ONTVOUWEN VAN EEN BLOCK DESIGN MET $\lambda>1$

A.E. Brouwer

Een van de vijf fundamentele constructies waarmee WILSON het bestaan van block designs met parameters v,k,λ by gegeven k en λ en voldoend grote v aantoonde was er een die uit een block design met $\lambda>1$ een (groter) block design met $\lambda=1$ maakte. Meer in het bijzonder bewees hij de volgende
Stelling:

> "Zij gegeven een block design met parameters u,k,λ waarbij $\lambda=q$ een priemmacht is zodanig dat een block design met parameters $q\uparrow d,k,1$ bestaat voor zekere $d \geq u\uparrow 2$.
> Dan bestaat ook een block design met parameters $u.q\uparrow d,k,1$."

met behulp van een tamelijk gecompliceerde constructie. Hieronder zal ik een eenvoudiger constructie aangeven teneinde de volgende
Bewering:

> "Bovenstaande stelling is waar indien $q \geq u-2$, zelfs indien men '$u\uparrow 2$' vervangt door '$\binom{u}{2}$'."

die voldoende is om WILSON's hoofdstelling af te leiden te bewijzen.

Zij $(X,\mathcal{B})$ het gegeven design met parameters u,k,q, en kies voor elke $g=\{i,j\}$ $(i,j \in X)$ een willekeurige nummering $N[g] : \{B \in \mathcal{B} \mid i,j \in B\} \twoheadrightarrow GF(q)$.
Zij V een d-dimensionale vectorruimte over $GF(q)$.
Construeer nu een block design (met parameters $u.q\uparrow d,k,1$) op de puntverzameling $X \times V$ door allereerst op elk van de staken $\{i\} \times V$ $(i \in X)$ een block design met parameters $q\uparrow d,k,1$ te leggen en vervolgens nog wat blokken toe te voegen teneinde de paren $\{(i,x),(j,y)\}$ met $i \neq j$ te overdekken. Dit laatste kan als volgt gedaan worden:

Zij voor elk blok $B \in \mathcal{B}$

$$f[B] : B \to V$$

een nader te specificeren functie, en zij voorts voor elk punt $i \in X$

$$I[i] : V \to V$$

een lineaire afbeelding. Zij tenslotte H het hypervlak

$$H = \{v \in V \mid \Sigma v = 0\}$$

in V. Kies voor het te construeren design alle blokken

$$\{(i,z) \mid i \in B \text{ en } z = x + T[i](y) + f[B](i)\}$$

waarbij $x \in V$, $y \in H$, $B \in \mathcal{B}$.
Merk op dat dit het goede aantal blokken is:
bij gegeven i en j zijn er $q\uparrow 2d$ paren $\{(i,x),(j,y)\}$, en de nu gekozen blokken overdekken $q\uparrow d.q\uparrow(d-1).q$ van zulke paren.
Om het gewenste design te vinden is het dus voldoende f en T zo te kiezen dat elk paar $\{(i,x),(j,y)\}$ ten minste eenmaal overdekt wordt. Maar zo'n paar wordt overdekt zodra $\{(i,\emptyset),(j,y-x)\}$ overdekt wordt, d.w.z. we moeten inzien dat bij gegeven i en j

$$T[j](y) - T[i](y) + f[B](j) - f[B](i)$$

alle waarden in V aanneemt.
Nummer nu de coordinaten van $V=GF(q)\uparrow d$ met de paren $\{i,j\}$ $i,j \in X$ (en eventueel nog andere elementen), en definieer

$$(T[i](y))[g] = \begin{cases} y[g] & \text{als } g = \{i,j\} \text{ voor zekere } j \in X, \\ y[g].a\uparrow i & \text{anders} \end{cases}$$

waarbij a een primitief element van $GF(q)$ is, en ik voor het gemak $X = \{1,2,\ldots,u\}$ veronderstel. Zij $g = \{i,j\}$. Bij gegeven $z \in V$ is er een $y \in H$ met $T[j](y) - T[i](y) = z$ precies dan wanneer $z[g] = \emptyset$. Maar als ik dan $f[B]$ zo kies dat

$$(f[B](i))[g] = \begin{cases} \emptyset & \text{als } i<j, \\ N[g](B) & \text{als } i>j \end{cases}$$

dan neemt ook de g-de coordinaat alle waarden aan.
Dit stemt tot grote tevredenheid.

DE OPLOSSING VAN PROBLEMEN, WAARVAN MEN DE OPLOSSING KENT

Evert M. Bruins

Zoodra men een begin maakt met het onderwijs van de meetkunde en men komt toe aan de "stelling": de som van twee zijden van een driehoek is grooter dat de derde zijde, vindt geen enkele leerling het noodig om dáár een bewijs van te geven. Heeft men overtuigd, dat de regels van het spel een bewijs vereischen.., dan begrijpt de leerling het bewijs niet!

Bij de algebra is het juist andersom: a = a wordt meteen geaccepteerd, al staat die tweede a op een andere plaats, maar a = b is onzin, want "b" is geen "a".

De voorbereidingen tot randwaardeproblemen van differentiaalvergelijkingen maken het nog bonter: men leidt de integraal van Fourier af:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\cos\alpha(y-x)\,d\alpha dy$$

en is zéér verheugd <u>zeker</u> te zijn F(x) te kunnen <u>vinden</u> als men voor alle waarden van y, zooals voor de berekening van de integraal noodig is, F(y) kent. Wat dan voor y = x?

Toen in de vierde eeuw vóór Christus de "Chaldeeën" in de astronomie -- van oudsher zijn de astronomen de echte rekenaars! -- bemerkten, dat de planeten niet eenparig langs het hemelgewelf bewogen, maar nu eens rechtuit en dan weer terug liepen, nu eens vlugger en dan weer langzamer, afhankelijk van de plaats in den dierenriem... gaf de toen reeds heerschende voorliefde voor lineariteit -- nil novi sub sole.. -- de impuls om door zig-zag lineaire functies die heen en weer gaande beweging, die "anomalie", voor te stellen. Bij niet te groote amplitudo kwam men haast binnen de waarnemingsfouten uit, bijna direct - bij voorbeeld - voor de planeet Jupiter. Verbetering werd gezocht... en men maakte één of meer knikken erbij, minimaal dus vier rechte stukken op een halve periode, van de onbewust gezochte sinus-functie: zonder het te kunnen vermoeden stootte men op het inverse Gibbs-phenomeen! Als men y = x in een sinus-Fourierreeks ontwikkelt vertoont de "naderende kromme" bij het maximum een enorme afwijking. Hier is het zoo, dat als men sin x door mx tracht te benaderen... de groote afwijking bij het maximum ontstaat.

Inderdaad, bepaalt men het minimum van

$$\Phi(m) = \int_0^{\pi/2} (mx - \sin x)^2 dx$$

dan volgt zonder meer $m = 24/\pi^3 = 0.7741$.. en, eenvoudigheidshalve $x = \alpha\pi$ stellend, verkrijgt men het volgende resultaat

α	$m\alpha\pi$	$\sin \alpha\pi$	D
0.1	0.24317	0.30902	-0.066
0.2	0.48034	0.58779	-0.101
0.3	0.72951	0.80902	-0.080
0.4	0.97268	0.95106	+0.022
0.5	1.21585	1.00000	+0.216

Dit resultaat zou, overigens, niet verkregen kunnen worden zonder sin x voor alle waarden van x reeds te kennen.. en bij het uitrekenen van de integraal, ontstaande door Φ naar m te differentieeren

$$\int_0^{\pi/2} (mx - \sin x)x\, dx,$$

kan men zich nauwelijks voorstellen, dat een globale methode de integratie vervangen kán, op intuïtief of evident beschouwde grond. Wanneer echter de Chaldeën reeds bij het eerste pogen naar een "trial and error" werden teruggverwezen, voor de "geknikte zig-zag" functie, dient men, als de knik op $\alpha\pi$ gelegd wordt en de richtingscoëfficiënten m en m_1 zijn het minimum te bepalen van

$$\Phi(m,m_1,\alpha) = \int_0^{\alpha\pi} (mx - \sin x)^2\, dx + \int_{\alpha\pi}^{\pi/2} [\alpha\pi(m-m_1) + m_1 x - \sin x]^2\, dx$$

en het nul stellen van de afgeleiden naar α, m, m_1 levert drie vergelijkingen, <u>lineair</u> in m, m_1, waarvan de coëfficiëntendeterminant dus moet "verdwijnen".. en door den lezer gemakkelijk kan worden berekend! Deze determinant heeft de voor het probleem triviaal aandoende factoren α en $(\alpha-\frac{1}{2})$,.. maar voor het overige ontstaat als vergelijking voor α:

$$F(\alpha) = \pi\cos\alpha\pi[8\alpha^4+4\alpha^3+3\alpha-10\alpha^2]-\sin\alpha\pi[24\alpha^3+12\alpha^2-18\alpha+3]+48\alpha^3-24\alpha^2 = 0$$

In een F - α graphiek schiet F omhoog voor α grooter dan nul, bereikt een maximum, gaat naar negatieve waarden en raakt voor $\alpha = \frac{1}{2}$ aan de α-as. Men bepaalt, kennende de functies sin $\alpha\pi$, en dus cos $\alpha\pi$, numeriek eenvoudig

$\alpha = 0.2523$, een "hoek" van $45^{\circ}24'$..,

waaruit dan $m = 0.9401...$ en $m_1 = 0.4032$ volgen.

De confrontatie van $y = 2.95535\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 0.25[23]$; $y = 0.73838 +$ $+ 1.2666(\alpha-0.25[23])$ en sin $\alpha\pi$ levert:

α	"knikken"	sin $\alpha\pi$	D
0.1	0.29535	0.30902	-0.0136
0.2	0.59070	0.58779	-0.0029
0.3	0.80171	0.80902	+0.0073
0.4	0.92838	0.95106	+0.0227
0.5	1.05504	1.00000	+0.0550

Een en ander toont een belangrijke verbetering en men ziet, dat als de Chaldeër, desnoods in wanhoop, tot een verdeeling in zes, of acht stukken van den cirkel besloot, de achthoek (45°!) juist het optimale levert.

Ook hier gold: de oplossing van het probleem is exact mogleijk als men de oplossing reeds kent!

A HEADACHE-CAUSING PROBLEM

Presented to Hendrik W. Lenstra Jnr on the occasion of his doctoral examination

Conway (J.H.), Paterson (M.S.), and Moscow (U.S.S.R.)

Abstract.

After disproving the celebrated Conway-Paterson-Moscow theorem (reference 1), we prove that theorem and make an application to a well-known number-theoretical problem.

Setting.

When just N men have been gathered together in the room shown in Figure 1, the blind lady umpire makes the following (true) announcement:

"We are all, as we know, infinitely intelligent and honourable people. Now the janitor, acting on my instructions, has attached to your foreheads small discs bearing the usual notations for various non-negative integers, in such a way that each of you can see the number on everyone else's head, but not that on your own. The sum of all these numbers is one of the numbers you can now see me writing on the blackboard."

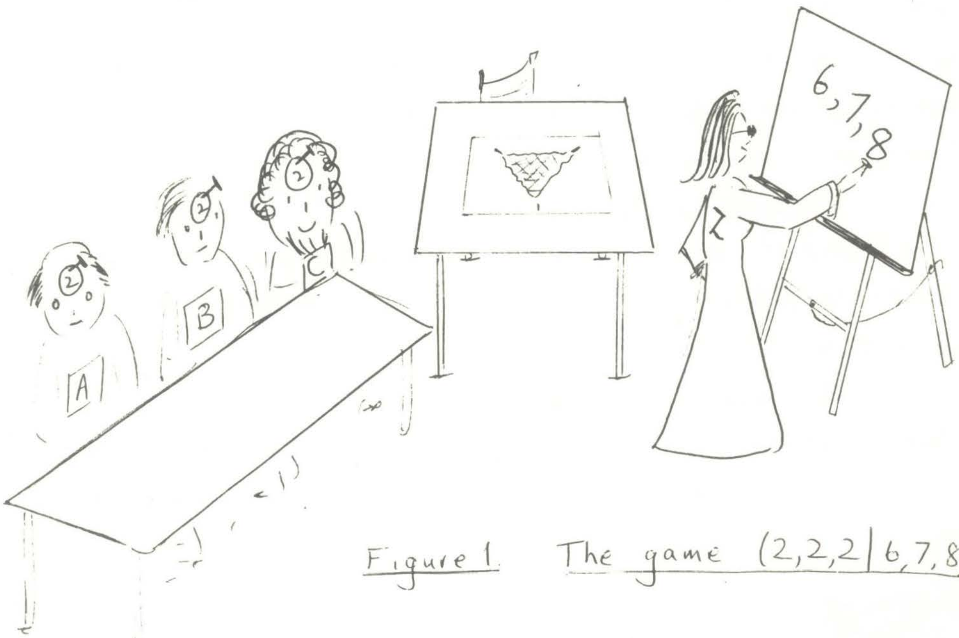


Figure 1. The game (2,2,2 | 6,7,8)

"I regret the slight discomfort this proceeding must have caused you - fortunately the theorem of reference (1) assures us that it will only last for a few more moments. I will now question each of you in turn, and at the first 'Yes' answer we can all go out and enjoy what is left of this lovely afternoon."

She now asks:-

"Arthur, can you deduce solely from this information what number is written on your disc?"

If Arthur's reply is "No", she will turn to the next man, and ask:-

"Bertram, can you deduce from the above information together with Arthur's reply what number must be written on <u>your</u> disc?"

If Bertram in turn says "No", she will question Charles, Duncan, and so on, perhaps reaching the N'th man:-

"Engelbert, can you now deduce your number from the given information together with all the replies you have now heard?"

If even Engelbert says "No", she will return to Arthur, and continue cyclically, always asking the same question:-

"Are you now able to deduce your number solely from the given information and the replies you have heard so far?"

until the game is terminated by a "Yes" reply.

<u>Statement of the theorem</u>.

If the number of numbers written on the blackboard is less than or equal to the number (N) of men, the game will terminate after a finite number of questions.

<u>The disproof (commenced)</u>.

It has become customary (see e.g., reference (1)) to present the disproof of this theorem before its proof. The disproof runs as follows.

To demolish this perfectly preposterous proposition, it will suffice of course to disprove any particular case. We shall take the case when N = 3, the number on every head is 2, and the numbers on the blackboard are 6,7, and 8, and establish conclusively that it will never end. We shall refer to this as the case (2,2,2|6,7,8).

It will help us to imagin Charles at his breakfast table that morning.

"Oh dear, yet another invitation from Zoe. She's a lovely girl, and intelligent too, but I do wish she wouldn't keep dragooning us into playing those ridiculous party games."

"Wonder what it'll be this time? I'd better just run through the infinitely many possibilities so we'll be able to get it over with as quickly as possible. If it's Charades I'll repeat exactly the one I did last time - they're <u>bound</u> to get that first go. If it's Hunt-the-Slipper I'll ...

... ...

... "But then again, she might just be thinking of playing the game described so wittily in reference (1). In that case, she's as likely as not to use the particular case called (2,2,2|6,7,8) in the handy notation of that reference. What should my reactions be?"

<u>Charles's Argument</u>.

"Let me think now. Since I see two heads numbered 2, I will know from the start that my number will be 2,3, or 4. Let's consider these cases."

"<u>If my number's 2</u>, Arthur will have concluded that <u>his</u> number was 2,3, or 4, and since each of these is consistent with all he was told, he'll have to say 'No'."

"Bertram's then in a similar position. He'll think

'If I have 2, Arthur, by Charles's argument of the previous paragraph, will say 'No'. If 3, Arthur will instead have been able to conclude only that his number was 1,2, or 3, and will still have to say 'No'. And if I'm 4, Arthur will have to say 'No' because he'll only know that his number is 0,1, or 2. Must remember that she said non-negative numbers so that 0 is allowed.' "

" Since in this case Bertram won't be able to eliminate even one of his three possibilities 2,3,4, he'll be forced to say 'No'. That disposes of the case when my number is 2."

" If my number is 3, Arthur fairly obviously still says 'No'. Bertram will now probably argue in condensed form:

'I can see A = 2, C = 3, so I know B = 1, 2, or 3.
If B = 1, A'll've been torn between 2,3,4 so'll've said 'No'
If B = 2, A'll've been torn between 1,2,3, so'll've said 'No'
If B = 3, he'll've been torn between 0,1,2 so'll still've said 'No'. I must therefore say 'No' myself, since all three cases are consistent with A's 'No' answer.' "

" Bertram and Arthur will also both say 'No' when my number is 3. I think I can prove along the same lines that they'll both say 'No' even when it's 4. But I don't need to check this - my first answer must be 'No' because both 2 and 3 are consistent with the two 'No' answers I'm sure to hear."

" I plainly don't need to consider much more of this stuff - I reckon we'll all go home after saying 'No' half-a-dozen times, and I still won't know what my number is."

The disproof completed.

Charles's argument, and various portions of it, can be used to establish with absolute rigor that each of the three players knows from the start that each of the first three answers is going to be "No". So if they all know what those answers are going to be what information can they possibly gain by hearing them ritually intoned? At the start of the second round, they will have learned nothing that they did not already know, and so the game will obviously go on forever.

The proof (commenced).

We might as well make it clear now that Zoe, the blind lady umpire, is herself ignorant of the numbers fixed to those heads, although she knows, of course, what numbers she wrote on the blackboard. In the interests of good order she will naturally list all situations that are compatible with the numbers she has heard up to any given time, and will strike a situation off her list when and only when she knows that the corresponding game would terminate at the current question. Of course she knows just when this will be, for being infinitely intelligent she can perfectly well imagine herself in the position of the player she is currently addressing in any possible situation.

By a possible situation we mean of course an N-tuple of numbers

(a,b,c,...,n)

which might be the numbers on the respective heads of

(A,B,C,...,N)

and would have caused 'No' answers to all questions before the current one. We shall call such a situation ongoing only if the answer to the current question will also be 'No'.

We claim that Zoe can work out exactly which situations are ongoing by the following argument:

"Let me suppose that the current question is addressed to B. Then certainly

i) I cannot strike off (a,b,c,...,n) if there's an accompanying situation (a,b',c,...,n) still present with the same values of a,c,...,n but with b' differing from b, for then B cannot eliminate either of the numbers b and b'.

ii) I can strike off (a,b,c,...,n) if there's no such accompanying situation, for then B, who can see the numbers a,c,...,n will know that b is the only possible value for his number."

"So when I receive a 'No' answer from B (say), I must strike off those and only those points (a,b,c,..,n) from by N-dimensional record that are unaccompanied by any other point

(a,b',c,...,n)

in the B-direction."

Since Zoe's argument covers all cases, we can now follow her algorithm to discover exactly which situations will cause the game to end at any given time.

<u>The case (2,2,2|6,7,8)</u>.

Before we resume the proof for the general case, we illuminate the fate of all games of the form (a,b,c|6,7,8) in Figure 2. This Figure shows an orthogonal projection of the set of all points in (A,B,C) space that yield sums of 6,7, or 8, together with Zoe's notes as to the number of the question whose 'Yes' answer terminates the game.

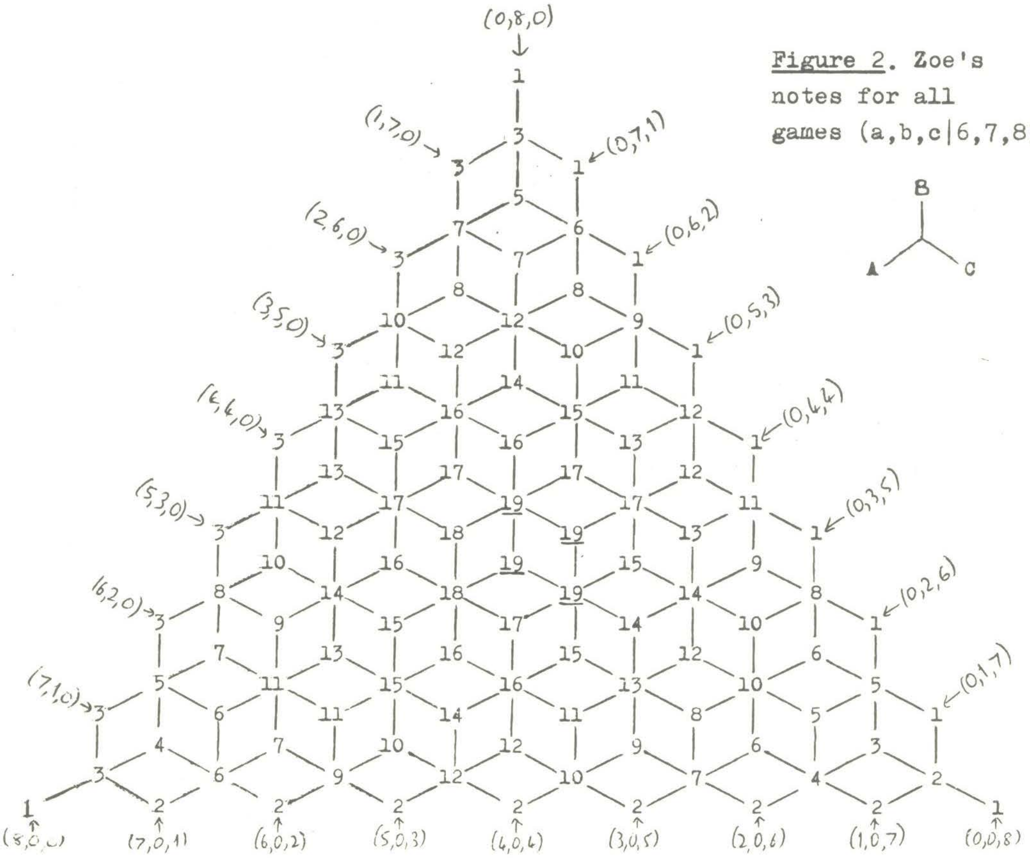


Figure 2. Zoe's notes for all games (a,b,c|6,7,8).

The four entries '19', singled out in Figure 3, enable us to verify both of Charles's predictions about the game (2,2,2|6,7,8).

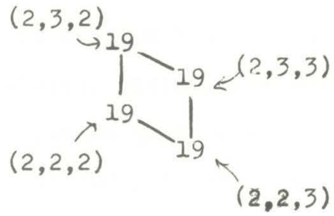


Figure 3. At the end of the game.

The proof completed.

We return now to the discussion of the general case. No matter what numbers are written on the blackboard, provided that there are at most N of them the total number of initial situations will surely be finite. We shall show that no one of these situations can remain ongoing at every possible moment in time.

For otherwise the set of permanently ongoing situations would be non-empty and have the property that every one of its points would be accompanied in every coordinate-direction. It will suffice to show that any such set of points in N dimensions has at least N+1 distinct sums, and we can verify this by induction.

Let a_0 be the least value of the A-coordinate of any permanently ongoing situation in an N-man game. Then the tuples of N-1 numbers

$$(b, c, \ldots, n)$$

for which $(a_0, b, c, \ldots, n)$ is permanently ongoing in this game will themselves form a permanently ongoing set in an N-1 man game, and so will have at least (N-1)+1 = N distinct sums. Let

$$s_0 = a_0 + b_0 + c_0 + \ldots + n_0$$

be the greatest of these, arising from the permanently ongoing situation

$$(a_0, b_0, c_0, \ldots, n_0).$$

Then there is a permanently ongoing situation

$$(a,\ b_0\ ,\ c_0,\ \dots\ ,\ n_0)$$

accompanying this in the A-direction with $a \neq a_0$, and so $a > a_0$ since a_0 was minimal. The accompanying situation therefore has coordinate-sum greater than any of those already found, and establishes that there must be at least N+1 distinct coordinate-sums in all.

Application to a problem of Fermat.

The problem referred to is Fermat's famous assertion that

$$a \geq 1,\ b \geq 1,\ c \geq 1,\ n \geq 3 \implies a^n \neq b^n + c^n, \qquad (*)$$

for rational integers a,b,c,n.

Now it is well-known that for every proposition P, we have

$$(\ P \ \text{ and } \ \text{not-}P) \implies (\ 0 = 1\ ).$$

Taking P to be the proposition discussed so disarmingly in reference (1), and applying <u>modus ponens</u>, we deduce that

$$0 = 1.$$

Now adding 1 to both sides of this, we obtain

$$1 = 2,$$

which we prefer to write in the more revealing form

$$1^3 = 1^3 + 1^3.$$

Thus the lexicographically first case of (*) is disproved. The authors cannot resist the remark that this would surely have been noticed earlier had not modern teaching methods prefered the elaboration of grandiose general theories to the inculcation of elementary arithmetical skills.

Acknowledgements.

The work described here was carried out when the first and second named authors enjoyed the hospitality of the third. The second and third authors are indebted to the first for expository details. The first and third authors gratefully remark that without the constant stimulation and witty encouragement of the second author this paper was completed.

Reference.

(1) Conway, J.H., Paterson, M.S., and Moscow, U.S.S.R.,
A Headache-causing Problem.
Papers presented to Hendrik W. Lenstra Jnr on the occasion of his doctoral examination.

PROOF OF CORRECTNESS OF A NUMERICAL PROGRAM

T.J. Dekker

1. Introduction

The purpose of this paper is to present a non-formal proof of correctness of a set of numerical routines.
The routines considered are implementations of algorithms for finding a zero of a real continuous function in a given interval. Some closely related routines have been published in the form of ALGOL 60 - procedures by Dekker (1967), Brent (1971), and Bus & Dekker (1974).

For convenience, we here describe the considered routines in the revised ALGOL 68 - notation, see Van Wijngaarden (1976).
Moreover, we use the formalism of Hoare (1969) for assertions on statements, which briefly is as follows.

Let S be a statement, i.e. a certain piece of program, and let p and q be logical formulas describing properties of data. Then the assertion

$$p\{S\}q,$$

to be read as "statement S is _partially correct_ with respect to _initial condition_ p and _final condition_ q", has the following meaning. If p is true when the elaboration of S is initiated, then q is true when the elaboration of S is completed. Note, that this assertion does not state anything when S is not completed but terminated, halted, trapped or interrupted, see Van Wijngaarden (1976, 2.1.4.3), or when the elaboration of S continues indefinitely due to an infinite loop within S. Statement S is called _totally correct_ with respect to p and q if, moreover, initial condition p ensures that S is completed within finite time, apart from machine environamental conditions, such as interruption exceeding the time or space limit, and apart from exceptional arithmetic conditions, such as arithmetic trap due to overflow, underflow or division by 0. (We disregard possible arithmetic traps for simplicity.)

For the numerical routines considered, it turns out that the crux of the correctness proofs does not concern the partial correctness, but the completion of the routines.
This is for a great deal due to unsatisfactory arithmetic on many present-day computers, see e.g. Dekker (1976).

In section 2 we give some definitions and a simple theorem concerning the correct testing for sign change, in section 3 we deal with a class of zero finding routines, and in section 4 we discuss some particular iteration formulas.

2. Testing for sign change

Let $\hat{\mathbb{R}}$ denote a (finite) system of real numbers implemented in a certain machine.

For each subset A of $\mathbb{R}$, let $\hat{A}$ denote $A \cap \hat{\mathbb{R}}$, and for each arithmetic operation $*$, let $\hat{*}$ denote the corresponding implemented machine operation (e.g. $\hat{+}$, $\hat{-}$).

We shall assume (partly for simplicity) that the implemented arithmetic is <u>monotonic</u> which, for our purposes in this paper, is defined as follows: the implemented relational operations and the operations <u>abs</u> and <u>sign</u> are exact; moreover, the implemented operations $\hat{+}$ and $\hat{-}$ satisfy

$(\forall x,y \in \hat{\mathbb{R}})\ x < y \Rightarrow x \mathbin{\hat{-}} y \le 0 \wedge y \mathbin{\hat{-}} x \ge 0 \wedge ((\forall a \in \hat{\mathbb{R}})\ a \mathbin{\hat{+}} x \le a \mathbin{\hat{+}} y$
$\wedge\ a \mathbin{\hat{-}} x \ge a \mathbin{\hat{-}} y)$.

Let x,y,xo,yo be elements of $\hat{\mathbb{R}}$.

Let $J = J_{x,y}$ be the real closed interval defined by

$$J_{x,y} \underset{\mathrm{def}}{=} \underline{\mathbf{if}}\ x \le y\ \underline{\mathbf{then}}\ [x,y]\ \underline{\mathbf{else}}\ [y,x]\ \underline{\mathbf{fi}}$$

and let $J_o = J_{xo,yo}$.

Let $\hat{C}[J]$ be the set of implemented real continuous functions on J yielding a function value in $\hat{\mathbb{R}}$ for each argument in $\hat{J}$.

Let $h = h_{x,y}$ denote the computed <u>half-length</u> of $J_{x,y}$ defined by

$$h_{x,y} \underset{\mathrm{def}}{=} (y \mathbin{\hat{-}} x) \mathbin{\hat{/}} 2,$$

and $m = m_{x,y}$ the computed <u>mid-point</u> of $J_{x,y}$ defined by

$$m_{x,y} \underset{\mathrm{def}}{=} x \mathbin{\hat{+}} h_{x,y}.$$

Then a tolerance function on $\hat{J}_o$ is a function t yielding for each argument in $\hat{J}_o$, a function value in $\hat{\mathbb{R}}$ satisfying

$(\forall x \in \hat{J}_o)\ x \mathbin{\hat{-}} t(x) < x < x \mathbin{\hat{+}} t(x)$
$\wedge\ ((\forall y \in \hat{J}_o)\ \underline{\mathrm{abs}}\ h_{x,y} > t(x) \Rightarrow m_{x,y}$ is between x and y).

We consider a routine for finding a zero including a test for sign change; the routine is called by statement S_1 with initial condition p, and final condition q_1 defined as follows.

Definition 1

$p_1 \underset{def}{=} xo, yo \in \hat{\mathbb{R}} \wedge f \in \hat{C}[J_o]$
$\wedge\ t$ is a tolerance function on $\hat{J}_o$
$\wedge$ implemented arithmetic is monotonic;

$S_1 \underset{def}{=} bv := \text{zeroin}\ (xo,yo,f,t,x,y);$

here zeroin is a routine to be specified below, x and y are real variables (i.e. of mode <u>ref real</u>), and bv is a Boolean variable (of mode <u>ref bool</u>);

$q_1 \underset{def}{=} p_1 \wedge x,y \in \hat{J}_o \wedge bv = f(xo) \times f(yo) \leq 0$
$\wedge (bv \Rightarrow (f(x) \times f(y) \leq 0 \wedge \underline{abs}\ f(x) \leq \underline{abs}\ f(y) \wedge \underline{abs}\ h_{x,y} \leq t(x)).$

We now define zeroin in terms of a zero finding routine zero as follows.

Definition 2

<u>proc</u> zeroin = (<u>real</u> xo,yo, <u>proc</u>(<u>real</u>)<u>real</u> f,t, <u>ref</u> <u>real</u> x,y) <u>bool</u>:
<u>begin</u> <u>real</u> fxo = f(xo); <u>real</u> fyo = f(yo);
<u>if</u> <u>sign</u> fxo × <u>sign</u> fyo ≤ 0 <u>then</u>
zero (xo,yo,fxo,fyo,f,t,x,y); <u>true</u>
<u>else</u> x: = xo; y: = yo; <u>false</u> <u>fi</u> <u>end</u>;
here zero is a routine to be specified below.

We consider the calling statement S_2 with initial condition p_2 and final conditon q_2 defined as follows.

Definition 3

$p_2 \underset{def}{=} p_1 \wedge fxo = f(xo) \wedge fyo = f(yo)$
$\wedge\ fxo \times fyo \leq 0;$

$S_2 \underset{def}{=} \text{zero}\ (xo,yo,fxo,fyo,f,t,x,y);$

$q_2 \underset{def}{=} p_2 \wedge x,y \in \hat{J}_o \wedge f(x) \times f(y) \leq 0$
$\wedge\ \underline{abs}\ f(x) \leq \underline{abs}\ f(y) \wedge \underline{abs}\ h_{x,y} \leq t(x).$

We are now ready to state and prove the following theorem.

Theorem 1

If S_2 is partially correct with respect to p_2 and q_2, then S_1 is partially correct with respect to p_1 and q_1.
If S_2 is totally correct with respect to p_2 and q_2, then S_1 is totally correct with respect to p_1 and q_1.

Proof

These results immediately follow from definitions 1,2,3. □

3. Finding a zero

We now define the zero finding routine zero in terms of an interpolation routine interpol.

Definition 4

```
proc zero = (real xo,yo,fxo,fyo, proc (real) real f,t, ref real x,y) void:
begin real b: = xo, fb: = fxo, a: = c: = yo; fa: = fc: = fyo;
while if abs fc < abs fb then # interchange #
a: = b; fa: = fb; b: = c; fb: = fc; c: = a; fc: = fa fi;
real tol = t(b); real h = (c - b)/2;
abs h > tol
do real i; i: = interpol (b,fb,c,fc,a,fa,h,tol);
a: = b; fa: = fb; b: = i; fb: = f(i);
if if fc ≥ 0  then fb ≥ 0  else fb ≤ 0 fi
then c: = a; fc: = fa fi od;
x: = b; y: = c end;
```

here interpol is a routine to be specified below.

We consider the calling statement S_3 with initial condition p_3 and final condition q_3 defined as follows.

Definition 5

$p_3 \underset{def}{=} p^1 \wedge \underline{abs}\ h > tol$,
where
$p^1 \underset{def}{=} p_2 \wedge b,c,a \in \hat{J}_o \wedge fb = f(b) \wedge fc = f(c) \wedge fa = f(a)$
$\wedge\ fb \times fc \leq 0 \wedge \underline{abs}\ fb \leq \underline{abs}\ fc$
$\wedge$ ($a = c \vee b$ is between a and c)
$\wedge\ h = h_{b,c} \wedge tol = t(b)$;

$S_3 \underset{def}{=} i := \text{interpol}\ (b,fb,c,fc,a,fa,h,tol);$

$q_3 \underset{def}{=} p_3 \wedge i$ is between b and c.

Theorem 2

If S_3 is partially correct with respect to p_3 and q_3, then S_2 is partially correct with respect to p_2 and q_2.
If S_3 is totally correct with respect to p_3 and q_3, then S_2 is totally correct with respect to p_2 and q_2.

Proof

The first result (parial correctness) follows by observing that p^1 is invariably true each time when the part of the while statement preceding the do part is completed.
The second result (total correctness) is proved as follows.
Each iteration step yields another element of $\hat{J}_o$ as value i, because i is between b and c (due to condition q_3); hence each new interval $\hat{J}_{b,c}$ is a true subset of interval $J_{b,c}$ in the previous step. Since $\hat{J}_o$ is finite, it follows that the while statement is completed after a finite number of steps. □

4. Iteration formulas

In this section, we give two examples of definitions of the interpolation routine interpol, viz. an implementation at the bisection algorithm, and an implementation of a linear interpolation algorithm. A closely related ALGOL 60 version of the latter has been published by Dekker (1967).

Definition 6

proc interpol = (real b,fb,c,fc,a,fa,h,tol) real:
begin b + h end.

Theorem 3

Statement S_3, with interpol defined according to defintion 6, is partially and totally correct with respect to p_3 and q_3.

Proof

From definition 6 it follows that $i = m_{b,c}$ (i.e. the computed mid-point of $J_{b,c}$). From p_3 it follows that abs $h >$ tol and that t is a tolerance function on $\hat{J}_{b,c} \subset \hat{J}_o$. Hence i is between b and c. □

Remarks

1. Given any system $\hat{\mathbb{R}}$ and subset $\hat{J}_o$, and an implemented arithmetic on $\hat{\mathbb{R}}$, it is an open problem which function on $\hat{J}_o$ is a (or the) minimal tolerance function on $\hat{J}_o$ or how to obtain a tolerance function which is easily definable (in terms of machine parameters) and very close to a minimal tolerance function.
Moreover, it is not known which properties the implemented arithmetic should have in order to ensure that a minimal tolerance function is close to the arithmetic precision function e defined by

$(\forall x \in \hat{\mathbb{R}})$ $e(x)$ is the smallest element of $\hat{\mathbb{R}}$ such that
$x \mathbin{\hat{-}} e(x) < x < x \mathbin{\hat{+}} e(x)$.

The author conjectures that the minimal tolerance function equals e, if $\hat{\mathbb{R}}$ is a floating-point system with a reasonable arithmetic precision (i.e. the number of mantissa digits is much larger than 1) and the implemented arithmetic is optimal (i.e. correctly rounding).

2. The elaboration of interpol as defined above can never lead to overflow. The value thus obtained seems to be preferable above the more obvious value $m^1 \underset{def}{=} (b \mathbin{\hat{+}} c) \mathbin{\hat{/}} 2$.
Indeed, this value may lead to overflow; moreover, replacing m by m^1 in the definition of "tolerance function", one easily finds a counter example to the conjecture in remark 1.

3. The maximum number of iterations required for finding a zero using interpol as defined above equals.

$$n = \lceil \ln(N) \,/\, \ln(2 - 2\varepsilon) \rceil,$$

where

$$N = \underline{abs}\,(xo - yo) \,/\, \min_{x \in \hat{J}_o} t(x),$$

and $\varepsilon = e(1)$, i.e. the relative arithmetic precision for the arithmetic in $\hat{J}_o$. In other words, the formula $n = \lceil {}^2\log(N) \rceil$ for exact arithmetic is modified by replacing base 2 by $2 - 2\varepsilon$, in order to cater for the inexactness of the arithmetic.

Definition 7

```
proc interpol = (real b,fb,c,fc,a,fa,h,tol) real;
begin real sigp = (b - a) × fb; real p = abs sigp;
real q = if sigp ≥ 0  then  fa - fb  else  fb - fa fi;
real m = b + h; real s = if h > 0  then  b + tol  else  b - tol fi;
if p ≤ abs q × tol  then  #  tolerance value  # s
elif p ≥ h × q  then  #  mid-point #  m
else  #  bounded linear interpolate #
real l = b + p/q;
real r = if h > 0
then if l ≤ s  then  s elif l ≥ m  then  m  else  l fi
else if l ≥ s  then  s elif l ≤ m  then  m  else  l fi
fi; r fi end.
```

Theorem 4

Statement S_3, with interpol defined according to definition 7, is partially and totally correct with respect to p_3 and q_3.

Proof

From definition 7 it follows that the computed value i equals either the tolerance value $s = b \mathbin{\hat{+}} \underline{\text{sign}}\ h \times tol$ or the mid-point $m = m_{b,c}$ or the bounded linear interpolate r.
From p_3 it follows that $\underline{\text{abs}}\ h > tol$ and that t is a tolerance function on $\hat{J}_{b,c} \subset \hat{J}_o$. Hence, m is between b and c and $s \neq b$.
From the assumption that the implemented arithmetic is monotonic it follows that $s \in \hat{J}_{b,m}$, so that s is between b and c.
Due to special precantions in the routine considered, the value r is an element of $\hat{J}_{s,m}$. Hence, also r is between b and c. □

Remarks

4. In the ALGOL 60 version published by Dekker (1967), the value $l = b \mathbin{\hat{+}} p \mathbin{\hat{/}} q$ is delivered instead of r, which leads to a simpler and more efficient algorithm. It is not known which properties for implemented system and arithmetic and for the tolerance function are necessary and sufficient to guarantee that l is between b and c. The author conjectures that sufficient conditions are: $\hat{\mathbb{R}}$ is a floating-point system with base β and reasonable arithmetic precision;

the implemented arithmetic is optimal; the tolerance function t satisfies $(\forall x \in \hat{J}_0)\ t(x) \geq \beta\ e(x)$.
The conditions on $\hat{\mathbb{R}}$ and the implemented arithmetic were fulfilled on the Electrologica X8, but not on the CDC Cyter whose arithmetic is far from optimal, cf. Dekker (1976).

5. The number of iterations required is bounded by the value N defined in remark 3. In practice, the number of iterations is much smaller; if f has a continuous second derivative, then the asymptotic order of convergence equals $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$(see o.c.).
Some newer, better, algorithms with ALGOL 60 implementations have been published by Brent (1971) and by Bus & Dekker (1974).
Brent's algorithm requires at most $(n + 1)^2 - 2$ iterations, where n is as defined in remark 3. Bus & Dekker present two algorithms requiring at most $4n$ or $5n$ iterations respectively. The latter algorithm uses mainly a 3-point rational interpolation formula and has an asymptotic order of convergence ζ, where ζ is the largest root of $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, i.e. $\zeta \approx 1.839$.

Conclusion

Proof of correctness of programs is important; it leads to better structured programs and to corrections or improvements of existing programs; moreover, it stimulates research on requirements and correctness of machines, in particular concerning the implemented arithmetic.

Acknowledgement

The author is grateful to P. van Emde Boas for his stimulating discussions on this subject.

Literature

R.P. Brent, An algortihm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. Comp. J. 14 (1971) 422-425.

J.C.P. Bus & T.J. Dekker (1974), Two efficient algorithms with guaranteed convergence for finding a zero of a function. ACM Transactions on Math. Software 1 (1975) 330-345

T.J. Dekker (1967), Finding a zero by means of successive linear interpolation. Proc. Symposium on constructive aspects of the Fundamental Theorem of Algebra, edited by B. Dejon & P. Henrici, Wiley (1969).

T.J. Dekker (1976), Machine requirements for reliable portable software. Dept. of Mathematics, Report 76-15, Amsterdam (1976). (to appear in Proc. Workshop on portability of numerical software).

C.A.R. Hoare (1969), An axiomatic basis for computer programming. Comm. ACM 12 (1969) 576-583.

A. van Wijngaarden (1976), Revised Report on the Algorithmic Language Algol 68, Springer-Verlag (1976)/MC Tracts 50, Math. Centrum (1976).

DE CONVERGENTIE VAN DE HARMONISCHE REEKS

Eelkje Dobber

0. Dank zij jarenlange omgang van de schrijfster met eerste- en tweedejaars studenten in de wiskunde, natuurkunde, actuariële wetenschappen en econometrie is haar gebleken dat de bewering dat de harmonische reeks, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, divergent is, onjuist is. Zie [1; p 384, example 1], [2; p 150, Stelling 8], [3; p 369, 2], [4; p 179, §50 toepassingen (1)], [5; p 315, theorem 15], [6; p 136, voorbeeld 7.3.3], [7; p 342], [8; p 283, voorbeeld 2], [9; p 219], [10; p 47, 3.28 theorem], [11; p 261, 4].
[12; p 15, 2.3 convergence of an infinite series], [13; p 121, 5)].

1. Om de convergentie van de harmonische reeks te bewijzen wordt in dit artikel gebruik gemaakt van twee lemmata en de limiet van een rij.

2. <u>Lemma 1</u> (vergelijkingsstelling, limit comparison test).
Zij $a_n > 0$ $b_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ desda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert. Voor bewijs zie [1; p 396, theorem 10.9], [2; p 145, Stelling 5 en 5a], [3; p 377, 1, The Comparison Test], [4; p 176, Stelling 48.1 en 48.2], [5; p 314, theorem 12 and 13], [6; p 130, Stelling 7.2.3 III], [7; §214], [8; p 286, Stelling], [9; p 217, Stelling], [10; p 45, 3.25 theorem], [11; p 265, Stelling 127], [12; p 20, 2.34 The Comparison Theorem], [13; p 125, §27 1)].

3. <u>Lemma 2</u>
De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ convergeert als $\alpha > 1$. Dit lemma volgt direct uit het z.g. integraalkenmerk (integral test). Zie [1; p 397, 10.13 the integral test], [2; p 150, Stelling 9], [3; p 180, §3. Comparison with an integral], [4; p 179, Stelling 50.1, (het integraalkenmerk, Cauchy)], [5; p 315, theorem 14 (integral test)], [6; p 135, Stelling 7.3.3 (integraalkenmerk)], [8; p 280, 93 Het integraal criterium], [9; p 218, Stelling (Maclaurin)], [10; p 113, 12], [11; p 268, §17 Het integraal kenmerk].
Sommige schrijvers geven het bewijs zonder gebruik te maken van de integraalrekening. Zie [7; p 351 e.v., §220], [10; p 46 e.v., Series

of nonnegative terms], [12; p 19, 2.33 II], [13; p 128].

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Zie [1; p 380, (10.12)], [3; p 35, 8], [6; p 17, opg. 2.5.1], [7; p 350, Toepassingen 3], [8; p 261, voorbeeld 4], [9; p 214, opg. 9.1.1], [10; p 43, Theorem 3.20(c)], [11; p 240, 2].

5. <u>Stelling</u>: de harmonische reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is convergent.

<u>Bewijs</u>:

Beschouw de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$. Deze is convergent volgens lemma 2,

want $1 + \frac{1}{n} > 1$.

Verder geldt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ volgens 4.

Gebruik makende van lemma vindt men dat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ convergent is. Q .e.d.

Bibliografie:

1. Apostol T.M., Calculus Volume I, sec. ed. 1967. Ginn-Blaisdell International Textbooks, Waltham, Massachusetts, Toronto, London.

2. Bruijn N.G. de, Beknopt leerboek der differentiaal - en integraalrekening, tweede druk, N.V. Noord-Hollandsche Uitgeversmaatschappij Amsterdam, 1958.

3. Courant R., Differential and Integral Calculus, Volume I, sec. ed. Blackie and Son Limited, London and Glasgow 1937.

4. Jager H., syllabus Analyse I, Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam, 1970.

5. Kaplan W., Advanced Calculus, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts. Menlo Park, California. London. Sydney. Manila.

6. Kuipers L., Leerboek der Analyse, deel I, derde druk, P. Noordhoff N.V. Groningen 1966.

7. Lobatto's lessen over de Hoogere Algebra, vijfde druk, bewerkt door A.E. Rahusen, Sneek, J.F. van Druten, 1899.

8. Meulenbeld B. en Grootendorst A.W., Analyse I, zesde druk, Stam, Culemborg-Porz-Birmingham 1974.

9. Rootselaar B. van, Wiskundige Analyse, Wolters-Noordhoff N.V. Groningen 1970.

10. Rudin W., Principles of Mathematical Analysis, Mac Graw-Hill, Book Company, Inc, New York, Toronto, London 1953.

11. Veldkamp G.R., Inleiding tot de Analyse, J.B. Wolters, Groningen/Djakarta 1957.

12. Whittaker E.T. and Watson G.N., A course of modern analysis, fourth ed. Cambridge, University Press 1952.

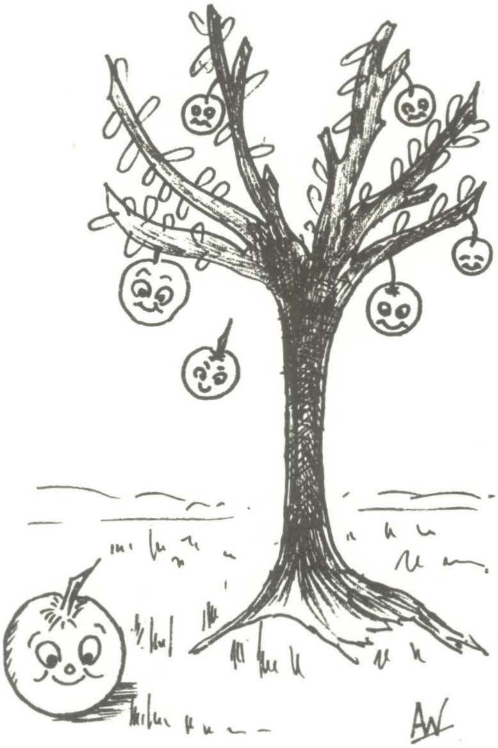
13. Wijdenes P., Middel-Algebra deel II, derde druk, P. Noordhoff N.V. 1944 - Groningen - Batavia.

MIJN BESTE JONGE DOCTER

J.K. van Drunen

Mijn beste jonge docter,

Mijns was de aanvallige leeftijd van 22 jaar toen
ik me voor wiskunde l.o inspande Met grote
toewijding bestudeerde ik de oplossingen van de vraag-
stukken in het Nieuw Tydschrift der Wiskunde,
waarvan vele door je grootvader Lenstra gevonden
waren. Hij was dus knap in dat vak.
Ik weet: toen je grootvader de Groot van de H.B.S
kwam de wiskunde leraar hem aanraadde in wis-
kunde door te gaan daar zat gegeven de aanleg grote
toekomst voor hem in. De taalleraar drong op taal en
theologie studie aan, wat het geworden is.
Over de wiskunde aanleg van je vader en oom
Han behoef ik je niets te vertellen.
Weet je wel dat je moeder op het gymnasium
nimmer moeite met het genoemde vak had?
Alzo mijn beste kerel je bent van een wiskunde
stam. Daar lig je dan vlak bij de stam; volgens
oude kenners rolt een goede appel niet ver van de
stam.
Volgens onze nivelerende heer den Uyl zit in begaafheid
geen verdienste. Toegestemd. Maar wel hoe deze
begaafheid gebruikt wordt. 0,20
Hartelijk gefeliciteerd met de uitstekende in gebruik-
stelling


AW


AW
2-77


AW
2-77


AW
2-77

Het is zo, mijn jonge docter, dat de axioma's van je vak, zelfs het vak zelf in het dagelijks leven allerminst erkenning en waardering vinden.
Neem het axioma: de rechte lijn geeft de kortste afstand tussen 2 punten.
Wel neen denken (zeggen doen ze het niet) de politici langs kronkelpaden bereiken we ons doel: recht toe - recht aan - nooit.
Deze jonge man moest - gedwongen door minister Ken 't maar, tot zijn 26e jaar deze „waarheid" ook slikken.
Hier staat hij 5 jaar later, strekt zijn linker arm uit tot op het hart van zijn meisje en zegt: de rechte lijn is de kortste afstand tussen 2 hart-punten. Het meisje buigt zich, zoent hem en zegt: Dit is de kortste afstand tussen 2 hartpunten.

Een jaar later. Het meiske is zijn vrouw.
Hij breekt een kopje. Zich vaag zijn wiskunde herinnerend zegt: het geheel is samen zijn delen.
Uit de keuken hoort hij: „Niks hoor een gaaf koppie is meer dan zijn scherven. Jammer dat je vader je niet in het weiland kon sturen om de koeienhopen uiteen te slaan. Dat zou nuttiger geweest zijn dan die rare hocus pokus te leren, die nu in mijn oren dreunt. Ga maar gauw een nieuw koppie halen en een mooie."
Zo, jonge docter, wil je „genoten" worden, houd de wiskunde in de studeer, het vriendelijk gekout daarbuiten. Bedenk: het is de raad van een stokoud man, wiens adem volgens de Indianen stinkt, maar wiens woorden wijs zijn. -

-De Suriname rivier is evenals de tijdstroom, waarop
wij ons bevinden nogal onbetrouwbaar.
Wanneer we voor een lange boottocht de corjaal
instapten, hief de roerganger zijn lange pagaai
omhoog en sprak plechtig:

Wakka bon on watra, bakra.

De symboliek voor jou, begrijp je,
het takki, takki vertaal je. —

PROBLEMS ON FLATNESS AND FLAT SPOTS

D. van Dulst

Let X be a Banach space, S_X its unit sphere. For every $x \in S_X$ we define

$$m(x) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \text{ a curve on } S_X \text{ joining } x \text{ to } -x\} \quad (1)$$

($l(\gamma)$ denotes the length of γ), and

$$m(X) = \inf\{m(x) : x \in S_X\} \quad (2)$$

Equivalently, $2m(X)$ is the infimum of the lengths of all centrally symmetric (i.e. $x \in \gamma \Leftrightarrow -x \in \gamma$) closed curves on S_X, and is called the girth of X. Obviously $m(X) \geq 2$ for all X. If $m(x) = 2$ for some $x \in S_X$ and the infimum in (1) is achieved, i.e. if there exists a curve on S_X joining two antipodal points and with length 2, then X is called flat. If $m(x) = 2$ (the infimum in (1) may or may not be achieved!), then x is called a flat spot. The following is known:

(a) $m(X) > 2 \Leftrightarrow X$ superreflexive

(b) A flat space X has non-separable dual X^*. In particular, a flat space is non-reflexive.

Problem 1. Does the existence of a flat spot imply flatness? If not, characterize the Banach spaces possessing flat spots.

Problem 2. If problem 1 is too difficult, show that the existence of a flat spot implies non-reflexivity or, maybe, non-separability of the dual.

Both problems are open in general. The only known information is about special spaces.

[1] D. van Dulst: Local girths of spheres, Report 76-14, University of Amsterdam (1976).

[2] R.E. Harrell & L.A. Karlovitz: Nonreflexivity and the girth of spheres, Inequalities III, 121-127, Academic Press, New York (1972).

[3] R.C. James & J.J. Schäffer: Superreflexivity and the girth of spheres, Israel J. Math. 11, 398-404 (1972).

[4] L.A. Karlovitz: On the duals of flat Banach spaces, Math. Ann. 202, 245-250 (1973).

ON A PROBLEM OF HERSTEIN

G. Efroymson

A better title for this paper would be "On a Problem in Herstein". This is because I am referring not to any research problem posed by the well known mathematician I.N. Herstein in one of his many research papers, but am instead considering an exercise listed by the same I.N. Herstein in his book, Topics in Algebra. The problem is 6c on page 186 and asks for the degree of the splitting field of $X^9 + X^3 + 1$ over Q, the rational numbers. I have been interested in this problem for about 10 years. The start of my interest was when I assigned the problem to an algebra class and then spent a week finding the answer and even then used much more than seemed reasonable for a problem placed so early in field theory. Soon after my first experience with this problem, I had an opportunity to ask Herstein himself about it. Because I was once a colleague of one of Herstein's students, I was taken on a tour of Chicago in the company of the great man. His wife of the time sold art and took us to see an exhibit of "modern art" which consisted mainly of 4 - 10 meters high metal male and female gentilia. After this interesting viewing, we went to a restaurant and I ventured to ask Herstein about the problem in his book. He gave me a quick solution which I have since forgotten except that when I had time to think about it, I do remember that it didn't seem too relevant. Perhaps the art exhibit was a more vivid experience and I had lost my one opportunity to find out what the author had in mind when he proposed this problem. I have never had the nerve to ask again.

So all these years, I have been wondering how on earth a beginning student could be expected to solve this problem. Just recently though I discovered a solution which may or may not be the one intended by Herstein but which must be unique in some fashion or other.

The idea came to me because of a problem I programmed for the computer here at UNM. Over Christmas vacation I decided to learn to program and after some beginning jousts with problemsI had already programmed for an HP 25, I took up D. Knuth's fascinating book, "The Art of Computer Programming," Vol 2 and decided to try and program the method outlined there for factoring polynomials over fields of prime order. This took a long time but eventually I got a working program. Then I used Herstein's polynomial and eventually recovered what I think was my original solution of Herstein's problem. Namely, by adjoining the roots of $X^3 + X + 1$ to Q, one gets an extension of degree 6. Then adjoin a primitive cube root of one, and then the cube roots of two different roots of $X^3 + X + 1$ and one has the splitting field which must thus be of degree less than or equal to 108 over Q. The problem is to show that the degree is actually 108. To see this, note that the factorization mod 7 is $(X^3+3X^2+6X+2)(X^3+6X^2+3X+2)(X^3+5X^2+5X+2)$ and in no way can this come from a factorization over Z since the constant terms must divide 1. Also mod 17, the factorization is $(X+5)(X^2+12X+8)(X^6+11X^3+3)$ which shows that after one root α is adjoined to Q, that 6 divides the order of the splitting field K over $Q(\alpha)$. So 54 divides [K:Q]. Finally since both a primitive cube root of 1 and the discriminant of $X^3 + X + 1$ are required it is easily seen that 4 divides [K:Q]. The computer, of course, is what "trivialized" this solution so I wondered if there could be a even simpler solution involving the computer, and came up with the following.

By Ceboratov's Density Theorem, the density of the primes p for which $X^9 + X^3 + 1$ splits completely should be the same as the degree of the splitting field. But, for this, a much simpler program than that for factoring mod p will do when combined with a prime generating program. For $X^{3m} = a_m X^6 + b_m X^3 + c_m \bmod X^9 + X^3 + 1$. Then $X^{3(m+1)} = -b_m X^6 = (c_m - a_m)X^3 + (-a_m) \bmod X^9 + X^3 + 1$. Moreover, it is clear that $X^9 + X^3 + 1$ factors completely mod p if and only if it divides $X^p - X$. But then $X^p - X \equiv 0 \bmod X^9 + X^3 + 1, p$. But this occurs if and only if $p = 3m+1$ and $a_m \equiv b_m \equiv 0 \bmod p$ and $c_m \equiv 1 \bmod p$. But then m must be even so we can restrict to $p \equiv 1 \bmod 6$. This eliminates half the primes. So the density of those p's which are $\equiv 1 \bmod 6$ for which $X^9 + X^3 + 1$ splits completely should be about 1/54. In fact, a short program and a long run gave the following table.

The first column gives the primes for which the conditions are met. The second column tells how many $p \equiv 1 \bmod 6$ are less than or equal to the number in column 1. And column 3 gives the inverse of the density at that point.

607	52	52
3541	243	122
3643	243	84
4621	308	77
5011	331	66
6673	425	71
7039	446	67
7057	447	56
7351	461	51
8017	497	50
12,637	748	66
12,967	764	64

So 54 is not too unreasonable an answer and more sophisticated programming will almost certainly give the answer, a project which I leave for the reader.

LEVINS THEOREM AND THE MAD MATHEMATICIAN

Peter van Emde Boas

The main insight a freshman should obtain by taking a first course in Logic and Foundation of Mathematics is the Fundamental Principle of Preservation of Knowledge (FPPK) : By deriving Theorems one cannot prove anything not already given by the definitions. This is nothing new; many Theologists and sociologists take a similar position with respect to the intellectual and artistic capacities of a human being.

In practice FPPK leads to the well-known situation that any piece of written mathematics is either trivial or insufficiently precise. During the development of the AUTOMATH project it has been established that even a famous formalist like Landau has made some errors in his 'Grundlagen der Analysis'[1&2]. As a consequence vagueness has established itself as an accepted part of mathematical life. A good author will use statements like 'it is easy to see' or 'a direct and straightforward computation shows' in all circumstances where actual verification takes several weeks to complete and thousends of pages to write down (cf. e.g. [3]). This behaviour is justified moreover by recent results from complexity theory showing that each interesting theory contains easily recognisable infinite sequences of valid theorems whose shortest proofs are prohibitively long [4]. On behalf of this fact there exist inconsistencies which can be added as theorems without ever being uncovered before Doomsday; use of these assertions as arguments in other proofs may help prove new valid theorems that otherwise never can be proven [5].

On the other hand FPPK is highly relevant to the status of trivialities in Mathematics. Presenting a trivial result is legal as long as it is done in such a way that it looks interesting. In the remaining part of this paper I will illustrate a particular triviality which actually represents a deep result with huge impact on the future of Mathematics.

The theorem under discussion is due to the Russian mathematician L.A.Levin [6]. Like many other Russian results it should have been forgotten had it not been for the necessity to provide prof. dr. C.P.Schnorr from Frankfurt AM an excuse for presenting a paper at last years ICALP 3 Symposium in Edinburgh [7].

The content of the theorem is as follows. Consider some NP-complete decision problem of the form $\exists y[\ |y| \leq |x|$ and $P(y,x)\ ]$, where P is a polynomial decidable predicate. A functional solution to this problem is a program Y such that for an input x such that a y with $|y|\leq|x|$ exisis for which $P(y,x)$ holds $Y(x)$ converges, yielding such a y as output; if no such y exists $Y(x)$ diverges. Levins theorem claims the existence of an optimal functional solution, by which we mean a functional solution Y_0 such that the runtime of each functional solution is linearly bounded by the runtime of Y_0.

As a corollary one obtains for so-called self-reducible problems a decision procedure which is optimal upto a polynomial overhead factor, assuming that there exists a total runtime which tightly bounds the runtime of Y_0. This corollary makes it unlikely that such a tight bound exists (although people believing that $P = NP$ may think otherwise).

The theorem as such looks interesting. However, if one reads the proof one discovers nothing but a classroom of monkeys typing out a Shakespeare sonnet [8]. The optimal algorithm simulates all algorithms in parallel, testing each output produced for being a solution, this way never being slower by more than a constant-factor simulation overhead than any other particular functional solution.

It should be noted however at this place that neither Schnorr nor Levin have investigated the importance of their results for everyday mathematics. The construction used in the proof revives the Mad Mathematician who simpely produces mathematical writings, leaving the burden of verification whether his results are correct to his collegues. This Mad Mathematiciam by now can easily be programmed on a computer. Moreover, assuming that we have the program producing output satisfying the syntactical requirements of a proof written in Authomath [9] the verification can be performed by a computer as well. Levins reasoning shows that the pair of computers coupled in this way represents an optimal way of producing Mathematics. For example, if the Riemann Hypothesis can be proved at all, our program will prove it within a constant multiple of the time the most briliant mathematician needs for proving it. The same observation holds for famous problems like the Continuum Hypothesis [10], or the Four Colour Conjecture [11]. At the same time our Mad Mathematician will produce the 25-th Mersenne prime or the least odd perfect number if these numbers exist.

Clearly all of this has been known from the earliest stages of Formalism in Mathematics. The fact however that the above method is not only correct but even optimal represents a challenge to the mathematical community , Governments, Industries and other sponsors of Science to get this project moving. Truth requires us to do so.

References

1 E.Landau, Grundlagen der Analysis, Akad. Verlag Leipzig 1930

2 L.S. van Benthem Jutting, Checking Landau's 'Grundlagen' in the AUTOMATH system, Ph d Thesis Tech Univ. Eindhoven, ed Math. Centre 1977

3 H.W.Lenstra II, Euclidische Getallenlichamen, Ph d Thesis Univ. of Amsterdam, ed Math. Centre 1977 (in Dutch)

4 J.Hartmanis, On effective speedup and long proofs of trivial theorems in formal theories. Cornell TR 75-254 1975

5 J.Hartmanis, Oral commun. Nov 1974

6 L.A.Levin, Universal Enumeration Problems, Pederaci Inforacii 2 (1972) 115-116 (in Russian)

7 C.P.Schnorr, Optimal Algorithms for self-reducible problems, in S.Michaelson & R.Milner eds Proc. ICALP 3 symp Edinburgh 1976, Edinburgh Univ Press

8 Thomas Thorpe, Shakespeare-s Sonnets, London 1609

9 N.G. de Bruijn, AUTOMATH, a Language for Mathematics, Notes of a series of lectures in the seminaire de Mathematiques Superieures

10 P.J.Cohen, Set theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin, New York 1966

11 K.Appel & W.Haken, Every Planar Map is four Colorable, Bull AMS 82 (1976) 711-712

EEN REVOLUTIONAIR SYSTEEM OM STELLINGEN VOOR DE GROTE MASSA TE VERDUIDELIJKEN *

Leopold David Victor Johannes Fiasco

Al jarenlang wordt door een aantal mensen onderwijs gegeven in de getaltheorie.Ook worden er veel boeken op dit gebied geschreven. Het doel van al deze activiteit is natuurlijk dat de bekendheid van dit vak groter wordt. doordat er momenteel inferieure middelen worden gebruikt om dit onderwijs te geven wordt er maar een klein deel van de mensheid bereikt.

Omdat ik dit alles zeer betreur heb ik iets bedacht.Het vak wordt al veel meer populair als er veel meer beeldende voorbeelden van stellingen,lemma's,definities etc. gegeven worden.Hierdoor worden die stellingen,lemma's, definities etc. veel duidelijker en begrijpelijker,zelfs voor analfabeten,doordat het voorstelbaar wordt.Verdere voordelen kunnen zijn dat de boeken er vrolijker uit gaan zien,zodat er meer mensen,aangelokt door dit,deze boeken gaan kopen,zodat de auteurs meer geld in het laatje krijgen waardoor ze met nog meer plezier hun boeken kunnen gaan schrijven.

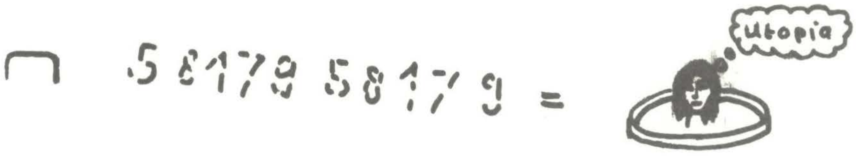
** Dit artikel bereikte ons door bemiddeling van Frank van der Linden.*

Omdat ik begrijp dat er mensen zijn die dit lezen maar nog niet weten wat ik bedoel met die beeldende voorbeelden zal ik achter dit artikel een lijst zetten met enige voorbeelden hoe een woord met een plaatje verduidelijkt kan worden.hoe deze voorbeelden bij enige stellingen gebruikt kunnen worden zal ik nu laten zien :

De stelling dat de norm multiplicatief is kan als volgt worden uitgebeeld:

dat in een eindige lichaamsuitbreiding maar eindig veel priemen kunnen vertakken:

de gehele getallen vormen een hoofdideaalring:



in O_K is ieder priemideaal dat $\neq 0$ is maximaal:

Ik kan zo natuurlijk nog veel meer voorbeelden geven maar dat laat ik graag aan de lezer zelf over.Zoals u bij deze voorbeelden hebt kunnen zien worden de stellingen er meteen duidelijker op.Dus ik raad u aan in volgende artikel en en boeken mijn systeem te gaan gebruiken,het moet echter nog wel iets uitgebreid worden want er zijn woorden die ik op deze manier nog niet verhelderd heb.Dit laat ik graag aan anderen over.

Enige woorden waarvan ik meen dat die het eerst in aanmerking komen voor deze methode zijn:

aantal	functie	L-functie
abels	galois	nakayama
adele	gauss	orde
adisch	geconjugeerd	produkt
algebra	homologie	reciprociteit
archimedisch	idele	regulator
artin	index	residu
cohomologie	isomorfisme	separabel
dedekind	kummer	som
frobenius	kwadratisch	zêta

Dit is dus nog voldoende werk voor enige onderzoekers.

afbeelding

afgesloten

afhankelijk

basis

compleet

complex lichaam

conductor

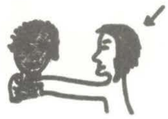
cyclotomisch lichaam

deler

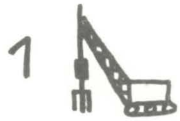
different

diskreet

diskriminant



eenheid



eenheids wortel

eindig

element

Fe

gebroken ideaal

geheel

getal

58179

getallen lichaam

globaal

graad

groep

grootste gemene deler

hoofdideaal

hoofdideaalring

ideaal

ideaalklassegroep

Kanonick

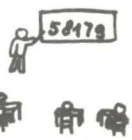
Karakter

亭

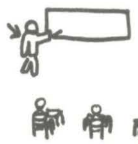
Karaktergroep.

行共大
子有

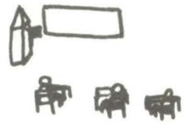
klassegetal



klasselichaam

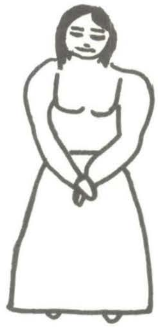


klasselichamen toren.



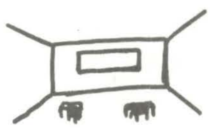
lichaam

lichaams uitbreiding



lichaams basis

lokaal



macht verheffen

maximaal ideaal

niet

niet geheel

niet compleet

norm

onafhankelijk

oneindig

ontbinding

ontbindingslichaam

onvertakt

priemgetal

priemideaal

reëel lichaam

ring

ring van gehelen

Spoor

traagheidsgroep

Vertakking

waardering

Wortel

ON PAINTED GO BOARDS

R.L. Graham

Little Jan, who often spent the evenings watching his father playing the game of Go with friends, remarked one day, "Father, why is it that whenever you finish playing a game, the board always seems to have three similar points which form a triangle of area 3. What I mean by similar is that the three points are either all covered by stones of the same color or are all uncovered". After Jan's father explained why this is so, Jan thought for a moment and then exclaimed "Of course! In fact, I just thought of a positive number A so that no matter how you paint the points of a very large Go board with 10 different colors, there must always be three points having the same color which form a triangle of area A."

Can you tell us the smallest number A that Jan could have been thinking of?

SHE LOVES ME, SHE LOVES ME NOT

Relatives of two games of Lenstra

Richard K. Guy

H. W. Lenstra has suggested a method of generating games by turning coins. For example Sym is played on a row of coins, and a move is to turn any symmetrically arranged set of coins (e.g., the shaded ones in Fig. 1) provided that the rightmost of those turned

Figure 1. A Move in Sym.

goes from heads to tails (other coins may be turned in either sense). The purpose of this last condition is to ensure that the game finishes. In this game, and in all others in this paper, we adopt the Normal Play convention that a player unable to move loses, i.e. that the games are Last Player Winning. Sym, and indeed any Impartial Game (all of whose positions have the same set of options for each of the two players) is covered by the theory discovered independently by Sprague [6] and Grundy [4]. However the detailed strategy for playing most last player winning impartial games without ties (draws) is not known. Sym is mentioned in the chapter, Turn and Turn About, in [1] where it is stated that the nim-values (Sprague-Grundy functions) "display no recognizable pattern", those for a head-up coin in position n being exhibited as

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
nim-value	1	2	4	3	6	7	8	16	18	25	32	11	64	31	128	10	256	...

As a start towards obtaining a complete analysis of this game, you are invited to investigate the game Sympler which is played like Sym except that the first coin on the left must always be included in the symmetrical pattern of coins turned in each move.

One can also play Lenstra's coin-turning games in two (or more!) dimensions. The game of Carpets is the cartesian product of two games of Sym, a typical move being to turn the coins (shaded in Fig. 2) at the intersections of a symmetrical set of rows with a symmetrical set of columns. To ensure that the game satisfies

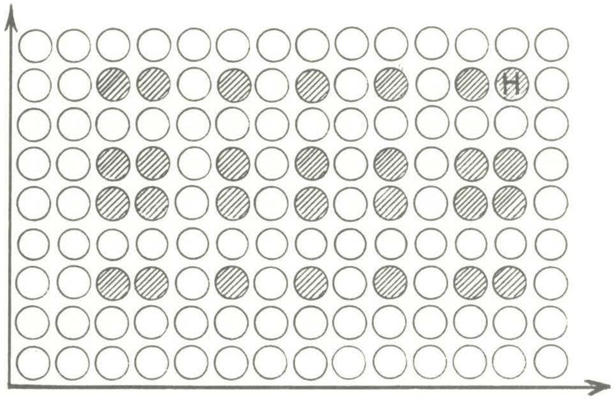


Figure 2. A Move in Carpets.

the Finishing Condition we also demand that the "most north-easterly" of the coins turned in any move goes from heads to tails. We are no better able to analyze Carpets than we were to analyze Sym. However we do know that the nim-value of a head-up coin in Carpets is the nim-product [**2**, p.52] of the nim-values corresponding to its two coordinates in Sym. Perhaps some light will be shed by the reader who is able to analyze **Fitted Carpets**, played like Carpets, but the carpet must fit snugly against the coordinate walls and include the "most south-westerly" coin at the origin.

For our next set of examples we turn to the "octal" games introduced by Guy and Smith [**5**]. These are played with heaps of beans, and a move (for either player) may be described by an octal code-name,

$$\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \cdots$$

where the code-digit $\mathbf{a}_r$, $r > 0$, indicates the circumstances in which either player may remove r beans from a heap of n.

$\mathbf{a}_r$	When you can take $r > 0$ beans from a heap
0	Never.
1	Only if the r beans constitute the whole heap; $r = n$.
2	Only if there are more than r beans in the heap; $r < n$.
3	Provided there are r beans in the heap; $r \leq n$. $\mathbf{3} = \mathbf{2} + \mathbf{1}$.
4	Only if the remaining $n - r$ (> 1) beans are left as 2 non-empty heaps.
5	$= \mathbf{4} + \mathbf{1}$.
6	$= \mathbf{4} + \mathbf{2}$.
7	$= \mathbf{4} + \mathbf{2} + \mathbf{1}$.

$a_0 = 4$ or 0 according as it is permitted or not to split a heap into 2 non-zero heaps without taking any beans.

Guy and Smith [5] gave complete analyses of a number of such games, the best known, perhaps, being $\cdot 77$, Kayles, and $\cdot 137$, Dawson's Kayles. However, the vast majority of such games remains a complete mystery. Readers may like to investigate some of the following examples:

- $\cdot 3$ Take a bean from a heap.
- $\cdot 5$ Take a bean if it's isolated, or from a larger heap which must be left as 2 non-empty heaps.
- $\cdot 7$ Take a bean from a heap, possibly splitting the remainder of the heap into 2 heaps. (There are also the generalizations to "into 3 heaps", "into 4 heaps", etc.)
- $4 \cdot 0$ Split a heap into 2 non-empty heaps.
- $4 \cdot 2$ Split a heap into 2 non-empty heaps, or take a bean from a larger heap.
- $\cdot \dot{3}\dot{0}$ Take any odd number of beans.

$4 \cdot 01$, $4 \cdot 04$, $4 \cdot 05$, $4 \cdot 21$, $4 \cdot 24$, $4 \cdot 25$ and $\cdot 30X$, $\cdot 50X$, $\cdot 70X$ where X is any one of the code-digits $1, 2, \ldots 7$.

The usual hope in investigating such games is that one is able to establish the periodicity of the nim-values.

For our next two games we turn to the chapter, Spots and Sprouts, in [1]. *Brussels Sprouts* was described in [3; Of Sprouts and Brussels Sprouts, games with a topological flavor, **217** No.1 (July 1967) 112-115; No.2 (Aug.) 109]. It was invented, along with Sprouts, by J.H. Conway and M.S. Paterson. The game starts with a number of 4-arm crosses. A move is to connect 2 arms (of the same cross or of different ones) by a continuous curve (which mustn't intersect any other curve or cross) and to make a new cross somewhere along its length, as in Figure 3. Since 2 arms are used in

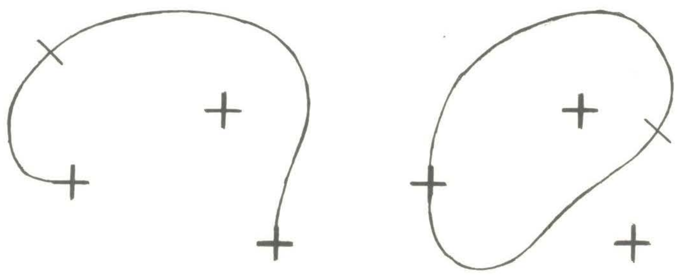


Figure 3. Two Possible First Moves in 3-cross Brussels Sprouts.

each move and 2 new ones created, it seems possible that the game can go on for ever. However if we start from n crosses and make m moves, we have $n + m$ crosses, $2m$ arcs joining them and $4n$ arms left, so there are at most $4m$ regions and Euler would be able to give a bound on m, and, in theory, the game can be analyzed. Mention of Euler reminds us that we might also play Brussels Sprouts on surfaces of higher genus, but the analysis of such a game is even more difficult as there seems to be no guarantee that the players will make use of the greater facilities available. A similar difficulty occurs on non-orientable surfaces, in addition to the physical problems which arise. Is it of advantage to use both sides of the paper?

Before considering the second game of this type we describe Lucasta, named in [1] for its inventor, Edouard Lucas. Start with a number of spots. A move is to draw a curve with 2 distinct spots as endpoints. These may not be the 2 endpoints of a single previously drawn curve, though they may be linked together by a chain of curves through intermediate spots. No 2 curves may cross, and no spot may be the endpoint of more than 2 curves, so the curves can only build up into chains or closed loops joining 3 or more spots. In [1] we give a strategy that enables you to win all the Lucasta positions you deserve to, when the number of chains is small. Indeed, we are able to give such a strategy for Misère Lucasta (Last Player Losing), a happy but complicated exception to the usual intractability of Misère Play (see [2], Chapter 12).

The game of Cabbages, or Bugs-Caterpillars-and-Cocoons, is like Lucasta but allows the move completing a closed loop passing through only 2 spots consisting of 2 curves with the same 2 endspots. It turns out that the analysis is already included in that for Lucasta. But what about **Jocasta** which also allows the move joining a spot to itself, forming a closed loop passing through just that one spot?

Our final example is a variant of Hackenbush, originally formulated as an impartial game [3; How to triumph at nim by playing safe, and John Horton Conway's game "Hackenbush", **226** No.1 (Jan. 1972) 104-107; No.2 (Feb.) 104]. It is played with a picture or graph, each component of which has one or more grounded vertices. A move is to delete an edge of the graph together with any part of the graph which is thus disconnected from the ground. For example

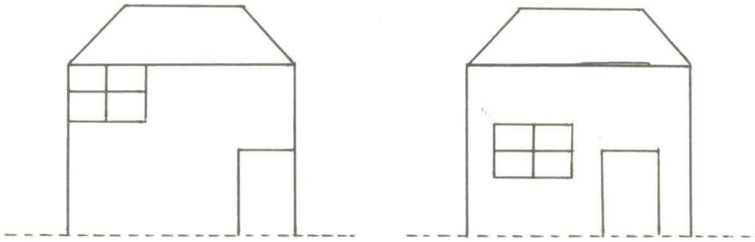


Figure 4. Childish and Adult Pictures of a House.

the adult picture in Fig. 4 is illegal; the window should be removed since it is not connected to the ground. Complicated but complete analyses of Hackenbush have been given by Conway [2, Chap.13] and Berlekamp [1]. It is perhaps too much to expect such an analysis for the Partizan version, Red-Blue Hackenbush, in which the edges are colored and Left may only delete blue edges and Right red ones, though disconnected edges of either color are removed. There may be more hope for an analysis of Childish Hackenbush, suggested by Jonathan Schaer, but even that game is not nearly as trivial as it might first appear. In Childish Hackenbush you may not delete edges which would disconnect other edges from the ground. We know that the values of Red-Blue Hackenbush positions are numbers, and can have arbitrarily large powers of 2 in their denominators. The values of Childish Hackenbush positions are also numbers. Richard Austin has found one with denominator 8, but it is not known if the denominators can be arbitrarily large. Can anyone throw light on **Impartial Childish Hackenbush?**

I am indebted to J.H. Conway for numerous conversations and for his suggestion that I was the right person to fill this much needed gap in game theory literature; there are many ways in which this paper would have been poorer had I not failed to heed his advice.

1. E.R. Berlekamp, J.H. Conway and R.K. Guy, Winning Ways, Freeman, 1977.
2. J.H. Conway, On Numbers and Games, Academic Press, 1976.
3. Martin Gardner, Mathematical Games, Scientific Amer., each issue.
4. P.M. Grundy, Mathematics and games, Eureka, 2 (1939) 6-8; reprinted ibid. 27 (1964) 9-11.
5. Richard K. Guy and Cedric A.B. Smith, The G-values for various games, Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956) 514-526; Zbl.74,345.
6. R.P. Sprague, Über mathematische Kampfspiele, Tôhoku Math. J., 41 (1935-36) 438-444; Zbl.13,290.

ON TIME-LIKE THEOREMS

Michiel Hazewinkel

This paper is dedicated to Hendrik W. Lenstra II on the occasion of the 33rd day of the 29th year of his life, a day which turned out to be a distinguished element (i.e. a possible base point) in the set of the days of his life.

1. Introduction. In this paper we continue the investigation begun in (1) of time-like deformations of space-like statements and our study of theorems which can be proved only a finite number of times (if at all). When writing the final version of this paper we suddenly found ourselves in a position to use, and thus investigate in more detail, a method of proof which has been used extensively by Th. Roszak a.s.i. (2).

As this method appears to be relatively unknown in mathematics, we take time out to describe it. Briefly it consists of the following procedure:

(a) take any well known authoritative text, e.g. the Bible;

(b) select two sentences at random and juxtapose them;

(c)contemplate the result for as much as five minutes;

(d) add a large number of quotes from diversified sources on the euphony or linguistic similarity principle (if the same word occurs in two different paragraphs of the same or different texts the two paragraphs are causally and temporally related);

(e) glue the results together by means of the obvious 1-cocycle;

(f) publish, sit back, and watch your taxable input grow.

The application given below of this method appears to be the first in mathematics. A problem which may very well be amenable to attack by the same techniques is problem 4b of (3). Related material can be found in (4) and (5).

On the other hand we remark that hte method outlined above enjoys wide popularity, especially in the field of applied and actual decision and control. (Also in applied planning and related fields).

Conjecturally the method outlined above is equivalent to running any set of data through one of the more sophisticated modern learning machines like the "chaostron" as described in (6). Some positive evidence for this conjecture lies in the fact that, as the authors remark, this machine has been an excellent aid to control of the Navy's spare parts inventory. Of course this conjecture presupposes the availability of a large enough set of data. There is reason to doubt this, though the lack may be temporary (7).

2. The main theorem.

The main theorem we would like to prove is

2.1. Theorem. This is not the best of all possible worlds.

Actually, as yet we are unable to prove theorem 2.1 but can only prove a somewhat weaker statement

2.2. Theorem. The probability that this is the best of all possible worlds is zero.

Also the nature of the proof of theorem 2.2 (cf. also corollary 4.1) is such that it is highly unlikely that we shall be able to prove theorem 2.1.

3. Proof of theorem 2.2.

The proof of theorem 2.2 goes in several steps.

3.1. Step 1. Adopt a son and train him in mathematics; especially knot and braid theory and applications of wreath products, exponential growth and temporal logic.

3.2. Construction 1. Take any root system. We can assume that it is in its ground state. Then there is non-zero growth at the boundary. Section the resulting stalks and sheafify them. (If desired one can also take equivariant slices). Apply an intertwining operator and construct the corresponding loop space with a base point (point of reference) at least six feet above ground level. (The author is 5' 8"; taller scientists need a higher point of reference).

3.3. Construction 2. Take a second root system and proceed as in 3.2 above. This time, however, instead of applying an intertwining operator, take a wreath product.

3.4. We are now in a position to apply the method outlined in the introduction. Indeed it suffices to combine the results obtaine in 3.2 and 3.3 with Matthew 27:5 (8) in conjuction with the Apostel Paul's exhortation: "Now go forth and do likewise". To meet the boundary conditions imposed by this procedure (9) it may be necessary to do some judicious investing on the basis of Judges 16:19 as compared to more generally accepted statements (10).

Given anyone of a large set of generally accepted axioms there is now a positive chance that statement 2.1 will be seen to be true. If not than step 1 above permits iterations of the whole procedure. A limit argument now finishes the proof of theorem 2.2. The task of caarying out the detailed instructions is left to the sufficiently interested reader.

4. Some consequences.

4.1. Corollary (of the proof). The word "or" in "Publish or perish" is not necessarily strictly disjunctive.

4.2. Corollary. Refereeing may be hazardous for your health.

A result very much related to corollary 4.2 has been obtained by the Surgeon General of the United States by totally different methods (11). Neither of the results is a consequence of the other, but they do have a large intersection.

Notes and references.

1. M.Hazewinkel, On time-like deformations of statements and evanescent theorems. J. of Math. and other fallacies, to appear.

2. Th. Roszak, several books; for the purposes of this noto it is irrelevant which one is consulted.

3. Cf. H.J.Lipkin, J. of irreproducible results 7,12 (1958), problem 4b: "Show that if all undergraduates were transformed into Hilbert space it would be a good thing".

4. W.Davies, Statistics and the single girl, Manchester Guardian, Nov. 15, 1969. Especially lines 14,15: "It is beautifull, but is it safe".

5. C.Fadiman, Meditations of a mathematical moron. In: C.Fadiman, Any number can play, Avon, 1957, pages 102-111.

6. J.B.CAdwallader-Cohen, W.W.Zysick, R.R.Donelly, The Chaostron. An important advance in learning machines. J. of irreproducible results 10 (30), 1961.

7. Cf. Ch.G.Tierney, Why we must go to the moon, In: Martin Levin's "Phoenix Nest", Saturday Review, 13 Dec. 1969. Some relevant quotes are: "In a few short years, all the data the earth has to offer will have been ground through the world -wide array of data_processing-machines", " The devil finds work for idle circuits to do", "Machines are ruthless", "Surveyor II revealed what appear to be natural lumps of pure data the size of turtle eggs lying exposed on the surface waiting to be scooped up".

8. Et projectis argenteis in templo, recessit (Judas), et abiens se suspendit (and ... he (Judas) went forth and hanged himself).

9. A. Bierce, The Devil's dictionary, under "funeral":

The savage dies - they sacrifice a horse
to bear to happy hunting grounds the corse
Our friends expire - we make the money fly
in hope their souls will chase it to the sky

10. Cf. e.g. the Cecil B. DeMille interpretation of "Samson and Delilah".

11. Cf. any packet of cigarettes.

(Editors note, added in proof: At the insistence of the editor the author carried out all the necessary verifications. As a result the author found himself unable to correct the proofs, and the editor must perforce assume responsibility for the printing errors that remain).

EEN OPMERKING OVER DE VOORSTELLING VAN $(a + b)^n$, MET n=3,4,5 DOOR MARIA MONTESSORI

Frans Huikeshoven

Inleiding:

De manier waarop Maria Montessori $(a + b)^3$ uitbeeldt, vind ik bijzonder aardig. Toen ik ontdekte dat zij ook $(a + b)^4$ en $(a + b)^5$ op soortgelijke wijze "bouwde", ben ik er van uitgegaan dat ik de uitbeelding van $(a + b)^3$ niet goed begreep en heb ik mij er verder in verdiept.
In dit artikel beschrijf ik eerst de uitbeelding van $(a + b)^3$, dan ga ik in op de beschrijvingen van Montessori voor de hogere machten.

De formule $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Dit wordt uitgebeeld door een kubus opgebouwd uit 8 blokjes, die resp. voorstellen $a^3, a^2b, a^2b, a^2b, ab^2, ab^2, ab^2$ en b^3 zie fig. 1. Een nadere uitleg is overbodig.

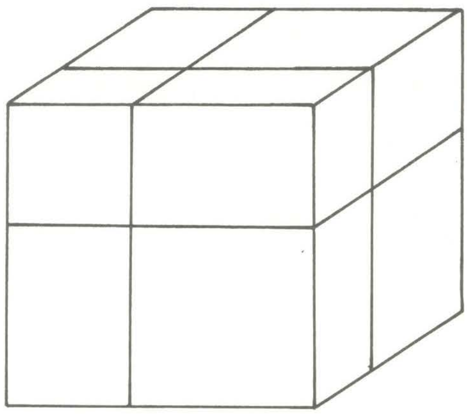


fig. 1

Dit geeft een duidelijke voorstelling van $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Deze blokkendoos wordt als Montessori leermateriaal vervaardigd en is uitgebreider beschreven in [3] pag 19 en [4].

De blokkendozen voor de hogere machten.

Deze zijn beschreven in [1] pag 367-379. Ik geef een korte samenvatting van deze beschrijving.

Na enige opmerkingen over de moeilijkheden om een 4^e macht uit te beelden, wordt aangegeven dat mogelijkheden gevonden worden door het vermenigvuldigen als een aantal maal herhalen te zien. De kubus van $(a + b)^3$ wordt uit elkaar gehaald en de stukken $a^3 + 3a^2b$ resp. $b^3 + 3b^2a$ (zie fig.2) worden als essentieel gezien.

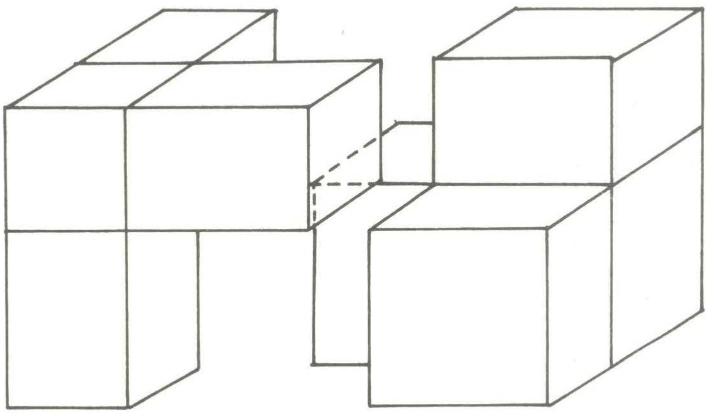


fig. 2

Dan wordt $(a + b)^4$ gesplitst als

$(a^3 + 3a^2b)a + (a^3 + 3a^2b)b + (b^3 + 3b^2a)a + (b^3 + 3b^2a)b$. Volgens mij komt nu de belangrijkste, en het lijkt mij ook de zwakste, opmerking:

Omdat de a en b, die buiten de haakjes staan, alleen aangeven hoe vaak de term tussen de haakjes herhaald moet worden, zegt Montessori dat je net zo goed a gelijk aan 3 en b gelijk aan 2 kunt kiezen. De verdere constructie bestaat uit het"uitrekken met factor 2 en 3" van stukken van de vorm $(a^3 + 3a^2b)$, zoals die in fig 2 staan aangegeven. De vorm van het stuk $(a^3 + 3a^2b)a$ is te zien in fig 3.

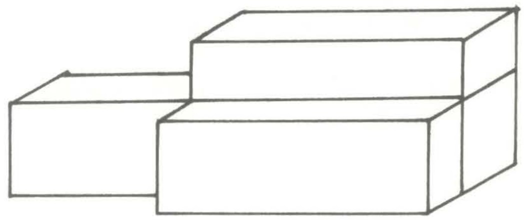


fig. 3

Het uiteindelijke resultaat is te zien in fig 4.

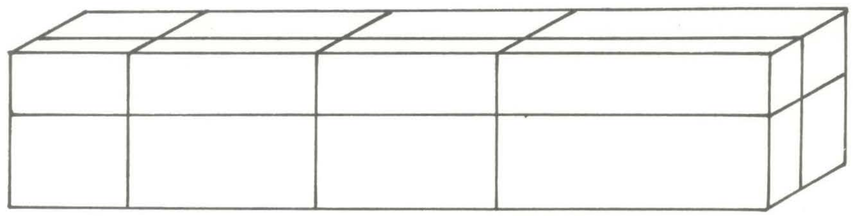


fig. 4

De blokkendoos voor $(a+b)^5$ is ook alleen voor a=3 en b=2 gemaakt. Ik volsta met een afbeelding (fig. 5). De uitwerking is aan de lezer overgelaten.

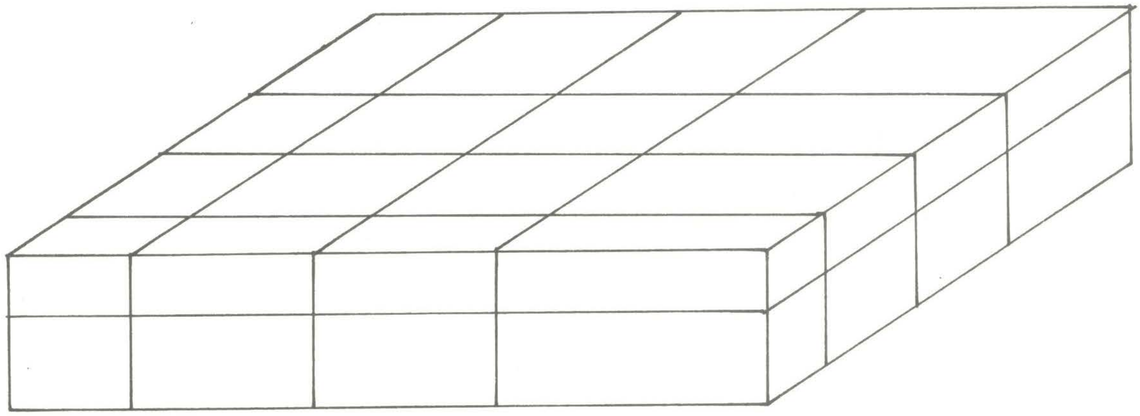


fig. 5

Enkele opmerkingen.

a) Het lijkt mij dat de blokkendozen voor de vierde en vijfde macht geen bijdrage leveren aan het verrijken van het rekenkundig inzicht, zowel van kind als volwassene. Ik vind het dan ook juist dat deze blokkendozen (nog?) niet in produktie zijn bij de fabrikant van Montessori leermiddelen.

b) Buiten deze merkwaardigheden bevatten de geschriften van Montessori nog vele andere fouten en zwakke punten. Zoals bijvoorbeeld:

i) Het construeren van de kwadratuur van de cirkel door eenvoudig aan te nemen dat $\pi = 3.14$ (zie [2] pag. 241).

ii) Het bewijs van de stelling van Pythagoras voor een driehoek waarvan de rechthoekszijden zich verhouden als 3:4. Zij schrijft dat de schuine zijde dan lengte verhouding 5 heeft en het bewijs bestaat dan uit de opmerking dat $3^2 + 4^2 = 5^2$ (zie [2] pag. 246).

Daarom lijkt mij het blind volgen van de geschriften van Montessori, zoals dat door verschillende mensen, in het bijzonder ook in de U.S.A., gedaan wordt, onjuist. Een grondige doorlichting van het Montessori materiaal voor rekenen en meetkunde lijkt me gewenst.

Litteratuur:

1 Maria Montessori - Psico-Aritmetica. Spaanse vertaling. Garzanti 1971.

2 Maria Montessori - Psico-Geómetria. Spaanse vertaling. Araluce Barcelona 1934.

3 Het Montessori materiaal deel I, beschreven en samengesteld door M.J. ten Cate, T.J. Hoeksema en E.J. Lintvelt-Lemaire, 1973.

4 De kuben van de tweeterm en de drieterm - Samenscholen 10 (1970) pp 5-7.

OVER DE SEMANTIEK VAN REFERENTIËLE UITDRUKKINGEN IN NATUURLIJKE TAAL MET EEN TOEPASSING OP HOSIA W. LABBERS JR.

Theo Janssen

Referentiële uitdrukkingen komen in Natuurlijke Taal zeer vaak voor. Voorbeelden zijn Fido, Hendrik, een promovendus, alle varkens, de negatieve wortels van x^2-1, een eenhoorn en Hosia W. Labbers jr.. In deze bijdrage willen we ingaan op de semantiek (betekenis) van dit soort uitdrukkingen.

Allereerst merken we op dat al deze uitdrukkingen zich taalkundig op dezelfde wijze gedragen. Elk kan optreden als lijdend voorwerp , b.v. in de zinsconstructie "Ik zoek ..."; of als onderwerp in de zinsconstructie "... is klein" of "...zijn klein". Dit toont aan dat deze uitdrukkingen qua betekenis verwant moeten zijn en daarom volgens dezelfde semantische principes geanalyseerd moeten worden.

De traditionele wijze om dit te doen kan weergegeven worden door te zeggen dat hun betekenis datgene is waar ze naar verwijzen. De betekenis van Fido is de hond met deze naam, dus de betekenis van Fido is Fido zelf. Deze methode van analyseren staat bekend als het Fido-principe. Voor Hendrik werkt het Fido-principe uitstekend. De betekenis van een promovendus is analoog: het is een of ander niet nader gespecificeerd persoon die aan een proefschrift werkt. Wanneer we deze benadering toepassen op alle varkens, dan moeten we met alle varkens een individu associeren, dat moet dus het universele ideale varken zijn: een wezen dat juist alle eigenschappen heeft die ieder varken heeft. Dus het is een zoogdier en het knort. Omdat niet ieder varken rose is,noch grijs is,en omdat er geen enkele kleur is die ieder varken heeft, heeft het ideale varken geen enkele kleur; bovendien is het niet kleurloos want geen enkel varken is kleurloos. Het ideale varken is een hoogst merkwaardig wezen!

U ziet dat een consequente toepassing van het Fido-principe tot ongewenste gevolgen leidt. Deze en andere problemen maakten referentiële uitdrukkingen tot een centraal punt in de taalphilosofie. De ontologische implicaties zijn ook bijzonder interessant. Recentelijk is door Lewis(1) en Montague(2) een benadering gevonden die alle problemen oplost. Wij zullen deze oplossing bespreken en vervolgens toepassen op Hosia W. Labbers jr..

Het uitgangspunt is van de oplossing van Lewis en Montague is dat een individu uniek bepaald is door de verzameling van al zijn eigenschappen. Geen twee individuen hebben precies dezelfde eigenschappen, men denke aan mensen en de eigenschap deze bepaalde vingerafdruk te hebben. Als een individu eigenschap E heeft, dan heeft hij eigenschap $\neg E$ natuurlijk niet. Omgekeerd als hij eigenschap E niet heeft dan is $\neg E$ uiteraard wel op hem van toepassing. We hoeven dus slechts de positieve eigenschappen (voortaan kortweg eigenschappen) in onze beschouwing te betrekken.

De semantiek van Hendrik is dus een verzameling eigenschappen. We willen dit weergeven door een formule. Met E(hendrik) geven we aan dat eigenschap E van toepassing is op Hendrik.. Met $\lambda E[E(hendrik)]$ geven we de functie aan die voor iedere eigenschap zegt zegt of Hendrik die eigenschap heeft. Dus voor argument 'draagt een pruik' is de functie-waarde <u>true</u> als Hendrik een pruik draagt, dus als pruikdragend(hendrik)=<u>true</u>; en anders is de functie waarde <u>false</u>. Dus $\lambda E[E(hendrik)]$ is de karakteristieke functie van bovenbedoelde verzameling. We zullen zoals gebruikelijk in de logica een verzameling identificeren met zijn karakteristieke functie. Aldus verkrijgen we

STELLING 1. de betekenis van Hendrik = $\lambda E[E(hendrik)]$

In het voorafgaande betoog hebben we bovendien bewezen

LEMMA 1. *Voor iedere eigenschap* Eig *geldt*

$$\lambda E[E(hendrik)](Eig) = Eig(hendrik)$$

De betekenis van een promovendus is die verzameling eigenschappen zó dat er voor iedere eigenschap een promovendus is met die eigenschap. Een voorbeeld van zo'n eigenschap is 'heeft doctoraal wiskunde gedaan'. Analoog aan de behandeling van Hendrik kunnen we dit in een formule weergeven:

STELLING 2. de betekenis van een promovendus = $\lambda E[\exists x[promovendus(x) \ \& \ E(x)]]$

Analoog aan het vorige geval kunnen we aantonen dat

LEMMA 2. *Voor iedere eigenschap* Eig *geldt*

$$\lambda E[\exists x[promovendus(x) \ \& \ E(x)]](Eig) = \exists x[promovendus(x) \ \& \ Eig(x)]$$

Een bijzonder geval is de eenhoorn. Zoals iedereen weet bestaan dergelijke we wezens niet. Derhalve is voor iedere eigenschap Eig de uitspraak $\exists x[eenhoorn(x) \ \& \ Eig(x)]$ onwaar omdat de uitspraak $\exists x$ eenhoorn(x) onwaar is.Dit toont aan dat

STELLING 3. de betekenis van een eenhoorn = $\lambda E[\exists x[eenhoorn(x) \ \& \ E(x)]] = \lambda E[\underline{false}]$

Beschouw vervolgens de uitdrukking alle varkens. Volgens de principes die we hiervoor hebben toegelicht is de betekenis hiervan de verzameling van eigenschappen die alle varkens gemeen hebben. In formule

STELLING 4. de betekenis van alle varkens = $\lambda E[\forall x[\text{varken}(x) \rightarrow E(x)]]$

Enerzijds geldt $\forall x[\text{varken}(x) \rightarrow \text{knort}(x)]$ dus knorrende behoort tot de verzameling aangegeven in LEMMA 4. Anderzijds is de uitspraak $\forall x[\text{varken}(x) \rightarrow \text{rose}(x)]$ onwaar, dus rose behoort niet tot de verzameling. Aangezien we nu niet langer claimen dat er een individu bestaat dat precies deze eigenschappen in zich verenigt, is er geen probleem meer. Men is dan ook zeer tevreden met deze benadering; ze lost alle problemen op en is dus correct.

Tenslotte willen we de verworven inzichten toepassen op Hosia W. Labbers jr.. We onderzoeken mogelijke positieve eigenschappen van hem. Een kandidaat is 'heeft een kamer in het wiskunde gebouw'. Door eenvoudig nagaan (volgens de brute kracht methode) is gebleken dat Hosia deze eigenschap niet heeft. Zo zult U nog vele eigenschappen kunnen bedenken die Hosia niet heeft. Misschien denkt U vervolgens aan de eigenschap 'heeft een vraagstuk in het Nieuw Archief gepubliceerd'. Maar dan begaat U een vergissing, U zet de zaak op zijn kop. Het is een eigenschap van het Nieuw Archief dat er een vraagstuk in heeft gestaan dat ondertekend is met de naam Hosia W. Labbers jr.. Doch dit bewijst niets over Hosia. Mogelijk heeft een zetter zich vergist , of heeft de een of andere onverlaat zijn inzending ondertekend met de naam Hosia W. Labbers jr.. Ook is het onjuist te menen dat Hosia de eigenschap 'komt voor in het proefschrift van P. van Emde Boas' zou hebben. Ten eerste komt niemand voor in het proefschrift (stel dat er een mens in het proefschrift zou wonen) en ten tweede is het alweer andersom. Het is een eigenschap van het proefschrift dat de letterreeks "Hosia W. Labbers jr." erin voorkomt. Aldus moeten we constateren dat geen enkele positieve eigenschap op Hosia van toepassing is: de verzameling is leeg. Dit brengt ons tot de volgende stelling:

STELLING 5. Hosia W. Labbers is een eenhoorn.

BEWIJS. $\lambda E\ \exists x\ \text{eenhoorn}(x)\ \&\ E(x) = \lambda E\ \underline{\text{false}} = \lambda E\ E(\text{Hosia W. Labbers jr.})$

De toepassings mogelijkheden van deze taalphilosofische ontdekking zijn hiermede natuurlijk niet uitgeput. Binnenkort hopen wij ook de promotor deze wijze te kunnen behandelen, waarna de Riemann-hypothese ook binnen ons bereik komt.

REFERENTIES

(1) Lewis D.(1970) *General Semantics* Synthese 22,pp.18-67, also in B. Partee *Montague Grammar*, Academic Press, New York (1976)

(2) Montague R.(1973) *The proper treatment of quantification in ordinary English* in Hintikka, Moravcsik & Suppes *Approaches to natural language*, Reidel, Dordrecht, also in R.H.Thomason *Formal Philosophy, Selected papers of Richard Montague*, Yale University Press, New Haven and London(1974).

Grazing cattle in global fields,
Great Ring Heroes which it yields.
A serious poem *

Wits van Joort *

Once upon a time, when history began,
Primitive roots were found by a young man.
He only had to master an integral domain
In which notable people searched in vain.

A finite field was grazed night and day,
Until it was doubly generated in this way.
These gifts from the Lord,
Made him do better than D. van Port.

The ghost of Emmy in the shape of a swan,
Was the next harvest he won :
Invariant transcendentals with pure grace,
Found in Ventiones a special place.

The next usable bound our hero had to face,
Was a complex cipher coming from a trace,
In bicycle-tomics he was bright,
And found hardy cubes completely wright.

Next a boas constrictor and A. Klaas
Helped mak-ing the running machines pass.
The fake methods of these friends
Will float the decimals to disastrous ends.

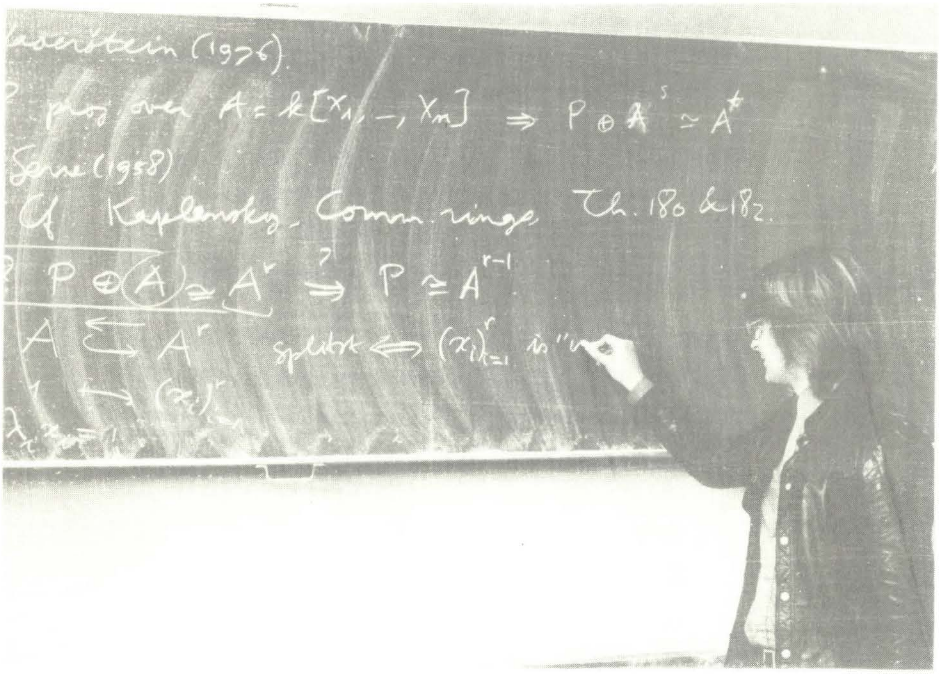
---

* We thank Oliver Goldsmith (1728 - 1774) for stimulating suggestions.

* *Dit gedicht bereikte ons door bemiddeling van Frans Oort en Judith van Witsen.*

Tempt the dangerous deep, explore the mind
Of these wonders full of devine.
Thou hast the treasures of skilled wealth,
We wish you strong legs to stay in balanced health :

A person may not only be measured by what he found,
Although amazed rustics gazed around,
And still they gaze, and still the wonder grew,
That this small head could carry all he knew.



VRIJ NAAR N.N.

Ben Knip

In de tijd van de oliecrisis besloot de heer P. te gaan bezuinigen op het electriciteitsgebruik. Zijn huisgenoten en hijzelf vergaten nog al eens het licht in de hal uit te doen of ontstaken het ook als het eigenlijk niet nodig was.

Hij wilde de procedure van het aandoen bemoeilijken zonder die van het uitdoen ingewikkelder te maken. Hij verving daarom de schakelaar door vier, in een vierkant opgestelde, in serie geschakelde drukschakelaars. Van deze drukschakelaars zijn de aan- en uitpositie van buiten niet op het oog van elkaar te onderscheiden.

Is het licht aan dan is één handeling voldoende om het licht uit te doen. (één handeling betekent hier tegelijkertijd drukken op 4 knoppen, op 3 knoppen, op 2 knoppen of drukken op 1 knop)

Maar hoe krijg je licht dan weer aan ...?

Na verloop van tijd slaagden de huisgenoten er in het licht in hoogstens 15 handelingen aan te doen.

De speelse, plagerige geest van P. deed hem toen overwegen om achter de drukknoppen een draaibare schijf te monteren die bij elke handeling eerst over een veelvoud van 90° zou roteren en aldus de contacten cyclisch zou verwisselen, terwijl het veelvoud ad random zou worden bepaald. Tweemaal achtereen op dezelfde knop drukken garandeert niet dat de oorspronkelijke toestand wordt hersteld!

Glimlachend meende P. dat hij er wel in zou slagen een strategie te ontwikkelen waarmee hij in staat zou zijn het licht te laten schijnen.

Beste Hendrik, is de mening van P. juist? Laat je licht ook hier eens schijnen!

WISKUNDIGE CHIRURGIE

W. Kuijk

In Dendermonde was een man
die zijn binnenst buiten keren kan.
En immer als die extrovert
met hart op tong gevonden werd
leek hij heel zeker en apert
van buitenaf een introvert.

Tot op een dag zijn vrouw, wiskundig,
en met chirurgisch mes, heelkundig,
't geslacht van onze vreemde klant
verlaagde, tot die van de band
van Möbius en Kleins flacon,
en hij zich niet meer keren kon.

Op zijne mond zit nu een grendel,
toch blijkt hij "difficult to handle",
want wat hij toont is zeer bestendig
van alle kant gezien inwendig.
Men ziet hem zelden uit de knoop:
een extravert werd homo nope.

EEN SPECIAAL GEVAL VAN DE STELLING VAN DIRICHLET

Voor Leken Begrijpelijk Gemaakt Door Hosia W. Labbers, Jr.

En Uitgetikt Door Peter Van Emde Boas

Literatuur:

H.Hasse

Vorlesungen über Zahlentheorie § 11

Springer 1950

T.Nagell

Introduction to Number theory §§ 48-50

Wiley 1951

Φ_m beduide het n-de cyclotomische polynoom.

Is K een lichaam met $m.1 \neq 0$ in K, dan $\alpha \in K$, $\Phi_m(\alpha) = 0 \Rightarrow$ orde $\alpha = m$.
Anders is α nl. een nulpunt van $X^d - 1$ met $d|m$, $d \neq m$ (d = orde $\alpha|m$ daar $\alpha^m - 1 = 0$ daar $\Phi_m \mid X^m - 1$) dus een dubbel nulpunt van $\Phi_m.(X^d - 1) | X^m - 1$; maar $(m.X^{m-1}, X^m - 1) = 1$, Contradictie. qed

Neem $K = F_p$. Dan volgt : $\Phi_m(\overline{n}) = 0$, $p \nmid m \Rightarrow m|p-1$ (orde elt.|orde groep), oftewel

Stelling $n \in Z$, $p|\Phi_m(n) \Rightarrow p|m$ of $p \equiv 1 \bmod. m$.

Uit $\Phi_m(n) \equiv \pm 1 \bmod. n$ volgt, dat je door in n voldoend vele priemen te stoppen van $\Phi_m(n)$ een nieuwe priemdeler krijgt: Dirichlet voor 1 mod. m.

Zij $\Psi_m(X,Y) = \Phi_m(X+iY, X-iY) \in Z[X]$ (voor $m>1$) (Φ_m is hier gehomogeniseerde cycl. pol, $i=\sqrt{-1}$.

Stelling $n,k \in Z$, $(n,k) = 1$, $p \nmid m$, $p \equiv -1 \bmod 4$, $p|\Psi_m(n,k) \Rightarrow p \equiv -1 \bmod m$.

Want zeker modulo $p.Z[i] \subset Z[i]$ (priem wegens $p \equiv -1 \bmod 4$). Dan $p|\Psi_m(n,k)$ wil zeggen dat $(n+ik)/(n-ik)$ ($\neq 0$ wegens $(n,k) = 1$) orde m in F_{p^2} heeft.
Daar $((n+ik)/(n-ik))^{p+1} = ((n+ik)/(n-ik))((n+ik)/(n-ik))^p =$
$((n+ik)/(n-ik))$. geconjungeerde $= ((n+ik)/(n-ik)).((n-ik)/(n+ik)) = 1$
(daar $i \to -i$ bij conjugeren in F_{p^2}) volgt $m|p+1$.

Voor Dirichlet moet je nu in laatste stelling genoeg p's fokken !

$\Psi_m(X,Y) = Y^{\phi(m)}.\Phi_m(X/Y,1)$; neem $G_m(Z) = \Psi_m(Z,1)$.

Kopcoëff van G_m is $\Psi_m(1,0) = \Phi_m(1,1) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & m \text{ geen priemmacht} \\ p & m = p^\alpha \quad \alpha>0 \end{array}\right\} > 0$

dus $G_m(z) > 0$ voor z groot genoeg.

Wortels van G_m zijn $i(\zeta^r +1)/(\zeta^r -1)$ en reell (conjugeren!) en verschillend (lin. gebroken substitutie!). kies $a/b \in \mathbb{Q}$, $(a,b) = 1$, $b > 0$, $a,b \in Z$ met $G_m(a/b) < 0$ (kan dus!), dan $\Psi_m(a,b) = -w$ voor een $w \in Z$, $w > 0$.

Nu heeft $H_m(X)= \Psi_m(wbX + a,b) / w$ constante coëff gelijk aan -1 ; door in X veel priemen en een 4 te stoppen en door H_m(#onleesbaar#)>0 te laten zijn vinden we nieuwe priem die -1 mod 4 is en Dirichlet volgt. Zie voor laatste deel Hasse.

-1 bewijs minder mooi dan +1 bewijs: +1 bewijs "levert" ook alle $p\equiv 1 \bmod m$, -1 alleen $p \equiv -1 \bmod [4,m]$.

Mijn exposé heeft de algebraische kant Aanzienlijk vereenvoudigd tov gangbare bewijs (Polya-Szegö, Hasse, Nagell).

OPEN PROBLEMS

B.J. Lageweg, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan

NON-PREEMPTIVE SCHEDULING, BINARY ENCODING

? 1/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? 1/TREE,PJ=1/SUMTJ ? 1/TREE,PJ=1/SUMWJT
J ? 1/TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ ? 1/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? 1/TREE,PJ=1/S
UMUJ ? 1/TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? 1/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? 1/TREE,RJ,D
J,PJ=1/SUMWJCJ ? 1/TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? 1/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJTJ ?
1/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? 1/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? 1//SUMTJ ?
1/DJ/SUMTJ ? 1/DJ/SUMUJ ? 1/TREE,DJ/SUMCJ ? 1/TREE/SUMTJ ? 1/TREE
,DJ/SUMTJ ? 1/TREE/SUMUJ ? F2/TREE,PJ=1/LMAX ? F2/TREE,PJ=1/SUMWJ
CJ ? F2/TREE,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F2/TREE,PJ
=1/SUMTJ ? F2/TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? F2/TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F2/TREE
,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F2/TREE,PJ=1/SUMUJ ? F2/TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? F2
/TREE,RJ,PJ=1/CMAX ? F2/TREE,RJ,PJ=1/LMAX ? F2/TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ
? F2/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/TREE,R
J,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F2/TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? F2/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJ
TJ ? F2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F2/P
REC,PJ=1/CMAX ? F2/PREC,PJ=1/LMAX ? F2/PREC,PJ=1/SUMCJ ? F2/PREC,
DJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/PREC,RJ,PJ=1/CMAX ? F2/PREC,RJ,PJ=1/LMAX ? F2/
PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/PREC,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/TREE,PJ=1/CMAX
? F3/TREE,PJ=1/LMAX ? F3/TREE,PJ=1/SUMCJ ? F3/TREE,PJ=1/SUMWJCJ
? F3/TREE,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F3/TREE,PJ=1/
SUMTJ ? F3/TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? F3/TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F3/TREE,DJ
,PJ=1/SUMWJTJ ? F3/TREE,PJ=1/SUMUJ ? F3/TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? F3/TR
EE,RJ,PJ=1/CMAX ? F3/TREE,RJ,PJ=1/LMAX ? F3/TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ ?
F3/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/TREE,RJ,D
J,PJ=1/SUMWJCJ ? F3/TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? F3/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJTJ
? F3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F3/PREC
,PJ=1/CMAX ? F3/PREC,PJ=1/LMAX ? F3/PREC,PJ=1/SUMCJ ? F3/PREC,DJ,
PJ=1/SUMCJ ? F3/PREC,RJ,PJ=1/CMAX ? F3/PREC,RJ,PJ=1/LMAX ? F3/PRE
C,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/PREC,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F/TREE,PJ=1/CMAX ? F
/TREE,PJ=1/LMAX ? F/TREE,PJ=1/SUMCJ ? F/TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? F/TRE
E,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F/TREE,PJ=1/SUMTJ ? F/
TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? F/TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJTJ
? F/TREE,PJ=1/SUMUJ ? F/TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? F/TREE,RJ,PJ=1/CMAX
? F/TREE,RJ,PJ=1/LMAX ? F/TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F/TREE,RJ,PJ=1/SUM
WJCJ ? F/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F/TR
EE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? F/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUM
TJ ? F/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F/PREC,PJ=1/CMAX ? F/PREC,PJ=1/L
MAX ? F/PREC,PJ=1/SUMCJ ? F/PREC,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F/PREC,RJ,PJ=1/C
MAX ? F/PREC,RJ,PJ=1/LMAX ? F/PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F/PREC,RJ,DJ,P
J=1/SUMCJ ? G2/PJ=1/CMAX ? G2/PJ=1/LMAX ? G2/PJ=1/SUMCJ ? G2/PJ=1
/SUMWJCJ ? G2/DJ,PJ=1/SUMCJ ? G2/DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? G2/PJ=1/SUMTJ
? G2/PJ=1/SUMWJTJ ? G2/DJ,PJ=1/SUMTJ ? G2/DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? G2/PJ
=1/SUMUJ ? G2/PJ=1/SUMWJUJ ? G2/DJ,PJ=1/SUMUJ ? G2/DJ,PJ=1/SUMWJU
J ? G2/RJ,PJ=1/CMAX ? G2/RJ,PJ=1/LMAX ? G2/RJ,PJ=1/SUMCJ ? G2/RJ,
PJ=1/SUMWJCJ ? G2/RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? G2/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? G2/R
J,PJ=1/SUMTJ ? G2/RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? G2/RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? G2/RJ,D
J,PJ=1/SUMWJTJ ? G2/RJ,PJ=1/SUMUJ ? G2/RJ,PJ=1/SUMWJUJ ? G2/RJ,DJ
,PJ=1/SUMUJ ? G2/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJUJ ? P2/TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? P2/T
REE,DJ,PJ=1/SUMCJ ? P2/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? P2/TREE,PJ=1/SUMTJ
? P2/TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? P2/TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ ? P2/TREE,DJ,PJ=1/
SUMWJTJ ? P2/TREE,PJ=1/SUMUJ ? P2/TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? P2/TREE,RJ,
PJ=1/SUMCJ ? P2/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? P2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ?

P2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? P2/TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? P2/TREE,RJ,
PJ=1/SUMWJTJ ? P2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? P2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMW
JTJ ? P2/PREC,DJ,PJ=1/SUMCJ ? P2/PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? P2/PREC,RJ,
DJ,PJ=1/SUMCJ ? P3/TREE,PJ=1/LMAX ? P3/TREE,PJ=1/SUMCJ ? P3/TREE,
PJ=1/SUMWJCJ ? P3/TREE,DJ,PJ=1/SUMCJ ? P3/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ?
P3/TREE,PJ=1/SUMTJ ? P3/TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? P3/TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ
? P3/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? P3/TREE,PJ=1/SUMUJ ? P3/TREE,PJ=1/SU
MWJUJ ? P3/TREE,RJ,PJ=1/CMAX ? P3/TREE,RJ,PJ=1/LMAX ? P3/TREE,RJ,
PJ=1/SUMCJ ? P3/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? P3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ?
P3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? P3/TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? P3/TREE,RJ,
PJ=1/SUMWJTJ ? P3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? P3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMW
JTJ ? P3/PREC,PJ=1/CMAX ? P3/PREC,PJ=1/LMAX ? P3/PREC,PJ=1/SUMCJ
? P3/PREC,DJ,PJ=1/SUMCJ ? P3/PREC,RJ,PJ=1/CMAX ? P3/PREC,RJ,PJ=1/
LMAX ? P3/PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? P3/PREC,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? P/TREE,
PJ=1/SUMCJ ? P/TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? P/TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ ? P/TREE,
RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q2/RJ,PJ=1/LMAX ? Q2/RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q2/RJ,DJ
,PJ=1/SUMCJ ? Q2/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q2/RJ,PJ=1/SUMTJ ? Q2/RJ,PJ
=1/SUMWJTJ ? Q2/RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? Q2/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q2/RJ,
PJ=1/SUMUJ ? Q2/RJ,PJ=1/SUMWJUJ ? Q2/RJ,DJ,PJ=1/SUMUJ ? Q2/RJ,DJ,
PJ=1/SUMWJUJ ? Q2/TREE,PJ=1/CMAX ? Q2/TREE,PJ=1/LMAX ? Q2/TREE,PJ
=1/SUMCJ ? Q2/TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? Q2/TREE,DJ,PJ=1/SUMCJ ? Q2/TREE
,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q2/TREE,PJ=1/SUMTJ ? Q2/TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? Q2
/TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ ? Q2/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q2/TREE,PJ=1/SUMU
J ? Q2/TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? Q2/TREE,RJ,PJ=1/CMAX ? Q2/TREE,RJ,PJ=1
/LMAX ? Q2/TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ ? Q2/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q2/TREE
,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? Q2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q2/TREE,RJ,PJ=1/
SUMTJ ? Q2/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q2/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? Q2/T
REE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q2/PREC,PJ=1/CMAX ? Q2/PREC,PJ=1/LMAX ?
Q2/PREC,PJ=1/SUMCJ ? Q2/PREC,DJ,PJ=1/SUMCJ ? Q2/PREC,RJ,PJ=1/CMAX
? Q2/PREC,RJ,PJ=1/LMAX ? Q2/PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? Q2/PREC,RJ,DJ,P
J=1/SUMCJ ? Q3/RJ,PJ=1/LMAX ? Q3/RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q3/RJ,DJ,PJ=1/
SUMCJ ? Q3/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q3/RJ,PJ=1/SUMTJ ? Q3/RJ,PJ=1/SUM
WJTJ ? Q3/RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? Q3/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q3/RJ,PJ=1/S
UMUJ ? Q3/RJ,PJ=1/SUMWJUJ ? Q3/RJ,DJ,PJ=1/SUMUJ ? Q3/RJ,DJ,PJ=1/S
UMWJUJ ? Q3/TREE,PJ=1/CMAX ? Q3/TREE,PJ=1/LMAX ? Q3/TREE,PJ=1/SUM
CJ ? Q3/TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? Q3/TREE,DJ,PJ=1/SUMCJ ? Q3/TREE,DJ,PJ
=1/SUMWJCJ ? Q3/TREE,PJ=1/SUMTJ ? Q3/TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? Q3/TREE,
DJ,PJ=1/SUMTJ ? Q3/TREE,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q3/TREE,PJ=1/SUMUJ ? Q3
/TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? Q3/TREE,RJ,PJ=1/CMAX ? Q3/TREE,RJ,PJ=1/LMAX
? Q3/TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ ? Q3/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q3/TREE,RJ,DJ
,PJ=1/SUMCJ ? Q3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q3/TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ
? Q3/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q3/TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? Q3/TREE,RJ
,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q3/PREC,PJ=1/CMAX ? Q3/PREC,PJ=1/LMAX ? Q3/PRE
C,PJ=1/SUMCJ ? Q3/PREC,DJ,PJ=1/SUMCJ ? Q3/PREC,RJ,PJ=1/CMAX ? Q3/
PREC,RJ,PJ=1/LMAX ? Q3/PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? Q3/PREC,RJ,DJ,PJ=1/SU
MCJ ? Q/RJ,PJ=1/CMAX ? Q/RJ,PJ=1/LMAX ? Q/RJ,PJ=1/SUMCJ ? Q/RJ,PJ
=1/SUMWJCJ ? Q/RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? Q/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? Q/RJ,PJ=
1/SUMTJ ? Q/RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? Q/RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? Q/RJ,DJ,PJ=1/S
UMWJTJ ? Q/RJ,PJ=1/SUMUJ ? Q/RJ,PJ=1/SUMWJUJ ? Q/RJ,DJ,PJ=1/SUMUJ
? Q/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJUJ ? Q/TREE,PJ=1/CMAX ? Q/TREE,PJ=1/SUMCJ ?
Q/TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? Q/TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ ? Q/TREE,RJ,PJ=1/SUMWJ
CJ ? O2/PJ=1/LMAX ? O2/PJ=1/SUMCJ ? O2/PJ=1/SUMWJCJ ? O2/DJ,PJ=1/
SUMCJ ? O2/DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? O2/PJ=1/SUMTJ ? O2/PJ=1/SUMWJTJ ? O2
/DJ,PJ=1/SUMTJ ? O2/DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? O2/PJ=1/SUMUJ ? O2/PJ=1/SUM
WJUJ ? O2/DJ,PJ=1/SUMUJ ? O2/DJ,PJ=1/SUMWJUJ ? O2/RJ,PJ=1/CMAX ?
O2/RJ,PJ=1/LMAX ? O2/RJ,PJ=1/SUMCJ ? O2/RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? O2/RJ,D
J,PJ=1/SUMCJ ? O2/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? O2/RJ,PJ=1/SUMTJ ? O2/RJ,P

J=1/SUMWJTJ ? O2/RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? O2/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? O2/RJ
,PJ=1/SUMUJ ? O2/RJ,PJ=1/SUMWJUJ ? O2/RJ,DJ,PJ=1/SUMUJ ? O2/RJ,DJ
,PJ=1/SUMWJUJ ? O2//SUMCJ ? O3/PJ=1/LMAX ? O3/PJ=1/SUMCJ ? O3/PJ=
1/SUMWJCJ ? O3/DJ,PJ=1/SUMCJ ? O3/DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? O3/PJ=1/SUMTJ
? O3/PJ=1/SUMWJTJ ? O3/DJ,PJ=1/SUMTJ ? O3/DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? O3/P
J=1/SUMUJ ? O3/PJ=1/SUMWJUJ ? O3/DJ,PJ=1/SUMUJ ? O3/DJ,PJ=1/SUMWJ
UJ ? O3/RJ,PJ=1/CMAX ? O3/RJ,PJ=1/LMAX ? O3/RJ,PJ=1/SUMCJ ? O3/RJ
,PJ=1/SUMWJCJ ? O3/RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? O3/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? O3/
RJ,PJ=1/SUMTJ ? O3/RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? O3/RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? O3/RJ,
DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? O3/RJ,PJ=1/SUMUJ ? O3/RJ,PJ=1/SUMWJUJ ? O3/RJ,D
J,PJ=1/SUMUJ ? O3/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJUJ ? O3//SUMCJ ? O/PJ=1/LMAX ?
O/PJ=1/SUMCJ ? O/PJ=1/SUMWJCJ ? O/DJ,PJ=1/SUMCJ ? O/DJ,PJ=1/SUMWJ
CJ ? O/PJ=1/SUMTJ ? O/PJ=1/SUMWJTJ ? O/DJ,PJ=1/SUMTJ ? O/DJ,PJ=1/
SUMWJTJ ? O/PJ=1/SUMUJ ? O/PJ=1/SUMWJUJ ? O/DJ,PJ=1/SUMUJ ? O/DJ,
PJ=1/SUMWJUJ ? O/RJ,PJ=1/CMAX ? O/RJ,PJ=1/LMAX ? O/RJ,PJ=1/SUMCJ
? O/RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? O/RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? O/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ?
O/RJ,PJ=1/SUMTJ ? O/RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? O/RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? O/RJ,
DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? O/RJ,PJ=1/SUMUJ ? O/RJ,PJ=1/SUMWJUJ ? O/RJ,DJ,P
J=1/SUMUJ ? O/RJ,DJ,PJ=1/SUMWJUJ ? F2/NO WAIT,TREE,PJ=1/LMAX ? F2
/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? F2/NO WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/N
O WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F2/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMTJ ? F2/NO
WAIT,TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? F2/NO WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F2/NO WA
IT,TREE,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F2/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMUJ ? F2/NO WAIT
,TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? F2/NO WAIT,TREE,RJ,PJ=1/CMAX ? F2/NO WAIT,TR
EE,RJ,PJ=1/LMAX ? F2/NO WAIT,TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/NO WAIT,TREE
,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F2/NO WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/NO WAIT,
TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F2/NO WAIT,TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? F2/NO W
AIT,TREE,RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F2/NO WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F2/
NO WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F2/NO WAIT,PREC,PJ=1/CMAX ? F2/
NO WAIT,PREC,PJ=1/LMAX ? F2/NO WAIT,PREC,PJ=1/SUMCJ ? F2/NO WAIT,
PREC,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/NO WAIT,PREC,RJ,PJ=1/CMAX ? F2/NO WAIT,PR
EC,RJ,PJ=1/LMAX ? F2/NO WAIT,PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/NO WAIT,PREC
,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F2/NO WAIT/LMAX ? F2/NO WAIT/SUMCJ ? F2/NO WA
IT/SUMWJCJ ? F2/NO WAIT,DJ/SUMCJ ? F2/NO WAIT/SUMTJ ? F2/NO WAIT,
DJ/SUMTJ ? F2/NO WAIT/SUMUJ ? F2/NO WAIT,DJ/SUMUJ ? F2/NO WAIT,RJ
/CMAX ? F2/NO WAIT,TREE/CMAX ? F2/NO WAIT,TREE/LMAX ? F2/NO WAIT,
TREE/SUMCJ ? F2/NO WAIT,TREE/SUMWJCJ ? F2/NO WAIT,TREE,DJ/SUMCJ ?
F2/NO WAIT,TREE/SUMTJ ? F2/NO WAIT,TREE,DJ/SUMTJ ? F2/NO WAIT,TR
EE/SUMUJ ? F2/NO WAIT,TREE,RJ/CMAX ? F2/NO WAIT,PREC/CMAX ? F2/NO
WAIT,PREC/LMAX ? F2/NO WAIT,PREC,RJ/CMAX ? F3/NO WAIT,TREE,PJ=1/
CMAX ? F3/NO WAIT,TREE,PJ=1/LMAX ? F3/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMCJ ? F
3/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? F3/NO WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/
NO WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F3/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMTJ ? F3/NO
WAIT,TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? F3/NO WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F3/NO W
AIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F3/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMUJ ? F3/NO WAI
T,TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? F3/NO WAIT,TREE,RJ,PJ=1/CMAX ? F3/NO WAIT,T
REE,RJ,PJ=1/LMAX ? F3/NO WAIT,TREE,PJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/NO WAIT,TRE
E,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F3/NO WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/NO WAIT
,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F3/NO WAIT,TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? F3/NO
WAIT,TREE,RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F3/NO WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F3
/NO WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F3/NO WAIT,PREC,PJ=1/CMAX ? F3
/NO WAIT,PREC,PJ=1/LMAX ? F3/NO WAIT,PREC,PJ=1/SUMCJ ? F3/NO WAIT
,PREC,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/NO WAIT,PREC,RJ,PJ=1/CMAX ? F3/NO WAIT,P
REC,RJ,PJ=1/LMAX ? F3/NO WAIT,PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/NO WAIT,PRE
C,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F3/NO WAIT/CMAX ? F3/NO WAIT/LMAX ? F3/NO WA
IT/SUMCJ ? F3/NO WAIT/SUMWJCJ ? F3/NO WAIT,DJ/SUMCJ ? F3/NO WAIT/
SUMTJ ? F3/NO WAIT,DJ/SUMTJ ? F3/NO WAIT/SUMUJ ? F3/NO WAIT,DJ/SU

MUJ ? F3/NO WAIT,RJ/CMAX ? F3/NO WAIT,TREE/CMAX ? F3/NO WAIT,TREE
/LMAX ? F3/NO WAIT,TREE/SUMCJ ? F3/NO WAIT,TREE/SUMWJCJ ? F3/NO W
AIT,TREE,DJ/SUMCJ ? F3/NO WAIT,TREE/SUMTJ ? F3/NO WAIT,TREE,DJ/SU
MTJ ? F3/NO WAIT,TREE/SUMUJ ? F3/NO WAIT,TREE,RJ/CMAX ? F3/NO WAI
T,PREC/CMAX ? F3/NO WAIT,PREC/LMAX ? F3/NO WAIT,PREC,RJ/CMAX ? F/
NO WAIT,TREE,PJ=1/CMAX ? F/NO WAIT,TREE,PJ=1/LMAX ? F/NO WAIT,TRE
E,PJ=1/SUMCJ ? F/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMWJCJ ? F/NO WAIT,TREE,DJ,PJ
=1/SUMCJ ? F/NO WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F/NO WAIT,TREE,PJ=1/S
UMTJ ? F/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMWJTJ ? F/NO WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMTJ
? F/NO WAIT,TREE,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMUJ ? F
/NO WAIT,TREE,PJ=1/SUMWJUJ ? F/NO WAIT,TREE,RJ,PJ=1/CMAX ? F/NO W
AIT,TREE,RJ,PJ=1/LMAX ? F/NO WAIT,TREE,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F/NO WAIT,
TREE,RJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F/NO WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMCJ ? F/NO WAI
T,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJCJ ? F/NO WAIT,TREE,RJ,PJ=1/SUMTJ ? F/NO W
AIT,TREE,RJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F/NO WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMTJ ? F/NO
WAIT,TREE,RJ,DJ,PJ=1/SUMWJTJ ? F/NO WAIT,PREC,PJ=1/CMAX ? F/NO W
AIT,PREC,PJ=1/LMAX ? F/NO WAIT,PREC,PJ=1/SUMCJ ? F/NO WAIT,PREC,D
J,PJ=1/SUMCJ ? F/NO WAIT,PREC,RJ,PJ=1/CMAX ? F/NO WAIT,PREC,RJ,PJ
=1/LMAX ? F/NO WAIT,PREC,RJ,PJ=1/SUMCJ ? F/NO WAIT,PREC,RJ,DJ,PJ=
1/SUMCJ ? G2/NO WAIT,PJ=1/CMAX ? G2/NO WAIT,PJ=1/LMAX ? G2/NO WAI
T,PJ=1/SUMCJ ? G2/NO WAIT,PJ=1/SUMWJCJ ? G2/NO WAIT,DJ,PJ=1/SUMCJ
? G2/NO WAIT,PJ=1/SUMTJ ? G2/NO WAIT,PJ=1/SUMWJTJ ? G2/NO WAIT,D
J,PJ=1/SUMTJ ? G2/NO WAIT,PJ=1/SUMUJ ? G2/NO WAIT,PJ=1/SUMWJUJ ?
G2/NO WAIT,DJ,PJ=1/SUMUJ ? G2/NO WAIT,DJ,PJ=1/SUMWJUJ ? G2/NO WAI
T,RJ,PJ=1/CMAX ? G2/NO WAIT,RJ,PJ=1/SUMCJ ? G3/NO WAIT,PJ=1/SUMCJ
? G3/NO WAIT,RJ,PJ=1/SUMCJ ? G/NO WAIT,PJ=1/SUMCJ ? G/NO WAIT,RJ
,PJ=1/SUMCJ ?

PREEMPTIVE SCHEDULING, BINARY ENCODING

? 1//SUMTJ ? 1/DJ/SUMTJ ? 1/DJ/SUMUJ ? 1/RJ,DJ/SUMCJ ? 1/RJ/SUMTJ
? 1/RJ,DJ/SUMTJ ? 1/RJ/SUMUJ ? 1/RJ,DJ/SUMUJ ? 1/TREE,DJ/SUMCJ ?
1/TREE/SUMTJ ? 1/TREE,DJ/SUMTJ ? 1/TREE/SUMUJ ? 1/TREE,RJ/LMAX ?
1/TREE,RJ/SUMCJ ? 1/TREE,RJ,DJ/SUMCJ ? 1/TREE,RJ/SUMTJ ? 1/TREE,
RJ,DJ/SUMTJ ? 1/PREC,RJ/LMAX ? F2//LMAX ? F2//SUMCJ ? F2//SUMWJCJ
? F2/DJ/SUMCJ ? F2//SUMTJ ? F2/DJ/SUMTJ ? F2//SUMUJ ? F2/DJ/SUMU
J ? F2/RJ/CMAX ? F2/RJ/SUMCJ ? F3//SUMCJ ? F3//SUMWJCJ ? F3/RJ/SU
MCJ ? F//SUMCJ ? F//SUMWJCJ ? F/RJ/SUMCJ ? G2//SUMCJ ? G3//SUMCJ
? G//SUMCJ ? P2/DJ/SUMCJ ? P2//SUMTJ ? P2/DJ/SUMTJ ? P2//SUMUJ ?
P2/DJ/SUMUJ ? P2/RJ,DJ/SUMCJ ? P2/RJ/SUMTJ ? P2/RJ,DJ/SUMTJ ? P2/
RJ/SUMUJ ? P2/RJ,DJ/SUMUJ ? P2/TREE/LMAX ? P2/TREE/SUMCJ ? P2/TRE
E,DJ/SUMCJ ? P2/TREE/SUMTJ ? P2/TREE,DJ/SUMTJ ? P2/TREE/SUMUJ ? P
2/TREE,RJ/CMAX ? P2/TREE,RJ/LMAX ? P2/TREE,RJ/SUMCJ ? P2/TREE,RJ,
DJ/SUMCJ ? P2/TREE,RJ/SUMTJ ? P2/TREE,RJ,DJ/SUMTJ ? P2/PREC/LMAX
? P2/PREC,RJ/CMAX ? P2/PREC,RJ/LMAX ? P3/DJ/SUMCJ ? P3//SUMTJ ? P
3/DJ/SUMTJ ? P3//SUMUJ ? P3/DJ/SUMUJ ? P3/RJ,DJ/SUMCJ ? P3/RJ/SUM
TJ ? P3/RJ,DJ/SUMTJ ? P3/RJ/SUMUJ ? P3/RJ,DJ/SUMUJ ? P3/TREE/LMAX
? P3/TREE/SUMCJ ? P3/TREE,DJ/SUMCJ ? P3/TREE/SUMTJ ? P3/TREE,DJ/
SUMTJ ? P3/TREE/SUMUJ ? P3/TREE,RJ/CMAX ? P3/TREE,RJ/LMAX ? P3/TR
EE,RJ/SUMCJ ? P3/TREE,RJ,DJ/SUMCJ ? P3/TREE,RJ/SUMTJ ? P3/TREE,RJ
,DJ/SUMTJ ? P3/PREC/CMAX ? P3/PREC/LMAX ? P3/PREC,RJ/CMAX ? P3/PR
EC,RJ/LMAX ? P/DJ/SUMCJ ? P//SUMTJ ? P/DJ/SUMTJ ? P//SUMUJ ? P/DJ
/SUMUJ ? P/RJ,DJ/SUMCJ ? P/RJ/SUMTJ ? P/RJ,DJ/SUMTJ ? P/RJ/SUMUJ
? P/RJ,DJ/SUMUJ ? P/TREE/LMAX ? P/TREE/SUMCJ ? P/TREE,DJ/SUMCJ ?
P/TREE/SUMTJ ? P/TREE,DJ/SUMTJ ? P/TREE/SUMUJ ? P/TREE,RJ/CMAX ?
P/TREE,RJ/LMAX ? P/TREE,RJ/SUMCJ ? P/TREE,RJ,DJ/SUMCJ ? P/TREE,RJ
/SUMTJ ? P/TREE,RJ,DJ/SUMTJ ? P/PREC/CMAX ? P/PREC/LMAX ? P/PREC,

```
RJ/CMAX ? P/PREC,RJ/LMAX ? Q2/DJ/SUMCJ ? Q2//SUMTJ ? Q2/DJ/SUMTJ
? Q2//SUMUJ ? Q2/DJ/SUMUJ ? Q2/RJ,DJ/SUMCJ ? Q2/RJ/SUMTJ ? Q2/RJ,
DJ/SUMTJ ? Q2/RJ/SUMUJ ? Q2/RJ,DJ/SUMUJ ? Q2/TREE/CMAX ? Q2/TREE/
LMAX ? Q2/TREE/SUMCJ ? Q2/TREE,DJ/SUMCJ ? Q2/TREE/SUMTJ ? Q2/TREE
,DJ/SUMTJ ? Q2/TREE/SUMUJ ? Q2/TREE,RJ/CMAX ? Q2/TREE,RJ/LMAX ? Q
2/TREE,RJ/SUMCJ ? Q2/TREE,RJ,DJ/SUMCJ ? Q2/TREE,RJ/SUMTJ ? Q2/TRE
E,RJ,DJ/SUMTJ ? Q2/PREC/CMAX ? Q2/PREC/LMAX ? Q2/PREC,RJ/CMAX ? Q
2/PREC,RJ/LMAX ? Q3/DJ/SUMCJ ? Q3//SUMTJ ? Q3/DJ/SUMTJ ? Q3//SUMU
J ? Q3/DJ/SUMUJ ? Q3/RJ/LMAX ? Q3/RJ,DJ/SUMCJ ? Q3/RJ/SUMTJ ? Q3/
RJ,DJ/SUMTJ ? Q3/RJ/SUMUJ ? Q3/RJ,DJ/SUMUJ ? Q3/TREE/CMAX ? Q3/TR
EE/LMAX ? Q3/TREE/SUMCJ ? Q3/TREE,DJ/SUMCJ ? Q3/TREE/SUMTJ ? Q3/T
REE,DJ/SUMTJ ? Q3/TREE/SUMUJ ? Q3/TREE,RJ/CMAX ? Q3/TREE,RJ/LMAX
? Q3/TREE,RJ/SUMCJ ? Q3/TREE,RJ,DJ/SUMCJ ? Q3/TREE,RJ/SUMTJ ? Q3/
TREE,RJ,DJ/SUMTJ ? Q3/PREC/CMAX ? Q3/PREC/LMAX ? Q3/PREC,RJ/CMAX
? Q3/PREC,RJ/LMAX ? Q/DJ/SUMCJ ? Q//SUMTJ ? Q/DJ/SUMTJ ? Q//SUMUJ
 ? Q/DJ/SUMUJ ? Q/RJ/LMAX ? Q/RJ,DJ/SUMCJ ? Q/RJ/SUMTJ ? Q/RJ,DJ/
SUMTJ ? Q/RJ/SUMUJ ? Q/RJ,DJ/SUMUJ ? Q/TREE/CMAX ? Q/TREE/LMAX ?
Q/TREE/SUMCJ ? Q/TREE,DJ/SUMCJ ? Q/TREE/SUMTJ ? Q/TREE,DJ/SUMTJ ?
 Q/TREE/SUMUJ ? Q/TREE,RJ/CMAX ? Q/TREE,RJ/LMAX ? Q/TREE,RJ/SUMCJ
 ? Q/TREE,RJ,DJ/SUMCJ ? Q/TREE,RJ/SUMTJ ? Q/TREE,RJ,DJ/SUMTJ ? Q/
PREC/CMAX ? Q/PREC/LMAX ? Q/PREC,RJ/CMAX ? Q/PREC,RJ/LMAX ? R2//L
MAX ? R2//SUMCJ ? R2/DJ/SUMCJ ? R2//SUMTJ ? R2/DJ/SUMTJ ? R2//SUM
UJ ? R2/DJ/SUMUJ ? R2/RJ/CMAX ? R2/RJ/LMAX ? R2/RJ/SUMCJ ? R2/RJ,
DJ/SUMCJ ? R2/RJ/SUMTJ ? R2/RJ,DJ/SUMTJ ? R2/RJ/SUMUJ ? R2/RJ,DJ/
SUMUJ ? R3//LMAX ? R3//SUMCJ ? R3/DJ/SUMCJ ? R3//SUMTJ ? R3/DJ/SU
MTJ ? R3//SUMUJ ? R3/DJ/SUMUJ ? R3/RJ/CMAX ? R3/RJ/LMAX ? R3/RJ/S
UMCJ ? R3/RJ,DJ/SUMCJ ? R3/RJ/SUMTJ ? R3/RJ,DJ/SUMTJ ? R3/RJ/SUMU
J ? R3/RJ,DJ/SUMUJ ? R//CMAX ? R//LMAX ? R//SUMCJ ? R/DJ/SUMCJ ?
R//SUMTJ ? R/DJ/SUMTJ ? R//SUMUJ ? R/DJ/SUMUJ ? R/RJ/CMAX ? R/RJ/
LMAX ? R/RJ/SUMCJ ? R/RJ,DJ/SUMCJ ? R/RJ/SUMTJ ? R/RJ,DJ/SUMTJ ?
R/RJ/SUMUJ ? R/RJ,DJ/SUMUJ ? O2//LMAX ? O2//SUMCJ ? O2//SUMWJCJ ?
 O2/DJ/SUMCJ ? O2//SUMTJ ? O2/DJ/SUMTJ ? O2//SUMUJ ? O2/DJ/SUMUJ
? O2/RJ/CMAX ? O2/RJ/LMAX ? O2/RJ/SUMCJ ? O2/RJ,DJ/SUMCJ ? O2/RJ/
SUMTJ ? O2/RJ,DJ/SUMTJ ? O2/RJ/SUMUJ ? O2/RJ,DJ/SUMUJ ? O3//LMAX
? O3//SUMCJ ? O3//SUMWJCJ ? O3/DJ/SUMCJ ? O3//SUMTJ ? O3/DJ/SUMTJ
 ? O3//SUMUJ ? O3/DJ/SUMUJ ? O3/RJ/CMAX ? O3/RJ/LMAX ? O3/RJ/SUMC
J ? O3/RJ,DJ/SUMCJ ? O3/RJ/SUMTJ ? O3/RJ,DJ/SUMTJ ? O3/RJ/SUMUJ ?
 O3/RJ,DJ/SUMUJ ? O//LMAX ? O//SUMCJ ? O//SUMWJCJ ? O/DJ/SUMCJ ?
O//SUMTJ ? O/DJ/SUMTJ ? O//SUMUJ ? O/DJ/SUMUJ ? O/RJ/CMAX ? O/RJ/
LMAX ? O/RJ/SUMCJ ? O/RJ,DJ/SUMCJ ? O/RJ/SUMTJ ? O/RJ,DJ/SUMTJ ?
O/RJ/SUMUJ ? O/RJ,DJ/SUMUJ ?
```

REFERENCES

1. B.J. LAGEWEG, E.L. LAWLER, J.K. LENSTRA (1976) Machine scheduling problems: computations, complexity and classification; in honour of A.H.G. Rinnooy Kan upon the occasion of the defense of his doctoral thesis, January 28, 1976. Report BN 30, Mathematisch Centrum, Amsterdam.
2. B.J. LAGEWEG, J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN (1977) A computational complexity classification of deterministic scheduling problems. Preliminary report, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

OP ZOEK NAAR DE VIJFDE CYLINDER

G. Laman

Het probleem waar het hier om gaat luidt: Hoeveel rechte cirkelcylinders met gelijke straal kunnen in E^3 zo liggen dat elke cylinder elke andere raakt.

Indien inwendig raken wordt toegelaten is het aantal onbeperkt; kies daartoe als assen van de cylinders niet-evenwijdige rechten in één vlak of rechten door één punt. Wij kunnen verder dus aannemen dat alleen uitwendig raken bedoeld is. Het probleem kan dan als volgt geformuleerd worden: Hoeveel rechten kunnen in E^3 liggen zodat van elk paar de onderlinge afstand 1 is.

Op meetkundige gronden is gemakkelijk in te zien dat zodra men drie rechten evenwijdig aan eenzelfde vlak onderstelt het maximale aantal vier is en dat zo'n viertal uit twee paren evenwijdige rechten bestaat. Wij onderstellen daarom in het vervolg dat geen drie rechten evenwijdig zijn aan eenzelfde vlak.

Dat bij drie gegeven richtingen drie rechten met onderling gelijke afstanden kunnen worden gevonden is evident evenals het feit dat dit bij vier richtingen niet zonder meer lukt. Anderzijds is het niet moeilijk in te zien, dat er zeker viertallen rechten bestaan met onderling gelijke afstanden. Ga daartoe uit van vier cylinders van gelijke straal, waarvan de evenwijdige assen hun loodvlak doorsnijden in vier punten die de hoekpunten en het hoogtepunt van een gelijkzijdige driehoek zijn en waarvan de cylinders behorende bij de hoekpunten die behorende bij het hoogtepunt raken. Men laat nu de drie eerstgenoemde cylinders kantelen om de bij hetzelfde hoekpunt behorende hoogtelijn en alle even snel en vanuit het hoogtepunt gezien in dezelfde richting. Dan geven symmetrieoverwegingen het inzicht dat er een situatie bereikt wordt waarin de bij de voetpunten behorende cylinders ook twee aan twee raken.

Om te onderzoeken onder welke voorwaarden bij vier richtingen vier rechten te vinden zijn waarvan de onderlinge afstanden alle zes 1 bedragen noteren wij vier rechten als

$r_i : a_i + \mathbb{R}u_i$, $i = 1,2,3,4$, a_i en u_i vectoren in E^3.

Wij onderstellen $\forall i\ (a_i, u_i) = 0$ en $\det(u_i, u_j, u_k) \neq 0$ als i, j en k verschillend zijn (geen drie rechten evenwijdig aan eenzelfde vlak). De afstand van r_i en r_j duiden wij aan met d_{ij}. Kies verder de grootheden γ_i $(i = 1,2,3,4)$ zo dat de vier vlakken $(u_i, x) = \gamma_i$ niet door één punt gaan, dan bepalen zij een viervlak. De lengte van de ribbe van dit viervlak die op de snijlijn van het i-de vlak en het j-de vlak ligt wordt aangeduid met e_{ij}.

Merk op dat $d_{ij} = \left| \dfrac{(a_i - a_j, u_i \times u_j)}{||u_i \times u_j||} \right|$ dus dat voldaan is aan

$(a_i - a_j, u_i \times u_j) = \varepsilon_{ij} d_{ij} \, ||u_i \times u_j||$, waarin de $\varepsilon_{ij} = \pm 1$ het weglaten van de absoluutstrepen vergoeden. Gebruikmakend van een bekende relatie tussen determinant en vectorproduct schrijven we hiervoor

$$\det(a_i, u_i, u_j) + \det(a_j, u_j, u_i) = \varepsilon_{ij} d_{ij} \, ||u_i \times u_j||.$$

In plaats van de a_i voeren we als onbekenden in $b_i = a_i \times u_i$. Wegens $a_i = u_i \times b_i$ worden de a_i door de b_i bepaald. Stellen we nog $\forall_{ij} d_{ij} = 1$, dan luidt het probleem:

"Geef - zo mogelijk nodige en voldoende - voorwaarden waaronder de stelsels vergelijkingen

$$(b_i, u_j) + (b_j, u_i) = \varepsilon_{ij} \, ||u_i \times u_j|| \qquad i,j = 1,2,3,4 \text{ en } i \neq j$$

$$(b_i, u_i) = 0 \qquad i = 1,2,3,4$$

oplossingen hebben".

Daartoe voeren we de volgende notaties in: $L_{ii} = (b_i, u_i)$, $L_{ij} = (b_i, u_j) + (b_j, u_i)$, $D_1 = \det(u_2, u_3, u_4)$, $D_2 = (u_3, u_4, u_1)$, $D_3 = \det(u_4, u_1, u_2)$, $D_4 = \det(u_1, u_2, u_3)$ en β_{ij} voor de j-de component van de vector b_i en beschouwen de lineaire combinatie $\sum_{i,u} \lambda_{ij} L_{ij}$. Daar aan $\sum_{i=1}^{4} \mu_i u_i = 0$ alleen voldaan kan worden door $\mu_i = \rho D_i$ is voor een vaste k nodig en voldoende opdat β_{k1}, β_{k2} en β_{k3} in deze lineaire combinatie coëfficiënt = 0 hebben: $\lambda_{kj} = \rho_k D_j$. Opdat alle β_{ij} coëfficiënt = 0 hebben is dus nodig en voldoende $\lambda_{ij} = \rho D_i D_j$: er is op een scalair ρ na precies één lineaire combinatie van de L_{ij} gelijk aan 0.

Nodig en voldoende voor oplosbaarheid van het stelsel vergelijkingen is dan dat dezelfde lineaire combinatie van de rechterleden gelijk is aan 0.

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} \varepsilon_{ij} D_i D_j \, ||u_i \times u_j|| = 0 \qquad (\alpha)$$

Om deze relatie te interpreteren beschouwen we het vectorproduct van $D_j u_j$ met $\sum_{i=1}^{4} D_i u_i = 0$. Dat levert voor elke j op: $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{4} D_i D_j u_i \times u_j = 0$.

Daaruit blijkt dat de vectoren $D_i u_i \times D_j u_j$ juist de georiënteerde ribben zijn van een viervlak als hierboven genoemd.

Wij vinden zo: $D_i D_j \, ||u_i \times u_j|| = \varepsilon'_{ij} e_{ij}$ met $\varepsilon'_{ij} = \pm 1$.

Door dit in (α) te substitueren en $\varepsilon_{ij} \varepsilon'_{ij} = \eta_{ij}$ te stellen krijgen we

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} \eta_{ij} e_{ij} = 0. \qquad (\beta)$$

Het voorgaande is aldus samen te vatten:

"Vier richtingen in E^3, waarvan geen drie evenwijdig aan eenzelfde vlak, zijn de asrichtingen van vier paarsgewijs rakende cylinders van gelijke straal dan en slechts dan als voor de lengten van de ribben van een viervlak waarvan de vlakken loodrecht op die vier richtingen staan geldt dat de som van een aantal van deze lengten gelijk is aan de som van de overige".

Bij het zoeken naar een stelsel van vijf paarsgewijs uitwendig rakende cylinders van gelijke straal zijn enige kanttekeningen te maken.

I Niet alle denkbare relaties van de vorm β kunnen optreden: de driehoeksongelijkheid maakt het onmogelijk dat één ribbe of zelfs twee overstaande ribben het in lengte tegen de overige opnemen.

II Als vijf vlakken gegeven zijn en de eerste drie vormen zowel met de vierde als met de vijfde een viervlak dat aan (β) voldoet, dan kan het nog voorkomen dat de eerste drie cylinders in de situatie met de vierde cylinder een andere constellatie hebben dan in de situatie met de vijfde cylinder. Het is dus <u>niet</u> voldoende om van drie viervlakken gevormd door vijf vlakken aan te tonen dat ze alle drie aan (β) voldoen.

AN ALGORITHM FOR FINDING THIS PAPER

E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan

1. Introduction

Suppose that one wants to locate a paper in a book containing N unnumbered pages - a situation no doubt familiar to the reader of these words. The papers in the book have been ordered alphabetically according to the names of their first author. The length of each individual paper is not known, but a different typeface has been used for each of them. In order to identify the author of a paper, one has to find its title page. One is then able to say if the paper that is the object of the search precedes or follows the current paper.

Two basic search operations are available to the anxious reader. He can just browse through a number of pages, taking in any author's name that he encounters in the process. We refer to this search technique as *unary search* and suppose that it requires u time units per page. By way of contrast, there is *binary search*, in which the basic operation is to determine the middle page of the part of the book currently under investigation, to see if it is a title page and if not, to take note of the typeface used. Each such operation requires b time units. It seems reasonable to assume that $u < b$.

Throughout this paper, base 2 is assumed for "log", base e for "ln".

2. Binary search

Suppose that one uses only binary search. One determines the middle page and proceeds to find the author of the corresponding paper by searching through the $N/2$ preceding pages. In the worst case, the title page immediately precedes the middle page and $b \log(N/2)$ time units are needed to find it. One then knows in which half of the book the desired paper is located. The procedure is then repeated over $N/2$ pages.

Let $B(N)$ be the time required to solve the problem by binary search. Then

$$B(N) = b + b \log(N/2) + B(N/2) \quad \text{for } N > 1,$$

$$B(1) = b,$$

which yields

$$B(N) = \tfrac{1}{2}b \log^2 N + \tfrac{1}{2}b \log N + b.$$

Asymptotically, binary search requires $O(b \log^2 N)$ time.

3. Unary and binary search

At any point during his binary search, the reader who feels fed up with keeping his thumbs between various pages can decide to switch to unary search, either to identify the author of the paper currently under investigation or to find the desired paper. In order to introduce the appropriate level of complexity, number of formulae and practical inapplicability, we have to allow for this mixed strategy by assuming that the reader will switch to the other type of search whenever it requires less time.

For this revised procedure, let $T(M)$ denote the time needed to find the last title page preceding the M-th page and $U(N)$ the total time required to solve the problem. The time complexity of the algorithm is then governed by two equations,

$$T(M) = \min\{uM,\ b + T(M/2)\},$$

$$U(N) = \min\{uN,\ b + T(N/2) + U(N/2)\}.$$

First, we will derive an explicit expression for $T(M)$. By repeated substitution we find

$$T(M) = \min\{bk + uM2^{-k} \mid k = 0,\ldots,\log M\}.$$

In the best tradition of computer science, we treat k as a continuous variable and solve

$$\frac{d}{dk}(bk + uM2^{-k}) =$$

$$b - uM2^{-k} \ln 2 = 0$$

to obtain

$$k = \log M + \log((u/b) \ln 2).$$

It can be readily checked that this value of k indeed yields a minimum. The value lies within the required range $[0, \log M]$ if

$$1/M \leq (u/b) \ln 2 \leq 1.$$

The second inequality follows from our assumption that $u < b$; exploration of what happens if the first inequality does not hold is left to a future rainy afternoon. It follows that

$$T(M) = b \log M + c$$

where c is a constant given by

$$c = b \log((u/b) \ln 2) + b \ln 2.$$

Turning to $U(N)$, we find

$$U(N) = \min\{uN, U(N/2) + b \log N + c\}$$

and, again by repeated substitution,

$$U(N) = \min\{bk \log N + uN2^{-k} - \tfrac{1}{2}bk(k-1) + ck \mid k = 0,\ldots,\log N\}.$$

By now feeling thoroughly nervous, we again differentiate to find

$$\frac{d}{dk}(bk \log N + uN2^{-k} - \tfrac{1}{2}bk(k-1) + ck) =$$

$$b \log N - uN2^{-k} \ln 2 - bk + \tfrac{1}{2}b + 2 = 0.$$

Solving this equation in k requires unusual insight and would, in any case, lead to violation of the deadline imposed by the editors of this volume. We can obtain some idea about the asymptotic complexity of the algorithm by calculating $\frac{d\,k}{d \log N}$. From

$$\frac{d}{d \log N}(b \log N - uN2^{-k} \ln 2 - bk + \tfrac{1}{2}b + c) =$$

$$(b - uN2^{-k} \ln^2 2)(\frac{d\,k}{d \log N} - 1) = 0$$

we obtain

$$\frac{d\,k}{d\,\log N} = 1.$$

It follows that asymptotically

$$k \sim \log N,$$

$$U(N) \sim \tfrac{1}{2}b\,\log^2 N.$$

Therefore, the mixed search algorithm yields no improvement at all over the binary one.

4. Conclusion

As usual, the open questions remaining are by far more interesting than the results themselves. To mention only a few:

(1) Is the above algorithm indeed optimal within the given model?

(2) How can one make use of knowledge with respect to (the probability distribution of) paper length and location?

(3) How does one introduce the cost of computing an optimal strategy in the model?

(4) Unfortunately, several contributors to this volume have paginated their paper separately. How can this information be taken into account optimally?

(5) Who cares?

Acknowledgements

The first author is indebted to the third author for performing all calculations. The third author is indebted to the second author for correcting all calculations. The second author is indebted to B.J. Lageweg for pointing out some errors in the calculations.

MEETKUNDIGE VOORSTELLING VAN RECURRENTE RIJEN

C.G. Lekkerkerker

Van getallentheorie komt men tot analyse door de coëfficiënten te laten variëren. (Er zijn nog andere methoden, maar in deze notitie willen wij ons beperken). Natuurlijk doen zich daarbij valkuilen voor. Gelukkig wordt men deze gewaar als men gebruik maakt van een passende meetkundige voorstelling [1]. Een en ander kan worden toegelicht aan de hand van een uitspraak van Stewart [2] over recurrente rijen.

Laat een rij van reële getallen u_n $(n=0,1,2,\ldots)$ voldoen aan een recurrente betrekking

$$u_n = 2a\, u_{n-1} + b\, u_{n-2} .$$

Dan heeft u_n de vorm [3]

$$u_n = \alpha\, \xi^n + \beta\, \eta^n ,$$

waarbij ξ, η de wortels zijn van de karakteristieke vergelijking $x^2 - 2ax - b = 0$ en α, β constanten zijn die bepaald worden door de beginwaarden u_0, u_1. Zoals Stewart aangaf kan men gemakkelijk uitspraken doen over het asymptotisch gedrag van u_n. Beschouw eens het geval dat

$$b = -1 , \quad -1 < a < 1 .$$

Dan zijn ξ, η complex geconjugeerde getallen met absolute waarde 1. Ook zijn α, β complex geconjugeerd. Zij $\alpha = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$, $\xi = e^{i\phi}$. Dan is

$$(1) \quad u_n = 2\rho \operatorname{Re} e^{i(\theta + n\phi)} .$$

Daarbij is $\phi = \arccos(a)$. Verder kunnen ρ en θ worden uitgedrukt in u_0, u_1, a. In het bijzonder wordt ρ en dus ook u_n begrensd door een vaste constante als u_0, u_1 behoren tot een vast segment en a behoort tot een vast deelsegment van $(-1,1)$.

De eerder bedoelde overgang naar de analyse doet zich voor als we de coëfficiënt a laten variëren met n. In tegenstelling met het vorige geldt:

<u>Stelling</u>. Er bestaan beginwaarden u_0, u_1 en een naar 0 convergente rij getallen a_n zó dat $|u_n| \to \infty$ als $n \to \infty$. Hierbij is de rij der getallen u_n bepaald door u_0, u_1 en de relatie $u_n = a_{n-1} u_{n-1} - u_{n-2}$.

Alvorens deze stelling te bewijzen keren we terug naar formule (1). Deze formule zegt ons dat de getallen u_n de projecties op de reële as zijn van een rij punten op een vaste cirkel om de oorsprong, waarbij de argumenten telkens met $\phi = \arccos(a)$ toenemen.

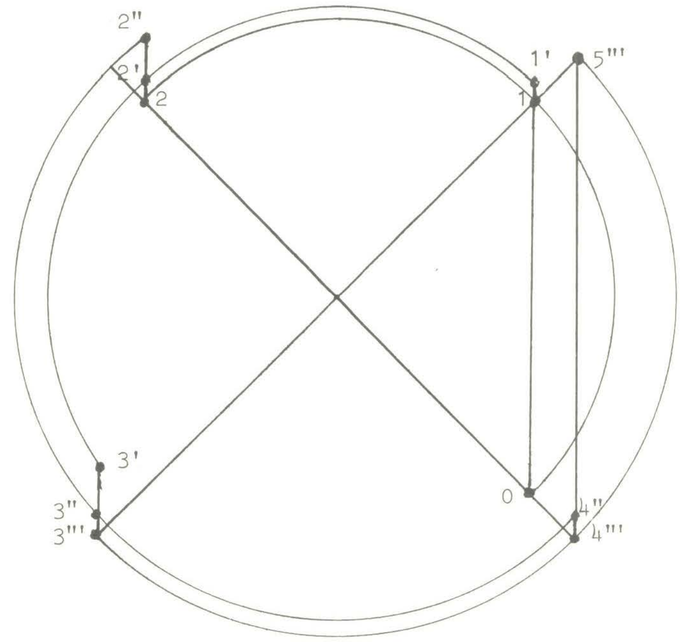
Blijkbaar verkrijgt men u_n uit u_{n-1}, u_{n-2} door een cirkel om de oorsprong te kiezen die twee punten bevat met projecties u_{n-1}, u_{n-2} en met argumentverschil ϕ, en vervolgens over een hoek ϕ verder te draaien. Varieert men a en dus de hoek ϕ, dan verandert ook de straal van de cirkel.

<u>Bewijs van de stelling</u>. We proberen de getallen u_n te verkrijgen als projecties op de reële as van een rij complexe getallen ω_n. In plaats van één getal ω_n werken we met drietallen $\omega_n^{(n-2)}$, $\omega_n^{(n-1)^n}$, $\omega_n^{(n)}$ (voor n=0,1 beschouwen we slechts $\omega_0^{(0)}$, $\omega_1^{(0)}$, $\omega_1^{(1)}$) zó dat de volgende eigenschappen gelden:

1 $\quad \mathrm{Re}\ \omega_n^{(n-2)} = \mathrm{Re}\ \omega_n^{(n-1)} = \mathrm{Re}\ \omega_n^{(n)}$

2 $\quad$ de getallen $\omega_n^{(n)}$, $\omega_{n+1}^{(n)}$, $\omega_{n+2}^{(n)}$ liggen op een cirkel om de oorsprong, met boogafstand $\phi_{n+1} = \mathrm{arc}\cos(a_{n+1})$.

We beginnen met $\omega_0^{(0)} = e^{-\pi i/4}$, $\omega_1^{(0)} = e^{\pi i/4}$, $a_1 = 0$ en gaan dan verder volgens het onderstaande plaatje.



Daarbij zijn bijv. $\omega_1^{(0)}$, $\omega_1^{(1)}$ aangegeven met 1, 1' etc. De punten op de vier cirkelbogen hebben opvolgend argumenten

$$\begin{array}{llllll} -\pi/4 \ , & \pi/4 \ , & 3\pi/4 & & & \\ & \pi/4+\varepsilon \ , & 3\pi/4-\varepsilon \ , & 5\pi/4-3\varepsilon & & \\ & & 3\pi/4-3\varepsilon \ , & 5\pi/4-\varepsilon \ , & 7\pi/4+\varepsilon & \\ & & & 5\pi/4 \ , & 7\pi/4 \ , & 9\pi/4 \end{array}$$

Dat betekent dat a_2, a_3, a_4 zó gekozen worden dat

$$\phi_2 = \pi/2 - 2\varepsilon \ , \ \phi_3 = \pi/2 + 2\varepsilon \ , \ \phi_4 = \pi/2 \ .$$

Aan het eind van het procédé is de straal van de cirkel toegenomen met een factor van de orde $1 + c\varepsilon$, c een constante >0 . Er zijn effecten van de tweede orde, maar die hebben de gedaante $O(\varepsilon^2)$. (Zorg er bij de keuze van de cirkelboog 2" 3" 4" voor dat 3" en 4" op dezelfde hoogte liggen). Het procédé kan herhaald worden; nemen wij bij de n-de omloop $\varepsilon = 1/nc$, dan volgt de stelling omdat $\Pi\ (1 + 1/n)$ divergeert.

Opmerking. Het beschreven verschijnsel doet zich waarschijnlijk niet voor als de getallen a_n op voldoend regelmatige wijze naar 0 naderen. Het vermoeden bestaat dat men hier uitspraken kan bewijzen door gebruik te maken van de klassieke asymptotische methoden [4] die - hoe kan het anders - uit de getallentheorie voortkomen.

Literatuur.

1. C.G. Lekkerkerker, Meetkundige voorstelling, Assen 1962.

2. C.L. Stewart, Colloquiumvoordracht 19 Jan 1977 MI/UVA.

3. L.E. Dickson, History of the theory of numbers 1919-1923.

4. N.G. de Bruijn, Asymptotic methods in analysis, Groningen 1958.

AN ALGOL68 SIMULATOR OF THE HP25

A.K. Lenstra

0. INTRODUCTION

An ALGOL68 simulator of the HP25 and its user's guide are presented. Some additional facilities of the simulator are described and some examples are given. We assume the reader of these pages to be familiar with the HP25.

1. THE PROGRAM

The text of the program is shown in Figure 1.

2. USER'S GUIDE

2.1. The compiled program is available to the user on the file LGO, identification HPVAR, of the CYBER 73-28 of SARA computing centre in Amsterdam.

2.2. Input instructions

2.2.1. Every key of the HP25 can be represented both by a digital code and by a letter code, e.g., 15 02 and x^2, 15 08 and 10^x. It is clear that the HP25 letter code representation cannot be used as input for the simulator. Therefore we give the (unchanged) digital codes and the corresponding modified letter codes in Table I.

2.2.2. Runmode. Having read no instructions the simulator is in "runmode". In "runmode" the following commands can be given, separated by at least one blank.

- All letter code instructions from Table I.
- "sst" and "bst".
- "prgmmode" or "(". These commands switch the simulator to "programmode".

The output is similar to the display of the HP25.

Except for some additional facilities which will be dealt with in Section 3, any other input is interpreted as comment and will be printed.

2.2.3. Prgmmode. One can use all the instructions given in Table I applying consistently one of the two ways of representation, viz. either letter code or digital code.

- letter code. The instructions should be separated by at least one blank. Of course it is also possible to give the instructions "sst" and "bst" during letter code programming. Wrong letter code input is interpreted as comment (see Section 3).
- digital code. The first two non blank characters (which will be digits) should not be separated by a blank. Thereafter the digits can be separated by any number of blanks.

  N.B. The line number following a "13" (= "gto") should be separated by blanks from the other input and should not contain blanks.

Wrong digital input will stop execution of the program. In order to return to "runmode" the user should give "runmode" or ")" separated by at least one blank on both sides from other input characters.

2.2.4. Offon. The instruction "offon" has the same effect as switching the simulator off and on again. After this instruction the simulator is in "runmode", and stack, registers and program are cleared.

N.B. Runtime and program length will not be changed. See Section 3.

2.2.5. Off. The input string should end with the instruction "off".

3. ADDITIONAL FACILITIES

3.1. One can give the instruction "printreg" in "runmode" or in "programmode" while using letter code. The content of the eight registers will be printed.

3.2. One can give the instruction "printprog" in "runmode" or in "programmode" while using letter code. The program presently stored and occasional comment will be printed.

3.3. The user can choose an upperbound on the program length by starting the input string with " # n ", where n is an integer indicating the maximum number of program lines. By default, a value of 49 will be assumed.

3.4. The user of the HP25 can interrupt program execution by keying in "r/s", the user of the simulator cannot do so. Therefore the user has the option to specify his own maximum runtime in the following way:

- "prgmmode" or "(";
- one or more blanks;
- "# ";
- a real number indicating the maximum runtime;
- one or more blanks;
- the letter code or the digital code program or "runmode" or ")".

e.g., (# 1.5 runmode .
The default value is 8 seconds.

4. EXAMPLES

4.1. <u>Example 1</u>
We write and execute a program which calculates $\frac{(x+7+10)(1000-8)}{992} - 17$.

4.1.1. Input. ≠ 21 a program without runtime specification:
(enter 7 + 1 0 + 1 0 0 0 enter 8 - * 9 9 2 / 1 7 -) prgm
3 r/s 1 9 9 3 7 r/s off

4.1.2. Output. See Figure 2.

4.2. Example 2

We write and execute a factorization program.

4.2.1. Input. ≠ 30 prgmmode ≠ 12 sto 0 1 sto 1 4) it is much easier to give a digital code program: (235101240124002401 71144113 29 1501157113 26 022351012401240024017114 4113 29 15 01156113 04 1473240113 00 240013 00) prgm 3 7 1 9 9 r/s off

4.2.2. Output. See Figure 3.

4.3. Example 3

We write and execute a program which will run till time limit.

4.3.1. Input. ≠ 3 (≠ 2 s+ sqrt gto 01) prgm printprog
r/s (≠ 1.5) r/s (≠ 1) r/s off

4.3.2. Output. See Figure 4.

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to acknowledge the helpful comments of R.H. Mak, Prof.Dr. F.A. Muller, and of the Editorial Committee of this volume.

Figure 1 The program

TABLE I

digital code	letter code	digital code	letter code	digital code	letter code
00	0	14 09	r	23 00	sto 0
01	1	14 21	ex	23 01	sto 1
02	2	14 22	s	.	.
03	3	14 25	s-	23 07	sto 7
04	4	14 31	prefix	24 00	rcl 0
05	5	14 32	prgm	24 01	rcl 1
06	6	14 33	reg	.	.
07	7	14 34	stk	24 07	rcl 7
08	8	14 41	x<y	14 11 00	fix 0
09	9	14 51	x>=y	14 11 01	fix 1
21	xcy	14 61	x/=y	.	.
22	rd	14 71	x=y	14 11 09	fix 9
25	s+	14 73	lastx	14 12 00	sci 0
31	enter	14 74	pause	14 12 01	sci 1
32	chs	15 00	h	.	.
33	eex	15 01	frac	14 12 09	sci 9
34	clx	15 02	sqr	14 13 00	eng 0
41	-	15 03	abs	14 13 01	eng 1
51	+	15 04	sin-1	.	.
61	*	15 05	cos-1	14 13 09	eng 9
71	/	15 06	tan-1	23 41 00	sto - 0
73	.	15 07	e**x	23 41 01	sto - 1
74	r/s	15 08	ten**x	.	.
13 00	gto 00	15 09	p	23 41 07	sto - 7
13 01	gto 01	15 21	o/o	23 51 00	sto + 0
.	.	15 22	inv	23 51 01	sto + 1
13 fn	gto fn	15 25	g s+	.	.
14 00	hms	15 32	deg	23 51 07	sto + 7
14 01	int	15 33	rad	23 61 00	sto * 0
14 02	sqrt	15 34	grd	23 61 01	sto * 1
14 03	y**x	15 41	x<0	.	.
14 04	sin	15 51	x>=0	23 61 07	sto * 7
14 05	cos	15 61	x/=0	23 71 00	sto / 0
14 06	tan	15 71	x=0	23 71 01	sto / 1
14 07	ln	15 73	pi	.	.
14 08	log	15 74	nop	23 71 07	sto / 7

```
THE MAXIMUM PROGRAM LENGTH IS  21  LINES.


OFFON          0.00
A PROGRAM WITHOUT RUNTIME SPECIFICATION:
PRGMMODE
MAXIMUM RUNTIME OF THIS PROGRAM IS +8.000000000
00
 1          31   ENTER
 2          07   7
 3          51   +
 4          01   1
 5          00   0
 6          51   +
 7          01   1
 8          00   0
 9          00   0
10          00   0
11          31   ENTER
12          08   8
13          41   -
14          61   *
15          09   9
16          09   9
17          02   2
18          71   /
19          01   1
20          07   7
21          41   -
RUNMODE                 +0.00

PRGM                    +0.00

3              3

R/S                     +3.00

1              1

9              19

9              199

3              1993

7              19937

R/S                 +19937.00
```

Figure 2 Example 1

```
THE MAXIMUM PROGRAM LENGTH IS  30  LINES.


OFFON         0.00

PRGMMODE
MAXIMUM RUNTIME OF THIS PROGRAM IS +12.00000000
00
 1      23 00   STO 0
 2         01   1
 3      23 01   STO 1
 4         04   4
RUNMODE                 +0.00
IT IS MUCH EASIER TO GIVE A DIGITAL CODE PROGRAM:
PRGMMODE
MAXIMUM RUNTIME OF THIS PROGRAM IS +12.00000000
 4         04   4
 5   23 51 01   STO + 1
 6      24 01   RCL 1
 7      24 00   RCL 0
 8      24 01   RCL 1
 9         71   /
10      14 41   F X<Y
11      13 29   GTO 29
12      15 01   G FRAC
13      15 71   G X=0
14      13 26   GTO 26
15         02   2
16   23 51 01   STO + 1
17      24 01   RCL 1
18      24 00   RCL 0
19      24 01   RCL 1
20         71   /
21      14 41   F X<Y
22      13 29   GTO 29
23      15 01   G FRAC
24      15 61   G X/=0
25      13 04   GTO 04
26      14 73   F LASTX
27      24 01   RCL 1
28      13 00   GTO 00
29      24 00   RCL 0
30      13 00   GTO 00
RUNMODE                 +0.00

PRGM                    +0.00

3             3

7             37

1             371

9             3719

9             37199

R/S              +37199.00
```

Figure 3 Example 2

```
THE MAXIMUM PROGRAM LENGTH IS  3  LINES.


OFFON         0.00

PRGMMODE
MAXIMUM RUNTIME OF THIS PROGRAM IS +2.000000000
00
 1          25    S+
 2       14 02    F SQRT
 3       13 01    GTO 01
RUNMODE                +0.00

PRGM                   +0.00

PRINTPROG




 1          25    S+

 2       14 02    F SQRT

 3       13 01    GTO 01




        +0.00

R/S
TIME LIMIT
PROGRAM EXECUTION TERMINATED AT LINE  3
    X=       +31.89
    Y=        +0.00
    Z=        +0.00
    T=        +0.00
LASTX=     +1017.00

                                        REGISTER[0]            +0.00
                                        REGISTER[1]            +0.00
                                        REGISTER[2]            +0.00
                                        REGISTER[3]         +1017.00
                                        REGISTER[4]            +0.00
                                        REGISTER[5]            +0.00
                                        REGISTER[6]       +516636.00
                                        REGISTER[7]        +21605.56
```

```
      +31.89

PRGMMODE
MAXIMUM RUNTIME OF THIS PROGRAM IS +1.500000000
 3        13 01    GTO 01
RUNMODE                  +31.89

R/S
TIME LIMIT
PROGRAM EXECUTION TERMINATED AT LINE  1
    X=        +42.13
    Y=         +0.00
    Z=         +0.00
    T=         +0.00
LASTX=      +1775.00

                                   REGISTER[0]          +0.00
                                   REGISTER[1]          +0.00
                                   REGISTER[2]          +0.00
                                   REGISTER[3]       +1775.00
                                   REGISTER[4]          +0.00
                                   REGISTER[5]          +0.00
                                   REGISTER[6]    +1574425.00
                                   REGISTER[7]      +49833.45
      +42.13

PRGMMODE
MAXIMUM RUNTIME OF THIS PROGRAM IS +1.000000000
 1           25    S+
RUNMODE                  +42.13

R/S
TIME LIMIT
PROGRAM EXECUTION TERMINATED AT LINE  2
    X=      +2284.00
    Y=         +0.00
    Z=         +0.00
    T=         +0.00
LASTX=        +47.78

                                   REGISTER[0]          +0.00
                                   REGISTER[1]          +0.00
                                   REGISTER[2]          +0.00
                                   REGISTER[3]       +2284.00
                                   REGISTER[4]          +0.00
                                   REGISTER[5]          +0.00
                                   REGISTER[6]    +2607186.00
                                   REGISTER[7]      +72745.98
    +2284.00
```

Figure 4 Example 3

THE PRIME OF PRIMES

On current misbeliefs in thorough-bass playing

F. Lenstra, A.J. Oort

Abstract. We prove an amazing result on so-called authentic performances of Baroque music: the traditional interpretation of the numbers, resp. columns of numbers that determine the chords, and thus the harmony, of the Thorough-Bass is far from complete [1]. This result is supported by a rediscovery of the way in which the well-known Euclidean Theorem on Primes and the Euclidean Algorithm were applied in early music. The secret of Mersenne's Primes is revealed. The legendary "Doodle-Lute", Flemish "Doedel-oet" may have generated such primes.

Apology. We feel sorry for our Dutch readers, but it is our deep conviction that we should try to obtain the maximum readability that is possible in the given circumstances. Therefore this paper is written in the common Anglo-Dutch dialect in which every thesis should be written. This implies we feel sorry for our English readers, too, for they will not read their language either.

General Introduction. It is only from the beginning of the 19th century, roughly speaking, that composers started to try to write down what they really had in their minds when composing music. Until then, only a very small part was written down in plain notes, another part was written down in special signs, and probably the biggest part was not written down at all, but was supplied by tradition, good taste, craft- and showmanship of the performers of the time. Alas ! Times changed, people died, traditions got lost (cf.[Ro]), and in the last century nobody knew anymore 1) what the plain notes meant (they are not so plain as they may seem) 2) what the special signs meant and 3) what for music's sake should be done to prevent things from becoming DULL. So dull they were, 19th century performances of Baroque music, very often indeed !

From the beginning of this century, this situation changed a little bit. People started to excavate old books, to rebuild old instruments, to practise in old ways, in short, to try to understand how those Baroque things really sounded in their own time. See [Da], [Do], [Em], [La] for details.

However, one problem remains: They are still dull. We are very glad to provide keys to satisfactory answers , apart from not playing Baroque music at all — which is most satisfactory of course.

1) This result may be not amazing at all for those among our readers who always

The Thorough-Bass. (Basso Continuo, Generalbass, Becijferde bas)
If it is good to go back to the base, as all those authentic-performance-people do, then it is certainly good to go back to the best base: the bass. According to J.S.BACH (1685-1750) " The Thorough-Bass is the best base (...) " [1)] But is it a good bass - as executed so far ? And if not : can a bad bass be a good base ? Say it aloud, and the answer is : no. So, following the Chinese rule : "no good case on a bad base" [2)] , in order to improve the music, it is necessary to improve the bass when the latter is bad.

Let us first explain what is meant by a Thorough-Bass .(cf [Ar],[Ke]). Many scores in Baroque music contain a Thorough-Bass : a (connected) subset of the score, consisting of bass-notes with (columns of) numbers printed below them. These notes are to be performed by the "Thorough-Bass-Section" : a key-board instrument together with a string instrument like a gamba. The latter plays the printed notes. The keyboard plays the same notes, supplemented by whole chords in a way which may depend on the performer - and his time for practising. But anyhow, until now the notes of those chords were considered as being fixed and given by the columns of numbers, each number indicating an interval from the printed bass-note upwards. So, in the traditional interpretation of the Thorough-Bass there is some freedom : in passing-notes, in way of execution, but not in the harmonies - as they are fixed by those columns.

Geplerr und Geleyer. Well, those harmonies are dull. They are as dull as those produced by your little nephew (who can play the themes from the "Warshaw Concerto" or "The Sting" with three fingers on a Hammond organ) when extemporizing on "Yankee-Doodle" . The question arises : Is this what the composers meant ? Certainly not. J.S.Bach seemed quite aware of possible (future) misunderstandings of the Thorough-Bass-playing when he said :
"Der General-Bass ist das volkommenste Fundament der Music, welcher mit beyden
"Händen gespielet wird, dergestalt, dass die linke Hand die vorgeschriebenen
"Noten spielet, die rechte aber Con- und Dissonantien darzu greift, damit dieses
"eine wohlklingende Harmonie gebe zur Ehre Gottes und zulässiger Ergötzung des
"Gemüths, und soll, wie aller Music, also auch des General-Basses Finis und End
"Uhrsache anders nicht, als nur zu Gottes Ehre und Recreation des Gemüths seyn.

---

have felt that the old method must be wrong!

1) In German it sounds different. Quotation on this page.

2) In Chinese it sounds different.

The Prime of Primes

"Wo dieses nicht in Acht genommen wird, da ists keine eigentliche Music sondern "ein Teuflisches Geplerr und Geleyer."

But then another question arises : What is wrong ? It is hard to believe that our "number = interval, column = harmony" rule is wrong. It is very logical, and besides, it is mentioned by many ancient authors.cf [Prae].Then it follows that it was not the only one. There must have been another rule, so obvious and so well-known in those days, that it was not necessary to mention it at all. (For earlier discovered examples of rules-that-were-too-well-known, cf. [Ro]) We have found it.

The Euclidean Algorithm in Thorough-Bass Playing. When looking for some hidden rule, one must look for its realm : where is most freedom left ? It proves that when non-diatonic intervals are called for, they are carefully specified by means of flats and sharps. So there is not much room for altering the harmony. But it proves also that ONE INTERVAL IS NEVER CALLED FOR, AND THEREFORE NEVER SPECIFIED : THE PRIME. But of course there must have been primes above the printed bass-note ! Never to take, when there is an infinity to choose from, that would be contradictory to human nature. And indeed, there is an infinity to choose from : THERE EXIST INFINITELY MANY PRIMES ABOVE ANY GIVEN GROUND-NOTE AND INFINITELY MANY PRIMES BELOW IT. This is the famous Theorem on Primes by EUCLID (cf. [Eu]) and in the Baroque it was already very well known, as Euclid proved it some twenty centuries earlier. The proof is as follows :

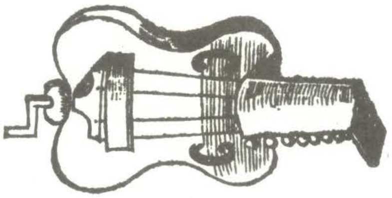
Suppose there are finitely many primes. Then there is a highest among them. Put a sharp before it. Then you get a new prime, which is about 6% higher than the highest. Contradiction. Alternative proof : put a flat before the lowest.

In fact, this device of applying sharps or flats, which is called the Euclidean Algorithm, gives you (if you combine it with some enharmonics) all the notes of the well-tempered keyboard that you might desire. Moreover, why should the adding of primes be restricted to one per bass-note ? It is clear that this freedom-in-the-primes-rule gives a big freedom indeed !

The Doodle-Lute, its History and the Rediscovery. The misunderstanding in music performance indicated above was created because the main instrument for the continuo-section got lost. We are happy to announce its rediscovery.

The early Monochord, Pythagorean triples and Pythagorean squares. According to Aristides QUINTILIANUS (long before the well-tempered penta-chords were found) we know about PYTHAGORAS : "As he prepared to leave this earthly life, Pythagoras besought his disciples to play the monochord" (cf [Ne], p.9) ("monos" meaning one, "chordē" meaning string). This instrument was a square, with one string attached to it. The Pythagorean triples were the trios, played by three monochord players (the current misbelief about these triples being stupid numbers satisfying some uninteresting relation (cf [Le]) is too obviously mistaken to be a subject for serious discussion). The monochord was extensively described by Euclid (cf. [Mu], p.17). The hexachord (sometimes called guitar) is directly derived from the early monochord. The Pythagorean theorem about three squares (=three monochords) is the rule indicating the harmony to the three players.

Further Developments. In mediaeval times several musical instruments were perfected. Besides hydraulic organs, and other whistling and screaming instruments, the monochord was completed to a hurdy-gurdy ("lyra") ; the player used the left hand to form the harmony while the right hand made the strings vibrate; sometimes two players were needed for more complicated instruments.



Lyra

The Prime of Primes

The glorious time of the Doodle-Lute. The year 1685 was the beginning of a great area. Three great composers were born, the greatest of all times being Johann Sebastian Bach. In his time the culture of musical performance reached its supreme heights. The instrument central in these performances was the doodle-lute, a perfection of the ancient monochord, and the mediaeval lyra. On this instrument the true performance of the Thorough-Bass as explained above becomes obvious : the added primes come naturally when "die rechte Hand Con- und Dissonantien darzu greift...". Further explanation in the music score is unnecessary for a skilled doodle-luter. What the famous musicologist Marin MERSENNE (1588-1648) meant when he wrote about his "primes" (cf.[Me]) should be quite clear by now.

Musical progress and arithmetical "progression". In 1750 Johann Sebastian died, and the world became a silent planet. We have not been able to find any doodle-lute built after that year. In 1829, a young man called Felix MENDELSSOHN-BARTHOLDY (1807-1847) tried to revive the old Baroque tradition, by performing the St.Matthew Passion (but the true interpretation of the score turned out to be impossible until our discoveries explained everything which was already obvious in Baroque-music-times). Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805-1859), who was married with a sister of Mendelssohn's , became aware of the problem of finding the good primes in musical performances; he tried to find a way out in terms of arithmetical "progressions", in which he found infinitely many primes. His result did not improve the performance of music, but it made several people, who were incapable of playing music, eager to apply his findings in something called mathematics.

Rediscovery. Two copies of the doodle-lute have been found lately. One was found by a French engineer, B.E.DUVEL, who realized immediately that the construction of the instrument could be copied in his field : electronics. cf. [Du] . In his paper, however, the existence of the old instrument is not mentioned. The other copy was found by us when passing our holidays on the Hebrides. In the 18-th century Georg Frederic HANDEL must have brought it there. What a tragical missing-link in history that Mendelssohn missed the existence of the instrument during his visit to Fingal's Cave ! In [Oo] we describe our discovery in extenso. We mention also a description of the "oet", to be found in [We]. And we note that the "doedel-zak" (bag pipe) obviously should have lead us much earlier, and more logically to our discovery.

==========

List of references.

[Ar] F.T.ARNOLD, The Art of Accompaniment from a Thorough Bass as Practised in the 17th and 18th Centuries; Holland Press, London.

[Da] Thurston DART, The Interpretation of Music; Hutchinson University Library.

[Do] Arn.DOLMETSCH, The Interpretation of the Music of the XVII and XVIII Centuries; Novello and Oxford University Press.

[Du] B.E.DUVEL, Synthesizers, an important rediscovery.

[Em] Walter EMERY, Bach's Ornaments; Novello.

[Eu] EUCLID of Alexandria; Stoichia.

[Ke] Hermann KELLER, Schule des Generalbass-Spiels; Bärenreiter, 1955^4.

[La] Wanda LANDOWSKA, Musique ancienne; 1909.

[Le] H.W.LENSTRA jr, Euclidische getallenlichamen; Amsterdam, 1977.

[Le sr] F.LENSTRA sr, Algorithms for the Euclidean monochord, Lenstra-clan report 77-03; to appear in "Serious Musamatics", Löwenreiter.

[Me] Marin MERSENNE, Harmonie universelle; Paris, 1635.

[Mu] David MUNROW, Instruments of the Middle Ages and Renaissance; Oxford University Press, 1976.

[Ne] Hans NEUPERT, The clavichord; Bärenreiter, 1965.

[Oo] A.J.OORT, Rediscovery of the "Doodle-Lute".

[Prae] Michael PRAETORIUS, Syntagma Musicum; ± 1635.

[Ro] F.ROTHSCHILD, Vergessene Traditionen in der Musik; Atlantis.

[We] Hans WERNER, Mattijs Mooimuziek; U.-M. West-Friesland, Hoorn, 1967.

Dit artikel bereikte ons door bemiddeling van A.J. Lenstra en F. Oort.

EEN TALENWONDER

Vertaald uit "The Latter Days at Colditz" door P.R. Reid, M.B.E., M.C., 1952

J.A. Lenstra

Toen Cyril in Colditz aankwam, ging hij zich bemoeien met de vreemde talen. Hij had maar één taal te koop, en dat was Engels. Frans, Duits, Italiaans en misschien zelfs Russisch wilde hij leren. Hij kon natuurlijk voor elke taal een leraar uitzoeken en hun allemaal op hun beurt Engels leren, maar Engels hing hem de keel uit. Hij kon het spreken, maar hij zou met geen mogelijkheid kunnen uitleggen hoe en waarom hij dat deed. In dat opzicht gaf hij de voorkeur aan Latijn. Bovendien had zijn beste Franse vriend al iemand anders gevonden om Engels van te leren. Het was niet gemakkelijk, maar hij vond er iets op, en toen ging het van een leien dakje. Op een dag was hij aan de praat met een Pools officier, die advocaat van beroep was. Deze man vertelde een uitvoerig verhaal over een Chinees zakenman, die het zeer slecht vergaan was voor de Poolse rechtbanken omdat niemand in het land Chinees kende. De Poolse advocaat sprak uitstekend Frans. Cyril greep zijn kans en stelde voor deze leemte in de Poolse procesvoering aan te vullen door zijn vriend Chinees bij te brengen. De Pool hapte toe. Hij sprak af zijn Franse lessen aan zijn andere leerlingen te stoppen en zich te concentreren op Cyril, in ruil voor het Chinees van Cyril.

Cyril kende geen woord Chinees, maar dat was helemaal geen bezwaar. Hij begon zijn lessen heel eenvoudig volgens de klassieke beginselen. Hij gaf eerst de grote lijnen aan van de Chinese declinaties. Dat waren er twintig, dat zou hem genoeg speelruimte moeten geven. Hij noemde de verschillende tijden en benadrukte dat Chinezen, gewend als ze zijn om te leven zonder enig tijdsbesef, overal de tegenwoordige tijd voor gebruikten, tenzij het ongeveer duizend jaar geleden gebeurd was. In dat geval ging men over op de verschillende verleden tijden, uiteindelijk terechtkomend in de voltooid verleden tijd. Wat betreft de toekomst, dat was ook in de tegenwoordige tijd, tenzij het over meer dan duizend jaar zou plaatsvinden. Dit effende het pad voor Cyril. Hij kon nu met levendige voorbeelden uitleggen hoe het kwam dat Chinezen altijd dat malle taaltje spreken dat bekend staat als pidgin Engels. Hij vertelde dan een oud verhaal over een Chinees, wiens trein vertrok terwijl de bediende in de stationsrestauratie naar zijn bagage zocht en die toen woedend gilde: "*Pretty damn seldom how my bag go. She no fly. You no fit keep station than God's sake*". Hij legde dan uit: "Kijk, alles is in de tegenwoordige tijd, tenzij het lang, erg lang geleden is".

Hij ging verder met de conjugaties en dacht dat het verstandig zou zijn om daar ook een hele hoop van te hebben; Chinees was tenslotte een erg oude taal.

Hij zette de Pool aan de gang met een Chinese versie van *amo, amas, amat*. Dat was *mo, mao, maoto*, uitgesproken op een onmiskenbaar Oosterse manier. Cyril dacht dat de betekenis beter veranderd kon worden, dus *mo* betekende:"ik eet". Hij liet hem ook een paar andere gemakkelijke werkwoorden uit zijn hoofd leren.

Omdat volgens Cyril de declinaties zo ingewikkeld in elkaar zaten, zou hij hem voorlopig alleen de eerste declinatie leren en, om zijn woordenschat uit te kunnen breiden, hem toestaan met de zelfstandige naamwoorden van de andere declinaties een soort pidgin Chinees te spreken. Het zou zij spreekvaardigheid snel doen toenemen. Hij gaf hem het equivalent van *mensa, mensa, mensam* als huiswerk mee.

Dat ging aldus: *Soya, soya, soyo. Soya* betekende boon. Ik eet een boon: *Mo soyo.*

De Pool ging vooruit. Eigenlijk was hij veel te snel, want Cyril merkte dat, inplaats van dat hij Frans leerde, hij al zijn huiswerkuurtjes nodig had om te proberen deze angstaanjagend vlijtige leerling bij te blijven. Hij hield de strijd verscheidene weken vol, totdat op een zekere dag, toen hij vroeg in de morgen corvee had en in de grauwe ochtendschemering bij de Duitse keuken buiten in de rij stond, met klompen aan zijn voeten, zijn hoofd in een sjaal gewikkeld en zijn blote benen uitstekend onder zijn kamerjas, een gescheurde Frans khaki mantel, hij plotseling naast zich een stem hoorde.

"*Hokito tao yen yosh inko?*"

Hij kende deze stem maar al te goed. Hij kon er niet langer tegenop. Hij wist overigens niet wat de goede man precies zei, maar om zo betrapt te worden -Chinees praten in zijn onderbroek!- was net de druppel die de emmer deed overlopen. Cyril was trots op zijn militair tenue, en terecht. In het volle daglicht waren er maar weinig officieren die er zo elegant uitzagen als hij.

"*Yoshinka yen?*" ging de stem bezorgd verder. "*Mao cha pani undu yoyo.*" Dat *yoyo* gaf Cyril de genadeslag. Hij herinnerde zich dat hij een paar zeer wonderlijke deelwoorden onderwezen had, die eindigden op *yoyo*, maar dat was weken geleden. Alleen een talenwonder zou zich de betekenis hiervan nog kunnen herinneren. Met een vermoeide zucht richtte hij zich op en terwijl hij zijn leerling aankeek zei hij ernstig, met zijn hand op zijn buik:

"*Mo chu la beri-beri suyu.*"

Waarop het antwoord luidde: "*Munchi sunya! munchi sunya!*".

Tussen hen bestond er een band van volmaakt wederzijds begrip. Cyril vluchtte de trap op en zijn leerling staarde hem ontroerd na alvorens zich weer ijverig over zijn dictaat heen te buigen.

Dat was de laatse keer dat Cyril ooit les in het Chinees gaf.

REKENMACHINES IN DE BIOCHEMIE

J.A. Lenstra

I. Calculatoren

Van oudsher is er apparatuur geweest die in staat was rekenkundige bewerkingen uit te voeren: het telraam, de rekenliniaal, de diverse soorten mechanische rekenmachines, eventueel met electrische aandrijving, en de eerste versies van electronisch werkende apparaten. Met uitzondering misschien van de relatief goedkope en simpel werkende rekenliniaal is het bestaansrecht van al deze machines de laatste jaren ondermijnd door de komst van de moderne electronische rekenmachines die t.o.v. de bovengenoemde apparaten alleen maar voordelen bieden: snel, nauwkeurig, groot bedieningsgemak, klein, handzaam en erg goedkoop. De eenvoudigste zakmachientjes (*f* 20 - 25,--) kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De duurdere typen hebben daarnaast nog één of meer geheugens of kunnen zelfs mathematische functies, zoals sin, cos, ln, etc. berekenen (zg. "scientific calculators").

Hoewel het in het kader van dit college niet essentieel is hoe deze apparaten werken, zijn twee dingen wel interessant.

- Inwendig werken de machines, net als de meeste computers, in het tweetallig stelsel (0=0, 1=1, 2=10, 3=11, etc.).
- Net als bij de ouderwetse mechanische apparaten wordt vermenigvuldigd via herhaald optellen en gedeeld via herhaald aftrekken.

Sommige machientjes, met name die van Hewlett Packard, werken met de zg. "Reversed Polish Notation" (RPN). In plaats van 1+1 = wordt dan ingetoetst: 1↑1+. Dit valt te vergelijken met de manier van rekenen door twee getallen onder elkaar te zetten alvorens de bewerking uit te voeren:

$$\begin{array}{l} 1 \\ \underline{1}+ \end{array}$$

Het symbool "↑" (ook wel "enter") betekent als het ware: schuif het eerste getal 1 regel omhoog. Bij ingewikkelde problemen biedt de RPN beslist voordelen. Vergelijk bijvoorbeeld

$(1+2)\times(3+4)=$ in de conventionele notatie en

$\underbrace{1\uparrow 2+}_{3}\underbrace{3\uparrow 4+}_{7}\times$ in de RPN: haakjes zijn overbodig, want tussenresultaten worden automatisch opgeslagen. Op deze manier hoeven er minder toetsen te worden ingedrukt.

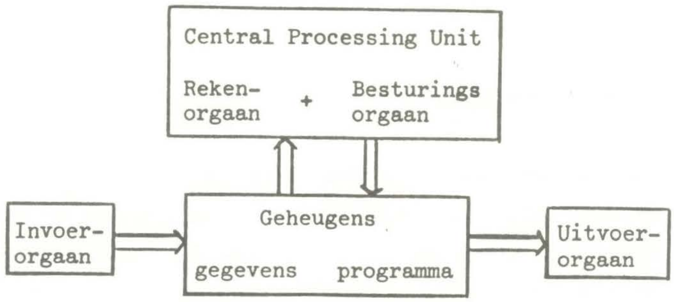
Het is duidelijk dat deze machientjes ons het leven een stuk gemakkelijker kunnen maken en dat iedereen ermee zal kunnen werken. Toch moet worden gewaarschuwd tegen twee vormen van minder efficiënt gebruik. In de eerste plaats is een iets grotere machine, uitgerust met een printer, vaak te preferen boven een zakmachientje, speciaal bij veel berekeningen achter elkaar. Men is dan geen tijd kwijt met het overschrijven van de resultaten en fouten gemaakt bij het intoetsen zijn achteraf gemakkelijk te controleren. In de tweede plaats: met veel berekeningen achter elkaar loont het ook heel vaak de moeite over te gaan op de volgende categorie rekentuig.

II. Computers.

Het essentiële verschil tussen calculatoren en computers is dat computers, in tegenstelling tot rekenmachines, programmeerbaar zijn, m.a.w. het is mogelijk om de machine een reeks van buiten ingebrachte instructies (het zg. programma) te laten uitvoeren. Deze instructies kunnen van alles inhouden: rekenkundige bewerkingen, het opslaan van bepaalde gegevens in bepaalde geheugens, het afdrukken van resultaten etc.

In grote lijnen bestaan computers uit de volgende onderdelen (Fig. 1): - invoerorganen (bijv. toetsenbord of ponskaartlezer)

- geheugens. Hier worden niet alleen gegevens opgeslagen maar ook het programma.
- "central processing unit" (CPU): rekenorgaan + besturingsorgaan. In het rekenorgaan gebeuren de eigenlijke berekeningen. Het besturingsorgaan zorgt ervoor dat alle instructies één voor één uit



Figuur 1.

het programmageheugen worden gehaald en worden uitgevoerd, zodat de invoergegevens op de juiste manier in de geheugens terechtkomen, naar het rekenorgaan worden gestuurd om betrokken te worden in de berekeningen, de (tussen)resultaten worden teruggestuurd en de uiteindelijke resultaten worden doorgestuurd naar de

- uitvoerorganen (bijv. printer of beeldscherm).

Voor de volledigheid moet worden vermeld dat moderne electronische calculatoren ook op deze manier zijn opgebouwd. Ze werken echter alleen met gefixeerde interne programma's en kunnen dus niet van buitenaf worden geprogrammeerd.

De technische ontwikkeling van de computer tot nu toe is verlopen in vier generaties:

1e generatie (1951-1960): met electronenbuizen

2e " (1959-1965): met transistoren en dioden

3e " (1964- nu): met geïntegreerde schakelingen (IC's)

4e " (1973- nu): de hele central processing unit (CPU) in één IC. Zo'n IC heet een "microprocessor" (afmetingen ca. 1x1 cm) en wordt toegepast in alle moderne electronische calculatoren en microcomputers. Omdat een microprocessor tot nu toe langzamer werkt dan een CPU van de derde generatie worden ze nog niet universeel toegepast.

In het onderstaande wordt ingegaan op de mogelijkheden van drie categorieën van computers:

1) zakcomputers en tafelcomputers
2) dedicated computers
3) grote, centraal opgestelde computers.

1) Zakcomputers en tafelcomputers.

Het is nuttig te weten dat men geen ingewikkeld probleem hoeft te hebben noch speciale talenten nodig heeft om veel plezier te kunnen hebben van computers. Als men op een calculator bij het uitvoeren van eenvoudige berekeningen die men vaak achter elkaar moet uitvoeren (bijv. het aftrekken van een blanco of het vermenigvuldigen met een constante factor) steeds dezelfde toetsen moet intikken, is het meestal tijd om over te gaan op een eenvoudige computer, zoals een dure zakrekenmachine (*f* 300 - 1.800) of een eenvoudige tafelcomputer. Men hoeft dan die toetsen die men anders elke keer moet indrukken, slechts één keer in te drukken, maar nu zodanig dat de overeenkomstige instructies in het programmageheugen terechtkomen (dit valt meestal te bereiken door met één knop de machine in de zg. "program mode" te zetten). Na het intoetsen van de invoergegevens kan men volstaan met het starten van het programma.

Behalve deze eenvoudige berekeningen kunnen uiteraard ook meer gecompliceerde problemen op kleine computers worden opgelost. Men denke bijv. aan statistische bewerkingen, zoals het uitrekenen van het gemiddelde en de standaardafwijking of aan het berekenen van een lijn volgens de methode der kleinste kwadraten. Meestal zijn voor dergelijke problemen standaardprogramma's beschikbaar. Hier moet echter worden gewaarschuwd voor een veel voorkomende fout. De methode der kleinste kwadraten is in de biochemie zelden bruikbaar, omdat aan de noodzakelijke voorwaarde, dat de scattering van de punten overal even groot is, zelden is voldaan (denk bijv. aan de Lineweaver-Burk plot of de semilogaritmische plot). Gebruik van de methode der kleinste kwadraten zonder aan de punten verschillend gewicht toe te kennen, is dan misleidend en volkomen fout. In het algemeen kan men zeggen dat in een experimentele wetenschap als de biochemie het overdoen van een experiment meestal meer zin heeft dan het omslachtig berekenen van statistische significanties.

2) Dedicated computers.

In veel gevallen heeft het zin om bepaalde meetgegevens gedurende of meteen na de meting te verwerken. Men denke aan de integratie van chromatogrammen en het corrigeren voor blanco's en quenching bij scintillatietellers. Men spreekt van zg. "dedicated computers" als een computer continu "on line" aan een bepaald apparaat is geschakeld. De mogelijkheden zijn vaak relatief beperkt, aan de andere kant kunnen ontwerp en bediening optimaal worden aangepast aan de specifieke problemen van de meetapparatuur. In de gevallen waar de programmeerbaarheid geheel is verdwenen, is de benaming computer niet langer terecht (men denke bijv. aan de "computerflits").

3) Grote centrale computers.

Haast alle universiteiten beschikken nu over grote, centraal opgestelde computers. In principe werken ze net zo als de kleinere machines maar ze hebben veel meer geheugenruimte, zodat langere programma's en meer gegevens kunnen worden opgeslagen, en werken veel en veel sneller zodat meer mensen er gebruik van kunnen maken. Bovendien zijn er verschillende vormen van in- en output mogelijk. De gegevens en programma's kan men invoeren via ponskaarten, ponsband, magneetband of -schijf of het toetsenbord van een terminal. Voor de uitvoer is er de keus tussen afdrukken, ponsen op kaarten of band, opslaan op magneetband of -schijf of zelfs grafisch plotten. Voor de gebruiker die overgaat van de programmeerbare zakrekenmachientjes of tafelcomputers op grote computers zijn er verder twee belangrijke verschillen.

In de eerste plaats zal het nodig zijn een hogere programmeertaal te leren. Men maakt onderscheid tussen machinetaal en programmeertaal. In machinetaal komt elke instructie overeen met één bepaalde handeling die de computer moet verrichten, bijv. een rekenkundige bewerking of het opslaan van een bepaald getal in een bepaald geheugen. Daarentegen laat een instructie in een programmeertaal de computer meestal verschillende instructies uitvoeren. Zo'n taal is voor de computer moeilijker te begrijpen maar maakt het programmeren een stuk eenvoudiger. Als voorbeeld moge weer dienen het uitrekenen van (1+2)x(3+4). De codering in RPN (zie boven): $1\uparrow 2+3\uparrow 4+\times$ staat heel dicht bij de machinetaal. In een hogere programmeertaal als FORTRAN wordt dit één instructie: M=(1+2)*(3+4), waardoor M niet alleen wordt uitgerekend maar ook automatisch wordt opgeslagen in een geheugen, waaruit het weer kan worden opgeroepen door bijv. de instructie N=M+1.

Voordat de computer een programma, geschreven in een programmeertaal, kan uitvoeren, moet het eerst worden vertaald in zijn eigen, binaire machinetaal. Dit gebeurt automatisch door de zg. compiler.

De meest gebruikte programmeertaal in de scheikunde is FORTRAN. ALGOL 60 en PASCAL zijn beter geschikt voor meer complexe problemen, terwijl BASIC, nog iets eenvoudiger dan FORTRAN, vaak wordt gebruikt op kleine computers. Voor administratieve doeleinden is er de taal COBOL. In het algemeen kan men zeggen dat hoe meer mogelijkheden de taal biedt om ingewikkelde problemen eenvoudig te programmeren, des te moeilijker het voor de computer wordt om hem te vertalen in machinetaal.

Men kan programmeertalen op twee manieren leren: via de natuurmethode (na korte instructie meteen gaan gebruiken, vooral voor eenvoudige talen aan te raden) of via cursussen. Het rekencentrum organiseert elk jaar een serie cursussen voor de meest gangbare programmeertalen, in duur variërend van 1 tot 3 weken. In de meeste gevallen is geen voorkennis vereist.

Het tweede dat opvalt als men met een grote computer gaat werken, is dat men geen directe toegang tot de computer heeft. Men kan kiezen tussen "batch verwerking" en het werken via interactieve terminals. In het eerste geval levert men de input, meestal het programma en/of invoergegevens op ponskaarten, in bij een balie en krijgt men de output, meestal van de regeldrukker (printer die een hele regel tegelijk drukt) een tijdje later, afhankelijk van de benodigde rekentijd en geheugenruimte variërend van een half uur tot een nacht, terug. In het tweede geval werkt men op een terminal, een teletype of een display terminal (toetsenbord + beeldscherm) die via een telefoonlijn met de computer is verbonden. Het programma en/of de gegevens worden ingetoetst, waarna de computer vrij snel antwoord geeft. Deze manier van werken belast de computer veel zwaarder omdat de uitvoering van andere programma's moet worden gestopt om de input van de terminal te kunnen verwerken. Dit komt dan ook tot uiting in de hoeveelheid rekentijd die van het budget wordt afgetrokken of in de rekening die men krijgt thuisgestuurd. (Tot nu toe hoeven dergelijke overwegingen in Groningen nog niet mee te spelen.) Voor verdere details over de manier van werken met de CDC Cyber van het Rekencentrum van de R.U. Groningen zij verwezen naar de R.C. publicaties 9 en 10, resp. de gebruikersgids en de gids "Fortran op de Cyber".

Het zal duidelijk zijn dat men een grote computer alleen gaat gebruiken als de problemen te ingewikkeld worden voor de kleine computers. Voor veel problemen, met name statistische en numerieke berekeningen, kan men gebruik maken van de standaardprogramma's die aanwezig zijn op het Rekencentrum.

Voorbeelden van het gebruik van grote computers bij het verwerken van meetresultaten in de biochemie zijn de EM-reconstructie en de Fourier transformatie bij de X-ray structuurbepaling. Steeds vaker wordt de computer ook gebruikt in theoretische studies als zelfstandig biochemisch research-instrument.

Literatuur

Mantel, P.A. (1975) Radio Electronica 19, 659-665; 20, 693-697; 21, 731-734; 22, 779-782. "Toepassing van microcomputers"

McWhorter, E.W. (1976) Scientific American 234, 88-98 (March 1976) "The small electronic calculator"

R.C.-Publicatie nr. 9 "Gebruikersgids 77" (Rekencentrum R.U.G.)

R.C.-Publicatie nr. 10 "Fortran op de Cyber" (Rekencentrum R.U.G.)

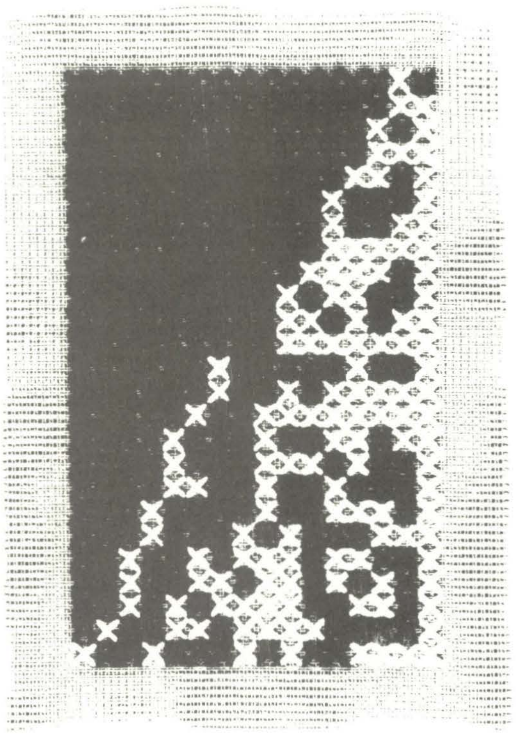
A NEW MERSENNE PRIME NUMBER

W.C.H. Lenstra

Introduction

A new Mersenne prime number is presented, using an interesting representation due to H.W. Lenstra, Jr.

Section 1



Acknowledgement

I am most grateful to A.K. Lenstra for his computational assistance. He is not to be blamed for any remaining error.

HENDERIK DE ZAENDAM

K.C.E. Lenstra-de Groot

Segnour, oiiés - ke Jhesus bien vous fache,
Li glorieus, ki nous fist a s'ymage! -
Boine canchon estraite del lignaige
De Henderik a l'aduré corage,
De Henderik ki tant est son eage
Enfes, preud'homme et bachelers tres sage.

Segnour, oiiés, que Diex vos puist aidier!
Si faites pais et laisiés noissier,
S'orrés chançon que moult fait a proisier,
De Henderik, li nobile guerrier,
Qui tint mestier de matematikier.
Droit a Saendam, certes, fu ses cors nés,
Ains l'engerra Henderik li aisné,
Dame Katrine le porta en ses lés.
Il n'est pas sol, freres avoit asés,
Seror, hélas, sa mere li a donné,
Par foi, une seule, moult est sa biauté,
Car plus est bele que solaus en esté.

Segnour, preudhomme, certes, bien le veés
Que jou ne die que pure verité
De Henderik qui a Saendam fu né.
A l'enfance, comme bien savoit jouer,
N'a pas d'ennui a ses parents causé.
Lire des livres, jeune, a commencé;
Construit pays, Bemmeland, le faé;
Petit repas avant le desjeuner
prend il, des bestes sauvages et limacées,
Il les aore, a pleine la bouchée;
Mon vis, tout son gré et sa volonté.

Amis, envers moi entendez canchon.
Il fust gentis fils, Henderik a non.
Tot enfes, sut il lire avec raison,
De alpha, bêta, tout a sa façon.
Uns mestre de cet langue, sans tançon,
L'apela: "me recite a randon,
Ceux qui suivent, recite, petit hom".
"Comment", dist il, "je vos ferai un don,
Non sulement l'arrangement common,
En sen contrere, ça est ma façon!"

Segnour, tot ne vos dis en escrivant,
Mais savez vos le Sherria courant?
Avec ses frere Hans, uns enfes frans,
Formast il le regeor, pas de noiant:
De pieres a batir, le cuer contant;
Helas, seror petite, a la main grant,
Ne s'effraya por les omnipotent,
Cela dans ses habits pieres luisant.
Les construisors de sainte Hens, bien vaillant,
Longement querent, ont le cuer dolant.
La fin de cet estroires: tous sont content.
Le Cahier des Plaintes - quoi? - n'est pas celant
que Henderik avoit ases tormant:
Mainte plainte a le petit enfant,
Ahi, Henderik, comme es tu sospirant!

Or vos ai dit comment il a ouvré
Et si vos ai trestout dit verité.
"Mere", dist l'enfes, "par sainte carité,
Et cor me dites de Dieu de maiesté,
Et cor me dites, comment est il nommé?

Quel est son sens, oh, dites ton penser!"

Hélas, il n'entend pas: "vous le sarés!"

La solucion, pas aisible a donner!

Segnour, preudomme, certes, bien le veés,

Je ne puis, certes, mon coraige celer,

Que jou ne die çou que j'ai empensé,

Moult sui joians quant vos creire volés.

Je le dis en tout fine loiauté.

Entend comme il a gymnaas enduré.

Buen coraige en gymnique n'a possédé,

Se torna en son dos, laissa parler,

Mestre ne sachant, comment l'avancer.

Jongleur Homerus fust ses amis chers,

Henderik sut molt chançon reciter.

Renart, bete rusé, a poil melé

Por lui dans mainte conte li sujez a donné.

Chief de gymnaas est forment tourmenté,

Par lettres envoiés por le Cahier,

Vulpes a non, ne vos vuel point celer.

Lettres de Henderik, aiez pitié,

Contenus ne fust asś ajusté.

De Henderik, bien vos sai plus conter,

Ains nos convient nostre canchon finer.

A Amsterdam la feste est ordonnée,

Bien vos servez de claré, de vin viés;

Buvez et autrui le ver plein donnés.

Nos buvons, de buen cuer, a la santé,

De Henderik, que sa vie soit senée!

Troveresse Mama Len.

DE BRAVE HENDRIK IS TOTAL LOSS, WEET JE WEL

een korte geschiedenis van de kinderliteratuur

A. Lenstra-Mulder

Lieve kinderen! volgt slechts het
voorbeeld van Hendrik, en het zal
u altijd welgaan.
\- N. Anslijn, *De brave Hendrik.*

Aan het einde der middeleeuwen bestond er geen speciale kinderliteratuur. In die tijd was er nauwelijks een kloof tussen de wereld van het kind en die van de volwassene en men vond algemene ontwikkeling niet belangrijk. Zowel kinderen als volwassenen konden de ridderverhalen, legenden, volkssprookjes en bijbelverhalen begrijpen en waarderen. Deze verhalen werden mondeling overgeleverd.

Toen zich hiernaast een afzonderlijke literatuur voor intellectuelen ontwikkelde en het volksonderwijs toenam, ontstond er behoefte aan een eigen literatuur voor het kind, dat steeds meer in een aparte wereld werd geschoven. Langzamerhand verschenen er boekjes met korte verhalen en rijmen speciaal voor kinderen geschreven. Helaas schoten deze welgemeende werkjes aan hun doel voorbij. Het ene boekje mocht er wat vrolijker uitzien dan het andere, de verheerlijking van het goede gedrag stond overal op de voorgrond; van scherts en kinderlijk vermaak was nergens een spoor te bekennen en de fantasie werd op geen enkele wijze geprikkeld.

Ter illustratie diene het in de Appendix opgenomen *De brave Hendrik* door N. Anslijn, alsmede de volgende fragmenten.

HET VROLIJK LEEREN
Mijn speelen is leeren, mijn leeren is speelen,
En waarom zou mij dan het leeren verveelen?
Het lezen en schrijven verschaft mij vermaak.
Mijn hoepel, mijn priktol verruil ik voor boeken;
Ik wil in mijn prenten mijn tijdverdrijf zoeken,
't Is wijsheid, 't zijn deugden, naar welken ik haak.
\- Hieronymus van Alphen, *Proeve van kleine gedigten voor kinderen.*

PIET DE SMEERPOES

Piet was een smeerpoes op en top,
Die schrikte voor een waterdrop
En als een dwaze om zich greep
Bij 't zien van waschkom, spons en zeep.
Zijn hoofd was als een ragebol,
Met stof en spinnewebben vol;
Zijn nagels, foei, om van te gruwen!
Wie zou zoo'n vuilen knaap niet schuwen?
\- Heinrich Hoffmann, *Struwwelpeter.*

De eerste noemenswaardige Nederlandse kinderliteratuur werd geschreven door Hieronymus van Alphen. Zijn *Proeve van kleine gedigten voor kinderen* ontketende een ware lawine van kinderboeken. Uit oude catalogi blijkt dat enige jaren na de verschijning van dit werk in 1778 honderden kinderboeken op de markt waren gekomen. Enige typische vertegenwoordigers uit deze eerste periode der kinderliteratuur staan hieronder vermeld.

Charles Perrault	*Histoires, ou Contes du temps passé, avec des moralitez*	1697
Hieronymus van Alphen	*Proeve van kleine gedigten voor kinderen*	1778
N. Anslijn	*De brave Hendrik*	1818
J.J.A. Goeverneur	*Fabelen en gedichtjes voor kinderen*	1837
Heinrich Hoffmann	*Struwwelpeter*	1845
Rodolphe Töpffer	*Histoire de Monsieur Cryptogame*	1846
Wilhelm Busch	*Max und Moritz*	1865

Tegen het eind van de negentiende eeuw ging men steeds meer voor het kind schrijven. De verhalen droegen een minder moraliserend karakter; avontuur, romantiek, fantasie en geborgenheid werden de voornaamste elementen in de kinderliteratuur. We noemen de volgende prominente schrijvers en schrijfsters.

J. Stamperius	*Het veerhuis aan de Oosterschelde*	1888
P. Louwerse	*Geïllustreerde vaderlandse geschiedenis*	1894
C.Joh. Kieviet	*Fulco de minstreel*	1895
Top Naeff	*Schoolidyllen*	1900
Chr. van Abkoude	*Pietje Bell*	1914

Cissy van Marxveldt	*Joop ter Heul*	1919
Johan Fabricius	*De scheepsjongens van Bontekoe*	1924
A.A. Milne	*Winnie-the-Pooh*	1926
Leonard Roggeveen	*Het geheim van het oude horloge*	1928
Marten Toonder	*Tom Poes*	1941
Piet Bakker	*Ciske de Rat*	1942
Dick Laan	*De avonturen van Pinkeltje*	1947
W.G. van de Hulst	*Het grote voorleesboek*	1947
Daan Zonderland	*Jeroen en de zilveren sleutel*	1949
Annie M.G. Schmidt	*De spin Sebastiaan*	1951
Jaap ter Haar	*Saskia en Jeroen*	1954

In 1945 waren er duizenden kinderboeken geschreven en nog vele zouden volgen. Eén van de bekendste na-oorlogse schrijfsters is Annie M.G. Schmidt. Haar verhalen en gedichten zijn op humoristische en vaak ironische wijze geheel afgestemd op de belevingswereld van het kind. Bij de jongens waren vooral boeken van Kieviet, Van Abkoude, Fabricius en Roggeveen geliefd. Wat de meisjes betreft, boeken van Top Naeff, Cissy van Marxveldt en Leni Saris werden "door de bakvisjeugd verslonden". Schrijvers als Dick Laan, Jaap ter Haar en Daan Zonderland creëerden beroemde figuren zoals Pinkeltje, Saskia en Jeroen.

Volgens de huidige waarden en normen in de kinderliteratuur zijn al deze boeken echter "niet verantwoord". De kinderen mogen niet geconfronteerd worden met een verouderd en ongewenst wereldbeeld. De beschrijving van een normaal gezin en van de traditionele rolverdeling tussen man en vrouw wordt niet meer op prijs gesteld.

> *In het kleine aardige huisje op het schip brandt de lamp. De schipper en zijn vrouw zitten bij de tafel. Dat zijn de vader en de moeder. Maar de twee kindertjes liggen al onder de wol, ieder in een klein, aardig houten bedje, een krib.*
>
> \- W.G. van de Hulst, *Het grote voorleesboek*, blz. 8.

> *Saskia vond het wel een beetje eng om aan te bellen. Maar Jeroen was veel flinker. Hij durfde wél.*
>
> \- Jaap ter Haar, *Saskia en Jeroen: domme dingen*, blz. 7.

Nee, de kinderen moeten lezen over emancipatie, echtscheiding, homosexualiteit en milieuproblematiek, om zo tot volwaardige mensen op te groeien.

> *"Ik trouw later met een koets en een paard ervoor. Ik trouw écht," bekende Total Loss. (...)*
>
> *Met ongeloof en grote twijfelogen keek zijn moeder op hem neer: waar háálde hij die antieke ideeën vandaan? Niet van thuis.*
>
> \- Miep Diekman, *Total Loss, weet je wel*, blz. 10.

> *"Zo is onze samenleving ingericht, zo wordt het ons geleerd. De mens, met zijn technische en wetenschappelijke kennis, zal de natuur wel even de wet voorschrijven."*
>
> \- Jan Terlouw, *Oosterschelde windkracht 10*, blz. 183.

Hieronder staan enige specialisten in dit genre vermeld.

An Rutgers van der Loeff	*Gewoon in het ongewone: een verhaal over jonge vrijwilligers in het ontwikkelingswerk in Afrika*	1971
Kristin Hunter	*The soul brothers en sister Lou*	1972
Miep Diekman	*Total Loss, weet je wel*	1973
Lynn Hall	*Maak me niet kapot*	1975
Jan Terlouw	*Oosterschelde windkracht 10*	1976

Uit het bovenstaande moge blijken dat de strekking der kinderliteratuur sterk gebonden is aan de periode waarin zij ontstaat. Niet ten onrechte gaan de beoefenaren van de nieuwste stroming ervan uit dat de bestaande kinderliteratuur niet alleenzaligmakend is, maar we dienen ons wel te beseffen dat deze observatie evenzeer geldt ten aanzien van hun eigen producten. Moeten kinderen in hun vroegste jeugd geconfronteerd worden met sombere probleemstellingen, waarvoor steevast een ideële en irreële oplossing wordt gepresenteerd?

Laten we wat er is niet overboord zetten en wat ontstaat niet overbelasten met de zware problematiek waaronder volwassenen gebukt denken te gaan. Geef de kinderen in hun boeken een eigen wereld, waarin alles kan, waarin ze zich kunnen uitleven en waarin ze bovenal zichzelf kunnen zijn. Juist dàn wordt het lezen een waardevolle bezigheid, een rijkdom voor het gehele leven.

APPENDIX

DE BRAVE HENDRIK

Kent gij Hendrik niet, die altijd zoo beleefd zijnen hoed afneemt als hij voorbij gaat?

Vele menschen noemen hem de brave Hendrik, omdat hij zoo gehoorzaam is, en omdat hij zich zoo vriendelijk jegens ieder gedraagt. Hij doet nooit iemand kwaad. Er zijn wel kinderen, die hem niet liefhebben. Ja, maar dat zijn ook ondeugende kinderen. Alle brave kinderen zijn gaarne bij Hendrik. Kinderen, die met Hendrik omgaan, worden nog braver, want zij leeren van hem, hoe zij handelen moeten.

Als Hendrik zoo braaf is, dan zal hij ook zijne ouders wel liefhebben. Alle brave kinderen hebben hunne ouders lief. Ja, hij heeft zijne ouders zeer lief, daarom is hij ook altijd zoo vroolijk en vergenoegd.

Hij krijgt toch geen lekker eten en drinken, en hij heeft geene mooije kleederen: hoe kan hij dan zoo vergenoegd zijn?

Gelooft gij dan dat men lekker eten en drinken, en mooije kleederen moet hebben om vergenoegd te wezen? - Ik niet. Maar daar komt Hendrik aan, wij zullen het hem zelven vragen.

Jan: "Ha, goeden morgen, vriend Hendrik! Hoe komt het toch, dat gij altijd zoo vroolijk en vergenoegd zijt?"

Hendrik: "Wel, dat is eene zonderlinge vraag. Zijt gij dan niet tevreden? Ik heb alles, wat ik noodig heb, en zou ik dan niet vroolijk en vergenoegd zijn?"

Willem: "Ja, maar gij hebt toch geen lekker eten en drinken?"

Hendrik: "Ei! Zijt gij zulk een vriend van lekker eten en drinken? Ik lust het ook wel. Maar mijn vader zegt, dat het lekkerste eten en drinken dikwijls schadelijk is, en dat men matig moet zijn om gezond te wezen."

Willem: "Ik geloof dat uw vader u maar iets wijs maakt."

Hendrik: "Neen, dat doet mijn vader niet. Hij zegt het tot mijn best. Hij weet ook beter wat nuttig is, dan ik het weet."

Kees, die in de school zijne plaats naast Hendrik heeft, zag er onlangs op eenen morgen zeer droevig uit. Hendrik zag hem gedurig aan en wilde hem telkens naar de reden zijner droefheid vragen; doch hij werd daarin verhinderd.

Toen zij beiden uit de school gingen, sprak Hendrik hem aan en vraagde wat toch de reden was, dat hij er zoo droevig uitzag. Kees wilde zich in het eerst niet verklaren, maar omdat Hendrik toch bleef aanhouden, zoo vertelde hij hem eindelijk alles.

Kees: "Ik heb sedert gisteren middag niets gegeten. Mijne moeder heeft geen geld om eten te koopen. Ik heb zulk eenen honger en mijne moeder ook, en dat maakt mij zoo bedroefd."

Hendrik: "Arme jongen! Zult gij dan dezen middag ook niets te eten krijgen?"

Kees: "Dat geloof ik niet. Mijne moeder zal zeker nog geen geld ontvangen hebben."

Hendrik: "Gebeurt het u wel meer, dat gij niets te eten hebt?"

Kees: "Ja, dikwijls."

Hendrik: "Ik wenschte dat ik iets voor u had. - Wacht - ik heb nog een kwartgulden. - Daar, neem dien: kunt gij daarvoor eten koopen?"

Kees: "Ja! Ik dank u, lieve Hendrik! O, wat zal mijne moeder blijde zijn, die heeft ook zulk een' honger."

Hendrik: "Ik ben blijde, dat ik u helpen kan. - Maar nu hebt gij nog niets voor morgen. Hoor! Ik zal mijnen vader vragen, of hij u iets geven wil. Wacht, ik bedenk daar nog iets! Kom mij elken morgen afhalen, dan zal ik met u mijne boterham deelen."

Kinderen! wij zouden u nog veel van den braven Hendrik kunnen vertellen; maar als hij dit boekje eens in handen kreeg, dan zou hij maar beschaamd worden, als hij zag, dat hij zoo zeer geprezen werd, en dat willen wij niet, - wij willen den goeden Hendrik niet beschaamd maken.

Lieve kinderen! volgt slechts het voorbeeld van Hendrik, en het zal u altijd welgaan.

EEN OUD PROBLEEM UIT DE COMPUTERINDUSTRIE

J.H. van Lint

Een aantal jaren geleden bereikte mij een probleem uit een Nederlandse computerindustrie. Het ging over "decodatiebomen" waarvan ik al niet meer weet wat het zijn. Het probleem is al die tijd blijven liggen en wie weet welke gevolgen dit heeft gehad. De productie van dit feestelijk boekwerk gaf mij de gelegenheid er weer eens naar te kijken. Hierbij wordt aan de lezer een oplossing aangeboden die alle mogelijkheden tot verbetering en verfraaiing biedt.

Als inleiding beschouwen we een simplificatie. Zij C_n de verzameling van alle rijtjes $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uit $\mathbb{Z}^n$ met de eigenschappen

(1) $a_k \geq 0 \quad (1 \leq k \leq n)$,

(2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq 2^k - 1 \quad (1 \leq k \leq n-1)$,

(3) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2^n - 1$.

Het is duidelijk dat geldt

(4) $\forall\, \underline{a} \in C_n\ \forall\, \underline{b} \in C_n\ [(1, \underline{a}+\underline{b}) \in C_{n+1}]$.

We tonen nu een omkering van (4) aan. Laat $(1, \underline{c}) \in C_{n+1}$. Definieer nu $\underline{a}$ en $\underline{b}$ door

(5) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k := [\frac{1}{2}(c_1 + c_2 + \ldots + c_k + 1)]$,

(6) $b_1 + b_2 + \ldots + b_k := [\frac{1}{2}(c_1 + c_2 + \ldots + c_k)]$.

Dat $\underline{a}$ en $\underline{b}$ aan (1) voldoen is nu triviaal. Uit (2) en (3) volgt $c_1 + c_2 + \ldots + c_k \geq 2^{k+1} - 2$ met gelijkheid voor $k = n$. Dus voldoen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ ook aan (2) en (3).

Merk op dat de uitspraak niet waar is als we in (1) hadden geschreven $a_k \geq 1$.

Het reeds genoemde probleem is een lastige variant op het bovenstaande. We definiëren nu C_n als de verzameling rijtjes $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uit $\mathbb{N}^n$ met de eigenschappen

(7) er is een k met $a_k = 1$,

(8) voor $1 \leq k \leq n$ en iedere greep van k verschillende indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ geldt

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} \geq 2^k - 1$$

met gelijkheid als $k = n$.

Ook voor deze klasse C_n geldt eigenschap (4). Weer is de vraag om de omkering te bewijzen. De volgende splitsing illustreert het gestelde.

$$\begin{array}{llll}
 & & (*,*,4,1,2) & \\
 & (*,1,5,3,6) & & \\
 & & (*,*,1,2,4) & \\
(1,5,6,8,11) & & & \\
 & & (*,1,*,2,4) & \\
 & (*,4,1,5,5) & & (*,1,*,2,*) \\
 & & (*,3,*,3,1) & \\
 & & & (*,2,*,1,*)
\end{array}$$

We hebben hier alles teruggebracht tot rijtjes machten van 2.

Beschouw een element $(1,\underline{c})$ uit C_{n+1} met $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ waarbij $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$ en $c_1 = 2$. Willen we evenals in de inleiding een $\underline{a}$ en een $\underline{b}$ uit C_n vinden met $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ dan moet $a_1 = b_1 = 1$. De definitie (5),(6) doet het nu weer. De moeilijkheid dat de a_i en b_i niet monotoon toenemen doet zich alleen voor als ruimschoots aan (8) is voldaan. Het is echter wenselijk het intimidatie-element uit deze redenering te verwijderen.

Dit zelfde principe van eerlijk delen moet de basis zijn van de algoritme als $c_1 \neq 2$. We definiëren nu

$$(9) \begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = c_2 - 1,\ a_3 = [\tfrac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3 + 1)],\ a_4 = [\tfrac{1}{2} c_4], \\ b_1 = c_1 - 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = [\tfrac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3)],\ b_4 = [\tfrac{1}{2}(c_4 + 1)]. \end{cases}$$

Met behulp van de ongelijkheden $c_1 \geq 3$, $c_1 + c_2 \geq 6$ en $c_1 + c_2 + c_3 \geq 14$ volgt eenvoudig dat de beginstukken a_1, a_2, a_3, a_4 en b_1, b_2, b_3, b_4 aan (7) en (8) voldoen. We zetten de algoritme weer voort met de verdeling $[\frac{1}{2}c_i]$, $[\frac{1}{2}(c_i+1)]$ zó dat $a_1+\ldots+a_k$ en $b_1+\ldots+b_k$ steeds gelijk zijn, of 1 verschillen. Hiermee is de gewenste splitsing gerealiseerd. Het bewijs dat deze algoritme goed is kan worden geleverd met volledige inductie. Het principe is weer dat de rijtjes a_i en b_i "bijna" toenemend zijn met uitzonderingen alleen in die gevallen dat aan (8) is voldaan met het > teken.

Zoals in de inleiding reeds is vermeld laat het bovenstaande verder onderzoek en verbetering toe.

THETA INVARIANTS FOR AFFINE ROOT SYSTEMS

E.J.N. Looijenga *

..."I" stands for "eye" and "eye" stands for the Female Organ. Pencil licking is always a reference to you know what. A soccer goal hints at the vulval orifice (which he evidently sees as square).

(V. Sirin describing a mathematician's activity)

There exists an invariant theory for affine root systems which may be considered as an analogue to the familiar theory of exponential invariants for finite root systems. The purpose of this note is to state the main propositions of this theory and to interpret these geometrically. Proofs and more precise results will appear elsewhere. The line bundle $\mathcal{L}$ described below was encountered in the process of understanding the deformation theory of the so-called simple-elliptic singularities (cf. remarks at the end of this article).

Let R be a root system, let l be its rank, W its Weyl group and denote by $Q^\vee$ the lattice of the dual root weights. If E is an elliptic curve over $\mathbb{C}$, then $A \overset{\text{def}}{=} Q^\vee \otimes E$ is an abelian variety isomorphic to E^l and endowed with a canonical W left-action. It is not hard to show that there exists an integral symmetric bilinear form I on $Q^\vee$ which is invariant under W and gives the

---

* Research partially supported by the British Scientific Research Council.

smallest root of $R^\vee$ length 2. From the Apple-Humbert theorem [1] it follows that there exists a holomorphic line bundle over A of 'Chern class' I with a W-action which (i) lifts the given one on A and (ii) is trivial on the fibre over $0 \in A$. For any such $\mathcal{L}$ we have

(i) $\mathcal{L}$ is ample.

(ii) $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Gamma(\mathcal{L}^k)^W$ is a free polynomial algebra on $l+1$ generators.

(iii) $\mathcal{M} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(\mathcal{L}^k)^{-W}$ (the anti-invariant sections) is a free $\mathcal{S}$-module on one generator.

(iv) The divisor Δ of this generator is just the union of reflection hypertori in A.

(v) $\mathcal{S}$ and $\mathcal{M}$ are defined over the modular function field once E is replaced by the family of elliptic curves naturally parametrised by the upper half plane.

(vi) A Weyl formula, due to Macdonald.

As to (vi), we note that a very simple proof of this formula is obtained once both sides are interpreted as theta functions for Δ. The above mentioned properties can be geometrically understood as follows. The range of the quotient mapping

$$\mathrm{Tot}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\pi} W\backslash \mathrm{Tot}(\mathcal{L})/\text{zero-section}$$

admits a natural algebraic structure (making π an algebraic mapping) and is as such isomorphic to $\mathbb{C}^{l+1}$. The critical set $\Sigma(\pi)$ of π equals $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(\Delta)$ + zero-section, and the discriminant $D = \pi(\Sigma(\pi))$ is defined by a quasi-homogeneous polynomial with coefficients in the modular function field over $\mathbb{Q}$ of certain level N.

We conjecture that the complement of D (or equivalently the complement of Δ in A) has a contractible universal covering.

If R is of type E_k, then it can be shown that the pair $(W\backslash\mathrm{Tot}(\mathcal{L})/\text{zero-section}, D)$ is isomorphic to the discriminant of a simple-elliptic singularity of type $\tilde{E}_k$ $(k = 6, 7, 8)$. This generalises results of Brieskorn and Grothendieck [2] on Kleinian singularities.

The proof of property (ii) furnishes us canonical generators for $\mathcal{S}$ if E is replaced by the family of elliptic curves over the upper half plane. With the exponential invariant theory in mind, one may speculate whether these generators parametrise representations of the simple algebraic group corresponding to R, but now defined over a local field.

[1] A. Apple jr., H. Humbert: Erlebnisse der Schulmädchen Anna und Hannah. St-Petersburg 1899.

[2] Alex in Wonderland, annotated by J. Dieudonné, Springer Verlag 1970.

DE BETEEKENIS VAN HET GETAL 33

Balthasar Elias Lub

Zoals algemeen bekend moge worden verondersteld is de Kabalistiek een van de weinige wetenschappen die ernstige schade ondervindt van het beschikbaar komen der electronische rekenautomaat. Deze stelt de gebruiker namelijk in staat om in korte tijd een zodanig aantal hoogst relevante numerologische observaties te verrichten dat een verantwoorde interpretatie wegens tijdgebrek achterwege moet blijven.

Ik zag mij echter recentelijk geconfronteerd met een zodanig remarkabel phenomeen dat ik heb gemeend mijn reguliere werkzaamheden tijdelijk ter zijde te moeten schuiven om mij aan de analyse ervan te kunnen wijden. Informanten uit Amsterdam meldden mij het bestaan van een wiskundige, Hendrik W. Lenstra jr. dewelke via onnavolgbare manipulatie, gecombineerd met grove intimidatie er in slaagt om personen in zijn omgeving ertoe te bewegen hem briefkaarten op te sturen met daarop geen andere mededeling dan het getal 33. De instigator ervaart bij dit alles gevoelens van grove wellust. Het staat buiten kijf dat dit opzienbarende voorval om nadere uitleg vraagt, waarbij voorop staat dat slechts het getal 33 als enige verantwoordelijk kan zijn voor deze ordeverstoring in de kosmos.

Bij onze analyse hanteren wij de klassieke methode. Het antwoord op alle vragen dient te worden gelezen uit de schriftgedeelten geïndiceerd door de onderhaavige getallen. Het blijkt al spoedig dat hierbij het Nieuwe Testament niet gebruikt kan worden aangezien geen der opgenomen kanonieke boeken meer dan dertig hoofdstukken bevat. Ook het Oude Testament levert bij eerste lezing slechts karige informatie. Vers 33 van Hoofdstuk 33 blijkt slechts in vier gevallen op te treden. De bewuste teksten zijn:

NUMERI 33-33 En zij verreisden van Bene-Jaakan, en legerden zich in Hor-Gidgad.

2 KRONIEKEN 33-33 En Jehizkia ontsliep met zijne vaderen, en zij begroeven hem in het hoogste van de graven der zonen Davids, daartoe deden gansch Juda en de inwoners van Jeruzalem hem eere aan in zijnen dood; en zijn zoon Manasse werd Koning in zijne plaats.

Beide teksten illustreren de onstuitbare voortgang der geschiedenis. Van de overige twee teksten dient te worden opgemerkt dat zij de laatste versregel in hun hoofdstuk zijn. Dit is relevant aangezien Hendrik bij de realisering van zijn plannen gebruik maakt van het in Nederland gebruikelijke instituut van de schertsstelling als laatste stelling bij een proefschrift.

JOB 33-33 Zoo niet, hoor naar mij; zwijg, en ik zal u wijsheid leeren.

EZECHIEL 33-33 Maar als dat komt, (zie, het zal komen), dan zullen zij weten dat er een Profeet in 't midden van hen geweest is.

Het is duidelijk. Hendrik verhoogt zich zelve door middel van deze teksten. De voosheid van dát streven laat zich echter gemakkelijk aantonen door de Heilige Schrift nader te analyseren. In vele boeken is de afwezigheid van vers 33 in hoofdstuk 33 te herleiden tot een vroegtijdig begin van hoofdstuk 34 , al dan niet gecombineerd met een verdeling van het boek in twee gedeelten. Houden wij met deze storingen rekening dan blijken er negen nieuwe verzen gevonden te kunnen worden, waarbij opnieuw alle verzen gezocht dienen te worden in het Oude Testament. Ik geef de teksten hieronder weer.

GENESIS 34-13 Toen antwoordden Jakobs zonen aan Sichem en Hemor, zijnen vader, bedriegelijk, en spraken (omdat hij Dina hunne zuster verontreinigd had),

Heeft Hendrik zich dan toch in het geheim aan deze Zonde schuldig gemaakt ? Indien we het vervolg van de zin in het erop volgende vers erbij betrekken zou men dit kunnen gaan aflezen. De zedigheid weerhoudt mij er evenwel van om deze passage in zijn geheel op te nemen.

EXODUS 34-10 Toen zeide hij: Zie, ik maak een verbond: voor uw gansche volk zal ik wonderen doen, die niet geschapen zijn op de aarde, noch onder eenige volkeren, alzoo dat dit gansche volk in wels midden gij zijt, des HEEREN werk zien zal, dat het schrikkelijk is hetwelk ik met u doe.

DEUTERONOMIUM 34-4 En de HEERE zeide tot hem: Dit is het land dat ik Abraham, Isaak en Jakob gezworen heb, zeggende: Uwen zade zal ik het geven: ik heb het u met uwe oogen doen zien, maar gij zult daarhenen niet overgaan.

De klassieke beloften van de HEERE aan Zijn volk. De teksten illustreren de gerechtigheid des HEEREN.

2 SAMUEL 3-1 En daar was een lange krijg tusschen het huis Sauls en tusschen het huis Davids; doch David ging en werd sterker, maar die van het huis Sauls gingen en werden zwakker.

2 KONINGEN 11-33 van den Jordaan af tegen den opgang der zon, het gansche land Gileads, der Gaditen en der Rubenieten en der Marasiten; van Aroër die aan de beek Arnon is, en Gilead, en Basan.

JEREMIA 34-7 als het heir des Konings van Babel streed tegen Jeruzalem en tegen alle de overgebleven steden van Juda, tegen Lachis en tegen Azeka; want deze , zijnde vaste steden, waren overgebleven onder de steden van Juda.

De HEERE brengt oorlog over Zijne vijanden, doch de rechtschapene hoeft niet te vrezen. Immers

2 KRONIEKEN 5-11 En het geschiedde als de Priesters uit het Heilige uitgingen, (want alle de Priesters die gevonden werden hadden zich geheiligd, zonder de verdeelingen te houden,

PSALM 34-11 Kaf. De jonge leeuwen lijden armoede en hongeren, maar die den HEERE zoeken hebben geen gebrek aan enig goed.

De fundamentele vraag is en blijft derhalve : Is Hendrik een rechtschapene òf een zondaar. Beide mogelijkheden lijken in de schrift aanwezig, hetgeen voor de hand ligt aangezien het antwoord op deze vraag niet aan de Mensch is om gegeven te worden. Wij kunnen slechts luisteren naar de Profeet waar hij verkondigt

JESAJA 34-9 en hunne beken zullen in pek verkeerd worden, en hun stof in zwavel, ja, hunne aarde zal tot brandend pek worden.

De tijd heeft mij helaas ontbroken om de weergegeven verzen op hun beurt aan een nadere numerologische analyse te onderwerpen. Laat ik volstaan met de eenvoudige analyse 33 = 11 + 11 + 11 . Drie gekken vragen meer dan een wijs man kan beantwoorden.

MY FRIEND MEIERDIERKS

or: why I teach combinatorial programming

Heiner Müller-Merbach

You may have heard me talk about my poor friend Meierdierks. Every time he introduced himself or was introduced by others, the reaction was the question: "Meier-what?" - "Meierdierks!"

But this was a minor problem compared to the following. All the offices, boards, and agencies that kept his name in their files used a different spelling. His highschool graduation certificate was made out for a Mayerdierggs. He received his B. A. as Mr. Meyrdirks. This spelling was outdone by his M. S. certificate which called him Mr. Maierdyrx. Some years later, he was not surprised to find the name Meirdirgs on his Ph. D. certificate. The revenue office almost hit the correct spelling by sending the tax assessments to Mr. Meyerdircks, which every time made him feel some sympathy for the office - before he opened the envelop. To mention only a few examples. He counted at least 13 official different spellings, only in Germany. It became even worth when he went abroad.

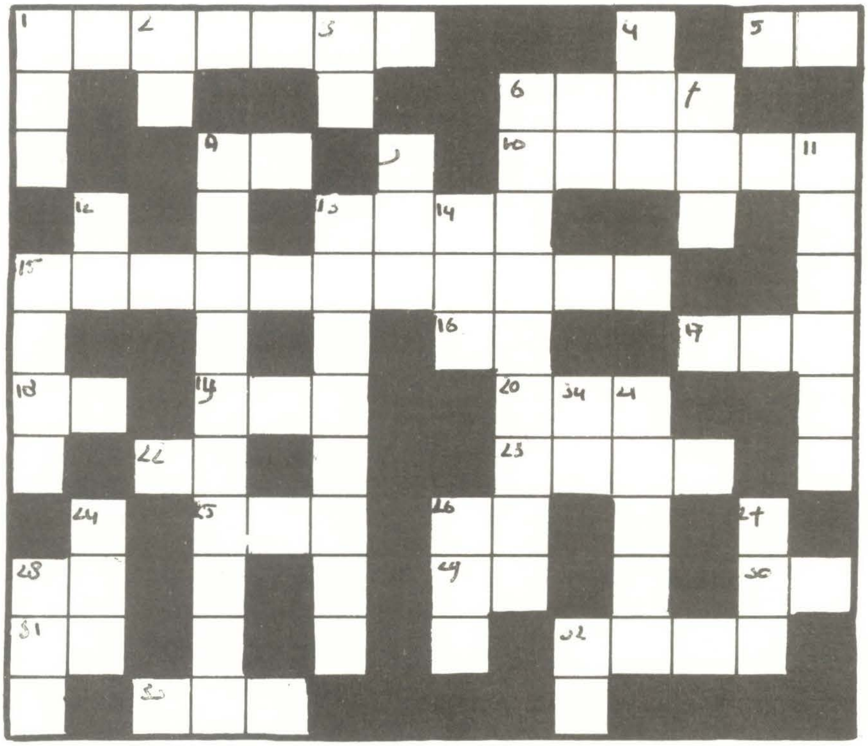
One day he decided to become a citizen of a foreign country. Only after a little while he counted more than 17 different spellings on the files and letters. Being a careful man he decided to have all the possible spellings of his name put into the telephone directory. He knew that the first ten insertions would cost 1 Pernunza each, the second 10 insertions 2 Pernunzas each, the third 10 insertions 4 Pernunzas each, then 8, 16, 32 etc., generally spoken 2^{k-1} for the k-th ten insertions each. Knowing nothing about combinatorics, he gave the order to the telephone office to insert all the possible spellings which could be assembled by the elements used in the before mentioned spellings. This was hazard!

He seemed to be deeply depressed when he wrote his last letter some years ago. He complained that the telephone office sent a bill on 40,950.- Pernunzas which he would be never able to pay.

It might be no problem for you anymore to guess why I am teaching courses on combinatorial programming, in particular for those who do not carry a name with a single unique spelling with themselves around like Lenstra.

EEN KRUISWOORDRAADSEL

Eveline van Nierop



HORIZONTAAL

1. de bibliothecaresse.
5. groet.
6. gedroogd gras.
8. in welk geval.
10. wiskundig mededelingenblad
13. drank.
15. boekerij.
16. Conway getallen.
17. meevaller.
18. hij heeft uitgegeven.
19. lichaamsdeel.
20. kooknat.
22. intelligentiequotient.
23. vaak gezet door 1 - horizontaal.
25. dé universiteit.
26. doel van de promovendus.
28. 6.
29. Egyptische zonnegod.
30. ongaarne.
31. lekkernij.
32. dus.
33. wiskundig genootschap.

VERTIKAAL

1. de eerste vrouw.
2. lengtemaat.
3. gefingeerde naam in Corpus Juris.
4. noodsein.
6. bekend wiskundige.
7. afdeling toegepaste wiskunde.
8. voordracht.
9. voorzetsel.
11. veel genuttigde drank.
12. wiskundige afdeling.
13. seminarium.
14. wie, oh wie?
15. geschrift.
21. een goede vrind.
24. dier.
26. academische titel.
27. Toegepast Natuurwetenschappelijk Onderzoek.
28. priemgetal.
32. en anderen.
34. zwets.

OVER ENKELE OPEN PROBLEMEN I *

S. Noot, Th. Kraak'

"_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_+"+_"

Samenvatting: in het artikel worden uitsluitend open problemen besproken en bekeken.

Hw L jr. P v E b: onderwerponderbrenging: eerst 407 en daarna ook ...

Sleutelwoorden: verdeelsleutel, sleutelbeen, sleutelgat, sleutelroman, sleutelbegrip,sleutelaar, sleutelkast, sleutelhanger, basissleutel, sleutelfiguur, sleutelbos, sleutelbasis, sleutel, bibliotheeksleutel, sleutelgeld, sleutelbedrijf, sleutelindustrie, gesleutel, sleutelmacht, sleutelpositie, sleutelring, sleutelwerk, sleutelbibliotheek (wordt aan de sleutellezer overgelaten ....).

' Deze auteur werd gedeeltelijk ondersteund.

* *Dit artikel bereikte ons door bemiddeling van André Deutz.*

Inhoudsopgave:

"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"%_%"

1. Inleiding.

Het doel van dit artikel is de in de vergetelheid geraakte zeer interessante open problemen onder de aandacht van het hedendaagse wiskundige publiek te brengen. Daartoe hebben wij (d.w.z. Simone Noot en Theodoor Kraak, schrijfster en schrijver van dit artikel) een uitgebreide literatuurstudie ondernomen, getuige het volgende:

2. De problemen.

Voor ons gevoel verdienen de volgende open vragen (na veel wikken en wegen) de algemene aandacht:

a. Geef een karakterisering voor de orden van eindige niet abelse groepen cf – 2 –.

b. Voor niet negatieve getallen n,m is A (n,m) recursief gedefinieerd door A (o,m) = m+1, A (n+1,o) = A (n,1) A (n+1, m+1) = A (n, A (n+1, m)). Men noemt A de Ackermannfunktie. Beschouwt men een tabel (zie -4-) van de waarden van de Ackermannfunktie, dan valt op dat voor alle voldoend grote n het getal A (n,n) in het tientallig stelsel eindigt op ...48733. Generaliseer deze observatie door te bewijzen dat er voor elk positief geheel getal k een getal n(k) bestaat zo dat A (n,n) ≡ A (n',n') mod k voor alle n,n' ≥ n(k). (cf -4-)

c. Van een gelijkzijdige n-hoek $A_1 A_2 \ldots A_n$ in het platte vlak, met n - 3, is gegeven dat elk van de n - 2 hoeken $\angle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ $(1 < j < n)$ een rationaal deel van π is.

Bewijs dat ook de hoeken $\measuredangle A_{n-1}A_nA_1$ en $\measuredangle A_nA_1A_2$ rationale delen van π zijn.
(cf -3-) Opmerking $\pi = \frac{22}{7}$.

d. Drie meisjes, ieder begeleid door haar vader, zijn aan het wandelen. Aangekomen bij een rivier willen zij oversteken; het lijkt alsof dit zonder moeilijkheden zal gebeuren daar een boot aanwezig is die maximaal 2 personen kan vervoeren, maar de meisjes zijn erg nukkig: elk meisje wil alleen met een andere vader mee, als haar eigen vader erbij is - en ook aan de oevers duldt elk meisje alleen de aanwezigheid van een andere vader, indien haar eigen vader erbij is. Hoe komen alle zes aan de overkant ? (cf -1- , -5-)

3. Napraat.

Probleem d. is het oudste (reeds enige eeuwen). Ten aanzien van d. kunnen wij nog vermelden dat het probleem ook in een algemene vorm in de literatuur voorkomt.
De problemen a., b., en c. schijnen afkomstig te zijn van één auteur. Vermoedelijk is probleem a. ontstaan in verband met de theorie van grote groepen (voorloper van de hedendaagse sociologie). Ook schijnt het zo te zijn dat men beschikte over partiele resultaten t.a.v. a. en misschien zelfs over de hele oplossing.
Over de onopgeloste vragen b. en c. kunnen wij hetzelfde zeggen: Waarschijnlijk wisten de wiskundigen van de vorige eeuw de oplossingen; in ieder geval hebben zij fraaie deelresultaten verkregen. Zie ook : -3- en -4-.

4. Opmerkingen.

Onze literatuurstudie loopt tot 1910. De open vragen die na 1910 ontstaan zijn, zijn hier buiten beschouwing gelaten daar deze genoegzaam bekend zijn.
Jammer genoeg zijn de namen (c.q. de naam) van de wiskundige (n) die bovenstaande problemen geponeerd hebben niet meer te achterhalen.

De vragen a., b. en c. zijn voor het eerst in de literatuur beschreven in 1871, resp. 1875,1876.

Oplossingen, gedeeltelijke oplossingen en waardevolle opmerkingen worden graag tegemoet gezien. U kunt deze sturen aan:

Noot & Kraak Er,
p.a. Open Bureau
Universiteit van Franeker Fr.

"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"/x/"

Referenties:

-1- J. Pleine Bak
Over Eigenschappen van Families.
Ann. de Math. 20 1855 Paris.

-2- P. Eater
Grouptheory.
Journal of the American Society. 17 1871 Ithaca.

-3- V. Toorus
The openness problem in topology and geometry.
Journal de la Math. Contemp. 12 1876 Paris.

-4- C. F. Lindenbaum
Numerical methods and arithmetic.
The abacuous mathematician. 21 1875 Stanford.

-5- Séminaire de Vendredi sur les Jeux Mathématiques.
Dirigée par P. et H. Bonacci. No. 1 1811 Nice.

A PROJECTIVE PLAIN OF ORDER TEN

A.M. Odlyzko and N.J.A. Sloane

This note settles in the affirmative the notorious question of the existence of a projective plain of order ten.

It is well-known that if a finite field F is given containing n elements, then a projective plain of order n can be immediatly constructed ([1],[2]). For example, the points of the plane are represented by the nonzero triples (α,β,γ) of elements of F, with the convention that (α,β,γ) and $(r\alpha,r\beta,r\gamma)$ represent the same point, for all nonzero $r \in F$. Furthermore this plain even has the desirable property that Desargues' theorem holds there.

What makes this note possible is our recent discovery of a field containing exactly ten elements: we call it the <u>digital field</u>. We first show that this field exists, and then give a childishly simple construction which the reader can easily verify.

<u>The Existence Proof</u>

Since every real number can be written in the decimal system we conclude that

$$\mathbb{R} = GF(10^{\omega}).$$

Now $\omega = 1 \cdot \omega$, so 1 divides ω. Therefore by a standard theorem from field theory (e.g. [3]) $\mathbb{R}$ contains a subfield GF(10). This completes the proof.

The Construction

The elements of this digital field are shown in Fig. 1. They are labelled $\text{Left}_1, \text{Left}_2, \ldots, \text{Left}_5, \text{Right}_1, \ldots, \text{Right}_5$ in the natural ordering (reading from left to right). Addition is performed by counting, again in the natural way. An example is shown in Fig. 2, and for further details the reader can consult any kindergarten student. In all digital systems the rules for multiplication can be written down immediatly once addition has been defined; for example $2 \times n = n + n$. The reader will easily verify the rest of the details.

Since this field plainly contains ten elements (see Fig. 1) we conclude that there _is_ a projective plain of order ten.

REFERENCES

1. M. Hall, Jr., Combinatorial Theory, Blaisdell, Waltham, Mass., 1967.
2. D. R. Hughes and F. C. Piper, Projective Planes, Springer-Verlag, N.Y., 1970.
3. B. L. van der Waerden, Modern Algebra, Ungar, N.Y., 1953, 2nd edition, Volume 1, p. 117.

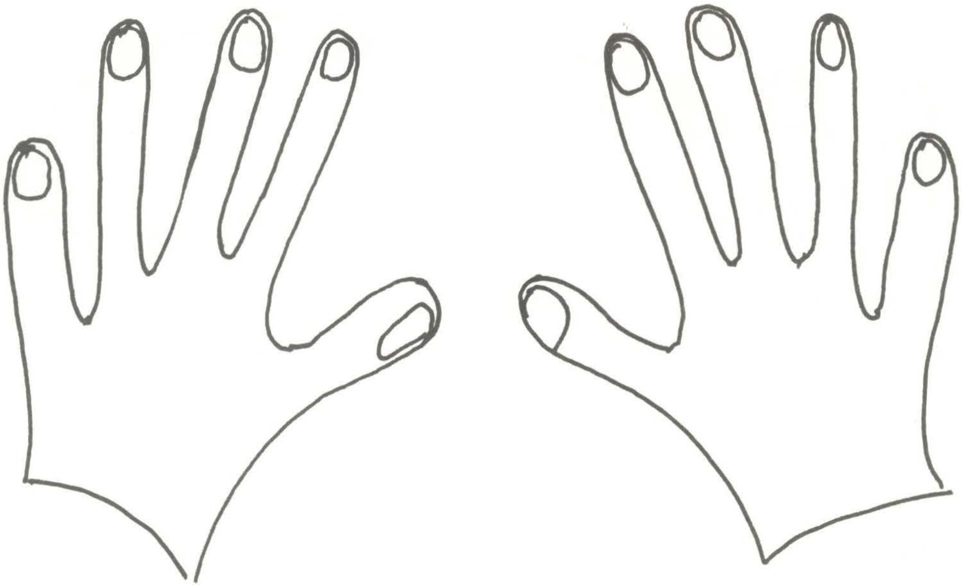


Figure 1
Elements of the digital field

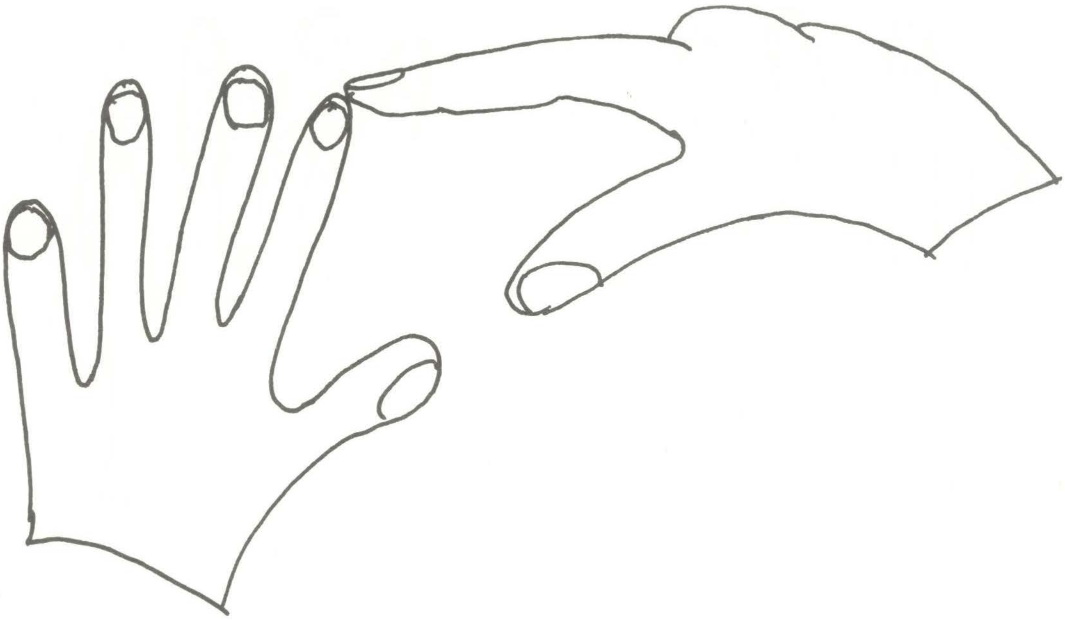


Figure 2 : Addition

IN MEMORIAM ABEL GRUNIOR

W.T. Oman

Toen de TV vanochtend over 18 kanalen muziek van Bach liet horen meende ik eerst dat onze goede sjeik - Allah zegene zijn naam en verheffe zijn gedachten boven die des volks - er wel weer een prinsje bijgekregen zou hebben.

Maar 't pakte anders uit. Professor Abel Grunior bleek te zijn overleden, op de leeftijd van 113 jaar. Er heerste rouw op de straten en in de kabelbanen. Een vrouw borg snikkend haar kind in het net en sprak: "had Allah hem nog één interval gegund....", want het besef der priemgetallen leeft sterk onder ons volk en de meeste wiskundigen worden niet veel ouder dan 100 .

Abel Joachim Grunior, tweemaal erelid van ons Wiskundig Genootschap, werd geboren in een familie van turfstekers. Hoewel de plaatselijke onderwijzer zijn best voor hem deed, kwam zijn talent daar niet voldoende tot ontwikkeling. Een tante uit Vlagtwedde sprong bij met een reisbeurs, en zo zien we Grunior in zijn jongelingsjaren rondzwerven van oord naar oord, zijn bevindingen over algebra koesterend in gammele volkswagens, om ze 's nachts aan het papier toe te vertrouwen in franse hotelkamers met alleen maar zelfbediening.

Menig duel vocht hij uit in de ochtendstond, na evenzoveel doorwaakte nachten. Maar tenslotte triomfeerde hij en werd hem een gedenkboek aangeboden nog voor z'n 30e jaar. Wat was het fijn om dat door te bladeren, na al die jaren van ellende.

Gedurende de bijna 85 jaar die hem restten, deed Grunior nog veel interessants, en hij deed het nederig en bekwaam, met een welwillend oor voor zijn medemens en een knoop in zijn zakdoek voor de financien, zodat hij nog een eind vooruitkwam in de wereld. Tot op hoge leeftijd behield hij een vriendelijke trek om zijn mond en bleef hij zijn beste krachten wijden aan ons Genootschap.

O zeker, ik weet het, Grunior was niet volmaakt. Wie van ons is dat wel? Er gaan geruchten dat hij op z'n 100e jaar, bij de uitreiking van de Brouwer Memorial Penning, minder vast op zijn benen heeft gestaan dan gewoonlijk. Maar al die vertelsels hebben één ding gemeen met de Brouwermedaille: ze zijn vals. Gruniors geest bleef helder tot het einde en dat hele podium stond trouwens vol met Oisterwijkse meubelen.

Wij wiskundigen houden niet van legendevorming of aanbidding. Dood is bij ons: vergeten. Newton wordt Raphson, Euler wordt Venn. Wij zijn realisten en geen muzikanten, in welke kringen ze elkaar al 250 jaar om de oren slaan of Mozart nu wel of niet vergiftigd is door zijn aanbidder Salieri. Dergelijke kwesties komen in de wiskunde niet voor. Onze menselijke gevoelens zijn simpel en strikt voorwaarts. Daarom zijn wij een club van glimlachende onderwijzers, zonder historische achtergrond en met een dode avant-garde.

Laten we hierbij een uitzondering maken voor Abel Joachim Grunior. Ons volk heeft hem liefgekregen en dat zegt wat. De knoop in zijn zakdoek heeft hij weten uit te breiden tot een landelijk opgespannen beddelaken, vol met klinkende goudstukken.

Het moge immers bekend zijn dat hij zich na z'n 30e jaar afwendde van de algebra en de getaltheorie, om zich te gaan wijden aan de geodesie der secundaire aardlagen. Er wordt gefluisterd, dat hij nog wel menige ontdekking in de zuivere wiskunde deed, maar dat hij die voor zichzelf behield. Hij gaf er de voorkeur aan, dat de jeugd dergelijke abstracte schoonheid zelfstandig ontdekte en er carrière mee maakte, terwijl hij persoonlijk als volwassen denker aan het welzijn der wereld meewerkte.

Het ontzaggelijke, onuitputtelijke, ellipsoidale oliereservoir onder de golf van Koeweit, omstreeks de eeuwwisseling aangeboord in de tweede aardlaag, had Grunior met zijn tensormethode tien jaar tevoren voorspeld. Zijn begrotingen lagen in keurig tweevoud bij de emir op tafel, toen het befaamde schrikjaar 2000 aanbrak.

Ons volk is daar wel bij gevaren en rouwt nu om zijn heengaan. Op straat zie ik, dat alle kabelbanen een minuut stilte in acht nemen. - - - - - - - - - - - - - - - -

- - De minuut is om . Cabines ratelen weer langs mijn veranda. Eigenlijk zou ik nu mevrouw Grunior moeten opbellen om haar namens het Genootschap te condoleren.

Maar ze werkt buitenshuis en tegen een antwoordapparaat of een kraai weet ik niet wat ik zou moeten zeggen. Ik zal dus maar wachten tot het borreluur. In die tussentijd wil ik enkele herinneringen noteren, welke in mijn gemoed omhoog wellen.

Piëteitvolle gedachten,welke tot een beter verstaan van Abel Grunior kunnen leiden, zoals hij zich ontwikkeld heeft in de nadagen van zijn denkerschap.

Tijdens het Nijmeegse congres van 2048 heeft hij inderdaad eventjes op het podium staan wankelen, toen daar aanleiding voor was. De monitors gaven op dat moment "storing" te zien, maar recensent Ben Corstiaan heeft er niettemin een lukraak kolommetje aan gewijd, met een weerzinwekkende insinuatie aan het slot.
Als Bestuur van het WG hebben we ons niet verwaardigd tot een ingezonden stuk.
Er bestaat een wijsheid welke zich aan smaad onttrekt. Moge die ons allemaal bezielen, wanneer de boulevardpers het overlijden van Grunior zou aangrijpen voor verdere lasterpraat."Op de grond stond een lege whiskyfles" - wat moet je daar nu tegenin schrijven?

Ik kan u de verzekering geven dat Abel Grunior, tijdens de drie dagen dat het congres duurde,geen moment zonder toezicht is geweest. Zijn schoudertas bevatte slechts een rol pepermunt, een referaat over de Nijenhuistensor en de Brouwer Memorial Penning.

Zo er al sprake was van een fles, heb ik die persoonlijk uit de tas verwijderd en onder de bestuurstafel gezet. Het betrof een 3/4 liter Johnny Walker Black Label met ongeschonden capsule. "Een gebaar jegens Alfons", noemde Grunior het,en de politie heeft deze verklaring nooit in twijfel getrokken.

Wie Alfons was, dat hoef ik aan geen enkele getaltheoreticus te vertellen. Hij was de allergrootste op zijn gebied, dr.Alfons Bokkemans, de trouwe vriend en jaargenoot van Grunior, helaas te vroeg vooruitgesneld naar de eeuwige galoisvelden.

O zeker, ik weet het, ook Bokkemans was niet volmaakt. Over zijn studententijd deden rare verhalen de ronde.Op het carnaval beneden de grote rivieren heeft men hem reeds na een jaar taboe verklaard. Maar in Amsterdam bekeerde hij zich en bracht de discrete wiskunde onder ons op een nivo,waar ze in Eindhoven nooit van gedroomd hadden. Zijn vriendschap met Grunior, die hij aanvankelijk uitte in bedeesde bewondering, heeft zich in de loop der decennia verdiept tot een wiskundige en geestelijke verbondenheid, zoals men hoogstens nog in oude biografieën tegenkomt.

Men zou de boosdoeners dan ook willen stenigen die het gerucht in omloop hebben gebracht dat Bokkemans op zijn 80e jaar, als logeergast van het echtpaar Grunior, een blik geworpen zou hebben in de werkkamer van zijn gastheer, om vervolgens een serie oplossingen in te sturen aan ons Genootschap. Het verhaal is zo dom, en zo aanwijsbaar gelogen! Grunior bemoeide zich nooit met wiskunde tijdens zijn vakanties. Zijn zomerhuis in de Périgord bevatte niet eens een werkkamer. Alle vertrekken waren gevuld met stapelbedden. Tijdens de wittebroodsweken met zijn jeugdige en beminnelijke echtgenote, de tegenwoordige mevrouw Grunior, had onze grote geleerde heus wel andere problemen aan zijn hoofd als Nieuwe Opgaven.

Het feit dat de vrienden elkaar na die zomer gedurende 20 jaar niet hebben ontmoet, moge dan ook aan toevallige omstandigheden worden geweten. Er is nooit sprake geweest van een familie-vete. De kleintjes Grunior logeerden maar wat graag bij die gekke oom Alfons en lieve tante Wendela in Vegchelen.

Terecht rekent Allah kwaadsprekerij en verdachtmaking tot de ergste zonden. Laten we daarom een voorbeeld nemen aan de president van het Arnhemse Gerechtshof, die de deuren liet sluiten toen bovenstaande kwestie door een getuige werd aangeroerd. Wat ik in dit korte bestek niet heb kunnen rechtzetten, hebben mijn wiskundige lezers trouwens zelf allang ingevuld. Maar hoe staat het met hun vrouwen? De gewoonte in dit land om ook die te leren lezen en schrijven, noopt me helaas nog tot een korte nabeschouwing. Want hoezeer de roddel ook versluierd moge wezen, de verspreidingssnelheid is nog altijd twee bits per gesprek. - - - - -

- -Het begon in onze vergadering van oktober 2047, waar voorzitter Fruchtentaart opmerkte: "Heren dit is een priemgetaljaar en dan moeten er knopen worden doorgehakt. De sjeik heeft bepaald, dat de Brouwerpenning dit keer in ons land moet blijven. Dus gaat hij naar Bokkemans of naar Grunior. Maar wie van de twee?"

"Bokkemans! ", sprak penningmeester Boertien. "Hij is een juweel van een binnensmondse spreker en dat past bij een congres. Grunior wil altijd de aandacht op zichzelf vestigen".

"Voor een keer vind ik dat niet erg", opponeerde assessor Harlevinck, "het wordt uitgezonden over de TV en daar moet je een kleurrijke persoon voor hebben. Ik breng mijn stem dan ook uit op Grunior. Als hij zijn familie thuislaat, kan het best een stijlvolle aangelegenheid worden".

"Ik stem Bokkemans" , zei Fruchtentaart, "we moeten het zekere voor het onzekere nemen. Heeft hij zijn studie over de stelling van Vermoeth al voltooid?"

"Hij is aan de vierde omwerking bezig", klonk nu de afgemeten stem van onze vicevoorzitter, de heer Knoppler . "Ik ben drie keer naar Vegchelen gekabeld om alles met hem door te rekenen, maar het is een algebraische warboel zonder kop of staart. Ik vind het jammer om te zeggen, maar Bokkemans is fini. Ik stem dus Grunior".

Er viel een pijnlijke stilte. De stemmen staakten, net als vorige keer. Blijkbaar rustte er toch geen zegen op het jaartal. De voorzitter keek mij vragend aan, maar in dit geval had ik geen volmacht. "Twee parels sieren de sandalen van onze sjeik", sprak ik hoffelijk, "het betaamt mij niet daartussen een keuze te maken. Grunior is de eer ten volle waardig, maar ook Bokkemans heeft genade gevonden in zijn ogen. Zijne majesteits eunuchen zitten al jaren op die grote Vermoeth te puzzelen en zouden zich zeer aangemoedigd voelen, als Bokkemans bekroond werd."

Het noemen van harembewakers heeft altijd een neutraliserende invloed. Onze juffrouw Ietje maakte dan ook van de gelegenheid gebruik, om de koffiekopjes vol te schenken. Toen ze leeg waren vroeg Fruchtentaart: "Hoe staat het met de gezondheid van de beide heren?"

Als secretaris van het WG ben ik van die dingen goed op de hoogte. "Naar omstandigheden redelijk wel", antwoordde ik, "Bokkemans bestuurt een electrische rolstoel, maar Grunior is nog wel ter been. Vorige week zag ik hem bij de opticien vandaan komen aan de hand van zijn dochtertje, en hij bewoog nog zo kwiek als een sprinkhaan".

"Een twee drie opgelet", sprak nu Boertien, terwijl hij een bronskleurige munt omhoog hield, "als Brouwer bovenkomt nemen we Bokkemans, maar de Onvermoeide Arbeid wijst op Grunior. Zal ik gooien?"

"Dat verbiedt de Koran", zei Fruchtentaart, "dan liever een confrontatie op de man af. Juffrouw Ietje, doe me een lol, en haal ze beiden uit het archief".

"Ze zijn uitgeleend", antwoordde de aangesprokene, " meneer Grunior Junior heeft ze meegenomen voor een studentenjool". "Pakt u dan de verzamelband", zei Fruchtentaart, "daar staan ze ook op". Het meisje gehoorzaamde, ontrolde een 3D-paneel in de hoek en schakelde het video-deck in. Een nette heer verscheen in ons midden, sprak enkele volzinnen over maattheorie en verliet de kamer onder ingeblikt applaus.

"Dat is Bokkemans niet, dat was Zaanen", constateerde de voorzitter, "u moet helemaal terugspoelen juffrouw Ietje, en doet u dat wel voorzichtig, anders raakt er weer eentje in de kreukels". Aldus geschiedde en nu mochten we de afscheidscolleges van Aarts, Baayen en v.d. Blij bijwonen, alvorens de echte Bokkemans zich in het laserbeeld presenteerde. Hij schraapte zijn keel en begon vanuit het jaar 2020 aan de volgende verhandeling:

"Dames en heren, naast het grote probleem dat nog steeds niet is opgelost kennen we ook het kleine probleem van Vermoeth, dat minder hoge eisen stelt. Bestaat er een natuurlijk getal, dat voor ieder priemgetal p van de vorm 2^k+1 de multiplicatieve restengroep modulo p voortbrengt?"

"Doe uit! doe uit!" kreunde Harlevinck, "jullie hebben het gewonnen. Ik wijzig mijn stem in Bokkemans. Kan ik nu naar huis gaan?"

Ietje drukte op een knop, de zeurende stem begaf het en het beeld van de winnaar loste zich op in paarse slierten. "Allah zij dank", riep Fruchtentaart, "dit bespaart ons de Bruijn, Duparc, Dijkman, van Est en Freudenthal, om van Grunior zelf maar te zwijgen".

"Wat doen we met hem?" vroeg Knoppler. "Hij mag het congres openen", besliste Fruchtentaart, "en als de slotzitting begint mag hij de penning uitreiken. De sjeik zal dit apprecieren, want zijn vrouwen kijken graag naar Grunior en nu komt deze weldoener twee keer op de televisie".

"Dat is waar ook", viel Boertien in, "de Fropnos heeft gevraagd of de penning zichtbaar gedragen kan worden tijdens de redevoering".

"Mij best", zei Fruchtentaart, "laat er dan wel een veiligheidsspeld aan solderen. En schrijf aan zuster Wendela, dat ze Bokkemans een crêmekleurig pak aantrekt. Iemand iets voor de rondvraag?"

"Ja", opperde ik, "maak er een kaftanspeld van".

Het amendement werd aangenomen. - -

- - Het 84e Ned. Math. Congres brak aan onder een vrolijk paaszonnetje. Fruchtentaart en Knoppler liepen nerveus heen en weer op het gras voor het Colosseum te Nijmegen. Zou Grunior op tijd komen voor de openingsrede? Het was al 9.50 uur. Toen werd er een stip zichtbaar aan de hemel en weldra landde een grote familiekopter tussen de wachtenden.

De bekwame piloot Grunior Junior leverde zijn vader af in handen van het bestuur en slenterde met enige kornuiten, welke ook uit het toestel klommen, naar de kantine.

"Dag meneer Grunior, wat leuk dat u gekomen bent", sprak Fruchtentaart tot de oude. "De zaal zit op u te wachten en de burgemeester ook. Loopt u maar vlak achter mij aan. Het wordt een directe TV-uitzending, ik hoop dat we geen last hebben van de lampen. Na een korte welkomstrede zal ik u aanstonds het woord geven. Deze kant uit, meneer Grunior, anders komen we in de bosjes terecht".

"Daar wilde ik heen", zei Grunior en hij voegde de daad bij het woord. Terwijl Fruchtentaart zich vooruitspoedde naar de zaal, spraken Knoppler en ik onze verbazing uit over zoveel tijdbesparende efficiency. Wij wisten dit uit legendes, maar zagen het nu ter plaatse gebeuren. Om krek twee minuten over tien was Fruchtentaart uitgebabbeld tegen de burgemeester en besteeg Grunior met donderend applaus de katheder. Zo moet je een tijdschema aanpakken, of anders thuisblijven.

Ik ga u de Nijenhuistensor besparen. Hoezeer de begaafde spreker ook vuur uit bakstenen wist te slaan (temeer uit edelstenen), mijn plicht riep me terug naar de helikopter, om die te inspecteren op drugs en alcohol. Twee zusjes van Junior, die de salon aan het stofzuigen waren, overtuigden me spoedig van hun onschuld en nadat ik nog de slaapzak van de oude baas had uitgeschud, begaf ik me naar de telefoonkamer van het hoofdgebouw.

De kunst was namelijk om Bokkemans in Vegchelen te houden tot het allerlaatste moment op de derde dag. Weerzien tussen de vrienden op een eerder tijdstip zou wellicht een vreugde losrakelen die het wiskundig denken in de weg stond, en dat wilden we niet hebben op het congres. Zuster Wendela zou haar best doen zei ze, maar met meneer Bokkemans kon je niks garanderen. Als hij bij z'n ochtendritje een kabelstation binnenreed had ze het nakijken, aldus Wendela, maar we kregen dan wel een spoedtelefoontje.

Gelukkig deed Bokkemans geen domme dingen. Hij belde de laatste dag tijdens het lunchuur persoonlijk op, of we een helikopter wilden sturen om hem af te halen. Dan kon hij onderweg zijn formules nog even controleren, zei hij.

Ik begaf me naar Grunior Junior, die in de kantine zat te klaverjassen met de Fropnos, tikte hem op de schouder en deed mijn vriendelijk verzoek.

"Handen thuis Ali Baba", sprak de jongen, "vraag het maar aan Trussy. Die heeft gisteren haar brevet gehaald en houdt wel van een geintje". Aldus sprekende wierp hij achteloos de contactsleuteltjes over zijn schouder en legde met de andere hand roem op tafel. Sprekend zijn vader, overwoog ik. Of juist niet?

De meisjes juichten toen ik ze de sleuteltjes bracht en verdwenen na een schonkige start in Brabantse richting. Nu was de tijd gekomen om Grunior uit een sectie-bespreking te halen en hem het protocol bij te brengen voor de slotzitting.

Grunior was nooit een gehoorzame leerling geweest, maar dit keer deed hij opvallend zijn best. "Brouwer op de penning, Alfons op de penning, ja gezellig", sprak hij peinzend, toen het hem gelukt was om de dekenspeld in het bombazijn te bevestigen dat we daartoe van een pater geleend hadden. Oefening baart kunst, een uur later beheerste hij de handeling in den blinde.

Intussen keek Fruchtentaart bezorgd uit het raam naar het gazon, waar steeds meer helikopters met getaltheoretici begonnen te arriveren, tot er geen landingsplaats meer vrij was."Hier is mijn veldkijker", sprak hij tot Knoppler, "ga naar het dak en geef een seintje als Bokkemans in aantocht is".

Ik vergezelde Knoppler naar de veertiende, vanwaar een laddertje naar het dak van het Colosseum voerde. De lucht gonsde van een menigte toestellen, die elkaar behendig ontweken. Maar hoe we de einder ook afspeurden, de rode Grunior-machine liet verstek gaan. "Dat wordt een late vergadering", zei Knoppler bits, "heb je die jongen gezegd dat hij om drie uur terug moest zijn?" "Ja", loog ik - en viel voor straf bijna van de dakrand, want plotseling mengde zich een krakende stem in onze dialoog, tussen twee schoorstenen vandaan :

"Dag meneer Knoppler, fijn dat ik u tref. Kan ik mijn laatste formule nog even met u doorrekenen eer de vergadering begint? Dan voel ik mij zekerder".

"Professor Bokkemans! Hoe lang staat u hier al?"

"Geen idee. Ik heb naar de hoofdingang gezocht doch vond alleen maar fietsenkelders".

Met alle waardering voor Trussy en haar zusje, die zich echte Gruniors hadden betoond, bleek het een rotwerk om de oude man naar beneden te krijgen. Hij had twee zilveren stokken, waarmee hij bevreemd om zich heen zwaaide. In de lift moest Knoppler eerst het manuscript uit Bokkemans' binnenzak halen en de formule namens het Bestuur goedkeuren. Pas toen mocht ik de lift starten . "Wacht het Bestuur mij op?" vroeg Bokkemans. "Ja", zei ik, "samen met professor Grunior".

"Die naam heb ik nog nooit gehoord. Wie is dat?"

"De vader van de meisjes die u hebben afgehaald", zei ik.

"Die hebben geen vader. Het zijn weeskinderen" , verklaarde Bokkemans en nu stopte de lift en traden er twee paters in zwarte habijten naar binnen, die elk aan een kant van hem gingen staan. Verdere conversatie is in zo'n geval moeilijk, en ware hier ook weinig zinvol geweest.

In de grote hall heerste een drukte van jewelste. Men begaf zich vanuit de sectie-vergaderingen via de theelounges naar de grote gehoorzaal. "Nou, ik loop vooruit naar Fruchtentaart om hem te zeggen dat hij kan openen", zei Knoppler en spoedde zich derwaarts, mij met Bokkemans bij de deur van de lift achterlatend.

"Die oude heer ziet er niet goed uit", sprak een van de paters mij aan, "kunnen wij soms assisteren?" "Ik hoop het" , zei ik, "dit is professor Bokkemans. Hij gaat een wiskundige rede houden en is erg zenuwachtig. Weet u misschien een achteringang van het podium te vinden?"

"Dat zal wel gaan" , antwoordde de geestelijke. "Ik ben Anselmus, de prior van het Colosseum, en dit is dokter de Groot. Wij zijn opgebeld door zuster Wendela uit Vegchelen en weten van alles bescheid. Uw bestuur zou zich moeten schamen."

Zo'n opmerking kun je voor gezegd houden. Ik kreeg een kleur en wilde iets stamelen maar Bokkemans was me voor, hief zijn stokken in de lucht en riep opgewekt: "Anselmus ouwe reus, hoe gaat het! Dat moet wel tachtig jaar geleden zijn! Samen in Oeteldonk weet je nog? Loop asjeblieft met me mee naar die zaal want ik weet hier heg noch steg en ben daarnet bijna van je dak gedonderd".

Ik herademde. Zou Allah, wiens wegen wonderlijk zijn, ons congres toch nog de kans willen geven op een waardige afsluiting? - "Meneer Bokkemans", vroeg ik, "vindt u het goed dat meneer Grunior straks de Brouwerpenning op uw costuum bevestigt?" "Ach waarom niet, die man is eenzamer dan ik", luidde het welwillende antwoord.

In de grote zaal was alles gereed voor de plechtigheid. Het puikje der nederlandse wiskundigen en informatici zat achter de rug van pauselijke nuntii, agenten van het emiraat, ons geliefd oranjehuis en talrijke buitenlanders, beschaafd te converseren over wiskunde en wat daarop lijkt. Televisie-heftrucks reden af en aan, loudspeakers werden op sterkte beproefd en bordewissers getest, totdat Fruchtentaart driemaal met de hamer op tafel sloeg en om stilte verzocht.

"Ik open deze vergadering van het Wiskundig Genootschap en stel als eerste agendapunt aan de orde de bekroning van onze landgenoot Alfons Adolf Bokkemans met de Brouwer Memorial Penning, naar de wens van Zijne Doorluchtigheid onze sjeik. Professor Bokkemans bevindt zich bescheidenheidshalve in de gang achter het podium, waar hij de laatste voorbereidingen treft voor zijn grote oratie. Ik zal u niet lastig vallen met een lange inleiding over zijn verdiensten op het gebied der getaltheorie, want ik ben zelf maar een eenvoudige topoloog. Mag ik onze secretaris verzoeken, de heer Bokkemans binnen te geleiden?"

Ik opende de deur, Bokkemans maakte zich los van de broeders en betrad de zaal, steunend op zijn mooie zilveren wandelstokken. Enkele seconden bleef het doodstil, toen viel het schijnwerperlicht op zijn roomwitte pak en barstten de ovaties los voor deze wonderlijke geleerde, die de meesten alleen van horen zeggen kenden. De loudspeakers gaven Lohengrin of een vergelijkbare mars ten beste, dat weet ik niet meer, want mijn taak was het om hem precies op de goede plaats te posteren voor de camera's. En toen was het moment gekomen dat Grunior met de onverbiddelijke speld naar voren trad.........-"Ik bekroon u voor uw wiskundige verdiensten met de hoogste onderscheiding welke ons Genootschap kent". - De speld zat op zijn plaats en Grunior trad terug onder aanzwellend handgeklap uit de zaal en ordinair gefluit vanaf de juniorenrangen.

"Vrienden", sprak Bokkemans, nadat hij zich tussen toonbank en bord begeven had, "ik dank u allemaal voor de betoonde eer. In 1975 heeft Karel Vermoeth de vraag gesteld, of de existentie van GF(2^n+1) die van GF(n+1) impliceert. Daarop ga ik thans het antwoord geven. Helaas schijnt prins Bokkedorus nog vele verplichtingen op de markt te hebben, dus laten we zijn uitblijven inkorten met het zingen van lied nummer 5 : Mien waar is mijn ondergoed, hebt ge't in de was? Neen ik dacht mijn lieve schat, dat gij reeds den deur uit was. Alaaf. Janus, zet de muziek gerust maar wat harder en nu allemaal meezingen hoor......."

Het is geen pretje als zoiets voor een zaal met mensen plaatsgrijpt. Het is een nachtmerrie,waarbij ieder zich wegschaamt van ellende behalve de spreker, die niets in de gaten heeft. Fruchtentaart kreeg een vuurroje kleur, temeer toen hij na rijpe overweging besefte dat het hier om een carnavalstekst ging, welk feest al jaren verboden was op straffe van geseling. Abel Grunior rees overeind uit zijn stoel, maar wankelde terug toen Bokkemans vervolgde: "Dit resultaat blijkt uit een cyclotome moduluscontractie, genomen over een semi-orthogonaal block-design......." - "Bek houwe ouwe!" schreeuwde nu plotseling een student op het balkon, en een overrijpe tomaat spatte uiteen tegen het bord. De moderne jeugd laat niet met zijn beginselen spotten. Bokkemans draaide zich halverwege om, zag de vlek op het bord en keek bevreemd naar Knoppler. "Dit gedeelte klopte toch?" stamelde hij. Het waren zijn laatste woorden, toen zuchtte hij en stortte languit neer achter de toonbank. De twee paters betraden zwijgend het podium en voerden het lichaam af door de achterdeur. Grunior volgde ze, met de zilveren wandelstokken. Knoppler beet op zijn zakdoek.

In de zaal kon men een speld horen vallen. -

- - Dit waren dan de trieste feiten van het congres te Nijmegen. Had u meer sensatie gewild? Een steekpartij wellicht, of een oosters gif of een klap met een gereedstaand slagwapen? Zo ja, dan behoort u tot de romantici, of tot de vrouwen, wier overtrokken fantasie ik nu juist met dit in memoriam heb willen beteugelen.

Wij wiskundigen hebben geen behoefte aan kwalijke legendevorming. Na een kalm bestaan zonder uiterlijke opwinding, gaan wij de dood tegemoet als een vanzelfsprekendheid. Dat is het enige wat ik met deze notulen heb willen aantonen.

Bokkemans heeft nooit begrepen, wat er aan de hand was geweest. Toen dokter de Groot hem had bijgebracht, gold zijn eerste vraag de Brouwermedaille. Die zat gelukkig nog keurig vastgepind op zijn revers. De oude man herademde en vroeg om een teug whisky. Hij kon een hele fles krijgen, Black Label, want voor medische gevallen maakt het emiraat gaarne een uitzondering.

Trussy en haar zusje hebben hem 's avonds luid ronkend teruggebracht naar Vegchelen, waar hij nog zeven jaar lang door deskundige bezoekers gehuldigd werd als de man, die het grote probleem van Vermoeth had opgelost. Hij stierf op kerstavond van het jaar 2055 in de armen van tante Wendela, omringd door frater Anselmus, dokter de Groot en de voltallige familie Grunior.

Grunior Junior was bij die gelegenheid met kerstverlof uit de staatsgevangenis, waar hij acht jaar eenzame opsluiting moest doorbrengen , wegens het manipuleren van de geluidsinstallatie op het congres, in de zendtijd van de sjeik.

We weten allen, welk nulpuntenvermoeden hij in die jaren tot klaarheid heeft gebracht. Het zaad dat hij van vaders kant geërfd had, schoot eindelijk wortel op de wijze die Allah voor hem bestemd had. Allah zegene zijn verdere loopbaan.

Rest nog te vermelden Grunior Senior, die we in alle drukte bijna uit het oog zouden verliezen. Hij kreeg een hartelijke dankbrief van ons Bestuur, voor de vindingrijkheid, waarmee hij op het laatste moment het congres had weten te redden.

Want toen de zaal in verbijsterd stilzwijgen naar de leeggevallen sprekersplaats bleef zitten staren, keerde Grunior terug van de gang en sprak de volgende woorden:

"Vrienden, de heer Bokkemans heeft zich tijdelijk moeten terugtrekken, omdat de grote eer hem op zijn leeftijd teveel geworden is. Die leeftijd is kwetsbaar, maar gelukkig ook deelbaar, net als de mijne. Het verheugt mij, dat deze grote geleerde mij vanochtend in de bestuurskamer op de hoogte heeft willen brengen van zijn magistrale bewijsvoering inzake Vermoeth. Wellicht voorvoelde hij reeds, dat ik zijn sprekerstaak zou moeten overnemen, en dat doe ik bij deze dan ook volgaarne.

Om de overgang van 2^n+1 naar $n+1$ te bewerkstelligen heb ik een begrip ingevoerd, herstel, heeft Bokkemans een begrip ingevoerd, dat hij zou willen aanduiden als "logomorfisme". U kent allen van de schoolbanken het begrip homomorfisme, welnu, dit nieuwe begrip komt op hetzelfde neer, maar vereist wel een beetje meer aandacht...."

Wij hingen allen aan Gruniors lippen. Helder en zakelijk, zonder overbodige ballast, ontrolde zich daar de prachtige theorie, welke de geschiedenis zou ingaan als de exponentiaal-procedure van Bokkemans, u allen welbekend.

O zeker, ik weet het, Grunior behoorde niet tot de klasse van Newton of Leibniz of die andere griezels, waar je wel eens in boeken over leest.

Hij was een eigentijdse wiskundige.

Vanuit deze troostvolle gedachte is er nog toekomst voor zijn beproefde weduwe, voor hun zoon Grunior Junior, voor de stoutmoedige Trussy en de lieftallige Willemien.

E I N D E

Dit artikel bereikte ons door bemiddeling van Drs. D. Kruyswijk.

PROOF OF A CONJECTURE OF MARENIN

Vlad. Patrovač *

UFD 65.537

Abstract. We prove the Marenin hypothesis. **

Bibliography. 1 title.

Let p be the prime number. Suppose now that $z^p = xz^\varepsilon$, where ε is equal to 0 or 1. We see at once that $z^p \in$ Ж/Ш.

We will prove a more general statement.

A. Suppose З(s) is a mapping, where $s = \sigma + it$. Consider

$$З(s) \quad = \quad \Sigma\ 1/n^s.$$

For greater lucidity we shall confine ourselves to the case of prime n. (See [1] for the case n = 1.)

LEMMA 1. *A function З(s) can be continued to the holomorphic *** function on a whole space.*

This lemma is due to the great mathematician Vladimir Dugatov. It is easily proved using a multiplication presentation $З(s) = \pi.(1-1/p^s)-1$.

B. We now proceed directly to the proof of a Theorem.

Clearly, a counterexample to the lemma satisfies all the conditions of the theorem.

This prompts us to preserve all of the notation introduced earlier.

THEOREM. *If ρ is the zero of a Marenin mapping* **** *and* β *is positive, then* $\beta = \frac{1}{2}$.

Note that all the lemmas proved earlier are applicable. If, however, $3 = 0$ or $\sigma = \frac{1}{2}$, then for the values of t the minimum modulus of the left side is attained for fixed z.

This completes the proof of a conjecture which was mentionned in the title.

Received 15/MAR/77

BIBLIOGRAPHY

1. В. Бобroom, Доказательство гипотезы Бобroom,
Шахматный бюллетень 37 (1859).

Translated by MICHEL KERVAIRE.

* Editor's note. The present translation incorporates corrections made by the author.

** The translator was unable to locate any mention of this hypothesis in western literature.

*** The russian term here is rather ambiguous. It could also mean meromorphic. (Translator's note.)

**** Perhaps the author refers to his mapping 3(s) introduced under A. (Translator's note.)

MCO subject classification (1977). Primary 00Z00, 1/2siγ
Secondary 00000.

THE FIRST TABLE OF THE LCB SYSTEM

Labbers' Compressed Binaries From 1 Up To 150

Ir. Zeger Plug

1 :		51 :	10101	101 :	101000
2 :	0	52 :	10001	102 :	101010
3 :	1	53 :	10000	103 :	10102
4 :	01	54 :	10010	104 :	10002
5 :	00	55 :	1002	105 :	100010
6 :	10	56 :	202	106 :	100000
7 :	2	57 :	2010	107 :	100001
8 :	02	58 :	2000	108 :	100101
9 :	010	59 :	2001	109 :	100100
10 :	000	60 :	1201	110 :	10020
11 :	001	61 :	1200	111 :	10012
12 :	101	62 :	110	112 :	2012
13 :	100	63 :	21	113 :	2020
14 :	20	64 :	021	114 :	20100
15 :	12	65 :	0110	115 :	20101
16 :	012	66 :	01200	116 :	20001
17 :	020	67 :	01201	117 :	20000
18 :	0100	68 :	02001	118 :	20010
19 :	0101	69 :	02000	119 :	2002
20 :	0001	70 :	02010	120 :	1202
21 :	0000	71 :	0202	121 :	12010
22 :	0010	72 :	01002	122 :	12000
23 :	002	73 :	010010	123 :	12001
24 :	102	74 :	010000	124 :	1101
25 :	1010	75 :	010001	125 :	1100
26 :	1000	76 :	010101	126 :	210
27 :	1001	77 :	010100	127 :	3
28 :	201	78 :	01020	128 :	03
29 :	200	79 :	01012	129 :	0210
30 :	120	80 :	00012	130 :	01100
31 :	11	81 :	00020	131 :	01101
32 :	011	82 :	000100	132 :	012001
33 :	0120	83 :	000101	133 :	012000
34 :	0200	84 :	000001	134 :	012010
35 :	0201	85 :	000000	135 :	01202
36 :	01001	86 :	000010	136 :	02002
37 :	01000	87 :	00002	137 :	020010
38 :	01010	88 :	00102	138 :	020000
39 :	0102	89 :	001010	139 :	020001
40 :	0002	90 :	001000	140 :	020101
41 :	00010	91 :	001001	141 :	020100
42 :	00000	92 :	00201	142 :	02020
43 :	00001	93 :	00200	143 :	02012
44 :	00101	94 :	00120	144 :	010012
45 :	00100	95 :	0011	145 :	010020
46 :	0020	96 :	1011	146 :	0100100
47 :	0012	97 :	10120	147 :	0100101
48 :	1012	98 :	10200	148 :	0100001
49 :	1020	99 :	10201	149 :	0100000
50 :	10100	100 :	101001	150 :	0100010

THE SECOND TABLE OF THE LCB SYSTEM

Labbers' Compressed Binaries From 151 Up To 300

Ir. Zeger Plug

151 : 010002
152 : 010102
153 : 0101010
154 : 0101000
155 : 0101001
156 : 010201
157 : 010200
158 : 010120
159 : 01011
160 : 00011
161 : 000120
162 : 000200
163 : 000201
164 : 0001001
165 : 0001000
166 : 0001010
167 : 000102
168 : 000002
169 : 0000010
170 : 0000000
171 : 0000001
172 : 0000101
173 : 0000100
174 : 000020
175 : 000012
176 : 001012
177 : 001020
178 : 0010100
179 : 0010101
180 : 0010001
181 : 0010000
182 : 0010010
183 : 001002
184 : 00202
185 : 002010
186 : 002000
187 : 002001
188 : 001201
189 : 001200
190 : 00110
191 : 0021
192 : 1021
193 : 10110
194 : 101200
195 : 101201
196 : 102001
197 : 102000
198 : 102010
199 : 10202
200 : 101002
201 : 1010010
202 : 1010000
203 : 1010001
204 : 1010101
205 : 1010100
206 : 101020
207 : 101012
208 : 100012
209 : 100020
210 : 1000100
211 : 1000101
212 : 1000001
213 : 1000000
214 : 1000010
215 : 100002
216 : 100102
217 : 1001010
218 : 1001000
219 : 1001001
220 : 100201
221 : 100200
222 : 100120
223 : 10011
224 : 2011
225 : 20120
226 : 20200
227 : 20201
228 : 201001
229 : 201000
230 : 201010
231 : 20102
232 : 20002
233 : 200010
234 : 200000
235 : 200001
236 : 200101
237 : 200100
238 : 20020
239 : 20012
240 : 12012
241 : 12020
242 : 120100
243 : 120101
244 : 120001
245 : 120000
246 : 120010
247 : 12002
248 : 1102
249 : 11010
250 : 11000
251 : 11001
252 : 2101
253 : 2100
254 : 30
255 : 13
256 : 013
257 : 030
258 : 02100
259 : 02101
260 : 011001
261 : 011000
262 : 011010
263 : 01102
264 : 012002
265 : 0120010
266 : 0120000
267 : 0120001
268 : 0120101
269 : 0120100
270 : 012020
271 : 012012
272 : 020012
273 : 020020
274 : 0200100
275 : 0200101
276 : 0200001
277 : 0200000
278 : 0200010
279 : 020002
280 : 020102
281 : 0201010
282 : 0201000
283 : 0201001
284 : 020201
285 : 020200
286 : 020120
287 : 02011
288 : 010011
289 : 0100120
290 : 0100200
291 : 0100201
292 : 01001001
293 : 01001000
294 : 01001010
295 : 0100102
296 : 0100002
297 : 01000010
298 : 01000000
299 : 01000001
300 : 01000101

ENKELE OPMERKINGEN OVER MONOTONE ALIQUOTE RIJEN

H.J.J. te Riele

1. Zij $n>1$ een natuurlijk getal en zij $s(n)$ de som van de aliquote delers van n, d.w.z. $s(n) = \sigma(n) - n$, waarbij σ de "som van de delers"- functie is. De rij n, $s(n)$, $s^2(n)=s(s(n))$, ... , $s^k(n)=s(s^{k-1}(n))$, ... heet de aliquote rij van n. Een aliquote rij eindigt dus als hij een term met de waarde 1 bevat, aangezien $s(1)$ niet gedefinieerd is.

E. CATALAN en L.E. DICKSON dachten dat iedere aliquote rij ofwel een term met de waarde 1 bevat (bv. 2, 1) ofwel een term die gelijk is aan een van zijn voorgangers (bv. 6, 6, ... en 220, 284, 220, ...). Sinds de komst van steeds snellere computers heeft men steeds grotere termen van steeds meer aliquote rijen berekend, en R. K. GUY vermoedt nu dat bijna alle aliquote rijen met even startterm onbegrensd zijn, in die zin dat de verzameling van de even getallen waarvan de aliquote rij begrensd is de natuurlijke dichtheid 0 heeft.

2. Ondanks de zeer grote hoeveelheid experimentele resultaten die in de laatste 100 jaar, voornamelijk met behulp van de computer, verzameld zijn, is er weinig substantiëels over aliquote rijen bewezen, afgezien van de volgende door H.W. LENSTRA JR. aan de doodskist van Catalan bevestigde nagel: Er bestaan willekeurig lange monotoon stijgende aliquote rijen. TE RIELE had hetzelfde eerder bewezen, maar dan wel onder de aanname dat er oneindig veel even volmaakte getallen bestaan. Guy bewees kort geleden met behulp van Lenstra's methode dat voor ieder paar van natuurlijke getallen k, N en voor ieder reëel getal ρ er aliquote rijen bestaan met k achtereenvolgende termen, zó dat iedere term groter is dan ρ maal zijn voorganger en bovendien slechts priemfactoren groter dan N bevat. De numerieke waarde van deze door Guy bedoelde termen is bijvoorbeeld voor $k=N=\rho=10^{10}$ met geen pen te beschrijven, maar daar gaat het in eerste instantie ook niet om.

P. ERDÖS bewees onlangs dat voor bijna alle natuurlijke getallen n, voor ieder natuurlijk getal k en voor ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ geldt:

$$(1-\varepsilon)n\left\{\frac{s(n)}{n}\right\}^i < s^i(n) < (1+\varepsilon)n\left\{\frac{s(n)}{n}\right\}^i,$$

voor $1 \leq i \leq k$.

3. Men kan zich afvragen of er ook willekeurig lange monotoon dalende aliquote rijen bestaan. Dit is inderdaad eenvoudig te bewijzen als men aanneemt dat de volgende (verscherpte Goldbach-) bewering waar is: Ieder even getal ≥ 8 laat zich schrijven als de som van twee verschillende priemgetallen. Immers, men kan dan ieder oneven getal $m \geq 9$ schrijven als $m = 1 + p + q$ met $p \neq q$ en p en q priem, zodat $s(pq) = (p+1)(q+1) - pq = p + q + 1 = m$. Dus pq is een voorganger van m in de aliquote rij die m bevat; bovendien is $pq > m$. Evenzo kan men een voorganger van pq vinden, en zo voorts. Op deze manier construeert men een monotoon dalende aliquote rij van iedere gegeven lengte. Dit is in figuur 1 geïllustreerd uitgaande van het getal 9. Steeds werden alle voorgangers van de vorm pq berekend met $3 \leq p \leq 13$ en $q < 10^7$. Hieruit volgt het bestaan van een monotoon dalende aliquote rij met 15 termen, namelijk de rij

$$\begin{aligned}
39348755 &= 5.7869751\\
7869757 &= 7.1124251\\
1124259 &= 3.374753\\
374757 &= 3.124919\\
124923 &= 3.41641\\
41645 &= 5.8329\\
8335 &= 5.1667\\
1673 &= 7.239\\
247 &= 13.19\\
33 &= 3.11\\
15 &= 3.5\\
9 &= 3^2\\
4 &= 2^2\\
3 &= 3\\
1&.
\end{aligned}$$

Niettemin lijkt het niet eenvoudig om daadwerkelijk het bestaan van willekeurig lange monotoon dalende aliquote rijen aan te tonen.

```
9=3^2
  ↑—15=3.5
    ↑—33=3.11
      ↑—87=3.29
        ↑—249=3.83
          ↑—1687=7.241
        ↑—553=7.79
          ↑—2735=5.547
            ↑—8193=3.2731
              ↑—106327=13.8179
                ↑—531605=5.106321
                ↑—744233=7.106319
                  ↑—8186431=11.744221
                    ↑—90050609=11.8186419
                    ↑—106423421=13.8186417
            ↑—13645=5.2729
              ↑—149963=11.13633
          ↑—5951=11.541
            ↑—65329=11.5939
              ↑—326615=5.65323
                ↑—979833=3.326611
                  ↑—12737647=13.979819
                ↑—1633045=5.326609
                  ↑—8165195=5.1633039
                  ↑—17963363=11.1633033
        ↑—949=13.73
          ↑—6587=7.941
            ↑—32905=5.6581
          ↑—10307=11.937
            ↑—30909=3.10303
            ↑—51505=5.10301
      ↑—247=13.19
        ↑—1205=5.241
          ↑—3603=3.1201
          ↑—13123=11.1193
            ↑—170417=13.13109
              ↑—511239=3.170413
        ↑—1673=7.239
          ↑—5007=3.1669
            ↑—15009=3.5003
            ↑—34993=7.4999
              ↑—384791=11.34981
                ↑—4232569=11.384779
            ↑—64909=13.4993
              ↑—454307=7.64901
                ↑—1362909=3.454303
          ↑—8335=5.1667
            ↑—41645=5.8329
              ↑—124923=3.41641
                ↑—374757=3.124919
                  ↑—1124259=3.374753
                    ↑—7869757=7.1124251
                      ↑—39348755=5.7869751
                ↑—1623817=13.124909
        ↑—3029=13.233
          ↑—15115=5.3023
            ↑—105749=7.15107
            ↑—196313=13.15101
              ↑—981535=5.196307
                ↑—6870689=7.981527
                  ↑—34353415=5.6870683
                ↑—10796753=11.981523
```

FIGUUR 1.

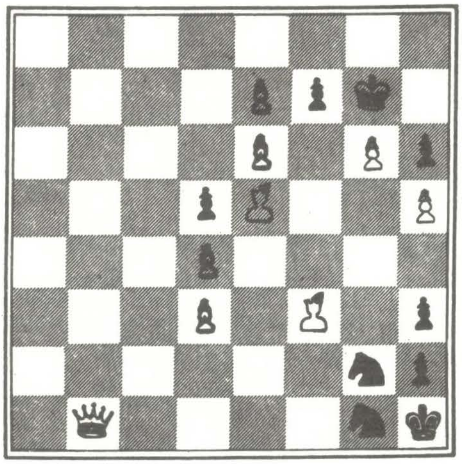
Monotoon dalende aliquote rijen die de term met waarde 9 bevatten

PROMOTIE-PROBLEEM

of de (ma)thematische metamorphosen ener promovendus

E.W. Roscam Abbing

In de navolgende stelling:
wit: Kg7, Db1, Le5, Lf3 en pionnen d3, d4, e6, e7, g6 en h5,
zwart: Kh1, Pg1, Pg2 en pionnen d5, f7, h2, h3 en h6,
dient de witspeler in ten hoogste vijf zetten mat te geven.



Oppervlakkige beschouwing van dit door W.J. Wood gecomponeerde en in 1916 in de *Morning Post* gepubliceerde probleem leert reeds dat het spel dreigt te stranden in een passieloos mat. Een plompe ecartering van de zwarte boer op f7 leidt al tot dit treurig resultaat, weshalve een de beginner zo kenmerkende, materialistische benadering zeker hier niet aangewezen is.

Voor een dirty-problem-solving-mind, als waarover de heer H. W. L. jr. zonder enige twijfel beschikt, is ook evident, dat een botte primaire promotie van de pion op e7, zonder inleidend werk als ogenschijnlijk zonder promotiepretenties bedoelde onschuldige publicaties, geen serieuze overweging verdient. Een dergelijke geest beseft terstond dat alleen de onwaarschijnlijkste zet in aanmerking komt. Zonder enige aarzeling, maar met het commentaar: "Dat is toch triviaal!", wordt dan ook de volstrekt onmogelijke zet 1. Lg3 uitgevoerd. Na deze physieke inspanning volgt dan nog de verzuchting: "Laat de heer Wood zich toch terugtrekken in zijn geestloos bos." (1)

Op het kokette zetje, 1. Lg3, blijken slechts vier antwoorden mogelijk. Zij zullen hier alle de revue passeren.

a. 1. ... - f6, de eenvoudigste zwarte reactie: één stapje vooruit zonder zich aan de blanke boeren te vergrijpen.
Thans is het de promovendus duidelijk dat wat op de eerste zet, primair, een proleterige promotie zou zijn geweest, thans, secundair, een verfijnd gebeuren kan zijn. Wel moet erop worden gelet, dat het geheel de charme van het onnatuurlijke houdt. Een perverse promotie is steeds te prefereren. Waarom naar een dame grijpen als het ook met een paard gaat?
Het vervolg moet dus zijn:
2. e8P - f5
3. Pd6 - f4
4. Pf5 - fg3:
5. Pg3: mat.

b. 1. ... - f5, een simpele variant van de eenvoudigste reactie: twee stapjes vooruit. De promovendus realiseert zich meteen, dat het probleem thematisch moet worden aangepakt. Het promoveren dient zo lang mogelijk pervers te blijven: daarom thans met een (raads)heer.
2. e8L - f4
3. La4 - fg3:
4. Lad1 - Pe2 of Pf3:
5. Lde2: of Ldf3: aftrekmat.

c. 1. ... - fe6:, voor het eerst een reactie met slaand geweld. Thematisch is thans de torenpromotie aan de beurt. Bovendien noopt het brute optreden van de zwartspeler tot een zich ascetisch terugtrekken in de ivoren toren van de wetenschap.
2. e8T - e5
3. Ld5: - e4(ed4:)
4. Te4(:) - Pe1(e3,f4,h4)
5. Te1:(e3:,f4:,h4:) aftrekmat.

d. 1. ... - fg6:, de meest gewelddadige reactie: de roof van een pion met onmiddellijke bedreiging van een volgende. Nu voor de promovendus de perverse permutaties zijn uitgeput (of het zou moeten zijn een triviale travestie) rest hem niets anders dan om zijn moeder te roepen, die dan ook terstond op e8 verschijnt.

2. e8D - gh5:

3. Deb8 - h4

4. Lh2 - h5

5. Dg1: mat.

Aldus wordt het promotieprobleem moeiteloos met wat ongezonde intuïtie opgelost.

Noten:

(1) Schriftelijk noch mondeling gedane mededeling van de heer H. W. L. jr., die niettemin diens hubris juist typeert.

Veel dank ben ik verschuldigd aan mijn lieve secretaresse, de heer dr. J.K. Lenstra, voor het prachtige typewerk.

LA CHASSE AUX ANNEAUX PRINCIPAUX NON-EUCLIDIENS DANS L'ENSEIGNEMENT

Pierre Samuel

Dans les cours élémentaires d'Algèbre à l'Université, l'on parle bien entendu d'anneaux principaux et l'on montre à quel point ils ont de belles et commodes propriétés. Si le cours est tant soit peu avancé, on parle des modules sur ces anneaux, et c'est aussi très beau et fructueux.

Naturellement, il faut donner des exemples. Ce sont $\underline{Z}$, l'anneau des polynômes à une variable sur un corps, puis des anneaux comme $\underline{Z}[i]$, $\underline{Z}[\sqrt{2}]$, etc. si l'on est un peu plus sophistiqué. Mais comment démontre-t-on qu'ils sont principaux ? Neuf fois sur dix, au moins, on montre qu'ils sont <u>euclidiens</u> et l'on dit quelques mots de ce nouveau genre d'anneaux.

Là dessus, il y a presque toujours (c'est à dire "sauf dans un nombre fini de cas") un étudiant curieux qui vous demande: <u>"y a-t-il des anneaux principaux non euclidiens</u> ?".

Si vous avez, dans les temps anciens, suivi un cours de théorie des nombres, il vous vient un vague souvenir de corps quadratiques imaginaires et vous répondez (sans y croire tout à fait) que l'anneau des entiers de $\underline{Q}(\sqrt{-19})$ (à moins que ce ne soit $\sqrt{-23}$???) doit répondre à la question.

Oui. Mais pourquoi ? Dans ce genre d'exemples, comme dans bien d'autres, il n'est guère difficile de montrer que l'anneau n'est pas euclidien: on sait que, dans un anneau euclidien A, il y a des éléments (premiers) p tels que $A^* \rightarrow (A/Ap)^*$ soit surjectif (B^* désigne le groupe des unités de l'anneau B); alors si A a peu d'unités (ce qui est le cas dans l'espèce quadratique imaginaire) et si les corps A/Ap ne sont pas tout petits, A ne peut être euclidien.

Mais pour montrer que $\underline{Z}\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{-19})\right]$ est principal, c'est une autre histoire devant des étudiants peu avancés en théorie des nombres ! La méthode la moins sophistiquée serait, peut-être, de démontrer l'existence d'une "constante de Minkowski" c telle que tout idéal soit équivalent à un idéal de norme $\leq c$, puis d'énumérer tous les idéaux de norme $\leq c$ en constatant que chacun est principal. Je vous souhaite bien du plaisir !

J'avoue maintenant que je suis géomètre et pas arithméticien. Donc, après les difficultés de l'arithmétique, voici les beautés de la géométrie: il suffit, tout simplement, de considérer le <u>"cercle imaginaire"</u> d'équation $x^2+y^2+1 = 0$; il n'a pas de points réels, mais c'est justement ce qui va faire son charme pour nous. On introduit donc l'anneau quotient $A = \underline{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$, que l'on note $\underline{R}[x,y]$; le sous anneau $\underline{R}[x]$ est un anneau de polynômes, et, comme $y^2 = -x^2 - 1$, on fait dans A des "calculs quadratiques" analogues à ceux faits dans $\underline{Z}[i]$ ou dans $\underline{Z}[\sqrt{2}]$. Ainsi, l'on calcule des "normes" $(a(x) + b(x)y)(a(x) - b(y)y)$ et l'on s'aperçoit que A est intègre et qu'il n'a d'autres unités que les constantes non nulles. L'on voit aussi que tout idéal non trivial est de codimension finie dans A (en tant que $\underline{R}$-espace vectoriel).

Mais aucun n'est de codimension 1, sinon A admettrait un homomorphisme sur $\underline{R}$ et notre cercle aurait des points réels. Alors les quotients A/Ap sont trop gros pour que les unités s'y surjectent et (sans aucune utilisation de Lobatchevsky !) A est non-euclidien.

Comment montrer qu'il est principal ? Un peu de géométrie encore. On montre d'abord que tout idéal maximal $\underline{m}$ est principal. En effet $A/\underline{m}$ est un corps de dimension (linéaire) finie sur $\underline{R}$: ce ne peut donc être que $\underline{C}$. En utilisant le passage au complexe conjugué, on a donc deux homomorphismes de A sur $\underline{C}$ de noyau $\underline{m}$, c'est à dire deux points complexes conjugués sur notre cercle imaginaire. On les <u>joint par une droite</u> (dans $\underline{C}^2$) et le premier membre de l'équation de cette droite, ax + by + c, est à coéfficients <u>réels</u>; il est dans $\underline{m}$ car il est annulé par les deux homomorphismes. Mais, comme $\underline{m}$, l'idéal A(ax+by+c) est de codimension 2 dans A. Donc $\underline{m}$ = A(ax+by+c) est bien principal.

Et pour un idéal quelconque $\underline{b}$ ($\neq(0)$) de A ? On se doute que, en mettant $\underline{b}$ dans un idéal maximal, un raisonnement noethérien va donner le résultat. Mais il n'y a pas besoin de connaître le théorème de Krull sur l'existence des idéaux principaux, ni de savoir que A est noethérien en tant que quotient d'un anneau de polynômes. Car $\underline{b}$ est de codimension finie dans A. Alors un idéal de codimension minimale parmi ceux qui contiennent $\underline{b}$ sera un idéal maximal, donc de la forme Az. Comme $\underline{b} \subset Az$, on voit qu'on peut écrire $\underline{b} = z\underline{b}'$; alors $\mathrm{codim}(\underline{b}') < \mathrm{codim}(\underline{b})$ et une récurrence sur la codimension fournit le résultat cherché: $\underline{b}$ est principal.

Un géomètre surtout amateur, comme moi, de caractéristique $p\neq 0$, serait heureux de montrer un exemple avec un corps de base un peu moins "trivial" que $\underline{R}$. En voici un très joli, une cubique elliptique sur un corps fini, d'anneau

$$A = \underline{F}_3[x,y] \text{ avec } y^2 = x^3 - x - 1.$$

Les unités sont 1 et -1. Sur le corps $\underline{F}_3$ à 3 éléments, la courbe n'a pas de points rationnels (à distance finie); donc A est non-euclidien. C'est tout simple.

Mais est-il principal ? Euh, Euh, Méssieurs, oui. Comme la courbe n'a qu'un seul point à l'infini, le groupe des classes d'idéaux de son anneau n'est autre que le groupe des classes de diviseurs de son corps de fonctions, lequel s'identifie au groupe des points rationnels de la jacobienne de la courbe. Heureusement, la courbe étant elliptique, cette jacobienne est la courbe elle même, et vous avez bien vu qu'elle a un seul point rationnel - Mais vous avez dit qu'elle n'en a pas ? - Si, c'est le point à l'infini !

Mais alors ! Voilà un géomètre qui a déclaré qu'il était bien compliqué de calculer le nombre de classes d'un brave petit corps quadratique imaginaire, et qui veut nous imposer des jacobiennes, des courbes elliptiques, et des points à l'infini ! Celà devant de tout jeunes étudiants!

Oui, le métier de géomètre est bien difficile !

VARIATIES OVER EEN THEMA VAN O.A. H.W. LENSTRA JR.

R. Sattler

In enige publikaties wijdt Lenstra aandacht aan een funktie $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ met de eigenschappen:

(1) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ voor alle $a,b \in \mathbb{N}$.

(2) $\phi(a+b) \geq \min\{\phi(a),\phi(b)\}$ voor alle $a,b \in \mathbb{N}$.

Voor een dergelijke functie is door hem i.s.m. A.E. Brouwer bewezen:

$\phi(a) = a^x$ met vaste $x \in \mathbb{R}$, voor alle $a \in \mathbb{N}$, met als uitzondering ten hoogste de getallen deelbaar door één priemgetal p, waarvoor geldt $\phi(p) = p^y$ met $y \geq x$.

We veronderstellen verder eenvoudigheidshalve $\phi(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, $\phi(a) \leq a$ voor alle $a \in \mathbb{N}$, $\phi(p_1),\phi(p_2) > 1$ voor twee verschillende priemgetallen p_i. In dit geval geldt zonder meer $\phi(a) = a$ voor alle $a \in \mathbb{N}$.

I. Allereerst handhaven we (1) en beperken (2) tot

$\phi(2) = 2$

$\phi(2a+1) \geq \min\{\phi(a),\phi(a+1)\}$ voor alle $a \in \mathbb{N}$.

Dan geldt: $\phi(a) = a$ voor alle $a \in \mathbb{N}$.

Dit is op het ogenblik een vermoeden. Aannemelijk vanwege het volgende rekenwerk.

Veronderstel $\phi(13) \geq 2$, $\phi(17) \geq 2$. Dan $\phi(103) \geq \min\{\phi(52),\phi(51)\} \geq 2$, $\phi(207) \geq \min\{\phi(103),\phi(104)\} \geq 2$, $\phi(3) \geq 2$ of $\phi(23) \geq 2$. Stel $\phi(3) = 1$, dan $\phi(137) \geq \min\{\phi(68),\phi(69)\} \geq 2$, $\phi(275) \geq \min\{\phi(137),\phi(138)\} \geq 2$, $\phi(5) \geq 2$ of $\phi(11) \geq 2$. Stel $\phi(5) = 1$, dan $\phi(11) \geq 2$, $\phi(243) \geq$ $\geq \min\{\phi(121),\phi(122)\} \geq 2$. T.S. Stel $\phi(5) \geq 2$, dan $\phi(9) \geq \min\{\phi(5),\phi(4)\}$ ≥ 2. T.S.

Conclusie $\phi(3) \geq 2$. (Eenvoudiger is uiteraard: $\phi(27) \geq \min\{\phi(13),\phi(14)\}$ enz.)

Het lijkt duidelijk dat een dergelijke procedure ook met andere priemgetallen mogelijk is.

We hebben nu $\phi(p) \geq 2$ voor alle priemgetallen p(!).

$\phi(127) \geq 8$, $\phi(19^3) \geq \min\{\phi(27.127),\phi(2.5.7^3)\} \geq 32$, $\phi(19) \geq 4$.

$\phi(43) \geq 4$, $\phi(7^3) \geq \min\{\phi(9.19),\phi(4.43)\} \geq 16$, $\phi(7) \geq 3$, $\phi(19) \geq 5$, $\phi(37) \geq 5$.

$\phi(11^3) \geq \min\{\phi(5.7.19),\phi(2.9.37)\} \geq 30$, $\phi(11) \geq 4$.

$\phi(331) \geq 12$, $\phi(31^3) \geq \min\{\phi(9.5.331),\phi(16.49.19)\} \geq 96$, $\phi(31) \geq 5$.

$\phi(5^3) \geq \min\{\phi(9.7),\phi(2.31)\} \geq 10$, $\phi(5) \geq 3$, $\phi(31) \geq 6$.

$\phi(17) \geq 4$, $\phi(307) \geq 16$, $\phi(17^3) \geq \min\{\phi(8.307),\phi(27.7.31)\} \geq 128$, $\phi(17) \geq 6$.

$\phi(13^2) \geq \min\{\phi(4.3.7),\phi(5.17)\} \geq 18$, $\phi(13) \geq 5$.

$\phi(23^2) \geq \min\{\phi(8.3.11),\phi(5.53)\} \geq 24$, $\phi(23) \geq 5$, $\phi(689) \geq 30$.

$\phi(83^2) \geq \min\{\phi(4.3.7.41),\phi(5.689)\} \geq 90$, $\phi(83) \geq 10$, $\phi(331) \geq 20$, $\phi(31^3) \geq 240$, $\phi(31) \geq 7$.

$\phi(263^3) \geq \min\{\phi(49.13.109.131),\phi(4.9.11.103.223)\} \geq 8100$, $\phi(263) \geq 21$, $\phi(1051) \geq 42$.

$\phi(181^3) \geq \min\{\phi(7.13.31.1051),\phi(2.5.27.79.139)\} \geq 4410$, $\phi(181) \geq 17$.

$\phi(7^6) \geq \min\{\phi(25.13.181),\phi(8.9.19.43)\} \geq 765$, $\phi(7) \geq 4$. Enz. Het laatste resultaat is scherper dan $\phi(3) \geq 2$.

Een bewijs zou als volgt kunnen verlopen: Stel ${}^{p_1}\log\phi(p_1) < {}^{p_2}\log\phi(p_2) \leq {}^{p_3}\log\phi(p_3)$, p_i priem. Bepaal a zo dat $p_2^{n_2}|a$, $p_3^{n_3}|a+1$, $p_1^{n_1}|2a+1$ voor "grote" waarden van n_i. Voor de "resterende" factoren q_i geldt $1 \leq \phi(q_i) \leq q_i$. Dit kan verscherpt worden. Zorg dat hun invloed klein is. Kom zo tot een tegenspraak. Een precieze uitwerking kan uiteraard niet gegeven worden, omdat dit stukje niet in het Engels gesteld is.

II. We variëren nu (2) tot

$$\phi(2) = 2$$

$$\phi(a^n) \geq \min\{\phi((a-1)^n),\phi(a^n-(a-1)^n)\} \text{ voor alle } a,n \in \mathbb{N}.$$

Bewering: Er is een ϕ die voldoet aan de voorwaarden, en waarvoor geldt $\phi(a) < a$ voor zekere $a \in \mathbb{N}$.

Ook dit is een vermoeden; het berust op het feit dat voor grote n $\phi(a^n-(a-1)^n)$ grote priemfaktoren bezit. Het laten toenemen van n om een gunstiger waarde voor $\phi(a)$ te bewijzen is daarom niet bij voorbaat een succes. Bewezen kan worden: $\phi(3) \geq 2$, $\phi(5),\phi(7) \geq 3$, $\phi(11),\phi(13),\phi(17),\phi(19) \geq 4$, $\phi(23) \geq 5$, $\phi(29) \geq 6$. Vraag: Kan bewezen worden $\phi(43) \geq 5$?

III. We variëren nu (1) tot

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \text{ voor alle } a,b \in \mathbb{N} \text{ met } (a,b) = 1.$$

$$\phi(a^n) \geq (\phi(a))^n, \text{ voor alle } a,n \in \mathbb{N}.$$

Dan geldt $\phi(a) = a$.

We maken weer aannemelijk: Zij $p_1 > q_1$, $(p_1,q_1) = 1$, $\phi(p_1),\phi(q_1) > 1$, p_1,q_1 oneven. Stel $\phi(2) = 1$. Definieer r_1 door $p_1+q_1 = 2^n r_1$, r_1 oneven. Dan geldt $\phi(r_1) = \phi(2^n r_1) \geq \min\{\phi(p_1),\phi(q_1)\} > 1$ en $r_1 < p_1$, $r_1 \neq q_1$. Zij $p_2 = \max\{q_1,r_1\}$, $q_2 = \min\{q_1,r_1\}$, dan $p_2 > q_2$, $(p_2,q_2) = 1$, $\phi(p_2),\phi(q_2) > 1$, p_2,q_2 oneven. Enz.

Dit geeft een dalende rij $p_1,p_2,\ldots$ oneven getallen met $\phi(p_i) > 1$, derhalve $\phi(1) > 1$. T.S. Conclusie $\phi(2) = 2$.

Stel $\phi(3) = 1$. Zij $\phi(p_1) > 1$. Voor één van de getallen p_1, p_1+2, p_1+4 geldt dat het geschreven kan worden als $3^n p_2$ met $3 \nmid p_2$. Dan $\phi(p_2) > 1$. Enz. T.S. Conclusie $\phi(3) \geq 2$. Tegelijkertijd hebben we $\phi(a) \geq 2$ voor $a \geq 2$.

Nu geldt $\phi(29) \geq \min\{\phi(3.5),\phi(2.7)\} \geq 4$, $\phi(41) \geq 4$.

$\phi(13^2) \geq \min\{\phi(3.29),\phi(2.41)\} \geq 8$, $\phi(13) \geq 3$

$\phi(11^2) \geq \min\{\phi(3.13),\phi(2.41)\} \geq 6$, $\phi(11) \geq 3$, $\phi(64) \geq \min\{\phi(2.11),\phi(2.3.7)\} \geq 6$, $\phi(8) \geq 3$.

$\phi(25) \geq \min\{\phi(2.5),\phi(3.5)\} \geq 4$

$\phi(7^3) \geq \min\{\phi(11.13),\phi(8.25)\} \geq 9$, $\phi(7) \geq 3$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(5^4) \geq \min\{\phi(3.7.11),\phi(2.197)\} \\ \phi(197) \geq \min\{\phi(7.11),\phi(8.3.5)\} \geq 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \phi(5^4) \geq 18,\ \phi(5) \geq 3.$$

Deze laatste constructiemethode voor het laten "omhoogkruipen" van ϕ demonstreren we nog aan een iets uitgebreider geval:

Veronderstel, behalve het voorgaande ook aangetoond: $\phi(11) \geq 4$, $\phi(13) \geq 5$, $\phi(8) \geq 4$, $\phi(16) \geq 5$ ($\phi(4) \geq 3$), $\phi(19) \geq 5$, $\phi(29) \geq 7$, $\phi(37) \geq 8$, $\phi(43) \geq 9$. Dan:

$$\begin{aligned} \phi(7^{10}) = \phi(282475249) &\geq \min\{\phi(98968155),\phi(183507094)\} \\ &= \min\{\phi(3.5.11.13.29.37.43),\phi(2.91753547)\} \\ &\geq \min\{60480, 2.\phi(9173547)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(9173547) &\geq \min\{\phi(5.11.13.29.37.43),\phi(2.3.9794027)\} \\ &\geq \min\{30240, 4.\phi(9794027)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(9794027) &\geq \min\{\phi(3.5.11.13.29.43),\phi(4.1779803)\} \\ &\geq \min\{7560, 3.\phi(1779803)\} \end{aligned}$$

$\phi(1779803) \geq \min\{\phi(3.11.13.29.43),\phi(8.5.31121)\}$

$\geq \min\{2520,12.\phi(31121)\}$

$\phi(31121) \geq \min\{\phi(3.11.13.29),\phi(8.5.467)\} \geq \min\{280,12.\phi(467)\}$

$\phi(467) \geq \min\{\phi(11.19),\phi(2.3.43)\} \geq 20.$

Conclusie: $\phi(7^{10}) \geq 60480 > 59049 = 3^{10}$, $\phi(7) \geq 4$.

We prove the statement under III.

Define ϕ' by: $\phi'(p) = \text{g.l.b.}_{n\to\infty}(\phi(p^n))^{1/n}$ for all primes p.

$\phi'(ab) = \phi'(a)\phi'(b)$ for all $a,b \in \mathbb{N}$.

Then we have $\phi(p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}) = \phi(p_1^{\alpha_1})\ldots\phi(p_n^{\alpha_n}) \geq (\phi'(p_1))^{\alpha_1}\ldots(\phi'(p_n))^{\alpha_n}$ $= \phi'(p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n})$.

Let $p^k = a+b$, $(a,b) = 1$ (This means $(a,p) = (b,p) = 1$).

Then $\phi(p^k) \geq \min\{\phi(a),\phi(b)\}$. Suppose $\phi(p^{kn}) \geq (\min\{\phi(a),\phi(b)\})^n$ for some $n \in \mathbb{N}$. Then $\phi(p^{k(n+1)}) \geq \min\{\phi(ap^{kn}),\phi(bp^{kn})\} \geq (\min\{\phi(a),\phi(b)\})^{n+1}$.

So by induction $\phi(p^{kn}) \geq (\min\{\phi(a),\phi(b)\})^n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and hence $\phi(p^n) \geq (\min\{\phi(a),\phi(b)\})^{n/k}$ for all $n \in \mathbb{N}$. This means that

$$\phi'(p^k) \geq \min\{\phi(a),\phi(b)\} \geq \min\{\phi'(a),\phi'(b)\},\ a+b = p^k,\ (a,b) = 1.$$

By examining the proofs of the starting problem ([1],[2]), this is sufficient to prove:

There exist a prime number p and real numbers $A \geq 0$, $B \geq 0$, such that $\phi'(a) = a^A a_p^B$ for all $a \in \mathbb{N}$, where a_p denotes the largest power of p dividing a.

As $\phi(2) = 2$, $\phi(3) = 2$ (proved in [3]) we have $\phi'(5) \geq 2$, $\phi'(7) \geq 2$, and as p cannot be both 5 and 7, we find $A > 0$. Im $\phi < \mathbb{N}$ if and only if $A \in \mathbb{N}$, so $A \geq 1$.

Hence $a \leq a^A \leq \phi'(a) \leq \phi(a) \leq a$ or $\phi(a) = a$ for all $a \in A$.

References:

[1] Multiplicative algorithms on the integers - A.E. Brouwer, H.W. Lenstra jr., Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[2] Lectures on Euclidean Rings - H.W. Lenstra jr., Bielefeld, Summer 1974.

[3] Variations on a theme of H.W. Lenstra jr. a.o. - R. Sattler, "Liber Amicorum" dedicated to H.W. Lenstra jr. on the occasion of his promotion at Amsterdam.

WHICH (0,1)-MATRICES ARE UNIMODULARIZABLE?

Lex Schrijver

Let M be a (0,1)-matrix. Call M unimodularizable if some 1's of M can be replaced by -1 in such a way that the new-formed matrix M' is totally unimodular (that is, each square submatrix of M' has determinant 0, +1 or -1). So M is unimodularizable iff M has the same support (i.e. set of non-zero positions) as a totally unimodular matrix. The following matrix is an example of a non-unimodularizable matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

It can be proved (using some straightforward observations concerning the bond space and cycle space of the bipartite graph formed in the obvious way from a (0,1)-matrix) that two totally unimodular matrices with the same support can be transferred into each other by multiplying some rows and columns by -1. Therefore, all totally unimodular matrix-representations of a unimodularizable matrix are, in a way, isomorphic.
The question I want to ask is: what are the minimal (under taking submatrices) non-unimodularizable (0,1)-matrices ? Since the class of unimodularizable matrices is closed under taking submatrices the answer to this question yields a characterization of unimodularizable matrices.

CRYPTOGRAM

met de hartelijke gelukwensen van Senior

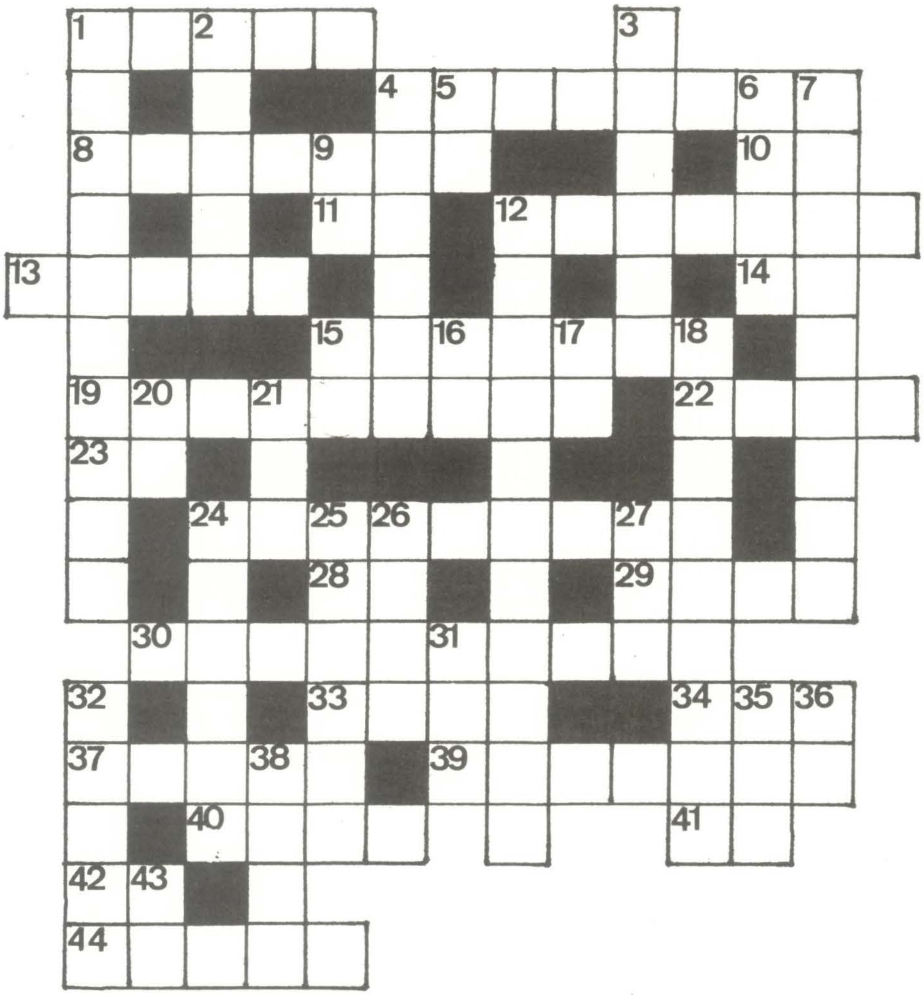
HORIZONTAAL

1. Wat mag is optellen. (5)
4. Wie dit doceert moet ook hierin bedreven zijn als hij er geen hulpje voor heeft. (8)
8. Ganzevoet, als zeer deugdzaam bekend. (7)
10. 4. (2)
11. Coördinaat. (2)
12. Een oosterbuur ziet het bewijs nog niet helemaal . . . (7)
13. . . . tot hij dit door heeft. (5)
14. Geen ogenblikje. (2)
15. Renstal, waar veel beroemde wiskundigen gefokt zijn. (7)
19. Communistisch berekenaar van uiterste waarden. (9)
22. Bepaal de lengte van de streep. (4)
23. 100. (2)
24. Vandaag verworven door een gevaarlijke bocht te elimineren. (9)
28. Stoppende pap. (2)
29. Eigenschap van de verzameling van onsterfelijke lieden. (4)
30. Boudoir. (10)
33. Etenbederver. (4)
34. $\Longrightarrow$. (3)
37. Consumeerde nonkel zo weinig? (5)
39. Door een deur naar een plezier"tje". (7)
40. Eer dit behaald wordt moet veel worden gepresteerd. (4)
41. Niet meer in de mammoet, maar staat er toch in. (2)
42. Tegengestelde van 29. (2)
44. (5)

VERTICAAL

1. Garantie voor een lamp. (10)
2. Soort regen. (5)
3. De volgende maand goud. (6)
4. Een kleintje was een tientje. (6)
5. Spreker. (2)
6. A.v. (4)
7. Grievende eigenschap. (9)
9. ρ voor je werk. (2)
12. Als die arts iets nieuws vindt schrijft hij het op. (11)
15. De mannelijke Franse versie. (2)
16. Vroegere kolonie van metaal. (2)
17. Helemaal uw wedstrijden. (2)
18. Daar stond een dame stram Midden op de Dam. (9)
20. 90. (2)
21. Met 11 wordt deze rivier als afvoer gebruikt. (3)
24. Is 8 - 4V - 15 - 3 vandaag in de 4H in 18. (6)
25. Niet mee gedogen, wel mee in het CDA, het heeft zo zijn bekoring voor die arme CH. (6)
26. De waarschijnlijkheidsrekening in de praktijk. (4)
27. De Fransen zetten au voor deze drank. (3)
31. De mechanica in de praktijk. (3)
32. Gebeurt vaak als D = 0. (5)
35. 1 - 0 voor de bond. (3)
36. Maat voor aantrekkelijkheid. (2)
38. Toen Hendrik vanmiddag lijdend voorwerp was, was hij onderwerp. (4)
43. 2. (2)

Cryptogram


1 2 3
4 5 6 7
8 9 10
11 12
13 14
15 16 17 18
19 20 21 22
23
24 25 26 27
28 29
30 31
32 33 34 35 36
37 38 39
40 41
42 43
44

ON THE TRANSCENDENCE OF γ AND e^γ. I

C.L. Stewart

1. INDUCTION

The purpose of this note is to fill a much needed gap in the literature [2]. We intend to establish, by the implicit use of Siegel's lemma, the following result:

<u>THEOREM 1</u>. *At least one of the two numbers γ and e^γ is transcendental.*
Here

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

is Euler's constant. It was said that G.H. Hardy was willing to give up his chair in mathematics in favour of any person who could prove the irrationality of γ. We remark that by employing ideas similar to those used in the proof of Theorem 1 we are able to prove that at least one of the two numbers γ and e^γ is irrational. This result, surely worth a chairleg, seems to involve the introduction of some rather sophisticated ideas (see e.g. [1] and [4]) and for this reason we have decided to defer its proof until the third paper in this series.

I should like to thank H.W. Lenstra Jr. for his constant encouragement, his fulsome praise and his careful scrutiny of this paper for errors. However any errors or mispints which remain are the solo reprehensibility of the author.

2. PROOF OF MAIN THEOREM 1

For technical reasons we require the following special case of a result due to Lindemann: If a is a real algebraic number with $a \neq 0$ then e^a is transcendental. For a proof see p.17 of [3]. This reduces the problem to one of establishing that γ is real and that $0 < |\gamma| < \infty$. We first observe that $|\gamma| < \infty$ since γ is Euler's constant and plainly all constants are finite.

This observation allows us to show that $\gamma = \bar{\gamma}$, where the bar denotes complex conjugation, and thus that γ is real. By dominated convergence we have

$$\bar{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n}\right)$$

where the complex conjugation is taken inside the limit, and this

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = \gamma$$

as required. Finally we must prove that γ is non-zero. Writing γ in the form

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-z}-e^{-\frac{1}{z}}}{z}\,dz$$

we see immediately that it is non-zero. This brings the proof and, since the reader need read no further, perhaps also the reader to a halt.

REFERENCES

[1] M. Bulgakov, The Master and Margarita, 1938, English translation, London 1967.

[2] R.L. Graham, Personal communication, 1977.

[3] C.L. Siegel, Transcendental Numbers, Princeton, 1949.

[4] J.D. Watson and F.H.C. Crick, Molecular Structure of Nucleic Acids, Nature, 4356, 1953, pp. 737-738.

OVER EEN VRAAG VAN BASS

Jan R. Strooker

1. De Steinberg groep.

Zij A een ring met 1. De ondergroep $E(n,A) < GL(n,A)$ wordt voortgebracht door de elementaire matrices $e_{ij}(a)$ voor alle $a \in A$, $1 \leq i \neq j \leq n$, waarbij $e_{ij}(a)$ de $n\times n$-matrix is met enen op de hoofddiagonaal, a op de (i,j)-e plaats en nullen overal elders. Deze elementaire matrices voldoen aan enkele welbekende betrekkingen. Steinberg beschouwde een groep $ST(n,A)$ die deze betrekkingen in abstracto nabootst. Haar voortbrengers noemen we $x_{ij}(a)$, $a \in A$, $1 \leq i \neq j \leq n$ en de definiërende *Steinberg relaties* zijn voor $n \geq 3$

$$x_{ij}(a)x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b) \qquad a,b \in A$$

en

$$[x_{ij}(a),x_{k\ell}(b)] = \begin{cases} 1 & \text{als } i \neq \ell,\ j \neq k \\ x_{i\ell}(ab) & \text{als } i \neq \ell,\ j = k. \end{cases}$$

Hier en verder schrijven we $[u,v]$ voor de commutator $uvu^{-1}v^{-1}$. Dan bepaalt de toevoeging $x_{ij}(a) \mapsto e_{ij}(a)$ een epimorfisme (= groepshomomorfisme op) $\varphi(n)$: $ST(n,A) \twoheadrightarrow E(n,A)$ en Ker $\varphi(n)$ meet kennelijk de "extra" betrekkingen waaraan de elementaire matrices $e_{ij}(a)$ voor de gegeven ring A voldoen.

We bedden nu $E(n,A)$ in in $E(n+1,A)$ door iedere matrix te randen met een één op de hoofddiagonaal en nullen elders. Dan geldt

$$1 = E(1,A) < E(2,A) < \ldots < E(n,A) < E(n+1,A) < \ldots < \bigcup_{n=1}^{\infty} E(n,A) = E(A),$$

de elementaire groep. De *Steinberg groep* $ST(A)$ definiëren we als boven, behalve dat n nu onbegrensd is. Weer wordt een epimorfisme φ: $ST(A) \twoheadrightarrow E(A)$ gegeven door $\varphi(x_{ij}(a)) = e_{ij}(a)$. Milnor schreef Ker $\varphi = K_2(A)$ en bewees

<u>Stelling 1</u> [6,Th.5.1].

Voor elke ring A is $K_2(A)$ het centrum van de groep ST(A).

In het bizonder is $K_2(A)$ abels.

Het is gemakkelijk om specifieke elementen van $K_2(A)$ aan te geven. Neem twee commuterende matrices X en Y in E(A), lift tot $\hat{X}$ resp. $\hat{Y}$ in ST(A) en definiëer $X * Y = [\hat{X},\hat{Y}] \in ST(A)$. Merk op dat deze definitie eenduidig is omdat als ook $\varphi(X') = X$ dan $X' = XZ$ met $Z \in K_2(A)$ en dus centraal. Tevens geldt $\varphi(X * Y) = [X,Y] = 1$ dus leeft Milnors commutator $X * Y$ in $K_2(A)$ [6,§8].

Bass heeft gevraagd [1, Problem 3] :

(B) Brengen de Milnor commutatoren $X * Y$ altijd de groep $K_2(A)$ voort?

De vraag wordt gerechtvaardigd door het geval van een lichaam F. Als $u,v \neq 0$ in F, liggen de matrices $X = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $Y = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & v^{-1} \end{pmatrix}$ in E(F). Men schrijft $\{u,v\} = X * Y$. Het is bekend dat deze zgn. *Steinberg symbolen* $\{u,v\}$, als u en v de multiplicatieve groep F^* van het lichaam doorlopen, de gehele groep $K_2(F)$ voortbrengen [6,Cor.9.13] [1]. Algemeen zal (B) bevestigend beantwoord worden voor ringen waarbij $K_2(A)$ voortgebracht wordt door Steinberg symbolen $\{u,v\}$ met u en v in A^*, zie [2]. Tot nog toe is bitter weinig bekend over "exotische" elementen in $K_2(A)$, d.w.z. elementen die geen product zijn van Steinberg symbolen. Enkele voorbeelden uit de getaltheorie vindt u in [3,Th.5.3]. De vraag luidt dus of zulke exotische elementen

---

[1]) Voor een algebraïsch getallenlichaam is elk element van $K_2(F)$ zelf(s) een Steinberg symbool, zoals het doelwit van deze bundel uiteenzette in een Utrechts seminarium anno 1973/74 [5].

toch misschien producten zijn van Milnor commutatoren $X * Y$, waarbij X en Y geen diagonaalmatrices hoeven te zijn.

2. Universele centrale uitbreiding van groepen.

Voor elke multiplicatief geschreven groep G noteren we $Z(G)$ voor zijn centrum. Een groepenepimorfisme $\psi\colon H \twoheadrightarrow G$ heet een *centrale uitbreiding* van G wanneer $\operatorname{Ker}\psi < Z(H)$. Zo'n uitbreiding $\varphi\colon \hat{G} \twoheadrightarrow G$ heet *universeel centraal* als er, gegeven een centrale uitbreiding ψ, altijd precies één homomorfisme λ bestaat zodat dit driehoekje commuteert:

$$\begin{tikzcd} \hat{G} \arrow[rr, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\lambda"'] & & G \\ & H \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} .$$

Als zo'n universele centrale uitbreiding van H bestaat, is deze natuurlijk, op isomorfie boven G na, uniek. Een groep G heet *perfect* als $G = [G,G]$, d.w.z. G wordt door commutatoren voortgebracht. Op grond van de Steinberg relaties zijn, bijvoorbeeld, $ST(A)$ en $E(A)$ steeds perfect. Een groep G heet *centraal gesloten* als elke centrale uitbreiding $\psi\colon H \twoheadrightarrow G$ splijt, d.w.z. een homomorfisme $\tau\colon G \to H$ toelaat zodat $\psi\tau = \mathrm{id}$.

Stelling 2 [6,Th.5.3].
Een centrale uitbreiding $\hat{G} \twoheadrightarrow G$ is universeel precies wanneer $\hat{G}$ perfect en centraal gesloten is.

Stelling 3 [6,Th.5.7].
Een groep bezit een universele centrale uitbreiding precies wanneer zij perfect is.

In deze vorm is de theorie van de universele centrale uitbreidingen afkomstig van Kervaire en Milnor. De bewijzen zijn elementair en rechtstreeks. Als $\varphi: \hat{G} \twoheadrightarrow G$ een universele centrale uitbreiding is, heet Ker φ soms de Schur multiplicator van G. Dit komt omdat Schur, zich beperkend tot eindige groepen en zonder eenduidigheid van λ te eisen, een sterk verwante theorie ontwikkelde. Maar wel driekwart eeuw geleden!

Verband met de Steinberg groep wordt gelegd in een volgend resultaat van Kervaire en Milnor.

Stelling 4 [6,Th.5.10].
Voor elke ring A beschrijft de korte exacte rij
$1 \longrightarrow K_2(A) \longrightarrow ST(A) \xrightarrow{\varphi} E(A) \longrightarrow 1$
de universele centrale uitbreiding van de elementaire groep E(A). Derhalve is $K_2(A)$ de Schur multiplicator van E(A).

Op grond van stellingen 1 en 4 zal een optimist Bass' vraag (B) nu als volgt verregaand generaliseren:

(0) Wordt het centrum van een perfecte centraal gesloten groep $\hat{G}$ voortgebracht door commutatoren? D.w.z. is elk element in $Z(\hat{G})$ product van elementen $[x,y] \in Z(\hat{G})$, $x,y \in \hat{G}$?

Zij $\varphi: \hat{G} \twoheadrightarrow G$ een uitbreiding. Dan is $\varphi(Z(\hat{G})) < Z(G)$ en als $\hat{G}$ perfect is, is G dit ook. Als φ nu bovendien centraal is, ziet men direct dat $\varphi^{-1}(Z(G)) = Z(\hat{G})$. Op grond van stellingen 2 en 3 is nu (0) gelijkwaardig met dezelfde vraag, ditmaal gesteld voor <u>alle</u> perfecte groepen.

Voorbeeld.

Zij F een lichaam en G = SL(2,F) de groep van 2×2-matrices met determinant 1. Dan is Z(G) = $\pm$ I en men rekent gemakkelijk na dat G perfect is, behalve wanneer F = $\mathbb{F}_2$ of $\mathbb{F}_3$. Als (O) waar is, moet -I zelf(s) een commutator zijn. Een tentamenopgave bij lineaire algebra zou kunnen luiden: Bewijs dat -I een commutator is precies wanneer de vergelijking $-1 = a^2 + b^2$ een oplossing heeft in F.

Dus (O) is waar in SL(2,F) als het lichaam, zoals de geleerden zeggen, van "Stufe" 1 of 2 is [4,§11.2] en bijvoorbeeld niet voor F = $\mathbb{R}$.

Aangezien in ieder eindig lichaam $-1 = a^2 + b^2$ zeker een oplossing heeft, ibid., hebben we hiermee (O) nog niet gefalsifieerd voor eindige groepen; zulks blijve de belangstellende lezer voorbehouden.

Voor een lichaam F geldt SL(n,F) = E(n,F). Dit doet vermoeden, dat indiën Bass' vraag (B) een bevestigend antwoord heeft, het weglopen van de index n naar oneindig een rol speelt.

[1]. R.K.Dennis & M.R.Stein, The functor K_2: a survey of computations and problems, Algebraic K-theory II, Battelle Institute Conference 1972, Lecture Notes in Mathematics 342, Springer, Berlin etc. 1973, pp.243-280.

[2] R.K.Dennis & M.R.Stein, K_2 of radical ideals and semilocal rings revisited, ibid. pp.281-303.

[3] R.K.Dennis & M.R.Stein, K_2 of discrete valuation rings, Advances in Math.18 (1975), pp.182-238.

[4] T.Y.Lam, The algebraic theory of quadratic forms, Mathematics Lecture NOtes Series, Benjamin, Reading Mass., 1973.

[5] H.W.Lenstra Jr., K_2 of a global field consists of symbols, Algebraic K-theory, Evanston 1976, Lecture Notes in Mathematics 551, Springer, Berlin etc., 1976, pp.64-73.

[6] J.Milnor, Introduction to algebraic K-theory, Annals of Mathematics Studies 72, Princeton University Press, Princeton N.J.1971

HET WIJNPROBLEEM VAN OOM JAN

Rob Tijdeman

Mijn eerste ontmoeting met de familie Lenstra, en in het bijzonder met jou vond mijn halve leven geleden plaats in Groningen. Ik zat in de vijfde klas van het Barlaeus Gymnasium te Amsterdam en maakte deel uit van het volleybalteam van die school. Regelmatig gingen we naar andere scholen om wedstrijden te spelen. En éénmaal per jaar gingen we met twintig jongens en meisjes naar een plaats in Nederland om in een tournooi met meer dan twintig andere gymnasia de eer van onze school te verdedigen. Tijdens dit tournooi werd op verschillende terreinen gestreden: de tennis- en de athletiekbaan, het zwembad, het hockey- en volleybalveld. Voor onze school stond het volleyballen centraal, de rest was bijzaak. Dus werden er zes jongens en zes meisjes uitgekozen voor de volleybalteams, en de overige acht op grond van hun tennis- of zwemkwaliteiten. Het athletiek- en het hockeyteam werd samengesteld uit het dan beschikbare materiaal, en zo kwam het dat ik ongetraind de 100 m, de 800 m, de veldloop en het kogelstoten voor mijn rekening nam en voor het eerst van mijn leven hockeyde. Dat hockeyen was geen succes; we verloren vrijwel alle wedstrijden. Athletiek ging aanzienlijk beter; ik eindigde steeds als goede middenmoter. Toen de eindstand bekend gemaakt werd, bleken alleen de eerste zes aankomenden punten te krijgen. Dientengevolge had ik door goed mijn krachten te verdelen geen punt verdiend.

Elk jaar werd zo'n tournooi door het plaatselijke gymnasium georganiseerd, en in dat jaar had het gymnasium in Groningen de organisatie op zich genomen. Alle deelnemers werden bij ouders ondergebracht. Met nog een Amsterdammer kon ik slapen in het grote herenhuis van de familie Lenstra, bestaande uit man, vrouw, vijf zonen en een dochter. Slechts flarden herinneringen zijn me bijgebleven, en ik vraag me af in hoeverre ze juist zijn.(Om redenen waarover Freud zich druk gemaakt heeft, blijkt Jan Karel zich te herinneren dat ik hem omverreed, maar is dit voorval geheel uit mijn geheugen verdwenen.) Ik mocht de fiets van mijnheer Lenstra gebruiken, een ouderwetse, onverwoestbare herenfiets. Zo kon ik alle wedstrijden bijwonen en ook 's avonds met mijn schoolgenoten optrekken. Maar ik was graag bij de familie Lenstra thuis, waar het even gezellig en druk was als bij ons thuis. En bovendien kon ik wat horen over de mogelijkheden om wiskunde te studeren, iets wat ik op dat moment vaag van plan was. Want mijnheer Lenstra doceerde wiskunde. En mevrouw Lenstra, die bij alle drukte ook nog colleges liep, had een broer die hoogleraar in de wiskunde in Amsterdam was. Ik zou Professor de Groot wel leren kennen als ik wiskunde zou gaan studeren. De kinderen, die op het gymnasium en de basisschool zaten, werden thuis al regelmatig met wiskundeproblemen geconfronteerd. En, zo vertelde mijnheer Lenstra trots, verschillende van hen hadden wiskundige aanleg, maar er was er één buitengewoon begaafd, zijn naamgenoot.

In zo'n gezellig gezin komen ook regelmatig gasten. Eén van de bezoekers van die week was "Oom Jan". Een van zijn grote hobby's paste wonderwel in het gezin Lenstra: hij strooide voortdurend met wiskundige problemen om zich heen. Ik werd ook bij het oplossen betrokken, en omdat dit voor mij een nieuwe ervaring was, maakte het een diepe indruk op mij. Eén probleem is mij bijgebleven, niet omdat het zo moeilijk was, maar omdat ik erg houd van problemen die oplosbaar zijn, hoewel er ogenschijnlijk niet voldoende gegevens zijn. Het luidde als volgt: ik heb een fles rode en een evengrote fles witte wijn. Ik doe een bekertje vol rode wijn in de fles met witte wijn, schud deze, en doe vervolgens een beker vol uit deze fles in de fles met rode wijn. Zit er nu meer rode wijn in de rode-wijn-fles dan witte wijn in de witte-wijn-fles of andersom? Omdat ik een wijnprobleem bij een promotie erg toepasselijk vind, maar de beperking tot twee flessen wellicht te restrictief is, zou ik de promoto het volgende gegeneraliseerde Oom Jan-probleem willen voorleggen: Er zijn n flessen wijn, $n \geq 3$, genummerd van 1 tot en met n. Ik doe een beker vol van fles 1 in fles 2, schud deze goed, doe een beker vol van fles 2 in fles 3 en ga zo door, tot ik uiteindelijk een beker vol gedaan heb van fles n in fles 1. Is het nu mogelijk door eindig vaak een beker vol van de ene fles in de andere te doen, een toestand te bereiken, waarin de hoeveelheid wijn in fles j die oorspronkelijk afkomstig is uit fles j voor $j = 1,2,\ldots,n$ gelijk is? Om de flauwe oplossing van alles bij elkaar doen, goed schudden en eerlijk verdelen uit te sluiten, stellenwe als nevenvoorwaarde dat de inhoud van een fles gelijk is aan de oorspronkelijke inhoud aan wijn plus de inhoud van de beker. Ik hoop dat je de verleiding zal kunnen weerstaan je oplossing experimenteel te controleren, en dat je nog vele jaren van wiskunde en wijn zult genieten.

BESTE HENDRIK

Robert W. van der Waall

Groot-Groningen, 1-4- 2.11.7.13

Beste Hendrik,

Ter gelegenheid van je 25-jarig doctor-jubileum wil ik je hierbij hartelijk feliciteren. Tevens wil ik je hierbij deelgenoot maken van de ontdekking welke de amerikaanse hoogleraar van nederlandse oorsprong Wallter Robertsz aan het begin van dit jaar heeft gedaan.

Zoals je weet stonden er aan het begin van dit milennium nog twee beroemde problemen open, te weten het Fermat probleem en het Riemann-vermoeden aangaande $\zeta(s)$. Nadat vorig jaar het Fermat probleem door o.a. Hosiah Labbash uit Beiroet was opgelost (voor de Fermat-priemexponent $p = 2^{2^{2^5}} + 1$ bestaat er minstens één oplossing, die na twee uur rekenen op de computer DOLLY werd ontdekt, nl. in de buurt van het super Skewes-getal $10^{10^{10^{340}}} = z$, met $x^p + y^p = z^p$) , vond Wallter Robertsz in samenwerking met de deen Haak Appelson, dat het Riemann-vermoeden bijna altijd juist is. Ik zal hier in het kort hun werkwijze uiteenzetten.

In de zeventiger jaren had Norman Levinson al bewezen dat ongeveer 9/10 van het aantal nulpunten van $\zeta(s)$ in de kritische strip inderdaad op de lijn met vergelijking $Re(s) = \frac{1}{2}$ ligt . Het getal 9/10 was eigenlijk van een leerling van Levinson afkomstig, nl. van Boss Embden uit Hamburg. In de tachtiger en negentiger jaren volgden fijnere schattingen met behulp van het Gramm-procédé, zoals in de 10^e druk van Edwards, The Riemann Zeta Function, Acad. Press, in 1998 beschreven is. Dat uiteindelijk ook de Baker-methoden konden worden aangewend, kwam als een volslagen verrassing voor iedereen. Toen dit in 1999 bekend werd, kon men effectief aantonen, dat vanaf een effectief berekenbare positive constante ordinaat A, alle nulpunten in het door A bepaalde bovenstuk van de kritische strip inderdaad op de lijn $Re(s)=\frac{1}{2}$ liggen. Via de abelse sommatietruc was het toen een kwestie van tijd, nl. tot in dit voorjaar, om de overige onzekere nulpunten in $0 < |Im(s)| < A$ (zo'n 1852 stuks) te lokaliseren en van die nulpunten blijken ze alle, op vier na, op de lijn $Re(s)=\frac{1}{2}$ te liggen. De coordinaten van de vier punten in kwestie zijn ($\overset{1/4}{3/4}$, $\pm e^{\sqrt{\frac{1}{2}(163)}}$). Het is eigenlijk eigenaardig dat deze punten gemist werden in de tabellen van Lehmer, Schönfield en Rosser. Ik denk dat toen de computer verkeerd geprogrammeerd was. Overigens, het getal 163 heeft hier inderdaad te maken met bekende negende diskriminant-getal van Gauss-Stark.

Een ander vermoeden, dat nog open staat, is het karakter-extensie-probleem van eindige groepen . Ik ben er hard aan bezig en hoop je binnenkort de resultaten te kunnen toezenden.

Met vriendelijke groeten,

Robert W. van der Waall

BESTE HENDRIK

Robert W. van der Waall

Groot-Groningen, 1-4- 2.11.7.13

Beste Hendrik,

Ter gelegenheid van je 25-jarig doctor-jubileum wil ik je hierbij hartelijk feliciteren. Tevens wil ik je hierbij deelgenoot maken van de ontdekking welke de amerikaanse hoogleraar van nederlandse oorsprong Wallter Robertsz aan het begin van dit jaar heeft gedaan.

Zoals je weet stonden er aan het begin van dit milennium nog twee beroemde problemen open, te weten het Fermat probleem en het Riemann-vermoeden aangaande $\zeta(s)$. Nadat vorig jaar het Fermat probleem door o.a. Hosiah Labbash uit Beiroet was opgelost (voor de Fermat-priemexponent $p= 2^{2^{2^5}} + 1$ bestaat er minstens één oplossing, die na twee uur rekenen op de computer DOLLY werd ontdekt, nl. in de buurt van het super Skewes-getal $10^{10^{10^{340}}} = z$, met $x^p + y^p = z^p$) , vond Wallter Robertsz in samenwerking met de deen Haak Appelson, dat het Riemann-vermoeden bijna altijd juist is. Ik zal hier in het kort hun werkwijze uiteenzetten.

In de zeventiger jaren had Norman Levinson al bewezen dat ongeveer 9/10 van het aantal nulpunten van $\zeta(s)$ in de kritische strip inderdaad op de lijn met vergelijking $Re(s) = \frac{1}{2}$ ligt . Het getal 9/10 was eigenlijk van een leerling van Levinson afkomstig, nl. van Boss Embden uit Hamburg. In de tachtiger en negentiger jaren volgden fijnere schattingen met behulp van het Gramm-procédé, zoals in de 10^e druk van Edwards, The Riemann Zeta Function, Acad. Press, in 1998 beschreven is. Dat uiteindelijk ook de Baker-methoden konden worden aangewend, kwam als een volslagen verrassing voor iedereen. Toen dit in 1999 bekend werd, kon men effectief aantonen, dat vanaf een effectief berekenbare positive constante ordinaat A, alle nulpunten in het door A bepaalde bovenstuk van de kritische strip inderdaad op de lijn $Re(s)=\frac{1}{2}$ liggen. Via de abelse sommatietruc was het toen een kwestie van tijd, nl. tot in dit voorjaar, om de overige onzekere nulpunten in $0<|Im(s)|< A$ (zo'n 1852 stuks) te lokaliseren en van die nulpunten blijken ze alle, op vier na, op de lijn $Re(s)=\frac{1}{2}$ te liggen. De coordinaten van de vier punten in kwestie zijn ($\overset{1/4}{3/4}$, $\pm e^{\sqrt{\frac{4}{3}(163)}}$). Het is eigenlijk eigenaardig dat deze punten gemist werden in de tabellen van Lehmer,Schönfield en Rosser. Ik denk dat toen de computer verkeerd geprogrammeerd was. Overigens,het getal 163 heeft hier inderdaad te maken met bekende negende diskriminant-getal van Gauss-Stark.

Een ander vermoeden,dat nog open staat,is het karakter-extensie-probleem van eindige groepen . Ik ben er hard aan bezig en hoop je binnenkort de resultaten te kunnen toezenden.

Met vriendelijke groeten,

Robert W. van der Waall

WISKUNDE EN SAMENLEVING: EEN METHODOLOGISCHE STUDIE

T.J. Wansbeek

1. Inleiding

Indachtig de talloze gesprekken die de schrijver met H.W.LENSTRA mocht hebben over het vraagstuk van de maatschappelijke relevantie van de wetenschap (een zaak waarover Hendrik, zoals ik hem nu verder zal noemen, een zo uitgesproken en degelijke mening heeft), wordt de volgende notitie over het spanningsveld tussen wiskunde en samenleving in dank aan hem opgedragen. Uitganspunt daarbij is het bepalen van de waarde van een van de meest boeiende mathematische entiteiten, de grootheid pi (π). In de volgende paragrafen wordt op dit oude probleem nieuw licht geworpen.

2. Een korte geschiedenis

In de loop van 4000 jaar onderzoek is de waarde die aan π wordt toegekend voortdurend geëvolueerd. De ontwikkeling ging van 3 via 22/7 en $\sqrt{10}$ naar zoiets als 3,14. Over deze laatste waarde schijnt intussen een soort communis opinio te zijn ontstaan. Een bezwaar tegen al dit onderzoek is dat het op deductieve basis is geschoeid en dus, vanuit maatschappelijke optiek, als steriel moet worden beschouwd. Bovendien worden premissen en doelstellingen van dergelijk onderzoek zelden of nooit geëxpliciteerd.

3. Een beleidsrelevante methode

Volgens de micro-economische theorie (Van Praag, 1968) waardeert iemand met een geldinkomen ad f y.- dit inkomen volgens de waarderingsfunctie:

$$(1) \qquad U(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{1}{\alpha}\, e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln \alpha-\mu}{\sigma}\right\}^2} d\alpha\ ,$$

waarin μ en σ parameters. De waarde van μ en y per respondent kunnen met behulp van moderne enquêtetechnieken worden vastgesteld. Bovendien leert introspectie dat $\sigma=\frac{1}{2}$. Via niet-lineaire regressie met behulp van de methode van de grootste aannemelijkheid kunnen we nu op grond van (1) een rake schatter $\hat{\pi}$ voor π bepalen. Enige uitkomsten (op grond van 2952 waarnemingen) voor verschillende inkomensniveau's zijn in Tabel 1 in tien decimalen vermeld. De uitkomsten zijn alle significant verschillend van nul.

4. Slotwoord

Graag willen wij nogmaals de relevantie van de uitkomsten van dit onderzoek benadrukken. Waar het maatschappelijk gezien immers om gaat is niet hoe groot volgens de deskundigen π is, maar om de vraag hoe hij door de gewone man, de "man in de street", wordt ervaren. Daarom zouden wij onze schattingen als "democratisch" willen aanmerken, dit om het autoritaire karakter van de nu nog in gebruik zijnde π's te benadrukken. Dit democratische karakter wordt nog versterkt door de duidelijke suggestie uit Tabel 1 dat de gebruikelijke π de π van de hogere inkomensklassen is.

Litteratuur

Van Praag, B.M.S. (1968) Individual Welfare Functions and Consumer Behaviour. North-Holland, Amsterdam.

Tabel 1. Verband tussen inkomen en π

Inkomen	$\hat{\pi}$	t-waarde
10.000	2,7948591386	6,21
20.000	2,8152296546	6,22
30.000	3,0266345192	7,52