CHARAKTERISIERUNG DES MATHEMATISCHEN DENKENS - SZENARIEN MIT GYMNASIASTEN UND STUDENTEN UNTER VERWENDUNG VON THEMEN DER GRUPPENTHEORIE

PAMELA REYES-SANTANDER

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Augsburg

Universität
Augsburg
University

CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO - ESCENARIOS CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS Y DE LICEO UTILIZANDO TEMAS DE LA TEORÍA DE GRUPOS.

PAMELA REYES-SANTANDER

Disertación para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la Facultad de Matemáticas y Ciencias de la Universidad de Augsburgo, Alemania

Universität Augsburg University

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Augsburg, Deutschland
vorgelegt von Pamela Reyes-Santander aus Santiago, Chile.
Juli, 2012
Betreuer der Arbeit:
Prof. Dr. Volker Ulm, Universität Augsburg, Deutschland
Prof. Dr. Jorge Soto-Andrade, Universidad de Chile, Chile
Tag der Disputatio: 02 Juli 2012

Disertación para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la Facultad de Matemáticas y Ciencias de la Universidad de Augsburgo, Alemania.
Presentado por Pamela Reye-Santander, nacida en Santiago de Chile.
Julio del 2012
Directores de Tesis:
Prof. Dr. Volker Ulm, Universidad de Augsburgo, Alemania
Prof. Dr. Jorge Soto-Andrade, Universidad de Chile, Chile
Día de la Defensa: 02 de julio 2012.

„Wir sind, was wir denken. Alles, was wir sind, entsteht aus unseren Gedanken. Mit unseren Gedanken formen wir die Welt.“

Siddhartha Gautama.

„Nosotros somos lo que nosotros pensamos. Todo lo que nosotros somos, está formado por nuestros pensamientos. Con nuestros pensamientos damos forma al mundo.”

Siddhartha Gautama.

Para Martin, Amaya y Ainara, por su comprensión, por todo el apoyo y amor que me han brindado cuando más lo necesitaba. Para mi madre, que siempre me dejo mirar con las manos y para mi maestro y sus metáforas .

Agradecimientos

Gracias al Prof. Dr. Ulm, el cual me dio todo el valor para empezar y terminar esta investigación, más aún, me brindo la posibilidad de trabajar como docente en el departamento de didáctica de la matemática, de la Universidad de Augsburgo, Alemania. Muchas gracias, por ser mi "Doktorvatter" y por todo el apoyo con todos los medios para exponer mis avances a nivel internacional.

Continuo con el Prof. Dr. Soto-Andrade, de la Universidad de Chile, con quien hablo de matemática, educación matemática, de metáforas y de la vida. Gracias, por rehacer más de una vez su agenda para encontrarnos en algún lugar del mundo. Gracias por aceptar, por segunda vez, la correción de uno de mis trabajos.

Quiero agradecer a toda la gente que me han ayudado en lo más concreto de este trabajo, a la Dr. Motzer de la Universidad de Augsburgo, Alemania; a Elisabeth Ramos-Rodriguez, docente de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, a los profesores Magnus Wucher, Horst Weber, en particular al profesor y colega Sr. Prof. Dr. Schneider, de la Universidad de Augsburgo, Alemania.

A los psicólogos que estuvieron detrás de este trabajo, un especial agradecimiento por responder a mis dudas, a la psicóloga social Sra. Paula Barahona, al psicólogo educativo Prof. Dr. Markus Dresel, de la Universidad de Augsburgo, Alemania y al psicólogo y metodólogo Sr. Pablo Cáceres Serrano, del Programa BETA de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Al grupo del CIAE Chile (Centro de Investigación Avanzada en Educación), por colaborar con este proyecto y al programa DAAD (Deutscher Akademischer Austausch Dienst), que me otorgó una beca durante seis meses para terminar este gran proyecto.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Zusammenfassung

Einführung

Die Motivation für diese Arbeit stammt aus zwei unterschiedlichen Quellen. Die erste ist vom Typ „Arbeitserlebnis“ und basiert auf der inneren Unruhe, die aufkommt, wenn man Personen Mathematik lehrt, die nicht lernen möchten, oder vielleicht nicht an Mathematik denken möchten, oder kein Interesse haben, oder die Interesse haben, aber nicht in der Lage sind, dieses richtig umzusetzen, usw. Aus dieser Unruhe entstand das Interesse, die Zusammenhänge zwischen Denken und Lernen und insbesondere den Thesen “Jedes Mal, wenn man denkt, lernt man” und “Jedes Mal, wenn man lernt, denkt man” zu untersuchen. Daraus ergibt sich die erste Frage mit der sich die vorliegende Arbeit beschäftigt aus dem Begriff des Denkens: „Was ist Denken?“ und insbesondere „Was ist mathematisches Denken?“, es wird dabei insbesondere berücksichtigt, dass das Lernen im Prozess des Denkens enthalten ist.

Die zweite Motivationsquelle stammt aus Lehrveranstaltungen über Gruppentheorie in der mathematischen Ausbildung von zukünftigen Lehrkräften, einem Lehrinhalt, der keine unmittelbar einsichtige Anwendung in den Lehrplänen der Gymnasien hat. Für mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasien in Bayern war im nicht mehr gültigen Lehrplan[1] von 1990 ein Abschnitt über Gruppen im Additum für die 11. Jahrgangsstufe enthalten. Im derzeitigen Lehrplan[2] für Gymnasien in Bayern wird das Thema „Gruppen“ nicht explizit erwähnt, gleichwohl können in diesem neuen Lehrplan Themen für Seminarfächer frei gewählt werden. Aufgrund dieser Änderung ergab sich die Notwendigkeit, folgende Frage zu beantworten: Warum sollte man am Gymnasium mit Elementen der Gruppentheorie arbeiten? Bei dieser Frage kommt man auf mindestens vier Antworten: Im Zusammenhang mit 1. dem Erlernen struktureller Aspekte der Mathematik, 2. Gleichungen und ihren Lösungen, 3. der Physik und 4. den Symmetrien. Diese vier Argumente dürften für den Studenten nicht ausreichen, der keine Zeit hat, oder vielmehr, der nicht daran interessiert ist, Gruppentheorie zu beherrschen, und der meint, nur die Mathematik zu brauchen, die er in seiner beruflichen Zukunft lehren wird.

---

[1] *Lehrplan des Jahres 1990 für das Gymnasium in Bayern KWMB1 I 1990 So.-Nr. 3 S. 125 ff; Jahrgangsstufe 11, S. 1220.*
[2] *Lehrplan des Jahres 2009 für das Gymnasium in Bayern, Nr. II.3-5 O 1323.1.1/28/5.*

Somit entstehen weitere Fragen, wie z.B.: Warum sollten Studierende Gruppentheorie lernen? Werden Studierende in ihrem zukünftigen Beruf als Lehrer/-in etwas über Gruppentheorie lehren? Auch wenn Dozenten versuchen, mit den vier genannten Möglichkeiten Argumente für eine Antwort auf diese Fragen zu liefern, ist den Studenten die Relevanz von Gruppentheorie oftmals nicht klar, denn sie finden keine Beziehung von den Inhalten, die im Fach Algebra behandelt werden, zu ihrer zukünftigen Arbeit. Hierdurch kommt man zu der Frage, die das mathematische Denken mit Gruppentheorie in Beziehung bringt: Existiert eine besondere Form des mathematischen Denkens, das sich bei der Arbeit mit Themen der Gruppentheorie entwickelt?

Dadurch und durch die Motivationen ergaben sich zwei Ziele für diese Arbeit. Das erste Ziel war, das ***mathematische Denken zu charakterisieren*** und damit zu versuchen, die von Wittenberg (1963, S. 53) gestellte Frage "Was ist eigentlich Mathematik und mathematisches Denken?" zu beantworten. Dies geschah unter der Betrachtung, dass Mathematik ein formales System und Produkt kognitiver Prozesse (Tall, 1991, 1996) ist, und man in diesen Prozessen Dimensionen entdecken kann, zu denen man auch die Kommunikationsmittel zählt. Das zweite Ziel dieser Arbeit war, ***Kausalitätsbeziehungen zwischen dem Erlernen von Elementen der Gruppentheorie und den Dimensionen des mathematischen Denkens*** herzustellen. Zu diesem Ziel wurde ein Anwendungsmodell zu der durchgeführten Charakterisierung erstellt, welches als theoretischer Rahmen und als Werkzeug für die Datenanalyse diente.

Diese Arbeit betrachtet Beiträge aus verschiedenen Bereichen, wie z.B. der kognitiven Neurowissenschaft, der kognitiven Psychologie, der Entwicklungspsychologie, der pädagogischen Psychologie und der Mathematikdidaktik. Mittels dieser Beiträge wurde eine Charakterisierung des mathematischen Denkens (MD) in vier Dimensionen erstellt. Diese sagt aus, welches die Denktypen und Fähigkeiten sind, die im Mathematikunterricht gefördert und entwickelt werden, wenn man den Unterricht auf Grundlage des Denkens und des Lernens gestaltet. Zum anderen wurden didaktische Überlegungen zur Behandlung der Grundkonzepte der Gruppentheorie nach Wittenberg (1963) angestellt, der Beispiele zur Verfügung stellt, die im Zusammenhang mit der Geometrie stehen, und nach Bigalke (1984), der Bilder zur Behandlung der Gruppentheorie vorschlägt, insbesondere die Ornamente, und nach Olfos (1981), der die Arbeit mit konkretem Material einbezieht.

Bevor fortgefahren wird, ist es notwendig, die Auffassung von Mathematik, die in dieser Arbeit verwendet wurde, zu erklären. Diese wurde auf Grundlage von Aussagen diverser Forscher (Alagia, Bressan und Sadovsky, 2005; Biehler, Scholz, Sträßer und Winkelmann, 1994; Davis und Hersh, 2003; Eves, 1983; Freudenthal, 1974, 1979; Leuders, 2003; Núñez, 2008; Parra und Saiz, 1995; Schoenfeld, 1994) formuliert und ist kurz gesagt folgende: *Mathematik ist eine konzeptuelle Domäne. Sie ist die Wissenschaft von Mustern. Sie ist die Wissenschaft von Menge und Raum; geführt von der Anordnung und einer Struktur. Mathematik befasst sich mittels einer logisch-formalen Konstruktion mit der Symbolik in Bezug auf Menge und Raum. Vor allem aber ist Mathematik eine Konstruktion des Menschen, eine kulturelle Produktion, die ideale Wesen schätzt und deren Studiengegenstand abstrakte Konzepte sind, wobei hypothetisch-deduktive Methoden und eine Universalsprache zu ihrer Darstellung (intern und extern) und zu ihrer Organisation als Axiomen System verwendet werden. Durch all das Genannte ist sie Teil allen menschlichen Handelns.*

Mit diesem Konzept über Mathematik und dem Tatbestand, dass Mathematik eine menschliche Aktivität ist, kann gesagt werden, dass die Prozesse und die Entwicklung von Repräsentationen den gleichen Stellenwert haben wie die Verifikation und die Korrektur von Affirmationen. Das heißt, in diese Mathematikauffassung werden verschiedene Aspekte des menschlichen Handelns einbezogen.

Ferner ist es diese Vorstellung von Mathematik, mittels der wir zur folgenden Auseinandersetzung mit der Frage von Wittenberg (1963) und gleichzeitig zu unserem zweiten Forschungsziel kamen. Hierfür wurde ein Arbeitsplan erstellt, dessen praktische Arbeit fünf Etappen umfasste: Literatursammlung, Ausarbeitung der Fragebögen und der Unterrichtssequenzen für Schüler und Studenten, Durchführung der Befragungen und der Unterrichtssequenzen, Datenerfassung und deren Auswertung und zum Schluss die schriftliche Ausarbeitung und das Ziehen der Schlussfolgerungen. Die schriftliche Arbeit umfasst 7 Kapitel, von denen die ersten vier dem ersten Ziel entsprechen, zwei weitere dem zweiten Ziel und das letzte den Schlussfolgerungen. Im Folgenden wird jedes von ihnen mit den notwendigen Definitionen und seinen bedeutendsten Inhalten vorgestellt.

Kapitel 1: Aktueller Forschungsstand

Dieses Kapitel bezieht sich auf den aktuellen Forschungsstand über das mathematische Denken (MD). Es gibt verschiedene Annäherungsformen an das MD, eine von ihnen stammt aus Forschungsarbeiten über die Hochbegabung (Castelló und Batle, 1998; Gardner, 2009; Guilford, 1967; Heller und Ziegler, 2007; Marland, 1972; Mönks und Van Boxtel, 1988, 1992; Mönks und Ypenburg, 2005; Thurstone, 1924; Sternberg, 1985, 1997). Diese berücksichtigen in ihren Modellen und Theorien Elemente, die mit dem Denken, insbesondere mit dem mathematischen Denken zusammenhängen. Aus diesem Forschungsbereich werden einige Definitionen und Konzepte berücksichtigt, die schließlich für eine Formung des Begriffs „mathematisches Denken" relevant sind. Unter ihnen stechen die Problemlösungsfähigkeit, die Fähigkeit zur Problemerkennung, die Phantasie, die Flexibilität, das Interesse, die künstlerisch-visuelle Fähigkeit und die Fähigkeit zur Darstellung, das Zahlenverständnis, das Sprachverständnis, das räumliche Vorstellungsvermögen, das Gedächtnis, die Vernunft, die analytische Fähigkeit, die Informationsverarbeitungsfähigkeit, die Fähigkeit zur Synthese, die sprachliche und die logisch-mathematische Fähigkeit hervor. Diese Definitionen und Konzepte wurden zunächst in zwei Haupttypen unterteilt: Dimension des Handelns und Inhaltsdimension.

Eine andere Annäherungsquelle an das mathematische Denken stammt aus den Arbeiten des experimentellen Psychologen David Katz[3] und des Mathematikers Felix Klein[4], Arbeiten, mit denen sie um 1910 begannen, und in denen sie das Thema der Konzeptentwicklung von Raum und Zahlen (Scholz, 1994) behandelten. Ihnen folgten die herausragenden Arbeiten von Piaget (Beth und Piaget, 1966), die von Klein und Poincaré[5] beeinflusst wurden, und in denen er versuchte, mittels Diskussionen unter Mathematikern die Frage "Was versteht man genau unter geometrischer Intuition?" (Scholz, 1994) zu beantworten. Auf Grund dieser Versuche folgte als Fortsetzungsarbeit im Jahre 1976 die Gründung der Psychologischen Gruppe für Mathematische Erziehung, bekannt durch ihre Abkürzung PME (Psychology in Mathematics Education), einer Arbeitsgruppe, in der die Beiträge von Fischbein über die Intuition (Biehler et al, 1994; Fischbein, 1975, 1981) und

[3] *David Katz (1884-1953), deutscher Psychologe.*
[4] *Felix Klein (1849-1925), deutscher Mathematiker.*
[5] *Henri Poincaré (1854-1912), französischer Mathematiker, theoretischer Physiker und Philosoph.*

von Freudenthal über Mathematik und Bildung (Freudenthal, 1974, 1979, 1987) eine wesentliche Rolle spielen.

Seit Studien (Schwank, 2003) über die Mathematikdidaktik die Psychologie und deren Konzepte beinhalten, wurde bei Mathematikdidaktikern Interesse dafür geweckt, sich damit zu beschäftigen, was Denken ist, um dadurch zu erfahren, woraus mathematisches Denken besteht. Somit kommt eine erste Annäherung aus der Akzeptanz der folgenden Behauptungen: "Jeder Mensch denkt anders" (Brunstig-Müller, 1997, S. 17). Jedes Individuum kann mathematisch denken und dieses Denken wird durch Widersprüche, Spannungen und Überraschungen ausgelöst (Mason, Burton und Stacey, 1982). Das mathematische Denken basiert auf dem Konstruktivismus. Aus der Konstruktion und dem Denken, das man produziert, entsteht ein Sinn für die Konzepte, Begriffe und Definitionen (Lesh und Kelly, 1994). Durch diese Behauptungen wird die Frage nicht beantwortet, sie geben nur Annäherungen. Diese Annäherungen leiten sich von z.B. folgenden Konzepten her: Der Wahrnehmung, der Aufmerksamkeit, des Gedächtnisses (Anderson, 1981), der Sprache (Hayes, 1995), der Planung, der Problemlösung (Engel, 1998), der Kommunikation (Sfard, 2008), der semiotischen Darstellungen (Duval, 2004), der Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, 1998), der konzeptuellen Metaphern (Araya, 2004; English, 1997; Lakoff und Johnson, 1999; Lakoff und Núñez, 2000; Sfard, 1991, 1994, 1997; Soto-Andrade 2006, 2007a), der mathematischen Strategien (Engel, 1998), der Variationen der Aufmerksamkeit (Mason, 1989, 2006), der Analogien (Araya, Calfucura, Jiménez, Aguirre, Palavicino, Lacourly, Soto-Andrade und Dartnell, 2010), der Metaphern und Bilder (Englisch, 1997). In diesem Sinne gibt es wichtige Arbeiten über die kognitive und didaktische Funktion von den konzeptuellen Metaphern in der Mathematik (English, 1997; Lakoff und Núñez, 2000; Presmeg, 1997; Sfard, 1991, 1994, 1997; Soto-Andrade, 2006, 2007a).

Bezüglich Modellen oder Charakterisierungen von mathematischem Denken möchten wir auf das Augsburger Modell (Ulm, 2010) aufmerksam machen, welches drei große Dimensionen oder Faktoren enthält: Prozessorientiertes Denken, inhaltsbezogenes Denken und den Informations-Verarbeitungsprozess im Zusammenhang mit Mathematik, und das Modell von Burton (1984), der ein Modell für das MD im Sinne von Verfahren, Prozessen und Dynamik vorschlägt.

Hinsichtlich des aktuellen Forschungsstands der Didaktik der Mathematik in Bezug auf Gruppentheorie wurden jene Arbeiten berücksichtigt, die eine kognitive Komponente haben, vor allem Arbeiten von Dubinsky, Datermann, Leron, Zazkis (1994), Hart (1994), Leron, Hazzan, Zazkis (1995) und Lars (2009), die Forschungen basierend auf einigen der folgenden Fragen durchführten: Wie viele Personen lernen bestimmte Themen der Gruppentheorie? In welcher Beziehung stehen Mathematikverständnis und allgemeines Abstraktionsvermögen? Wovon geht das Isomorphismus-Konzept aus? Wie könnte man die Gruppendefinition mittels der Symmetrien einer geometrischen Figur neu „erfinden"?

Kapitel 2: Menschliches Denken.

Mit den Informationen aus dem ersten Kapitel wurden Grunddefinitionen im Zusammenhang mit dem menschlichen Denken erstellt, wie z.B. für Denken, Mentale Repräsentation und Denkstile. Somit sind die in dieser Arbeit verwendeten Grundvorstellungen über das menschliche Denken folgende:

Menschliches Denken: Der Denkprozess (Asanger und Wenninger, 1999; Brusting-Müller, 1997; Funke, 2006; Margulies, 2000; Anderson, 1975), wird im Wesentlichen als eine interne aktive Beschäftigung betrachtet, die mittels interner Bilder unter Bezugnahme von internen Sprachbegriffen, bildlicher Darstellung und anderen mentalen Inhalten realisiert wird. Denken in diesem Zusammenhang hat den Zweck, neue Kenntnisse zu erhalten, und dies geschieht nur durch Aktivitäten, die keine automatisierten Routinen sind. Zum Zeitpunkt des Denkens benutzt man Symbole, Bilder und Bewegungen, die zueinander in Bezug gebracht werden (bewusst oder unbewusst). Zudem können die Symbole im Voraus festgelegte Regeln haben, oder diese Regeln können eigene Kreationen vom Individuum/von Individuen sein. Auf diese Weise schafft man eine abstrakte Denkwelt (Damerow, 1996) und eine persönliche Realität. Der Mensch denkt mittels Konzepten, die universelle und abstrakte Darstellungen der Objekte sind. Diese Symbole, Bilder und Konzepte stellen einen Tatbestand, ein Objekt und ein Aktion dar, die im Augenblick des Denkens in verbunden werden. Der Mensch denkt auch mittels Regeln, die als Äußerungen betrachtet werden, die Konzepte mit anderen verbinden.

Hier wird die Anerkennung von vier menschlichen Denkformen hervorgehoben: *Das logische Denken*, das sich der Schlussfolgerungen bedient und dann benutzt wird, wenn das Subjekt Rückschlüsse für Taten und/oder Hypothesen sucht. *Der*

Wahrscheinlichkeitsprozess, bei dem Induktionsbeziehungen auf zukünftige Ereignisse projiziert werden. *Die Problemlösung*, deren Denken auf einem Aktionsplan basiert und *das kreative Denken*, bei dem die neu hergestellten Konzepte Originale für das Subjekt oder die Gesellschaft sind (Funke, 2006).

Innere Bilder: Jedes Lebewesen reagiert auf eine Änderung in seiner Umgebung mit einer bestimmten Reaktion. Diese Reaktion zeigt, dass das Lebewesen die Veränderung wahrgenommen hat und diese Veränderung als eine Abweichung in seiner inneren Ordnung versteht (Maturana und Varela, 2007). Die Wahrnehmung ist eine Grundfähigkeit der Lebewesen, die eng mit der inneren Ordnung und somit mit seinen inneren Bildern über seine Umwelt verbunden ist. Änderungen von außen, die nicht die innere Ordnung des Lebewesens verändern, werden von ihm nicht wahrgenommen. Im Gegensatz dazu generiert sich ein inneres Bild der Veränderung, wenn diese wahrgenommen wird. Um diese Bilder zu identifizieren und zu verändern, ist der Mensch fähig, diese Bilder zu vergleichen, sowohl miteinander, als auch mit älteren (Hüther, 2009). Das Gehirn muss auf gewisse Weise „trainiert" sein, um die Umweltveränderungen wahrzunehmen. Je mehr Veränderungen wahrgenommen werden, desto mehr Möglichkeiten hat der Mensch, innere Bilder zu generieren (Spitzer, 2007). Der Mensch hat die Fähigkeit, neue Wahrnehmungen zu generieren und diese unter gewissen synaptischen Mustern in interne Bildern umzuwandeln, die sich im Gehirn verankern können und dies sind die Bilder, an die wir uns erinnern können und die im Gedächtnis gespeichert werden (Hüther, 2009; Spitzer, 2002). Man unterscheidet zwei Typen von innere Bildern: interne und externe. Die internen Bilder sind individuelle Produktionen. Unter diesen sind für diese Arbeit die sogenannten mentalen Repräsentationen von Bedeutung. Die äußeren Bilder werden von der äußeren Umwelt wahrgenommen und sind physische Symbole und Objekte, mit äußeren Normen, Grenzen oder Beschränkungen und vorgegebenen Dimensionen. Sie sind Produkt aus der Kultur, dem Sozialen und der Wirtschaft, z. B. semiotische Repräsentationen.

Mentale Repräsentationen: Eine mentale Repräsentation ist die Menge von Bildern/Vorstellungen in unseren „Köpfen". Sie ist ein Werkzeug, das Individuen haben, die vorhaben, die Entscheidung zu treffen, eine Reihe von Aktionen zu schaffen, die ihnen in ihrem Lernprozess helfen. Diese generiert das Individuum zum Zeitpunkt des Denkens. Solche Repräsentationen können Zeichnungen, Wörter, Sätze, Symbole, Laute, Gesten, usw. sein. Merkmale sind: Es gibt keine Regeln für ihre Bildung und/oder Erzeugung und jede mentale Repräsentation ist für das Thema gültig. Das Wichtigste der mentalen Repräsentation sind die Vorstellungen des Menschen, die er in der Weise zusammenstellt, dass sie mentale Modelle, im Sinne des Begriffs „Konzept“ ergeben. D.h. das Denken gibt die Form dafür an, was man ausdrücken möchte, indem Vorstellungen mit Bildern oder Symbolen konstruiert werden, die auf der Beobachtung, Wahrnehmung und Erfahrung basieren und die nach Roth (1989) durch den “persönlichen Reichtum” beeinflusst werden.

Semiotische Repräsentationen: Dies sind jene mentalen Produktionen, die aus Zeichen gebildet werden und die mittels natürlicher Sprache, algebraischen Formeln, Graphiken, geometrischen Figuren oder musikalischen Noten mitgeteilt werden können. Diese Mittel stehen dem Individuum zur Verfügung, um seine mentalen Repräsentationen zum Ausdruck zu bringen und sie somit anderen sichtbar, verständlich und mitteilbar zu machen (Duval, 2004). Einige Beispiele für semiotische Repräsentationssysteme sind: natürliche Sprache, Zahlenschrift, algebraische Schrift, geometrische Darstellung, Alltagssprache, Graphiken und Tabellen. Die externen Repräsentationen erfüllen drei Funktionen: Kommunikation, Objektivierung und Behandlung. Darüber hinaus sind semiotische Repräsentationen eine Unterstützung für die mentalen Repräsentationen.

Denkstile: Mit einem Denkstil verbindet man mit der Art und Weise, wie ein Subjekt sich einem Problem gegenüberstellt, wie er es betrachtet und wie es löst oder zu lösen versucht. Es ist zu betonen, dass Denkstile durch das soziale Umfeld beeinflusst werden und Bestandteil der Persönlichkeitsentwicklung sind. Durch das bisher erwähnte und im Hinblick auf das mathematische Denken werden in dieser Arbeit fünf Denkstile betrachtet (Amelang, Bartussek, Stemmler und Hagemann, 2006; Schwank, 2003; Sternberg, 1985): Das funktionale Denken, das formale Denken, das organisatorische Denken, das differenzielle Denken und das prädikative Denken. Hervorgehoben wird das funktionale Denken, das die Dynamik von Differenzen erkennt, welche während des Denkprozesses benutzt wird, um Elemente zu sortieren. Die Bewegung wirkt hier als Produktions-Kriterium.

Den prädikativen Denkstil beobachtet man in der Erkennung von Ähnlichkeiten und der Verwendung dieser zur systematischen Strukturierung von Elementen. In diesem Fall agiert die Ähnlichkeit als Kriterium für das Problemlösen, d. h. als Produktionskriterium in der Konfrontation mit einem Problem. Der formale Denkstil erkennt und benutzt Ziele in einer Situation. Das Individuum arbeitet mit Zielen und Zielerreichung und sucht die Assoziationen zwischen den Schritten, bei diesem Prozess wir nach dem Wofür und Warum gefragt. Das formale Denken ist das Denken der „Orientierung“ von dem, was man macht. Das organisatorische Denken steht in direkter Verbindung mit den Fertigkeiten des Denkens. Es verwendet die Repräsentationen und „organisiert“ sie, es gibt ihnen innerhalb des Denkens eine Struktur. Das differenzielle Denken sucht danach, innere Differenzen des Individuums aufzuzeigen. Dieser Denkstil führt zu konvergenten und divergenten Konzepten oder Begriffen wie „*sozialer Kreativität*“. Es gibt zwei Formen des differenziellen Denkens: Das liberale und das konservative differenzielle Denken. Die äußeren Repräsentationen sind innovativ bzw. traditionell.

Entsprechend dieser unterschiedlichen Denkstile, generiert das Individuum unterschiedliche Aktionspläne, generiert Fragen und findet Antworten. Die Denkstile bestimmen die Art und Weise der Wahrnehmung von Objekten und der Informationsverarbeitung durch ein Subjekt. Das heißt, diese Denkstile entwickeln sich gemäß Umgebungsbedingungen und der in diesen an das Individuum gestellten Forderungen.

Kognitive Prozesse: Kognition ist die Fähigkeit, die aus der Wahrnehmung erhaltenen Informationen zu verarbeiten. Das heißt, sie ist das Denken und das Verstehen und die Arbeitsweise des Gehirns (Hayes 1995) oder allgemeiner die „Arbeitsweise des Zentralen Nervensystems“ (Gallistel, 1998, S.9). Der Mensch erhält ständig Informationen aus der Umwelt. Wie diese Informationen verarbeitet werden, welchen Objekten mehr und welchen weniger Aufmerksamkeit geschenkt werden, welches die Prozesse sind, die das Individuum zu jedem Zeitpunkt vollzieht sind einige der Themen, die im Zusammenhang mit dem Denken und Verstehen zu beschreiben versucht werden. Das sind einige der großen Herausforderungen der kognitiven Psychologie. Einige der kognitiven Prozesse, die der Mensch ständig realisiert, sind die Wahrnehmung, die Aufmerksamkeit, das Denken (Funke, 2006), die Erinnerung (Anderson, 1981), die Sprache (Hayes, 1995; Frauenfelder und Floccia, 1999), die motorische Koordination und die Planung (Andler, 2004). Der erste Prozess, der in einer Situation realisiert wird, ist Wahrnehmen, Beobachten, was passiert. Die Wahrnehmung, die das Individuum aus der Umwelt hat, ermöglicht die Identifizierung von Formen und Linien und die Differenzierung von Tieren, Personen, Gegenständen usw., um diese später mit früheren Erfahrungen in ähnlichen Situationen zu vergleichen.

In dieser Arbeit wird die Wahrnehmung als ein neues Element innerhalb der Charakterisierung des mathematischen Denkens besonders hervorgehoben. Andere Elemente wie die Erinnerung sind ausgiebig untersucht worden. Durch die neuen Beiträge aus der Neurologie kann man behaupten, dass die Wahrnehmung und die Forschung über sie neue Schwerpunkte in der Mathematikdidaktik setzen werden. Der neue Ansatz hat seinen Ursprung in der verkörperten Kognition oder „embodied cognition" (Lakoff und Johnson, 1999; Parzysz, Kadunz, Robotti und Rogers, 2008). Das heißt, dass man sagen kann, dass der Mensch seine kognitiven Kategorien und Modelle auf Basis der Wahrnehmungen, welche Phänomene interpretieren und bewerten, konstruieren kann. Das bedeutet aber auch, da der Mensch durch seine physische und vor allem soziale Umwelt mit sich selbst agiert, dass das Wesentliche der verkörperten Kognition die Verwurzelung der Kognition sowohl im Gehirn als auch im Körper ist. Dies wiederum meint, dass man in die Modelle der Bedeutung aller Aktionen die *Metaphern* und die menschlichen Sinne einbeziehen muss. In diesem Kapitel wurden 14 Sinne behandelt (Dehaene, 1999; Reeves, 1996; Dehaene und Brannon, 2011; Stadler, Seeger und Raeithel, 1975; Steiner, 2009; Zimmer, 2005), welche zur Charakterisierung des MD wieder aufgriffen wurden (Dimension Wahrnehmung).

Zudem ist zu erwähnen, dass durch die Denkstile und die Denkformen jetzt die vier kognitiven Grundarten (Flessas und Lussier, 2005) betrachtet werden können, und zwar: Sequenziell-verbal, sequenziell-nonverbal, simultan-verbal und simultan-nonverbal.

Kapitel 3: Mathematisches Denken.

In diesem Kapitel widmen wir uns noch einmal den kognitiven Prozessen. Aber dieses Mal in Bezug auf das mathematische Wissen. Es wird der Zusammenhang zwischen den verschiedenen autonomen Systemen, siehe Tabelle, (Tabelle 3 im Text, S. 154) und dem Kapitel 2 hergestellt. In diesem Kapitel findet man die ersten Nachweise der Dimensionen des mathematischen Denkens (MD). Es wird darauf hingewiesen, dass auf Grundlage des Kapitel 2 und der Notwendigkeit, die Wahrnehmung zu integrieren, in dieser Arbeit das mathematische Denken und nicht die mathematische Argumentation betrachtet wird. Die mathematische Argumentation bezieht sich nur auf einen Teil des gesamten Denkens, den man für gewöhnlich mit der Logik und mit Anfangs- und Endargumenten, also mit Argumenten, die zu einem bestimmten Ziel führen, verbindet. Die Argumentation beinhaltet keine intuitiven und sensorischen Aspekte, während das Denken, das in seiner

Art umfangreicher und natürlicher ist, diese beinhaltet. Darüber hinaus ist das mathematische Denken (MD) ein Endprodukt von mannigfaltigen neuropsychologischen Prozessen. Diese Prozesse stammen aus und entwickeln sich in verschiedenen Bereichen und erfordern unterschiedliche Fähigkeiten des Individuums. Das MD ist ein Produkt aus der Integration verschiedener sensorischer und kognitiver Bedingungen.

Tabelle: Autonome Systeme

Mathematik	**Lehrer**	**Schüler - Studenten**
Wissen	Mathematikunterricht	Erlernen von Mathematik und Mathematikverständnis
Konzepte wie Relationen	Situationen – Probleme	Individuelle und subjektive Interpretationen
Universalsprache, Symbole	Kommunikation und Kultur im Unterricht	Dialogsysteme und soziales Bewusstsein
Epistemologisches System	Soziales System	Kognitive Prozesse

Hinsichtlich des mathematischen Wissens kann gesagt werden, dass dieses nur sinnvoll ist, wenn man dieses innerhalb eines sozialen Systems kommuniziert bzw. es möglich ist, dieses zu kommunizieren. Dies veranlasst Lehrer und Forscher dazu, drei unabhängige Systeme mit direkten und indirekten Interaktionen (siehe Tabelle 3 im Text, S. 154) zu betrachten.

Jeder der in Tabelle (Tabelle 3 im Text, S. 154) aufgeführten Bereiche, stellt ein autonomes und eigenes Bezugssystem dar. Die Beziehungen zwischen ihnen finden nicht in einer kausalen Abfolge statt. Es gibt keine Reihenfolge von der Mathematik zu den Lehrern und von den Lehrern in die Köpfe der Schüler (Brunner, 2001). Zwischen diesen Systemen bestehen gegenseitige Abhängigkeiten oder Koppelungen (Varela, 1997), die nur indirekte Effekte und deren Rückwirkungen sind. Somit wird das theoretische mathematische Wissen modifiziert, wenn es als ein zu kommunizierendes Objekt angesehen wird. Zudem ergibt sich im Prozess des Verstehens seitens des Schülers eine weitere „Änderung" des mathematischen Wissens. Damit möchte man sagen, dass das mathematische Wissen, wie es in den Büchern steht, eines ist; jenes, das der Lehrer hat, ein anderes analog zu den Büchern ist, und jenes, das der Schüler hat, ein weiteres sehr persönliches ist, welches mit Glück „analog" zu dem des Lehrers ist. Unter diesen Umständen wird versucht, durch Kommunikation und Dialog zwischen den einzelnen beteiligten autonomen Systemen Analogien des mathematischen Wissens herzustellen. Darüber hinaus versucht man, Metaphern für die Konzepte zu bilden, welche innerhalb des Dialoges das beste Verständnis für die persönlichen Repräsentationen erlauben.

Bezüglich der kognitiven Prozesse in der Mathematik und als Zusammenfassung von Abschnitt 3.1 von Kapitel 3, werden die im Abschnitt 2.1 dargestellten kognitiven Prozesse hinsichtlich der mathematischen Inhalte betrachtet. Das heißt, einerseits wird die formale Definition eines mathematischen Konzepts betrachtet. Andererseits werden die aus einem kognitiven Prozess stammenden persönlichen Definitionen, die mit dem betreffenden Konzept zusammenhängen, betrachtet. Diese Konzepte nennt man reguläre und singuläre Mathematik (Ruf und Gallin, 1998). Andere Beispiele des kognitiven Prozesses werden in Abschnitt 3.1.5 aufgezeigt. Diese sind eine Mischung aus den sieben in Tabelle 2 (S. 60 im Text) aufgeführten, wie z.B. die Konzeptualisierung, die Problemlösung, das Textverständnis, etc.

Bei der Realisierung von Analogien und der Schaffung von Metaphern treten die sieben bereits genannten kognitiven Prozesse, sowie weitere, die mit den Sinnen zusammenhängen, auf. Einige der kognitiven Prozesse oder Fähigkeiten, die häufig angewendet werden und die für Arithmetik-Probleme (Lakoff und Núñez, 2000) notwendig sind, sind: Gruppieren, sortieren, paaren, erinnern, Kardinalzahlen zuweisen und das Erkennen der Unabhängigkeit der Reihenfolge. Außerdem sind andere kognitive Fähigkeiten wie die Fähigkeit zur Gruppenkombination, die Fähigkeit, zu symbolisieren und die Semiose notwendig.

Ein kognitiver Prozess oder eine kognitive Fähigkeit, die in dieser Arbeit von Interesse ist, ist die Fähigkeit zu metaphorisieren. Um in das Thema der Metaphern in der Mathematik einzuführen, beginnen wir mit der „Metonymie", da „Metonymy provides foundations on which the metaphorical edifice is built" (Goatly, 2011, S. 57). Unter Metonymie versteht man die Verwendung von Wörtern, die eine logische Beziehung mit dem Konzept haben, das man ausdrücken will. Die benutzten Worte, ihre Bedeutung und ihre Auslegung sind in der gleichen konzeptuellen Domäne (ibídem, 2011). Wenn man beispielsweise sagt: "Er hat drei Flaschen getrunken" und der Sprecher möchte in Wirklichkeit sagen: "Er hat den Inhalt von drei Flaschen getrunken", wird eine Metonymie verwendet, die auf einer Assoziation zwischen den Wörtern Inhalt und Behälter besteht. Ein anderes Beispiel für eine Metonymie ist wenn man sagt "ich lese gerade Umberto Eco", wobei der Autor mit seinen Werken gleichgesetzt wird. Das heißt eine Metonymie besteht im Ersetzen eines Wortes durch eines mit einer in Zusammenhang stehenden Bedeutung, um sich auf dieselbe Entität zu beziehen (Gutiérrez, 2010). Darüber hinaus sind diese Bestandteil unseres täglichen konzeptuellen Systems und werden automatisch, d.h. ohne Anstrengung und unbewusst eingesetzt. Somit kann die Verwendung von Symbolen in der Mathematik als Metonymie angesehen (Pimm, 1987; 1992) werden. Außerdem werden bei der Verwendung von Zahlen Symbole durch Mengen ersetzt, was wesentlich komplexer ist und im folgenden Zitat deutlich wird: „Zahlenreihen konstituieren einen metonymischen Bezug zwischen Bildern, Begriffen und Metaphern, wo ein solcher sonst nicht oder nicht unmittelbar zu fassen ist." (Largier, 2012, S. 210)

Die Metapher bezieht sich auf die „bildliche" Transmission eines Wortes/von Wörtern, das/die sich auf ein Konzept beziehen. Diese wird mittels Bedeutungen und Interpretationen der Wörter, vollzogen, die weit über ihre gewöhnliche Bedeutung hinausragen (Maier und Schweiger, 1999). Darüber hinaus: "Our subjective mental life is enormous in scope and richness. We make subjective judgments about such abstract things as importance, similarity, difficulty, and morality, and we have subjective experiences of desire, affection, intimacy, and achievement. Yet, as rich as these experiences are, much of the way we conceptualize them, reason about them, and visualize them comes from other domains of experience." (Lakoff und Johnson, 1999, S. 45). Außerdem sollten wir berücksichtigen, dass "Elle opère donc un transfert de sens, d'un domaine, dit domaine source, à un autre, dit domaine cible. Une métaphore est ainsi, plutôt une flèche, qui pointe d'un objet à un autre, qu'un lien entre deux objets." (Soto-Andrade, 2006, S. 124).

Metaphern in der Mathematik wurden erstmals von Pimm (1987) und Steiner (1988) erwähnt. In dieser Arbeit wird von konzeptuellen Metaphern, im Sinne der Arbeiten von Lakoff und Núñez (2000), Presmeg (1997), Sfard (1997) und Soto-Andrade (2006, 2007a) gesprochen. In diesen Forschungen wurde der Begriff der Metapher wieder aufgegriffen, wobei die entsprechende deutsche Wortbezeichnung, i.S.v. operational gleichwertig, die Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) wären. Ein weiterer kognitiver Prozess, der mit den konzeptuellen Metaphern assoziiert ist, ist „die reification". Nach Sfard (1994) ist die *Reification* eine Umwandlung von einem operationalen Denkmodus in einen strukturierten Denkmodus; ein Prozess, der häufig in der Problemlösung und Kapselung (Dubinsky und McDonald, 2001) von mathematischer Information angewendet wird.

Es wurde eine schematische Darstellung (siehe Abb. 3, S. 169) entworfen, um die Beziehungen zwischen Metaphern, den in Tabelle 1 (s. S. 126 im Text) aufgeführten Repräsentationen und dem, was über das mathematische Wissen und der Notwendigkeit, dieses zu kommunizieren genannt wurde, aufzuzeigen. In Abschnitt 3.3. wird auch auf den Gebrauch von Metaphern im Mathematikunterricht aufmerksam gemacht (Parzysy, Kadunz, Robotti und Rogers, 2008; Thompson und Sfard, 1994). Es wird darauf hingewiesen, dass die konzeptuelle Metapher nicht nur ein Kommunikationsmittel ist, sondern auch ein kognitiver Mechanismus, der sich auf die Struktur der körperlichen Erfahrungen ausdehnt.

Hinsichtlich der Abschnitte 3.4 und 3.5 kann gesagt werden, *dass sowohl Verfahren als auch Strategien Teile der MD sind. Sie sind 2 unterschiedliche Stadien des kognitiven Prozesses. Verfahren beziehen sich in erster Instanz auf das Gedächtnis und Strategien auf die Planung*. Bezüglich der Verfahren werden die verschiedenen Arten des Summierens, des Multiplizierens und des Dividierens betrachtet.

Bezüglich der Strategien (Bardy, 2007; Ben-Zeev, 1996; Bruder, 2003; Bruder und Müller,1990; Craig, 2009; Hesse, 2009; Mayer, 2003; Pimm, 1987; Watson und Mason, 1998), werden folgende berücksichtig: Das systematische Beweisprinzip, das Prinzip der Extreme, das Invarianz-Prinzip, das Dirichletsches Schubfachprinzip, das Symmetrie-Prinzip, Rückwärtsschreiten, die Zerlegung von Problemen in Teile, die Umstrukturierung, die Verallgemeinerung als Lösungshilfe und das Prinzip der Analogien als Strategie zur Problemlösung. Für jede Strategie wird ein Problem aus der Literatur dargestellt sowie weitere, die eigens dafür entworfen wurden, um die Strategien mit Beispielen zu belegen. Siehe hierzu Tabelle 13 (S. 196, im Text).

Zu den Werkzeugen des MD kann folgendes erwähnt werden: *Ein Mathematiker verwendet zum Zeitpunkt des Denkens Zahlen, Symbole (Buchstaben wie „x“ und „y“ und andere Zeichen). Er denkt in Worten, in visuellen mentalen Bildern (Araya, 2004), in auditiven mentalen Bildern, in taktilen mentalen Bildern und in motorischen mentalen Bildern wie Gesten mit der Hand u.a. D.h. der Mathematiker denkt mittels mentaler Repräsentationen, von Triebrepräsentation und durch semiotische Repräsentationen.* Bezüglich der Anwendung des logischen Denkens, werden die Vorschläge von Freudenthal (1974, 1976) wieder aufgenommen. Er schlägt hierfür vor, nicht auf Basis von alltäglichen Dingen zu beginnen, sondern ausgehend von einer fiktiven Wirklichkeit, aber mit der Möglichkeit, diese in realer Art und Weise und mit gesundem Menschenverstand darzustellen.

Eines der bedeutendsten Themen des dritten Kapitels, wird im Abschnitt 3.8. behandelt und beleuchtet die Beziehung zwischen Mathematik und Wahrnehmung. Diese führt zu zwei Dimensionen des MD, nämlich zu der Dimension der Wahrnehmung und der Dimension der nicht-rationalen Fähigkeiten. Die Erste steht in Zusammenhang mit dem, was man mit den Sinnen wahrnehmen kann und die mit den Fähigkeiten, die im folgenden Kapitel beschrieben werden, in Verbindung stehen können. Die Zweite hängt mit Prozessen zusammen, die man nicht versteht (unbewusst) und dem Anschein nach Produkte der Argumentation sind, wie z.B. *die Intuition*. In diesem Abschnitt werden nochmals die 14 menschlichen Sinne, die in Abschnitt 2.6 erwähnt wurden, aufgegriffen. Hierbei werden der Zahlensinn, der Wortsinn, der Raumsinn und die Fähigkeit, Muster wahrzunehmen, hervorgehoben.

In den Abschnitten 3.8. und 3.9. wird die Komponente der nicht-rationalen Fähigkeiten, von denen eine die Intuition ist, begründet. Andere dieser Fähigkeiten sind die Phantasie und/oder das mathematische Vorstellungsvermögen. Diese entstammen aus der Art und Weise, wie die Umwelt wahrgenommen wird und beeinflussen dementsprechend die Informationsverarbeitung und Entscheidungsfindung. Somit kann gesagt werden, dass nicht-rationale Fähigkeiten nicht ein Produkt aus einer bestimmten Argumentation sind. Sie sind Teil des Denkens. Andere Fähigkeiten, die betrachtet werden sind: *Mathematische Flexibilität, mathematische Sensibilität und mathematische Kreativität.*

Kapitel 4: Charakterisierung des mathematischen Denkens

Mit dem Kapitel 3 sind wir in der Lage das mathematische Denken zu charakterisieren und das Augsburger Modell (Ulm, 2010) für das MD zu ergänzen. Dieses Kapitel zeigt das erste Forschungsergebnis dieser Arbeit und beantwortet die Initialfrage. Es besteht aus vier Abschnitten, in denen jede der Dimensionen des mathematischen Denkens behandelt wird. Das mathematische Denken ist ein aktiver kognitiver Prozess. Daher beinhaltet es neurologische Aktivitäten, die einen internen Dialog eingehen und die Repräsentationen jeden Typs, rationale und nicht-rationale Fähigkeiten, entwickelte Fähigkeiten oder zu entwickelnde Fähigkeiten, im Gedächtnis gespeichertes Wissen und zu speichernde Information in Beziehungen bringen und verwenden. Dieser Prozess steht für das

Individuum in Verbindung mit dem Erleben von neuen und interessanten Situationen sowie mit der Suche nach Antworten auf Probleme, die das Individuum auf persönliche Weise bestimmt, sowie mit dem Ziel, Wissen über seine Umgebung zu schaffen, um auf diese Art mit eigenen Zusammenhängen und mit persönlichen Wissensabrufsystemen[6] eine individuelle mathematische Welt zu gestalten.

Ein Ergebnis dieser Arbeit ist es, zwischen Denkmittel und Dimensionen des Denkens zu unterscheiden. Beide haben den Zweck ein Denkwerkzeug zu sein, d.h., beide werden im Prozess verwendet, aber auf unterschiedliche Art und Weise. Zu den mathematischen Denkmitteln gehören:

1. Die Denkstile.

2. Das mathematische Wissen.

3. Die Kommunikationsmittel, unter ihnen die mentalen Repräsentationen, die Semiotik, die konzeptuellen Metaphern und die mathematischen *Grundvorstellungen*.

4. Die Abstraktion und das Gedächtnis, die mit den mentalen Repräsentationen und dem Informationsverarbeitungsprozess in Beziehung stehen.

Somit sind diese Dimensionen nach ihrer kognitiven Herkunft und ihrer Struktur gruppiert. Die vier die im Folgenden präsentiert werden, werden als diejenigen betrachtet, die das Thema in der Kommunikation auslösen:

1. Die Wahrnehmung, die aus den Sinnen stammt und die sich in dieser Dimension hervorhebt, die Bewegungswahrnehmung, die Zeitwahrnehmung, die Raumwahrnehmung und aus diesen dreien die dynamische und statische Wahrnehmung von mathematischen Objekten, der Wortsinn, usw.

2. Die mathematischen Inhalte, betrachtet als Produkt des Menschen in der menschlichen Geschichte und die gleichzeitig die vier Subdimensionen

---

[6] *Die persönlichen Wissensabrufsysteme sind diejenigen, die während des Erlernens von mathematischem Wissen gebildet werden. Zu ihnen gehören Bewegungen, Bilder, Wörter usw., die dazu veranlassen, ein bestimmtes mathematisches Objekt abzurufen, welches im Gedächtnis gespeichert ist. Z.B. könnte ein persönliches Wissensabrufsystem für ein mathematisches Objekt wie die Kosinus-Funktion, graphische Bilder, Bewegungen und Wörter zur Definition der Kosinus-Funktion gespeichert haben.*

berücksichtigen, die in der Zusammenfassung von Kapitel 3 dargelegt wurden, zusätzlich das formale Denken.

3. Die Strategien und Verfahren, die aus der inhaltlichen und umgebungsbedingten Entwicklung des Individuums stammen. In dieser Dimension wird das Wissen aufs Spiel gesetzt und deswegen spielt das Gedächtnis erneut eine wichtige kognitive Rolle, genauso wie die Fähigkeiten, die die Plansuche und Planentwicklung ankurbeln.

4. Die nicht-rationalen Fähigkeiten, die aus der Entwicklung nicht-rationaler Aktivitäten stammen. Diese Dimension schließt Aspekte wie die Intuition, die Kreativität, den gesunden Menschenverstand, die Phantasie, etc. ein.

Zur ikonischen Darstellung der Charakterisierung wurde ein Tetraeder[7] gewählt, da dieses keiner seiner Seitenflächen und seiner Ecken eine Priorität verleiht. Hierzu siehe Abb. 9, (S. 229). So wie die Abbildung ein Tetraeder ist, wurde dieser Charakterisierung der Name *„Tetraedrisches Modell für das Mathematische Denken“* gegeben.

Die Kommunikationsmittel wie die Repräsentationen, die Grundvorstellungen und die Metaphern, betrachtet als kognitive Prozesse, helfen uns, die neue Information zu speichern, die Information abzurufen, interne Dialoge zwischen diesen Dimensionen zu generieren und um mit der Außenwelt zu kommunizieren. Das will sagen, dass das Gedächtnis „drinnen“ im Modell ist. Aus diesem Grund sind die Kommunikation und der Dialog im Mathematikunterricht unabdinglich. Der Unterricht ist der Ort, an dem und der Zeitpunkt, zu dem die Abstraktion Gestalt annimmt und sich die Argumentation entwickelt. Im Unterricht sind logisches Konstrukt und die Anwendung der Logik, wie in Abschnitt 3.6.1 dargestellt, Bestandteil der Grundlage der mathematischen Beweise. Durch diese Elemente nehmen die Demonstrationen Sinn und Wirksamkeit an, sowohl beim Individuum als auch im Lernprozess.

Zum Zeitpunkt der Dialoge sind die Entwicklung der Sprache sowie der Gebrauch der angemessenen Worte wichtig, um zu „überzeugen“, dass man die beste Absicht hat. Im Dialog könnten durch konstruktive Kritik bessere Ergebnisse erzielt werden. Im Dialog hat der Abstraktionsprozess seine Belohnung. Damit will man sagen, dass das Gedächtnis und die Abstraktion beim Dialog und in der Kommunikation eine wichtige Rolle spielen.

---

[7]*Platonischer Körper mit vier Flächen und vier Ecken, bei dem alle Seiten gleich lang sind.*

Die Wahrnehmung: In dieser Dimension sind die bereits in Abschnitt 2.6. erwähnten Sinne hervorzuheben, da man durch die Sinne die Umwelt wahrnimmt und begreift und im Autopoiesis-Prozess (Hallowen, 2009; Maturana und Varela, 1980) damit seine eigene Welt schafft. Durch die Sinne und die Wahrnehmung beginnt man den internen Dialog, d.h., durch alle Sinne werden die mentalen Repräsentationen gebildet und diese sind dann ein Resultat der Entwicklung der Sinne, der Konnexionen und Beziehungen, die das Individuum mit der Information aus der Umwelt und seinem Inneren herstellt (Maturana und Varela, 1980). Die berücksichtigten Sinne sind die visuellen, auditiven, taktilen, vestibulären, gustatorischen, olfaktorischen Sinne sowie der Temperatursinn, der Raum- oder Orientierungssinn, der Kräfte- und der Spannungssinn, das Körpergefühl, der Wortsinn oder verbale Sinn, der Bewegungssinn, der die Rotation beinhaltet, der Gleichgewichtssinn oder statische Sinn, das Zahlenverständnis und das Zeitverständnis.

Die Bewegungswahrnehmung, die Zeitwahrnehmung, die Raumwahrnehmung und die Gleichgewichtswahrnehmung geben Auskunft über den Zustand eines Objektes und v.a. ermöglichen sie dem Individuum die Entscheidung, ob ein Objekt als in Bewegung oder statisch betrachtet wird und somit die Bildung einer dynamischen bzw. statischen mentalen Repräsentation von mathematischen Objekten. Mit allen Sinnen, und besonders mit dem Wortsinn, entwickelt man die metaphorische Fähigkeit als internes und externes Kommunikationsmittel.

Schließlich kann man mit den Darstellungen in Abschnitt 2.6, 3.8 und dem Abschnitt, der den mathematischen Fähigkeiten gewidmet ist, als ein Ergebnis dieser Arbeit die folgenden aufgelisteten Kategorien:

- Fähigkeit der dynamischen Wahrnehmung
- Fähigkeit der statistischen Wahrnehmung
- Visuelle Fähigkeit
- Räumliches Vorstellungsvermögen
- Numerische Fähigkeit
- Metaphorisches Fähigkeit

- Fähigkeit, Ursachen-Wirkungen wahrzunehmen
- Fähigkeit, auszugleichen und gleichzusetzen

Das Denken assoziiert mit dem mathematischen Inhalt: Wie in Abschnitt 3.12 gesehen, ist im Augsburger Modell eine der Dimensionen des MD das mit dem mathematischen Inhalt assoziierte Denken. Diese Dimension beinhaltet gleichzeitig 6 Kategorien:

- Numerisches und arithmetisches Denken
- Geometrisches Denken
- Algebraisches Denken
- Stochastisches Denken
- Funktionales Denken
- Formales Denken.

Diese Denkarten werden als Teil des schulischen Lernens betrachtet und fördern die Anwendung von strukturierten, formalen und stark mit dem Gedächtnis assoziierten „*Concept Maps*“.

In dieser Dimension bestimmen das mathematische Wissen und seine autonomen Systeme (Abschnitt 2.1.3.) die Form der Erziehung und die Art und Weise der Entwicklung der verschiedenen Dimensionen des MD. Unsere Erfahrungen aus Beobachtungen des Unterrichts in verschiedenen Bildungsstufen, besonders bei Erstsemester-Studenten, haben gezeigt, dass genau diese Dimension über Jahre hinweg entwickelt wurde, ohne die anderen 3 Dimensionen des MD zu berücksichtigen.

Strategien und Verfahren: Wie in den Abschnitten 3.4 und 3.5.1 bis 3.5.10 aufgeführt, sind Strategien und Verfahren Teil der Kategorisierung des MD. Die Strategien, die wir in dieser Arbeit berücksichtigen sind:

- Systematisches Probieren
- Extremwertprinzip
- Schubfachprinzip von Dirichlet.

- Invarianz-Prinzip
- Symmetrisches Prinzip
- Umformung (Restrukturierung)
- Zerlegung von Problemen in Teile
- Umstrukturierung
- Verallgemeinerung
- Analogieprinzip

Diese werden angewendet, wo die Entwicklung von jeder es erlaubt, diese mit der mathematischen Kreativität (wie im folgenden Abschnitt erklärt werden wird) und den kognitiven mathematischen Prozessen in Beziehung zu bringen. Diese Strategien sollten beim Lernen, wenn möglich, ein Mittel darstellen, und nicht ein zu lehrender Lerninhalt. Diese Strategien sollten zum Verständnis, aber nicht als Lerninhalt besprochen und analysiert werden. Der Erwerb von Strategien braucht Zeit, sie sind kombinierbar und anpassbar. Ein Problem oder ein Situation kann mehr als eine Strategie generieren. Hier werden diejenigen berücksichtigt, die von Schülern am meisten verwendet werden (Bardy 2007). In Tabelle 11 (S. 180) wird eine allgemeine Klassifizierung von Strategien nach Watson und Mason (1998) dargestellt.

Nicht-rationale Prozesse und Fähigkeiten: In dieser Arbeit haben wir die nicht-rationalen Prozesse betrachtet, die wir so bezeichnen, um sie von denen, die aus dem Verstand stammen, und den sogenannten bewussten mentalen Prozessen zu unterscheiden. Die nicht-rationalen Prozesse haben einen großen Einfluss auf die kognitiven Prozesse. Sie stehen im Zusammenhang mit dem mathematischen Geist (Abschnitt 3.9), mit den Werkzeugen des mathematischen Denkens und den mathematischen Fertigkeiten wie dem gesunden Menschenverstand, der Kreativität, der Fantasie und/oder der Vorstellung etc. Die nicht-rationalen Prozesse und Fähigkeiten haben ihren Ursprung im Glauben und im Alltagsleben und werden von der direkten und indirekten Umwelt beeinflusst. Beispiele aus der Umwelt sind, was man um sich herum beobachtet, tägliche körperliche Aktivitäten, etc. Als indirekte Umwelt versteht man die Wirtschaft eines Landes, die Kultur, das Klima usw. Diese nicht-rationalen Prozesse sind Bestandteil der kognitiven Prozesse und sind vom gleichen Typ wie das Erlernen und die Erinnerung. Sie entsprechen keiner bestimmten Struktur. Sie stehen in direkter Beziehung mit der Kultur, der Umwelt, den Gefühlen, dem Interesse und der Wahrnehmung. Einige dieser Prozesse und Fähigkeiten haben besondere Inferenz auf die Mathematik wie z.B.:

- Intuition
- Kreativität
- Sensibilität
- Flexibilität
- Phantasie und/oder Vorstellung

Diese Charakterisierung des mathematischen Denkens (MD) erlaubt es einerseits, die Wahrnehmung als eine wichtig zu betrachtende Komponente in der Entwicklung des MD einzubeziehen. Anderseits gibt sie eine Antwort auf die Frage: Was ist mathematisches Denken? Und zwar: Wir verstehen als mathematisches Denken einen kognitiven (neurobiologischen) Prozess der Wahrnehmungen, Inhalte, Fähigkeiten und Strategien verknüpft. Dies geschieht, wenn ein Individuum vor einer Situation oder einem Problem in Verbindung mit mathematischen Inhalten steht, die/das für das Individuum interessant ist oder eine Herausforderung an seine persönliche kognitive Struktur stellt. Das mathematische Denken bedient sich unterschiedlicher Kommunikationsmittel wie der Repräsentationen, Metaphern und Grundvorstellungen.

Einen Überblick über den Inhalt dieses Kapitels und eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit kann der folgendes Abbildung (Abb. 15 im Text, S. 281) entnommen werden. Diese zeigt die 4 Dimensionen des MD, die in Form eines Tetraeders angeordnet und untereinander durch die Kommunikationsmittel verbunden sind. Das heißt: Keine der Dimensionen hat stärkeres Gewicht als eine andere und die Beziehungen unter ihnen sind gleichgewichtig. Was es letztendlich zeigt ist, dass die Dimensionen im Gleichgewicht sein sollten und unser Mathematikunterricht diese vier Dimensionen gleichzeitig fördern sollte. Im Zentrum stehen die Kommunikationsmittel, über die der Mensch verfügt und über die in den Anfangskapiteln gesprochen wurde.

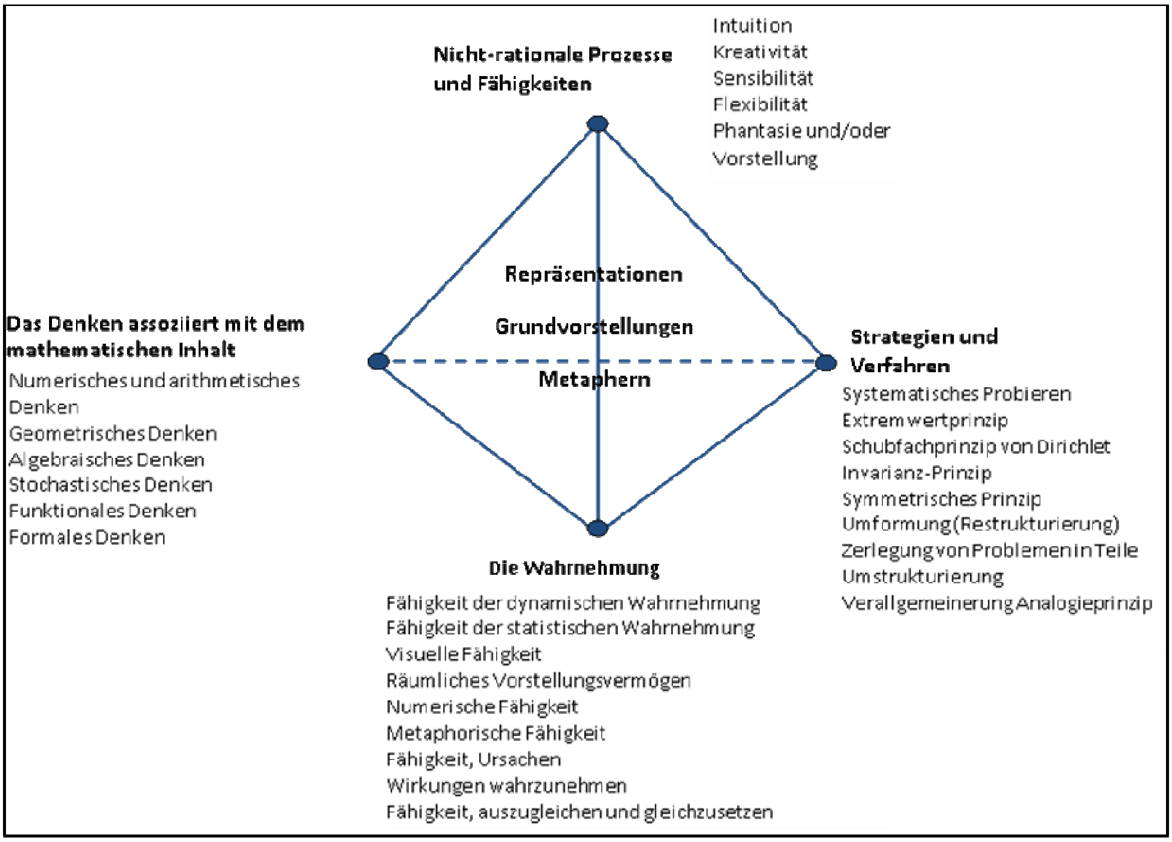


Abbildung: Tetraedrisches Modell des Mathematischen Denkens

Schließlich zeigt dieses Kapitel das Ergebnis für das erste Ziel dieser Arbeit, nämlich die Charakterisierung des mathematischen Denkens. In den folgenden Kapiteln wird aufgezeigt, wie diese Charakterisierungen in der Textanalyse angewendet werden und wie es Schüler gibt, die auf natürliche Weise die Entwicklung einiger Subdimensionen im Erlernen der Elemente der Gruppentheorie erkennen.

Kapitel 5: Methodik

In diesem Kapitel wird die Methodik unter Berücksichtigung, dass das MD vier Dimensionen beinhaltet, die in Kapitel 4 erläutert und charakterisiert wurden, beschrieben. Auf dieser Grundlage wurden die spezifischen Ziele (2. Ziel) definiert:

- Verschiedene Denktypen ausfindig zu machen, die sich beim Erlernen der Gruppentheorie entwickeln;
- Beziehungen zwischen dem Erlernen von einigen Elementen der Gruppentheorie und der Charakterisierung des MD finden und

- Beziehungen zwischen dem Lehren von einigen Elementen der Gruppentheorie und der Charakterisierung des MD finden.

Das heißt, zu bestimmen, welche Dimensionen sich in unterschiedlichen Mathematikunterrichts-umfeldern bei der Gruppentheorie entwickeln. Die Ziele waren Basis für die Art der Studie, die Definition der Variablen, das Forschungsdesign, die Subjekte und den Kontext und dem Themenabschnitt, in dem die Arbeit in drei Studiensubjektgruppen unterteilt wurde. Für jede wird über die Datenkorrelation berichtet, um zum folgenden Kapitel, in dem die Analyse der zusammengestellten Daten beschrieben wird, überzugehen.

Diese Studie hat einen gemischten Ansatz, d.h. einen qualitativen und einen quantitativen. Gemischt, da es sowohl eine numerische als auch eine qualitative Datenbehandlung gab. Nach Bortz und Döring (2006) hängt der Ansatz einer Forschung von der Form der Informationsanalyse ab. Da in dieser Studie die Datenanalyse via das Programm CHIC[8] quantitativ und die Analyse von Graphiken qualitativ durchgeführt wurde, kann man sagen, dass diese Studie einen gemischten Ansatz hat.

Art der Studie

Im Allgemeinen gibt es für Human- und Sozialwissenschaften vier Arten von Studien, die nach ihrem Zweck klassifiziert werden: Deskriptive, explorative, korrelative und kausal Studien (Bortz und Döring, 2006). Diese Arbeit ist bei den kausalen Studien anzusiedeln, da sie zum Zweck hat, kausale Beziehungen zwischen der Gruppentheorie (GT) und dem mathematischen Denken herzustellen. In dieser Studie sucht man die Ursachen und Wirkungen, die bestimmte Phänomene hervorrufen (das Phänomen ist das Denken, verursacht durch die GT).

Variablen der Studie

Da dies eine gemischte kausal Studie ist, werden zwei Variablen in Beziehung gebracht, und zwar: Elemente der Gruppentheorie und Dimensionen des MD.

---

[8]*Computerprogramm mit dem Namen Classification Hiérarchique Implicative et Cohesitive mit Akronym CHIC, erstellt für die implikative Analyse (Gras, 1996).*

Beide Variablen sind im Vorherigen entwickelt worden, eine in Abschnitt 1.6.1 und die andere in Kapitel 4. Die Elemente der Gruppentheorie, die in dieser Arbeit betrachtet wurden sind: Die Gruppendefinition, Theoreme, Sätze über Gruppen, Faktorgruppen, Ordnung und Zyklische Gruppen, Isomorphismus, Operation einer Gruppe auf einer Menge, symmetrische Gruppe und Derivate, Magische Quadrate, Symmetrien von Ornamenten, Parketten und Kristallen.

Forschungsdesign: Da das Forschungsdesign experimentell (Bortz und Döring, 2006) ist, wurde eine der Variablen, nämlich die Elemente der GT, manipuliert.

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen: eine gemischte (quantitativ und qualitativ) und eine qualitative. Im ersten Teil wurde das Programm CHIC zu der gemischten Studie verwendet. Mit diesem wurde die quantitative Behandlung der Daten unter Anwendung der Implikation der klassischen Theorie über die Graphikanalyse vorgenommen. In dem Programm werden die Graphiken automatisch erstellt. Die Analyse der Daten und der offenen Fragen des Fragebogens wurde auf Basis des Modells der Charakterisierung des MD vorgenommen. Als Instrument für die Zusammenstellung der Daten wurde im ersten Teil die Erhebung verwendet (ibídem, 2006) und es wurde eine implikative Analyse (Gras, 1996, 2005) durchgeführt.

Für den zweiten Teil wurde die qualitative sozialwissenschaftlich-hermeneutische Methode ausgewählt, da diese eine besondere Bedeutung in der Evaluierung und Interpretation von Texten hat und da diese als die Interpretationslehre (Soeffner, 2005) angesehen wird. Andererseits muss man die Bedeutung der Texte verstehen und diese transparent machen. Darüber hinaus geht es darum, das allgemeine Verhalten der Individuen in ihrer Umgebung und die daraus resultierenden Produkte als Teil des menschlichen Denkens (Danner, 1994) zu verstehen. In beiden Analysephasen werden die vier Postulate des Verstehens von Lamnek (1988) einbezogen; diese sind: Das psychologische Verstehen, das Sinn-Verstehen, das elementare/alltägliche Verstehen und das höhere Verstehen.

Probanden, Kontexte und Instrumente der Datenerhebung: Für diese Studie gab es drei Probandengruppen: Eine für die erste Phase und zwei für die zweite Phase.

Erste Phase, Gruppe A: Teilnehmer am Proseminar für Algebra, einem Seminar für Mathematikstudenten für das Lehramt, sowohl für Grundschulen, Hauptschulen und Realschulen. Die Mehrheit dieser Studenten war mindestens im zweiten Studienjahr der vierjährigen Studienzeit. Die Proseminare wurden vom Sommersemester 2008 bis zum Sommersemester 2009, d.h. drei Semester lang, von Dozenten[9] der Universität Augsburg gehalten. Die Grundgesamtheit betrug 144 Studenten, die Zuverlässigkeit der Stichprobe betrug 95 %, die Fehlerquote lag bei 3,8 %. Um die Größe der Stichprobe zu optimieren, wurden die Standardwerte für p und q berücksichtigt, womit die Größe der Stichprobe n = 118,51 ist. Es wurden 118 Studenten befragt und 118 Fragebögen analysiert.

Zweite Phase Gruppe 1: Diese Gruppe bestand aus insgesamt 35 Schülern. 23 von ihnen waren vom Gymnasium Sonthofen, Deutschland und Teilnehmer eines zusätzlich zum Lehrplan angebotenen Mathematikunterrichts, der von zwei Lehrern[10] der Schule gehalten wurde. Der Unterricht dauerte 1 Schuljahr; von 2008 – 2009. Die anderen 12 Schüler waren vom Gymnasium A.B. von Stettensches Institut Augsburg, Deutschland und Teilnehmer eines zusätzlich zum Lehrplan angebotenen Mathematikunterrichts, der von einem Lehrer[11] der Schule gehalten wurde. Der Unterricht wurde während einem Schuljahr, von 2009 – 2010, durchgeführt. Die Schüler waren zwischen 16 und 17 Jahre alt.

Für die Schüler des Gymnasiums Sonthofen wurde eine Lernsequenz auf Grundlage einiger Elemente des didaktischen Engineerings (Artigue, 2002) entworfen. Mit den Schülern des Gymnasiums Augsburg wurde mit einer Situation (siehe Anhang 5) auf Grundlage der Theorie der Situationen (Brousseau, 1986, 1998, 2007) gearbeitet. Sowohl die Lernsequenz als auch die Situation mit Elementen der Gruppentheorie wurden in Übereinstimmung mit den Bildungszielen und Lehrplänen für Mathematik im Freistaat Bayern entworfen. Am Ende der Implementierung wurden die teilnehmenden Schüler gebeten, ein „Essay“ (Ruf und Gallin, 1998) zum Thema „Gruppen“ zu schreiben. Dieses schriftliche Material diente als Instrument zur Datensammlung.

Zweite Phase, Gruppe 2: Diese Gruppe umfasste insgesamt 24 Studenten, die im Sommersemester 2010 am Proseminar über Algebra teilgenommen haben, welches von der Autorin gehalten wurde. In diesem Fall wurde eine Sequenz (siehe Anhang 6) vorbereitet,

---

[9] *Dozenten, Prof. Dr. Ulm, Diplom Math. Brandl, Dr. Motzer und die Autorin.*
[10] *Herr Wucher und Herr Weber. Beide mit mehr als 10 Jahren Unterrichtserfahrung.*
[11] *Der Dozent Prof. Dr. Schneider ist Professor an der Universität Augsburg und hat mehr als 20 Jahre Berufserfahrung im Klassenzimmer. Er ist Kollege der Verfasserin in der Abteilung Mathematikdidaktik.*

für die die angemessene Dokumentation als inhaltliche Unterstützung ausgewählt wurde. Die einzelnen Unterrichtseinheiten des Proseminars wurden zusammen mit den Studenten entworfen. Am Ende wurden die Studenten gebeten, nach freiem Ermessen entweder ihr Tagebuch oder ihre Abfassung des Essays als Material für die Forschungszwecke abzugeben.

Ziele für die Studiengruppen: Die nächste Tabelle (s. Tabelle 19, S. 302) zeigt eine Zusammenfassung über die Studiengruppen; Ziele, Studiensubjekttyp, Kontext und Datenauswertungsmaterial, mit dem die Analyse durchgeführt wurde.

Tabelle: Übersicht über die Studiengruppen.

Gruppe	**Ziele**	**Kontext**	**Themen**	**Analyse-Instrument**
A	Verbindungen suchen zwischen: • Dem durch das Studium der GT entwickelten Denken und dem Lehren der GT • Dem Gelernten und dem durch das Studium der GT entwickelten Denken	Proseminar Algebra, unterschiedliche Dozenten	Lehramtsstudenten der Mathematik	Fragebögen
1	In den Essays der Schüler die unterschiedlichen Dimensionen des MD, die durch die GT entwickelt wurden, wieder finden	Außerordentliches Wahlfach der Mathematik, Didaktische Sequenz	Schüler ca. 17 Jahre	Essay
2	In den Lerntagebüchern und den Kompositionen der Studenten die unterschiedlichen Dimensionen des MD, die durch die GT entwickelt wurden, wieder finden und identifizieren	Proseminar Algebra, Dozent-Wissenschaftler	Lehramtsstudenten der Mathematik	Mathetage-bücher

Einige wichtigen Details über die Instrumente der Datenerfassung werden im Folgenden erklärt.

Die Befragung: Das Ziel der Befragung war, Beziehung zu finden:

1) zwischen dem Denken, das sich durch das Erlernen der Elemente der Gruppentheorie (GT) entwickelt und dem zukünftigen Unterricht über die GT.

2) zwischen dem, was man lernt (was gefällt) und dem durch das Erlernen von Elementen der GT entwickelte Denken.

Ein sekundäres Ziel der Studie war, die verschiedenen Dimensionen des MD zu beobachten. In diesem Fall nicht in direkter Form, sondern es wurde gemäß der verschiedenen Dimensionen des MD gelesen und analysiert.

Die entworfenen Fragebögen sind in Anhang 1 und 2 zu sehen. Das Instrument der Datensammlung war ein Fragebogen mit 8 Fragen, davon 3 geschlossenen Fragen, 4 offenen Fragen und einer halbgeschlossenen Frage, die in ihrer Originalversion im Anhang 1 zu sehen ist.

In diesem Teil der Arbeit und um sich dem zweiten allgemeinen Ziel anzunähern, wurde die Charakterisierung als theoretischer Rahmen für die Interpretation und die Analyse der Antworten auf die offenen Fragen des Fragebogens verwendet.

Essays und Mathematiktagebuch. Das Ziel der Analyse der freien Aufzeichnungen war, das durch die Elemente der GT Erlernte mit der Charakterisierung des MD in Beziehung zu bringen.

Zu diesem Zweck musste man die Dimensionen des mathematischen Denkens mittels Sätzen und Beziehungen zwischen den Sätzen für jeden mathematischen Kontext, der während der didaktischen Sequenzen erlebt wurde, sowohl für die Schüler des Gymnasiums als auch für die Studenten, operationalisieren. Die Sequenzen befinden sich in den Anhängen 3, 4, 5, 6. Die Schüler und Studenten führten Aufzeichnungen nach einigen der folgenden Charakteristiken: Kombinieren der Alltagssprache; Mischen von formalen Wörtern mit verschiedenen Bedeutungen; Verwendung einer speziellen Grammatik und Mischen von Symbolen mit Worten. In allen diesen Aufzeichnungen gibt es eine Vereinigung von regulärer und singulärer Mathematik (Ruf und Gallin, 1998). Unter einem **Essay** versteht man ein „im allgemeinen kurzes literarisches Prosa-Werk, in dem der Autor seine eigenen Ideen zu einer generellen Angelegenheit oder einem generellen Thema zum Ausdruck bringt“ (Lucena 2002, S. 745). Es ist zu betonen, dass für ein Essay keine Abhandlungsforderungen notwendig sind und dass diese nicht umfangreich sind[12]. Außerdem ist es nicht notwendig, zu zitieren oder Quellenangaben zu entnommenen Informationen zu machen. Das Thema für das Essay war die Frage: Was ist eine Gruppe? Die Schüler erhielten ausreichend Zeit, d.h. von 3 Tagen bis zu einer Woche, um es zu verfassen. Unter einem **Mathematiktagebuch** versteht man ein Heft mit schriftlichen Beobachtungen, geschrieben in natürlicher oder ikonischer Sprache, die das Individuum aufschreibt, während es sich im Lernprozess befindet, oder zu dem Zeitpunkt, in dem es ausdrücken „will“, was es selbst über ein Konzept verstanden hat. Diese Lerntagebücher sind wie gewöhnliche Tagebücher. In ihnen versucht das Individuum, persönliche Beziehungen zu finden, Methoden zu vergleichen, persönliche Reflektionen über den Inhalt, den Unterricht und anderes vorzunehmen. Mit diesen Vergleichen und Beobachtungen produziert der Lernende ein Material des Zusammentreffens mit Mathematik.

Operationalisierung und Daten: Die Daten für die Studie wurden durch die Befragungen und die freien Aufzeichnungen erhoben. Es wurden 118 Fragebögen, 16 Essays und 8 Tagebücher ausgewertet. In den Ergebnissen werden die repräsentativsten Aufzeichnungen gezeigt. In Tabelle 23, S. 358 wird die Operationalisierung jeder einzelnen Dimension der Studie aufgezeigt.

Der Prozess der Datenkodifizierung wurde anhand der vier Dimensionen des mathematischen Denkens vorgenommen. Es wurden auch einige operationale Sätze hinzugefügt, damit die Interpretation der Aufzeichnungen vorgenommen werden konnten. Diese Aufteilung wurde mit der regulären und singulären Mathematik (Ruf und Gallin, 1998) verbunden, da die Essays von der singulären Mathematik ist und die variable Gruppentheorie von der regulären Mathematik ist. War auch notwendig, die Denkmittel betrachten und mit all dem sind die sieben Dimensionen dieser Forschungsarbeit: Wahrnehmung (**WMD**), inhaltsbezogenes Denken (**IMD**), Strategien und Verfahren (**SVMD**), nicht-rationale Fähigkeiten (**NRMD**), Denkmittel (**DMD**), regulären und singulären Mathematik. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 22 (S.359) beschrieben.

---

[12] *Umfangreich im Sinne von einem wissenschaftlichen Artikel. Für ein Essay ist es nicht notwendig, sich auf Literatur zu beziehen, nicht notwendigerweise müssen Referenzvermerke gemacht werden. Der Ersteller eines Essays kann auch nur eine Quelle betrachten.*

Darüber hinaus beinhaltet diese Abbildung die Prozesse, die aus dem Handlungsumfeld des Individuums stammen, da dieses die drei Momente sind, die die Art der Kommunikation und letztendlich die Art, wie sich das Individuum ausdrückt, bestimmen. Die Auswertung der Aufzeichnungen wurde unter Verwendung der Paraphrase für jeden als wichtig gehaltenen Satz durchgeführt. Dazu wurden innerhalb der Auswertungseinheiten Nummern vergeben, sowie Notizen entsprechend der Dimensionen der Studie gemacht. Die Paraphrase wurde von der Forscherin durchgeführt und die Texte wurden nicht vom Deutschen ins Spanische übersetzt. Die Analyse beinhaltet nur die Paraphrase, siehe Anhang 16.

Kapitel 6: Resultate

In diesem Kapitel wird die Analyse der Fragebögen, danach der Essays der Schüler und schließlich der Mathematiktagebücher beschrieben. Ziel der Analyse war die Zusammenstellung von Informationen über die Denktypen, die sich mit der Gruppentheorie entwickeln, sowie Beziehungen zwischen dem, was im Schul- und Universitätsunterricht beigebracht werden sollte und der Charakterisierung des mathematischen Denkens zu finden.

Für dieses Kapitel wurden die vom Programm CHIC (siehe S. 312 u. 314) aus den Daten der Fragebögen generierten Graphiken, basierend auf den spezifischen Zielen oder den zu findenden Beziehungen und den Dimensionen der Studie, analysiert.

Ergebnisse der Befragung: Auf Grund der im vorherigen Kapitel realisierten Analyse kann man hinsichtlich der Ziele sagen:

*In Bezug auf 1) wurden zwei Charakterisierungen des MD, und zwar das inhaltsbezogene Denken (**IMD**) und die Kommunikationsmittel festgestellt. Das heißt, dass das Erlernen der Gruppendefinition und der einfache Sätze über Gruppen (T1E) in hohem Maße die Denkdimension, die auf den mathematischen Inhalt bezogen ist, entwickelt und falls die Kommunikationsmittel gut entwickelt sind, sich das Erlernen der Elemente der Gruppentheorie ständig weiterentwickeln würde.*

In Bezug auf 2) wurden die vier Dimensionen des mathematischen Denkens festgestellt. In erster Instanz wurde festgesellt, wie sie unter sich, in zweiter Instanz, wie sie mit dem Gefallen/Interesse für einige Themen der Gruppentheorie und in dritter Instanz, wie sie mit *dem Erlernen einiger Themen der Gruppentheorie in Beziehung stehen. Hiermit möchte man ausdrücken, dass es Vorfaktoren oder vorherige Faktoren (wahrscheinlich in der Persönlichkeitsentwicklung) gibt, die zwischen diesen Instanzen beteiligt sind.*

Bei den Antworten der Studenten wurden Elemente, die mit den Dimensionen des MD identifizierbar sind, festgestellt. In einigen Fällen tragen diese zur Bereicherung der Dimensionen des MD bei.

Letztendlich tragen die Ergebnisse der Befragungen zu den bereits erwähnten Beziehungen und zum zweiten Forschungsziel bei. Damit dieser Beitrag und das Szenario vollständig vorgestellt werden können, fehlt noch die Analyse der Essays und Aufzeichnungen.

Analyseergebnisse der Essays und Tagebücher: In diesem Abschnitt wird die Analyse von einigen der Essays (den repräsentativsten) vorgestellt. Essays ohne detaillierte Beschreibungen der vorgeschlagenen Aufgabe (eines wird aufgezeigt) wurden ausgesondert. Von den übrigen wurden diejenigen ausgewählt, bei denen in der vorläufigen Analyse, die stärksten Beziehungen zu den zu betrachtenden Dimensionen bestanden. In diesem Zusammenhang muss gesagt werden, dass jedes Essay anders ist. Man kann nicht behaupten, dass ein Essay einem anderen ähnelt. Dagegen kann man feststellen, dass es im Hinblick auf die berücksichtigten Dimensionen einige Analyseeinheiten gibt, die repräsentativer als andere sind.

Die wichtigsten Resultate der Essays (siehe Tabelle 21, S. 366) sind:

- Es wurde kein qualitativer Unterschied zwischen den Essays, die aus den verschiedenen Kontexten stammten, festgestellt.

- In allen Essays wurde die Dimension des inhaltsbezogenen Denkens festgestellt: das algebraische Denken und in einigen Fällen das funktionale und arithmetische Denken.

- Es wurden die Dimensionen der Wahrnehmung (**WMD**) und der Strategien (**SMD**) festgestellt. Die Dimension der nicht-rationalen Fähigkeiten (**NRMD**) wurde am wenigsten festgestellt.

- In Bezug auf die Kommunikationsmittel wurde als Basis die natürliche Sprache verwendet. Jedoch konnte man auch semiotische, symbolische mathematische

Repräsentationen sowie Grundvorstellungen, einige Analogien und in einigen Fällen Metaphern feststellen.

- In Bezug auf die singuläre und reguläre Mathematik wurden einige Abweichungen identifiziert. Es stechen einige Essays ins Auge, in denen die singuläre Mathematik nicht vertreten war.

In Bezug auf die Forschungsziele wurde ermittelt:

- Es ist möglich, in den geschriebenen Essays die verschiedenen Dimensionen des MD festzustellen.

- Es ist möglich, eine Kausalitätsbeziehung zwischen den Variablen des MD und der GT abzuleiten. D.h. wenn Schüler/Studenten mit den Elementen der Gruppentheorie GT arbeiten, entwickelt sich das Denken in Bezug auf das algebraische Denken. Es entwickeln sich sowohl die persönlichen Strategien als auch das Prozess-Verständnis. Es gibt eine Beziehung zwischen der GT und den nicht-rationalen Fähigkeiten. Es werden drei verschiedene Kommunikationsmittel benutzt.

Die wichtigsten Ergebnisse aus den Mathe-Tagebüchern (siehe Tabelle 22, S. 369) sind:

- In allen Lerntagebüchern wurden die Dimension der Wahrnehmung, die Dimension des inhaltsbezogenen Denkens, insbesondere des algebraischen, geometrischen, arithmetischen und in einigen Tagebüchern das stochastischen Denkens, sowie die Dimension der Strategien und Verfahren festgestellt.

- Die Dimension der nicht-rationalen Fähigkeiten wurde in den meisten Tagebüchern ermittelt. Sie wurde am häufigsten im Mathe-Tagebuch 1 festgestellt.

- In Bezug auf die Kommunikationsmittel wurde in den Tagebüchern die natürliche Sprache verwendet, aber auch die semiotischen symbolischen mathematischen Repräsentationen und die ikonischen Repräsentationen. Grundvorstellungen wurden nur in drei Mathe-Tagebüchern beobachtet. Somit kann man allgemein behaupten, dass die Schüler/Studenten für neue Inhalte (Elemente der Gruppentheorie) keinen Gebrauch von den Grundvorstellungen machten. In einigen Fällen konnten Analogien und Metaphern bzw. die Absicht zur Metaphern-Bildung festgestellt werden.

- Hinsichtlich der regulären und singulären Mathematik konnte in allen Lerntagebüchern eine Ausgewogenheit identifiziert werden.

Im Hinblick auf die Forschungsziele und im Besonderen auf den Abfassungstyp der Mathe-Tagebücher kann man sagen:

- Es ist möglich, in den Lerntagebüchern die verschiedenen Dimensionen des MD festzustellen.

- Es ist möglich, eine Kausalbeziehung zwischen den Variablen des MD und der GT zu begründen. Das bedeutet: Wenn die Schüler/Studenten mit Elementen der GT arbeiten, entwickelt sich das mit dem algebraischen Wissen in Beziehung stehende Denken. Ebenso werden die Entwicklung der persönlichen Strategien sowie das Prozessverständnis gefördert. Man hat eine Beziehung zwischen der GT und der Dimension der nicht-rationalen Fähigkeiten.

Abschließend kann man sagen, dass sich beim Erlernen von Elementen der GT mathematische Denkarten entwickeln, die in der Charakterisierung des MD enthalten sind. Damit ist das zweite Ziel der Arbeit erreicht und der Anfang für weitere Ziele, die zur Validierung der Charakterisierung des MD unter der Betrachtung anderer mathematischer Bereiche führen, gegeben.

Außerdem wurden hier zwei Themen für weitere Forschungsarbeiten identifiziert: 1. Das mathematische Denken entwickelt sich durch das Erlernen eines mathematischen Wissens und 2. das mathematische Denken entwickelt sich durch die Art und Weise, wie dieses Wissen gelehrt wird.

In Bezug auf die Ergebnisse der Auswertung der Essays und der Mathe-Tagebücher kann Folgendes gesagt werden:

- Es gibt einen qualitativen Unterschied zwischen beiden Formen der freien Aufzeichnungen.

- In den Mathe-Tagebüchern konnte häufiger die Dimension der Wahrnehmung und der nicht-rationalen Prozesse und Fähigkeiten nachgewiesen werden.

- In den Essays wurden als Kommunikationsmittel häufiger die Grundvorstellungen verwendet.

- In beiden Typen der Aufzeichnungen wird häufig das mit dem mathematischen Inhalt verbundene Denken eingesetzt.

Der qualitative Unterschied dieser beiden Typen von Aufzeichnungen besteht in der Art und Weise, wie die Schüler versuchen, zu erklären und zu formulieren, was eine Gruppe ist. Die Werkzeuge (siehe Abschnitt 3.6) der Schüler sind weniger anspruchsvoll und von daher offener. In den Lerntagebüchern sind die die mathematischen Werkzeuge und mediale Ausdruckform anspruchsvoll. Die Studenten versuchen nicht, ein Konzept zu übertragen. Vielmehr versuchen sie, ein Thema zu verstehen und die verwendeten Kommunikationsmittel sind ein Produkt der Gestaltung der didaktischen Sequenz des Proseminars und der schulischen Bildung. Dies kann wie folgt zusammengefasst werden:

- In den Essays wird versucht, mit eigenen Worten und Vorstellungen zu erklären, was eine Gruppe ist.

- In den Lerntagebüchern wird versucht, mit Worten und Vorstellungen aus der regulären Mathematik zu verstehen.

Hinsichtlich der häufig festgestellten Dimension der Wahrnehmung und der nicht-rationalen Prozesse und Fähigkeiten wird angenommen, dass diese durch die Art und Weise und die Struktur der Unterrichtseinheiten im Proseminar bedingt waren.

Das heißt, bei der Planung der Struktur des Proseminars wurden mittels Arbeiten mit Material und der Verwendung von verschiedenen Kommunikationsarten beide Dimensionen berücksichtigt. In gleicher Weise kann man die Ergebnisse der Auswertung der Essays und der Feststellung des Kommunikationsmittels der Grundvorstellungen verstehen.

Dieses ist darauf zurückzuführen, dass, wie es in Schulen sehr üblich ist, die Inhalte unter der Verwendung der Grundvorstellungen als Einführung erklärt wurden. Man vermutet, dass das Auftreten der Grundvorstellungen ein Produkt der schulischen Bildung ist, die die Schüler erfahren haben. Unter Bezug auf die Beobachtungen der Essays und Kommunikationsmittel kann wie folgt zusammengefasst werden:

- Die Entwicklung der Dimension der Wahrnehmung und der Dimension der nicht-rationalen Prozesse und Fähigkeiten könnte ein Produkt der Gestaltung der didaktischen Sequenz des Proseminars sein.

- Die angewendeten Kommunikationsmittel stammen sowohl vom Denkstil des Individuums als auch seinem persönlichen Lernprozess, den er während seiner schulischen Ausbildung entwickelt hat.

Die Feststellungen über das inhaltsbezogene Denken aus den beiden Schriftstücktypen deuten klar darauf hin, dass vier der Dimensionen zum Zeitpunkt des mathematischen Denkens untrennbar sind. Dies zeigt gleichzeitig, dass die die Kommunikationsmittel, anderen Wissensbereichen zuzuordnen ist.

Hinsichtlich der beiden Schriftstücktypen und in Bezug auf das zweite allgemeine Ziel dieser Studie kommt man zu den folgenden Resultaten:

- Es gibt Kausalitätsbeziehungen zwischen dem Erlernen der Elemente der GT und der Dimensionen des mathematischen Denkens; insbesondere zwischen einigen Elementen der GT und den Dimensionen WMD, IMD und DMD.

- Zur Rolle der Metaphern beim Lernen kann festgestellt werden, dass den Gebrauch der Metaphern ein wichtiger Teil des Verständnisses eines Inhalts in den Kindern bewirkt, die dieses kognitive Medium nutzen. Hingegen muss man sagen, dass es nicht die einzige Form des Verstehens von Inhalten ist, was anhand anderer Themen der Studie deutlich wird, bei denen Inhalte ohne Verwendung von Metaphern verstanden wurden.

- Es zeigt sich sowohl im Essay als auch im Tagebuch, welche für die hier präsentierten Ergebnisse als Werkzeuge der Datensammlung dienten, die Existenz von Metaphern und Analogien als Kommunikationsmittel und als Lernmittel der Probanden dieser Studie.

Hinsichtlich der Ergebnisse der Schriftstücke und der Fragebögen, kann Folgendes zusammengefasst werden:

1. Die Analyse der Antworten der Schüler aus der durchgeführten Befragung zeigt für die erste Beziehung (MD-Unterricht TG, siehe Abschnitt 5.6.1.1) die Bedeutung der

Kommunikationsmittel für das Lehren der Elemente der Gruppentheorie (Graphik, Abschnitt 6.1.1, S. 312), was in den Essays bestätigt wurde.

2. Die Auswertung der Antworten zeigt für die zweite Beziehung (entwickeltes MD – Erlernen GT, siehe Abschnitt 5.6.1.1) die Bedeutung der nicht-rationalen Prozesse und Fähigkeiten, der Wahrnehmung und des inhaltsbezogenen Denkens für das Erlernen von einigen Elementen der Gruppentheorie (siehe Graphik, Abschnitt 6.1.1, S. 314), was in den Lerntagebüchern bestätigt wird.

Die Auswertung der Befragungen spiegelt sich in den Essays und Lerntagebüchern wider. Das mathematische Denken offenbart sich unterschiedlich, je nachdem, ob es zum Zeitpunkt des Zeigens eines Ergebnisses, wie bei den Essays, oder im Moment des Lernens, wie bei den Lerntagebüchern, stattfindet. Die Analyse der Fragebögen, der Essays und der Lerntagebücher zeigt drei (Fragebogen, Essay und Mathetagebücher) verschiedene Szenarien im Hinblick auf das mathematische Denken und die Gruppentheorie. Diese vereinigen sich in einem Makroszenarium, das auf kausale Weise die Lehre, das Lernen, die Gruppentheorie und das mathematische Denken verknüpft. Man kann sagen: *Sowohl die Art und Weise der Unterrichtsgestaltung, als auch die individuelle Entwicklung und die kulturelle Umwelt beeinflussen das mathematische Denken während der Lehre sowie während des Erlernens von Elementen der Gruppentheorie.*

Kapitel 7: Schlussfolgerungen

Beginnend mit der Charakterisierung des MD, das sich aus dieser Studie ergibt, kommen wir zu folgenden Schlussfolgerungen: Das MD besteht aus vier Dimensionen, die eng miteinander verknüpft sind: Die Dimension der Wahrnehmung, des inhaltsbezogenen mathematischen Denkens, der Strategien und Verfahren und der nicht-rationalen Prozesse und Fähigkeiten. Und überall sind die Kommunikationsmittel, die in der Entwicklung des mathematischen Denkens unterstützen und helfen.

Als bedeutendste Ergebnisse dieser Studie und im Hinblick auf das erste Ziel, das mathematische Denken zu charakterisieren, kann abschließend zusammengefasst werden:

- Mit der vorgestellten Charakterisierung wird in hohem Maße die Ausgangsfrage „Was ist mathematisches Denken?“ beantwortet und es kann gesagt werden: *Mathematisches Denken ist ein kognitiver Prozess, der die Wahrnehmung, das Denken* *in Bezug auf mathematische Inhalte, die Strategien und Prozesse sowie die nicht-rationalen Fähigkeiten und Prozesse beinhaltet.*

- Das mathematische Denken benutzt Kommunikationsmittel und diese benutzen gleichzeitig das Gedächtnis und die Abstraktion. Dazu kann man sagen: *Das mathematische Denken bedient sich der Grundvorstellungen, Metaphern und Repräsentationen als Kommunikations-mittel (extern) und für Dialoge (intern).*

Dieses erste Ergebnis hat Auswirkungen auf die Art und Weise, wie Mathematik gelehrt und gelernt wird. Diese sind in der Betrachtung der Wahrnehmung und der nicht-rationalen Fähigkeiten als Dimensionen des mathematischen Denkens begründet. Dies indiziert, dass es in der Art und Weise des Lehrens unbedingt Momente geben sollte, die die Wahrnehmung eines mathematischen Objektes seitens des lernenden Subjektes fördern.

Mathematik lernen bedeutet auch rationale und nicht- rationale Fähigkeiten zu entwickeln. Das mathematische Denken zu entwickeln, bedeutet die Entwicklung aller Sinne des Menschen und letztendlich und hauptsächlich aller seiner Fähigkeiten.

Es ist wichtig, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass die Verfahren auch Teil des mathematischen Denkens sind. Diese können nicht bei Seite gelassen werden, denn sie sind auch Teil der Entwicklung des Gedächtnisses und von Gehirnverbindungen (für die Organisation von Informationen), welche für die täglich realisierten kognitiven Prozessen wichtig sind. Dies hat wiederum seine Auswirkungen auf die Lehre der Mathematik. Die Verfahren sollten anfangs als Teil zur Generierung einer persönlichen Strategie und nicht als Inhalt behandelt werden.

In Bezug auf das zweite Ziel: Kausalitätsbeziehungen zwischen dem Erlernen der Elemente der Gruppentheorie und der Charakterisierung des mathematischen Denkens herzustellen, kann gesagt werden: Es gibt Kausalitätsbeziehungen zwischen dem Erlernen der Elemente der Gruppentheorie und der Entwicklung (Beachtung) der Dimensionen des mathematischen Denkens, mehr noch: *Sowohl die Art und Weise der Gestaltung des Unterrichts als auch die persönliche Entwicklung und das kulturelle Umfeld haben Einfluss auf das mathematische Denken sowie auf das Lehren und Erlernen der Elemente der Gruppentheorie.*

Die Kausalitätsbeziehung zwischen Wahrnehmung von mathematischen Objekten, Erlernen und Vorbereitung der didaktischen Sequenzen im Proseminar wurde durch die Analyse der Ergebnisse der Lerntagebücher bewiesen. Dasselbe gilt für die Kausalitätsbeziehung zwischen nicht-rationalen Prozessen und Fähigkeiten und Vorbereitung der didaktischen Sequenz. Man kann sagen: *Der Einbezug von physischen Objekten und einer inaktiven Phase während der Unterrichtseinheiten mit den Jugendlichen des Proseminars, förderten die Fähigkeit der dynamischen Wahrnehmung, das räumliche Vorstellungsvermögens, sowie die Fähigkeiten der Sensibilität und der mathematischen Flexibilität.*

Die Kausalitätsbeziehung zwischen Kommunikationsmittel und Lehren von Elementen der Gruppentheorie (siehe Abschnitte 3, 4, 5, 6) wird durch die Essays und die Lerntagebücher bewiesen. Es wird angenommen, dass die Varietät innerhalb dieser Kausalität von zwei Faktoren abhängt: Erstens vom langfristigen Unterricht, wie der Schulbildung, und davon, was man als Endresultat von ihm bzw. den Schülern erwartet, und zweitens von der Art und Weise der Aufzeichnungen. Es kann gesagt werden: *Die Verwendung der drei Kommunikationsmittel hängt von den Zeitpunkten des Erlernens, in denen sich das Individuum befindet, ab.*

Im Hinblick auf die aufgestellten Hypothesen für das zweite Ziel kann man als Schlussfolgerung aus den Resultaten Folgendes behaupten:

1. In allen Essays und allen Tagebüchern war es möglich, einige der Dimensionen des mathematischen Denkens festzustellen. Das weist darauf hin, dass diese Dimensionen des mathematischen Denkens zu einem gewissen Grad durch die Arbeit mit den Elementen der Gruppentheorie entwickelt wurden.

2. Die Verwendung der Charakterisierung des mathematischen Denkens hatte die Funktion eines theoretischen Rahmens. Daher gab es eine Rückkoppelung von dem Festgestellten mit dem Theoretischen. Es ist hervorzuheben, dass in den freien Aufzeichnungen Elemente festgestellt wurden, die nicht mit dem mathematischen Denken in Verbindung stehen, wie zum Beispiel Elemente in Verbindung mit dem sozialen Verhalten.

3. In den Essays war es möglich, die Bildung von Metaphern festzustellen. Im Allgemeinen wurden in den freien Aufzeichnungen in einem bemerkenswerten

Ausmaß die Analogien verwendet. Man kann sagen, dass die Hypothese teilweise bestätigt wurde, da es in der Tat keine eigenen Kreationen von Metaphern gab. Metaphern wie „eine Gruppe ist eine Gruppe von Umwandlungen“ beziehungsweise „eine Gruppe sind die Symmetrien von einem Objekt“ stammten direkt von der wissenschaftlichen Dozentin und deswegen eigneten sich fast alle Studenten dieses Gruppenkonzept an. Die zwei Essays (E7, E8) sind wirklich bemerkenswert im Versuch, eine Metapher über eine Gruppe in Beziehung zu sozialen Konzepten zu generieren.

4. Diese Hypothese wurde bestätigt: Das inhaltsbezogene Denken, insbesondere das geometrische Denken, und die Wahrnehmung, hier besonders die Fähigkeit der dynamischen Wahrnehmung, wurden in den Aufzeichnungen festgestellt. Außergewöhnlich bemerkenswert ist die Feststellung des stochastischen Denkens (D3, D4) und der nicht-rationalen Intuition (E5).

Als Resultat dieser Studie entstand ein Modell zur Charakterisierung des mathematischen Denkens, welches als theoretischer Rahmen diente. Dieses kann somit als Erfüllung des ersten Ziels angesehen werden.

Das Modell steht in Beziehung zum zweiten Ziel dieser Arbeit, da die drei hier präsentierten Szenarien den Anfang zum Beitrag der Entwicklung des MD zeigen. Darüber hinaus zeigen sie, dass es notwendig ist, das Erlernen von Mathematik für die Entwicklung von Fähigkeiten zu stärken.

Offene Fragen

Im Verlauf dieser Arbeit sind verschiedene Fragen aufgetaucht. Einige von ihnen sind von Interesse für den Mathematikunterricht und bieten sich als mögliche neue Themen für die Forschung bezüglich des mathematischen Denkens an.

Eine dieser Fragen ist Produkt der Ergebnisse aus den Tagebüchern und Essays. Es wurde zuvor erwähnt, dass zwei Betrachtungsweisen existieren: Das mathematische Denken entwickelt sich durch das Erlernen von mathematischem Wissen und/oder das mathematische Denken entwickelt sich durch die Art und Weise, wie dieses Wissen vermittelt wird. Die Frage ist demzufolge: Welches ist die Beziehung zwischen diesen beiden Betrachtungsweisen?

Vor allem haben wir während der Studie bemerkt, dass es notwendig ist, ein Denken, das mit der mathematischen Unsicherheit und dem Fehler in Beziehung steht, einzubeziehen. Diese Art des Denkens generierte vor allem in den Lerntagebüchern persönliche Konfusionen und Unstimmigkeiten zwischen der regulären und singulären Mathematik. Dieses Denken wurde in der Charakterisierung berücksichtigt, aber ausgerechnet das verursachende Denken wie das zum Fehler wurde nicht betrachtet. Dies kommt im Folgenden zum Ausdruck: Gibt es ein Denken des Fehlers/Fehlerdenken oder ist dieses ein inhaltsbezogenes Denken?

Eine zweite Unsicherheit, die während dieser Arbeit aufgetreten ist, ist die über die Einbeziehung der Sinne und der Wahrnehmung in der Mathematik. Auf welche Art und Weise kann die Wahrnehmung in den Lernprozessen und im Denken beeinflussen? Vor allem das Thema der körperlichen Bewegung und die Einbeziehung des Selbstwertgefühls könnten Auswirkungen auf Entscheidungen und Problemlösungen haben und in diesem Sinne kommen folgende Fragen auf: Auf welche Art und Weise kann körperliche Bewegung die mathematische Problemlösung beeinflussen? Welche körperlichen Bewegungen könnten funktionales Denken initiieren? Wir glauben, dass es auf diese Fragen unter Anwendung der Charakterisierung und dem Ausprobieren verschiedener körperlicher Bewegungen Antworten geben könnte.

Eine Forschungsrichtung, die sich aus dieser Arbeit ergab, ist die Fortsetzung der anfänglichen Äußerungen bei Talenten. Diese steht mit dem Konzept der Theorie der Multiplen Intelligenzen von Gardner, das in Abschnitt 1.1. dargestellt wurde, in Zusammenhang. Diese Theorie gibt einige Anhaltspunkte darüber, was in einer Person gefördert und entwickelt werden sollte, damit sie als fähig und/oder intelligent betrachtet wird. Hieraus entstehen die Fragen: Was bedeutet intelligente Mathematik? Und: Welches ist die Beziehung zwischen intelligenter Mathematik und der Charakterisierung des mathematischen Denkens? Derzeit ist die mathematische Intelligenz keine neue Intelligenz, sondern eine Spezifität der Gesamtheit der Intelligenzen. Diese Charakterisierung ist ein neuer Blick auf die mathematischen Fähigkeiten des Individuums und folglich zeigt man eine neue Ansichtsweise über die mathematische Intelligenz, basierend auf den Kommunikationsmitteln und den vier Dimensionen.

Summary

Introduction

The motivation to carry out this work comes from two different sources. The first is of work-experiential kind, from the concerns that emerge at the moment of teaching mathematics to people who: don’t want to learn, that maybe don’t want to think, or that don’t have interest, but don’t manage to find the appropriate way, etc. Among these concerns outstands the interest to find out about the implication between thinking and learning, particularly, the statement “every time you think, you learn” and “every time you learn, you think”. Hence the first question with which the present work from the concept of thought, "What is thinking?” and, in particular “What is mathematical thinking?". It will take into account that learning is included in the process of thinking.

The second motivation source comes from the teaching of the Group theory in the mathematical education of future teachers, content that doesn’t have a direct application in the plans and programs of the Gymnasium. In the German schools with the old plan[13] of the Gymnasium was included the definition of Group. In the current program of Gymnasium[14] doesn’t appear an explicit mention of the teaching of the Group structure, although in this new program is given freedom to choose the subjects in the elective classes. Due to this change emerged the necessity to answer the question: Why working with elements of the Group theory? At least four answers can be found to this question, related with the learning of the 1. mathematics structure, 2. equations and their solutions, 3. physics and 4. symmetries. These four arguments could not be enough for the student who does not have time or that is not interested in knowing it, and that the only thing that needs is the mathematics that will teach in its future work.

This way, other questions come up, such as: Why should we learn the Group theory? Will we teach in our future as a teacher something about Group theory? Although some answers are intended to argue, the student is not clear about the importance of the Group theory and finds no relation between the content taught in its Algebra course and its future work. This way comes up the question that relates the mathematical thinking with the Group theory:

---

[13] *Lehrplan des Jahres 1990 für das Gymnasium in Bayern KWMB1 I 1990 So.-Nr. 3 S. 125 ff; Jahrgangsstufe 11, S. 1220*
[14] *Lehrplan des Jahres 2009 für das Gymnasium in Bayern, Nr. II.3-5 O 1323.1.1/28/5*

Exists there any special kind of mathematical thinking that is developed in the work with the topics of Group theory?

This way and with these motivations arise two objectives for this work, the first is ***characterize the mathematical thinking*** and with this is aimed to answer the question asked by Wittenberg (1963, page. 53) “Was ist eigentlich Mathematik und mathematisches Denken?” [What exactly is mathematic and mathematical thinking?], considering the mathematics is a formal system resulting from cognitive processes (Tall, 1991, 1996) and that in these processes can be detected dimensions, among which are considered also the means of communication. The second objective of this work is ***to establish causality relationships between the learning of the elements of the Group theory and the dimensions of the mathematical thinking***. With this last objective is shown an application of the carried out characterization as theoretical framework and as a tool of data analysis.

This work considers contributions from different fields such as cognitive neuroscience, cognitive psychology and considerations from the development psychology, pedagogical psychology and from the didactics of mathematics. With these contributions was made a characterization of the mathematical thinking (PM, for its acronym in Spanish) through four dimensions. With this, is said which are the thoughts and capacities that are promoted and developed in the mathematic classes, when a class has been designed in base of thinking and learning. On the other hand, didactical considerations were made in the treatment of the basic concepts of the Group theory, coming from Wittenberg (1963), who proposed examples that are in relation with geometry, of Bigalke (1984), who proposes the images for the treatment of groups, in particular the ornaments and of Olfos (1981), who includes the work with concrete material.

Before to continue, it is necessary to specify the conception of mathematic used in this work, this was formulated in base of the different researchers (Alagia, Bressan and Sadovsky, 2005; Biehler, Scholz, Sträßer and Winkelmann, 1994; Davis and Hersh, 2003; Eves, 1983; Freudenthal, 1974, 1979; Leuders, 2003; Núñez, 2008; Parra and Saiz, 1995; Schoenfeld, 1994) and in few words it can be said that: mathematics is a conceptual domain, is the science of the patterns, is the science of the quantity and space, leaded by the order and by a structure. Mathematics uses the symbols, in relation to the quantity and space, through a logical-formal construct. Above all, mathematics is a construction of the man, a cultural creation that values the ideal entities and where the abstract concepts are its objectives of study, it uses the hypothetical-deductive methodologies and an universal language to designate the representations (of the internal and external means) and organize them as an axiomatic system, with all this it is part of all human activity.

With this conception of what mathematic sematic is, it can be said that, being mathematical a human activity, the processes and the development of representations are of equal value as the verification and correction of statements. This means that with this conception of mathematics, are being involved many aspects of the human activity.

Besides, is this idea of mathematics what leaded to the following question of Wittenberg (1963) and at the same time to our second research objective, for this was designed a work plan, where the practical work had five stages, bibliography collection, creation of the questionnaires and of the didactical sequences for pupils and students, application of surveys and of sequences, compilation of information and analysis of them, and the last stage of writing and conclusion. The written work contains 7 chapters, where the first four correspond to the first objective; the two following correspond to the second objective and the last one to the conclusions. Next is shown each one of them, including the necessary definitions and the most outstanding of them.

Chapter 1: State of the art.

This chapter refers to the state of the art about the mathematical thinking (PM). Two different areas of approaching to the PM exist, one of them comes from the Works of researches in giftedness (Castelló and Batle, 1998; Gardner, 2009; Guilford, 1967; Heller and Ziegler, 2007; Marland, 1972; Mönks and Van Boxtel, 1988, 1992; Mönks and Ypenburg, 2005; Thurstone, 1924; Sternberg, 1985, 1997), which have included in their model and theories, elements related to the thinking and, in particular, with elements of the mathematical thinking. From this research area are considered some definitions and conceptions, that finally conformed the mathematical thinking, among them are the ability to resolve problems, the ability to find new problems, the phantasy, the flexibility, the interest, the representation and artistic-visual ability, the numerical ability, the verbal understanding, the spatial ability, the memory, the reasoning, the analytic ability, the process of working the information, the synthesis ability, the linguistic ability and the logical-mathematical ability- these definitions and conception, in a first stage, were divided in two big kinds: dimension of the operations and dimension of the contents.

Other source of approaching to the PM comes from the Works of the experimental researcher David Katz[15] and of the mathematician Félix Klein[16], works that began about year 1910 and that dealt about the development of the concept of space and number (Scholz, 1994). This is followed by the outstanding Works of Piaget (Beth y Piaget, 1966), who were influenced by Klein and Poincaré[17], in which is intended, by discussions of mathematics, to answer the question: What is exactly understood by geometrical intuition? (Scholz, 1994). As a result of these attempts and as a continuation of other Works, was formed in 1976 the group of phycology in mathematics education, known by its acronym PME (Psychology in Mathematics Education), in this group outstands the contribution from Fischbein over the intuition (Biehler et al, 1994; Fischbein, 1975, 1981) and the ones of Freudenthal about mathematics and teaching (Freudenthal, 1974, 1979, 1987).

Since the mathematics didactic includes the psychology and concepts of it in its researches (Schwank, 2003), has emerged an interest from the didactic in mathematics to study what is thinking, and this way knowing about the mathematical thinking, this way a first approach comes from the acceptance of the following statements: "each human being thinks different" (Brunstig-Müller, 1997, S. 17), each person can think mathematically and this thought is promoted by contradictions, tensions and surprises (Mason, Burton y Stacey, 1982), the mathematical thinking is based on the constructivism, from that construction and the thought produced, is raised a sense of the concepts of the terms and of the definitions (Lesh and Kelly, 1994). In these statements is not answered the question, but are only given approaches, these approaches derive in concepts such as: perception, attention, memory (Anderson, 1981), language (Hayes, 1995), planning, problems solution (Engel, 1998), communication (Sfard, 2008), semiotic representations (Duval, 2004), basic ideas (vom Hofe, 1995, 1998), conceptual metaphors (Araya, 2004; English, 1997; Lakoff and Johnson, 1999; Lakoff and Núñez, 2000; Sfard, 1991, 1994, 1997; Soto-Andrade, 2006, 2007a), mathematical strategies (Engel, 1998), variations of the attention (Mason, 1989, 2006), analogies (Araya, Calfucura, Jiménez, Aguirre, Palavicino, Lacourly, Soto-Andrade and Dartnell, 2010), metaphors and images (English, 1997). In this sense, there are important Works about cognitive and didactic functions of the conceptual

---

[15] *David Katz (1884-1953), german psychologist.*
[16] *Felix Klein (1849-1925), german mathematician.*
[17] *Henri Poincaré (1854-1912), french mathematician, theoretical physicist and philosopher.*

metaphors in mathematics (English, 1997; Lakoff and Núñez, 2000; Presmeg, 1997; Sfard, 1991, 1994, 1997; Soto-Andrade, 2006, 2007a).

Regarding models or characterizations of the mathematical thinking, we outstand the Augsburg model (Ulm, 2010) which includes three big dimensions or factors: the thought based on processes, the thought based on the contents and the process of working the information related to elements of the mathematics, and the model of Burton (1984) which proposes a model for the PM, in terms of operation, processes and dynamic.

About the state of art in relation to the Group theory, were considered those that had the cognitive component, in particular the works of Dubinsky, Datermann, Leron, Zazkis (1994), Hart (1994), Leron, Hazzan, Zazkis (1995) and Lars (2009), which carried out researches based on some of the following questions: How many persons learn certain topics of the Group theory? Which is the relation between mathematics comprehension and abstraction in general? How is thought the concept of isomorphism? How could be reinvented the definition of Groups through the symmetries of a geometric figure?

Chapter 2: Human Thinking.

With the information of chapter 1 began the collection of the basic definitions related to the human thinking, such as, think, mental representation, and kinds of thoughts. This way the basic notions of the human thinking considered in this work are the following:

Human thinking: the process of thinking (Asanger and Wenninger, 1999; Brusting-Müller, 1997; Funke, 2006; Margulies, 2000; Anderson, 1975) is considered mainly as an intern, active compromise, which is made through intern images, using intern linguistic terms pictorial representations and other mental contents. Thinking in this context has the aim of obtaining new knowledge, and this is obtained only in the activities that are not focused to the automated routines. At the moment of thinking are used symbols, images and movements, these are used and related each other (consciously and / or unconscious). Besides, these symbols can have predetermined rules, or, these rules can be creations of the own persons. This way is created an abstract world of thinking (Damerow, 1996) and a personal reality. The human being thinks through concepts, which are universal and abstract representations of the objects. These symbols, images and concepts represent a fact, an object, and an action that are used and related at the moment of thinking. The human being thinks also through rules that are considered as statements that relate some concepts with others.

Here outstands the recognition of four ways of human thinking: as *logical reasoning*, the one supported in deductive sentences, is used at the moment the individual looks for conclusions from facts and/or hypothesis, as *probabilistic process*, in which the induction connections are projected over future events, as *problems solution*, the thought based on an action plan and, as *creative thought*, where the new concepts produced are original for the individual and/or society (Funke, 2006).

Mental images: Each living creature reacts to a change in its media with a determined response. This response shows that the living being has noticed this change, understanding this change as a difference in the internal order of the living being (Maturana and Varela, 2007). The perception is a basic capacity of the living beings that is closely related with the internal order and therefore with the internal images the living being has over the area that surrounds it. Those changes of the exterior, that does not alter the internal order of the living being, are not perceived by it. On the contrary, if these changes are perceived, an internal image of the change is generated. The human being is prepared to compare these images between them with some previous ones, to change them and identify them (Hüther, 2009). The brain must be in certain way "trained" to perceived the changes of the habitat, the more changes are perceived, the more possibilities the man has to generate internal images (Spitzer, 2007). The human being has the ability to generate new perceptions and transform them under certain synaptic patterns in internal images, in such way that this image could be anchored in our brain, this is, we can remember the image and it stays recorded in the memory (Hüther, 2009; Sptizer, 2002). Two kinds of mental images are distinguished: internal and external. The internal images are personal productions, among them outstands for this work the named mental representations. The external images are perceived from the exterior, the area that surrounds us, are physical symbols, objects that have external standards with limits or limitations and determined dimensions, are products of the cultural, the social, and the economic, eg semiotic representations.

Mental representations: A mental representation is a group of images/ideas represented in our mind. Is a tool the individual have that drives to take the decision of creating a series of actions that help them in their learning process, and that are generated by the individual when thinking. These representations can be drawings, words, phrases, symbols, sounds, gestures, etc. Some of the characteristics are: there aren't rules for its creation and/or generation and all mental representation are valid for the individual. In the mental representation the principal are the ideas of the human being that are combined in such way that form mental models that give the notion of concept, that is, the thoughts shape what is aimed to express, constructing ideas with images or symbols based on the observation, in the perception and in the experience, being influenced, according to Roth (1989), by the personal resources.

Semiotic representations: are those mental productions constituted by signals, that can be stated in natural language, in algebraic formula, in graphics, through geometric figures or music staves, are the means that an individual has to express or exteriorize its mental representations, to make them visible, accessible and communicable to the others (Duval, 2004). Some examples of semiotic representation systems are: natural language, numerical writing, algebraic writing, geometrical representation, daily language, graphics, and tables. The external representations fulfill three functions, the communication functions, the objectification function and the treatment functions. Even more, the semiotic representations are a support for the mental representations.

Kinds of thoughts: The style of thought is related to the way in which the individual faces a problem, with the view it takes from it and how it solves it or tries to solve it; it is worth to mention that the styles of thinking are influenced by the social media and are part of the personality development. For the previous mentioned and in relation to the mathematical thinking, in this research were considered 5 styles of thinking, (Amelang, Bartussek, Stemmler and Hagemann, 2006; Schwank, 2003; Sternberg, 1985): the functional thinking, the formal thinking, the organizing thinking, the differential thinking and the predicative thinking. Among them outstands the style of the functional thinking, which recognizes the dynamic of the differences and these are used during the process of thinking to order elements, the movement acts here as a production criteria.

The style of predicative thinking is observed when recognizing similarities and in the utilization of them to structure elements systematically, in this case the similarity acts as a production criteria at the moment of facing a problem. The formal style of thinking will recognize and use objectives in a situation; the individual is driven through objectives and achievements, looks for the associations among one step and other, in this process it asks Why? And For what? The formal thinking is the thinking of the "orientation" of what is being done. The organizing thinking is directly related with the abilities of the thought; it uses the representations and "organizes" them giving them a structure in the thinking. The differential thinking is characterized by a search to show the internal differences of an individual, this kind of thought will derive in concepts as convergent and divergent or in terms as social creativity. Among the differential thinking are two ways, the liberal differential thinking and the conservative differential thinking. The external representations are original and traditional respectively.

According to these different styles of thinking, the individual will generate different action plans, will generate questions and will find answers; these styles of thinking will origin the way to perceive objects and the information processing of the individual. That is, these styles of thinking will develop according to the conditions of the media and to what the individual requires.

Cognitive processes: The cognition is the faculty to process the information that has been obtained from the perception, that is, thinking and understanding the way the brain works (Hayes, 1995) or more general , with "the way the nervous system works" (Gallistel, 1998, pág.9). The living being is constantly receiving information from the environment, as this information is processed, which objects are more attended and which not, and which are the processes that the individual will carry out in each moment, are some of the subject that are intended to describe, in terms of thinking and understanding, these are some of the huge challenges of the cognitive psychology. Some of the cognitive processes that the being constantly carries out are the perception, attention, thinking (Funke, 2006), memory (Anderson, 1981) and language (Hayes, 1995; Frauenfelder and Floccia, 1999), motor coordination and planning (Andler, 2004). The first process carried out in a situation is to perceive, and observe what occurs. The perception the individual has of the environment will allow the identification of shapes and lines, differentiating animals, persons, things, etc. To then compare previous experiences in similar situations.

In this work is highlighted the perception as a new element in the characterization of the PM, other elements such as memory have been worked lot and with the new contributions to the neurology, it can be stated that the perception and its study will give new focuses to the education in mathematics. This new focus has its origin in the embodied cognition (Lakoff and Johnson, 1999; Parzysz, Kadunz, Robotti and Rogers, 2008), this is, based on the fact that the human being can construct its own cognitive categories, mental models from the perceptions, that interpret and evaluate the phenomenon and that the human being interacts with itself, with its physical environment and above all with its social environment, it can be said that the main thing of the embodied cognition is the root of the cognition whether in the brain as in the body. Which means including in the construction of the meaning of the actions the metaphors and the senses of the human being. It is worth to mention that in this chapter were dealt 14 senses (Dehaene, 1999; Reeves, 1996; Dehaene y Brannon, 2011; Stadler, Seeger y Raeithel, 1975; Steiner, 2009; Zimmer, 2005), which were taken up again in the characterization of the PM.

Besides, it is worth to stress that over the styles of thinking and the ways of thinking, could be considered now the four basic cognitive models (Flessas y Lussier, 2005), to know, sequential-verbal, sequential-nonverbal, simultaneous-verbal and simultaneous-nonverbal.

Chapter 3

In this chapter are dealt again the cognitive processes, but in this occasion, in the light of the mathematical knowledge, a relation is made between the different autonomous systems (table 3 in text, page 154) and chapter 2. In this chapter are found the first signs of the dimensions of the PM. It is worth to mention that based on chapter 2 and on the necessity to integrate the perception, the work considers the mathematical thinking and not the mathematical reasoning, since the mathematical reasoning refers only to one part of all the thought that is usually related with the logical and with arguments that begin and finish, arguments that conduct to a determined ending. The reasoning does not include intuitive or sensorial aspects, the thought in its wider and more natural way does. Even more, the mathematical thinking (PM) is a final product from many neuropsychological processes; these processes come and are developed in different areas and require different abilities of the individual. The PM is a product from the integration of different sensorial and cognitive modalities.

According to the mathematical knowledge, it can be said that it only has sense when it is communicated, when is possible to communicate it in a social system. This conducts teachers and researchers to consider three autonomous systems with direct and indirect interactions.

Table: Autonomous systems.

Mathematics	Teachers	Pupils - Students
Knowledge	Mathematics classes	Learning and mathematics comprehension
Concepts as relations	Situations – Problems	Individual and subjective interpretations
Universal language, Symbols	Communication and Class culture	Dialog systems and
Epistemological system	Social system	Cognitive processes

Each one of the three areas of this table represent an autonomous and self-referential system, the relations given among the three are not in causal sequence, there does not occur the sequence from the mathematics to the teachers and from the teachers to the students heads (Brunner, 2001), between these systems are interdependences or connections (Varela, 1997) that are only indirect effects and its repercussions. This way, the theoretical mathematical knowledge is modified if it is considered as an object to communicate and in the process of comprehension of the pupil is produced other "change" of the mathematical knowledge. With this is aimed to say that the mathematical knowledge of the books is one and the one of the teacher is other similar to the one of the books and the one of the pupil will be a very personal one and "similar" to the one of the teacher, with luck. Then, it is aimed that through the communication and the dialog between the mates are produced analogies of the mathematical knowledge of each of these autonomous systems. Even more, it is aimed the creation of metaphors about the concepts, which permit in a dialog, the best understanding of the personal representations.

With relation to the cognitive processes in mathematics and as a summary of section 3.1 of chapter 3, are considered the cognitive processes seen in section 2.1, related with mathematical contents, that is, the formal definition of a mathematical concept is considered and on the other hand are considered the personal definitions of the same concept, coming from a cognitive process that is related with the concept in question, each one of these conceptions are named *regular mathematics* and *singular mathematics* (Ruf y Gallin, 1998). Other examples of cognitive processes are shown in section 3.1.5, which are a mix of the seven shown in table 2 (p. 136), as for example, the conceptualization, problems solving, texts comprehension, etc.

When carrying out of analogies and in the creation of metaphors, appear the seven cognitive processes already mentioned and other processes that are related to the senses. Some of the processes or cognitive capacities that are frequently used and are necessary in the problems related to the arithmetic (Lakoff and Núñez, 2000) are: grouping, order, matching, the memory, assign cardinal numbers and recognize the interdependence of the order. Besides, other cognitive capacities are required such as the combinatorial grouping capacity and the capacity to symbolize, the semiosis.

One of the cognitive processes or cognitive capacities that are of interest in this work is the capacity to metaphor. To introduce the topic metaphors in mathematics, we begin with "metonymy" being that "Metonymy provides foundations on which the metaphorical edifice is built“ (Goatly, 2011, p. 57). Metonymy is understood as the use of words, which have a logical relationship to the concept to be expressed. The words used, their meaning and interpretation are in the same conceptual domain (Ibídem, 2011). Say for example: "He drank three bottles," the speaker means, in effect: "He drank the contents of three bottles", this is to use a metonymy, which is a partnership between the words contents and container. Another example of metonymy, you have to say "I read Umberto Eco," where the author identifies with some of his works. That is, a metonymy is the use of a word, on the other, with a relationship and which relate to the same entity (Gutiérrez, 2010). Moreover, these are parts of our everyday conceptual system and are used automatically, ie apply effortlessly and unconsciously. Thus, the use of symbols in mathematics can be considered as the application of metonymy (Pimm, 1987, 1992). Also one can speak of metonymy in the use of symbols which replace numeric quantities, but this replacement is much more complex and in the following cite can be clarify: “Zahlenreihen konstituieren einen metonymischen Bezug zwischen Bildern, Begriffen und Metaphern, wo ein solcher sonst nicht oder nicht unmittelbar zu fassen ist.” [Sequences of numbers are a metonymic relationship between images, concepts and metaphors] (Largier, 2012, p. 210).

The *metaphor* is referred to the “figurative” transmission of one or more word(s), which is/are related to a concept, by means and interpretations of the words that go beyond its common meaning (Maier and Schweiger, 1999). Even more, “*Our subjective mental life is enormous in scope and richness. We make subjective judgments about such abstract things as importance, similarity, difficulty, and morality, and we have subjective experiences of desire, affection, intimacy, and achievement. Yet, as rich as these experiences are, much of* *the way we conceptualize them, reason about them, and visualize them comes from other domains of experience*." (Lakoff y Johnson, 1999, page. 45). Besides we must consider that *"Elle opère donc un transfert de sens, d'un domaine, dit domaine source, à un autre, dit domaine cible. Une métaphore est ainsi, plutôt une flèche, qui pointe d'un objet à un autre, qu'un lien entre deux objets."* (Soto-Andrade, 2006, page 124)

About metaphors in mathematics, the first signs of them are in Pimm (1987) and Steiner (1988), in this work is dealt the *conceptual metaphor* in the sense of the Works of Lakoff and Núñez (2000), Presmeg (1997), Sfard (1997) and Soto-Andrade (2006, 2007a), with these researches has reemerged the term metaphor, where the German analogous, in the sense they are operationally equivalent, would be the *Grundvorstellungen* (vom Hofe, 1995). Other cognitive process related to the conceptual metaphors is the term "reification". According to Sfard (1994), reification is a transition from an operational way of thinking to a structural one, process that is frequently used in the problems solving and in the encapsulation (Dubinsky y McDonald, 2001), of the mathematical information.

A diagram was design (see fig. 3, p. 169), to show the relation between the metaphors and the representations shown in table 3 (p. 154) and what was mentioned about the mathematical thinking and its necessity to communicate it (table 1, p. 126). In section 3.3, is informed also about the use of metaphors in the mathematics classes (Parzysy, Kadunz, Robotti and Rogers, 2008; Thompson and Sfard, 1994). It is informed that the conceptual metaphor is not only a communication media, but also a cognitive mechanism that extends the structure of the corporal experiences.

According to sections 3.4 and 3.5 it can be said that: *whether the procedures as the strategies are part of the PM, these are two different stadiums of cognitive processes, the first is related in first instance with the memory and the second is related in first term with the planning.* According to the procedures are considered the different ways to sum, the different ways to multiply and the multiple ways to divide.

According to strategies (Bardy, 2007; Ben-Zeev, 1996; Bruder, 2003; Bruder and Müller,1990; Craig, 2009; Hesse, 2009; Mayer, 2003; Pimm, 1987; Watson and Mason, 1998), are considered from the beginning of the systematical test, the beginning of the ends, the first of invariance, Dirichlet's boxes principle, the symmetrical principle, backwards work, factorization of the problem in parts, restructuration, the generalization as a help for the solution and the principle of analogy as a strategy to solve problems. In each of the cases is presented a problem of the literature and others that were designed specially to illustrate the strategy, particularly see table 13 (p. 196).

About the tools of the PM, it can be mentioned that: *a mathematics will use at the moment of thinking numbers, symbols (letters such as "x" and "y" and other symbols), will think with words, with visual mental images (Araya, 2004), with auditory mental images, with tactile mental images and with motor mental images, as gestures with the hand and others. That is, the mathematician thinks through mental representations, motor representations and through semiotic representations.* And according to the use of the logical thinking, is taken again the one of Freudenthal (1974, 1979), that proposes for the process of developing and using the logical thinking, not beginning with daily things, but from a fictitious reality, but with the possibility of represent them in a real way and with common sense.

One of the subjects stressed in chapter 3 has relation with mathematics and the perception, dealt in section 3.8, this origins two of the dimensions of PM, namely, the perception component and the component of the non-rational capacities. The first with relation to what is perceived with the senses and that can be related with the capacities described in the next chapter and the second related with processes that are not understood and that doesn't seem to be product of the reasoning, such as the *intuition*. In this section are considered again the 14 senses of the human being, dealt in section 2.6, outstanding the sense of number, the sense of word, the sense of space and the capacity to perceive patterns.

In sections 3.9 and 3.8 is justified the component of the non-rational capacities, where one of them is the intuition. Other capacity is the phantasy and/or mathematical imagination; this comes from the way of perceiving the environment and, this way, the influence in the way of processing the information and decision making. This way, the non-rational capacities are not products of a determined reasoning and are part of the thinking. With this argument are included these capacities in the characterization of the PM. Others to consider are: *mathematical flexibility*, *mathematical sensibility* and *mathematical creativity*.

Chapter 4: Characterization of the mathematical thinking.

With chapter 3 we are in conditions of characterize the mathematical thinking and complete the Augsburg model (Ulm, 2010) for the PM. This chapter is the first result of this investigation and responses the initial question, it has four sections, each of them deals the dimensions of the PM. The mathematical thinking is an active cognitive process, so it involves neurological activities that compromise an internal dialog, that relates and uses all kind of representations, rational and non-rational capacities, developed capacities or to develop and knowledge saved in the memory and information to save. This process is related to the experience of new and interesting situations for the individual and with the search of responses to the problems that the individual determines personally, with the aim of creating knowledge over the environment that surrounds it, and this way construct an individual mathematical world, with own connections and with own systems named[18] of the knowledge.

One of the results of this work is to make the difference between ways of thinking and dimensions, both have the sense of being tools of thinking, this is, both are used in the process, but in different ways. As PM ways are:

1. The styles of thinking.
2. The mathematical knowledge.
3. The communication vehicles, among them the mental, semiotic representations, the conceptual metaphors and the *basic ideas* in mathematics.
4. The abstraction and the memory, that are related with the mental representations and with the information work process.

This way, these dimensions are grouped from its cognitive precedence and from its structure, the four presented next are considered as the ones that originate the subject in the communication:

[18] The own systems of calls are the ones that are generated in the learning of the mathematics knowledge, among them are the movements, the images, the words, etc. that lead to call a determined mathematics object, since it is stored in the memory. For example, the mathematicsematical object cosine function, an own system of calls of this knowledge, could contain graphic images, movement and words of the definition of cosine function.

1. The perception, that comes from the senses and in this dimension outstands the movement perception, the time perception, the space perception and from these three, the dynamic and static perception of the mathematical objects, the sense of the words, etc.

2. The mathematical contents, considered as products of the human being in the human history, which at the same time consider the five categories shown in the summary of chapter 3, plus the formal thinking.

3. The strategies and procedures that come from the development of the individual with the content and the media. In this dimension is risked the knowledge and so, again the memory has an important cognitive role, as well as the capacities that are set off in the search and development of a plan.

4. The non-rational capacities that come from the development of non-rational activities. This dimension involves aspects as the intuition, creativity, common sense, phantasy, etc.

To make an iconic representation of the characterization was chosen a tetrahedron[19], because this doesn't priories any of its vertexes, for this see figure 9, p. 229. As well as the figure is a tetrahedron, this characterization has been named as "*tetrahedral model for the mathematical thinking*".

The communication media as the representations, the basic ideas and the metaphors, considered as cognitive processes help us to store the new information, to call the information, to make internal dialogs between these dimensions and to communicate to the exterior; this means that the memory is "included inside" of the model. For this reason, the communication and the dialog are of vital importance in the mathematics classes, in this place and in this moment is where the abstraction takes form and the arguments are developed. Where the logical constructs and the use of logic as seen in section 3.6.1, form part of the base of the mathematical demonstrations and through these elements that get stronger and with more sense, as in the individual as in the learning process.

---

[19] *A Tetraedron is a platonic solid where, each face is the same regular polygon (triangle) and the same number of polygons meet at each vertex (3 corner).*

In these moments of dialogs, will be important the development of the language and the use of appropriate words to “convince” that is the best stance, where the constructive critic will lead to the best results, where the abstraction process has its reward. With this is aimed to say that the memory, the abstractions play a role of importance in the dialog and communication process.

The perception: In this category outstands the senses mentioned in section 2.6, since through the senses is perceived the environment, is conceived the environment and in the autopoiesis process (Hallowen, 2009; Maturana and Varela, 1980) is constructed the world, with this and through the senses and of the perception, begins the internal dialog, that is, is through all the senses, that the mental representations are formed and these will be then, a result of the development of these senses, of the connections and relations that are made with the information of the environment and of the interior of the individual (Maturana et al., 1980). The senses considered are visual, auditory, tactile, of pressure, taste, smell, of temperature, space or position, of force and tension, of form, of word or verbal sense, of movement that includes the one of rotation, of balance or static sense, of number, of time.

The perception of movement, the perception of time, the perception of space and the perception of balance, give information about the condition of an object and in particular allow the individual to decide if the object is considered in movement or static and carry out a dynamic or static mental representation of the mathematical objects. With all the senses, in special with the sense of word, is developed the metaphoric capacity as an internal and external communication media.

Finally with what was seen in section 2.6 and 3.8, and the section dedicated to the mathematics capacities, is shown as a result of this work, the following list of categories of this dimension:

- Capacity to perceive the dynamic
- Capacity to perceive the static
- Visual capacity
- Spatial capacity
- Numerical capacity

- Metaphoric capacity
- Capacity to perceive cause and effect
- Capacity to balance and equalize

The thought associated with the mathematical content: This way, as seen in section 3.12, in the Augsburg model, one of the dimensions of the PM is the thought associated to the mathematical content. This component contains the categories:

- Numerical and arithmetical thinking
- Geometric thinking
- Algebraic thinking
- Stochastic thinking
- Functional thinking
- Formal Thinking

These thoughts are considered as a part of the scholar learning, and they promote the use of structured conceptual maps and strongly associated to the memory.

In this category is where the mathematical knowledge and its autonomous systems (section 2.1.3) determine the way of education and the way to develop the different categories of the PM. Our experience in classes' observation, that has been carried out in different education levels and in particular in the work with first semester students, has shown that it is just this dimension the one that has been developing for years, without considering the other three dimensions that form the PM.

The strategies and procedures: As seen in sections 3.4 and 3.5.1 until 3.5.10, the strategies and procedures are part of the categorization of the PM. The strategies considered in this work are:

- The systematic proof
- The principle of the ends

- Dirichlet's boxes principle
- The invariance principle
- Symmetric principle
- Backwards work
- Factorization of the problem in parts
- Restructuring
- Generalization.
- The analogy principle.

Where the development of each of them allows to relate them with the mathematical creativity (as will be seen in the next section) and with the cognitive processes in mathematics. These must be a mean in the learning and not a content to teach, if it would be possible to do. These strategies must be talked and analyzed in favor of a comprehension, but not in the role of content. The strategies need time, are combinable and adaptable. A problem or situation can generate more than one strategy; here have been considered the most used by the pupils (Bardy, 2007). In table 11 (S. 180) is shown a general strategy classification, carried out by Watson and Matson (1998).

Non rational processes and capacities: In this work we have considered the non-rational processes, which we have named that for having a different origin than reason and to the conscious mental processes, these non-rational processes have a great influence in the cognitive processes. These are related with the mathematical spirit (section 3.9), with the tools of the mathematical thinking and with the mathematical abilities like: common sense, creativity, intuition, phantasy and/or imagination, etc. they are in other category of the PM, which we will name non rational processes. The non-rational processes and capacities have their origin in the beliefs, in the daily experiences and are influenced by the direct and indirect environment. Examples of the environment are the ones observed in the surroundings, the corporal activities carried out, etc. like indirect environment is understood the country economy, the culture, the weather, etc. These non-rational processes are part of the cognitive processes and of the same kind like the learning and memory, these doesn't response to a determined structure, they have a direct connection with the culture, with the environment, with the emotions, with the interest and with the perception. Some of these processes and capacities have special interference in mats, like:

- Intuition.
- Creativity.
- Sensibility.
- Flexibility.
- Phantasy and/or imagination.

This characterization of the mathematical thinking (PM) allows, on one hand, to include the perception as an important component to consider in the development of the PM and, on the other hand, to give a response to the question: What is the mathematical thinking? To know: we understand by mathematical thinking a cognitive process (neurobiological), that links perceptions, contents, capacities and strategies, this is produced when the individual is found in situations or problems related with mathematical contents that are interesting for the individual or that present a challenge in its personal cognitive structure. The mathematical thinking uses different communication media, like representation, metaphors and basic ideas.

A vision of what has been seen in this chapter and that is one of the most important results of this work, can be appreciated in the next figure (Fig. 15, p. 281 in text), which shows the 5 dimensions of the PM, which at the same time form part of a tetrahedral relation between them, this means, none of these dimensions is over any of them and its relation with the others have the same weight; which finally shows that these dimensions should be in balance, and that our mathematics classes should develop these four dimensions at the same time. In the center are the communication media the human being has and the one that has been spoken about in the first chapters.

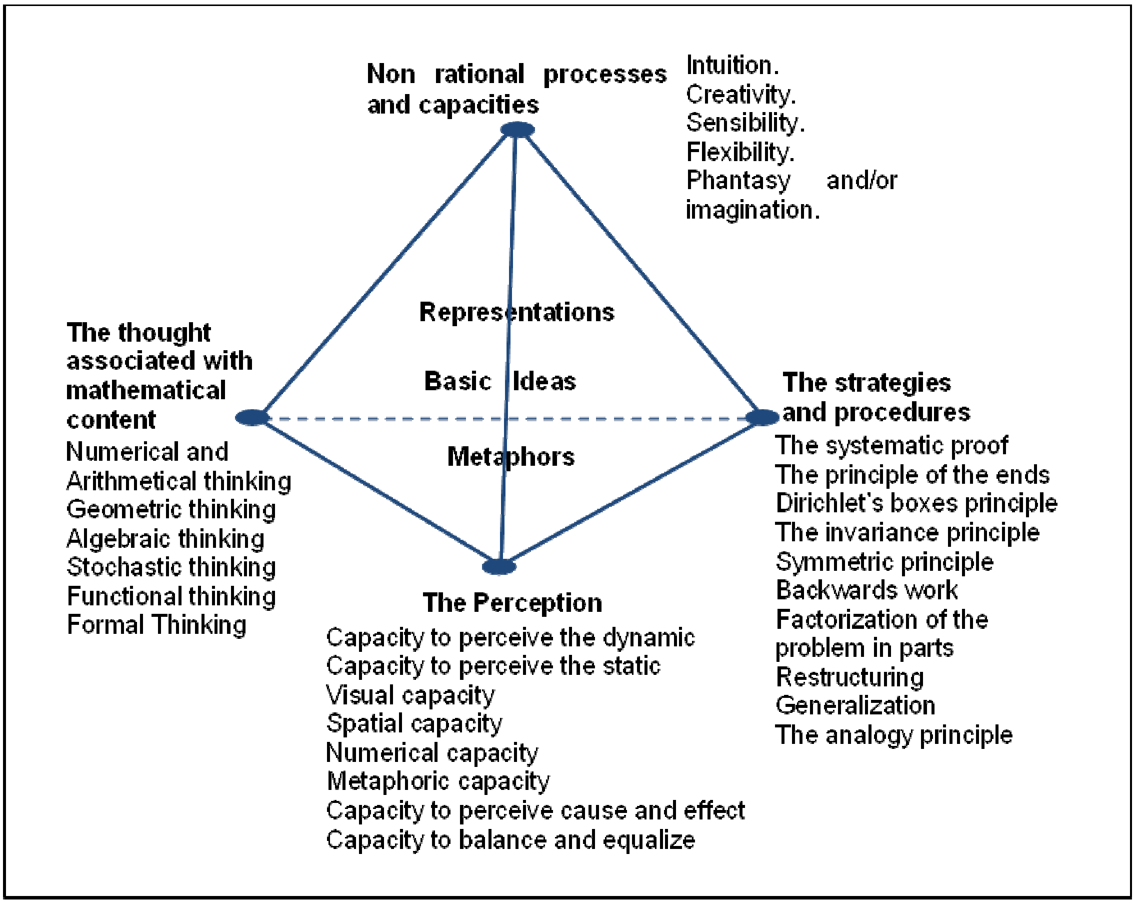


Figure: Tetrahedral model of the mathematical thinking

Finally, this chapter shows the result of the first objective of this work, which is characterizing the mathematical thinking. In the next chapters will be seen how this characterization is used in the analysis of texts and how there are students that in natural way, already recognize the development of some subdimentions in the learning of elements of the Group theory.

Chapter 5: Methodology.

In this chapter is presented the methodology, having in mind the PM has four dimensions that have been mentioned and characterized in chapter 4. Based on this, are outlined the specific objectives. *Detect different kinds of thinking that are developed in the learning of the Group theory; Find relations between the learning of some elements of the Group theory and the characterization of the PM and relations between the teaching of some elements of the Group theory and the characterization of the PM.* That is, determine which are the dimensions that are developed in different mathematical didactic contexts around the Group theory. Here is seen the description of the kind of study, the definition of the variable, the design of the investigation, the individuals and the context, section in which is commented about the information collection to pass to the next chapter, which is the analysis of the collected information.

This research has a mixed focus, which is, qualitative and quantitative; mixed since there is a treatment of the information whether numerical as qualitative. Although Bortz and Döring (2006), depends on the way of analysis of the information, the focus that must be given to the research, as the information analysis have a quantitative analysis through the CHIC[20] program and the analysis of the graphics is made in a qualitative way, it can be said that this research has a mixed focus.

Kind of study

In general, for the human and social sciences, there are four kinds of studies, which are classified according to their objectives: descriptive, explorative, correlational and explanatory (Bortz y Döring, 2006). This work is found in an explanatory research, since it is aimed to establish causality relationships between the Group theory and the mathematical thinking, this is, the study looks to find the causes and the effects that cause certain phenomenon (the phenomenon is the thinking caused by the TG).

Study's variables.

As this is a mixed explanatory study, two variables are to relate, to know:

- Elements of the Group theory.
- Dimensions of the PM.

Both variables have been previously developed, one in section 1.6.1 and the other in chapter 4.

The elements of the Group theory that were considered in this work are: the definition of Groups, theorems and related propositions, quotient group, order and cyclical groups, isomorphism, operations of groups over collections, symmetrical group and derivatives: magical boxes, symmetries of ornaments, parquets and crystals.

---

[20]*Computing program named Classification Hiérarchique Implicative et Cohesitive with acronym CHIC, designed for the implicative analysis (Gras, 1996).*

Design of the research: By the form of its design it is experimental (Bortz y Döring, 2006). One of the variable has been manipulated, the one of the elements of the TG.

To organize this work are considered two stages: one mixed and other qualitative. In the first stage is made a mixed study, since is used the CHIC program, which makes a treatment of the information in a quantitative way using the implication over the classic theory and the Poison law in the graphic analysis. The graphics are delivered in an automatic way through this program, the information analysis and of the open questions of the questionnaire are made in base of the model of the characterization of the PM. In this first phase has been used as a tool of information collection the survey (ibídem, 2006) and has been carried out an implicative analysis (Gras, 1996, 2005).

The social hermeneutic qualitative method has been chosen for the second stage, since it has a special importance in the evaluation and interpretation of texts and for being considered as the interpretation art (Soeffner, 2005). On the other hand, must be understood the meaning of the text and make them clear, even more, it is about understanding the general behavior of the individuals with their surrounding and of their resulting products as part of the human thinking (Danner, 1994). In both phases of the analysis, are included the four postulated of the understanding of Lamnek (1988): the psychological understanding, the significative understanding, the elemental thinking and the raised understanding.

Subjects, contexts and tools of information compilation. For this study are two groups of subjects; one for the first phase and 2 groups of subjects for the second phase.

First Phase, Group A: Participants of the pro seminar of algebra, course for formation of mathematics teacher, as of the Grundschule (elementary school, children between 6 - 10 years old), the Hauptschule (primary school, children between 11-16 years old) and the Realschule (primary school, children between 11-16 years old). Most of these students have already coursed at least one of the four years of study. These pro seminars were given by professors of the University of Augsburg[21], during the summer semester of 2008 until the summer semester of 2009, this is, during three semesters. The total population considered was of 144 students, the reliability of the test is of a 95%, since the error

[21] *Lecturers Prof. Dr. Ulm, Diplom Math. Brandl, Dr. Motzer and M. Sc. Reyes-Santander.*

margin is of a 3,8%, and to maximize the size of the sample, were considered the standard values for p and q, with this the size of the sample is n=118.51, the quantity of polled was 118 students and the quantity of questionnaires analyzed were 118.

Second phase, Group 1: Composed by 35 pupils, where 23 of them are of the Gymnasium Sonthofen, in Sonthofen, Germany; participants of the extracurricular course in mathematical area, given by two teachers[22] of the school. The duration of the course lasted one scholar year, between 2008 and 2009. The other 12 pupils are of the Gymnasium A. B. Stettensches, in Augsburg, Germany, participants of the extracurricular course in mathematics area, given by a teacher of the same school[23]. The course was carried out during the scholar year, between 2009 and 2010. The age of the pupils was between 16 and 17 years old. To the students of the Gymnasium Sonthofen was designed a didactic sequence based on some elements of the Didactic Engineering (Artigue, 2002). With pupils of the Gymnasium in Augsburg, was worked with a situation (see appendix 5) based on the Theory of situations (Brousseau, 1986, 1998, 2007). Both, the didactic sequence and the situation with elements of the Group theory, were designed according to the objectives and programs of mathematics education of Bavaria. At the end of the implementation, the pupils were asked to make an “essay” (Ruf and Gallin, 1998), with the “group” subject. Using this described material as an instrument for the information collection.

Second phase, group 2: Formed by 24 pupils, participants of the pro seminar of algebra, of the summer semester of 2010, given by the researcher and teacher M. Sc. Mss. Reyes-Santander. In this case, was prepared a sequence (see appendix 6) and was chosen the appropriate bibliography as support content, was designed in group with the pupils the different sessions that formed the pro seminar. At the end, as research material they were asked to give the diary and to freely give the essay written, that is, they had to choose between one and another.

Objectives for the groups of the study: In the following table is shown a summary of the groups of the study, including the objective, kind of individual, the context and the material of the information origin, over which the analysis will be made.

---

[22] *Mr. Wucher and Mr. Weber. Both teachers with more than ten years of experience.*
[23] *Teacher Mr. Prof. Dr. Schneider, has an outstanding trajectory as teacher in the University of Augsburg, with more than twenty years of experience in the classroom and colleague of the department of mathematics didactics.*

Some important details about the collection instruments are specified next:

The survey. The objective of the survey is to find relations between:

1) The thoughts developed by the study of elements of the TG and the future teaching of the TG.

2) What is learnt (what is liked) and the thoughts developed by the study of elements of the TG.

A secondary objective of the survey is to observe the different dimensions of the PM, in this case is not made directly, but they are read and analyzed according to the different dimensions and their categories of the PM.

The designed questionnaires can be seen in appendix 1 and 2. The information collection instrument is a questionnaire with 8 questions, 3 closed questions and 4 open ones and a semi closed, which can be seen in its original version in appendix 1. In this work, and for the second general objective, was used the characterization as a theoretical framework of interpretation and analysis of the open answers of the questionnaires.

Essays and Mathematiktagebuch. The objective of this analysis of the free writings is relate what was learnt through the study of elements of the TG and the characterization of the mathematical thinking.

For this had to be operationalized the dimensions of the mathematical thinking, through phases and relations through phases, in each of the mathematical contexts experienced during the application of the didactical sequences, as for the gymnasium pupils as for the students. These sequences can be seen in appendix 3, 4, 5 and 6. The pupils and students produced writings with some of the following characteristics: combine the daily language, mix formal words with different senses, use of a special grammar, mix symbols with words. In all these writings is a conjugation between the regular mathematics and the singular mathematics (Ruf y Gallin, 1998). An **essay** is understood as a “literary work in prose, generally of short extension, in which the author exposes its own ideas about a matter or general subject” (Lucena, 2002, page. 745). It is worth to mention that in an essay is not necessary the requirement of the deals and are not extensive[24]. Besides, it is not necessary to make appointments or inform about the source where the information has been extracted. The essay subject was expressed in the question: What is a group? And the pupils had the enough time to write it, from three days until a week. As **mathematical diary** is understood a notebook with written observations in the natural or iconic language the individual develops when is in the process of learning a subject or when the individual has "wanted" to specify what he/she has understood with a concept.

These learning diaries are as personal diaries, in them the individual tries to remember personal relationships, compare methods, and make personal reflex ions about the content, the class and others. From these comparisons or observations the student makes a reunion material between both mathematics.

Operationalization and information: The information of the study is collected from the surveys and the free writings. 118 questionnaires, 16 essays and 8 diaries are analyzed; showing in the results the most representative writings. In table 23, S.262, is shown the operationalization of each of the dimensions of the study.

The process of codification of the information was made based on the four dimensions of the mathematical thinking, and some operational phrases have been added also, to be able then to make the interpretation of the writings, this was the regular and singular mathematics (Ruf and Gallin, 1998), which the singular mathematics is in the essays and diaries and the regular mathematics is in the theory group. It was also necessary to add the comunications vehicle with this all that the study has seven dimensions: the perception (PMP), the thoughts related to the content (PMC), the strategies and the procedures (PME), the non-rational capacities (PMCR) and the thinking vehicles (PMV), regular and singular mathematics. This relation is described in figure 22 (S.359). Even more, in this figure are included the processes coming from the action context of the individual, since these three moments are the ones that determine the communication way and finally the way to express of the individuals.

An interpretation of the essays is made using paraphrase, for each of the phrases considered relevant, for this have been included numbers in the analysis units, also have

---

[24] *Extensive in the sense of a research article. For an essay, it is not necessary to go to a bibliography, references are not necessarily made and the essayist can only consider one source.*

been made some notes, according to the dimensions of the study. The paraphrase is carried out by the researcher and has not been made a translation of the text from German to Spanish, what is included in the analysis is only the paraphrase, see appendix 16.

Chapter 6: Results.

In this chapter is made an analysis of the questionnaires, then the analysis of the pupil's objectives and finally the analysis of the learning diaries. The objective of this analysis is to collect information about the kinds of thinking developed with the Group theory and to find relations between what should be taught in the school/university and the dimensions of the characterization of the PM.

In this sections are analyzed the graphics generated by the CHIC program (see, p.312 and p. 314), with the information of the questionnaires, based on the specific objectives or relations to find and the dimensions of the study.

Results of the survey. Due to the analysis carried out in the previous chapter, is shown that based on the objectives can be said that:

In the relation 1) are observed two of the characterizations of the PM, to know the thinking related to the content (PMC) and the one of the communication vehicles, this is, significantly the learning of the definition of group and of the close elements (T1E), develops the dimension of the thinking related to the mathematical content and if there is a good development of the communication vehicles, the learning of the elements of the TG would develop in an increasing way.

In relation 2) are observed the four dimensions of the PM and is observed how they are, in first instance, related between them and in second instance, related to the taste of some subjects of the TG and in third instance related to the learning of some subjects of the TG. This is that exist previous factors (probably in the development of the personality) that participate in these instances.

In the responses of the students were observed identifiable elements with the dimensions of the PM, in some cases they contributed to the enrichment of the dimensions of the PM.

Finally, the results of the surveys contribute to the already mentioned relations and contribute to the second objective of this research. For this contribution to be complete and to present the complete scenario is necessary to make the analysis of the essays and of the writings.

Results of the analysis of the essays and of the diaries. In this section is shown the analysis of some of the essays (the most representative), since we have discarded those essays that make a low detailed description of the proposed task (one of them is shown) and of the rest we have selected those in which the preliminary analysis was observed, a higher rich in relation to the considered dimensions. It is worth to mention in this sense that all the essays are different, it can't be said that an essay is similar to other, it can be said that under the sight of the considered categories are some analysis units that are more representative tan others, to contemplate the same or more dimensions.

Most important results of the essays (see table 21, S. 366):

- Was not observed a qualitative difference between the essays coming from a context and from another.
- In all the essays is observed the category of the thinking related to the content, in this case the algebraic thinking and in some cases was observed the functional thinking and the arithmetical thinking.
- Were observed the perception dimension (PMP) and the dimension of the strategies (PME).
- The dimension of the non-rational capacities (PMCR) which was the less observed.
- In relation to the communication vehicles was used as a base the natural language, but could be observed as the mathematical symbolic semiotic representations, as basic ideas, some analogies and in some cases metaphors.
- According to the singular and regular grammar, were observed some discordance. Some essays outstand in which the singular mathematics didn't appear.
- In relation to the research objectives:
- Is possible to observe the different dimensions of the PM in written essays.

- Is possible to establish a causality relationship between the variables PM and TG, this means, if the pupils work with elements of the TG, the thought related to the algebraic thinking is developed, is developed the development of personal strategies as the comprehension of procedures. There is a relation between the TG and the category of the non-rational capacities and are used three different communication vehicles.

Most important results of the diaries (see table 222, S. 369):

- In all the learning diaries is observed the dimension perception, the dimension the strategies and of the procedures and the dimension of the thinking related to the content, in particular the categories algebraic thinking, the geometrical thinking, the functional thinking, the arithmetical thinking and in some cases the stochastic thinking.

- The category of the non-rational capacities is not observed in one of the learning diaries. This category was observed most frequently in the learning diary 1.

- With relation to the communication vehicles, was observed in all the diaries the natural language, also could be observed the mathematical symbolic semiotic representations and the iconic representations. According to the observation of basic ideas, these were observed only in three of the diarios and in general can be said that the students didn't use basic ideas for the new contents (elements of the TG).

- According to the singular and regular mathematics, is observed in all the learning diaries that there is a good relation between them.

- In relation to the objectives of the investigation and in particular to the kind of writing learning diary:

- Is possible to observe the different dimensions of the PM in learning diaries.

- It is possible to establish a causality relationship between PM and TG variables, this means that if the students work with elements of the TG, the thought related to the algebraic thinking is developed, is developed as the development of personal strategies as the comprehension of procedures. There is a relation between the TG and the category of non-rational capacities. Besides if at least two communication vehicles are used.

Finally it can be said that in the learning of elements of the TG, are developed mathematical thinkings that are included in the characterization of the PM, with this the second objective of this work and the beginning of other objectives that lead to the validation of the PM characterization, to know, the consideration of other areas of mathematics. Besides, here are observed two points to consider in future works, the mathematical thinking is developed by the learning of a mathematical knowledge and/or the mathematical thinking is developed by the way of teaching this knowledge.

Regarding the results of the analysis of the essays and of the learning diaries:

- Exists a qualitative difference between both free writings.
- In the learning diaries could be observed with more frequency the category of the perception and of processes and of non-rational capacities.
- In the essays could be appreciated with more frequency the communication vehicle of basic ideas.
- In both kinds of writings is frequently appreciated the thought related to the mathematical content.

The qualitative difference between these writings comes from the way the pupils try to explain and formulate what is a group. The tools (see section 3.6) of the pupils are less sophisticated and therefore are more open, that is, include different communication vehicles. In the learning diaries, the mathematical tools and the media tools are sophisticated, the students don’t pretend to transmit a concept, but they pretend to understand that idea and the used communication vehicles are quite a product of scholar teaching, which can be summarized in the two following points.

- In the essays are attempts to explain what is a group, through words and own notions.
- In the learning diaries are attempts to understand with words and notions, coming from the regular mathematics.

According to the frequent observation of the dimension perception and their categories and of the diemnsion of processes and non-rational capacities, is believed that it comes from the form and structure of the pro seminar sessions. That is, the structure of the pro seminar, contemplated in its design, both dimensions through the work with material and through the use of many communication ways. This way, can be understood the result of the analysis of the essays and the observation of the communication vehicle of basic ideas is a product of the scholar teaching that the pupils have had. Regarding the observed with the essay and the communication vehicles, this can be summarized in the following points.

- The development of the perception category and of the processes category and non-rational capacities can be a product of the design of the didactic sequence of the pro seminar.
- The use of the communication vehicles come from the style of thinking of the individual as from the individual learning process that have developed during their scholar years.

Regarding the observation of the thought related to the content in both kinds of writings, it indicates us just that four of the dimensions are inseparable at the moment of referring to the mathematical thinking, showing at the same time that the fifth dimension, of the communication vehicles, belongs to different knowledge fields.

In both kinds of writings and in relation to the second general objective of this study, are the following results:

- Are established causality relationships between the learning of the TG elements and the PM dimensions. In particular between some of the elements of the TG and the dimensions PMC, PMP and PMV.
- According to the role the metaphors have in the learning, we can say that the use of metaphors is part of the understanding of content in children that using this medium.
- On the other hand, the essay and the diary, which were the information collection tools, here presented, showed the existence of metaphors and analogies, as a communication media and as a learning media of the individuals of this study.

Regarding the results of the writings and surveys, can be summarized in the following two points:

1. the analysis of the answers of the pupils to the survey applied shows that in their first relation (PM teaching TG), see section 5.6.1.1, the importance of the communication vehicles for the teaching of the basic elements of the TG (see graphic, section 6.1.1, p. 312), which is confirmed in the essays.

2. the analysis of the surveys show in its second relation (PM developed-learning TG, see section 5.6.1.1), the importance of the processes and non-rational capacities, of the perception and of the thoughts related to the contents, for the learning of some elements of the TG (see graphic, section 6.1.1, p. 314), which is confirmed by the learning diaries.

Finally, the analysis of the surveys is reflected in the essays and in the learning diaries. The mathematical thinking is shown different, if occurs in moments of showing the result for a learning, as in the essays or in moments of the learning itself, like in the diaries. The analysis of the surveys, of the essays and of the learning diaries, show three different scenarios around the mathematical thinking and the Group theory that are joined in the results, in a macro scenario that relates in a causal way the teaching, the learning, the Group theory and the mathematical thinking, to say that: whether the form as the design of a class, as the individual development as the cultural environment, influence in the mathematical thinking, during the taught and the learning of elements of Group theory.

Chapter 7: Conclusions.

Here is presented the conclusion of this work, beginning from the characterization of the mathematical thinking that is originated from this research. This is constituted by four dimensions that are strongly integrated: perception, the thought related to the mathematical content, the strategies and procedures, and non-rational processes and capacities. Besides, there is a fifth dimension of the communication vehicles that supports, maintains and helps in the development of the mathematical thinking.

As outstanding results of this work and regarding the first objective:

Characterize the mathematical thinking, can be concluded that:

- With the characterization presented is answered in a huge way the first question about what is the mathematical thinking and can be said that: *The mathematical thinking is a cognitive process that includes the perception, thoughts related to the mathematical content, the procedures and the strategies as well as the non-rational processes and capacities.*

- The mathematical thinking uses communication vehicles, these use at the same time the memory and abstraction. From that can be said that: *The mathematical thinking has as communication (external) and dialog (internal) vehicles, to the basic ideas, the metaphors and the representations.*

This first result has implications in the way of teaching mathematics and in the way of learning mathematics. These come from considering the perception and the non-rational capacities, as dimensions of the mathematical thinking, which indicates that in the way of teaching should exist necessarily moments that promote the perception of the mathematical object, from the individual that is learning. Learn mathematics, means also developing rational and non-rational capacities. Developing the mathematical thinking begins on the development of all the senses of the human being, therefore and mainly of all its capacities.

It is important to stress in this moment that all the procedures are also part of the mathematical thinking, these can't be left aside, it is part of the development of the memory tool and of brain connections (of organization of the information) relevant in the cognitive processes carried out daily. Again, this has its implicances in the teaching of mathematics; these procedures must be dealt at the beginning as part of the generalization of an individual strategy and not as contents.

Regarding the second objective: ***establish causality relationships between the learning of the elements of the Group theory and the characterization of the mathematical thinking***, can be said that: There are causality relationships between the learning of the elements of the Group theory and the development (observation) of the dimensions of the mathematical thinking, even more: *As the way as the design of a class and as the individual development as the cultural environment, influence in the mathematical thinking, in the teaching and in the learning of elements of the Group theory.*

- The causality relationship, the perception of the mathematical objects, the learning and the preparation of the didactic sequence of the pro seminar is verified in the analysis and in the results of the learning diaries. The same occurs in the causality relationship of non-rational processes and capacities and in the preparation of the didactic sequence, it can be said that: *The inclusion of physical objects and of an enactive phase in the sessions with young of the pro seminar of algebra, promotes the development of the capacity to perceive the dynamic, the spatial capacity, the sensibility and the mathematical flexibility.*

- The causality relationship, communication vehicles, teaching of basic elements of the Group theory (see appendix 3,4,5 and 6) is verified in the essays and in the learning diaries. It is believed that the variety in this causality depends on two factors, first of the long term teaching like the scholar one and of what is expected as a final result of it (students) and second, the form of the writing. We can say that: *The use of the three communication vehicles depends on the learning moments in which the individual is.*

Regarding the suggested hypothesis for this second objective, the conclusions are the followings:

1. in all the essays and in all the personal diaries was possible to observe any of the dimensions of the mathematical thinking, which indicates that these dimensions of the mathematical thinking were in some degree, developed by the work with elements of the Group theory.

2. The use of the characterization of the mathematical thinking had the function of theoretical framework and therefore was a feedback from the observed with the theoretical. It is worth to mention that in the free writings was observed elements that are not related with the mathematical thinking, like elements related to social behaviors.

3. In the essays it was possible to observe the creation of metaphors. In general, in the free writings were appreciated in an outstanding way the analogies. It can be said that, this hypothesis was partially confirmed, that in reality was not an own generation of metaphors, since the metaphor of “a group is a transformation group”, or “a group are the symmetries of an object”, was directly designed by the teacher-researcher and so, almost all the students “assimilated” this conception of group. The case of the two essays (E7, E8) is really outstanding, in the intention of generating a metaphor of Group, in relation to social concepts.

4. This hypothesis is confirmed, the thoughts associated to the content, in particular the geometrical thought and the perception, in particular the capacity to perceive the dynamical, was observed in the writings. Exceptionally, it is worth to mention the observation of the stochastic thinking (D3, D4) and of the intuition non rational capacity (E5).

As a result of this work, was obtained a model about the characterization of the mathematical thinking, which was used as a theoretical framework and can be recognized then as the first objective, it was related to the second objective of this work, like the three scenario here presented, show the beginning to the contribution of the development of the mathematical thinking and even more, to strengthen the necessity of learning the mathematics as a development of capacities.

Open questions

During the course of this work, were emerging many questions, some of them of interest for the didactic of mathematics, since they offer the possibility of new research subjects in mathematical thinking. One of these questions is result of the diaries and essays results, previously was mentioned that there were two points of view: the mathematical thinking is developed by the learning of a mathematical concept and/or the mathematical thinking is developed by the way of teaching this knowledge, the question is then, Which is the relation between these two points of view?

In particular, during the study, we realized about the necessity of including a though related to the mathematical insecurity and error. Since, this kind of thoughts generated above all in the learning diaries, personal confusions and discordances between the regular and singular mathematics, thoughts that were considered in the categorization, but precisely the generator thought, like the error one was not considered. This is translated in the following: Is here an error thought or is a thought related to the content?

The second concern of this work was related with the inclusion of the senses and of the perception in mathematics: How can influence this perception in the learning and thinking processes? Particularly, the subject of corporal movement and the inclusion in the sense of the ego, could have repercussions in the decision making and in the problems solving and in this sense appear the questions: How can influence the corporal movements in the problem's solving of mathematics? And which corporal movements would origin the functional thought? We believe these questions could have answers using this characterization and testing determined corporal movements.

One direction of investigation that emerges from this work is the continuation of the initial presentations about talent, that is related to the conception of the theory of the multiple intelligences of Gardner, presented in section 1.1, this gives some signs of what should be promoted, developed in one person to consider it able and/or intelligent. This way appear the questions: What does mathematical intelligence mean? And which is the relation between mathematical intelligence and the characterization of the mathematical thinking? By the moment, the mathematical intelligence is not a new intelligence, but a specificity of the group of intelligences; this characterization is a new sight of the mathematical capacities of an individual and therefore, is shown a new way to see the mathematical intelligence, based on the communication vehicles and in the four dimensions.

INTRODUCCIÓN

Para potenciar el desarrollo de la educación, es necesario tener en cuenta, que uno de los objetivos de los educadores, es fomentar y desarrollar el pensar de todos los educandos. Aprendizaje y pensamiento estan, por medio de esta intención de la educación, estrechamente relacionados. El aprendizaje de un determinado concepto, involucra de por medio, un pensamiento que está previamente relacionado con este concepto. Por otro lado, el pensar lleva a un aprendizaje, el cual estará determinado solo por la persona que lo hace y este no esta relacionado necesariamente con el concepto previamente determinado.

Si se considera que "cuando un alumno está en el proceso de aprender matemática, transitará de un pensamiento matemático a otro" (Davis, 1983, pág. 254), entoces es de interés responder a las preguntas: ¿Cuáles son estos pensamientos matemáticos por los cuales transita el alumno? ¿Se pueden agrupar o diferenciar de alguna forma general? ¿Cuál es el pensamiento matemático que se desarrolló, luego de un determinado proceso de aprendizaje? ¿De qué forma expresan los alumnos sus pensamientos, ideas, etc? Son algunas de las preguntas que surgieron al inicio de este trabajo. La pregunta que hace una diferencia, con respecto a la forma de mirar todo el contexto de preguntas anteriores, pensamos que es la siguiente: ¿Debemos mirar la matemática como un sistema formal o como un proceso cognitivo? (Tall, 1991, 1996). A primera vista, se diría que el aprendizaje de la matemática, debería ser mirado como un proceso cognitivo, con esta respuesta surge inmediatemente otra, ¿Qué significa, en concreto, mirar el aprendizaje de la matemática como un proceso cognitivo?

Así, este trabajo pretende responder a parte de la pregunta formulada por Wittenberg (1963, pág. 53) "¿Qué es en realidad matemática y el pensamiento matemático?"[25] Y a través de una investigación explicativa mixta y cualitativa (Bortz y Döring, 2006, cap. V; Flick, 2010), se pretende identificar conceptos y variables promisorias, que serían ejecutadas y complementadas en la segunda fase de la investigación experimental de este estudio. Además que, las preguntas planteadas al inicio se dejan responder si buscamos una posible respuesta a la cuestión básica ¿Qué es el pensamiento matemático?, pregunta realizada también por Sternberg (1996), esta pregunta se dejaría responder por una investigación recopilativa y reflexiva, que incluya el foco de las representaciones mentales

[25] *Was ist eigentlich Mathematik und mathematisches Denken? Pregunta expresada en forma textual por Wittenberg, a raíz de la inclusión de las "nuevas" definiciones formales en el currículo escolar (Wittenberg, 1963, pág. 53).*

(ibídem, 1996). Así, el primer objetivo de este trabajo de investigación es **caracterizar el pensamiento matemático**.

Comenzando la investigación con una contribución importante que hace la neurociencia cognitiva, la cual ayuda a entender lo que significa aprendizaje desde el punto de vista neurológico (Andel, 2009; Leuders, 2003), además se incluye en esta investigación el punto de vista de la psicología cognitiva (Gerstenmaier, 1995), el de la psicología del desarrollo y de la psicología pedagógica. Por otro lado, se consideraron también las contribuciones de la didáctica de la matemática. Con estos elementos, se hace el intento de caracterizar el pensamiento matemático (PM) a través de componentes y con esto, poder decir, cuales son los pensamientos y capacidades que son fomentadas y desarrolladas en las clases de matemática. En algunos casos, se sugiere desde la práctica y la observación, el cómo se podría intentar desarrollar algunos de los componentes del PM. Cabe destacar, que la consideración de estudios psicológicos, didácticos, matemáticos y sus conexiones, es una tendencia nueva dentro de la investigación en didáctica de la matemática (Schwank, 2007).

En la caracterización del PM juegan un rol fundamental los recursos cognitivos y las actividades que realiza el sujeto en el medio. Entendiendo al medio como, la sociedad o la cultura en la que el individuo se encuentra, esto es, "el pensamiento matemático se basa en el contexto de las actividades mentales y en actividades culturales" (Tall, 1991; Leuders, 2003, págs. 48-58). Esto quiere decir que la caracterización del PM, debe considerar al medio y las herramientas personales que los individuos tienen para comunicar sus conocimientos en el medio (Flessas y Lussier, 2005; Sfard y Kieran, 2001). El PM debe incluir también las representaciones, las metáforas (English, 1997; Lakoff y Núñez 2000; Soto-Andrade 2006, 2007a) y las analogías (Núñez, 2008; Araya, Calfucura, Jiménez, Aguirre, Palavicino, Lacourly, Soto-Andrade y Dartnell, 2010), como también las *nociones básicas* (vom Hofe, 1995, 1998). Todos estos elementos tienen un papel fundamental en esta caracterización, como un medio de comunicación y de diálogo entre individuos, mente y contenido (Habermas, 1982, 1984; Ruf y Gallin, 1998).

Una vez caracterizado el PM, por medio de 4 dimensiones que lo componen y lo describen, a saber, la dimensión de la percepción, la dimensión del pensamiento relacionado con el contenido, la dimensión de las estrategias y procedimientos y la dimensión de las capacidades no racionales, este trabajo se centro en una cuestión más práctica, la cual se basa en la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los elementos que aparecen en una composición escrita por alumnos y estudiantes, sobre el tema Grupos?, con esta pregunta continúo la investigación experimental, recopilando más información al respecto del desarrollo del PM, en un área determinada de la matemática, donde el segundo objetivo principal de esta parte es **establecer relaciones de causalidad entre el aprendizaje de los elementos de la Teoría de Grupos y la caracterización del pensamiento matemático**.

En la enseñanza y en el aprendizaje del álgebra abstracta, en particular, en Teoría de grupos se manifiesta un interés, por parte del docente, por fomentar en sus estudiantes el desarrollo del pensamiento matemático (Dubinsky, Datermann, Leron,. Hazzan y Zazkis, 1995), denominando a esta parte de la matemática como abstracta. Para entrar en este tema, lo primero que hay que hacer, según Tall (1991) es sensibilizar a los matemáticos y educadores sobre los diferentes tipos de pensamientos que se producen en la mente y que operan de manera muy diferente. Sobre esta caracterización, nos queremos focalizar y poner en relieve las diferentes componentes del PM y observarlas, para encontrar relaciones que permitan el desarrollo del pensamiento. Así, se puede ganar en experiencias basadas en esta caracterización y lograr un aumento en los procesos cognitivos de los estudiantes y alumnos en clases de matemática.

En el capítulo uno se muestra el estado del arte de los elementos y de los conceptos más relevantes y generales que nos permiten empezar con la caracterización del PM. En este estado del arte, se incluyen algunos aspectos sobre el talento, ya que los estudios sobre el pensamiento humano y sus formas estuvo centralizado en función del tema inteligencia humana y sus intentos por describir lo que se entiende por inteligencia se derivó en varios temas pertinentes para el PM, más aún, hoy en día, no se habla de inteligencia sino que más bien de capacidades. En este capítulo, se muestra el estado de las investigaciones mas recientes en este tema, desde la psicologia cognitiva y desde la didáctica de la matemática.

En el capítulo dos, se dan las bases teóricas desde varias ramas de la psicología, para aclarar conceptos sobre el pensamiento humano en general, lo que se entiende por imágenes mentales, representaciones y su influencia en los modos de comunicación y diálogo (Habermas, 1984). Problemas y situaciones son tratados en forma general y se describe algunos de los procesos cognitivos, se hacen diferencias y convergencias sobre los conceptos de competencias, habilidades e inteligencia. Terminando con este capítulo, se obtiene un resultado panorámico del pensamiento humano, esto con la intención de hacer la base para la caracterización del PM. Al final de este capítulo, se presenta un resumen que permitirá ir uniendo conceptos y afirmaciones de los distintos autores, en favor de los objetivos del trabajo.

En el capítulo tres, se muestran los conceptos del capítulo anterior, relacionados con el aprendizaje de la matemática, se busca en este capítulo a través de ejemplos propios y provenientes de las investigaciones en didáctica, profundizar en estos conceptos, para así dar origen a lo que se entenderá como PM. En la segunda parte de este capítulo se muestra los resultados de la primera parte de esta investigación, esto es, la caracterización del PM. Al final de este capítulo se muestra, como en el capítulo anterior un resumen del capítulo con inferencias a los objetivos del trabajo.

En el capítulo cuatro se muestra el primer resultado de esta investigación. A saber, la caracterización del pensamiento matemático.

En el capítulo cinco se hace el análisis de las encuestas, de los escritos y se muestra el contexto de cada uno de los grupos de participantes, incluyendo dentro del contexto las bases teóricas para la construcción de las tareas, la metodología que se utilizó, las experiencias, los resultados y por supuesto el análisis de estos mismos, con la intención de abordar el segundo objetivo de este trabajo. Aquí se identifican las unidades de análisis, provenientes de la caracterización del PM, su codificación y la retroalimentación en la caracterización del PM.

En el último capítulo se recopilan los resultados destacados de la investigación y se hace la conclusión, considerando las preguntas iniciales y los objetivos generales, mencionando cuales son los pensamientos que mas se evidencian. También se incluye una sección de discusión con respecto a la caracterización, una de ideas finales y de preguntas que fueron surgiendo en el transcurso de la invesitigación. Se vio en la necesidad de decir algo sobre la tecnología, el PM y sobre lo que significa en clases de matemática, esta caracterización desde el punto de vista de lo que son las competencias en matemáticas, es decir, competencias matemáticas desde el pensamiento matemático y no desde la propuesta curricular, proponiendo los criterios como la metodología de evaluacion (Hirt y Wälti, 2008).

Problemática

Como ya se ha explicitado anteriormente, este trabajo tiene dos objetivos, el primero de ellos es:

- Caracterizar el pensamiento matemático.

Con esto se intenta responder a las preguntas: ¿Qué es el pensamiento matemático? ¿Qué lo compone? ¿Cuales son sus vehículos de diálogo y de comunicación? Los objetivos específicos de este objetivo son:

1. Detectar en la literatura componentes del PM.

2. Definir o redefinir los componentes o subcomponentes del PM.

3. Encontrar nuevas componentes del PM.

4. Categorizar y diseñar un modelo que valorice los pensamientos y los componentes del PM.

Para lograr este objetivo, se ha diseñado un modelo general sobre el pensamiento matemático, basado en gran parte en conversaciones con matemáticos, educadores, psicólogos y a la abundante recopilación bibliográfica oportuna y recomendada, que se ha obtenido desde diferentes ramas de la educación y de la ciencia, considerando por lo tanto diferentes teorías sobre el tema. Esta caracterización, se propone como una unificación de conceptos e ideas en didáctica de la matemática. En cada una de los componentes se busca dar a través de ejemplos o sugerencias, el sentido, el "aparecer", el resurgir de la idea y la utilización de estos términos en el desarrollo del PM.

El segundo objetivo de este trabajo es:

- Establecer relaciones de causalidad entre el aprendizaje de los elementos de la Teoría de Grupos y la caracterización del pensamiento matemático.

Con este objetivo se intenta responder a las preguntas: ¿Cuál es la relación que detectan los futuros profesores, entre la enseñanza de algunos elementos de la Teoría de Grupos y el pensamiento matemático? ¿Cuál es la relación que existe entre el aprendizaje de algunos elementos de la Teoría de Grupos y el pensamiento matemático? ¿Cúal es el rol metáforico en el aprendizaje de elementos de la teoría de Grupos? ¿Se pueden detectar algunas de los componentes del PM a través de textos creados por alumnos y estudiantes? ¿Qué elementos del PM se aplican o se pueden detectar de un alumno a través de un ensayo realizado por él? ¿Qué elementos del PM se aplican o se pueden detectar en la realización de un diario de aprendizaje?

Los objetivos específicos de este segundo objetivo general son:

1. Detectar diferentes tipos de pensamientos, que se desarollan con la Teoría de Grupos.

2. Encontrar relaciones entre el aprendizaje de algunos elementos de la Teoría de Grupos y la caracterización del PM.

3. Encontrar relaciones entre la enseñanza de algunos elementos de la Teoría de Grupos y la caracterización del PM.

Para lograr esto, se diseño una encuesta y se diseñaron dos secuencias didácticas, donde estas últimas culminaron en la creación, por parte de los alumnos del nivel[26] tres (del Gymnasium) y estudiantes, en escritos como ensayos y diarios de aprendizaje.

Las hipótesis planteadas para el segundo objetivo general fueron:

1. Con la Teoría de Grupos se desarrollan pensamientos matemáticos que estan incluidos en la caracterización del PM, esto es posible detectar tanto en las encuestas como en los escritos.

2. Se pueden observar las diferentes dimensiones del PM, por ende se puede observar los diferentes tipos de pensamientos, a través de ensayos y textos creados por alumnos y estudiantes.

3. Algunos de estos escritos incluyen la creación de metáforas y de metáforas conceptuales.

4. Los pensamientos que aparecen de forma excepcional, en estos escritos son del tipo geométrico y dinámico.

[26] *En la región de Baviera, Alemania hay tres tipos diferentes de liceo: Hauptschule, contempla desde el quinto básico hasta el segundo año de secundaria, la edad de los alumnos fluctúa entre los 10 hasta los 16 años, en este trabajo se le denomina por nivel I; Realschule, considera desde el quinto básico hasta el segundo año de secundaria, la edad de los alumnos fluctúa entre los 10 hasta los 16 años, en este trabajo se le denomina por nivel II; Gymnasium, contempla desde el quinto básico hasta el cuarto año de secundaria, la edad de los alumnos fluctúa entre los 10 hasta los 18 años, en este trabajo se le denomina por nivel III. Estas tres formas de colegios, se diferencian por la calidad y cantidad de contenidos en el currículo. http://www.km.bayern.de/*

Capítulo 1.

1. ESTADO DEL ARTE.

Muchos estudiantes, docentes e investigadores se han preguntado el porqué de enseñar o aprender matemática, para algunos de ellos, la respuesta es: gracias a la matemática se desarrolla el "pensar" o el "razonamiento". Esta respuesta es tan sólida, que se ha transmitido de generación en generación, hasta tal punto de decir que el que no resuelve problemas en matemática, no piensa o no es inteligente. Este tipo de respuesta derivó en conceptos como sobredotación, talento e inteligencia. Estos conceptos han perdido fuerza con la introducción del término capacidad y con la diferenciación entre pensar y razonar, donde la primera es más amplia y la segunda involucra conceptos del pensamiento lógico. Lo que prevalece, sin duda es el pensamiento matemático, lo que este desarrolla y promueve en los seres humanos, en su concepción más amplia.

Sobre el pensamiento matemático se ha producido bastante, sin ahondar desde la matemática en este tema, ya que es un tema que ha trabajado más la psicología. Desde que la didáctica de la matemática incluye a la psicología y conceptos de la misma en sus estudios (Schwank, 2003), ha surgido un interés por parte de los didactas en matemática, por "pensar" lo que es el pensar y de esta forma querer saber en qué consiste el pensamiento matemático, en la forma o tipos de estos pensamientos y en el desarrollo de ellos.

Se sabe que, cada ser humano piensa diferente (Brunstig-Müller, 1997) y que cada individuo puede pensar matemáticamente y que este pensamiento es promovido por contradicciones, tensiones y sorpresas, de esta forma se hace necesario considerar, al Pensamiento Matemático (que desde ahora escribiremos PM) como contenido de la práctica docente (Mason, Burton y Stacey, 1982). Más aún, desde el punto de vista de Lesh y Kelly (1994), el PM está basado en el constructivismo, desde esa construcción y el pensamiento que se produce, se levanta un sentido de los conceptos, de los términos y de las definiciones. Con esto se tienen dos fundamentos esenciales para el estudio del PM, a saber, el ser humano puede pensar matemáticamente y este pensamiento puede tener un carácter constructivista, ambos con fines educativos.

Para este trabajo, se consideran términos de la psicología cognitiva (Gerstenmaier, 1995) como lo son la percepción, la atención, la memoria (Anderson, 1981), el lenguaje (Hayes, 1995), la planificación, resolución de problemas (Engel, 1998), etc. La didáctica de la matemática, aporta en este trabajo con los conceptos de medios de comunicación (Sfard, 2008), formas o medios para guardar, comunicar o generar conceptos, como por ejemplos, las representaciones semióticas (Duval, 2004), las nociones básicas (vom Hofe, 1995, 1998), las metáforas conceptuales (Araya, 2004; English, 1997; Lakoff y Johnson, 1999; Lakoff y Núñez, 2000; Sfard, 1991, 1994, 1997; Soto-Andrade 2006, 2007a), la Teoría de las situaciones (Brousseau, 1998), estrategias matemáticas (Engel, 1998), y variaciones de la atención (Mason, 1989, 2006). Conceptos de la psicología del desarrollo como la creatividad, capacidades visuales-artísticas y de representación, capacidades numéricas, comprensión de las palabras, del lenguaje y del espacio, y las capacidades lógicas matemáticas (Gardner, 2009). También serán consideradas las capacidades que el hombre tiene incorporadas, gracias al desarrollo evolutivo, como por ejemplo el sentido del número (Dehaene, 1999). Estos términos serán descritos en detalle en el capítulo tres.

Además, se mostrará en forma somera, por el momento, algunos trabajos relevantes que se han realizado en Teoría de grupos. Esta selección, de temas, no pretende ser exhaustiva; sino que se focaliza en algunas investigaciones que por sus características, son relevantes para este trabajo.

1.1. EL TALENTO COMO CONTENEDOR DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

Existen modelos diseñados por psicólogos, para definir lo que es el talento, superdotación[27] o sobredotación, en ellos se incluyen algunos elementos del PM, aquí se mostraran aquellos de relevancia como fuente de búsqueda para la caracterización del PM, considerando que la propuesta de estos modelos, se hace en base a las capacidades de los seres humanos. Esto es, el PM no se considera como un talento especial, sino que como una capacidad que posee todo individuo y que puede ser desarrollado en cualquier momento de su vida (Huamán, 2006; Gardner, 2009; Mason et. al., 1982).

La mayoría de las definiciones de talento, los modelos de inteligencia, definiciones sobre capacidad intelectual o de sobredotados, proviene de la rigurosa labor de la psicología. Por

---

[27] *Según Huamán (2006) estos tres términos se refieren a lo mismo. El término que es totalmente diferente es el de precocidad. Estos términos se utilizarán en este trabajo y en este contexto como sinónimos.*

citar algunos de estos modelos, esta el de "muchos factores" de Mönks (Mönks y Ypenburg, 2005), el modelo para niños sobre dotados de Múnich (Heller y Ziegler, 2007) o el "modelo Berlinés sobre la estructura de la inteligencia de Jager" (Amelang, Bartussek, Stemmler, Hagemann, 2006, pág. 188)

En los criterios de Marland (1972) se incluyen los siguientes aspectos que tienen relación con el PM, a saber, el talento creativo, que se entiende como la capacidad de resolver problemas inusuales; talentos artístico-visuales y representativos, que implica destrezas relacionadas con la percepción, representación y ejecución de lo que se percibe.

Thurstone (1924), en su modelo factorial incluye lo que es la capacidad numérica, la comprensión verbal, la capacidad espacial, la memoria (Anderson, 1981) y el razonamiento, entre otros.

El modelo congnitivo de Sternberg (Sternberg, 1985; Amelang et al., 2006, pág 450) propone tres tipos de inteligencia: análitica, creativa y práctica. Cada uno de estos tipos conforman tres subteorías parciales que se complementan entre sí: componencial, experiencial y contextual. Esto muestra otra configuración que permite redondear a lo qué es el PM, ya que incluye: lo analítico, los procesos de ejecución, el resultado, el proceso de trabajo de la información, la síntesis, y lo práctico. Esta teoría sobre el procesamiento de la información (en concreto la Teoría triárquica de Sternberg (1997)), permite entonces clasificar las estrategias y los recursos que tienen los alumnos para resolver un problema.

El modelo de las inteligencias múltiples de Gardner (2009), muestra una serie de capacidades, que nos permiten desenvolvernos en la vida diaria y menciona que estas pueden ser desarrolladas y que se deben practicar. Entre estas capacidades destacan la inteligencia o capacidad lingüística, la inteligencia o capacidad lógico-matemática y la inteligencia Espacial/Visual.

Según Gardner (2009), la inteligencia es mirada como una capacidad que puede desarrollar cualquier ser humano, entre ellas existe la capacidad lógico matemática que no proviene de la esfera auditivo oral. En vez de esto, los orígenes de esta inteligencia-capacidad se pueden encontrar en una confrontación con el mundo de los objetos, pues en la confrontación que hace el individuo de los objetos, en su ordenación-reordenación y en la evaluación de la cantidad, se logra el conocimiento inicial y fundamental del campo lógico matemático. A partir de este punto, la inteligencia-capacidad matemática, está lejos del mundo de los objetos, este en el mundo lógico-abstracto. El individuo, que desarrolla esta capacidad, se vuelve más capaz para apreciar las acciones que uno puede efectuar sobre los objetos y las relaciones que se obtienen o que existen entre los objetos

El modelo de Castelló y Batle (1998), menciona como una capacidad importante, a la capacidad verbal, la capacidad artístico figurativa y lo que sería el talento matemático, diferenciando lo que sería una capacidad lógica y comparándola de forma cognitiva con la capacidad creativa.

También está la estructura del intelecto (Guilford, 1967), que permitirá organizar el PM por lo menos en dos dimensiones, la de las operaciones y la de los contenidos. Las operaciones representan los modos de pensar en los contenidos, aquello sobre lo que se aplica el pensamiento y el producto o el resultado de la aplicación de una operación a un contenido. Guilford (1967) describe cinco operaciones: cognición, memoria, producción convergente, producción divergente y evaluación. Los contenidos constituyen tipos de información sobre los que actúan las operaciones descritas anteriormente, estas son: figurativo, simbólico, semántico y conductual. Figurativo: Información de carácter sensorial concreta según los diversos sentidos. Simbólico: Información bajo la forma de signos que pueden representar otras cosas. Semántico: Información en forma de conceptos. Conductual: Información que se da en diferentes operaciones que pertenecen a la conducta de las personas.

El modelo de Mönks y Van Boxtel (1988, 1992) incluye en su modelo de interdependencia tríadica, la creatividad como una capacidad de resolver problemas y además como la capacidad de encontrar en forma personal nuevos problemas, incluyendo nuevos elementos como originalidad, fantasía y flexibilidad.

El modelo de Múnich (Heller, et al. 2007), muestra entre otros componentes un aspecto por muchos no considerados, como lo es el interés. Interés que muestran los alumnos por una cierta rama de estudio y por ciertos tipos de contenidos. También existen diferentes factores, como sociales, para que este interés sea desarrollado y fomentado.

De esta forma, se considera en este trabajo, los conceptos incluidos en las definiciones de talento, que tienen relación con capacidades del ser humano y que a su vez estén relacionadas con elementos de la educación matemática. Así en el pensamiento matemático se deberá contemplar conceptos como la capacidad creativa, capacidad artístico-visual y de representación, capacidad numérica, comprensión verbal, capacidad espacial, la memoria, el razonamiento, capacidad analítica, capacidad práctica, el proceso de trabajo de la información, capacidad de síntesis, capacidad lingüística, capacidad lógico-matemática y la capacidad espacial/visual. También serán considerados elementos del tipo como fantasía y flexibilidad, el interés y el factor social. Además, aquí aparece la primera división del PM, por una parte está la dimensión de las operaciones y por otro lado, la dimensión de los contenidos.

1.2. LA EVOLUCIÓN DE LAS INVESTIGACIONES EN PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

La pregunta que va muy relacionada con el pensamiento matemático es: ¿Qué es matemática? Y de esa pregunta y de su respuesta, es como ha ido evolucionando la idea del pensamiento matemático (PM). Otras de las variables que se debería agregar a esta pregunta, es el "hacer" matemáticas o matemáticas para la enseñanza, en el sentido que propone Schoenfeld (1994), donde la concepción principal sobre que es matemática, se dice que es la ciencia de los patrones y que por lo tanto, desde ese punto de vista, hacer y enseñar matemática, deberían estar en comunión, como parte de la actividad humana.

Si la respuesta a esta pregunta es: La matemática es la ciencia de los patrones entonces el PM es considerado como pensar en patrones. Devlin (2006), aclara, que estos estan disponibles en parte real y en parte en la imaginación, de forma estática o de forma dinámica, de forma cualitativa o cuantitativa, en forma de aplicación o en forma de entretenimiento para el expectador. "Los patrones estan en el mundo, renacen de lo profundo del tiempo y del espacio y son resultados de las actividades del espiritu humano" (Devlin, 2006, pág. 23). De esta forma, debemos considerar una parte espiritual en el modelo del PM, que será la del no racional. Esto da origen a una subdivisión de la dimensión de las operaciones (sección 1.1)

Devlin (2006) menciona y define algunas de las capacidades matemáticas, como por ejemplo: El sentido del número, capacidades algoritmicas, la capacidad de abstracción, el sentido de causa y efecto, la capacidad deconstruir y seguir una cadena larga de causas de los hechos o de los resultados, la capacidad de hacer relaciones y la conciencia espacial.

Si la respuesta a la pregunta ¿Qué es matemática? es "la ingenua respuesta del diccionario: Matemática es la ciencia de la cantidad y del espacio, tendremos en este caso, que el pensamiento matemático estará liderado por el orden en que esta estructurada la matemática" agregando a continuación el mismo autor que "si se expande bastante esta respuesta, se podría añadir que las matemáticas también se ocupa de la simbología, en relación a la cantidad y el espacio" (Davis y Hersh, 2003, pág 6).

Con lo anterior, se puede conjeturar que una parte de la matemática, es la representacion del espacio y de la cantidad. Así, el pensamiento matemático debe considerar lo que desarrolla la aritmetica y la geometría (como se verá en la sección 4.2.) A mitad del siglo XIX C. S. Pierce (citado en Davis et. al., 2003, pág 7) responde a la pregunta diciendo que "matemática es la ciencia que hace conclusiones necesarias". Dando origen a plantearse la nueva pregunta: ¿Conclusiones sobre qué?, de esta forma se mira el pensamiento matemático desde la argumentación y el metódo. Los contenidos ya no estan incluidos en este tipo de tratamiento del PM, sino que más bien, se tiene que considerar los procesos cognitivos involucrados en la cadena supuesto-deducción-conclusión. A partir de los cuales se ha ido desarrollando el PM, esto significa incluir la argumentación de las conclusiones obtenidas y el formalismo de las argumentaciones (como se vera en la sección 4.2).

Si la respuesta a esta pregunta es: la matemática es un constructo lógico-formal y la "matemática es como un árbol" (Eves, 1983, pág. 491), donde las raices serían el álgebra, la geometría plana, la trigonometria, la geometria análitica y los numeros irracionales; el calculo seria el tronco y las ramas serían las variables compleja, las variables reales, el calculo de variaciones, la probabilidad y así sucesivamente, se tendría desde un punto de vista pedagogico, que se debería repetir lo que ya se ha realizado o bien la ontogenia recapitula la filogenia. Esto da origen a considerar en el PM, los pensamientos de tipo formal y estructural (basados en axiomas), que son aquellos que avanzan o se desarrollan como el árbol, recién descrito.

Si se mira la respuesta, a la misma pregunta, desde el punto de vista de las ciencias sociales, se dirá que la matemática es ante todo una construcción del hombre, una elaboración cultural que valora los entes ideales y que los conceptos abstractos son su objeto de estudio (Alagia, Bressan y Sadovsky, 2005; Leuders, 2003; Parra y Saiz, 1995). Como la matemática es una ciencia formal, utilizará Metodologías hipotético - deductivas y un lenguaje universal para construir las representaciones mentales y organizarlas como sistema axiomático. Esta mirada marcó el segundo hito en la historia de la matemática, devolviéndole su situación humana (Parra et al., 1995; Biehler, Scholz, Sträßer y Winkelmann, 1994). De esta forma, la matemática se compone de propiedades y relaciones, de números y de figuras, de los contenidos y de una problematización. Si a esto se le agrega la concepción de que matemática es un dominio conceptual (Núñez, 2008), se verá que la idea sobre la enseñanza de la matemática y por ende del PM, estará basado en la idea de la cognición encarnada (Lakoff y Johnson, 1980, 1999; Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, 2008; Parzysy, Kadunz, Robotti, y Rogers, 2008).

La didáctica de la matemática se preocupa especialmente de la forma de enseñar matemática, especialmente de la problematización y desde el punto de vista social (Leuders, 2003). Esto significa que los estudios de la didáctica estarán centrados en el análisis de los procesos que dan lugar a la construcción de conocimientos didácticos, las características y las relaciones de esos conocimientos, el papel que juegan los contextos sociales particulares, el espacio dado a las estrategias personales, la manera de validar las soluciones y la intervención sobre las interacciones sociales (Parra et al., 1995; Sadovsky, 2005).

En este ámbito, cabe destacar la implicancia didáctica de la distinción entre problema y ejercicio. Hoy en día, la didáctica centra su atención en la problematización de los saberes matemáticos, dando paso a una línea de investigación que se centra en los pensamientos matemáticos. Entre otros cabe destacar la teoría de enfoque cognitivo de Vergnaud (1990, 1991), llamada de los Campos Conceptuales. Este define "campo conceptual" como: "Un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos con otros y probablemente entrelazados durante el proceso de adquisición". Cabe destacar que en este caso, seguimos frente a la pregunta: ¿qué es matemática? Lo anterior es una línea que deriva a una posible respuesta a la pregunta.

Por otro lado estan las clásicas visiones de las habilidades del pensamiento, que son la ordenación, interiorización, la adaptación, acomodación, equilibrio, (Piaget, 1999; Vygotskij[28], 1966) selección y formación de conceptos o ideas, con el objetivo de organizar la información antigua según las estructuras mentales del pensamiento del individuo.

Pero quizás una de los acercamientos más importantes para la educación y para la enseñanza de la matemática y para comprender lo que es el PM, lo hizo el matemático y didacta Freudenthal (1974, 1979), el propone una matemática activa, llena de problemas y de desarrollo de estos con sus errores, el agregá que el contenido matemático es más importante que el formalismo matemático, que los procesos son igual de importantes que el pensamiento matemático que se utilizan en el proceso, que el desarrollo de ideas es igual de importante que la verificación y la corrección de la afirmación, la calidad de la matemática será recordada o grabada a través de la calidad de las ideas, no através de una

---

[28] *El nombre del autor en inglés es Lev Vygotsky, aquí se deja el nombre como se ha encontrado enla bibliografía utilizada.*

cantidad de símbolos sin sentido. Más aún, la matemática se debe descubrir por medio de pensamientos propios, esto es, por medio de procesos cognitivos y de ahí se debe responder a la pregunta ¿Qué es matemática? Según lo anterior, se puede decir que, matemática es una fuente de agua del conocimiento, el que quiere la toma y si la toma, esta le permitiría hacer procesos cognitivos, desarrollar ideas y entrar en el mundo del pensamiento matemático.

En la caracterización del PM, serán consideradas todas estas posibilidades, cada una de ellas derivara en una componente o en una subcomponente, de acuerdo a la perspectiva con la que se esté analizando.

1.3. EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO VISTO DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.

Investigaciones psicológicas sobre el PM, comienzan por 1910 con el psicólogo experimental David Katz (1884-1953) y el matemático Felix Klein (1849-1925), tratando el topico de desarrollo del concepto de espacio y de numero (Scholz, 1994). Psicólogos y matematicos tratan la visión o los modos del pensamiento matemático. De esta forma se pudo encontrar relaciones entre epistemología y la teoría de cogniciones matemática.

Uno de los trabajos mas destacados en PM, es el de Piaget (Beth y Piaget, 1966), influenciado por Klein y Poincaré (1854-1912), en el que se intenta, por medio de discusiones entre matemáticos responder a la pregunta: ¿Qué se entiende exactamente por intuición geometrica? (Scholz, 1994).

Con la intención de desarrollar conceptos en PM, se formo en 1976 el grupo de psicologia en educación matemática, conocido por sus siglas PME (Psychology in Mathematics Education), grupo en que destaca Fischbein y Freudenthal.

La contribución de Fischbein (Biehler et.al, 1994; Fischbein, 1981) sobre la interacción entre el algoritmo formal y la componente intuitiva en una actividad matemática, da genesis al modelamiento de la actividad matemática a través de conceptos y cualidades. De esta contribución se pueden extraer conceptos como el aspecto formal, el aspecto algoritmico y el camino intuitivo del razonamiento. El demuestra que estos tres elementos son necesarios para la comprención matemática. Por otro lado, Fischbein (1975) distingue entre dos tipos de intuición, la primaria y la secundaria, también muestra que el camino intuitivo puede entorpecer el correcto entendimiento del concepto matemático (Borovcnik, 1992; Wollring, 1994).

El saber cuáles son los componentes o los diferentes estilos de pensamiento matemático permitirían según Borromeo (2004) aclarar el fenómeno de la comprensión de algunos temas matemáticos por parte de ciertos alumnos y la no comprensión por parte de otros. Por otra parte, no es posible hablar de pensamiento matemático sin entender lo que es la comprension en matemática, esto quiere decir que una cosa involucra a la otra, que la comprensión de un objeto esta ligado con la forma en que se piensa ese objeto. La comprensión del objeto estará también ligado a la percepción de este objeto.

Otra fuente de investigación es la que da el grupo de *pensamiento matemático avanzado*, que es parte del PME. En este grupo, se consideran elementos como las herramientas de la mente matemática, consideraciones meta-teoréticas, generalización y abstracción, intuición y rigor, síntesis y análisis (Tall, 1995).

Para empezar con una clasificación de los pensamientos matemáticos se deben tener en cuenta el factor de las ideas internas y representación externa (Vergnaud, 1990). También se deben considerar los estilos cognitivos que influyen en los estilos de pensamientos matemáticos (Riding, 2001; Borromeo, 2004) y se deben considerar los conceptos espontáneos (*bottom up*) y los conceptos científicos (*top down*) reconocidos por Vygotskij (Saxe y Posner, 1983)

Pensar matemáticamente es para Körner (1998), la propuesta de una serie de problemas de planteo de situaciones reales. Este matemático advierte al inicio de su libro que los problemas estan planteado para estudiantes “interesados” en resolver problemas matemáticos. Körner, no menciona ni cuales son los pensamientos que quiere desarrollar, ni en que consiste el pensamiento matemático. Es importante destacar el hecho de que, es solo para algunos estudiantes, ya que según la personalidaddel individuo y su interes, entenderá y se afrontarán los problemas matemáticos (Borromeo, 2004).

El razonamiento matemático incluye también las analogías (Araya, Calfucura, Jiménez, Aguirre, Palavicino, Lacourly, Soto-Andrade y Dartnell, 2010), las metáforas y las imágenes (English, 1997). En este sentido, hay trabajos relevantes en la función cognitiva y didáctica de las metáforas conceptuales en matemáticas (English, 1997; Lakoff y Núñez, 2000; Presmeg, 1997; Sfard, 1991, 1994, 1997; Soto-Andrade, 2006, 2007a). En este trabajo también consideramos el análogo alemán para metáforas conceptuales en matemáticas que son las nociones básicas29 (vom Hofe, 1995, 1998).

Asi, desde la didáctica de la matemática se adoptarán los siguientes conceptos e ideas, que serán trabajadas en detalle en el capítulo 4, como lo son: desarrollo del concepto de espacio y de número, el aspecto formal, el aspecto algoritmico y el camino intuitivo del razonamiento, los dos tipos de intuición, la primaria y la secundaria, la generalización y la abstracción, el concepto de ideas internas y representación externa, como también se deben considerar los conceptos espontáneos (*bottom up*) y los conceptos científicos (*top down*), analogías, metáforas, las imágenes y las nociones básicas.

En esta sección se observa que, conceptos como la intuición, el interés y otros, vuelven a ser considerados desde otro punto de vista. Esto confirma que deben ser incluidos dentro de lo que es el PM, pero que se deberían de agrupar de forma que entre estos conceptos, exista una coherencia educativa-explicativa.

1.4. MODELOS QUE CARACTERIZAN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

Pero, ¿qué es entonces el PM? Esta pregunta no ha sido aún respondida. Algunos acercamientos, provienen de Lesh and Kelly (Biehler et al, 1994), basados en el constructivismo, proponen la capacidad de reflectar como el mayor recurso sobre todos los niveles del conocimiento matemático. Estos investigadores profundizaron modelos operacionales e intuitivos para el caso de cantidad; el modelo de algoritmos e intuición, para el caso de la substración y los conceptos y representaciones intuitivas, en el caso de limite y en el caso de conjunto (Lesch y Kelly, 1994). Para estos investigadores el constructivismo no es solo una perspectiva que se tiene sobre el pensamiento de los ninos, sino que sobre la Teoría del pensamiento (Glasersfeld, 1991). De ahi que el estudiante hace un sentido de los térm

inos, de las palabras y de los signos. En el proceso de pensar y aprender matemática se reconocen fundamentales etapas que pueden ser descritos de la forma clásica como: generación y mutación, seleción, adaptacion, reorganización, diferenciacion y acumulacion (Piaget, 1999).

[29] *De la palabra alemana Grundvorstellungen. Para esta traducción mirar Soto-Andrade y Reyes-Santander, CERME 7, también se puede traducir como ideas básicas del inglés "basic ideas".*

La “transformación progresiva” de Steiner (1968, págs. 181-201) se concentra en las actividades fundamentales de la matematización, que son la observación, la descripción, la idealización, el análisis local lógico, la axiomatización y la aplicación. Este psicólogo también introduce el término situación, como método de introducción del objeto de estudio.

Una forma de acercarse al PM y de desarrollarlo, es en base a problemas y fases de desarrollo de los problemas. En esta dirección, estan los trabajos de desarrollados por Polya (1995) y los estudios que se originan a partir de la clasificación de comprensión o tratamiento de un problema y de la generación de estrategias para resolver un problema. La estructura de resolución de un problema (Polya, 1995), esta basada primero, en entender el problema; segundo, configurar un plan; tercero, ejecutar el plan y cuarto, mirar hacia atrás. En dirección opuesta, esta el trabajo realizado por Mason, Burton y Stacey (1982), donde ellos asumen por sobretodo que cualqueira puede pensar matemáticamente, y que el PM puede ser mejorado por prácticas con reflexión, que el PM es provocado por contradicciones, tensiones y sorpresas y que el PM ayuda a entenderse a uno mismo y el mundo. La propuesta a la resolución de problemas que estos investigadores dan, es que el problema matemático debería estar diseñado en tres momentos, la entrada al problema, el ataque al problema y la ampliación del mismo.

Otro acercamiento aún mas concreto al PM lo da Watson y Mason (1998). Ellos realizarón una tabla de estrategias y junto a estas estrategias las preguntas que se podían formular. Estos elementos, permitirían describir el pensamiento matemático, o por lo menos algunos elementos que la componen. Por medio de las preguntas que realiza el docente, se permitiría observar el pensamiento matemático. Observar que en la primera fila aparecen los tipos de estrategias que podrían utilizar los alumnos y que en la segunda fila estan las preguntas que podría realizar el docente, para que la estrategia se desarrolle. Este listado es de gran utilidad, pero por lo visto anteriormente esta incompleta, ya que no considera varios de los elementos mostrados en las secciones anteriores.

Burton (1984), propone un modelo para el PM, en términos de operaciones, procesos y dinámica. Este investigador, considera el pensamiento humano como un medio que es utilizado por los individuos para mejorar la comprensión o ejercer un control sobre su entorno.

Un intento aún más completo que el anterior es el modelo de Augsburgo (Ulm, 2010), el cual incluye tres grandes factores: El pensamiento basado en procesos, el pensamiento basado en los contenidos y el proceso de trabajar la información relacionada con elementos de la matemática. Este primer intento, de caracterización, realizado en conjunto con otros colegas de la Universidad de Augsburgo, no incluye de forma directa los medios de comunicación (diálogos) que se podrián utilizar y tampoco incluye términos como la intuición, fantasía, representaciones. Se podría decir, que este trabajo es más que una ampliación de este modelo, es una completación, reorganización y redefinición del modelo de Augsburgo.

1.5. COMUNICACIÓN Y DIÁLOGOS.

Es necesario que se trate también, el constructo del diálogo y de la comunicación, ya que para hacer una agrupación adecuada de conceptos e ideas, es necesario hacer diferencias y convergencias de estas dos formas de expresión. La comunicación proviene del latín *comunicare*, que significa compartir, participar, dejar participar, aunar. En esta concepción primaria de comunicación se trasluce el sentido social de la palabra, en donde hay varios seres vivientes involucrados. La comunicación como acción social, ayuda a resolver problemas, más aún, la comunicación permite superar barreras, que por sí solos no se dejan superar Habermas, 1982, 1984). En una interpretación secundaria de la palabra comunicación, se entiende como el intercambio, el traspaso, cambio, transferencia de información[30]. Por otro lado, el diálogo proviene del griego διάλογος, διά-día, que significa a través de y λογος-logos que significa la palabra meditada, así de esta forma la palabra diálogo en su primera acepción significa “a través de palabras”, que vendría ser la conversación, conferencia, charla, coloquio.[31]

En este trabajo hablaremos de comunicación y de diálogos, según la postura de Habermas (1982,1984), donde la comunicación estará relacionado con lo social y con el intercambio de información utilizando diferentes medios (palabras, imágenes, sonidos, etc.) y el diálogo, estará suscrito al pensar y al comunicar, que incluye la comunicación personal, que es, donde se desarrolla una gran parte del PM.

El PM está fuertemente ligado con herramientas cognitivas y con sus formas de expresarlo (English, 1997). En experiencias anteriores[32] a este trabajo, en entrevistas con niños de

[30] *Extraído de la página Web: http://de.wikipedia.org/wiki/Kommunikation*

[31] *Extraído de la página Web: http://de.wikipedia.org/wiki/Dialog*

[32] *Estas experiencias anteriores no fueron publicadas, pero permitieron mejorar, de más en más, la Metodología final de este trabajo.*

básica, se observó que, cuando los niños eran enfrentados a la pregunta del como lo pensaron, para resolver un determinado problema, no había un entendimiento de la pregunta, como tampoco había una respuesta a la pregunta (Brunstig-Müller, 1997). Esto es, porque la pregunta es demasiado compleja, incluso para algunos adultos. Por otro lado, si hay una necesidad de comunicar el resultado y el proceso por el cual se obtiene un resultado, en este cómo y en esta explicación, aparecen los diferentes pensamientos y las diferentes herramientas que fueron utilizadas, es en la transmisión de resultados y comentarios donde se puede obtener la información necesaria y no con la pregunta directa.

Si el alumno está solo, puede entablar un diálogo personal[33], si está solo y se la ha pedido escribir o expresar el camino por el cual obtuvo sus resultados, entonces el expresará, algo así, como una comunicación personal, un diálogo interno, donde utilizará diferentes representaciones y buscará la más adecuada para ser comunicada a posterior, de esta forma se puede redactar bastante del pensamiento que utilizó el alumno. Si un alumno, le explica a otro, también se puede rescatar la forma de pensar del alumno que explica (Brunstig-Müller, 1997). En esta explicación, el alumno dice lo que él hizo y como lo hizo y ahí se puede apreciar las representaciones y las herramientas que utilizó. En las conversaciones que tiene la profesora con el alumno, no se logró un buen resultado, pero hacer alguna conjetura al respecto sería muy apresurado.

En este proceso de explicar-comentar y escribir, se pueden apreciar varios elementos del pensamiento, como por ejemplo, como el alumno percibió el problema y los objetos que lo conformaron, la forma de codificar los conceptos que ya han sido aprendidos y que se necesitan para la resolución del problema, la utilización de herramientas cognitivas como las metáforas (Soto-Andrade, 2007a). En textos abiertos, que son escritos de forma personal y que no tienen un esquema predeterminado, por ejemplo los diarios de vida, los ensayos y los diarios de aprendizajes, se da la libertad de escribir lo que se piensa, después de un diálogo con los compañeros, después de un tiempo de digestión del concepto del que quiero escribir, es una posibilidad de expresar una parte íntima, que está relacionada con el concepto en cuestión y con palabras, dibujos, etc., que provienen del mundo interior y de intereses personales. Esto es, en estos escritos abiertos, se expresa el pensamiento de la persona y los sentimientos que le producen los objetos de estudios o que le produjeron en un determinado momento.

---

[33] *Sfard (2008, pág. 81) define el pensamiento como una versión individualizada de (interpersonal) comunicación.*

En este trabajo, se utiliza el medio de comunicación escrito abierto, el diálogo entre el individuo y el contenido (Ruf y Gallin, 1998), este se entiende como un diálogo personal que intenta comunicar el camino, la forma de enfrentarse, etc. en situaciones, problemas y ejercicios de matemática, que ha trabajado y desarrollado el individuo con anterioridad. En un diálogo, están permitidas todas las representaciones posibles y todas las herramientas cognitivas, que son apreciadas y que son transmitidas de forma voluntaria. El diálogo es tanto interno como externo, esto quiere decir, que se produce tanto al interior del individuo, como con sus pares.

1.6. TEORÍA DE GRUPOS E INVESTIGACIÓN COGNITIVA.

En esta sección, se hace un pequeño resumen del saber sabio, en relación al estudio, esto es, se dan algunas de las definiciones de la Teoría de Grupos, que han sido utilizadas en esta investigación.

1.6.1 TEORÍA DE GRUPOS.

„La simetría es una idea mediante la cual el hombre,
a través de todas las épocas, ha tratado de comprender
y crear el orden, la belleza y la perfección."

Herman Weyl.

La Teoría de Grupos (TG) es un área de la disciplina matemática álgebra, que trata de la estructura algebraica de los Grupos, de una caracterización y/o clasificación de ellos, en encontrar relaciones entre los Grupos y otros elementos de la matemática. Algunos matemáticos, podrían decir que la TG es el arte de simbolizar los movimientos y que estos a su vez, se ven reflejados en la belleza[34] de los ornamentos, tanto en creaciones artísticas, como en la naturaleza. Donde la noción de Grupo juega un papel en esta belleza, a través de la simetría y de la acción de un Grupo sobre diferentes elementos (Speiser, 1948).

El estudio sistemático de los grupos comenzó en el siglo XIX y fue provocado por problemas específicos. En primer lugar, estuvo la cuestión de la resolución de las ecuaciones algebraicas, y más tarde el estudio de las simetrías geométricas. Contribuciones

[34] *Consideramos aquí el concepto de belleza, según Humberto Eco: "Quid est corporis pulchritudo? Congruentia partium cum quadam coloris suavitate" en "Kunst und Schönheit im Mittelalter",1993, pág. 49.*

importantes a esta área provienen de los estudios de Évariste Galois[35] y Niels Henrik Abel[36] en el álgebra, así como Félix Klein[37] y Sophus Lie[38] en el área de la geometría. Uno de los logros matemáticos de siglo XX es la clasificación de los grupos finitos simples, es decir, de la indescomposición de todos los grupos finitos (Wußing, 2009, págs. 188-218).

La importancia de la Teoría de Grupos para muchas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones, se encuentra en su generalidad, ya que incluye en un lenguaje común, tanto a situaciones geométricas (los movimientos del espacio, simetrías, etc.) como a las reglas de la aritmética (aritmética con números, matrices, etc.). Sobre todo en el álgebra, el concepto de Grupo es de fundamental importancia: anillos, módulos y espacios vectoriales son Grupos con estructuras y propiedades adicionales. Los métodos, la forma de hablar y de impregnar la Teoría de Grupos, con el trabajo con representaciones simbólicas es para muchas áreas de las matemáticas, una base única y necesaria. En física y química se reúnen muchas características en los objetos de la Teoría de Grupo, muchos lugares y relaciones de estas áreas se ven reflejadas en el comportamiento de algunos Grupos, donde las simetrías desempeñan un papel (por ejemplo, la invariancia de las leyes físicas, la simetría de las moléculas y cristales) indiscutible. Para estudiar estos fenómenos, la Teoría de grupos y la Teoría de las representaciones de Grupos, proporcionan relaciones estrechas, los fundamentos teóricos y un abrir a algunas aplicaciones importantes (Pavel, 2007).

Un grupo queda totalmente definido, cuando se tiene un conjunto y una operación, este conjunto con esta operación es cerrado, es decir, no aparecen elementos distintos al conjunto inicial, una vez que se operan los elementos entre sí, aparecen elementos que son parte del conjunto inicial y no otros. La operación es asociativa (para este concepto, imaginar que hay tres amigos y quieren formar una sociedad y les da igual si se asocian de a dos primero y el tercero viene después o bien el primero se asocia después que se han asociado el segundo y el tercero, la sociedad de tres personas resulta ser la misma) sobre lo elementos. Dentro del conjunto hay un elemento que al operarlo con el resto de los elementos, no les hace nada, que en el conjunto de movimientos es la “rotación” en cero grados, o bien ausencia de movimiento, o posición inicial, posición de partida, etc. Este

[35] *Évariste Galois (25.10.1811; 31.05.1832) fue un matemático francés.*

[36] *Niels Henrik Abel (5.08.1802; 6.04.1829) fue un matemático noruego.*

[37] *Felix Christian Klein (25.04.1849; 22.06.1925)fue un matemático alemán.*

[38] *Marius Sophus Lie (17.12.1842; 18.02.1899) fue un matemático noruego.*

elemento es llamado neutro, que cada vez que se pone en contacto por medio de la operación, no afecta a los nuevos o anteriores movimientos, es decir no hace nada. Para cada elemento o movimiento del conjunto, existe otro (que no es necesariamente distinto) que al operarlos entre sí, se obtiene el elemento neutro o la posición inicial.

Lo anterior sería una forma de definir lo que es un grupo, existen otras formas, aquí presentamos la definición formal según Fischer (2008):

Definición: Un conjunto G junto con una operación

$$*: \ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{G}, \ (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \rightarrow \mathrm{a} * \mathrm{b} \ ,$$

Se llama ***Grupo***, cuando se cumple lo siguiente:

$G1$ * es asociativa, es decir, $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todo $a, b, c \in G$.

$G2$ a) Existe solo un único elemento neutro $e \in G$ tal que

$$e * a = a * e = a$$

Para todo $a \in G$ (e se llama ***elemento neutro*** de G).

b) Para cada $a \in G$ existe un único elemento $a^{-1} \in G$ tal que

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

(a^{-1} se llama el ***inverso*** de a).

Otra posibilidad de acercarse a la noción de Grupo, es la dada por Olfos (1981): “Un grupo se construye siempre sobre un conjunto, es decir, a partir de elementos. Estos últimos no admiten una naturaleza determinada, bien pueden ser números, bien pueden ser transformaciones geométricas, funciones, símbolos, en fin...” Aunque esta definición no la mostramos completa, ya que utiliza por lo menos tres páginas, las primeras frases, aluden a una definición no tradicional de la definición de Grupo. Con esto, se quiere remarcar en las posibilidades de representar los objetos matemáticos, en el primer párrafo, se ven solo palabras, en el segundo, se utiliza una representación formal usual, en el tercero, se alude a ideas, que van más allá de lo cotidiano. Las tres se diferencian no tan solo en la estética, sino que también en la utilización de caracteres, pero la diferencia más grande, es lo que producen al lector, la primera, la segunda forma y la tercera.

La definición de Grupo es una de las bases de esta Teoría y uno de los pilares de este trabajo. Otro de los pilares de este trabajo es el concepto de operación de Grupos sobre juntos. A continuación, se dan las definiciones más relevantes (Fischer, 2008, Págs. 70-72):

"Una ***operación*** de un Grupo G sobre un conjunto no vacío M, es una función

$$\tau : G \times M \to M$$

$$(a, x) \to \tau_a(x)$$

Tal que $\tau_{a \cdot b}(x) = \tau_a(\tau_b(x))$ y $\tau_e(x) = x$, para todo $a, b \in G$ y $x \in M$."

Una vez que se tiene la operación del Grupo sobre el conjunto, se debería saber, que es lo que ocurre cuando todos los elementos del Grupo G, actúan sobre uno de los elementos de M, a esto se le llama la órbita de x y su definición formal es la siguiente:

"Si G opera sobre un conjunto M y $x \in M$, se llama al siguiente subconjunto de M:

$G(x) = \{a(x) \in M : a \in G\}$, la ***órbita*** de x."

"Sea x un elemento de M, se llama el ***estabilizador*** de x en relación a la operación de G sobre M, al subconjunto de G:

$$Sta_G(x) = \{a \in G : a(x) = x\}."$$

Se puede probar que este conjunto es un subgrupo de G.

Otra de las nociones que se necesita en este trabajo es la de índice. Si H es un subgrupo de G. "El ***índice*** de H en G, es el número de clases de equivalencia, es decir, el número de elementos del conjunto cociente G/H (ibídem, 2008, pág. 28).

Para que el conjunto anterior sea un Grupo, llamado *Grupo cociente,* se necesita como condición previa que el Grupo sea conmutativo o bien que el Subgrupo sea un *Subgrupo normal*. En lo que sigue, se considerará a *G*, un Grupo abeliano.

Se llama ***sistema de representantes*** a un subconjunto V de M, que esta formado por la elección de un representante de cada órbita, estos representantes, serán anotados por $\bar{x}$.

En el trabajo con operaciones de Grupos sobre conjuntos, se tiene la ecuación de orbitas, a saber (ibídem, 2008, pág. 73):

"La ***ecuación de órbitas*** de una operación de un Grupo G, que actúa sobre un conjunto finito M es:

$$ord\ M = \sum_{\bar{x}\in V} ord\ G(x) = \sum_{\bar{x}\in V} ind\ (G{:}\ Sta_G\ (x)).$$

Donde V es el sistema de representantes, $ord\ M$ indica la cantidad de elementos del conjunto M y $ind\ (G{:}\ Sta_G(x))$ es el índice del estabilizador en G."

Otro de los conceptos importantes de la Teoría de Grupos, es la simetría (del griego "σύν"=*syn*, que sería algo así como juntos o en conjunto y "μέτρον"= *metros*, que sería como la medida), que está muy relacionada con la belleza, que de acuerdo al pensamiento griego, el estudio de la simetría proporciona elementos claves para describir la belleza de los objetos. Un objeto tiene simetría cuando hay cierta regularidad en su conformación, desde el punto de vista de la medida de sus partes con respecto a otro objeto, como puntos, rectas, planos, etc. Así pues, la circunferencia tiene simetría, pues sus puntos están todos a la misma distancia del centro, conocido como "simetría con respecto a un punto". Un rectángulo también posee simetría, pero con respecto a dos rectas y en este caso se habla de "reflexiones". Lo interesante o lo importante del estudio de la TG, es que este nos puede dar un tipo de acercamiento a lo bello y podemos decir en muchos casos, cuales son los tipos de simetrías y cuál es el grupo correspondiente que actúa sobre una parte del total de la figura, para componer el todo. Este tipo de conjeturas, las pueden realizar todos los alumnos, de cualquier nivel, solo basta recortar la figura o utilizar otras más sencillas, en niveles más avanzados, como en el pro seminarios, se hacen correspondencias entre la cantidad de simetrías y el grupo de ornamentos correspondientes.

Se entiende como "simetría de un polígono de n lados, anotado en forma simbólica P_n , a una isometría del plano, que asigna a P_n en el mismo" (Fischer, 2008, pág. 82). Con esta definición y con la definición de Grupo ortogonal (Fischer, 2008, pág. 13):

$$O(n) = \{A \in GL(n; \mathbf{R}){:}\ {}^{t}A \cdot A = E_n\}$$

Donde $GL(n; \mathbf{R})$ es el Grupo lineal de matrices invertibles de orden $n \times n$, se puede hacer un tratamiento didacta de los contenidos de la TG.

Actividades realizadas en terreno con estudiantes, con el tema simetria muestra el interes y la motivación de ellos por la creación de puzles simetricos, completación de figuras y búsqueda de figuras de objetos reales de tal o cual grupo de ornamentos (Klemm, 1982). El ejemplo mas usual, es el logo de los autos mercedes, las ruedas de los autos, fotos de edificio (arquitectura) etc.La simetria también se puede trabajar en relación con otros temas como por ejemplo a través de fotos de hongos y de bacterias (biología), para asi confirmar que no tan solo, en creaciones humanas se da la simetria, sino que tambien, provienen de la naturaleza. También en el trabajo con dibujos asimetricos, como contraparte o como complemento, se puede acercar a la noción de simetria, par esto se pueden considerar pintores y escultores.

Uno de los temas que no son tratados frecuentemente en TG, es la inclusión de los Cuadrados Mágicos[39] [40]. Estos Cuadrados Mágicos, por un lado, forman un espacio vectorial y tienen por supuesto, una estructura de Grupo. Por otro lado, en cada Cuadrado Mágico se puede hacer actuar un Grupo, para encontrar nuevos arreglos con los mismo números.

Otro proceso totalmente diferente, es encontrar la relación entre los “Grupos simetricos” y las simetrias. Para esto es necesario observar que las permutaciones de lados y esquinas, son los elementos del conjunto sobre el cual actuará el grupo de simetrias. Esto se traduce en, determinar el conjunto sobre el que se hacen las permutaciones, esto significa encontrar el conjunto sobre el cual actúa el Grupo. Por ejemplo, en el caso de un cuadrado, el conjunto sobre el que se hace el máximo de permutaciones, sin que el cuadrado cambie (Isometría), son las esquinas; estas son cuatro, lo que quiere decir que el grupo que “mueve” al cuadrado 8 veces y lo deja invariante es un subgrupo del grupo simetrico de orden 24, en notación usual S_4. Es decir, hay un Grupo que actúa sobre el conjuto de todas las esquinas del cuadrado y las “mueve” sin romper la estructura de cuadrado.

Así, a través de material concreto, de figuras, de fotos, de dibujos, de escritos personales, es posible dar una base enactiva a las representaciones de las nociones de la Teoría de Grupo. En este sentido, el enseñar o aprender Teoría de Grupo, da posibilidades a la inclusión de movimientos corporales. Más aún, desde la experiencia, el trabajo con objetos distintos a los números, es decir, clases, rotación, reflexión, rectas, puntos y planos, están directamente relacionados con la percepción, con contenidos matemáticos previos, con la fantasía y en particular con el pensamiento en movimiento, lo que les da una posibilidad a

---

[39] *Un Cuadrado Mágico es un arreglo de números, con forma de cuadrado (igual cantidad de filas que de columnas), donde se deben cumplir ciertos requisitos.*

[40] *El Cuadrado Mágico, más conocido es el del pintor Alberto Durero, que aparece en su cuadro “Melancolía” (1514).*

los estudiantes de manipular objetos dinámicos. Es por estas razones, que los dos estudios que se presentan en este trabajo, están centrados en elementos de la TG.

1.6.2. INVESTIGACIONES COGNITIVAS.

El algebra abstracta, en particular la TG presenta un problema serio en la educación (Dubinsky, Datermann, Leron, Zazkis, 1994; Hart, 1994; Leron, Hazzan y Zazkis, 1995). Dubinsky et. al. (1994), se hicieron la siguiente pregunta de estudio: ¿Cuántos individuos aprenden ciertos tópicos de la Teoría de grupos? Y ¿Cuál es la relación que existe entre comprensión en matemática y abstracción en general?. Basandose escencialmente en lo abstracto y en el paso desiquilibrado y "sofisticado" desde el problema situación hasta el esquema. Reconociendo o teniendo como perspectiva teorica en la investigación cuatro herramientas: la acción, el proceso, objetos y esquemas.

¿Cómo se piensa el concepto de isomorfismo? Fue la pregunta de investigación de Leron, Hazzan y Zazkis (1995). La idea fue empezar con el concepto de isomorfismo y no empezar con homorfismo, para desarrollar en los estudiantes un concepto de isomorfismo "ingenuo", basado en el concepto de similitud. Comentan los autores el hecho de que se repite, el fenomeno de utilizar procedimientos canónicos por parte de los estudiantes sobre aquellos procedimientos inciertos o procedimeintos con cierto grado de libertad (Dubinsky et. al., 1994, Leron, et.al., 1995). Dificultades en la formulación de la definición de isomorfismo que puede deberse a dificultades con el paso de la definición ingenua propia o a otras áreas como funciones y cuantificadores.

Lars (2009) propone la enseñanza de la definición de grupos, "reinventando" la definición de grupos a través de las simetrías de una figura geométrica. Esto con la intención de determinar estrategias y caminos del pensamiento que anticipan el concepto formal; desarrollar actividades de instrucción que evoquen estas estrategias y estos caminos. Algunas de las estrategias que se encontraron fueron: examinar, renombrar y articular.

1.6.3. EN LA ENSEÑANZA ESCOLAR.

Por otro lado, en los colegios alemanes en el antiguo plan del Gymnasium (G9 des Jahres 1990 KWMB1 I 1990 So.-Nr3 S. 125 ff; Jahrgangsstufe 11) estaba incluida la definición de grupo, dentro de uno de los 11 cursos optativos. En este contexto existen libros diseñados para realizar las clases en esta dirección (Dittman, 1987). Es claro, al observar estos libros, que solo es necesario conocer y utilizar la definición de Grupo, para decir que un conjunto es un Grupo, y por ende no se necesita mucho más de la Teoría de Grupos y se estaría trabajando en el sentido de las palabras de Lietzman (citado en Wittenberg, 1963):

> *"Dieser moderne Begriff der Mathematik (der Begriff der Gruppe) lässt sich in der höheren Schule… einwandfrei definieren …- Die Bedeutung der Einführung des Gruppenbegriffes beruht nun vor allen Dingen darauf, dass man aus den vier angegebenen Gruppenpostulaten viele ganz allgemeine Folgerung ziehen kann … Man erhält auf diese Weise das recht umfangreiche Gebäude der Gruppentheorie, das wir im Unterricht natürlich nicht weiter behandeln können (sic!). Unsere Aufgabe kann es nur sein, außer den angeführten Beispielen noch einige andere Gruppen kennen zu lernen, insbesondere solche, die im Rahmen der Geometrie von Bedeutung sind."*[41]

Este tratamiento que se la ha dado a los grupos no es suficiente, más aún, es absurdo, como lo comenta también Wittenberg:

> *„Den Schüler mag eine solche "Behandlung" des Gruppenbegriffs füglich ähnlich anmuten wie ein Naturkundeunterricht, der geschwollen lehrte: „Der Elephant ist ein vierbeiniges Säugetier. Die Katze ist ein vierbeiniges Säugetier. Die Giraffe ist ein vierbeiniges Säugetier. Definition: Ein vierbeiniges Säugetier wird als Quadrimammal bezeichnet. "*[42]

Por otro lado la geometría es para Wittenberg (1963), uno de los marcos teóricos matemáticos más importantes de la matemática y no es que en su libro este en contra de enseñar Teoría de grupos, él no está de acuerdo en que las clases del Gymnasium, sean a base de definiciones y demostraciones absurdas, como en el caso anterior, demostrar que

---

[41] "*Este concepto moderno de las matemáticas (de la definición de Grupo) se puede enseñar en la escuela secundaria... definir libremente... - La importancia de introducir el concepto de grupo está basada, sobre todo, en que se pueden extraer de los cuatro postulados de Grupo, muchas otras conclusiones más generales... Obteniendo de esta manera, un edificio bastante extenso de la teoría de grupos, que no podemos tratar en el aula (sic!41). Nuestra tarea sólo puede ser, aparte de los ejemplos dados, conocer algunos otros grupos, especialmente los que son importantes en geometría. " Traducción de la autora.*

[42] *"A los alumnos les gusta este "tratamiento" de la Teoría de Grupos, ya que parece ser una enseñanza sobre ciencias naturales, que inflamada se enseñó, "El elefante es un mamífero de cuatro patas. El gato es un mamífero de cuatro patas. La jirafa es un mamífero de cuatro patas. Definición: Un mamífero de cuatro patas es conocido como cuadrimal." Traducción de la autora.*

un conjunto es un grupo una y otra vez, sin avanzar más en el camino del conocimiento o no relacionar esta Teoría con la geometría o con otros campos de la matemática.

Wittenberg propone ejemplos que estén en relación con la geometría, pero no utilizar nuevamente la definición de grupo, sino que para que los estudiantes y también los alumnos del liceo (Gymnasium) puedan desarrollar su pensamiento matemático, para que a través de estos ejemplos visuales, (relacionados con el conjunto simétrico) y numéricos (relacionados con los grupos cocientes) aprendan lo que son algunos conceptos matemáticos (Rivero, 2006).

Bigalke (1984), propone también imágenes para el tratamiento de grupos, provocado por el tratamiento de este tema, por medio de la geometría, en particular los ornamentos como imagen. El considera también las raíces de la unidad y en procesos algorítmicos complejos propone el trabajo con clases de equivalencia y grupos cocientes, llegando hasta el generador de un grupo finito.

Una propuesta concreta sobre el trabajo con elementos de la Teoría de grupos, la hace Olfos (1981), la cual está pensada para niños sobresalientes en matemática, a partir del séptimo año escolar e incluye el trabajo con material concreto, la realización de hojas de trabajo. Más aún, en este trabajo se perciben los primeros estudios de un proceso cognitivo relacionado con la reversibilidad y las primeras pautas de lo que hoy se conoce como ingeniería didáctica.

Así, se tiene que es factible el considerar elementos de la Teoría de Grupos, para los escenarios básicos del pensamiento matemático, tanto por el grado de dificultad, como por la posibilidad de comprensión de estos elementos. Con esto se presenta un buen desafío cognitivo para los alumnos del liceo y para los estudiantes. La Metodología con la cual se trabajó con estos dos grupos de observación, se explicará en detalle en el capítulo 5.

Capítulo 2.

2. BASES TEÓRICAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

La intención de este capítulo es formar una base de lo que es el pensamiento humano. Esta base, será formada utilizando definiciones clásicas de lo que se entiende por "pensar", definiciones desde el punto de vista de la psicología y entremezclando algunos conceptos de la neurologíacognitiva. Estos conceptos y algunas de las teorías aquí presentadas serán utilizadas en la construcción del modelo[43] del PM, que se hará en detalle en el capítulo 4.

2.1. PENSAMIENTO HUMANO.

„*Das Denken ist eine angenehme Sache*" [44]

Karl Philipp Moritz (1790).

En este apartado se verá el análisis conceptual del pensamiento humano, desde la mirada de la psicología cognitiva (Gerstenmaier, 1995) y en relación con el pensar-aprender. Desde este ámbito se presentarán las definiciones que este estudio adoptará como tal.

Según la acepción uno del diccionario de uso del español de América y España (Lucena, 2002, pag. 1445), el pensamiento es la capacidad que tienen las personas de formar ideas y hacer representaciones de la realidad en su mente. Más aún, los individuos tienen la capacidad de relacionar estas representaciones con otras (Asanger y Wenninger, 1999, pág. 98). En la acepción cuatro del mismo diccionario (o.g., pág. 1445), se relaciona el pensamiento con el deseo o propósito que tiene una persona de hacer algo. Esto es, el pensamiento es considerado como una capacidad que tiene el sujeto, que se realiza cuando se tiene un deseo o un objetivo. Así, el ser humano, estaría siempre pensando, cada vez

---

[43] *La palabra "modelo" es usada en términos generales como: "Modelo es resultado del proceso de generar una representación de sistemas/conceptos a fin de analizar los fenómenos o procesos, que son aludidos en el modelo."*

[44] *"El pensamiento es una cosa agradable", traducción de la autora.*

que realiza alguna “imagen”, cada vez que la relaciona con algo, cada vez que tiene un objetivo, e incluso el ser humano estaría pensando de forma inconsciente mientras duerme.

Según Funke (2006, pág. XXIII) desde el punto de vista de la psicología cognitiva, “el pensamiento humano es considerado como un compromiso activo con términos lingüisticos internos, con representaciones pictóricas y otros contenidos mentales, que se realiza con el fin de obtener nuevos conocimientos. Pensar ayuda a entender mejor las cosas, los acontecimientos y lo que nos rodea de mejor forma. El pensamiento se realiza, además, solo en las actividades que no estan orientadas a las rutinas automatizadas.” Esto lleva a la idea, que el ser humano piensa para aprender cosas nuevas y que no son parte de su reperterio.

Esto es, los seres humanos piensan a través de palabras que son símbolos que representan algo determinado, a través de imagenes internas, las que son representaciones mentales o paisajes mentales (Margulies, 2000; Anderson, 1975). El ser humano piensa también a través de conceptos, que son representaciones universales y abstractas de los objetos. Estos símbolos, imagenes y conceptos representan un hecho, un objeto, una acción, que son utilizados y relacionados al momento de pensar. El ser humano piensa también a través de reglas, que son consideradas como enunciados que van relacionando unos conceptos con otros (Seidel en Assanger y Wenninger, 1999, pág.98). Más aún, como escribe la psicologa escolar, Brusting-Müller:

“Im Denken konstruiren wir unsere Denk-Welten (Kognitionen, Metakognitionen), unsere Denkwege, unsere kognitiven und metakognitiven Wirklichkeiten. Kognitionen wie Metakognitionen sind konstruktionen, die jeder selbst macht.“[45] (Brusting-Müller, 1997, pág. 8)

Aquí cabe destacar, la importancia de la palabra construcción, el individuo construye su forma de pensar, el individuo crea un mundo personal del pensar, formado por representaciones internas, haciendo así una realidad cognitiva y metacognitiva propia e irrepetible del individuo.

---

[45] *„En los pensamientos construimos nuestro mundo de pensar (cogniciones, metacogniciones), nuestro camino de pensamiento, nuestra realidad cognitiva y metacognitiva. Tanto la cognición como la metacognición son construcciones, que cada individuo realiza por si mismo.” Traducción de la autora.*

Pensar para aprender es un proceso que puede aparecer, segun Funke (2006, pág. XXI), de cuatro formas. Primero como razonamiento lógico, el que se apoya en sentencias deductivas, es utilizado en el momento en que el sujeto busca obtener conclusiones a partir de hechos o ideas. Segundo, como proceso probabilístico, en el que las conexiones de inducción se proyectan sobre eventos futuros. Tercero, como resolución de problemas, razonamiento basado en un plan de acción. Cuarto, como pensamiento creativo, donde los nuevos conceptos producidos son originales y útiles para el sujeto.

El razonamiento lógico es entonces el proceso de establecer conexiones válidas entre unas proposiciones y otras, comprobando que la verdad de la conclusión se deriva de las premisas. Este proceso tiene una forma, un contenido, una estructura y un tema del que trata. Los razonamientos no validos son llamados falacias y de estos hay dos tipos, los formales y los informales. En este caso, el individuo suele trabajar con representaciones simbólicas y reglas propias de la lógica. (o.g., 2006, Cáp. XXI)

El razonamiento que infiere a partir de sentencias probabilisticas, no esta basado en la lógica, esta basado en premisas que son mas bien inseguras. El individuo que piensa cual será la probabilidad de usar un auto y tener un accidente cuando hay nieve en tal carretera, esta pensando en forma probabilística. En este caso el individuo utiliza representaciones mentales personales y mas bien fantasiosas, de lo que podría ocurrir, basadas en la experiencia personal o de terceros.

El pensamiento desarrollado en la resolución de problemas, es posible cuando no existe una rutina a utilizar. Esto sería una de las formas de inteligencia según Piaget (2003), ya que el dice que “inteligencia es lo que el ser humano utiliza cuando no sabe que es lo que tiene que hacer” (citado en Calvin, 2009, pág. 11) En este caso, se busca un medio, una estrategia para saltar una barrera, encontrar una conexión entre lo que es y lo que debería ser (Devlin, 2006). El pensamiento es fomentado cuando el sujeto encuentra estos medios o estrategias y el problema desaparece para el sujeto. Para saltar estas barreras, el individuo puede generar y utilizar, diferentes y variadas formas de representaciones. Más aún, el sujeto puede ser creativo (Calvin, 2009), si es que no conoce la forma de solucionar el problema y desarrolla una estrategia que lo ayuda a saltar el obstáculo.

El pensamiento creativo, puede ser mirado bajo dos puntos de vista. El primer punto de vista es el personal, cada sujeto tiene una creatividad personal, donde cada sujeto “crea” o “genera” su mundo de pensar, crea sus propios paisajes mentales, su propio lenguaje interior, sus propias “estrategias”, en este sentido el mundo es único para él y construido por el mismo, en estos casos se tiene un pensamiento creativo personal (Brunstig-

Müller,1997). El segundo punto de vista tiene que ver con el resultado de este pensamiento, si este resultado es nuevo y útil para el resto de la comunidad, entonces se habla de un pensamiento creativo social o se dice que el sujeto es creativo en la disciplina correspondiente.

Estas cuatro formas de pensar estan estrechamente relacionados con las habilidades del pensamiento, que son utilizadas con el objetivo de estructurar la nueva información con la antigua según las estructuras mentales del pensamiento del individuo. Estas habilidades son según Piaget (1999), la ordenación, la interiorización y la adaptación (asimilación y acomodacion). Según Vygotskij (1966), se pueden agregar como habilidades del pensamiento al equilibrio, la selección y la formación de conceptos o ideas.

En la ordenación de representaciones juega un papel especial el pensamiento lógico, dependerá de como este ha sido desarrollado, para que el individuo ordene sus representaciones. En la formación de conceptos juega un rol especial el pensamiento creativo, cuando el individuo genera un significado personal y profundo en un área determinada, que ocurre en un proceso por el cual se agrupan (ordenan, acomodan) mentalmente objetos diferentes según algunas características.

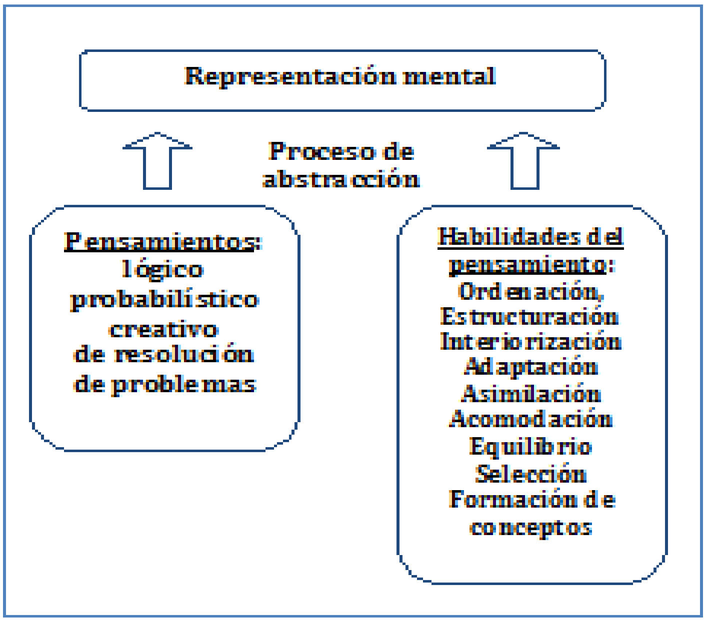


Figura 1: Términos del pensar relacionados con la abstracción

Con estas habilidades y utilizando estos tipos de pensamientos el individuo genera una representación interna de un objeto o concepto nuevo, que será "llamada" cuando se vea nuevamente enfrentado a este objeto o concepto, este proceso cognitivo es llamado abstracción (Damerow,1996). Es decir, la abstracción es una habilidad del pensamiento, que permite la generación de representaciones y la creación de paisajes mentales, de un objeto, de un concepto o de una idea. Esto se realiza, en general, de forma personal cuando la representación no esta dadá por un tercero.

En este trabajo, el proceso de pensar, es considerado esencialmente como un compromiso interno, activo, que se hace a través de imágenes internas, utilizando términos lingüisticos internos, representaciones pictóricas y otros contenidos mentales. Pensar en este contexto, tiene el fin de obtener nuevos conocimientos y esto se obtiene solo en las actividades que no estan orientadas a las rutinas automatizadas, es decir, actividades que se hacen de forma conciente y con un objetivo. Al momento de pensar, se utilizan símbolos, imágenes, movimientos, etc. y estos son utilizados y relacionados unos con otros al momento de pensar. Además, estos símbolos pueden tener reglas predeterminadas, o bien, estas reglas pueden ser creaciones propias de el/los individuo/s. De esta forma se crea un mundo de pensar y una realidad personal.

En este capítulo y en lo que sigue, se reconocen por lo menos cuatro tipos del pensar y se consideran también las habilidades del pensamiento, que son las ya mencionadas por Piaget (1999) y Vygotskij (1966). En la fig. 1 se muestran estos conceptos en relación con el proceso de abstracción y con la generación de representaciones.

Notar que se ha escrito, en un inicio, representación mental, pero es necesario, profundizar más en este tema y hacer algunas diferencias al respecto. Esto es, lo que se verá a continuación en la siguiente sección.

2.1.1. IMÁGENES INTERNAS.

Cada criatura viviente, reacciona a un cambio en su medio, con una determinada respuesta. Esta respuesta muestra que el ser viviente ha percibido este cambio, entendiendo este cambio como una diferencia en el orden interior del ser vivo (Maturana y Varela, 2007). La percepción es una capacidad básica de los seres vivos, que esta intimamente relacionada con el orden interior y por lo tanto con las imagenes internas que tenga el ser vivo sobre el medio que lo rodea. Aquellos cambios del exterior que no alteran el orden interior del ser vivo, no pueden ser por el ser vivo percibidos (Hüther, 2009).

El ser vivo percibe el mundo a través de los sentidos, en el caso del ser humano se tienen los ojos, los oidos, la vista y la piel (más comunmente las manos), pero esto no es suficiente para la generación de imagenes internas, para esto se necesita además tener un cerebro (o un corazón[46]). El cerebro debe estar de cierta forma "entrenado" para percibir los cambios del medio, mientras mas cambios se perciban, mas posibilidades tiene el hombre de generar imagenes internas (Spitzer, 2007). El ser humano tiene la capacidad de generar nuevas percepciones y estas nuevas percepciones transformarlas, bajo ciertos patrones sinápticos, en forma de imagenes internas, de tal forma que esta imagen puede quedar anclada en nuestro cerebro, esto es, la imagen la podemos recordar y esta queda grabada en la memoria (Hüther, 2009, pág. 74; Spitzer, 2002, pág. 76)

Según Hüther (2009), el ser humano esta capacitado, para comparar las nuevas imágenes y las antiguas, también estamos capacitados para cambiarlas y para decidir lo que es cada imagen. El mismo autor agrega que, el cómo ocurre este fenómeno, no esta aún aclarado por la neurociencia. Palmer (1978), distingue entre las representaciones extrínsecas y las representaciones intrínsecas. Más aún, la formación de textos escritos por individuos podría permitir una conexión entre estos dos tipos de representaciones (Schnotz y Bannert, 1999). Sobre este punto se volverá más adelante.

Las imagenes internas de lo que es el mundo exterior, se van ampliando y remodelando, por lo menos, mientras el ser humano deje a las nuevas percepciones participar en la construcción de nuevas imagenes internas, esto ocurre con mayor frecuencia en niños y en jovenes. Aquí, incluso para los adultos, son válidas todas las formas de percepción, no tan solo la visual, si no que también la tactil-corporal, la auditiva y la capacidad de generar imagenes a través de la percepción de un olor (Hüther, 2009, pág. 76-77).

Las imagenes internas comandan nuestro pensamiento, nuestro sentir y nuestro hacer, para aclarar mejor estas palabras esta la siguiente cita:

> *"Eine Zelle, ein Organismus oder eine Gesellschaft muss also nicht nur „merken", dass „irgendetwas nicht mehr stimmt", sondern muss auch in der Lage sein, anhand eines bereits vorhandenen Messfühlers oder Maßstabs – also anhand eines inneren Bildes davon, wie es sein sollte – zu*

[46] Paola Valero, de la Universidad de Aalborg, Dinamarca, en una conversación informal, dice que no existe suficiente información para decir que las representaciones internas "ocurren necesariamente" en el cerebro. Se postula en neurociencia que estas imagenes ocurren solo en el proceso de comunicación. Por este motivo, se ha agregado entre paréntesis otro órgano vital, donde se podrían representar o generar los sentimientos más importantes, como por ejemplo las imágenes relacionadas con el amor

„entscheiden", ob und wie jetzt zu reagieren oder zu handeln ist."[47] *(Hüther, 2009, pág 83)*

Esto conduce a pensar que las imagenes gobiernan nuestro hacer, lamentablemente el individuo no entrena el cerebro en formación de imágenes y hay muchas de ellas que se "evaporan", se olvidan (Spitzer, 2007). Las imagenes se olvidan porque no son "llamadas" con frecuencia para realizar el proceso de pensar, por que no participan nuevamente en la creación de ideas. Las imagenes que no se olvidan son las que nos sirven para ampliar otras iamgenes o representaciones y transformarlas en un paisaje de imagenes o en representaciones.

Así en este trabajo, las imágenes mentales juegan un rol fundamental, son el medio por el cual, el ser humano piensa y como se ha visto, gracias a estas imágenes se toman decisiones. Es necesario aclarar que un paisaje mental es un conjunto de representaciones, que es a su vez una nueva representación. La palabra imagen esta utilizada en todo este contexto en su forma mas general y no solo esta referida para imágenes pictoricas (dibujos). En las siguientes dos secciones se mostrará lo que son las representaciones mentales, las representaciones semióticas y una tabla resumen de ambas.

2.1.1.1. Representaciones mentales.

Una representación mental es un conjunto de ideas representadas en nuestra mente. Es una herramienta que tienen los individuos, que impulsan a tomar la decisión de crear una serie de acciones que los ayuden en su proceso de aprendizaje. Las representaciones mentales, tienen como recurso, las alternativas que le presenta el medio que los rodea, el ambiente, o un paisaje natural: el agua, el sol, los árboles, o en su defecto, un paisaje artificial o urbano, entendiéndose como tal, el creado por el hombre (Roth, 1989; Margulies 2000). Las representaciones mentales, provienen principalmente del medio, de los materiales naturales, de materiales y maquinas, que ha creado el hombre, algunas representaciones mentales, provienen de la observación del comportamiento de otros animales, así el medio natural y el metamedio (los sentimientos, etc.) ofrecen una enorme variedad de recursos, para formar una representación mental.

---

[47] *„Una celula, un organismo o una sociedad, debe entonces no solo "sentir" que "algo no esta bien", si no que también, debe estar capacitado, por medio de una escala o de un sensor – de este modo a través de una imagen interior de este sentir – para "decidir", si se reacciona, como reaccionar y como proceder." Traducción de la autora.*

En este trabajo se considera como representación mental a una imagen o una serie de imágenes mentales, a cualquier representación interna, que genera el individuo al momento de pensar. Estas representaciones pueden ser dibujos, palabras, frases, símbolos, sonidos, gestos, etc.

En la creación de las representaciones mentales, no hay reglas y todo lo que se crea en la mente o se ve interiormente, es válido para el sujeto. El tamaño, color, forma, la variedad, los recursos, el inicio y el término de la representación, los elementos a utilizar, son todos libres para el sujeto.

En la representación mental lo principal son las ideas del ser humano que se conjugan de manera tal, que forman modelos mentales, que dan la idea de concepto, es decir, los pensamientos dan forma a lo que se quiere expresar, construyendo ideas con imágenes o símbolos basados en la observación, en la percepción y en la experiencia, siendo siempre influenciadas por la riqueza personal (Roth, 1989).

Según Margulies (2000) las características más relevantes de la creación de las representaciones mentales son:

- El fomento de la inventiva, mediante la construcción y reconstrucción de una idea, poniendo en juego el talento y la creatividad del individuo.
- La utilización de los dos hemisferios, aumentando el pensamiento analítico, el pensamiento espacial, la visualización, la intuición, el pensamiento lógico, la creación de imágenes y la resolución de problemas.
- El asociacionismo ya que todos los elementos deben ir relacionados entre sí, para que la confluencia de ellos permita la interpretación y fluidez del tema tratado.
- La creatividad, ya que facilita el desarrollo de atributos personales proporcionando la capacidad de establecer una relación temática, donde el individuo fomenta la producción del pensamiento divergente.
- La fluidez, ya que ayuda a la confluencia de muchas ideas sobre algún tema, generando una serie de palabras, símbolos, figuras, dibujos jerarquizados, que obligan al individuo a ser un artista de su propia creación.

- La flexibilidad del paisaje mental[48], no se somete a ninguna regla, solamente a la inventiva y creatividad del sujeto que lo crea.
- La variedad ya que se pueden incorporar variados y diferentes elementos.

En las representaciones mentales se privilegia alternativamente el aspecto intelectual (consciente) y el aspecto intuitivo (inconsciente). El paisajismo mental es una forma de conocimiento y un recurso didáctico que tiene como meta la construcción de aprendizajes significativos y que permite el acceso a niveles superiores del conocimiento.

Se entiende por representaciones a todo conjunto de "imágenes" (sonidos) y concepciones expresadas en forma verbal o no verbal, que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre un concepto, sobre una situación que ha vivido o que se imagina y sobre todo lo que esté relacionado con una experiencia y lo que se asocia a ella.

De lo anterior, se puede concluir que cualquier representación intenta "representar" o reflejar un objeto, una idea, una situación e incluso recuerdos y estas representan más de lo que se puede "mostrar". El texto, las imágenes, los sonidos, los movimientos son las formas externas de las representaciones que son entendidas por el individuo e interpretadas de diferentes formas (Schnotz y Bannert, 1999). Dentro de estas representaciones externas, se destacan las representaciones semióticas, que es lo que se verá en la siguiente sección.

2.1.1.2. Representaciones semióticas.

Las representaciones externas son percibidas desde el exterior, del medio que nos rodea, son símbolos físicos, objetos, que tienen normas externas, con limites o limitaciones y dimensiones determinadas, como por ejemplo, las tablas, los diagramas, los gráficos, símbolos de la lógica, etc. Por otro lado, están las representaciones internas que son modelos mentales en nuestra memoria (Anderson, 1981), son esquemas y dibujos mentales. Las representaciones descriptivas, se componen de caracteres que describen una situación y que están vinculados con lo que se significa por las convenciones. Los textos son asignados a las representaciones descriptivas. Las representaciones icónicas consisten en personajes icónicos que están asociados con lo que se significa por sus características estructurales comunes, tales como imágenes, tablas o gráficos. Las representaciones pueden diferir en su contenido de información y de sus usos.

[48] *Un paisaje mental, está formado por una o más representaciones mentales y se utiliza en este caso, para generalizar la idea de representación mental.*

Los dos lados del signo lingüístico – Presentación (significado) y la fonología (nombre) - "son de igual medida a nivel psicológico" (Funke, 2006). Esto quiere decir, que no tan solo el escribir la palabra lleva de forma cognitiva a un tipo de representación a una comprensión del objeto, sino que también cuando escuchamos esta palabra. De la misma forma, ocurre con los símbolos, cuando se escuchan, se ven o se escriben, producen una representación inmediata, que tiene el mismo peso psicológico.

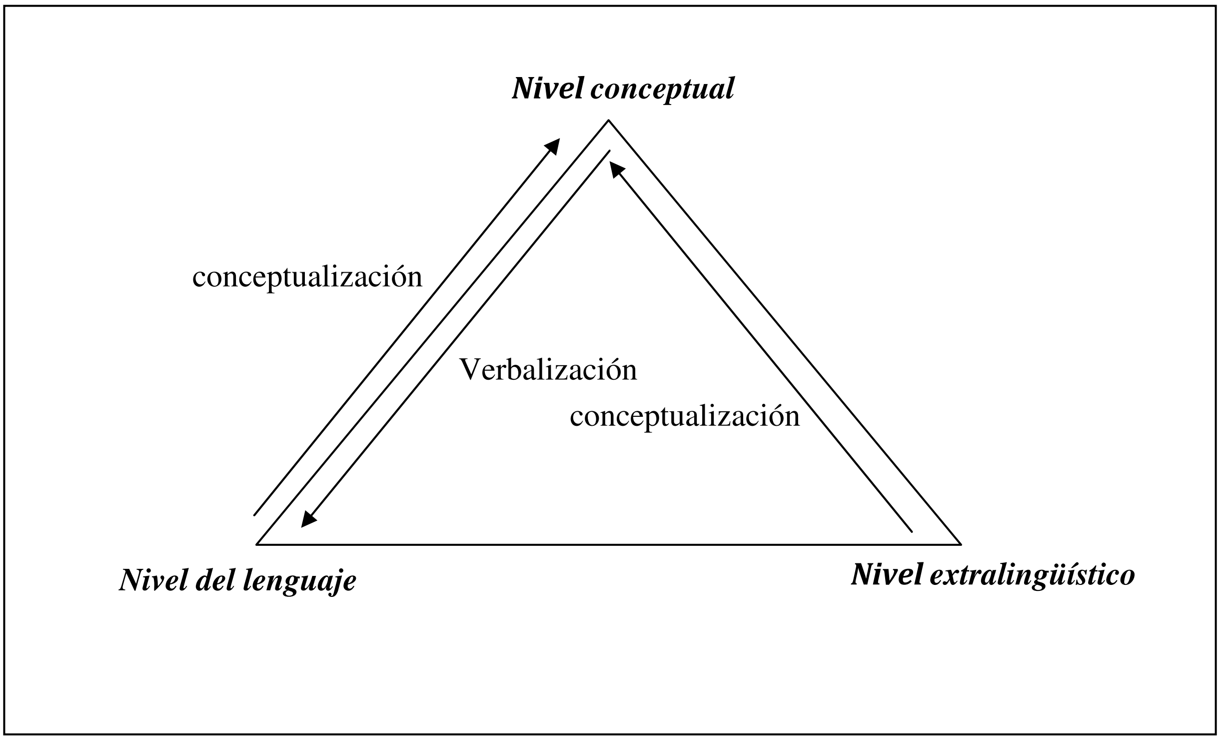


Figura 2: Triángulo Semiótico de Rauh.

Fuente: Fenk (2009)[49].

El concepto psicológico de triangulo semiótico (Rauh, 1989), intenta dar una conexión entre dos de los puntos, que se realiza solamente por las actividades cognitivas y las representaciones mentales, ver fig. 2. Esto convierte a los símbolos en conceptos y también en palabra. Es en uno de los vértices del triángulo donde interactúan lo sensorial con lo cognitivo, siendo este proceso la primera experiencia, que se hace sobre el proceso de verbalización, el resultado de una metáfora. El sentido del símbolo, designa en la cabeza del individuo un sentido al símbolo, de esta forma se aplicará de forma arbitraria su significado. Esto lo denomina Glasersfeld (1987, pág. 213) como la "línea icónica" o "isomorfismo" del conocimiento del individuo con la realidad. Funke (2006) agrega que es

[49] *Traducción de la autora*

posible que sujetos con experiencias reales (tangibles) realicen esta conexión de lo percibido en términos simbólicos y lo percibido en términos del lenguaje, para obtener un concepto a nivel conceptual.

En las propias palabras de Glasersfeld (1987): "Symbolen und deren Referenten keine andere Verbindung geben kann als die, die im Geiste ihrer Benutzer hergestellt wird."[50] (Glasersfeld 1987, pág.256). No ocurre lo mismo con las representaciones semióticas, donde el significado esta previamente dado y son los efectos de la interpretación lo que cambia.

En concreto, las representaciones semióticas son aquellas producciones mentales constituidas por signos, que pueden ser enunciados en lenguaje natural, en fórmulas algebraicas, en forma de gráficos, por medio de figuras geométricas o pautas de música, son el medio que dispone un individuo para expresar o exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a los otros (Duval, 2004, pág. 14).

Algunos ejemplos de sistemas semióticos de representación son: lengua natural, escritura numérica, escritura algebraica, representación geométrica, lenguaje cotidiano, gráficos, tablas. Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y representaciones externas. Conscientes, en el sentido de mirar "alguna cosa" que toma *ipso facto* el status de objeto para el sujeto que mira. Las representaciones conscientes son aquellas que presentan un carácter intencional y que cumplen una función de objetivación. Las representaciones externas cumplen tres funciones, la función de comunicación, la función de objetivación y la función de tratamiento. Duval (2004) agrega que, las representaciones semióticas no cumplen solo la función de comunicación, sino que además cumplen una función primordial de tratamiento de la información y de objetivación o toma de consciencia (ibídem, Cáp. I, pág. 28). Esto se traduce en que las representaciones semióticas son un soporte para las representaciones mentales.

Hay tres procesos que se pueden dar con las representaciones semióticas, el proceso de identificación del objeto y de su representación, transformación de las representaciones semióticas por medio de reglas establecidas y convertir estas representaciones semióticas a otro sistema. Por ejemplo, el músico que tiene en su mente una melodia, esta puede estar representada por imagenes, olores y sentimientos, el músico reconoce la melodia, en este momento identifica la representación mental con una melodía y puede separar la

[50] *"A los símbolos y a sus expresiones, no se les puede dar otras conexiones, más que las que el sujeto que las utiliza, les puede dar en su espíritu." Traducción de la autora.*

representación del objeto. Cuando la representa por medio de notas musicales, utilizará para ello las reglas propias del estilo musical que tiene la melodia y la representará por medio de notas musicales o bien puede ser transferida a otro sistema semiotico como es el ejecutar en un instrumento la melodía.

Tabla 1: Resumen de Imágenes Mentales.

<table>
<tr><td colspan="4">Imágenes Mentales
Capacidades del ser humano: comparar imágenes nuevas y antiguas, cambiar imágenes a voluntad, decidir que es cada imagen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Representaciones Mentales</td><td colspan="2">Representaciones Semióticas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Cognitivamente relacionadas</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Conjunto de ideas provenientes del medio y que genera el individuo al momento de pensar</td><td>dibujos, palabras, frases, símbolos, sonidos, gestos, etc.</td><td rowspan="4">Producciones mentales con fines comunicativos y constituidas por signos. Están las representaciones descriptivas, las icónicas y las simbólicas.</td><td>símbolos, tablas, diagramas, gráficos, textos, palabras, etc.</td></tr>
<tr><td>No hay reglas</td><td>Hay reglas</td></tr>
<tr><td>Libertad personal, variedad, creatividad, flexibilidad, fluidez.</td><td>Tiene la función de: comunicación, objetivación, (tratamiento). Libertad social.</td></tr>
<tr><td>Intelecto e Intuición.</td><td>Conscientes y externas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Se generan a través de la percepción del medio o son dadas por el saber sabio.
Pueden quedar gravadas en la memoria.
Comandan nuestro pensamiento, nuestro sentir y nuestro hacer.</td></tr>
</table>

No todos los sistemas semióticos permiten estos procesos, como por ejemplo el lenguaje morse o la codificación de tránsito, no permiten que el individuo pueda transformar de alguna forma la representación semiótica “no adelantar” en otra cosa que no sea no adelantar, o que al ver los símbolos de no conducir a mas de 30 kilometros por hora y el de no conducir a mas de 50 kilometros por hora, separados por 100 metros, al individuo se le ocurra que los puede sumar o que los puede transformar a no conducir a más de 80 kilometros por hora. Esto quiere decir, que solo algunos sistemas de representaciones semióticas permiten los tres procesos mencionados anteriormente, varios de estos sistemas de representaciones semióticas, son utilizados en matemática. Una buena coordinación de los sistemas semioticos, permite a los alumnos un buen acierto en las tareas planteadas (Duval , 2004). Por esto, que es importante, incluso en matemática, el desarrollo del lenguaje, ya que este es el primer sistema semiótico que domina el sujeto.

El ser humano piensa entonces a través de imágenes internas, se entiende por imágenes internas a todo lo que se “presenta” en la mente del ser humano, cuando está frente a un cambio. Las imagenes mentales se pueden clasificar en dos tipos: las representaciones mentales y las representaciones semióticas.

En la tabla 1, se muestra un resumen de lo que se ha tratado hasta ahora sobre las representaciones. Donde se muestra que las representaciones semióticas son consideradas como representaciones mentales, esto quiere decir, que también son utilizadas para pensar y para formar parte de mapas conceptuales. El individuo las considera como parte de sus representaciones mentales.

Así, las representaciones semióticas son también representaciones mentales y pueden ser miradas como un soporte concreto para estas mismas. Las representaciones semióticas son un vehículo de comunicación del pensamiento, las representaciones mentales también lo son, como los dibujos y los mapas, permiten la comunicación interna. Por una necesidad de comunicación, el individuo debería llegar a conocer y utilizar las representaciones semióticas. Hay un proceso cognitivo fundamental en el paso de una representación mental a una representación semiótica, que todos los individuos son capaces de hacer. En el proceso de pensar, estos dos tipos de representaciones están mezclados y es necesario incluir la comunicación, el diálogo en todos los procesos de aprender.

2.1.2. Estilos de pensamientos.

Cada individuo piensa distinto, cada individuo generará una imagen distinta de la misma situación. En la sección 1.1, se mostró, que existían cuatro formas de pensar y aquí se intenta hacer una diferencia en el estilo de pensar. En la distincion de los estilos de pensamientos, se encuentran 5 tipos, según Sternberg (Amelang, Bartussek, Stemmler y Hagemann, 2006; Borromeo-Ferri, 2004; Sternberg, 1985;), de las cuales se consideran 4: el pensamiento funcional, el pensamiento formal, el pensamiento organizador, el pensamiento diferencial y se agrega el pensamiento predicativo como pensamiento contrario u opuesto al pensamiento funcional (Schwank, 2003). En este trabajo se consideran las siguientes definiciones para cada uno de los pensamientos antes mencionados:

Pensamiento funcional es cuando se reconocen las diferencias y estas se utilizan durante el proceso de pensar para ordenar elementos, la diferencia actua aquí como criterio de producción (Schwank, 2003). Tener desarrollado el estilo de pensamiento funcional, significa que el individuo sabe como “funcionan” las cosas (entendidas aquí como elementos), individuos con este estilo, detectan las diferencias y a la vez son productores de resultados. En general, se pueden distinguir tres estilos, a saber: el funcional legislativo, decide y planea lo que se debe hacer, desarrolla y representa planes de acción. El funcional ejecutivo, es el que se desarrolla al momento de realizar las tareas y el pensamiento judicial, que esta presente al momento de evaluar las tareas que se han realizado. En estas formas del pensamiento funcional iran apareciendo distintas imagenes o palabras o preguntas. Por ejemplo en la elaboracion de un proyecto, las primeras preguntas serán: ¿Qué es lo que cambia?, ¿Cómo se procede?, ¿Cúal es el resultado? y mientras se esta haciendo estarán mezclados los tres tipos ejecutivo, legislativo (da la estructura) y judicial, produciendo cambios o verificando las pautas del desarrollo del quehacer.

En los estudios sobre la enfermedad del ADHS, hay una propuesta, que esta relacionada con el pensamiento funcional, se sugiere en este trabajo que los sujetos con esta enfermedad, tienen fuertemente desarrollado un solo tipo de pensamiento y que sería el funcional[51]. Lo contrario al pensamiento funcional seria el pensamiento predicativo. Para comparar ambos estilos de pensamiento, se puede hacer la siguiente pregunta a un sujeto: ¿Cuál es la diferencia entre un lápiz mina y un lápiz pasta?, un sujeto de estilo predicativo "normal" diría que la diferencia esta en el material, en el color y en características exteriores, esto es, el sujeto predicativo, describiría paso a paso, las diferentes características de los dos obejtos. En cambio un niño con pensamiento funcional diría, que con el lapiz pasta no podría escribir en la luna y con el lapiz mina si podría dibujar, al lapiz mina se le puede sacar punta y con el lapiz pasta no funciona la mayoría de las veces. Este tipo de experimentos llevan a la propuesta de relacionar el pensamiento funcional con procesos dinámicos (de hacer, de funcionalidad del objeto) y el pensamiento predicativo con procesos estaticos.

Se entiende como pensamiento predicativo el reconocimiento de similitudes y la utilización de estas similitudes para estructurar elementos de forma sistemática. En este caso, la similitud actúa como criterio de producción (Schwank, 2003). El pensamiento predicativo, se define entonces como el "contrario" al pensamiento funcional.

El pensamiento formal reconocerá y utilizará objetivos dentro de una situación, el individuo se maneja a través de objetivos y logros, busca las asociaciones entre un paso y otro, en este proceso se pregunta ¿para qué y por qué? El pensamiento formal es el pensamiento de la "orientación" de lo que se hace. Dentro del pensamiento formal se distinguen cuatro estilos, el pensamiento formal monarquico, el pensamiento formal

[51] *Mirar la página Web: http://www.integrationstheorie-und-adhs.de*

jerarquico, el pensamiento formal oligarquico y formal anárquico. El pensamiento monarquico ocurre cuando el individuo esta concentrado solo en un objetivo, de forma contraria esta el pensamiento jerarquico, cuando el individuo se concentra en varios objetivos a la vez, otorgandole distintas prioridades. El pensamiento oligarquico se desarrolla cuando el individuo esta pensando en mas de un objetivo, otorgandole a todos la misma prioridad. El pensamiento formal anárquico es antisistematico, las imagenes producidas van y vienen, sin un orden establecido, sin otorgar prioridad a los objetivos y estos objetivos cambian constantemente.

El pensamiento organizador esta directamente relacionado con las habilidades del pensamiento, este utiliza las representaciones y las “organiza” les da una estructura dentro del pensamiento. Dentro del pensamiento organizador se distinguen dos formas, el pensamiento organizador interno y el pensamiento organizador externo. El pensamiento interno aparece cada vez que el individuo realiza una representación interna, realiza algún paisaje mental o alguna imagen esta en su cabeza, pero no lo comúnica a nadie, lo realiza solo para él, en el sentido de introversión (Asanger et al., 1999, pág. 485). El pensamiento externo ocurre cuando el individuo realiza alguna representación y la comúnica a sus pares, por medio de palabras, gestos, dibujos o sonidos.

El pensamiento diferencial se caracteriza por una busqueda de mostrar las diferencias interiores del individuo, este tipo de pensamiento derivará en conceptos como convergente y divergente o en términos como creatividad social. Dentro del pensamiento diferencial existen dos formas, el pensamiento diferencial liberal y el pensamiento diferencial conservador. Las representaciones externas son novedosas y tradicionales respectivamente.

Según estos distintos estilos de pensamientos, el individuo generara distintos planes de acción, generara preguntas y encontrara respuestas, estos estilos de pensamientos darán origen a la forma de percibir los objetos y a la procesacion de información, que realize el sujeto. Es decir, estos estilos de pensamientos se irán desarrollando según las condiciones que el medio otorge y exija del individuo. Un mismo individuo desarrolla algunos estilos de pensamientos mas que otros, se puede notar una diferencia entre hombres y mujeres, en relación al uso del pensamiento funcional (Schwank, 2009).

2.3. ALGUNOS PROCESOS COGNITIVOS.

La cognición tiene que ver con el pensamiento y con el entendimiento, es decir, con la forma de trabajar del cerebro (Hayes, 1995) o más en general con la forma de trabajar del sistema nervioso (Gallistel, 1998, pág.9). El ser esta constantemente recibiendo información del medio, como esta información se procesa, a que objetos se les toma más atención y a los que no, cuales son los procesos que realizará el individuo en cada momento, son algunos de los temas que se intentan describir, en términos del pensar y del entender, estos son algunos de los grandes desafios de la psicología cognitiva.

Algunos de los procesos cognitivos que constantemente realiza el ser, son la percepción, la atención, el pensar (Funke, 2006), la memoria (Anderson, 1981) y el lenguaje (Hayes, 1995, pág. 13), coordinación motriz, planificación (Andler, 2004). El primer proceso que se realiza frente a una situación es percibir, observar lo que ocurre. La percepción que el individuo tenga del medio, permitirá la identificación de formas y lineas, diferenciando animales, personas y cosas; para luego comparar experiencias previas en situaciones similares.

El segundo proceso cognitvo se hace cuando la situación es nueva, según las experiencias anteriores del individuo, es decir, no ocurre lo que se espera, ocurre algo nuevo e inesperado. En este caso, no tan solo se observa, sino que se aprecia el "fenomeno" en forma activa, este proceso se denomina como atención. Se empieza entonces con la reflexión (generación de una imagen que refleja la situación), como ocurre la situación vivida, apreciada, percibida, cuales son las diferencias que hay con otras experiencias anteriores, como se puede ajustar a lo que conocemos, es decir, se encuentra una situación que se debe adaptar a lo que el individuo cree que sería lo adecuado según su experiencia (Anderson, 1975). El individuo combina información nueva y anterior con el proposito de reducir y volver a generar una representación interna, que se adecue a lo que ha reflexionado. El individuo no tan solo toma atención, en lo que ocurre a su alrededor o en la situación en la que esta participando, sino que se recordará de ella después, almacenando en su memoria la imagen o las palabras que describen la situación o elementos importantes de esta (Anderson, 1981). Esto ocurre solo cuando el proceso cognitivo de pensar ha sido realizado, dando la posibilidad de llamar esta imagen o conjunto de palabras cada vez que se necesite, ya sea como información para comunicar o para comparar con otra situación (Asanger et al., 1999, pág. 353).

Otro proceso cognitivo que realizan las personas es el de buscar y elegir las palabras adecuadas o los símbolos necesarios, para describir una situación, para comunicar una situación o un problema. Este proceso es denominado lenguaje (Hayes, 1995; Frauenfelder y Floccia, 1999). El lenguaje que sirve para elaborar y comunicar preguntas o resultados, esta formado por un conjunto de definiciones semipersonales, que el individuo ha almacenado hasta ese momento, en este caso el individuo hace una traducción de su paisaje mental a un lenguaje común. En este proceso se pueden advertir dos sucesos importantes, el primero la traducción interna que se realiza desde la imagen mental al lenguaje común, el reconocimiento de las palabras que estan en juego es un proceso cognitivo relevante, que permite elegir y entablar una comunicación (ibidem, 1999) y el segundo proceso es comprobar la completitud de ambas, es decir, comprobar la conexión entre lo que se ha representado mentalmente y lo que se ha comúnicado.

Una de las teorías que pueden ayudar a entender la relación entre lo que observamos, percibimos con la representación generada es la Teoría de los niveles de representación de Bruner (1971). En contradicción con la Teoría de Piaget (2003), sobre el desarrollo del pensamiento, Bruner (1971) no considera tan solo un desarrollo cognitivo basado en la edad del individuo, si no que, basado a la vez sobre diferentes niveles de representación. Este autor, considera tres niveles de representaciones: El modo enactivo, adquisición de los hechos por actos relacionados con materiales concretos, aquí deberíamos agregar, por acciones concretas, realizadas con el cuerpo, visibles en el tiempo. El modo icónico, que es el reconocimiento de los hechos por medio de dibujos, fotos, diagramas, tablas, etc. Estos dibujos, son esquemas propuestos por el indidviduo y pueden tener relación con los dibujos generalizados (esquemas tradicionales, que son dados por un experto, por el profesor, etc.). El modo simbólico, que es la adquisición de los hechos o del conocimiento por la comunicación lingüística o por medio de símbolos, que tienen un significado generalizado (representaciones semióticas).

En la identificación de estas representaciones, hay varios procesos cognitivos relacionados, como por ejemplo la coordinaciónn motriz simultaneamente con el pensamiento y la atención, en el caso del modo enactivo. En el modo icónico será necesario que el individuo desarrolle el lenguaje, en todas sus formas. En el tercer modo, hay procesos cognitivos relacionados con la abstracción y la sintesis o planificación que el individuo pueda realizar. Una de las características relevantes es ser “flexible” cognitivamente, que para Bruner (1971), es poder pasar de un tipo de nivel de representación al otro, siempre y cuando estas representaciones se apoyen unas a las otras, con esto se consideran las diferencias en el desarrollo el pensamiento.

Más aún, la doble naturaleza de la matemática y de sus concepciones (Sfard, 1991) le dan cabida a los dos primeros niveles del proceso de Bruner (1971), a saber, el operativo y el figurativo, dado en un inicio por Piaget (Aebli, 1963; Piaget, 2003) como si fueran dicotómicos. El concepto operacional y el concepto figurativo son parte de un mismo sistema, son parte del tránsito cognitivo en el aprendizaje de las nociones matemáticas.

2.4. HABILIDADES-CAPACIDADES-COMPETENCIAS.

En este trabajo se utiliza la defínción de capacidad, como la medida de lo que podría hacer una persona en circunstancias favorables y habilidad como la capacidad realizada en una situación determinada (Lehr, 1999, pág. 235). Así, las capacidades son características potenciales de las personas y las habilidades es lo que ha demostrado la persona que ya comprende, es por lo tanto el resultado de una acción. Los logros son los resultados de las acciones que son evaluadas por la sociedad y el resultado de estas acciones pueden ser buenos o malos (Asendorpf, 2005), además estos resultados pueden ir variando con el tiempo.

Por otro lado, se entiende como competencias a las disposiciones psicológicas del ser humano, que se obtienen como resultado de un aprendizaje exitoso. Esto es, alguien es competente cuando ha obtenido un resultado favorable y ha sabido "conjugar" lo aprendido. Las competencias estan compuestas de diferentes factores que estan estrechamente relacionados con los conocimientos, con las destrezas y habilidades, e incluyen aspectos de la experiencia, la motivación y de las actitudes (PISA, 1997). Ellas proveen a las personas para que logren determinadas tareas o problemas, para superar demandas en las situaciones concretas. Las competencias son capacidades potenciales que poseen los individuos, a las que se les agrega además el factor de valor, dado por la sociedad en la que el individuo se desarrolla. (o.g. 1997)

Las competencias son de vital importancia para la educación y la formación, también en términos de "aprendizaje permanente". Hoy en día, están contempladas en los planes y programas de educación, de casi todos los países, pero ¿cuál es la relación que estas tienen con el PM?, esto no se ha mencionado directamente en el informe Pisa (1997), ni en los siguientes informes. Aparecen algunas alusiones, pero no de forma concreta. En el transcurso de este trabajo, se intentará responder, ya que es desde el punto del PM se debe desarrollar una aproximación a las competencias en matemática.

2.5. CAPACIDADES RELACIONADAS CON LOS CONTENIDOS.

Con lo anterior, se tiene por un lado que inteligencia es una capacidad y por otro lado, estan las habilidades que también son capacidades y las competencias, que es la capacidad del individuo de conjugar ciertos aprendizajes. Así, el concepto de inteligencia-capacidad y competencia-capacidad estan intimamente relacionados.

Inteligencia es una capacidad global que se apoya en el conocimiento, es decir, en los contenidos y las destrezas aprendidas. Es una aptitud mental que adapta y comprende nuestro entorno de forma adecuada, permite el razonamiento adecuado culturalmente y ayuda en la resolución “correcta” de problemas (Amelang, Bartussek, Stemmler, Hagemann, 2006) y esta actitud mental permite aprender de las experiencias.

Con esta definición de inteligencia, se tiene una analogía entre competencias e inteligencia. Para las competencias es fundamental, la resolución de problemas en un entorno social, ser inteligente es también comprender el medio. Este entorno social dictaminará si las respuestas son satisfactoria o no lo son, en el caso de la inteligencia es primordial el conocimiento, gracias a este conocimiento se obtienen las respuestas adecuadas, es decir, no hay respuestas inadecuadas socialmente, sino que son inadecuadas dentro del contexto de un saber. En este caso, hay una sútil diferencia, ya que las competencias estan inmersas dentro de respuestas sociales posistivas y negativas, la inteligencia esta dentro de respuestas buenas y malas dentro de un saber.

Para entender mejor, esta sutileza, entre competencia (en un entorno social) e inteligencia (de resolución de problemas), esta el ejemplo de la creación de la bomba atómica (Hermann, 1994, Cap. 19).

Según Gardner (2009) la inteligencia es un conjunto de habilidades que permiten resolver problemas o elaborar productos que son valiosos en una o mas culturas. La importancia de esta definición (ibidem, 2009) es doble: Primero, amplía el campo de lo que es la inteligencia y reconoce lo que se sabía intuitivamente, y es que la brillantez académica no lo es todo. A la hora de desenvolvernos en esta vida no basta con tener un gran expediente académico.

Hay gente de gran capacidad intelectual pero incapaz de, por ejemplo, elegir un buen poducto de alimentación y, por el contrario, hay gente menos brillante en el colegio, que triunfa en el mundo de los negocios o en su vida personal. Triunfar en los negocios, o en los deportes, requiere ser inteligente, pero en cada campo se utiliza un tipo de inteligencia distinto.

Segundo, al definir la inteligencia como una habilidad-capacidad, este autor convierte a la inteligencia en una destreza que se puede desarrollar, es decir, en una competencia. Gardner (2009) no niega el componente genético. Todos nacemos con unas potencialidades marcadas por la genética. Pero esas potencialidades se van a desarrollar de una manera o de otra dependiendo del medio ambiente, de nuestras experiencias, de la educación recibida, de la alimentación, de la salud, de la politica, etc.

Ningún deportista de elite llega a la cima sin entrenar, por buenas que sean sus cualidades naturales. Lo mismo se puede decir de los matemáticos, si no quieren “entrenar” o "descubrir" sus capacidades y sus potenciales habilidades, entonces no llegaran a ser grandes matemáticos.

Las inteligencias están física, social y simbólicamente distribuidas, esto significa que cada tipo de inteligencia no esta solo en la mente del sujeto sino que se desarrolla y enriquece con el intercambio que los sujetos mantienen con el medio, entendiendo este medio, lo mas general posible, con su familia, pares, amigos, animales, con libros, computadoras, etc.

Gardner (2009) habla de 7 inteligencias-capacidades, que son la inteligencia linguistica, la inteligencia lógico-matemática, la inteligencia kinestesico-corporal, la inteligencia musical, la inteliegencia espacial/visual; la inteliegencia naturalista y la inteligencia emocional, Más aún, el habal de una posible capacidad metafórica del ser humano. Estas 7 capacidades se usan indistintamente en la resolución de problemas en matemática y en las situaciones, esto es, son parte del PM.

Un complemento de esta teoría, es la teoría cognitiva sobre la inteligencia de Sternberg (Sternberg, 1985), que propone tres tipos de inteligencia: análitica, creativa y práctica. Cada uno de estos tipos conforman tres subteorías parciales que se complementan entre sí: componencial, empirica y contextual. Para este trabajo son las tres relevantes, sobretodo si se comparan con la Teoría de Bruner (1971).

Componencial: Capacidad de pensar en forma abstracta, procesar información y determinar qué se necesita hacer. Nos dice acerca de la relación entre la inteligencia y el mundo interno de la persona. Esta parte esta formada por una serie de componentes. Los componentes son los procesos ejecutivos usados en resolución de problemas y toma de decisiones que implican la mayor parte de la capacidad de gestión de nuestra mente. Dicen a la mente cómo actuar.

Un componente es un proceso de información elemental que opera sobre las representaciones internas de objetos o símbolos (Sternberg, 1985, p.96). La primera función que tienen estos componentes son la planeación de orden superior, selección de estrategia y supervisión. Son procesos ejecutivos usados en planeación, monitoreo y toma de decisiones en reto de desempeño.

La segunda función es ejecutar las estrategias seleccionadas, se maneja mediante los componentes de desempeño. Son usados en todos los pasos del proceso de solución: codificar, comparar y generar. Un componente de desempeño nos permite percibir y almacenar nueva información.

La tercera función obtener nuevos conocimientos, se realiza a través de los componentes de adquisición de conocimientos, como separar la información irrelevante conforme se trata de comprender un nuevo concepto. El aspecto clave de este componente es la selectividad.

Empírica: Capacidad de formular nuevas ideas y combinar hechos no relacionados. Una prueba de inteligencia basada en la experiencia evalúa la capacidad de una persona para manejar tareas nuevas de una manera automática. (novedad y automatización). En como el sujeto afronta nuevas experiencias, se distinguen dos características, el discernimiento o la capacidad de manejar en forma efectiva situaciones recientes y la capacidad de llegar a ser eficiente y automático en el pensamiento y la solución de problemas.

Así, la capacidad de resolver problemas nuevos para el individuo implica el pensamiento creativo y la capacidad de automatización – convertir con rapidez las nuevas soluciones en procesos de rutina que se pueden aplicar sin mucho esfuerzo cognoscitivo.

Contextual: Capacidad de adaptarse a un entorno cambiante y modelar el mundo propio para optimizar las oportunidades. La inteligencia contextual maneja la capacidad de un individuo de prepararse para la solución de problemas en situaciones específicas. Relaciona la inteligencia al mundo exterior. Seleccionar el entorno en que el individuo pueda tener éxito y adaptarse a éste o readaptarse si es necesario.

Aquí, la cultura es un factor fundamental en la definición de una alternativa exitosa, la adaptación y el modelamiento. Lo que funciona en un grupo cultural no funcionará en otro. La inteligencia en este tercer sentido implica aspectos prácticos como las capacidades para seleccionar una carrera o habilidad social.

La inteligencia es entonces considerada como una actividad mental de un sujeto, dirigida con el propósito de adaptación, selección de o conformación de entornos del mundo real, relevantes en la vida del sujeto. En otras palabras, un indidviduo es capaz cuando el trata adecuadamente los cambios que ocurren en su entorno, a lo largo de su vida.

Guilford (1967) diseñó un modelo estructural de la inteligencia al que denominó estructura del intelecto. Organizado en tres dimensiones: operaciones, contenidos y productos. Las operaciones representan los modos de pensar, los contenidos, aquello sobre lo que se aplica el pensamiento y el producto el resultado de la aplicación de una operación a un contenido. Describiendo cinco operaciones en relación a la inteligencia: cognición, memoria, producción convergente, producción divergente y evaluación.

Cognición es concebida desde la percepción y desde la comprensión de la información; Memoria supone la retención y organización de la información en un almacén cognitivo;

producción convergente se basa en deducciones lógicas y conclusiones obligadas; la producción divergente esta relacionada con las aptitudes de elaboración y creatividad; por último la evaluación es el proceso de decisión acerca de la adecuación del criterio aplicado.

Los contenidos constituyen tipos de información sobre los que actúan las operaciones descritas anteriormente. Son: figurativo, simbólico, semántico y conductual. Donde lo figurativo es la información de carácter sensorial concreta según los diversos sentidos, esta según lo anterior, se obtiene de la parte enactiva que realiza el sujeto. Lo simbólico es la información bajo la forma de signos que pueden representar otros objetos, lo semántico se referiere a la información en forma de conceptos, relacionada con el lenguaje y las representaciones mentales. Por último lo conductual, que es la información que se da en diferentes operaciones que pertenecen a la conducta de las personas.

Tabla 2: Procesos cognitivos y Capacidades.

Procesos Cognitivos Operaciones-contenidos-productos			**Capacidades** flexibles, cambiantes, desarrollables, etc.	
Percepción	Situaciones nuevas y favorables aúnque no ocurre lo que se espera. Hay que conjugar lo que se ha aprendido.	Lo adecuado socialmente y personalmente.	Resolver problemas, elaboración de productos utiles a la sociedad (con valor social).	Analitica contextual
Atención		Observar el fenomeno de forma activa.		
Reflexión		Combinar lo anterior y creación de estrategias nuevas.		Analitica componencial
Memoria		Recuerdo y reutilización.		Creativa empirica componencial
Lenguaje		Comparar, buscar y comunicar		Práctica contextual
Coordinación Motriz		El yo corporal y el mundo material. Paso al mundo simbolico.		Creativa componencial, empirica y contextual
Planificación		Organizar la información y la forma de encapsularla.		Practica componencial

Con lo anterior, se pueden relacionar los procesos cognitivos con las capacidades, ver tabla 2, en la que se entiende que las capacidades son un factor flexible de la personalidad del individuo, que son cambiantes en el tiempo y desarrollables por el medio.

Con estas dos secciones, se pueden relacionar los procesos cognitivos y el desarrollo de estos con la definicion de inteligencia, por ejemplo, si un individuo tiene mas desarrollado su capacidad de percibir el medio (Inteligencia espacial-visual), tendra mas facilidad en el proceso cognitivo que esta relacionado con la percepción y con la atención, ya que cualquier cambio en el espacio será percibido con mayor facilidad. Lo mismo ocurre con el lenguaje y con el desarrollo de este, si el individuo se expresa bien, tendra una facilidad para "conversar consigo mismo" y poder elegir de forma adecuada las palabras que le permiten comunicar sus representaciones, si el individuo es además creativo, entonces podra conjugar lo desarrollado, aprendido para la elaboración de libros o textos, que serán bien vistos por el medio social.

En lo que sigue, se discutirá un poco mas sobre el término percepción, ya que la investigación aquí realizada, muestra que la percepción es parte del pensar, es lo que gatilla un proceso cognitivo, junto con la atención (Mason, 1989). Es por esto, que se ha dedicado la siguiente sección a la percepción, que formará parte de la categorización del PM.

2.6. PERCEPCIÓN.

„Alle unsere Erkenntnis hebt von den Sinnen an,
geht von da zum Verstande und endigt bei der Vernunft…"[52]

(Kant, 1787, pág.237).

La percepción es el proceso de adquisición de información de los estímulos ambientales y físicos (percepciones externas e internas) y la coordinación de la transferencia y el procesamiento de estos estímulos en el cerebro (Zimmer, 2005, pág. 32), como estimulos físicos se pueden entender tanto, las ondas de energía, como los cambios físicos concretos como el paso del frio al calor, etc (Schröder, 2001, pág. 115). En este proceso están involucrados experiencias personales, vivencias y apreciaciones personales (Flessas y Lussier, 2005). Sin entrar en el detalle neurológico de este proceso y sin entrar en el debate psicológico sobre la percepción y la reacción, se considera esta definición como un punto de partida para decir lo que es la percepción y la importancia que tiene esta en el aprendizaje (ibidem, 2005). Según Steiner (2009), un sentido entra en acción cuando el individuo procura una representación, mientras que la comprensión aún no ha iniciado su actividad, es decir, la capacidad de juzgar aún no ha entrado en actividad, por ejemplo: para percibir un color se necesita un sentido, para juzgar entre dos o más colores se necesita otro sentido.

La percepción es influenciada por muchos factores (Zimmer, 2005), uno de ellos es la experiencia anterior, los buenos y malos recuerdos de la experiencia. Si continuamente un

---

[52] *Todos nuestros conocimientos se "levantan" a partir de los sentidos, desde aquí se va a la comprensión y terminan en la razón. Traducción de la autora.*

alumno en clases de matemática, ha tenido la percepción incomoda de escuchar y no entender, es muy probable que en cada clase, esta percepción se mantenga, esto es, el sentido auditivo, enviará señales a su cerebro que se transformaran automaticamente en la sensación de no entender y por lo tanto la sensación de aburrimiento en clases. No confuncir con la falta de atención del alumno, esta se produce inmediatamente después de haber escuchado algo y que no se considera importante, la falta de atención también es causada por el cansancio. Si el alumno logra estar atento, es porque lo que escucha, ve, siente, etc., esta siendo percibido y esta percepción estaría entrando en otro proceso nuevo para el alumno.

Cuando un sujeto percibe algo, hace una representación de lo percibido, esta imagen mental o dibujo icónico, habla de lo percibido y habla del sujeto que lo percibe (Stadler, Seeger y Raeithel, 1975). La percepción es un "diálogo" dinámico, con una estructura personificada, retroalimenticia y con forma de espiral (Doering y Doering, 1996), entendiendo el diálogo como interacción, comunicación, intercambios internos y externos al sujeto, como el tomar y el dar, acción y reacción, etc.

En este proceso de percibir juega un rol importante el interés y la emoción relacionada con el momento, por otro lado se sabe que el ser humano esta constantemente percibiendo y aprendiendo a percibir (Flessas et al., 2005). Hay personas que aprenden a cerrar ciertos sentidos, como por ejemplo el auditivo, esto se debe a que el ruido no permite la atención de la lectura o el ruido nos impide tomar atención a otra persona que esta hablando más cerca, la mayoría de las personas aprenden a regular la entrada de sonidos y de ruidos, para ser indiferentes a ciertos ruidos que interfieren con algún otro proceso de percepción. Se podría decir que el ruido es mas invasor y por lo tanto se debe proteger la percepción de ruidos, por eso no es raro escuchar a la profesora con su comentario: "¡se los dije una y mil veces, yo no sé como estos niñitos no me escuchan!". Lo que en realidad pasa, es que la voz de la profesora es considerada como ruido para la percepción de los alumnos, ya que ellos quieren escuchar a sus pares, han aprendido a detectar el tono de la voz de la profesora y cerrar el canal de envio sensorial al cerebro. Esto es reparable y el trabajo empieza por cambiar los métodos de la profesora para ser percibida en la clase por parte de sus alumnos, para esto es necesario utilizar en un principio otros sentidos diferentes al auditivo, como por ejemplo, el sentido visual o el sentido táctil y otras sensaciones como por ejemplo, al hablar que sea para hacer un elogio y no una critica, motiva la sensacion de seguridad en los alumnos atraves de la voz de la profesora.

Klauß (1986) propone entre otras cosas, la ejercitación del sentido de la vista con otros sentidos, para que la objetividad del "estado" del objeto aparezca e interactue con el sujeto.

De esta forma, dice el autor se podrá hablar del mismo objeto y la representación personal sobre este, vendrá desde distintos sentidos, que completarán al objeto, esto es un poco contrario a lo conocido por “visualización”, ya que esta considera el sentido de la vista como uno de los mas relevantes, aqui se intenta decir, que todos los sentidos son relevantes y que dependera de como el sujeto desarrolle estos y el contexto en que lo utiliza, lo que determinará sus posibles respuestas. Por ejemplo, si un material se pone azul cuando esta caliente, no bastará solo con mirarlo, habrá que tocarlo o tener desarrollado el sentido del calor, para saber si esta caliente, si el observante se dejará llevar por el sentido de la vista, entonces propondría el estado de frio para el material y no probaría de utilizar la mano para saber algo más sobre el estado del material. Todos los alumnos deberían desarrollar todos sus sentidos, muchas veces el sentido de la vista nos induce a decir que dos lineas son paralelas cuando no lo son, esto es conocido como ilusión óptica (Picon, s.a.).

Sobre la cantidad de sentidos que posee el ser humano, se puede decir que son muchos más que los cinco tradicionales: el sentido del tacto y de la presión (no solo se consideran las manos, si no que la piel), el sentido de la vista, el sentido del olfato, el sentido auditivo y el sentido del gusto. Considerando la literatura tradicional, se aceptan hasta el día de hoy (Zimmer, 2005, pág. 57), 13 sentidos, los que fueron recopilados y discutidos por Stadler, Seeger y Raeithel (1975). Estos sentidos son los cinco anteriores mas el sentido de la temperatura, el sentido del dolor, el sentido de la posición, el sentido de la fuerza y la tensión, el sentido de la rotación y el sentido de la sensación del cuerpo.

Un poco mas allá avanza Rudolf Steiner (2009), considerando 12 sentidos, los que se ponen en relación entre la percepción del mundo y el pensar, estos sentidos estan separados en tres categorías: Percepción de la interioridad del otro, percepción de la propia interioridad y la percepción del mundo.

Al grupo de la percepción de la interioridad del otro, pertenecen el sentido auditivo, el de la palabra o sentido verbal, el del yo ajeno, el sentido del pensar o sentido intelectivo. Destacando de este grupo, el sentido auditivo, que es el que permite percibir el sonido no linguistico, es decir, vibraciones sonoras con sus respectivos armonios, como por ejemplo música, ruidos, etc. El sentido que también destaca para las intenciones de este trabajo es el sentido de la palabra, que permite percibir aquello que se puede percibir a través del lenguaje.

Al grupo de la percepción del mundo, pertenecen los sentidos del olfato, del gusto, de la vista y del calor, de aqui se destacan por lo menos dos: que son los de la vista, que permiten apreciar el color y de cierta manera nos ayuda y percibir la forma (la forma es apreciada por el sentido del movimiento) de los objetos, en muchas clases de matemática se utiliza este sentido para motivar al estudiante o se cree que es a través de este sentido, se logra la “conquista” del estudiante. El segundo sentido que destaca en este grupo, es el sentido del calor, no confundir con el sentido del tacto, este sentido del calor permite percibir la interioridad del objeto, es através de este sentido que los niños pueden entender la utilización del termometro y es por eso que la utilización de un termometro para introducir a los numeros enteros, no es muy recomendada, ya que el termometro es un objeto que se acerca un poco mas al sentido del tacto, que puede ser comprendido por el sentido del calor, pero para comprender y tener un conocimiento profundo sobre los números enteros no es suficiente.

Al tercer grupo corresponden los sentidos del tacto, de la vida, del movimiento y el sentido del equilibrio o sentido estático. De este grupo sobresalen para este trabajo, tres de ellos, que son el sentido del tacto, por el cual percibimos todos los objetos y la mayoria de sus características, el sentido del movimiento que nos informa sobre las posiciones relativas de nuestros miembros y de nuestros miembros con relación al exterior, una recta es percibida no tan solo por la vista, sino que tambien por la posición que esta tiene con respecto al cuerpo. Para niños es muy fácil decir con un movimiento del dedo, lo que es recto y lo que no lo es y es que esta diferenciación lo logran por este sentido del movimiento del dedo con respecto a la ubicación que este tiene en el medio, así, una recta será (en general) mover el dedo desde arriba hacia abajo, paralela a la columna vertebral y algo que no es recto, tendra movientos del dedo que tienden a cortar el plano generado por la columna vertebral. El otro sentido relevante es el sentido del equilibrio, que permite diferenciar el sentido de arriba hacia abajo, notar en el ejemplo anterior, que en general los niños tienden a seguir el curso de la columna vertebral, pero habran otros chicos que no lo harán, esto dependerá de los sentidos a los que esten recurriendo. El sentido del equilibrio permité entre otras cosas, acercarse al concepto de ecuación e inecuación, como se verá más adelante.

En este trabajo se consideran entonces los siguientes sentidos: el visual, el auditivo, el táctil y de la presión, el gustativo, el olfativo, el de la temperatura, el del espacio o de la posición, el de la fuerza y de la tensión, el de la sensación del cuerpo, el de la palabra o el sentido verbal, el del movimiento que incluye el de la rotación, el del equilibrio o sentido estático. Para completar se incluye el sentido del número (Dehaene, 1999) y el sentido del tiempo (Reeves, 1996; Dehaene y Brannon, 2011). Es necesario incluir estos sentidos en nuestras salas de clases, como se verá mas adelante, a partir de estos se puede entender el medio y con esto comprender algunas ideas (o todas) de la matemática, con estos sentidos y el desarrollo de estos se comprenderá la carcaterización del PM y de la intención de construir el conocimiento a partir de las percepciones personales y de las experiencias corporales (Nuñéz, 2008).

Los otros sentidos no serán tratados en este trabajo, porque para el estudio de estos en relación con el pensamiento matemático, se necesitaria encontrar una relación entre el sentido del dolor y algunos de los conceptos que existen en matemática, ya que si existe algún alumno, que siente de alguna forma, que este sentido es necesario para el aprendizaje de la matemática, en particular de algún concepto, se debería hacer un analisis psicológico a este alumno, para determinar porque es así y seguro que los resultados de este analisis, no aportarian de forma positiva a la vida del alumno, ni a la didáctica de la matemática, ya que sería un caso puntual, que esta muy relacionado con la vida personal del alumno. Sobre el uso de estos sentidos, se cree que el individuo los utiliza de forma "caotica", no hay una regla en general para decir cual es el que usará primero y en que caso, lo que si, es que el individuo tiende a utilizar el sentido que tiene más desarrollado y el no desarrollo de alguno de estos sentidos a temprana edad, puede ser "fatal" para la incorporación de nuevos conocimientos.

2.7. ENCAPSULANDO O RESUMIENDO.

El pensamiento permite estrechar la brecha entre realidad y el mundo mental del sujeto, si este es considerado como un proceso cognitivo en el cual interactúa la percepción, las capacidades, las estrategias y existe de por medio una situación o un problema.

Como se ha visto, existen una serie de representaciones, pero en particular, existe una forma de representar que "conecta" o intenta entrelazar representaciones extrínsecas con las intrínsecas, que sería la elaboración de textos, ensayos, dibujos. Además, la interpretación, creación de textos o imágenes, se basa en supuestos activos sobre la acción. Lo que permitiría, también descubrir y analizar las capacidades y las herramientas que utilizan los sujetos para la creación y para la comunicación de la representación mental.

Estas tres ideas, representaciones, capacidades y situaciones, llevan al concepto de cognición encarnada (Lakoff et al., 1999; Parzysz, Kadunz, Robotti y Rogers, 2008). Desde este punto de vista, el ser humano:

- Puede construir sus categorías cognitivas, modelos mentales, con los cuales, perciben, interpretan y evalúan los fenómenos.
- Interactúa consigo mismo, con su medio físico y sobre todo con su entorno social.

En primer lugar, la construcción cognitiva del hombre se basa en las funciones corporales desarrolladas a través de la evolución y posiblemente también en los mecanismos psicológicos heredados de la evolución, como se argumenta en la psicología evolutiva (Barkow, Cosmides y Tooby, 1992). En segundo lugar, el ser humano comparte el mismo medio físico y en cierta medida también el mismo mundo social, sobre los cuales se lleva a cabo la construcción cognitiva. Esto es, la construcción cognitiva constituye una realidad que se manifiesta (Lakoff et al., 1999). Como resultado de compartir los mecanismos psicológicos de la construcción cognitiva y un mundo compartido de la construcción de dicha normativa, existe una similitud estructural básica de conocimiento entre las personas.

De esta forma, solo "enganchándose" al mundo social, podemos determinar si el conocimiento construido es correcto, si existe alguna variedad en la forma de percibir y solo por medio de la comunicación con otros se puede corregir los errores propios.

Una característica fundamental de la cognición encarnada es el arraigo de la cognición tanto en el cerebro como en el cuerpo, este a su vez integrado en su entorno exterior (Lakoff et al., 1999). La encarnación de la cognición implica un proceso continuo y paralelo. En la construcción del significado de las acciones, la gente utiliza metáforas, como proponen Lakoff y Johnson (1980). La gente se aferra en un comienzo a las acciones en el mundo físico, a lo que ha aprendido, a lo que ha sobrevivido, para la construcción de significados de categorías abstractas, por medio de "metáforas primarias".

El pensamiento humano es un proceso que se activa cuando el individuo participa en alguna situación o problema nuevo e interesante según los cánones del individuo, osea en una acción situada. Esto quiere decir, que el individuo no piensa en lo que esta haciendo, cuando hace algo que ya ha realizado anteriormente, puede ser que piense en otras cosas de mayor interes, mientras realiza una acción.

En este proceso se ven involucradas imagenes mentales que ya estaban incorporadas y se plantea un plan de acción para construir y acomodar una nueva imagen. Esta nueva imagen debe ser acomodada a las anteriores, de tal forma, que se realize un paisaje mental nuevo y mas completo que el anterior, que permitirá al individuo dar una respuesta al problema que él se ha planteado.

De esta forma se tienen cuatro procesos cognitivos: la percepción, los conocimientos basales, las estrategias y las formas de trabajar la información.

A través de la percepción y de los 15 sentidos se crean estas imágenes, si se genera una pregunta a partir de la situación, el individuo pensará en la forma de responder y buscará caminos, al momento de andar por el camino elegido ira trabajando la información que ya tiene y la nueva que ha sido recién percibida. Durante todo el proceso, las imágenes, palabras, movimientos se mezclan con otras, dando origen al paisaje mental, que es la base del concepto, en este momento si se le pide al sujeto argumentar, justificar su resultado (opción) el hará la traducción a un lenguaje común, todo esto es un diálogo continuo entre el sujeto-yo, sujeto-objeto, sujeto-tu.

Como cada individuo es diferente y cada individuo posee diferentes estilos de pensamientos, se tiene una variedad de representaciones y esto se traduce en que los paisajes mentales son distintos. A medida que la persona se va desarrollando, se va cultivando de preferencia alguno de los cinco estilos de pensamientos (Amelang et al., 2006). Esta preferencia puede estar marcada por el medio social en que se desarrolla la persona, por comodidad de la persona o porque es lo único que el medio le ha ofrecido hasat ese momento. De esta forma, la variedad de las representaciones va convergiendo a lo que espera el medio que rodea al individuo.

Esta concepción sobre el pensamiento, implica cambios en la forma de enseñar y lo que esto significa en clases de matemática. Por ningun motivo significa que el profesor debe transmitir sus representaciones y por ende sus paisajes mentales, por el contrario, esto significa que debemos dejar que el alumno realize sus propias representaciones y de ahi sus representaciones mentales.

En la construcción de los paisajes mentales, se tiene la siguiente cita, que debería ayudar a entender al cambio en la forma de enseñar,

> *"Wir können versuchen, die Konstruktionen der Kinder und Jugendlichen zu verstehen und vielleicht durch unsere Interventionen zu beeinflussen. Wir können Entwicklungsanreize bieten, Impulse geben. Wir können aber Kinder und Jugendlich nicht dazu zwingen, sie zu übernehmen, wir können sie nicht von aussen verändern.“*[53] *(Brusting-Müller, 1997, pág. 8).*

De esta forma, debe quedar claro que todo alumno es capaz de hacer sus propias representaciones, si es que lo quiere, todo alumno es capaz de desarrollar alguna estrategia que le permita responder a una pregunta por él planteada y todo alumno es capaz de utilizar el conocimiento anterior para acomodar una nueva representación. Esto último ocurre solo si el conocimiento anterior o el conocimiento adquirido ha pasado por el mismo proceso cognitivo antes descrito, esto es, el alumno tiene para ese concepto adquirido alguna

[53] *“Nosotros podemos intentar, entender la construcción de los niños y jovenes y quizás influirlas a traves de nuestras intervenciones. Nosotros podemos ofrecer formas, caminos de desarrollo, ofrecer impulsos. Pero no podemos obligar a los niños y jovenes a tomar las nuestras como propias, nosotros no podemos cambiar a los niños desde afuera.” Traducción de la autora.*

representación mental (propia). Y por sobre todo, no se debe olvidar que en todo lo que es generación (construcción) de conocimiento, se debe considerar la parte de los sentimientos que se despiertan al momento de percibir la situación.

Capítulo 3.

3. PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

En este trabajo se ha considerado hasta ahora, al pensamiento matemático y no el razonamiento matemático, por varios motivos. Uno de ellos es que el razonamiento matemático se refiere solo a una parte de todo el pensamiento, al decir, razonamiento se está refiriendo solo a una parte de éste, que se relaciona habitualmente con lo lógico y con argumentos que empiezan y terminan, argumentos que conducen a un fin determinado. El razonamiento, no incluye aspectos intuitivos o sensoriales, el pensamiento en su forma mas amplia y natural, si los incluye. Por otro lado, el razonamiento matemático[54], en algunas de sus acpeciones, incluye como vehículos del pensar a las analogías, las metáforas y las imágenes (Englisch, 1997). Por estos motivos, aquí se utilizará la términología de pensamiento matemático[55], ya que se entiende que es más generla y no se presta para confusiones posteriores o para el caso de las traducciones.

En este capitulo se muestra la conexión entre lo que se ha visto en el capítulo 2 y la matemática. Esto es, relacionar el pensamiento matemático desde el punto de vista cognitivo y desde los procesos que se activan, cuando un individuo acepta un poroblema o una situación en matemática. La intención es mostrar y aunar desde la experiencia, una serie de definiciones y conceptos que se han desarrollado desde diferentes áreas de investigación.

El pensamiento matemático (PM) es un producto final de variados procesos neuropsicológicos, estos procesos provienen y se desarrollan en diferentes áreas y requieren de diferentes habilidades del individuo en su interior y del individuo en el medio. El PM es un producto de la integración de distintas modalidades sensoriales, cognitivas y de representaciones. Además, el desarrollo del PM, se puede ver reflejado en la estructura y en la forma, que van tomando los conocimientos, en el individuo. Según Bruner (1971), es posible presentar cualquier idea, conceptos, objetos de estudios o problema, de una

---

[54] *Traducción del inglés "mathematical reasoning".*

[55]*En ingles seria mathematical thought, en alemán mathematisches Denken y en francés pensée mathématique.*

forma bastante simple para que cualquier estudiante pueda entender y acercarse a ellos. Más aún, el mismo autor reconoce que la estructura de cualquier dominio del conocimiento puede ser caracterizada en tres fases, a saber, la fase enactiva, la fase icónica, la fase simbólica. Estas fases son el pilar de esta investigación y cada una de ellas afecta tanto al estudiante como al maestro.

Para acercarnos al concepto de PM, se considera entonces una base psicológica y algunos resultados de las investigaciones en didáctica de la matemática, más las reflexiones personales al respecto. Como ya se mencionó, se incluyen elementos de la neurodidáctica, de elementos que provienen de la reflexión de las clases de matemática y algunas experiencias personales.

Para tratar el máximo de estudios sobre PM, las siguientes secciones, se concentrarán en lo que son los procesos en matemática, en las herramientas del pensamiento, en la abstracción, en el concepto de metáforas conceptuales, en las representaciones semióticas, en los problemas, en las situaciones y en las capacidades matemáticas, ya que estos son los de primera relevancia para la temática.

3.1. PROCESOS COGNITIVOS EN MATEMÁTICA.

"No tiene sentido aprender sin pensar y

pensar sin aprender es peligroso."

Confucio (551-479 a.c.).

La psicología cognitiva busca la construcción de un modelo sobre los procesos de comprensión de los estudiantes. Esto significa, en particular, saber sobre los conocimientos específicos a los que tienen acceso los estudiantes, las estrategias de pensamiento que el estudiante tiene disponibles y la naturaleza de las interacciones entre las dos (Schoenfeld, 1987, pág. 9).

Conceptos centrales en estos modelos son la memoria y los procesos de la información, el conocimiento y las representaciones, así como también lo son las estructuras cognitivas y las representaciones mentales, con esta búsqueda de modelos cognitivos se intenta ganar algunas implicaciones para la didáctica de la matemática.

Un modelo cognitivo utilizado en investigaciones en didáctica de la matemática, es aquel que hace la distinción entre concepto matemático (formalmente definido) y la evolución del proceso cognitivo para concebirlo (Tall y Vinner, 1981). Por un lado se considera la definición formal de un concepto matemático y por otro lado se consideran las definiciones personales del mismo concepto, provenientes de un proceso cognitivo que está relacionado con el concepto en cuestión.

En un sentido generalizado, se utilizan también, los procesos de asimilación y acomodación propuestos por Piaget (Beth y Piaget, 1966; Piaget, 1999) y no en el sentido estricto de las etapas del desarrollo. Existen otros modelos que han sido utilizados, este trabajo se remite a saber, que existe una definición formal con una representación tradicional y que hay una "representación" personal de este concepto matemático, que se forma cuando el individuo piensa y crea esta representación, donde una será llamada matemática regular y matemática singular (Ruf y Gallin, 1998), lo que aquí se intenta definir un poco más en profundidad es como y que es entonces el pensamiento matemático.

Entonces, se tienen las siguientes cuestiones: ¿Cómo se llega a esta representación personal? Y ¿Cuál es el proceso por el cual se separa el concepto formal y la representación personal? Según Bruner (1971), la comprensión o el acercamiento a un concepto comienza con la manipulación de objetos físicos[56], con esta manipulación de objetos[57] se producen determinadas acciones o representaciones que activarán y llamarán a ciertos procesos cognitivos, interiorizando de esta forma nuevas acciones o representaciones, completando procesos o generando nuevos procesos, los cuales serán guardados (si es necesario) en la memoria de la forma más económica posible, es decir, como objetos con una determinada representación (Anderson, 1981).

Más aún, la estructura de cualquier dominio del conocimiento puede ser caracterizada como un proceso cognitivo de tres niveles, cada uno de los cuales afecta desde el estudiante hasta el maestro (ibídem, 1971). Esto según el mismo autor, tienen la base en el modo de representación que se hace del conocimiento, su economía y su poder efectivo. Donde los modos de economía y del poder efectivo de la representación varían en relación a las diferentes edades, diferentes estilos de los sujetos y entre diferentes temas.

En el caso de las representaciones, existen tres caminos para caracterizarlas: por un conjunto de acciones apropiadas para lograr un cierto resultado la representación enactiva; por un conjunto de imágenes recopiladas o gráficos que destacan un concepto sin definirlo completamente, la representación icónica; y por un conjunto de símbolos o proposiciones

---

[56] *Ya se ha visto que el individuo puede manipular también objetos mentales y más aún manipular mapas o paisajes mentales, sección 2.1.1 y siguientes.*

[57] *Como objetos matemáticos, se pueden considerar todas las figuras geométricas, como los triángulos, las líneas, los puntos, el plano, todos los elementos de un conjunto y el mismo un conjunto.*

lógicas elaboradas desde un sistema de símbolos, la representación simbólica (Bruner, 1971). A lo que hay que agregar, que este sistema de símbolos es gobernado por reglas o leyes para formar o transformar proposiciones (Duval, 2004).

Más aún, según lo que dice Bruner (1971, pág. 45) estas tres formas de las representaciones y sus actividades cognitivas, son necesarias en el aprendizaje a cualquier nivel y edad:

> *"..., actions, pictures, and symbols vary in difficulty and utility for people of different ages, different background different styles. Moreover, a problem in the law would be hard to diagram; one in geography lends itself to imagery. Many subjects, such as mathematics, have alternative modes of representations" (Bruner, 1971, page. 45)*

Con esto, se dice que la utilización y la generación de representaciones es una actividad cognitiva en cualquier etapa de la vida y que es entonces necesario introducir un segundo concepto que conecta la representación con la acción a saber, el proceso cognitivo de internalización de una acción.

La internalización de acciones, ocurre por la interacción con el entorno físico y social, existen constructos epistemológicos y entidades mentales que forman la base para la acción virtual-mental, que conectan lo interiorizado y el habla, esto constituye la base para la acción futura en el mundo. Esta acción ya internalizada, se encarna en las estructuras neurales y pueden ser vistos en nuestra mente como representaciones (Kandel, 2009; Spitzer, 2007).

Una metáfora para el concepto de internalización es la dada por Shanon (1993) y Hendriks-Jansen (1996). Ellos hablan de la noción de "andamiaje". Que es una reminiscencia de la noción de Vygotskij (1966). Literalmente, un andamio se utiliza en la construcción de una pared, de un puente, etc. Mientras esta todo en construcción, alineación de piedras, ladrillos, postura y enfriamiento del cemento, etc., está el andamio, dando algo así como la pauta. Una vez terminado el trabajo y las piedras se "soportan" unas a otras, el andamio se quita. El caso paradigmático en el desarrollo cognitivo de los niños es el apoyo brindado al niño por su madre.

En el caso de la internalización de conceptos en matemática, el andamio no es la profesora de básica, ni las ayudas que ésta pudiera dar, como se suele utilizar frecuentemente (Potari y Jaworski, 2002).

En este caso, se considera a los andamios son constructos que provienen de los conocimientos anteriores que el individuo ha generado. Por ejemplo, en primero básico, el andamio para el aprendizaje de sumas de números naturales (no operatoria), será el sentido del número y del desarrollo del concepto de cantidad que hasta ese momento haya adquirido el individuo, por medio de acciones.

El tercer concepto que se debe aclarar es el de desarrollo neuronal a través de la evolución del hombre. Para esto, es necesario partir de la base que el hombre se acerca, construye el conocimiento, aprende en términos de procesos paralelos que interactúan entre sí (Rumelhart y McClelland, 1987). Además, el conocimiento no se almacena en unidades propias, lo que se almacena son fuerzas entre las conexiones neuronales y por lo tanto a las unidades (grupos de neuronas) que permiten a los patrones a ser recreado (Kandel, 2009; Rumelhart, Hinton, y McClelland, 1987).

Edelman (1992) da una buena perspectiva entre lo que son las redes neuronales (grupos neuronales) y lo que supone la acción situada. Según Edelman (1987, 1992), la memoria, tanto a corto y largo plazo, no es la "recuperación" de alguna entidad (definición, teorema, etc.), sino un proceso de re-categorización, de volver a activar el proceso de selección entre grupos neuronales. Esto implica, en particular, que la memoria también es dependiente del contexto, y que el proceso de retirar un “recuerdo” puede afectar a la “plantilla” de recordar en el futuro.

Según lo anterior, se puede comprender mejor porqué en el proceso del aprendizaje de la matemática, los alumnos comenten errores o se olvidan de los contenidos. En la mayoría de los casos, no se han logrado almacenar suficiente fuerza entre las conexiones, debido a que el aprendizaje de la matemática, es en general, descontextualizada y no se refiere a experiencias personales. Las experiencias personales activan una conexión y quedan grabadas como recuerdo en la plantilla individual.

Para esto, se debe considerar la idea de los problemas contextualizados a la realidad e interés del alumno. Es por esto también, que los alumnos cometen errores, no es una falta de comprensión, si no que más bien, es la falta de un “andamio” adecuado, es decir, un falta en la conexión correcta y por lo tanto, un problema en la extracción de estas unidades o de las respectivas representaciones mentales.

Cada individuo tiene caminos neuronales (conexión con conexión forma un camino o una huella) y una construcción de estos caminos que los conduce a un tipo de representación y a un tipo de respuesta, esta será la óptima y la esperada para cada individuo (esto quiere decir, que para ese individuo no hay otra posible).

Para la generación de caminos neuronales, es necesario que las personas tengan una relación de vivencia con los conceptos matemáticos que quieren ser aprendidos, de esta forma quedará registrada en la memoria, una vivencia, una cognición encarnada.

3.1.1. MEMORIA.

Se entiende aquí por memoria, "como un órgano[58] activo de búsqueda y de recuperación de la información" (Assanger, 1999, pág. 213); más aún la memoria es considerada como el lugar donde se realiza la formación de expectativas, el procesamiento y uso de información para las decisiones de un determinado comportamiento (Anderson, 1981; Kandel 2009).

Se distinguen dos tipos de memoria: la de contenidos y la arquitectónica. Dentro de la memoria de contenido existen las representaciones de la memoria semántica, la representación procedimental y la representación proposicional. Se tiene también, la representación de episodios y la diferencia entre la memoria semántica y la memoria de episodios, es que la primera es la memoria de los símbolos y la otra es aquella que recibe y almacena información sobre datos, sobre episodios o eventos temporales-espaciales y las relaciones entre estos episodios. Un cuarto tipo de memoria es la representación de imágenes, estas imágenes están basadas sobre las impresiones sensoriales de objetos o eventos (Silver, 1987).

Es importante hacer la distinción entre una memoria de imágenes y el pensamiento con imágenes, ya que ambas son utilizadas, pero de diferente forma en la resolución de problemas (ibídem, 1987). En el primer caso se utiliza una cadena de imágenes, como una cadena de recuerdos que ocurrieron en un determinado momento, en el pensamiento con imágenes, las imágenes no son producto de una vivencia, si no que más bien son objetos que de por si dicen algo, como por ejemplo, el pensar en un cuadrado en la resolución de un problema, esta es una imagen, que no proviene de un recuerdo.

La memoria arquitectónica, se caracteriza por al menos tres tipos, la memoria icónica (sensorial), la memoria de largo plazo y la memoria de trabajo. La memoria sensorial recibe y mantiene brevemente estímulos visuales, táctiles y auditivos. El tiempo que este estímulo se mantiene es suficiente para ser reconocido, clasificado y almacenado en la memoria de trabajo o para ser ignorado. La memoria de largo plazo, es por otro lado un almacén de conocimiento y de habilidades-capacidades, en nuestro caso contiene conocimientos matemáticos, tales como una base de hechos, procesos, tipo de problemas generalizados, heurísticos y algorítmicos (ibídem, 1987, pág. 42). Esta memoria tiene una

---

[58] *En el sentido biológico* de *órgano.*

estructural nodal, en la que los nodos están interrelacionados de forma compleja entre ellos y a través de una red (conexiones y caminos). Un nodo representa un conjunto de información, o un racimo de, o un pedazo de temas relacionados. Activando uno de estos racimos o pedazos, se activa la información completa. Como la memoria de largo plazo es un almacén personal que tiene el individuo del mundo, algunos nodos contienen percepciones sensoriales o percepciones motoras del conocimiento y otros nodos contienen información cognitiva del conocimiento (Silver, 1987; Spitzer, 2007).

La memoria de trabajo o la memoria de corto plazo es el lugar donde toma lugar muchas de las acciones cognitivas. Es en este lugar donde las percepciones de la memoria icónica se "transforma" y se "transfiere" a la memoria de largo plazo como conocimiento, en este mismo lugar ocurre el proceso de hacer interactuar lo que se ha percibido con lo que existe en la memoria de largo plazo.

La memoria matemática y su utilización se ve reflejada en las argumentaciones que proponen los alumnos, en estas propuestas utilizaran diferentes "recuerdos" o aprendizajes de conceptos, que han sido tratados con anterioridad, se recordaran de resultados y de estrategias que han dado resultado, una buena grabación de información le permitirá al alumno conectar el conocimiento nuevo con el antiguo. Lo que Piaget (Beth y Piaget; 1966, Piaget, 1999; Piaget, 2003) llama la acomodación, vendría a ser una capacidad del almacenamiento de la información y una capacidad de la memoria arquitectónica. Otra de las características de la memoria matemática sería el ordenar el conocimiento matemático de manera flexible, esto es, de manera de poder llamar este conocimiento en el momento adecuado. De esta forma la memoria estaría relacionada con los procesos cognitivos ligados a los procesos de la información, sin ser parte de ésta, es decir, es la que permitiría una buena comunicación entre el yo y el mundo de los conceptos matemáticos.

Para fortalecer la memoria de los alumnos, en nuestras salas de clase y extender la capacidad de la memoria de contenido y arquitectónica de nuestros alumnos, se puede promover la reflexión con modelos matemáticos, para tratar con la complejidad de la modelación y el almacenamiento eficiente de los contenidos en la memoria (Ulm, 2010). Más aún, existe un método, llamado "kopfrechen" o "cálculo mental" y la llamada "Kopfgeometrie" o "geometría mental", que permiten y ayudan a activar la información que tiene "guardada" el alumno y utilizarla de manera rápida y eficiente (Graumann, 1982). Para esto, se presenta al inicio de la clase, tres o cuatro ejercicios cortos, que el alumno debe resolver sin la ayuda de elementos externos a su cuerpo (lápiz, papel, calculadora, material concreto, hablar con sus compañeros, etc.). Los resultados de este tipo de experiencias muestran como el alumno después de un tiempo se acostumbra a guardar información necesaria en su memoria y a utilizarla de forma eficiente (Obersteiner, Dresler y Vogel, 2008). Por supuesto que esto se debe entender como una ayuda y no como un método que podría solucionar las faltas en el proceso de aprendizaje.

3.1.2. EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO.

El conocimiento matemático es una elaboración cultural como cualquier otra forma de conocimiento, es decir, es una empresa humana, un constructo del pensamiento humano (Nuñéz, 2008). No obstante, como ciencia formal, utiliza Metodologías hipotético-deductivas y un lenguaje común para comunicarse, el cual permite no tan solo expresarse, sino que también facilita procedimientos y abrevia las "ideas". Una metáfora para el conocimiento matemático, seria como un rio, de dos direcciones a la vez, donde fluyen representaciones mentales y sistemas axiomáticos. Éste conocimiento permite, entre otras cosas, modelizar situaciones a partir del análisis de la realidad, constituyéndose en herramienta valiosa también para otros campos del conocimiento.

Este enfoque antropológico potencia el sentido histórico del conocimiento matemático. Más que situarlo espacial e históricamente facilita la reflexión sobre el recorrido, desarrollo e interconexiones que construyen la identidad como memoria colectiva. Esta memoria social recupera la historia matemática de otras culturas, de otros pueblos constituyéndose en un referente fundamental para la cultura contemporánea. Esta mirada le aporta a la matemática la dimensión humana que muchas veces se mantiene oculta bajo la apariencia de un saber abstracto que se visualiza como desvinculado de la realidad social (Steinbring, 1998).

El conocimiento matemático, las clases de matemática y el continuo aprendizaje de la misma, deberían estar en dialógo continuo. Este diálogo se deberia realizar sobre dos bases sobre la naturaleza del conocimiento matemático. La primera base es considerar el conocimiento matemático como proceso didáctico de enseñanza y aprendizaje, considerando su desarrollo dinámico, tanto historico como actual, esto desde el punto de vista de Freudenthal (1987), se traduce en un proceso constructivo centrado en la "matematización". La segunda base del diálogo es la cuestión social (el individuo, el medio, el contenido matemático y sus experiencias) y la cultura de las clases de matemática.

El aspecto esencial de la educación en matemática, es justamente no considerar la naturaleza del conocimiento matemático en relación con los conceptos matemáticos y los objetos del mundo, sino que ver la naturaleza de este conocimiento en las relaciones entre las cosas (Leuders, 2003). Esto se traduce en comprensión de conceptos, en no etiquetar y clasificar objetos, sino que en encontrar relaciones entre ellos (Steinbring, 1998).

Considerando la naturaleza del conocimiento matemático, desde la antropología y con estas dos bases de diálogo entre este conocimiento, las clases de matemática y el continuo aprendizaje, no hay paradoja en el aprendizaje de la matemática (ibídem, 1998). No se pone en contradicción, en aceptar el sistema de representaciones semióticas que se necesitan para trabajar" en matemática y la parte constructiva del conocimiento. No es necesario empezar por el sistema semiótico para que el alumno pueda diferenciar ente objeto y representación, esto es realizable según Brousseau (1999) en el caso del juego, donde los alumnos construyen su propio sistema semiótico, lo que se busca es, en un principio, una cercanía al sistema semiótico frecuente, para que de esta cercanía o desde esta representación, generada por necesidad se puedan acercar cada vez más, saltando obstáculos sobre esta representación. Ásí, el aprendizaje de la matemática basado en las relaciones entre los objetos, es solo posible en un proceso de aprendizaje, estrechamente vinculado con lo social y con sus formas de comunicar las representaciones y los conocimientos generados (Wittmann, 1995). En este caso, observar lo comentado por Luhmann (citado en Steinbring, 1998):

> *"Die Pädagogik wird es kaum zugeben können, daß psychische Prozesse und soziale Prozesse völlig getrennt operieren. Aber das Bewußtsein der Individuen kann mit eigenen Operationen andere Individuen nicht erreichen... Aber wenn Kommunikation zustande kommen soll, muß ein ganz anderes, ebenfalls geschlossenes, ebenfalls autopoietisches System in Tätigkeit treten, nämlich ein soziales System, das Kommunikationen durch Kommunikationen reproduziert und nichts weiter tut als dies"* [59] (Steinbring, 1998, pág. 279).

Así, se puede decir que el conocimiento matemático, solo tiene sentido cuando se comúnica, cuando es posible comunicarlo, dentro de un sistema social. Esto conduce a los profesores e investigadores a considerar tres sistemas autonomos con interacciones directas e indirectas, como se aprecia en en la tabla 3.

---

[59] *„La pedagogía admitirá difícilmente, que los procesos mentales y los procesos sociales funcionan por seperados. Pero la conciencia de los individuos no pueden alcanzar a otros individuos con sus propias operaciones... Pero, cuando la comunicación prevalece, entran en acción sistemas muy diferentes, también cerrados y autopoieticos, es decir, un sistema social, que se reproduce por las comúnicaciones de comunicación y no hace nada más que eso".* Traducción de la autora.

Tabla 3: Sistemas autónomos.

Matemática	Profesores	Alumnos - estudiantes
Conocimiento	Clases de Matemática	Aprendizaje y comprensión de la matemática
Conceptos como relaciones	Situaciones – Problemas	Interpretaciones individuales y subjetivas
Lenguaje Universal, Símbolos	Comunicación y cultura de la clase	Sistemas de diálogos y conciencia social
El sistema epistemológico	El sistema social	Los procesos cognitivos

Cada una de las tres áreas, representa un sistema autónomo y auto referencial, las relaciones que se dan entre las tres no están en secuencia causal, no ocurre la secuencia que desde la matemática a los profesores y de los profesores a las cabezas de los estudiantes (Brunner, 2001), entre estos sistemas existen interdependencias o acoplamientos (Varela, 1997), que son solo efectos indirectos y sus repercusiones. Así, el conocimiento teórico matemático es modificado, si es considerado como un objeto a comunicar y en el proceso de comprensión del alumno, se produce otro “cambio” del conocimiento matemático.

Así, el conocimiento matemático que está en los libros es uno, el que tiene el profesor es otro análogo al de los libros y el que tiene el alumno será otro muy personal. Se intenta, entonces, que a través de la comunicación y el diálogo entre los pares, se produzcan analogías de estos tres conocimientos (Brunner, 2001). Más aún, se busca la creación de metáforas sobre los conceptos, las cuales permitirán dentro de un diálogo, el mejor entendimiento de las representaciones personales. Es en este sentido, que se intenta detallar la creación de metáforas en la sección 3.

El conocimiento matemático utiliza un lenguaje y una Metodología. Esto da paso a estructurar el PM, en las formas del lenguaje, en las representaciones que este lenguaje provoca. En términos de la utilización de una Metodología (situaciones, problemas, etc.), se producen procesos y estos se van desarrollando por medio de la comunicación. Más aún, este conocimiento y su aprendizaje esta relacionado con los contenidos matemáticos que a través de la historia se han ido desarrollando.

3.1.3. Representaciones mentales y semióticas en matemática.

Hasta aquí se han hablado de dos tipos de representaciones, las representaciones mentales y las representaciones semióticas. La diferencia entre estas dos rádica en que una se realiza de forma caótica en algún lugar de nuestro cuerpo (no tiene porque ser necesariamente el cerebro, ver pie de página n° 15), la otra es una necesidad proveniente de las formas de comunicación y como ya se ha visto en la sección 1.1., de la economía de la memoria. Más aún, las representaciones juegan un papel al momento de resolver problemas (Zhang y Norman, 1994, Zhang 1997).

Algunas diferencias entre ambas representaciones las hace Duval (2004), a saber:

- Diferencia en la producción. La representacion mental que un individuo realiza al pensar en una bola, puede resultar muy diferente al momento de hacerla explícita.
- Las representaciones semióticas tienen un grado de libertad que las representaciones mentales no tienen, esta libertad se refiere a la posibilidad de comunicarlas a los otros, es decir, permiten mayor comunicación y no son “borrosas” como lo podrían ser las mentales.
- Al tener una gran variedad de registros de representación, las representaciones semióticas permiten tener una gran variedad de representaciones para un mismo objeto.
- La producción de imagenes mentales depende de procesos fisicos o psicológicos analogos a los que estan en juego en la percepción. La producción de representaciones semióticas, al contrario, esta sometida al respeto de reglas “sintacticas” de formación y de tratamiento de unidades significantes.

En el último punto, se podría diferir un poco con Duval (2004), ya que hemos visto que, la percepción es un elemento importante en la creación y comprensión de nuevos elementos de representación y conceptualización. La percepción, es uno de los elementos más relevantes en el tratamiento de los objetos y sus representaciones, sean mentales o semióticas, es por eso que, las representaciones mentales juegan un papel aún más importante que las representaciones semióticas, ya que las primeras permiten aceptar a las segundas, y las segundas por el echo de estar sometidas a unas reglas sintacticas, se pueden aprender a manipular, pero sin un exito cognitivo.

Más aún, con las representaciones mentales siempre hay un proceso cognitivo, y estas al ser obligadas a comunicarse, se produce el desafio que permite llegar a la generación de analogías (Araya, Calfucura, Jiménez, Aguirre, Palavicino, Lacourly, Soto-Andrade y Dartnell, 2010), metáforas conceptuales y de ahi a la comprensión de las representaciones semióticas. Por último, las representaciones mentales y las representaciones semióticas no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes, una es el soporte de la otra.

En el caso de las representaciones, ver tabla 4, tenemos tres caminos para caracterizarlas (Bruner, 1971):

- Por un conjunto de acciones apropiadas para lograr un cierto resultado, que se denomina como el modo enactivo, de estas acciones se obtienen variadas representaciones mentales;
- El segundo camino son las representaciones que son en una primera etapa un conjunto de imágenes recopiladas que intentan describir un concepto sin definirlo completamente, esta etapa se denomina como la fase de la representación icónica y las representaciones son una mezcla entre las representaciones mentales y representaciones reconocibles para el resto.
- El tercer tipo son las representaciones semióticas, que son en general un conjunto de símbolos o proposiciones lógicas expresadas en símbolos o en lenguaje común, elaboradas desde un sistema de símbolos que es gobernado por reglas o leyes para formar o transformar proposiciones, a esto se le denomina la fase simbólica o la fase donde la comunicación se realiza a través de las representaciones semióticas o el momento en que ocurre la semiosis (Duval, 2004).

<table>
<tr><td colspan="4">Tabla 4: Imágenes Mentales y Niveles de representación.
Resumen de la Tabla 1 y las fases E-I-S de Bruner</td></tr>
<tr><td colspan="4">Imágenes Mentales
Capacidades del ser humano: comparar imágenes nuevas y antiguas, cambiar imágenes a voluntad, decidir que es cada imagen.
E: Enactivo, I: Icónico, S: Simbólico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Representaciones Mentales
(Enactivo e Icónico)</td><td colspan="2">Representaciones Semióticas
(Icónico, Simbólico)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Cognitivamente relacionadas</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Conjunto de ideas provenientes del medio y que genera el individuo al momento de pensar.</td><td>Dibujos, palabras, frases, símbolos, sonidos, gestos, etc.</td><td rowspan="4">Producciones mentales con fines comunicativos y constituidas por signos. Están las representaciones descriptivas, las icónicas y las simbólicas.</td><td>símbolos, tablas, diagramas, gráficos, textos, palabras, etc.</td></tr>
<tr><td>No hay reglas</td><td>Hay reglas</td></tr>
<tr><td>Libertad personal, variedad, creatividad, flexibilidad, fluidez.</td><td>Participan en las funciones de: comunicación, objetivación, (tratamiento). Libertad social.</td></tr>
<tr><td>Intelecto e Intuición.</td><td>Conscientes y externas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Se generan a través de la percepción del medio.
Pueden quedar gravadas en la memoria.
Comandan nuestro pensamiento, nuestro sentir y nuestro hacer.</td></tr>
</table>

Con respecto a la noesis, que es el momento en que el individuo aprehende[60] un concepto y realiza diferencias e inferencias del mismo concepto, esta vendría a ocurrir entre las dos últimas etapas de Bruner (1971), cuando en las nuevas acciones, que el individuo este "obligado" a realizar y sea necesario el utilizar el concepto aprehendido, para verificar si lo que se esta "haciendo" o representando lo conducirá a una solución favorable. Es decir, hay noesis en el momento en que el individuo "utiliza" un concepto, en otras palabras, la noesis se realiza en la etapa de validación (Brousseau, 2007).

La fuerza de las representaciones (Hüther, 2009) y en especial la fuerza de las representaciones semióticas, radica en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje natural, la escritura algebraica, los gráficos, las tablas, símbolos de la lógica, cuerpos[61], etc. y en que pueden ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. El lenguaje natural, no es considerado frecuentemente como una representación tradicional en clases de matemática.

La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideracion de sistemas semioticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema a otro. Esta operación ha de ser descrita en primer lugar como un "cambio de forma", este cambio de forma sirve para llevar una representación a otro estado, que podría ser más facil de trabajar, de comprender o de comunicar.

En este caso, interesa saber que según Duval (2004), la noción de representación semiótica presupone el desarrollo de una capacidad, que esta relacionada con los traspasos entre representaciones, la cual sería diferente a la mencionada por Bruner (1971), capacidad que involucra el traspaso de representaciones enactivas/mentales a representaciones iconicas y el traspaso a las representaciones semióticas.

Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas. Conscientes, en el sentido de mirar "alguna cosa" que toma *ipso facto* el status de objeto para el sujeto que mira. Las representaciones conscientes presentan un caracter intencional y que cumplen una funcion de objetivacion. Las representaciones externas cumplen a lo menos dos funciones cognitivas, la funcion de comúnicacion y la funcion de objetivacion del concepto.

---

[60] En el sentido de encapsular la información y tener una comprensión del objeto o concepto.

[61] En el sentido de utilizar por ejemplo, los números reales con las operaciones suma y multiplicación, como un sistema de representaciones, que tiene sus reglas y sus símbolos.

Hemos visto que, las representaciones semióticas cumplen un papel relevante en cuanto a la comunicación entre individuos, hemos visto que las representaciones mentales son el soporte del aprendizaje. Según Duval (2004, cap. I), las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.

Al respecto, es necesario aceptar que la actividad matemática se desarrolla solo entre personas, no hace sentido que un individuo aprenda a utilizar y manejar estos sistemas semióticos en matemática, solo porque el currículo dice que es lo que se debería aprender, el trasfondo del aprendizaje de estos sistemas, radica en el desarrollo del pensamiento matemático y por lo tanto, la base sigue siendo la comunicación.

Con esto, se pueden aceptar distintos y nuevos sistemas de representación, lo importante es que estos permitan la comunicación entre los individuos y que sean coherentes dentro de la actividad matemática.

De manera más global, la evolución del pensamiento matemático en un individuo, se acompaña de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos, que coexisten con el lenguaje natural, estos sistemas "nuevos"[62] permiten una diversificación de las representaciones de un mismo objeto y con esto el desarrollo cognitivo de los sujetos.

Estos sistemas nuevos, deberían permitir la transformación de la información, de la misma forma que los sistemas semióticos utilizados comúnmente en clases de matemática.

En caso de que no lo permitan, debe ser el propio individuo que se dé cuenta, de esto, a través de la comunicación entre sus pares, solo de esta forma el individuo tomara conciencia de la representación realizada y de los cambios favorables que le puede hacer. De la misma forma reconocerá sus errores al momento de hacer alguna transformación incoherente. Con esto la representación semiótica tradicional será un soporte para la representación mental creada, que se intenta comunicar.

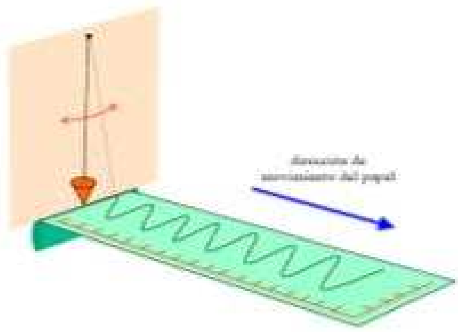
En la tabla 5, se muestran diferentes representaciones para la función *seno,* estas diferentes formas pueden ser miradas desde las fases enactiva, icónica y simbólica. Cabe destacar, que estas son una posible variedad y que cada individuo podría desarrollar las suyas propias.

El aprendizaje de las matemáticas como el de la lengua nativa, requiere de dos cosas por parte de los estudiantes, primero se debe tener alguna representación mental del objeto,

[62] *Nuevos en el sentido que no son los tradicionales en clases de matemática, como por ejemplo el uso de metáforas conceptuales o el uso de dibujos o símbolos personales.*

para poder comunicarlo y segundo se debe distinguir el objeto de su representación (Duval, 2004). Como hemos visto, en la tabla 5, el proceso de generación de una representación mental de algún objeto, es diferente para cada individuo, el contexto varía y las representaciones también. En este proceso está involucrada la percepción y los sentidos que el individuo tenga desarrollado, al momento de enfrentarse a algún objeto, puede ser que las experiencias previas, como por ejemplo al subirse a un carrusel[63], o el baño en el mar u otras vivencias, que estas vivencias tengan más fuerza que la expresión matemática, que permite expresar un movimiento constante, con una cierta amplitud y un cierto periodo.

Tabla 5: Ejemplo de representaciones.

Un ejemplo de representación visual[64]	
Representación semiótica tradicional	$f(x) = sen(x)$, donde x representa la variable en el tiempo.
Representación no tradicional en matemática, expresada de forma lingüística. Camino hacia las metáforas.	Ondas, buenas y malas ondas en un periodo de tiempo de la vida, donde las malas ondas se reflejan al bajar nuestro estado de ánimo en un determinado momento. Como se sienten las olas del mar en el cuerpo cuando uno se baña en el mar o al dormir, después de haber estado mucho tiempo en el mar, un carrusel que sube y baja y la sensación en el estómago de subir y de bajar, etc.

De esta forma, el fenómeno importante, que permite hacer una relación entre el objeto (proveniente de la vivencia, de la percepción) y un símbolo, es la semiosis (semiosis: marcar un objeto, concepto con un signo). De esta forma la semiosis, juega un rol importante en el funcionamiento del pensamiento y en el desarrollo de los conocimientos, con esto la semiosis no se limita tan solo al empleo de uno u otro tipo de signos, sino que

63 *En algunos países es llamado "Montaña Rusa".*

64 *Fuente del dibujo: http://www.arte.unicen.edu.ar/download/fisica/oscilacionesondas-final.pdf*

también es relevante en la variedad de los tipos de signos disponibles, del individuo y la capacidad de generar nuevos signos, que a su vez sean posibles de algún tratamiento.

Así, con estos signos, con estos sistemas y sus reglas, existen tres actividades cognitivas inherentes a toda representación (Duval, 2004, págs. 30-32), a saber:

- Constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
- Transformar las representaciones de acuerdo con las reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones iniciales.
- Convertir la representación producida en un determinado sistema de representación en otro, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

El hacer una distinción entre representación y objeto representado involucra otras capacidades y estilos de pensamientos, (ver figura 3, en sección 2.1.) que tienen los alumnos y de la necesidad de hacer esta distinción, se vuelve a la necesidad de comunicar y al concepto de noesis. Donde noesis, se entiende como la realización de actos cognitivos, "como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia" (Duval, 2004, pág. 14). Esto es, un individuo puede abstraer un objeto y representarlo de alguna forma en su mente y comunicarlo de forma conveniente al diálogo, así estará haciendo procesos cognitivos y con esto la noesis.

El uso de símbolos comunes en matemática tiene una larga historia y los motivos por los cuales se utilizan aquellos símbolos y no otros para representar un concepto o un objeto, son diversos y todos tienen una historia tras de sí (Kettler, 1998). Es claro, para la mayoría de los docentes, que en clases de matemática no se debería intentar el aprendizaje de estos símbolos, sino que se intenta, el aprendizaje de conceptos que tienen una representación determinada en el mundo de la matemática. Con el proceso de transformación, también es discutible, si es necesario quedarse con los sistemas de representación semióticos o si los sistemas nuevos de representación, permiten una mayor libertad de transformación con las reglas que se han ido creando, para ejemplos mirar experiencias de problemas abiertos o de finales abiertos (Becker y Shimada, 1997; Ulm, 2004).

Así como lo dice Kettler (1998, págs. 97-99): “No necesariamente se debe creer, que las representaciones tradicionales[65] son el único medio y que permiten realizar el trabajo más fácilmente”, con esto se intenta decir, que las representaciones semióticas son importantes, pero no el núcleo del aprendizaje. Lo que se puede observar en muchas clases de matemática es que los alumnos trabajan con estos símbolos, los manipulan como si fueran juguetes sin sentido, pero sin entender o comprender el concepto. Es por esto, que se debería dar más libertad al uso de símbolos propios e intentar por medio de diálogos una unificación “conveniente” con los sistemas de representaciones semióticos, como se muestra en la tabla 5. Con esto, se estará promoviendo la comprensión de un concepto y la conveniencia de la utilización de símbolos comunes.

Se ha visto una serie de procesos cognitivos, que son reforzados con actividades relacionadas con la matemática. Hay otros procesos, que también son reforzados por el trabajo con conceptos y objetos[66] matemáticos, algunos de ellos se mencionan en la siguiente sección.

3.1.4. Otros ejemplos de procesos cognitivos en matemática.

Algunas actividades cognitivas en matemática son: La conceptualización, el razonamiento, la aprehensión de figuras, la resolución de problemas, la comprensión de textos, la realización de analogías y la creación de metáforas. El profesor de matemática debería buscar, por lo tanto, situaciones que involucren el máximo de procesos cognitivos y que contemplen el desarrollo de estrategias en el alumno y la generación de esquemas, más aún, como dice Dubinsky (1991, pág. 119): “whatever happens, in or out of the classroom, the main concern should be with students´construction of schemas for understanding concepts”. Aún más que lo anterior, sobre la generación de esquemas dados, intentamos decir en este trabajo que, el individuo genera esquemas y estos pueden ser de variadas formas y no hay un único camino en la generación de ellos. La generación de esquemas es también un proceso cognitivo en matemática.

Otro de los procesos cognitivos alternativos, que el alumno realiza para comprender conceptos, entender o resolver un problema, son las analogías. Según Freudenthal (1974, pág. 74), “la analogía es un medio efectivo para producir relaciones internas y externas de

---

[65] *Con tradicionales, se refiere a los usados normalmente en clases de matemática. De cierta forma, el autor, no incluye como sistema de representación tradicional, los escritos en lengua natural.*

[66] *Para hacer la diferencia entre concepto y objeto, nos limitaremos a dar un ejemplo: plano, líneas y puntos son objetos, paralelismo es un concepto.*

la matemática”, ya que es un medio natural de los individuos para ordenar el mundo y caracterizarlo.

Algunos de los procesos o capacidades cognitivas que son utilizadas frecuentemente y son necesarias en los problemas relacionados con la aritmética son (Lakoff y Núñez, 2000, pág. 51): agrupar, ordenar, aparear, la memoria, asignar números cardinales y reconocer la independencia del orden. Además se requieren otras capacidades cognitivas como la capacidad de agrupación combinatoria y la capacidad de simbolizar (lo que antes se denominó como semiosis).

Tabla 6: Metáfora de primer orden de Boole[67].

Fuente: Where Mathematics come from? (Lakoff y Núñez, 2000, pág. 125).

Dominio de Origen: Aritmética		**Dominio de Llegada: Clases**
Números	→	Clases
Adición	→	Unión, símbolo $\cup$
Multiplicación	→	Intersección, símbolo $\cap$
Ley conmutativa de la adición		Ley conmutativa para la unión $A \cup B = B \cup A$
Ley conmutativa de la multiplicación	→	Ley Conmutativa para la intersección $A \cap B = B \cap A$
Ley asociativa de la adición	→	Ley asociativa para la unión $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Ley asociativa de la multiplicación	→	Ley asociativa de la intersección $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Ley distributiva	→	Ley distributiva de la intersección sobre la unión
0	→	El vacío, simbolizado por $\emptyset$
1	→	El conjunto universal, denominado por I
La identidad de la adición es el cero	→	La identidad de la unión es el conjunto universal $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
La identidad de la multiplicación es el uno	→	La identidad de la intersección es el conjunto universal $A \cap I = I \cap A = A$
Cualquier número multiplicado por cero es cero	→	Cualquier conjunto intersectado con el vacío es vacío

Otras capacidades cognitivas, de las que se hablarán en las siguientes secciones son la capacidad de metaforizar y la capacidad de hacer una fusión conceptual. Como ya se ha visto, uno de los procesos cognitivos que se realizan con las representaciones semióticas (Duval, 2004), es la conversión desde un sistema de representaciones en otro sistema. Este proceso está directamente relacionado con las metáforas “vinculadas” (Lakoff, et al.,

[67] *Traducción de la autora.*

2000), ya que hay un proceso de “traspaso” entre dos dominios, a saber el traspaso equivalente desde el *dominio de origen* a un *dominio de llegada*, lo que Duval (2004), denomina conversión de sistema de registro.

Un ejemplo para esta conversión de sistemas o el paso desde el dominio de origen al dominio de llegada es presentado en la tabla 6. En este caso se trata de lenguaje natural a representación semiótica tradicional.

Al ser una paso equivalente de dos dominios, Boole[68], debe adecuar algunas de sus posturas, esto es, Boole genera una metáfora y se observa que solo la clase del vacío y la clase del universo cumplen con todas las reglas, frente a esta situación (donde solo Boole participa), él construye un nuevo sistema, llamado el “algebra Booleana” que tiene solo dos elementos, tiene sus propias leyes y que es un resultado de procesos cognitivos, como comparar y adecuar desde un lugar de partida “básico” a un lugar de llegada “abstracto”.

Con esto, se muestra nuevamente que la matemática es un constructo humano que deriva de las experiencias y expectativas personales, más aún, solo a partir de estas experiencias y de estas sorpresas, ocurren los procesos cognitivos que desarrollan el pensamiento matemático.

3.2. ABSTRACCIÓN EN MATEMÁTICA.

Abstracción de la forma es el resultado de la reflexión de la mente sobre la actividad del objeto, es decir, abstraer es reflejar un objeto en la mente, con esto se dice tambien que reflejar es generar una representación mental del objeto. Este concepto de abstraccion puede ser insatisfactorio cuando se trata del desarrollo del pensamiento matemático (Damerow, 1996), mas aún este concepto de abstracción hace que sea imposible o difícil de entender porque ciertas abstracciones resultan ser muy útiles y porque la enorme masa de abstracciones que puede ser producida por el aislamiento de las propiedades de los objetos matematicos solo daria lugar a una falasia.

Es decir, hay sujetos que hacen abstracción sin hacer una adecuada reflexión de lo que se esta abstrayendo (de Vries, 1998), esto es, el sujeto realiza la abstracción del objeto, pero es justamente en este proceso, donde los caminos hacia el objeto abstracto, no son los adecuados, es decir, no se ha considerado una reflexión adecuada y en este proceso solo se ha utilizado la visión y otros elementos como la percepción de relaciones o patrones no han sido considerados, con esto el objeto abstracto esta solo. Esto es el sujeto realiza solo la

---

[68] *George Boole (1815-1864), matemático y filósofo británico.*

abstracción sin utilizar variados elementos de la cognición, sin cosiderar elementos como la percepción o la generación de estrategias que influyen en el resultado del objeto a reflectar[69].

Las dos siguientes hipótesis nos permiten un acercamiento más adecuado a lo que es la abstracción en matemática (Damerow, 1996; de Vries, 1998):

1. Empezando por experiencias corporales (EC) que están bajo algún objeto abstracto, el proceso cognitivo procede a concretar una imagen de éste. Abstracción, no es más que una condición previa y trivial. Cognición es esencialmente un proceso de concreción que consiste en hacer un enlace entre objetos abstractos en las estructuras cognitivas y su utilización, con el fin de interpretar los hechos y problemas. Solo en este proceso de concreción toma valor el objeto abstraido y se hace evidente la abstracción individual.
2. La caracterización lógica de conceptos en términos de intensión y extensión cubre el objeto abstracto solo al inicio del proceso cognitivo (CL). Cualquier uso del objeto abstracto como un medio en el proceso de cognición, sirve para enriquecer con experiencias corporales y relacionarlas de diferentes formas con otras experiencias. Es en este sentido cuando el objeto abstracto se convierte, de más en más, en un objeto concreto (pero abstracto).

Damerow (1996, pág. 371) dice: "Abstracción es un proceso constructivo, el cual es esencial para enseñar y aprender matemática". Este proceso cognitivo se realiza cada vez que el sujeto está en una situación que puede ser de conflicto o no, pero que tiene un fin o un objetivo para el sujeto que la realiza. Abstracción en las dos acepciones antes mencionadas (EC y CL), es el resultado de la construcción de estructuras cognitivas, que son activadas en su totalidad, cuando aparece la representación del objeto.

Se entiende por estructuras cognitivas a un sistema de relaciones entre los objetos mentales, las cuales están determinadas por las acciones de construcción mental entre los elementos de esta estructura. Cuando se reconoce un objeto real y se le identifica como algo ya conocido es interpretado como "asimilación" de una estructura cognitiva. Devlin (2006, pág. 150), menciona cuatro niveles de abstracción, poniendo el PM y los objetos matemáticos en el nivel 4, agregando que estos objetos no tienen una relación directa con el medio y que provienen de la propia construcción de la matemática, mencionando en particular la noción de Grupos en estructuras algebraicas. Sobre este tema se podría

[69] *De forma intencional se ha utilizado la palabra reflectar, como si la mente fuera un espejo sobre el cual se reflectaran los objetos.*

discutir bastante, lo que debe quedar claro, para la educación matemática, es que la abstracción en matemática es un proceso que puede tener varios y diferentes niveles, que para cada individuo es diferente y que siempre es posible, desde la experiencia, hacer abstracciones de los objetos. Muchos individuos trabajan y piensan, por conveniencia, en el nivel 4, (ibídem, 2006), aunque este no es el único nivel donde habita el PM. En el caso del pensamiento matemático avanzado, ver el trabajo de Dubinsky (1991) sobre la abstracción reflexiva. Es decir, la abstracción de la forma es el resultado de un proceso cognitivo que incluye la reflexión (notar la relación entre reflexión e imagen), que se hace sobre la actividad del objeto, un poderoso "medio" de la abstracción es la representacion de estos objetos; es en este sentido que reflexión, abstracción y representacion estan intimamente relacionadas.

Se entiende como objeto matemático abstracto a todas las representaciones que se hacen de los objetos y de los conceptos matemáticos, que han sido obtenidos por medio de una reflexión y que al momento de ser comúnicados, responden de forma equivalente y coherente a las relaciones matemáticas de este objeto dentro del sistema autonomo "matemática". De esta forma, un objeto matemático abstracto, tiene su equivalente o debería tenerlo, en los sistemas de representaciones semióticas.

Así, abstracción es un vehiculo del pensar, que esta estrictamente relacionado con el diálogo interno y con las facilidades que se necesitan para este diálogo. Es por esto, que cada vez que se "abstrae" un objeto, idea, concepto, se hace una representación de el, una encapsulación de este objeto en la memoria. Este sería un medio, para los vehiculos del PM.

3.3. METÁFORAS Y MATEMÁTICA.

"Quien no piensa a su manera,
no piensa para nada".

Oscar Wilde (1854-1900).

Se ha dicho, que una de las condiciones necesarias, para que el aprendizaje y el pensamiento matemático se desarrollen, es la inclusión de la comunicación. Más aún se ha visto que solo por medio de esta, es posible conectar las representaciones mentales y las semióticas. Es por eso, que es de vital importancia, el acercarse al lenguaje cotidiano y a la aceptación de la fuerza de las representaciones que las palabras producen en el individuo. Es decir, acercarse de cierta forma, a la semántica.

La mayoría de las palabras del lenguaje cotidiano tienen, en general, más de un significado y es el contexto, el primero que decide, cual es el significado y por lo tanto cual es la imagen mental, que será llamada y que se ha de considerar, en ese momento. Por ejemplo, si se piensa en las alas de un pájaro, en las alas de un avión o en las alas de la vida[70], se nota una clara analogía utilizada en estas tres expresiones, dada por la forma, por su funcionalidad y por lo que estas representan. En el último caso, la libertad que produce el concepto de volar. Frecuentemente en las frases del día a día, se dejan dilucidar ideas y sentimientos, como por ejemplo la frase: „Te lo he dicho mil veces“, aquí hay tres cosas que resaltar, el hecho de que es una exageración, nadie dice las cosas mil veces, se deja traslucir el sentimiento de cansancio por el que dice la frase y el que escucha esta frase siente la obligación de actuar. Otras frases cotidianas, son los famosos eufemismos, que utilizan palabras que son menos "hirientes", para expresar situaciones, como por ejemplo la expresión: "El bello durmiente", para referirse a un hombre que es flojo o que duerme más de lo necesario, o la expresión "jardín de paz", para referirse a un cementerio.

Una forma del cambio de significado radica en la „metonimia“, la que se entiende, como la utilización de palabras, que tiene una relación lógica con el concepto que se quiere expresar. Como por ejemplo las palabras: lista negra, el sobre azul, la línea roja, etc. Desde aquí se ve que la utilización de símbolos en matemática, puede ser considerada como metonimia (Pimm, 1987, 1992). Más aún, en las palabras del mismo autor: „how mathematical language can be and is used to `sing` mathematical objects into existence…“[71], se deja traslucir la idea de que el idioma matemático justifica la existencia de los objetos matemáticos. Más aún, el mismo autor, compara la actividad matemática con ritos y actividades artísticas, que de cierta manera permiten la generación de objetos.

Otra forma del lenguaje es la metáfora, según Maier y Schweiger (1999), esta se refiere a la transmisión visual de una palabra a un concepto, que va más allá de su significado habitual. La utilización de metáforas, en el lenguaje común, es bastante compleja y contiene la mayoría de las veces sentimientos, como por ejemplo, al decir: "el alumno tiene un conocimiento superficial de las funciones", se entiende primero que las funciones y el mundo al que pertenecen (la matemática), es como un gran océano, con una profundidad inalcanzable y que para poder llegar a un conocimiento de las funciones, habría que saber otra cosa, que el alumno lamentablemente no tiene, que permita el "buceo", sobre esto y sobre el sentimiento que esta frase podría producir a un alumno, no entraremos en detalle.

---

[70] *En Chile, una madre le puede decir a una niña, "te voy a cortar las alas", para significar el hecho de que la niña no podrá salir más de casa.*

[71] *"…Como el lenguaje matemático puede ser usado y es usado, para "cantar" a la existencia de objetos matemáticos…" Traducción de la autora.*

Lo que interesa, en este caso, es destacar la potencia de la metáfora, esta es impresionante y abrumadora, más aún, para entender de lo que se está hablando con estas, se necesita tener un sentido común. Otro ejemplo de metáfora, es el que se utiliza al decir: "cursos de matemática avanzada" o "pensamiento matemático avanzado" como se deja traducir del inglés "Advanced mathematical thinking", el que produce una sensación inmediata de inalcanzable, la imagen que se podría proyectar es de un camino hacia el cielo, donde se intenta llegar y es imposible, es casi como decir, que la matemática este siempre más allá de toda posibilidad de alcance, se "sube" continuamente, sobre esto se podría discutir nuevamente y nuevamente será el sentido común el que pondrá límites y aceptación a la expresión. La intención, es mostrar la fuerza de las palabras y la que estas podrían producir en nuestra mente, las imágenes que están llaman en nuestros sentidos y como el sentido común nos ayuda a dar una interpretación adecuada.

Sobre metáforas en matemática, existen los primeros inicios en Pimm (1987) y Steiner (1988). El primero trata las metáforas en un sentido externo a la matemática, esto es, como la posibilidad de explicar en forma corriente, en lenguaje cotidiano las definiciones y conceptos propios de la matemática (Pimm, 1987, Cap. 4). Por ejemplo, decir: "crecimiento de una curva" (con esto la imagen que se produce es hacia arriba, como en el crecimiento de una planta, en dirección hacia el sol, lo que se reflejara en el gráfico de la función), en vez de utilizar su expresión simbólica, o decir: los números complejos son como los puntos del plano cartesiano. Con esto, se puede ver un lado de la medalla, de la utilización de las metáforas, como se muestra también en el siguiente texto:

> *„Mit dem Gebrauch von Metaphern wird das Ziel verfolgt, einen Begriff oder Sachverhalt unter Zuhilfenahme jener Bedeutungsvorstellungen verstehbar zu machen, die in der wörtlichen Bedeutung mit ihnen verbunden sind."[72] (Maier y Schweiger, 1999, pág. 45)*

En este caso, solo se ve una parte de la bondad de la metáfora, pero se debe destacar la otra parte de la esta. Para esto, consideremos el mundo propio del pensar y las propias experiencias, como se señala a continuación:

> *"Our subjective mental life is enormous in scope and richness. We make subjective judgments about such abstract things as importance, similarity,*

[72] *„Con la utilización de las metáforas y con la ayuda de las ideas importantes, se conseguirá el objetivo, de hacer comprensibles un concepto o una situación, por medio del significado literal que están en relación con la situación y con los conceptos." Traducción de la autora*

difficulty, and morality, and we have subjective experiences of desire, affection, intimacy, and achievement. Yet, as rich as these experiences are, much of the way we conceptualize them, reason about them, and visualize them comes from other domains of experience." [73] *(Lakoff y Johnson, 1999, pág. 45).*

Es entonces, en estos otros dominios de experiencias, los que dan un aporte y un soporte a la metáfora, más aún, es a partir de estos dominios donde se genera otra idea de lo que se entiende por metáfora, como se deja traslucir en lo que continúa de la cita anterior:

"These other domains are mostly sensorimotor domains, ..., as when we conceptualize understanding an idea (subjective experience) in terms of grasping an object (sensorimotor experience) and failing to understand an idea as having it go right by us or over our heads. The cognitive mechanism for such conceptualizations is conceptual metaphor, which allows us to use the physical logic of grasping to reason about understanding." [74]*(Lakoff y Johnson, 1999, pág. 45).*

Es decir, la metáfora permite utilizar las imágenes mentales de los dominios sensomotores, en los dominios de las experiencias subjetivas, por medio de imágenes, por ejemplo, se puede formar una imagen de algo sin necesariamente haberla razonado, es decir, sin haberla agarrado conceptualmente, como se ve en los ejemplos iniciales de esta sección. Por otro lado, la metáfora conceptual es un mecanismo cognitivo que permite por medio de las conceptualizaciones de ideas, relacionar las experiencias vividas con las imágenes mentales y de esta forma "agarrar" el concepto, es decir, es un fenómeno generalizado tanto del pensamiento como del lenguaje (Lakoff et al., 1999, Cap. 4).

Otro forma cognitiva asociada a las metáforas conceptuales es el término "reificación", según Sfard (1994), la reificación es una transición desde un modo de pensar operacional a

---

[73] *"Nuestra vida mental subjetiva es enorme en su alcance y en su riqueza. Nosotros hacemos juicios subjetivos, acerca de cosas abstractas como la importancia, la semejanza, la dificultad y la moralidad, y nosotros tenemos también experiencias subjetivas del deseo, del afecto, de la intimidad y del logro. Sin embargo, tan ricas*[73] *como son estas experiencias, gran parte de la manera en que se conceptualizan, se razona sobre estas y se visualizan, proviene de otros dominios de la experiencia." Traducción de la autora.*

[74] *"Estos otros dominios son, en su mayoría, dominios sensorio-motores,..., como cuando nosotros conceptualizamos una idea (experiencias subjetivas) en términos de "agarrar" un objeto (experiencia sensomotores) y no en el sentido de entender una idea que pasa por nosotros o por nuestras cabezas. El mecanismo cognitivo para tales conceptualizaciones es la metáfora conceptual, esta nos permite el uso de la lógica física de agarrar la razón acerca de la comprensión". Traducción de la autora.*

un modo de pensar estructural. Este es un fenómeno básico en la formación de conceptos matemáticos. Más aún, "este es el nacimiento de la metáfora de un objeto ontológico" (Sfard, 1994, pág. 46). Cabe destacar en este caso, que la forma de expresar la metáfora, si es en un escrito (este término incluye también el dibujo), este no es más que un sustituto visual de lo hablado (Parzys et al., 2008), es por esto que nuevamente se ve a la metáfora como una posibilidad de la comunicación, no tan solo entre individuos, sino que además como medio del pensamiento.

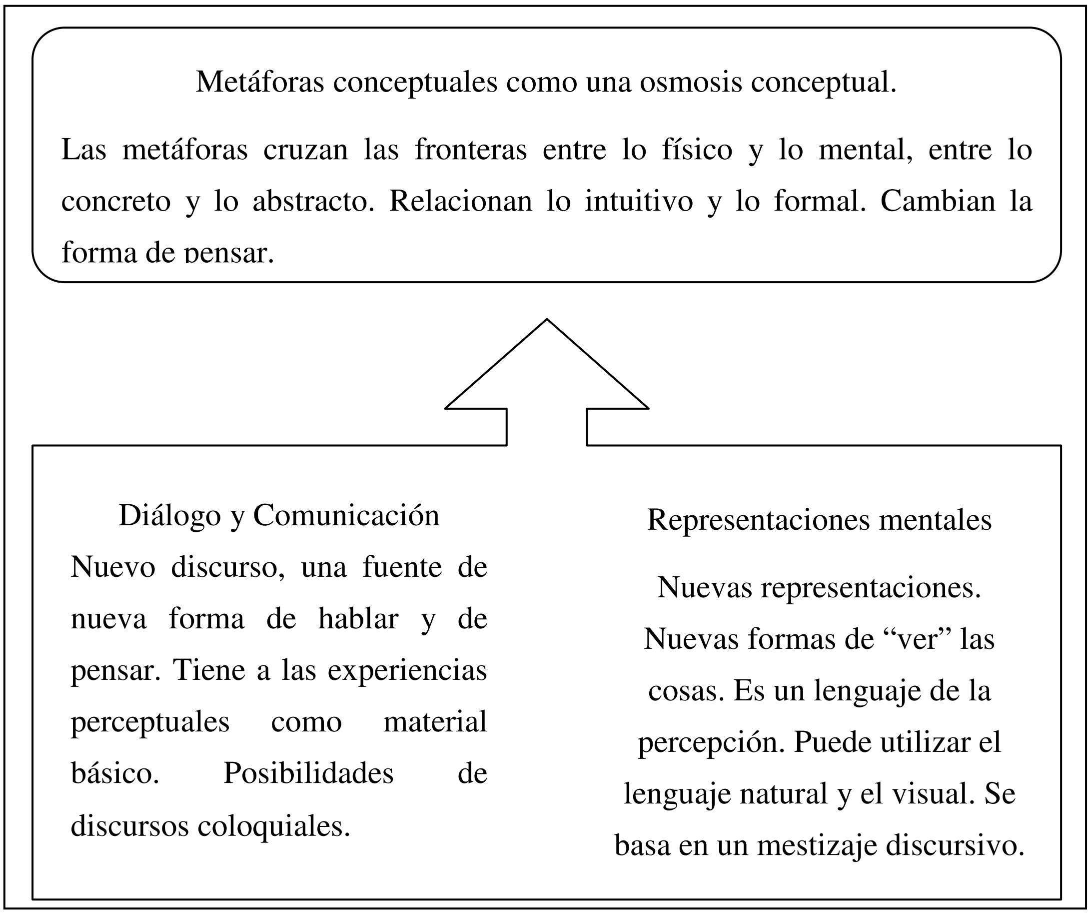


Figura 3: Metáforas, representaciones y comunicación.

Más aún, Sfard (1994), reconoce en las metáforas un medio discursivo, por el cual se pueden hacer afirmaciones. Por ejemplo, muchos alumnos dicen "no me trago a la profesora", para expresar que la profesora es difícil de aceptar, en este caso se están relacionando varias cosas, una de ellas, está directamente con el cuerpo, solo por medio de la digestión, es posible aceptar a alguien, la segunda es el sentimiento que la profesora produce, que no tiene que ver con el tamaño de la profesora, si no que más bien con la personalidad, así de esta afirmación bastante contundente de algún alumno sobre su profesora, se puede "ver" muchos y variados constructos del alumno. Más aún, se ve como se está incrustando una palabra de un dominio temático en otro dominio, lo que produce una red de nuevas relaciones lingüísticas.

Las metáforas proporcionan un medio catalizador, en el modo de ver la educación, esto es, por el poder que tienen las palabras conocidas en un contexto determinado y por el proceso cognitivo que significa la reificación (ibídem, 1994). Más aún, las metáforas tienen el poder de cruzar las fronteras entre lo físico y lo mental, relacionan lo concreto y lo abstracto y le dan un espacio a lo intuitivo con lo formal (ibídem, 1994). Un ejemplo interesante, es el ejercicio que propone Sfard (1994), sobre el modo de pensar y como la metáfora: "la mente es un fuego por encender y no un vaso por llenar", pude cambiar en nuestra mente lo que se pensaba sobre el tema. En la figura 3, se muestra entonces un resumen de lo que se ha visto sobre la metáfora conceptual.

Así las metáforas cambian la forma de pensar y por lo tanto, estas dan un impulso a los cambios en nuestra forma de actuar (Tall, 1997). Si una profesora tiene una metáfora sobre la capacidad de sus alumnos, es muy probable, que en base a esta, se preparen las clases, lo mismo ocurre con las metáforas conceptuales para los números negativos, por ejemplo, decir que los números negativos son como "deudas" o "debito" (Cohors-Fresenborg y Kaúne, 2005), permitirá a los alumnos trabajar con ellos de forma diferente, si es que ellos son visto con la metáfora de la temperatura o si son rápidamente ubicados en la recta numérica. Sobre la metáfora de la deuda para los números negativos, existe el problema de la finitud de los números negativos y el contexto en el cual la deuda puede ser considerada, en este caso, se propone como posibilidad el dejar que los niños prueben con la creación de metáforas para expresar el "pasarse de paradero y volver" o "el retroceder", en este caso la conceptualización de los números enteros positivos, estaría dada por el avance en una dirección y los números enteros negativos sería el retroceso (en la dirección contraria). Esta metáfora conceptual de los números enteros, permite además tener una buena relación con la multiplicación de los números enteros, ya que retroceder y volver a retroceder sería avanzar. Si se genera la metáfora de retroceder en los alumnos (esto ocurrirá, solo si la profesora también la tiene), entonces no tardara el alumno en comprender que el giro en 180° no es otra cosa que la multiplicación por -1 (Lakoff et al., 2000), y en un curso más "avanzado", comprenderá como un giro en 90° es la multiplicación por el numero imaginario i y que los puntos en el plano son como los números complejos.

Se advierte sobre el uso de metáforas en las clases de matemática, las dificultades aparecen cuando hay un desajuste entre el maestro y sus alumnos (Parzysy et al., 2008). Este desajuste tiene sus raíces en lo que espera el maestro de sus alumnos, en cuanto a lo procedimental y a lo conceptual, si se esperan también procedimientos de memoria y que se puedan realizar en corto plazo, entonces la metáfora, no jugará un rol preferencial, en cambio sí se espera un aprendizaje constructivo conceptual, la metáfora conceptual, es la que se debería incorporar en la sala de clase. Esto no se refiere, a que el uso de las representaciones semióticas está descartado de la clase de matemática, en lo absoluto, es necesario una comparación y nuevos procesos cognitivos que permitan el traspaso desde las metáforas a lo simbólico. Sfard (1991), reconoce que la metáfora es un arma de doble filo, por un lado permiten el pensamiento más avanzado y por otro lado, como esta se basa en experiencias y concepciones de estas experiencias y las experiencias son limitadas por nuestras percepciones, será por lo tanto la metáfora también limitada, más aún, mantienen nuestra imaginación dentro de los límites de nuestra experiencia anterior y en la práctica puede ser que la metáfora de lugar a usos incompatibles. Más especificaciones sobre este tema y sus problemáticas son especificados en el trabajo realizado por Thompson y Sfard (1994).

Para minimizar los riesgos de los que habla Sfard (2008) y optimizar los beneficios de las metáforas conceptuales, Soto-Andrade (2006, 2007a), propone y reconoce la importancia de trabajar, desde los inicios de la formación docente, en la reificación (Sfard, 1994) y en metáforas conceptuales, para que de esta forma sea el futuro docente, que desde la experiencia vivida (cognición encarnada), pueda considerar los elementos necesarios para la formación de metáforas conceptuales en sus clases.

Promoviendo no tan solo la metáfora conceptual, sino que también el uso de las correspondencias analógicas, entre el concepto matemático, su escritura tradicional y la metáfora conceptual, es decir, poniendo las flechas de correspondencia entre un dominio y el otro.

Más aún, Cohors-Fresenborg y Kaúne (2005) argumentan que la metáfora es un medio dentro del sistema matemático cognitivo, por el cual el alumno puede relacionar los contenidos fragmentados, de esta forma se ve que la metáfora conceptual tiene dos filos, pero uno de ellos podría tener más filo "educativo".

La metáfora conceptual, no es tan solo un medio de comunicación, sino que es también es un mecanismo cognitivo que extiende la estructura de las experiencias corporales (Núñez, 2008), entendiendo experiencias corporales a las que se perciben a través de los sentidos mencionados en el capítulo dos.

Núñez (2008, pág. 342), da un ejemplo de interpretación de un saludo entre el alumno/a y el profesor/a, el alumno/a saluda al profesor/a de forma "calurosa"[75] y recibe a cambio un saludo "frío", se está en este caso en el dominio abstracto de la afección y en términos lingüísticos-literal se está en el dominio de las experiencias térmicas, lo que da una asignación[76] entre el dominio térmico y el dominio afectivo, de la siguiente forma: X es más "caluroso" que Y, es asignado a la expresión X es más "afectivo" que Y así sucesivamente.

Este no es un fenómeno de naturaleza puramente lingüística, sino que es un fenómeno del y sobre el pensamiento, que pueden ser estudiados a través de metáforas conceptuales y esquemas dinámicos (Talmy, 2003), entre otros.

El mismo autor, propone un análisis de ideas en matemática, encontrando mecanismos cognitivos que no son específicos de la matemática, pero que son utilizados para caracterizar ideas matemáticas, concluyendo que la conceptualización del concepto técnico matemático de "clase" o "conjunto", hace uso del concepto cotidiano de colección de objetos en una región acotada del espacio y el concepto de "recursión", hace uso del concepto diario de repetir una acción, el concepto de aritmética compleja[77], hace uso del concepto diario de rotación y el concepto de derivadas, hace uso del concepto cotidiano de movimiento y de aproximación a un límite.

De esta forma, se vuelve nuevamente al concepto de cognición encarnada, las ideas matemáticas se basan en el cuerpo y los mecanismos basados en la experiencia cotidiana y la metáfora conceptual desempeña un papel crucial en la realización del proceso de matematización, mediante la ampliación de la organización inferencias de experiencias corporales cotidianas a los dominios abstractos.

En los trabajos por Núñez (2000, 2008) y en los de Soto-Andrade (2006, 2007a, 2007b), se dejan apreciar varias metáforas conceptuales en matemática, algunas de ellas se presentan en la tabla 7, se han agregado algunas, que son utilizadas en clases de matemática. Todas ellas, en conjunto con los sentidos, que se han propuesto en el capítulo dos. Con esto es posible apreciar el concepto de cognición encarnada en matemática.

---

[75] *Una traducción más adecuada sería la de "cariñosa", pero en el sentido "térmico" del que habla Núñez, va mejor, en este caso la expresión "calurosa".*

[76] *"Mappings" es aquí traducido como asignación y no como función.*

[77] *Esto se entiende como el conjunto de los números complejos con las operaciones suma y multiplicación.*

Sobre la reificación y sobre la capacidad metafórica, que se entiende como, la habilidad para hacer metáforas, para percibir analogías y para cruzar diversos dominios intelectuales en el proceso de establecer conexiones más iluminadoras, se debe tener una consideración especial en las clases de matemática, sin esta consideración, es muy probable que los alumnos olviden (ya que una forma de encapsulación de la información como se vio en la sección 2.1.2., se puede obtener desde lo cotidiano y las metáforas como se acaba de haber visto es una forma de cognición encarnada) lo que aprenden y que no desarrollen todas las componentes del PM.

Tabla 7: Sentidos, metáforas y conceptos matemáticos.

Algunos sentidos que participan (ejemplos)	**Metáforas básicas y vinculadas (ejemplos)**	**Concepto matemático**
El tacto (una experiencia concreta es cuando los niños van caminando por la calle y se encuentran con una reja, lo más seguro es que pasaran la mano por ella y a cada vez el movimiento será interrumpido por una barra de la reja).	Trazar una curva y levantar el lápiz.	Función discontinua.
Sentido del movimiento y del espacio. (Sentido del otro)	Giro en 180°. Débito.	Números negativos.
Sentido auditivo (una melodia puede ser expresada en términos de un gráfico, un cambio en esta melodia en un momento determinado puede ser interpretado como un sonido particular).	Cambio instantáneo.	Derivada.
Sentido de la posición y el sentido del movimiento (en experiencias relacionadas con el espacio). Sentido del gusto (al reconocer un determinado sabor, el tener la idea de que el sabor es casi amargo, pero en realidad no lo es, pero se acerca bastante a lo amargo, estas expresiones, podrían derivar en una buena idea de lo que es el limite, que pasa si se le agrega algo a este sabor, se tiene exactamente amargo, o nunca se alcanza en su totalidad).	Aproximación, acercarse sin llegar. Frontera que no se puede traspasar, pero que se puede estar muy cerca. Tendiendo a “algo”.	Limite.
Sentido de la posición, sentido del movimiento, sentido de la fuerza, sentido de la rotación (tirar una piedra en el agua y observar lo que ocurre, describirlo con palabras propias).	Oscilaciones.	Funciones seno y coseno.
Sentido del espacio, llama el sentido del número (querer más de algo, agregar más agua a la bañera, agregar más dulces al carro de la compra, etc.)	Agregar, juntar, la palabra “y” en ciertos contextos.	Adición de números enteros.
Sentido del espacio, sentido de la posición, sentido estático o del equilibrio, percepción del mundo (en los cambios de casa, la habitación queda vacía, no hay nada, con lo que el niño esté relacionado)	La falta de un objeto (completo). Nada. Vacío.	Cero.
Sentido de la vida, sentido del movimiento, percepción del mundo (hacer algo repetidas veces y considerar la posibilidad de hacer lo mismo por siempre, o bien, la expresión y los hijos de tus hijos y así sucesivamente).	Así sucesivamente., los puntos suspensivos en ciertas frases.	Infinito.

Sobre las componentes se hablará, con más detalle, en el capítulo 4, siendo necesario por el momento, mirar con más detalle los conceptos de estrategias y de procesos en matemática.

3.4. PROCEDIMIENTOS EN MATEMÁTICA.

Por procedimiento se entiende un algoritmo, una acción que se realiza paso por paso, de tal forma que para sumar 11 + 3 se empieza con once y se consideran tres puntos o tres "1", donde cada 1 es la cantidad de "puntos" que corresponden al símbolo "3", se empieza el proceso, con el conteo 11 + 1 es 12, 12 + 1 es trece y 13 + 1 es catorce, por lo tanto 11 + 3 es 14 (Davis, 1983). Otro ejemplo de algoritmo, es el algoritmo de la división que se aprende en el colegio, para dividir 42 en dos, se debe primero preguntar cuántas veces "cabe" el dos en el cuatro, en este caso, dos veces y luego se escribe debajo de la cifra la multiplicación de 2 x 2 y se hace la diferencia así sucesivamente, otro ejemplo, es el algoritmo para multiplicar, donde cada paso está sujeto al anterior.

Tabla 8: Procesos generados por imágenes visuales moderadas.

1) El input visual desencadena la recuperación del siguiente input	$x^2 - 5x + 6$
2) El proceso genera una nueva imagen, que a su vez desencadena otra	$(\quad)(\quad)$ output
3) Esta a su vez generara otra secuencia dentro del proceso, que será quizás la de agregar los números. La consigna que llama esta imagen es: "dos números que multiplicados den... y que sumados den..." es extraída de la memoria, cuando se ha "aprendido" en clases y repetido muchas veces.	$(x\quad)(x\quad)$ output
4) Esta imagen a su vez generara la idea de completación y se determinarán los signos que faltan...	$(x\quad 2)(x\quad 3)$ output

Existen dos tipos de procedimientos, la secuencia moderada visualmente y la secuencia integrada. La primera y todas las que siguen, tienen la forma de "input"[78], generalmente visual y que llama a la ejecución del procedimiento que estaba almacenado en la memoria, la ejecución del procedimiento modifica el input original, el input modificado vuelve a gatillar un nuevo proceso y así sucesivamente. Ejemplos de estos son, la suma, como la anterior, la diferencia, con sus dos modalidades, el algoritmo de la división, presentado en

[78] *Input o es un tipo de entrada al tema, que gatilla un tipo de pensar, en este caso, gatilla el pensar en el siguiente paso del procedimiento, una posible traducción sería "potencia de entrada".*

su forma clásica, es decir, el que se enseña en la escuela y la factorización de un polinomio de segundo grado, que se pude ver en la tabla 8.

Secuencias que se han repetido con frecuencia o que tienen mucha practica, no necesitan de estas imágenes iniciales para ser reproducidas, estas son llamadas secuencias integradas. En el ejemplo mostrado en la tabla 8, se muestra una secuencia de pasos, que son realizados paso a paso. Una secuencia integrada, se logra con la memorización de consignas, en el ejemplo de la tabla 8, sería la consigna: “dos números que sumados dan -5 y que multiplicados dan 6”, es decir, para factorizar esta expresión, no se necesitarían los pasos 2), 3) y 4), mostrados en la tabla 8.

La relación que tienen estos procesos estan estrechamente ligados con la programación de los resultados almacenados en el individuo (Mayer, 1992, pág. 479-488) y con los buenos resultados que los alumnos puedan tener, aquí buenos resultados tiene la connotación de que en un momento determinado, se le pregunta algo y el alumno debe responder como se espera, como en el caso de las pruebas de matemática, esto es, los procesos son un medio, para obtener de forma rápida y consisa una respueta determinada a un problema matemático determinado (son necesarias evaluaciones por criterios (Hengartner, Hirt y Wälti, 2007).

Por otro lado, es fácil darse cuenta que muchos estudiantes no superan, se olvidan, no comprenden este tipo de procedimientos y esto se puede deber a la etapa inicial, errores en la etapa de percepción de los objetos, en la falta de construcción de los objetos que participan en el proceso, en la falta de imágenes mentales propias y en la falta de una metáfora adecuada, o en la forma de llamar o de extraer de nuestra memoria la información (Davis, 1983). Más aún, hay otros procesos neurológicos que estan ligados con la falta de percepción, que dan indicios del no almacenamiento de la información y por ende una falta en el proceso neurológico del aprendizaje (Spitzer 2007; Kandel, 2009)

Algunos de los inconvenientes con estos procedimientos, es la falta de flexibilidad que estos tienen y la inflexibilidad que promueven en el aprendizaje. El entrenamiento de estos procedimientos conlleva a una manifestación de una matemática rígida e inflexible, donde la creación de estrategias esta vedada.

Schoenfeld (1987), denomina a estos procesos como técnicas para resolver problemas. Un problema analizado, paso a paso, en el sentido de proceso y que es también analizado por el mismo autor, se muestra en la tabla 9. El input visual[79] que aquí se muestra, desencadena la generación de otros.

Note que en todo este proceso no se ha agregado el análisis del argumento del logaritmo, ya que este puede ser entendido como un proceso que necesita de otras componentes como el haber entendido lo que es la función logarítmica o el tener una imagen mental de la función y esto se podría interpretar como una estrategia del individuo. En el caso anterior solo se muestra lo que son los procedimientos, que las imágenes generan.

Tabla 9: Procesos generados por imágenes visuales moderadas.

El input visual desencadena la recuperación del siguiente input.	$log_3(x+1) + log_e(x-1) = 3$
En este caso el estudiante debe tener en su memoria de procedimientos "la regla" que le permite hacer este paso, en caso de que no lo tenga en su memoria, el proceso se verá truncado. Si el estudiante utiliza otra "alternativa", estamos en el camino de una estrategia. El output generado, generará una nueva imagen, que a su vez contiene una serie de pasos (multiplicar término a término), una vez terminado este proceso,	$log_e[(x+1)(x-1)] = 3$ output
se tendrá una nueva imagen Esta imagen, necesita nuevamente de la aplicación de un proceso que debería estar registrado en la memoria, que es componer con la función inversa.	$log_e(x^2-1) = 3$ output
Obteniendo una nueva imagen Imagen que a su vez generara el proceso de resolución de la ecuación de segundo grado, etc.	$x^2 - 1 = e^3$ output

Así, los procedimientos son entendidos como un paso a paso conocido y se consideran necesarios para la manipulación de los símbolos, en busqueda de una respuesta a un problema. De esta forma los procedimientos entran en la categoría de tratamiento (Duval, 2004) de las representaciones semióticas.

[79] *En este ejemplo se han considerado* x *un número real y las respectivas restricciones* $x+1 \geq 0$ y $x-1 \geq 0$.

3.5. ESTRATEGIAS EN MATEMÁTICA.

Algo muy diferente a los procedimeintos son las estrategias (Bundy, 1975) y se entiende por pensamiento estratégico a los procesos mentales involucrados en la toma de decisiones sobre los diferentes cursos de acción posibles, con la información que se ha obtenido del medio. Dos elementos comunes de la mayoría de las definiciones de una estrategia son que, estrategia es una de varias opciones, y que se dirige hacia una meta, según Craig (2009), se deben considerar en las estrategias aspectos tales como, procesos innatos, la naturaleza de la memoria, que ya se ha tratado anteriormente y la relación entre proceso conscientes e inconscientes, más aún se debe diferenciar entre estrategia matemática y el proceso mental que ocurre cuando el individuo realiza un camino (estrategico), que le permite alcanzar el objetivo, en este proceso, es de vital importancia la información existente en el medio y la que el individuo tiene en su memoria.

En esta sección, se tratan las estrategias matemáticas, que son posibles de lograr con procesos cognitivos diferentes a los usados en el procedimiento paso a paso. Esto, es importante que sea incluido, ya que en un sentido informal, se ve que la preocupación del desarrollo del pensamiento estrategico en la educación matemática es más importante, por ejemplo, se dice que es mas importante hacer o reconocer cuales son los caminos por los cuales se llega a resolver un problema, que resolver el problema mismo, esto es el ejecutar una estrategia toma mas validez, que la obtención de un resultado. En esta sección, no se basa en la elección de una determinada estrategia, sino que, el como se puede desarrollar y cuales serían las estrategias que estan mas en relacion con contextos matemáticos. Sobre la diferencia entre las investigaciones de la psicologia y la educación matemática sobre este tema, se sugiere la lectura de Craig (2009).

De todas formas, algunas de las diferencias que se hace sobre las estrategias y la forma de abordarlas, se pueden percibir en el método del funcionamiento del pensamiento según Aebli (1963), que está basado en la descomposición de cada una de las etapas y de los caminos, que ocurren en el desarrollo del pensar (tipo investigación psicológica). Este autor, propone el aprendizaje de estrategias, para obtener resultados, que podría obtenerse por otros caminos, que quizás, tomarían más tiempo. Esto del aprendizaje de estrategias, se podría mal interpretar como adiestramiento de los alumnos. Esta forma de enseñar estrategias, se traduce en algunos casos, en considerar básicamente los procesos cognitivos que caracterizó Piaget (2003), denominados como la capacidad de composición, la asociatividad y la reversibilidad.

Donde la capacidad de composición se entiende como el reconocer que la operación que se está realizando, encaja en un contexto más amplio. La Asociatividad significa que la operación es concebible de diferentes maneras y la reversibilidad significa que la operación tiene un camino de ida y uno de vuelta en el pensamiento, en otras palabras, en una dirección del pensamiento y en la dirección opuesta del pensamiento.

Por ejemplo, en el caso de la adición, sólo se entiende si se enseñan las habilidades de composición, asociatividad y reversibilidad. Esto deriva en plasmar el hecho, de que los alumnos calculen una suma de diferentes maneras, incluyendo la prueba de la suma, a través de la sustracción, como se ve en la tabla 10.

En la multiplicación, se traduce a tener una relación con la suma, para la composición, asociando resultados conocidos y agregando, para la asociatividad y relacionando la multiplicación con la división, para la reversibilidad. Así las cuatro operaciones básicas están asociadas entre sí. Esta propuesta de Aebli (1963), basada en las ideas de Piaget, han dado algunos resultados, pero estos no han logrado incluir por ejemplo los números enteros y los números racionales, como parte de estas relaciones.

Tabla 10: Adición y comprobación.

26 – 57	Sumar las cantidades 26 y 57
20 – 6 – 50 + 7	Descomponer
20 – 50 + 6 + 7	Agrupando (asociando) las decenas y las unidades
70 – 13	Sumando (componiendo)
83	Sumando
83 – 26	Comprobando (reversibilidad)
70 – 20 *y* 13 – 6	Separando las decenas necesarias y encontrando la cantidad necesaria para poder "sacar" 6.
50 *y* 7	El significado de la expresión "*y*", se entiende como sumar. Igual que en el idioma español cincuenta y siete es 57
57	Relacionar

Otro ejemplo dado por Aebli (1963), es el cálculo de áreas por medio de plantillas cuadriculadas. El alumno trabaja con una plantilla y una "L" de cartón, moviendo esta "L", de tal forma, de dejar descubiertos todos los rectángulos, posibles de aparecer, en el lado izquierdo arriba de la plantilla.

De esta forma se procede de forma operativa (directa) a contar la cantidad de cuadrados que van apareciendo en total y la cantidad de líneas que aparecen sobre la plantilla en forma de “L”. En el caso de 5cm x 3cm, se cuentan los cuadrados se obtiene 15 cuadrados. Aquí se espera una conexión entre la superficie total y la cantidad de “tiras” que van apareciendo cuando se mueve la plantilla en forma de L, en este caso, se tiene una tira de 5 para el lado derecho y una tira de tres hacia abajo.

La operación inversa, que consiste en encontrar un determinado rectángulo y las “tiras” posibles, es posible de realizar, desarrollando la parte del movimiento, que rompe con el método operativo directo.

Con estos dos ejemplos, propuestos por Aebli (1963), se pretende que el alumno adquiera las estrategias de componer de forma directa, de asociar y de revertir los procesos anteriores. Aunque, en lo personal, no se concuerda con los postulados del autor, hay algunas Metodologías que se podrían considerar para desarrollar o fortalecer estrategias. Es claro también, que hay otras muchas estrategias en matemática, las mencionadas anteriormente son consideradas como básicas y necesarias, sobre todo la de reversibilidad de los procesos.

Duval (2004) ejemplifica muy bien la importancia de los procesos de reversibilidad en el caso de las representaciones semióticas. Como el pasaje de alguna representacion algebraica al plano cartesiano, es entendible y evidente, pero el proceso inverso, de la representacion gráfica cartesiana a la expresion algebraica inicial, no es tan evidente, ya que podría haber mas de una expresion algebraica, que permite representar de igual forma lo que aparece en el gráfico cartesiano. Esto nos da sin duda, una idea de lo que son las estrategias básicas y lo que serán denominadas estrategias generales.

Existe un sin fin de problemas, algunos de ellos, proponen la búsqueda de una estrategia, de un proceder que hasta ese momento no se había realizado nunca, como por ejemplo, el problema propuesto por Mayer (2003):

> *„Wie kann man mit Hilfe einer Balkenwaage und nur 2 Wiegenvorgängen aus 9 identisch aussehenden Kugeln die eine rausfinden, die etwas schwerer als die anderen 8 gleichschweren Kugeln ist?“*[80] *(Mayer, 2003, pág. 7).*

Aunque en este caso, si el individuo conoce la historia de los “Búhos de Oro” y de la estrategia utilizada por lo monjes, presentada en un libro de cuentos en Reyes-Santander

[80] *“¿Cómo se puede con ayuda de una balanza y con solo dos intentos encontrar la bola más pesada de entre nueve bolas iguales por fuera?”. Traducción de la autora.*

(2010), sabrá como deberá proceder o tendrá por lo menos una idea de cómo proceder, es decir podrá proceder de forma análoga.

En estos problemas se observa una invitación a un hacer, a probar, a intentar pesar objetos y las posibilidades para hacerlo son muchas y variadas.

Entonces, una estrategia se desarrolla dependiendo del problema que es presentado y se llama estrategia a una idea que el individuo amplía, reconoce y aplica en la solución de problemas (Mayer, 2003, pág. 9).

Por otro lado, Watson y Mason (1998), realizarón una tabla de estrategias y junto a estas estrategias, preguntas. Estos elementos, permitirían describir el pensamiento matemático, o por lo menos algunos elementos que lo componen.

Por medio de las preguntas que realiza el docente, se permitiría observar el pensamiento matemático.

Observar que en la primera fila de la tabla 11 aparecen los tipos de estrategias que podrían utilizar los alumnos y que en la segunda fila estan las preguntas que podría realizar el docente, para que la estrategia se desarrolle.

Este listado de preguntas pueden dar una ayuda al momento de entablar una busqueda de la estrategia utilizada, por el alumno, también puede servir para organizar evaluaciones en términos de competencias.

Tabla 11: Estrategias y preguntas propuestas[81].
Fuente: Watson y Mason (1998).

Tipo de estrategias	**Preguntas**
Ejemplificación Especialización	Dar uno o mas ejemplos de___________________. Describir, demostrar, contar[82], mostrar, elegir, dibujar[83], encontrar, localizar, un ejemplo de ___________. ¿Es _______ un ejemplo de ____________? ¿Qué hace de _________ un ejemplo para ______? Encontrar un contraejemplo de ______ ¿Hay algún ejemplo especial de _______?

[81] *Traducción de la autora.*

[82] *Del inglés Tell, aquí se debe agregar que la traducción para este verbo no es la única y que se ha decidido quedarse con este verbo, para continuar con la serie de verbos que tienen relación con el verbos describir.*

[83] *Del inglés Draw, aquí se ha elegido el verbo dibujar, para continuar con la serie de verbos que tienen relación con describir.*

Completando, borrando, corrigiendo	¿Que debería ser agregado o removido, a fin de garantizar, permitir, contradecir a ___________? ¿Qué puede ser agregado, removido, alterado, sin que ello afecte a ______? Contar que es falso en_______ ¿Qué se necesita cambiar para que _____________?
Comparando, sorteando, organizando	¿Qué es lo mismo y qué es diferente en _______? Sortear u organizar lo siguiente de acuerdo a _____________. ¿Es o no es (lo mismo)?
Cambiando, variando, revirtiendo, alterando	Modificar el aspecto de ____, para ver lo que ocurre. ¿Qué pasa si _____? Si esta es la respuesta a una pregunta, ¿Cuál es la pregunta? Hacer _____ en dos (o mas) caminos. ¿Qué es más rápido, que es más fácil, ______? Cambiar _______en respuesta a las limitaciones impuestas.
Generalizando, conjeturando	¿Cuál de ellos es un caso especial? ¿Qué es lo que pasa en el caso general? ¿Es ______ siempre, algunas veces, nunca? Describir de la forma mas breve, todos los casos posibles de _____. ¿Qué es lo que se puede cambiar y que es lo que se puede dejar de la misma manera, de tal foma que ________ sea todavia verdadero?
Explicando, justificando, verificando, persuadiendo[84], refutando	Explique por que ________. De un razón _____ (utilizando ____ o no utilizando ______). ¿Cómo se puede estar seguro de …? Contar que es falso en ________. ¿Esto _____ no es nunca falso? (¿es siempre verdadero que ______?). Explique el rol o el uso de _________. Convencer de _____________.

Por último, se presentan en detalle, los 5 tipos de estrategias en matemática descritas por Mayer (2003), a saber, el principio de la prueba sistemática, el principio de los extremos, el principio de invariancia, el principio de las casillas de Dirichlet [85], el principio simétrico. Se completará esta lista con las estrategias de: trabajo hacia atrás, descomposición del problema en partes (Bruder, 2003), restructuración (Bardy, 2007), la generalización como ayuda para la solución y el principio de analogía como estrategia para resolver problemas (Pimm, 1987; Ben-Zeev, 1996).

3.5.1. La prueba sistemática.

La prueba sistemática, consiste en tomar casos y probar de forma sistémica que una consigan se cumple y continuar de forma sistemática en otros casos, (Bardy, 2007). La elección y el reconocimiento de esta estrategia son un avance significativo sobre el trabajo no sistemático y el juicio al azar errado con que los niños proceden. Hay muchos otros niños que hacen un juicio al azar correcto, a ellos no se refiere el comentario, se verá más adelante que la intuición es un componente importante dentro del pensamiento matemático, entonces la prueba sistemática es un avance para aquellos niños que hacen conjeturas

[84] *Del inglés Convincing, aquí se ha elegido el verbo persuadir, para continuar con la serie de verbos que tienen relación con explicar y justificar.*

[85] *“Dirichletsches Schubfachprinzip”*

erradas y no saben cómo proceder con la información, si estos niños logran descubrir esta estrategia, entonces es un avance cognitivo relevante.

Los niños deben ser alentados a optar por un cierto orden, que incluya a todos los elementos y todos los posibles casos. Los elementos y/o casos pueden ser números, pares de números, etc.

Lo principal de la prueba sistemática es, que el alumno encuentre un principio de orden, si no está ya determinado por el problema dado y que a continuación se analice para cada elemento o para cada caso, si las condiciones anteriores se cumplen. Si se detecta solo en un caso, el examen generalmente no puede ser detenido. Se deberá demostrar que las condiciones se cumplen de forma argumentativa o por el chequeo de todos los elementos/casos de forma sistemática (Bardy, 2007)

Un ejemplo de la utilización de esta estrategia por parte de los alumnos, se podría obtener planteando el siguiente problema: Muchos niños y muchos padres quieren ir al teatro infantil, por eso el director del teatro ha pedido sectores especiales para madres, padres y niños. La invitación para la obra "Mate esta solo" menciona que el teatro cuenta con que la mitad de toda la cantidad de sillas mas una silla, son solo para niños, que un cuarto de todas las sillas mas dos sillas son para las mamás y que solo un sexto de todas las sillas mas tres sillas son para los padres. ¿Cuántos niños, madres y padres pueden visitar el teatro? En este problema lo primero que se debería observar es que la cantidad de sillas deben ser números naturales y que al decir, un medio, un cuarto y un sexto, el número total de sillas debería ser un múltiplo de 2, 4 y 6, como por ejemplo el 12, pero seguro que en un teatro no habrán doce sillas, por lo tanto se podría empezar con algún múltiplo de 12 como por ejemplo 120 y hacer una prueba sistemática de la información dada en el problema, para esto, se podría trabajar de la forma en que se muestra en la tabla 12.

Tabla 12: Solución sistemática del problema de las sillas.

Posible número de Sillas	**Número de sillas para niños**	**Número de sillas para las madres**	**Número de sillas para los padres**	**El número de sillas que se obtiene**
120	60+1=61	30+2=32	20+3=23	61+32+23=116
108	54+1=55	27+2=29	18+3=21	55+29+21=105
96	48+1=49	24+2=26	16+3=19	49+26+19=94
84	42+1=43	21+2=23	14+3=17	43+23+17=83
72	36+1=37	18+2=20	12+3=15	37+20+15=72

De la tabla 12, se observa entonces que la única solución posible es que el total de sillas sean 72 sillas. Aunque esta no es la única forma de proceder en la solución de este problema, se ve que la prueba sistemática conduce a la obtención de un resultado, utilizando las operaciones básicas, esto podría indicar que para niños de cuarto básico este podría ser un problema realizable.

Otros ejemplos donde se podría utilizar la prueba sistemática como medio para encontrar la solución son:

1. Problemas relacionados con encontrar el término general de una sucesión.
2. Se debe dar como material un papel grande para recortar. Este se podría recortar en 4 o en 6 pedazos y cada uno de los nuevos se podría recortar en cuatro o seis pedazos nuevamente. Es posible obtener de esta forma 8 pedazos en total. Tomar otro papel y probar ahora con recortes de 8 y 12 pedazos y probar de obtener 60 pedazos.[86]
3. Encontrar los números que no se dejan escribir como suma de números consecutivos.[87]
4. Con los números del 0 al nueve y las siguientes operaciones tres operaciones: poner un cuatro al final del número, poner un cero al final del número y dividir el número por dos, si es par, se pueden obtener todos los números naturales, excepto el 4.
5. El padre que quiere mostrar la audacia del hijo. El padre sale con su hijo de paseo y en el camino busca 36 piedras, llegando a la casa las ordena formando un cuadrado donde en cada columna y en cada fila siempre hay seis piedras, a continuación le dice al hijo, "saca seis piedras, de tal forma, que en cada fila y en cada columna siempre haya un número par de piedras". ¿Podrías hacer tú lo mismo?

En cada uno de estos problemas es posible utilizar otros medios estratégicos para encontrar la solución, si el alumno procede en forma sistemática, entonces estará utilizando la estrategia de la prueba sistemática. Observar que estos ejemplos pueden ser modificados según algunos criterios de diferenciación.

3.5.2. El principio de los extremos.

Este principio es utilizado para mostrar que en un conjunto determinado existen elementos con características determinadas. Para resolver este tipo de problemas se utiliza un caso extremo como por ejemplo al considerar el mínimo o el máximo, los casos especiales, alguna ubicación especial en el borde, las relaciones extremales o las constelaciones especiales (Haas, 2000). Al considerar estos casos límites, se hace un efecto de reglamento

---

[86] *En este caso es conveniente hacer una tabla de doble entrada con las posibilidades para recortes de 4 pedazos y recortes de 6 pedazos.*

[87] *Este problema es conveniente acotarlo o estructurarlo de otra manera, cuando se trabajó con niños del primer ciclo básico.*

estrategico “falso”, es decir, se le da al problema un enfoque deliberadamente extremista y se realizan algunas preguntas del tipo: ¿Qué pasa si se considera ...? ¿Cuál es el resultado al considerar…? (Bardy 2007). Es un ejemplo particular de esta estrategia, cuando se busca un contraejemplo, esto es, buscar un elemento (extremo), en el cual la propiedad no se cumple, entendiendo este elemento no como en el extremo del conjunto, sino como caso “raro” donde no se satisface lo esperado.

Como por ejemplo, al resolver el problema propuesto por Bardy (2007): Hay 8 vehículos, algunos tienen 4 ruedas y otros tienen 2 ruedas, si en total hay 22 ruedas, ¿Cuántos vehículos de dos y cuatro ruedas hay respectivamente? Una forma de proceder es utilizando el principio extremo, supongamos que todos los que hay, es decir los 8, tienen dos ruedas, así tenemos solo 16 ruedas, pero como son 22 ruedas, se deberá repartir 6 ruedas, de dos en dos, para completar cuatro, así hay tres vehículos de cuatro ruedas y cinco con dos ruedas. El mismo problema existe redactado para insectos y animales.

Entonces para la utilización o para la obtención de esta estrategia en los alumnos se deberán considerar los siguientes aspectos:

- La noción de máximo y mínimo de un conjunto real finito.
- La idea de número natural mínimo de un conjunto. En otras palabras, cada conjunto natural no vacío, finito o infinito, tiene un mínimo.
- Un conjunto real, no vacío, no siempre tiene un mínimo o un máximo. (En este caso están los conceptos de ínfimo y de supremo, si es que el conjunto está acotado inferiormente o superiormente, respectivamente).

Ejemplos de problemas serían los siguientes:

1. En una clase hay 24 alumnos. La suma de sus edades es 241. ¿Es cierto que, existen 15 alumnos dentro de la clase, donde la suma de sus edades es mayor que 150?[88]
2. ¡Qué lástima! No te encontré en la fuente. En el pueblo hay n casas y n fuentes. No existen calles que contengan tres de los $2n$ puntos (entre casa y fuentes). Muestre que,

[88] *Para la solución, se deben ordenar las edades de los alumnos y tomar los 15 más pequeños y continuar suponiendo que un alumno tiene el máximo de edad.*

cada casa se puede unir con una fuente por una calle, tal que estas calles no se intersecten nunca.[89]

3. Muestre que en un polígono convexo de cinco lados, se pueden considerar siempre tres diagonales, con las cuales se puede construir un triángulo.[90]
4. Considerar n números reales, que están ordenados en un círculo. Cada uno de esos números es menor o igual que el medio aritmético entre los dos vecinos, Muestre que todos estos números son iguales
5. Determinar el valor de verdad de la proposición: "Todos los números reales tienen un inverso multiplicativo".

Uno de los problemas que también se puede solucionar con esta estrategia, es el de contar las posibilidades de juegos, en un torneo de tenis de mesa con el sistema de eliminación directa. El procedimiento tradicional, si se consideran 32 jugadores es contar los 16 primeros juegos, luego los 8 siguientes, los cuatro siguientes, llamados cuartos de final, la semifinal que son dos juegos más y la final donde solo hay un juego, así se tienen en total 31 juegos. El pensamiento que se hace al utilizar la estrategia de los extremos sería, más o menos así, hay un jugador que es el que le gana a todos (el extremo), el deberá jugar con todos los otros jugadores para haber ganado, excepto contra el mismo, así son $32 - 1 = 31$ partidos.

Se ha visto que para generar este tipo de estrategias es necesario tener un problema que considere los elementos de extremos, más aún, en la forma de resolverlos, se puede diferenciar un método directo o un método indirecto. En el método directo, se encuentra el extremo, en el método indirecto se niega el extremo y se obtiene una contradicción. No se debe confundir esta forma de pensar con una demostración directa o por contradicción (Mayer, 2003). Por ejemplo: Muestre que la raiz de dos no es un numero racional. En este caso suponemos que si lo es, es decir, utilizamos el método indirecto, se cree que si lo es, se piensa que si lo es de forma falsa. En el siguiente caso, muestre que la ecuacion $x^2 = 5y^2$ no tiene solucion en el conjunto de los numeros naturales, se puede proceder de forma directa, utilizando el argumento de la irracionalidad de 5. Si en el enunciado aparece la

---

[89] *Para la solución de este problema se puede considerar que lo más económico para construir estas calles es considerando la distancia más corta. Este es una variación del problema presentado por Mayer (2003, pág. 78)*

[90] *Para la solución de este problema se debe considerar que en un triángulo la suma de dos de los lados es siempre mayor al tercero.*

premisa de no considerar la irracionalidad de 5, se procede en forma indirecta y se supone que hay una solucion natural.

3.5.3. EL PRINCIPIO DE INVARIANZA.

Cuando se utiliza el principio de invariancia, el foco cognitivo está en identificar variables, propiedades o relaciones funcionales que son comunes, la constante y todas las variables o las relaciones que se repiten o forman un patrón. Por otro lado, también se puede tratar de generar invariantes de forma artificial, mediante la consideración de una medida constante, de la característica y variedad de otras variables, de propiedades y/o sus relaciones (Bruder y Müller, 1990). Las preguntas que se podrían hacer los alumnos a ellos mismo son: ¿Qué es lo que no cambia? Y ¿Qué tienen estos objetos en común?, estas preguntas podrían determinar si el alumno utilizo esta estrategia en la resolución del problema.

Un ejemplo donde se podría utilizar este tipo estrategia, es en el problema de las edades. Mi madre nació el año 1945 y yo nací el año 1975, ¿en qué año tuvo mi madre el doble de mi edad? Una forma de solucionar este problema es reconocer que la diferencia entre las edades (en este caso entre los años de nacimiento) entre una madre y su hija es invariante en el tiempo, de esta forma $1975 - 1945 = 30$, quiere decir que esta diferencia se mantendrá por siempre, mi madre me tuvo a los 30 años y cuando yo tenga 30 años, mi madre tendrá 60, es decir en el 2005, mi madre tuvo el doble de mi edad.

Otros ejemplos donde se podría utilizar esta estrategia son:

1. Construcción de un puzle y empezar por la orilla, este reconocimiento básico de que toda la orilla tiene como característica básica de que un lado es derecho y por lo tanto, debe estar en la orilla del puzle, es un ejemplo de la utilización del principio de invariancia.
2. Ejemplos relacionados con una sucesión de números, del tipo aritmética o geométrica, tienen siempre elementos invariantes, que se pueden reconocer.
3. Ejemplos relacionados con área y perímetro de una circunferencia. El número pi, se puede ver como la invariante.
4. Los clásicos ejercicios de pintar una muralla, pieza, etc. en un tiempo determinado y preguntar en cuanto tiempo se haría si se trabajara en conjunto, es decir, ejemplos relacionados con proporción directa, donde la invariante está dada por la constante de proporcionalidad.
5. Poner una cantidad de números consecutivos, comenzando por el uno, en la pizarra o escribirlos en una hoja, el juego consiste en borrar dos números y a cambio escribir su

diferencia. Después de repetir este proceso una buena cantidad de veces, se debería conjeturar sobre la paridad o imparidad del último número que queda, es decir, formular la pregunta ¿Es el último número par o impar? ("Gana" el que "adivina", si el número es par o impar sin tener que hacer todo el cálculo)[91].

6. En una isla hay tres pequeñas tribus, una son los tradicionales y están siempre vestidos, que cuenta con solo 13 personas, la segunda son los liberales y están siempre desnudos, que tiene solo 15 personas y los de centro que están a medio vestir, que cuenta con 17 personas. Para tener una buena convivencia han decido que si se juntan, lo harán siempre de a dos y para no pelear, tomaran la costumbre de la tercera tribu, es decir, si se junta una vestido con uno a medio vestir, deberán estar desnudos. Si se juntan dos de la misma tribu, entonces conservaran la costumbre de la tribu. ¿Es posible, que en algún momento, una de las tres tribus desaparezca?[92]

La utilización de esta estrategia, tiene sus inicios a temprana edad, niños pequeños reconocen lo que cambia y lo que no cambia, esta información la utilizan de forma casi inconsciente. Muchos alumnos adoptan esta estrategia, ya que permite resolver muchos problemas de forma más "cómoda", entendiendo que comodidad es algo conveniente y que la utilización de una ecuación no siempre es lo que más agrada.

3.5.4. El principio de las casillas de Dirichlet.

Este puede ser también conocido por los niños, como el juego de la sillita musical, donde siempre hay un niño más que sillas y mientras los niños giran alrededor del circulo formado por las sillas, se escucha música y cuando se detiene la música, todos deben sentarse, quedando siempre un niño parado, el que pierde y se lleva una silla fuera del círculo, al final quedan dos niños y una silla, ganando el niño que se sienta en la sillita cuando se ha detenido la música. Este principio dice que el desorden completo es imposible, cuando existen $n+1$ objetos repartidos en n casillas, existe una casilla que tiene por lo menos dos objetos (Hesse, 2009).

Ejemplos donde se podría utilizar esta estrategia, serían los siguientes:

[91] *Notar que a la suma total (la invariante) siempre se le está restando un número par. A este ejercicio se le pueden agregar otros elementos, como ver si el resultado final es siempre el mismo o entre que números fluctúa y por qué es así.*

[92] *El elemento invariante, en este ejemplo, es la diferencia de los miembros de las tribus. Con este dato se deben encontrar las condiciones para estar todos en una tribu.*

1. En el juego „UNO“ sin considerar los comodines (son de color negro), si un jugador tiene 5 cartas, entonces seguro que hay dos del mismo color. En el juego de carta ingles, ocurre lo mismo.

2. En una clase con mas de 31 alumnos habrán por lo menos dos que coinciden solo en el día, en su fecha de cumpleaños y por lo menos habrán tres que coincidan en el mismo mes. ¿Cuántos alumnos se necesitan, como minimo, para conjeturar que por lo menos dos coinciden en el mismo mes?

3. Cada punto del plano tiene un color, ya sea azul o rojo. Como el plano es formado por lo menos por tres puntos, existiran dos puntos del mismo color. Con este ejemplo, se pueden hacer variados ejercicios. Sea n un número natural. Cada punto del plano (notar que para n puntos el plano tendría $n * n$ puntos) es pintado con n colores. Mostrar que existe en el plano, un rectángulo con los vértices de igual color. Para otros ejemplos, mirar Mayer (2003).

4. Me quiere, mucho, poquito nada, existen en este jugo cuatro posibilidades y la flor tendrá una cierta cantidad de hojas para sacer, seguro que cuando se termina de sacar todas las hojas, alguna de estas posibilidades tendrá que salir, notar que hay chicas que no siempre parten por “me quiere”, en este caso se esta utilizando en forma particular el resto al dividir por cuatro o las clases modulo cuatro.

Ejercicios relacionados con afirmaciones sobre la existencia de conjuntos finitos, pueden ser resueltos, según Mayer (2003, págs. 14-75), con este principio.

Esta estrategia es utilizada por mucha gente, es decir, que es obvio, lo que ocurre y puede ser que el lenguaje utilizado para recocnocer este tipo de estrategias no fuera el adecuado.

Si, se pregunta a una mujer o niña, qué cuantos puntos de colores habrán en el plano, si se han utilizado solo dos colores, seguramente que esta pregunta esta fuera de contexto y no tiene interes, para la estudiante.

En cambio, si se pregunta por la cantidad de aros y de colores, seguramente que el problema que se resolverá la estudiante, será aún más complejo que el que se ha planteado al inicio. Es entonces, cosa de probar, conproblemas diferentes y que tengan direcciones de género, esto es, probar con aquellas chicas, que están mas interesadas en coleccionar aros, que en la matemática tradicional, para sorprenderse de los resultados.

3.5.5. PRINCIPIO SIMÉTRICO.

Este principio se basa en el concepto de simetría. Se tiene una simetría cuando una situación permanece igual, a pesar de los cambios que se le puedan hacer, estos cambios pueden ser rotaciones, permutaciones y reflexiones. En la resolución de problemas se deberá identificar la existencia de la simetría y cuáles podrían ser los cambios que la afectan y cuáles no (Mayer, 2003).

Un ejemplo lúdico, en el cual se puede ver la utilización de esta estrategia, es cuando se juega a poner monedas, fichas, etc. sobre una hoja rectangular. Hay dos jugadores y su misión es poner monedas iguales sobre una hoja, sin que estas se superpongan. El primero que no pueda poner una moneda pierde. ¿Es posible "crear" una estrategia ganadora? La respuesta es sí, pero solo para el que empieza.

Si el primer jugador pone su moneda exactamente, en el punto de simetría de la hoja, es decir en el punto medio y por cada jugada del contrincante, el deberá poner su moneda simétrica al punto medio, es decir, simétrica a la moneda que es puso primero. De esta forma el jugador que empezó será el ganador. Si uno de los jugadores descubre esta estrategia, entonces siempre deseara jugar primero y se verá que siempre gana.

Otros ejemplos donde se podría utilizar esta estrategia son:

1. Encontrar tres números, donde la suma de ellos es 63, el más grande es menor en tres unidades al del medio. El primero de los tres, es tres unidades menores al del medio.
2. Ejemplos donde aparecen parábolas y se encuentra el vértice utilizando la idea de figura simétrica con respecto a una recta y no una ecuación.
3. Encontrar los tres números. Se divide el número en tres y a 21 se le suma tres y se le quita tres, de esta forma se obtienen los números 18, 21, 24.[93]
4. En juegos con ecuaciones: Alternativamente, cada uno de los dos participantes puede escribir un número en un casillero (el esquema es previamente determinado por el docente). El objetivo del jugador A es que solo existan ecuaciones válidas. El jugador B trata de generar una ecuación inválida. Se intenta encontrar generalizaciones y reglas que permitan hacer del éxito de los jugadores más difícil.

---

[93] *Este problema tradicional puede ser resuelto también con una ecuación lineal.*

5. Problemas relacionados con la iluminación de una calle, de una plaza, etc. Modificaciones a estos problemas, permiten ver como la asimetría también sería una forma de obtener una respuesta.

6. En sumas con los primeros diez números naturales, incluyendo el cero, se tiene un tablero coloreado, llamado en alemán “Einsplusein-Tafel” (Wittmann y Müller, 2006a). [Tablero uno más uno]. Donde, las simetrías con respecto a distintos ejes, permiten visualizar propiedades y relaciones para la suma. Ejemplos de la forma de utilizar este tablero aparecen en Wittman y Müller (2006a, 2006b).

7. En el trabajo con multiplicación y algunas relaciones, se podría utilizar la estrategia de simetría para encontrar y/o justificar algunas relaciones, como las que aparecen en el tablero diseñado por Wittman (Wittamn y Müller, 2006b). Este es llamado en alemán “Einmaleins-Tafel” y traducido en este trabajo como “tablero uno por uno”. Esta tabla, es utilizada por los alumnos en problemas de segundo a cuarto básico (Wittmann et al., 2006b, 2007a, 2007b).

Otros problemas relacionados con las simetrías de una figura (Hengartner, Hirt y Wälti, 2007), en los cuales se presenta al principio de simetría como una estrategia. Así, se puede decir, que la solución de algunos problemas, en los cuales se utiliza el principio de simetría, está relacionada con la forma heurística de resolver un problema y no con la utilización de la simetría como concepto, es decir, en un problema donde se pregunta precisamente por el concepto de simetría.

3.5.6. TRABAJO HACIA ATRÁS.

Este tipo de estrategia puede ser realizada casi por todos los alumnos, no por nada, los niños aprenden a andar hacia atrás para llegar a algún lado. En los problemas donde se puede trabajar hacia atrás, está dado una situación final y se pregunta cómo debe haber sido al inicio, para logra tener esa situación final (Bardy, 2007). Uno de los clásicos ejemplos que se utilizan en la escuela básica alemana, son los muros de números, los cuales se pueden trabajar hacia adelante o hacia atrás.

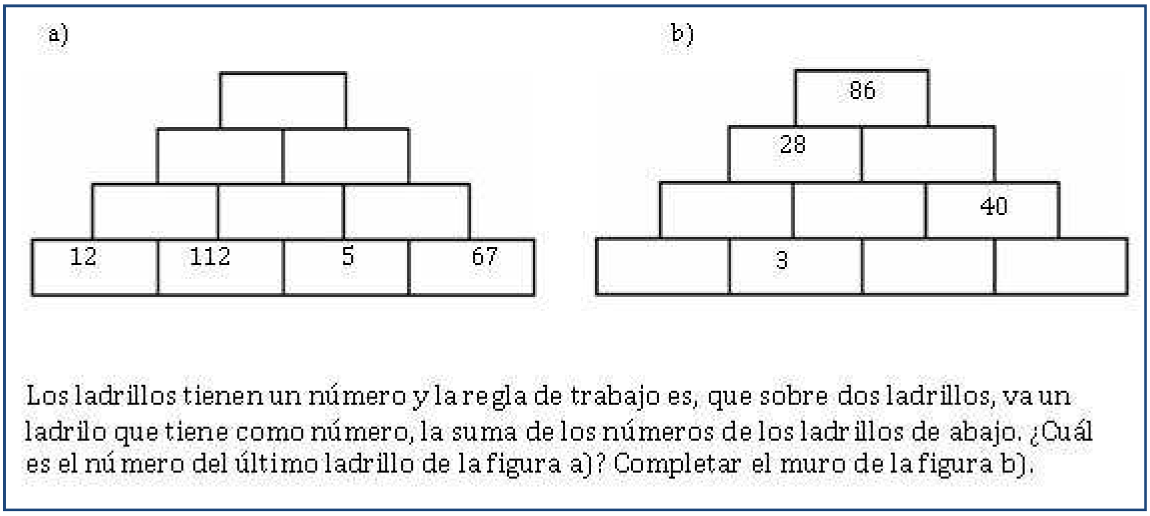
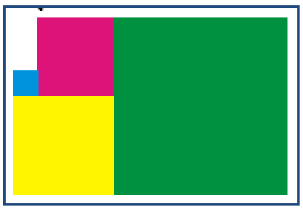


Figura 4: Trabajo hacia adelante y trabajo hacia atrás.

En la figura 4, se muestra se muestra una forma de utilizar “los muros”, idea que parece en los libros de educación primaria, para matemática, (Wittmann, 2006a; 2006b; 2007a; 2007b) se muestran dos muros y el ejercicio muestra la forma de trabajar hacia adelante y de trabajar hacia atrás. Hay variaciones de estos ejercicios, que se pueden hacer, se sugiere no decir cuál es la estrategia que deben utilizar los alumnos, se supone que ellos deben proceder como crean conveniente.

Otros ejemplos donde se podría utilizar esta estrategia son:

1. Amelia se va a otra ciudad y ha decidido dejar 24 aros a sus tres mejores amigas del barrio. Naturalmente se han puesto a pelear todas, por la cantidad de aros, para evitar esta discusión Amelia les propone un juego diciendo que al final todas (menos ella), obtendrían la misma cantidad de aros. El juego consistía en repartirse los aros de tal forma que a cada una le tocara la cantidad de aros que de edad que tenían hacia cinco años y que se quedaran con la mitad y que el resto lo repartieran entre las otras dos. ¿Qué edad tienen las niñas?
2. Si el dragón rojo tuviera 6 cabezas más que el Dragón verde, tendrían ambos juntos 34 cabezas. Si sabes que el dragón rojo tiene seis cabezas menos que el dragón verde, intenta encontrar el número de cabezas del dragón rojo.[94]



3. Los elementos que componen la figura, son 4 son cuadrados. El perímetro del cuadrado azul es de 16 cm. y el perímetro del cuadrado rosa es de 24 cm. ¿Cuál es el

[94] *Ejercicio extraído de la pág. Web: www.mathe-känguru.de. Traducción de la autora.*

perímetro del cuadrado verde?

En los problemas aquí presentados, siempre es posible hacer alguna variación de ellos, note que la intención es mostrar que en el desarrollo de estos problemas es posible hacer surgir la estrategia del trabajo hacia atrás, notar también como en el ejemplo de los muros, es necesario reconocer la suma como operación de reversibilidad como técnica del trabajo hacia atrás.

La mayoría de los ejercicios que se plantean en matemática, promueven el trabajo hacia adelante, es decir, desde los datos dados hacer algún calculo con ellos y obtener una respuesta (Bardy, 2007), lo que no quiere decir en ningún caso, que se deberían dejar de hacer, se debería intentar el restructurar los ejercicios, para que estos promuevan diferentes estrategias y diferentes formas de actuar, en el alumno.

3.5.7. Descomposición del problema.

Esta estrategia puede ser entendida de dos formas, por un lado está el problema que está redactado de tal forma que se puede separar en partes y por lo tanto el alumno debe entender la redacción del problema y separarlo o bien es una estrategia que puede encontrar el alumno para resolver diferentes problemas. Esta es una diferencia que el profesor de la clase debe reconocer, si el problema no está preparado para que una de las estrategias sea la descomposición, entonces el alumno no podrá necesitar de esta estrategia (Bruder, 2003). Si se considera además un orden necesario para separar el problema y de ahí solucionarlo, como es el caso de los problemas relacionados con la construcción de objetos geométricos, el problema tiene una mayor riqueza no tan solo cuando es separable, sino que también cuando se requiere de este orden. Un caso particular de esta estrategia es el principio de la diferenciación de casos, usuales en el trabajo con inecuaciones, con valor absoluto, con límites, probabilidades, etc.

En el siguiente problema, se puede dejar traslucir como los niños de educación básica, empiezan a hacer argumentaciones (Bardy, 2007). Se les pide a los alumnos de un cuarto básico que muestren que la suma de cuatro[95] números naturales, que si se dividen cada uno de ellos por cuatro tienen el mismo resto, es divisible por cuatro. Para este ejemplo se encuentran cuatro casos. Primer caso, los cuatro números tienen resto cero, lo que significa que son divisibles por cuatro y por lo tanto su suma también es divisible por cuatro, segundo caso, los cuatro números tienen resto 1, pero cuando se suman todos ellos el resto

[95] *En el problema original se les pide la suma de cinco números naturales.*

también pasa a ser un numero divisible por cuatro y por lo tanto la suma es divisible por cuatro. Los otros dos casos se hacen de forma análoga[96] al segundo.

Este principio puede jugar un rol importante para problemas complejos, en el ejemplo anterior, no hay un orden necesario de los casos, pero sin considerar estos casos, la solución de este por niños pequeños e incluso más grandes, no sería “agarradle”. Otros ejemplos sencillos en los cuales se puede hacer una partición del problema sería:

1. Encontrar el área de figuras que están superpuestas o que están puestas unas al lado de la otra y es necesario hacer el cálculo de un área y después de la otra y sumarlas.
2. En problemas relacionados con el análisis de funciones, se debe en algunos casos, considerar intervalos adecuados para el análisis.
3. Escisión en factores de un producto o descomponer en factores primos, en problemas de divisibilidad.
4. En problemas de teselaciones, cual parte es conveniente poner para poder teselar el plano, por ejemplo, pensar en teselar el plano con hexágonos y descomponer el problema en una teselación del plano en triángulos equiláteros.
5. En problemas del cálculo de pirámides truncadas, considerando cuboides.

Este principio es también utilizado por los alumnos al momento de contar más de diez elementos, para esto desintegran una cantidad para completar diez y luego la agregan, por ejemplo, al querer sumar 7 y 8, algunos alumnos procederán con separar el 8 en 3 y 5, el tres lo sumaran con el 7 obteniendo 10, al cual le agregarán el 5, con lo que se obtiene 15. La descomposición de un problema lleva también a la integración de los resultados, proceso que es importante destacar al momento de entregar una respuesta.

3.5.8. REESTRUCTURACIÓN.

La estrategia de reestructuración de una situación o un problema matemático, es posible cuando la estructura superficial o evidente del problema no deja ver ninguna posibilidad inmediata o la respuesta se obtiene de una forma muy laboriosa. Pensar por ejemplo, en el problema de Gauss (1777-1855), esto es, en la suma del 1 al 100, con una reestructuración conveniente de la información le fue posible obtener un resultado más rapido, pero por otro lado, se pudo haber obtenido el mismo resultado de forma laboriosa. Así, una nueva ordenación de la información, permite visualizar nuevas estructuras, que a simple vista no

[96] *Mirar el principio de analogía.*

se ven. También es una reestructuración del problema el traspaso de un problema aritmético en una configuración geométrica, y su modificación o suplemento puede proporcionar soluciones para el problema original (Bardy, 2007).

Un problema donde podría surgir la estrategia de restructuración, es el propuesto por Bardy (2007). Se debe contar con los dedos de una mano y de la siguiente forma: uno el dedo gordo, dos el dedo índice, tres el dedo del medio, cuatro el dedo del corazón y cinco el pequeño y se devuelve contando, seis el dedo del corazón, siete el del medio y así sucesivamente, la idea es no repetir en la vuelta el dedo gordo ni el pequeño, entonces se pregunta: ¿A cuál dedo le toca el número 2002? Hay por lo menos dos formas de restructurar el problema, el primero es observando que siempre al mismo dedo le tocan los múltiplos de ocho y la otra es observando cómo van apareciendo los múltiplos de 10, seguro que hay otras formas que aquí no se mencionan, pero se dejan para descubrir. La otra forma posible, es dejar que el niño cuente de uno en uno, hasta llegar al 2002.

En general, todos los problemas donde es necesario restructurar la información o realizar cambios adecuados, para visualizar una posible solución, son los que podrían reforzar esta estrategia o desarrollarla. Por ejemplo algunos de los problemas con palos de fósforos y figuras. En este caso se recomienda mirar algunos problemas presentados por Leuders (2010) y por Hengartner, Hirt y Wälti (2007).

3.5.9. GENERALIZACIÓN.

En el diario vivir, estamos frecuentemente generalizando, ejemplos clásicos de esas generalizaciones son las expresiones tales como „todos los hombres son iguales", "los alemanes son cuadrados", "todas las mujeres son brujas", en este caso, ha sido suficiente observar a un par de personas que tiene la característica mencionada y se generaliza para todo un conjunto (Hesse, 2009, pág. 137).

Esta estrategia puede servir para resolver problemas, pero también puede desarrollar un desacierto, como es el caso de encontrar una fórmula para los números primos, como en el caso de la expresión $\sqrt{24n+1}$ y el comentario del que la encontró[97], que dice que cada vez que se obtiene un número natural, este será primo, seguro que resulta para algunos números, pero no para todos.

Otra forma de utilizar la generalización, se tiene cuando se pide hacer un cálculo preciso y se utilizan datos más pequeños y después se generaliza, como en el caso de preguntar por

[97] *En http://www.mathehotline.de/mathe4u/hausaufgaben/messages/4244/358478.html*

el cálculo del ángulo entre el horario y el minutero de un reloj cuando son las 6 horas con 15 min. Si el alumno procede con dos ángulos conocidos, como por ejemplo $\alpha = \pi = 180°$ el ángulo para el horario y $\beta = \frac{\pi}{2} = 90°$, es decir, son las 6:15 horas y el ángulo pedido es $\gamma = \frac{\pi}{2} = 90°$, y esto se generaliza como $\alpha - \beta = \gamma$ para encontrar el ángulo entre el horario y el minutero a cualquier hora.

Otros ejemplos donde este tipo de estrategia podría ser utilizada, son:

1. Sabiendo que el factorial de un número n es $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Encontrar la última cifra de la suma de todos los números factoriales, comenzando con 1! hasta el 100![98]

2. Hacer una generalización de una rotación en tres dimensiones a una rotación en cuatro dimensiones.[99]

3. Encontrar la ley del coseno como una generalización del teorema de Pitágoras. (Generalizar a cualquier triángulo).

4. El doble de un número, se puede escribir como 2n, donde n es cualquier número, si se toma n = 1, el doble es 2, si se toma n = 2, el doble es cuatro, etc. inicios de la generalización funcional estática. (Ver sección 4.2.5).

De esta forma, la generalización busca una conjetura aplicable desde lo específico hacia lo general (Mason, Burton y Stacey, 1982). Esta estrategia no intenta mostrar o demostrar que algo se cumple siempre, es como una intuición que se comprueba en algunos casos específicos y se utiliza en un caso más general, por esto no se debe confundir con la técnica de demostración por inducción y con los problemas que están relacionados directamente con esto. La estrategia de generalización es más libre y sigue los patrones de creencia del individuo.

Polya y Szegö (1970, pág. VII), describen dos tipos de generalizaciones, una por dilución (barato, económico) y la otra por concentración (valiosa), agregando estos mismos autores, qué las que se hacen en Teoría de Grupos, son del tipo de generalizaciones valiosas o por concentración. En este caso, es claro que el autor no se refiere a una estrategia, sino que

---

[98] *Problema para alumnos de la 5ta, 6ta clase en el día de la Matemática, Tag der Mathematik, 04.07.2009 en TU Múnich, en el cual se participó como correctora.*

[99] *Mirar la pág. http://www.lehrer-online.de/hyperwuerfel.php.*

más bien a la forma de hacer las generalizaciones, dando por entendido que la estrategia ya está incorporada en los individuos.

Una posible clasificación de los tipos de generalizaciones que realizan los alumnos para reconocer patrones y de ahí obtener resultados en algebra, está dada por Barbosa (2010), otra forma de generalizar es la dada por Vollrath (1986) y que está en relación con la utilización de funciones, en este caso se debería llamar estrategias funcionales, ya que su base es distinta a la que aquí se ha visto. La clasificación de las tareas da también una forma de clasificar las estrategias, pero no es la idea, un problema debería ser posible de trabajar, da igual cómo y de ahí generar una variedad de posibilidades y no diseñar un problema con la intención de desarrollar una determinada estrategia[100].

En la tabla 13, se da una idea de cómo el alumno podría proceder frente a un problema.

Notar que las estrategias no vienen solo de a una, en más de un caso, se le ha dado un nombre, pero es claro que el alumno utilizará una mezcla difusa de varias de ellas. Más aún, existen casos donde la respuesta es correcta, pero el argumento es bastante confuso y en otros casos es comparable con algunas de las estrategias que aquí se han definido. Si se desarrollan estrategioas en clases, habrán varios factores que influirán en la aparición o en la ausencia de estas.

Tabla 13: Estrategias matemáticas alrededor de un problema.

Problema: Unir con una línea los puntos medios de un paralelogramo, de tal forma que se visualice otro cuadrilátero. ¿Qué crees que ocurre? ¿Por qué crees que ocurre? (Intenta dar el máximo de argumentos, motivos o razones por las cuales crees que es así).	
El cuadrilátero obtenido es nuevamente un paralelogramo.	
Principio simétrico	El paralelogramo de partida es simétrico con respecto a su centro. Cada par de lados opuestos, obtenidos tomando el punto medio, se corresponden entre sí, considerando el centro como punto de simetría, de esta forma son paralelos, la nueva figura es también simétrica con respecto a su centro y es un paralelogramo.
Principio de invariancia y descomposición del problema en partes.	Considerando el triángulo formado por la diagonal del paralelogramo y por dos de sus lados, se tiene que el segmento que se obtiene al unir los puntos medios del triángulo es paralelo al tercero de sus lados, de esta forma los dos lados opuestos formados por los puntos medios del triángulo son paralelos a la diagonal y entre sí paralelos. Esto se hace para la otra diagonal y se obtiene que la nueva figura sea un paralelogramo. Más aún, el segmento es la mitad de la

[100] *Con respecto a este tema, destaca una de las preguntas planteadas por el grupo 17 del CERME 7: "If we teach strategies what are they and why?" Hacer un listado de las estrategias es siempre posible, pero creo, lo personal, que estas no se deberían enseñar, creo que se deben dar las posibilidades, de forma consciente, por parte del profesor de la clase, para que estas aparezcan, se desarrollen de forma natural.Cualquier otro intento, sería lamentable para el estudiante.*

	medida de la diagonal.
El área del nuevo cuadrilátero es la mitad del área del paralelogramo dado.	
Descomposición del problema en partes	Trazar las líneas que van desde el punto medio al punto medio del lado opuesto, así se forman cuatro nuevos paralelogramos, con sus respectivas diagonales, donde el área de cada uno de esos triángulos es la mitad del paralelogramo. Así se concluye que el área del nuevo cuadrilátero es la mitad del paralelogramo dado.
Generalización	Cada vez que se tome el punto medio, se estará bisecando al segmento y al trazar la recta que une con el punto medio del segmento contiguo, será este siempre la diagonal de un nuevo cuadrilátero. Así, si se hace este proceso nuevamente, se obtendrá un nuevo paralelogramo que tiene un cuarto del área del cuadrilátero inicial.
Lo mismo, si se toma un paralelogramo o no, cada vez que se trace una recta entre los puntos medios de un cuadrilátero, se obtendrá un paralelogramo.	
Prueba sistemática y generalización	Se toma un cuadrado y se obtiene un cuadrado, que es a su vez un paralelogramo. Si se considera un rombo, aparece un rectángulo, que es nuevamente un paralelogramo. Si se toma un paralelogramo se obtiene un paralelogramo, en general cuando se toma cualquier cuadrilátero y se traza una recta desde puntos medios, estas forman un cuadrilátero, este cuadrilátero es un paralelogramo, la nueva figura considerará nuevamente el punto medio y se trazará una recta de punto medio a punto medio de los lados y esta recta será siempre paralela a la diagonal del cuadrilátero.
Trabajo hacia atrás	Si se dibuja un paralelogramo cualquiera y se dibuja un triángulo sobre cada uno de sus lados, la nueva figura, sin el paralelogramo inicial, es un cuadrilátero cualquiera.
Si se toma un paralelogramo y se dividen los lados en proporciones iguales, entonces se obtiene un paralelogramo.	
Generalización y principio simétrico.	Se divide cada segmento en un tercio y se considera el primer tercio a la derecha y se marca un punto, trazando las rectas que unen estos puntos, se forma un paralelogramo y se observa que la figura inicial y la nueva que se obtiene son simétricas con respecto al centro. Observar que si es un cuadrilátero cualquiera, este no es simétrico con respecto al centro y por lo tanto no se puede hacer la misma conjetura.

Existen por lo menos 22 tipos de estrategias que utiliza el hombre en su vida cotidiana (Hesse, 2009), es interesante ver como ellas están también relacionadas con el que hacer de la matemática, una de ellas es el principio de analogía y el problema presentado en la tabla 13, podría haber sido trabajado con triángulos, con pentágonos, con un cubo, etc. de forma análoga. En lo que sigue se mostrara un poco más de la capacidad de hacer analogías, que aquí será en primer lugar vista como una estrategia, que además vendría a ser una base para la formación y creación de metáforas conceptuales.

3.5.10. EL PRINCIPIO DE ANALOGÍA.

En el principio de analogía, se utiliza un problema parecido, que ya se ha resuelto antes, para resolver un problema nuevo, en general, los individuos utilizan la expresión “esto es parecido a ...” (Mason, Burton y Stacey, 1982; Mayer, 1992; Bardy, 2007; Hesse, 2009). Los individuos realizan un proceso cognitvo diferente a lo que se ha visto hasta ahora, este incluye procesos de comparación, en el sentido más amplio. En esta estrategia, se intenta buscar un problema parecido, encontrar la conexión que existe entre estos problemas y encontrar en donde son parecidos y como se ha resuelto el problema anterior y luego traspasarlo, para resolver el nuevo problema. Las preguntas que se podrían realizar los alumnos son: ¿Me he enfrentado alguna vez a un problema parecido?¿Cómo lo he resuelto? (Bardy, 2007).

Muchos problemas que tienen los ingenieros para la construcción de puentes, tuneles, etc, han sido resueltos en su forma mas simple (sin muchas variables) por los ejercicios clásicos de geometría como por ejemplo, el siguiente: En la entrada a un tunel, con forma de medio circulo, con dos sentidos y un ancho de 6 metros, 3 para cada dirección, se debe colocar a la entrada del tunel, un letrero que advierta sobre la altura máxima que deben tener los camiones para cruzar el tunel. El ingeniero debe considerar además que en los costados del tunel hay una cuneta de 2 metros de ancho y que por razones de seguridad es conveniente que la distancia del camión al techo tenga por lo menos 30 cm. ¿Cuál será la altura máxima permitida?

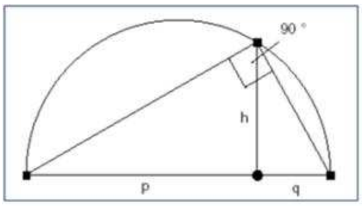


Figura 5: Representación icónica tradicional.

Para resolver este problema, solo se debe considerar el teorema de Thales, que muchas de las veces se ha visto en geometría, y que la Figura 5, es un input para recordarlo, esto es, la figura motiva al recuerdo de este teorema y por lo tanto a la solución del problema, que dice que la altura del triángulo rectángulo, es igual a la multiplicacion de los segmentos que se forman al trazar la la altura desde el angulo recto al segmento base. Así se tiene que en este caso y en relación a la figura 5, que la altura total es de 4 metros y que el camión deberá tener un máximo de 3,7 metros de altura, con loque se podrá hacer el letrero.

Otros problemas en los cuales se podría utilizar el principio de analogía serían:

1. Una barra de chocolate de 3x4 cuadritos quiere ser repartida lo mas rapidamente por una madre, que esta en un cumpleaños con 12 niños (Hesse, 2009, pág. 42). ¿Cuantos quiebres como minimo tiene que hacer la madre para obtener cada uno de los cuadritos? Este ejemplo, tiene una analogía con la función f(n)=n-1, con la representación icónica del chocolate y la forma de dibujar el chocolate.

2. Una rueda de 1m de diámetro, se queda estancada en un agujero de 70 cm de ancho. ¿Qué tan profundo se ha hundido la rueda? Este ejemplo es analogo a los que se resuelven con el teorema de Pitagoras.

3. Ejercicios del tipo A es a B como C es a D.
4. Ejercicios de Sudoku [101], pueden ser utilizados como dominio de partida para la formación de tablas de Grupos.[102]

Hasta aqui se ha visto el principio de analogía como un medio estrategico para resolver un problema conocido utilizando algún otro analogo. En los problemas que se resuelven por analogía tambien pueden ser consideradas las situaciones que se han vivido antes y que han sido trasladadas a nuevas situaciones, por ejemplo, si un alumno sabe sumar fracciones y de forma natural (análoga) sabe también restar fracciones, sin necesidad de que se le haya enseñado. Para niños más pequeños, se puede observar que levantar los “dedos” a las que ya estan levantados, es una forma análoga (metafórica) a la suma con los primeros 20 números naturales, esto es, sumar es analogo a levantear dedos, juntarlos, etc.

En este proceso de trabajar con analogías (Araya, Calfucura, Jiménez, Aguirre, Palavicino, Lacourly, Soto-Andrade y Dartnell, 2010) y con metáforas, hay un dominio de partida y un dominio de llegada, asi como una relación entre ambos dominios (Mayer, 1992, pág. 425-430), que es el alumno el que deberia encontrarlas y reconocerlas, también se reconoce que el maestro de la clase utilizará analogías para orientar a sus alumnos en la introducción a nuevos conocimientos (Richland, Holyoak y Stigler, 2004). Se debe destacar el hecho de que hay diferentes dominios de partida para hacer las analogías, una de ellas es desde lo contextual vivencial, desde la matemática contextualizada y desde la matemática descontextualizada, los problemas que aquí se muestran se podrían clasificar según estas tres categorías, pero por el momento no se considera necesario hacer esta clasificación. Lo mas importante es reconocer la necesidad de hacer analogiás, ya que esta no tan solo sirve para resolver problemas, sino que también para encontrar relaciones entre dominios diferentes, por caminos diferentes y no directos, lo que permite, como ya se ha visto, fortalecer la gimnasia mental.

Una de las estrategias que se podrían considerar dentro del principio de analogía, es el principio de paridad, este tipo de estrategia permite separar el problema en dos aspectos

---

[101] *Sudoku es un pasatiempo y su objetivo es rellenar una cuadrícula de 9 × 9 celdas, dividida en subcuadrículas de 3 × 3, con 9 figuras diferentes o con las cifras del 1 al 9, partiendo de algunas figuras/números ya dispuestos en algunas de las celdas. Información extraída de: http://de.wikipedia.org/wiki/Sudoku.*

[102] *Este es uno de los resultados que se mostrara con más detalle en el análisis de los diarios de matemática realizados por los estudiantes de la Universidad de Augsburgo.*

caracteristicos, que no se intersectan, de tal forma que esta separación permite ganar de forma conveniente información para la solución del problema. Este principio, tiene como dominio de partidad el concepto y la disticion entre par e impar, que a su vez podria tener un dominio de partida, vivencial como el hecho de ser hombre o mujer y otras dualidades cotidianas.

Ejemplos en los cuales se podría utilizar esta estrategia son:

1. Es posible que una hormiga recorra todas las aristas de un cubo sin pasar dos veces por la misma arista?
2. La casa de Nicolas, donde se trata de hacer una casa formada por un cuadrado y un triángulo y se deben unir los cinco vértices, sin pasar dos veces por el mismo lado.
3. Se tiene un dispositvo en el que 16 bombillas estan montadas formando un cuadrado 4x4. Cada fila y cada columna de bombillas dispone de un conmutador que cambia el estado de todas las bombillas de esa fila o columna (es decir, enciende las bombillas apagadas y apaga las encendidas). Suponiendo que inicialmente no hay ninguna bombilla encendida, se pregunta si es posible conseguir, que quede encendida exactamente una bombilla de todo el cuadro, sin importar cual, y que queden encendidas las bombillas de una de las diagonales.

Para aclarar la diferencia entre la utilización de analogías para resolver problemas en matemática y el uso de metáforas como fuente de aprendizaje y comprensión, se muestra en la figura 6, un cuadro diseñado por Soto-Andrade (2007b), en el cual, las flechas indican el dominio de partida de las representaciones, de las analogías y de las metáforas y el dominio de llegada. Mostrando también el nivel en el cual ellas transitan.

En la figura 6, se puede observar también una diferencia entre las representaciones y las metáforas, a saber, el paso (diagonal) desde el dominio fuerte, concreto y más aterrizado al dominio blanco, mása elevado y abstracto, siguiendo un camino, que no tiene una representación equivalente de regreso, como en los otros casos laterales.

Gardner (2009, págs. 340-343), se refiere a una "capacidad temprana analógica o metafórica", como una capacidad de notar similitudes a través de dominios sensoriales, similitudes entre dominios dispares como los símbolos, palabras y dominios sensoriales.

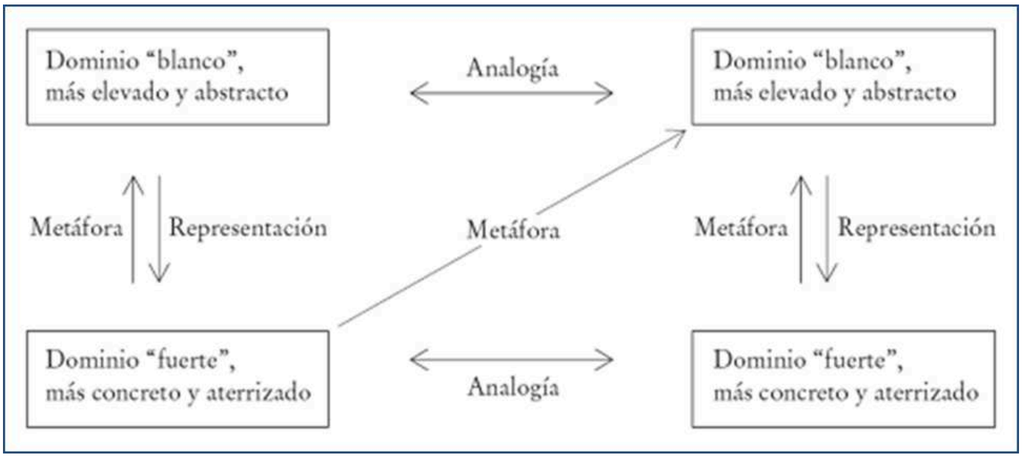


Figura 6: Metáfora espacial

para las metáforas-representaciones y analogías. (Soto-Andrade, 2007b, pág. 79).

Es en este punto donde se puede ver el principio de analogía como estrategia de resolución de problemas o como un medio de comunicación del pensamiento. Creemos que al explicar (comunicación con los otros) o intentar encontrar una solución (diálogos internos), el individuo utiliza la analogía de dos formas diferentes. En el primer caso, es considerada en este trabajo como percepción de los objetos y en el segundo caso como una estrategia. Aunque, reconocemos que la analogía es una capacidad, en el sentido mencionado por Gardner (ibídem, 2009) y que todas las estrategias pueden ser vistas como capacidades del individuo que son aplicadas en algún momento para resolver un problema, es decir, son competencias en un sentido más amplio y no categórico.

3.6. HABILIDADES DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

Un matemático utilizará al momento de pensar números, símbolos (letras como "*x*" e "*y*" y otros símbolos), pensará con palabras, con imagenes mentales visuales (Araya, 2004), con imagenes mentales auditivas, con imagenes mentales táctiles y con imagenes mentales motoras, como gestos con la mano u otros. Es decir, el matemático piensa a traves de representaciones mentales, de representaciones motoras y a través de representaciones semióticas. Al momento de pensar, estas representaciones pueden ser de un solo tipo o cambiarse de uno al otro, de forma voluntaria o involuntaria.

En la memoria se crean "imagenes" (Asanger y Wenninger, 1999) personales de los conceptos (que son en reailidad conexiones), estos son recuperados cuando se ven sobre un papel, si otro los menciona, si el mismo los ejecuta o si estos conceptos se necesitan en algún momento. En el caso de las representaciones mentales habrá siempre una interpretación personal, como por ejemplo la representación motora del movimiento de la rotacion de la mano, puede significar algunas veces un círculo y otras veces una transformacion de un objeto en otro, o bien, lo que sigue en un ciclo, etc. Esto es, no tan solo produce una ambiguedad entre un sujeto y otro, si no que el uso que le da un mismo individuo.

Estas siete formas de pensar son frecuentemente utilizadas por un matematico y tienen un gran impacto sobre el desarrollo del pensamiento del individuo (Araya, 2004). Como se ha visto antes, no es lo único que se utiliza al momento de pensar, también estaran involucradas las estrategias, capacidades, procedimientos y todos los sentidos. Un matematico puede utilizar algunos materiales también al momento de ejecutar alguna idea, los materiales conocidos son el lapiz, el papel, la regla, el compas, la cuerda, etc. Hoy en día se hace matemática con casi todo tipo de materiales, incluso con el computador, existiendo una linea de investigación en esta área y los cambios que produce el uso del computador en el PM (Araya, 2004; Davis, et. al., 2003).

El uso de las herramientas del pensamiento humano, se hace mientras se comúnica algo a uno mismo y mientras se comúnica algo a otro/s, es decir, estas herramientas son un vehiculo para el pensar, para el diálogo y la comunicación. Dentro de estas herramientas que ya se han nombrado hay dos que estan enmarcadas dentro de un contexto distinto, ya que requieren de varios conceptos para su descripción, a saber la utilización del pensamiento lógico y la modelación. Ambas pueden ser vistas como estrategias y como parte de un contenido matemático o incluso como un vehiculo especifico de la formación de metáforas, más aún, a estas dos herramientas del pensar se le adjudican en especial, variados y complejos procesos cognitivos. Por esto, se ha decido hacer una sección especial para estas dos formas del PM, en la que se busca una descripción más amplia.

3.6.1. La utilización del pensamiento lógico como herramienta del pensamiento matematico.

Desde mucho tiempo que la matemática es la que debería ejercitar de forma natural el pensamiento lógico (Freudenthal, 1974). ¿Que es lo que se entiende por el adjetivo lógico? Aristoteles desarrollo la lógica, pero que con el verdadero pensamiento no tiene mucho que ver. (Freundenthal, 1973, pág.84). No se trata de tan solo ejercicios del tipo: Todos los hombres son mortales, Sokrates es un hombre, entonces Sokrates es mortal. Si no que más bien, el pensamiento trata de la logica de las analogías, como en el siguiente diálogo entre un matrimonio:

A: Si tu invitas a Müller, tu debes invitar a Meyer.

B: ¿Por qué?

A: Los dos son amigos.

B: Pero nosotros estuvimos recientemente donde los Schmidt y ahí solo invitaron a Meyer y no a Müller. Entonces, ...

A: Entonces, ..., eso es otra cosa. Nosotros podemos invitar a Meyer sin invitar a Müller, pero no al revés.

B: ¿Por qué no al revés? Si los dos son amigos, Müller es con Meyer tan amigo como Meyer es con Müller.

A: Pero cuando tu invitas a Müller, así dice la señora Müller, que la señora de Meyer podría enojarse con nosotros, mientras que la señora Müller no es así.

B: pero que tengo que ver yo con las mujeres?

A: pero es que tu no estas casado?`

B: Sí, pero no con la señora Meyer.

A: Ah, el suertudo.

B: Ya estamos bien lejos, ustedes las mujeres no pueden pensar lógicamente.

En este diálogo, hay varios elementos a destacar como lo es el argumento simetrico (Müller y Meyer) y que no tan solo la mujer de esta historia utiliza elementos externos a las matemáticas formales, sino que también el hombre de esta historia. El pensamiento lógico no debe ser tan solo el pensamiento formal elevado que se trata en las universidades, se debería enseñar o practicar por medio de la fusion entre el pensamiento lógico, el desarrollo de la comprensión de texto, del lenguaje y la utilización de analogías (Bock y Walsch, 1975). En la vida real se desarrollan de esta forma las conversaciones y nadie espera que estas cambien y que nos pongamos a hacer un analisis de estas historias, lo que se propone para desarrollar el uso del pensamiento lógico es hacer preguntas del tipo:

1. ¿Es el pintor más grande entre los poetas y el poeta más grande entre los pintores la misma persona?
2. Si sólo hay un pintor entre los poetas, ¿existe también solo un poeta entre los pintores?
3. En una canasta se encuentran todo tipo de objetos de diferentes colores y de diferentes formas. ¿Existe también entonces en la canasta dos objetos que se diferencian tanto como en el color como en la forma?
4. Descubrir características de los números naturales y enunciarlas como sentencia del tipo existe uno, ninguno, todos, para todos existe uno, si se tiene esto entonces ocurre esto otro, en este caso no se les debe pedir hacer una demostración formal de una

proposición, solo que ellos enuncien las proposición que a los estudiantes les parezcan "obvias".

5. Observaciones de los números racionales, redactadas en forma de proposición, realización de dibujos con las instrucciones del tipo: Dibujar dos círculos que se cortan en un punto y hacer variaciones de este problema. Observaciones en el plano de figuras y de sus ángulos, probar de hacer la negación de estas proposiciones, probar lo mismo con frases relativas a las actividades del colegio, como por ejemplo, todos los alumnos y alumnas del equipo de fútbol del colegio, que han obtenido un promedio semestral bajo cuatro, deberán despedirse del equipo de fútbol. Encontrar proposiciones que son equivalentes entre si y acotar el conjunto sobre el cual se está trabajando (Bock et al., 1975).
6. Juegos de lógica y números (Cofre y Tapia, 2009, págs. 77-82), juegos de lógica y geometría (o. g., págs. 95), donde se proponen una serie de juegos, con la intención de reforzar y desarrollar el pensamiento lógico, en situaciones del tipo, cómo se debería continuar, de forma tal, que la estructura (con lógica determinada) se mantenga.

Esto es, preguntas donde se contempla tanto las analogías como las comparaciones simetricas desde la realidad, pero no de nuestra vida cotidiana (Bock et al., 1975). En este punto se es un poco contradictorio con lo propuesto anteriormente. Freudenthal (1974, 1979) propone para solucionar lo anterior, en el proceso de desarrollar y utilizar el pensamiento lógico, no se debería partir por cosas cotidianas, sino que desde una realidad ficticia, pero con posibilidad de representarlas de forma real y con sentido común. Esto se debe a que, al empezar desde lo cotidiano, seguramente que nada puede ser copletamente lógico, como en la conversación mostrada anteriormente. Esto es, nuestra vida no es lógica y no se pretende que lo sea. La toma de decisiones, no se hace por un proceso lógico comprensible, es más, la lógica esta basada en verdadero y falso y para el ser humano, existe siempre una tercera posibilidad el "podría ser". Es por esto que a pesar de que siempre se dice que algo es lógico, que estamos utilizando la lógica, se debe entender que es en un contexto determinado y para un caso determinado. Es por este motivo también que se dice que la matemática desarrolla este tipo de pensamiento y es porque en este lugar fuera de lo cotidiano, donde la matemática tiene un constructo y las herramientas estrictas de la lógica.

Anderson (2001, pág. 303) dice que no existe una relación estrecha entre las conexiones lógicas y los procesos cognitivos, esto es, se hacen procesos cognitivos que no estan directamente ligados a las relaciones lógicas tradicionales, en muchos problemas matemáticos no contextualizados o que estan solo dentro del contexto matemático, si habria una relación mas estrecha con los procesos cognitivos (Bardy, 2007).

Dentro de esta herramienta del pensamiento, se reconoce otro componente, a saber, la del razonamiento deductivo, la cual a su vez, se puede desglosar en un razonamiento [103] deductivo dado por analogías (especie de equivalencias); en razonamiento deductivo dado por inducción (demostración por inducción) y un razonamiento deductivo dado por deducción (valga la redundancia y considere el método de demostración directo). Estos estan asi directamente relacionados con los métodos de demostración y algunos ejemplos que se dan para desarrollar el pensamiento lógico aparecen en Bardy (2007).

Por otro lado, tambien esta el razonamiento inductivo con dos acepciones posibles, dentro de una metodología de demostración y en el sentido más amplio, dado por entender que el razonamiento es un proceso cognitivo que se realiza con datos iniciales y luego se continua probando de forma inductiva, proceso que es muy parecido a la estrategia vista en la sección 3.5.1 y 3.5.2. En forma general este pensamiento es el que permite plantear conjeturas y la "conjetura es el principal camino para el descubrimiento" (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, pág. 60) y este camino se puede hacer utilizando el razonamiento inductivo, como posibilidad.

Cabe destacar que la expresión "es lógico que es así", se puede presentar en el caso de las expresiones como todo cuadrado es un rectángulo, más aún, cada vez que se hace un paso, este deberá ser lógico con lo que el individuo considera que es correcto y viable, en caso de que para el sujeto no sea lógico y aun así procede, se podría decir que no está haciendo ningún proceso mental. En las estrategias que se han mencionado antes, se debe tener claro que el pensamiento lógico está en cada uno de los pasos que existen de frase a frase, es decir, el pensamiento lógico permite pasar de una frase a la otra, como una especie de conexión cognitiva personal, en este caso se considera también el entendimiento intuitivo que se tiene de las proposiciones lógicas (Resnick y Ford, 1981).

Por último, se puede decir que la utilización del pensamiento lógico está relacionado con los denominados condicionales, por ejemplo, con el „si" y el „entonces". También esta relacionado con los cuantores como „todos", „alguno" y „ninguno", es decir, con el razonamiento silogístico y el pensamiento de las relaciones (cerradas-inferenciales). Psicológicamente hablando una conclusión lógica es siempre una conclusión o inferencia

---

[103] *Notar que aquí se utiliza la palabra razonamiento en el sentido que es una especificación de un tipo de pensamiento, que requiere necesariamente de procesos lógicos.*

deductiva y ambos términos suelen utilizarse indistintamente. (Knauff, 2006, pág. 167). El pensamiento lógico se entiende también como la capacidad de seguir una larga cadena de causas o de construir una cadena de acontecimientos o hechos. Un ejemplo clásico, para la utilización del pensamiento lógico sería el dado por Bardy (2007, pág. 159), a saber, “¿Cuales son los apellidos de los niños?”; en el cual se dan varias sentencias que hay que ordenar utilizando el razonamiento lógico, para concluir que no existe más que una posibilidad que los apellidos tienen que ser esos y no otros.

3.6.2. La habilidad de modelar.

La modelación es un intento de hacer una relación directa entre la realidad y la matemática, se busca plasmar en términos matemáticos simbólicos (representaciones semióticas tradicionales) una situación concreta, con variables determinadas y acotadas. Un modelo de una situación (Mayer, 1992, pág. 431) debe incluir las partes esenciales de la situación, como también sus relaciones de causa-efecto y los cambios desde un estatus desde una parte a la otra. El modelo deberá permitir entre otras cosas, dar respuestas a una pregunta específica planteada y predecir con cierta certeza sobre los designios a futuro o en un tiempo determinado, el cómo de la variabilidad de los estatus. Una de las áreas en matemática que está en relación con la modelación es la biomatemática, que intenta a partir de datos obtenidos de forma empírica, sobre el crecimiento, mortandad, temperatura, etc. obtener funciones que describan el proceso biológico de algún ente, de forma bastante diferente hacen los eléctricos, sus modelos de circuitos con resistores, baterías, etc. en los cuales se intentan hacer modelos de prueba (Mayer, 1992).

En clases de matemática del colegio, se intenta que el alumno, una vez teniendo varios conocimientos matemáticos, en especial del área de funciones, sea capaz de observar un proceso y que lo describa a través de una función, de una ecuación, de figuras geométricas, etc. (Blum, Drüke-Noe, Hartung y Köller, 2007; Maaß, 2007).

Entonces la modelación es el proceso por el cual se intenta obtener un modelo y es en la modelación, donde la memoria y las capacidades juegan un rol especial dentro del desarrollo del PM, es una especie de prueba para el individuo y sus conocimientos, esto es, la modelación puede ser tratada como una competencia, que debería desarrollarse durante o después de haber almacenado en la memoria los conceptos necesarios para responder a una pregunta que está relacionada con la modelación (Blum et al., 2007).

Cabe destacar, que en general, en los colegios se "enseña"[104] a modelar después de haber enseñado funciones, aquí no es relevante él cuando, sino que la confrontación entre un método y una posible estrategia, esto es, la modelación es vista como método de describir la realidad, pero podría ser vista como una estrategia. Más aún, la modelación está muy cercana a lo que sería una metáfora de la realidad.

En la figura 7, se muestra el ciclo de como se ve el proceso de la modelación en la educación matemática, donde Maaß (2004; 2007) aclara que es necesario agregar aún una validación desde la situación real y que este modelo es exclusivo para los problemas que son tratados en la enseñanza de la matemática en una sala de clases. Es en este punto donde aparecen varias críticas, relacionadas con la "creación" de problemas que finalmente son ficticios y no describen ninguna situación real (Meyerhöfer, s. a.).

Con esto, no se debe dejar de lado problemas que desarrollan la fantasía, como situaciones que no son reales, como por ejemplo incluir a monstruos, hadas, por nombrar algunos, donde se entiende que el mundo no es real y quizás se podría modelar otra situación.

Con esto, se quiere decir que, lo real debe estar cercano a lo real y lo que no es real debe quedar de forma explícita en el problema.

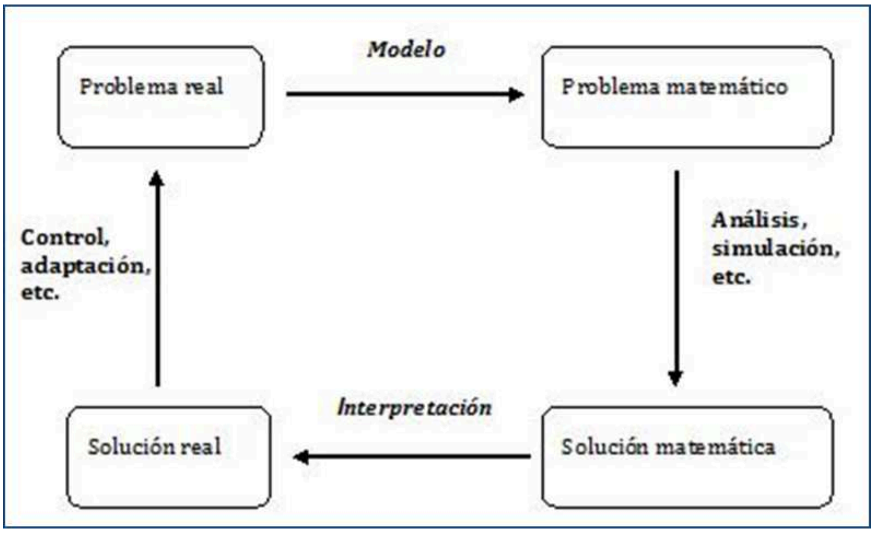


Figura 7: Proceso cíclico de modelación.

Parte del modelo de Maaß (2007, pág. 13).

Finalmente, empleamos la palabra modelo cómo "una representación analógica de la realidad" (Castro, 2001, p. 36). Éste modelo constituye una representación abstracta de cierto aspecto de la realidad y tiene una estructura que está formada por los elementos que

[104] *En la región de Baviera, está considerado dentro de los planes de estudio de la Sekundarstufe I y II.*

caracterizan, tanto el aspecto de la realidad modelado como las relaciones entre estos elementos. Los modelos sirven para ordenar y simplificar nuestra apreciación de la realidad y más aún, representan algunas o varías características.

Sobre estos ejemplos, destaca el comentado por Meyerhöfer (s.a.), que estuvo en la prueba PISA 2003, en el cual se le da una foto al alumno y se les da también un bosquejo que eventualmente ha realizado alguna compañera de la clase y se le pide con estos dos dibujos y los datos que estos contienen, responder a preguntas relacionadas con el área del ático y otros. Creemos que, este no es un problema de modelación, se ha utilizado si en su construcción la modelación, pero no ha sido el alumno el que lo ha realizado y seguro que tampoco alguna de sus compañeras. Otro tipo de problema, que está relacionado con modelar, es el de dos velas prendidas, de diferentes tamaños y que se queman a velocidades distintas, por ejemplo vela A tiene 36 cm. de largo y se quema a una velocidad de 3 cm. por hora y la vela B, que tiene 10 cm. de largo y se quema a unos 10 cm. por hora. Se pregunta cuando las dos velas tendrán el mismo largo y los alumnos deben mostrar la ecuación que describe el proceso. Este es un problema de modelación clásico, donde hay que modelar algo que podría ocurrir en la realidad, se podría de cierta forma hacer un experimento con la intención de obtener datos reales y de ahí obtener las ecuaciones correspondientes. En este problema hay una relación que es más importante y una variable que quizás sea más interesante de discutir que es la del diámetro de la vela o del material de la vela, para que una se queme más rápido que la otra y de ahí proceder con una modelación, que seguramente requerirá de otros elementos y que por lo tanto harían del problema una situación más rica para el PM.

Otros problemas de modelación, que tienen el carácter de abiertos, son los propuestos por Maaß (2007), como por ejemplo, al empezar una clase con algún extracto de algún diario que diga algo sobre el diario vivir de los chilenos y de los alemanes, como por ejemplo que los alemanes solo viven para trabajar, al contrario de los chilenos, con esto se pueden acotar variables como promedio de vida, horas de trabajo, vacaciones, horas libres, etc. y modelar la “vida promedio” de ambas nacionalidades, se pueden incluir la variable hombre o mujer y así desde una discusión sobre las variables y la forma de vida de dos culturas diferentes se podrá obtener un cálculo y resultados bastantes concretos (entendiendo que se obtiene siempre algo en promedio) frente a un tema bastante amplio, se puede agregar una pequeña investigación para obtener datos más certeros sobre el promedio de horas que trabajan en cada país y así tener una discusión final más contundente. Temas como los recursos naturales, donde hay información en la red, se prestan muy bien para la modelación, como por ejemplo sobre el consumo del agua o las reservas de gas y la cantidad de habitantes de una determinada ciudad, pueblo o incluso el mismo colegio, cantidad de CO_2 que una persona “emite” al usar diferentes medios de transporte, en todos los problemas relacionados con las reservas naturales y su consumo, puede haber una componente ecológica que se puede discutir en conjunto con la clase de biología o del medio ambiente. Problemas relacionados con dinero y economía también pueden ser tratados, como por ejemplo, la compra de un teléfono celular con dos diferentes planes mensuales y con un pago inicial, situaciones de mujeres embarazadas, caminos con bicicletas y a pie en minutos desde la casa al colegio, basados en datos reales de los alumnos de la clase, vida y muerte de un tipo de araña de casa, de pulga o de piojos, el problema puede estar basado también en el territorio en cm. o mm. Problemas basados en las posibilidades de construcción de un mueble de cierta medida concreta, dadas una cierta cantidad de piezas diferentes (Maaß, 2007, pág. 47), problemas de vuelos y horarios, construcción y costos de una casa nueva, remodelación de la casa, etc.

Así la modelación permite al alumno ver que hay información que es necesaria y que puede ser incluida en el problema y hay otra información que es necesaria pero no puede ser incluida en una ecuación, es decir, el alumno diferencia tipos de información, selecciona y la ordena. El alumno aprende a discutir en base a datos que están en promedio o que son estrictos y que dicen algo en concreto con respecto a una situación. El alumno verá que en matemática no es siempre necesario tener una única respuesta correcta y que esta respuesta más bien proviene de las relaciones que hay entre las variables y que para poder modelar y obtener un resultado “convincente” hace falta más de una hora de clase. Problemas que son planteados de otra forma como por ejemplo, encuentre ecuaciones que tienen como solución a $x = 3$, le darán la posibilidad al alumno de enfrentarse a la estrategia del trabajo al revés y la vez, modelar una situación novedosa para él.

3.7. NOCIONES BÁSICAS (GRUNDVORSTELLUNGEN).

La concepción que hoy en día se conoce sobre las *nociones básicas* en matemáticas, tiene una trayectoria de más de doscientos años de historia en la pedagogía alemana (vom Hofe, 1995). Empezando por Pestalozzi (1803) y su teoría sobre educación a través de la generación de ideas de la noción de concepto, pasando por Herbart (1887) y su Teoría de los puntos de vista, por Kühnel (1920) que trata de desarrollar en base a estas dos teorías el trabajo personal de los alumnos y no promover la pasividad intelectual del individuo en clases de matemática. Este último pedagogo, promueve entre otras cosas, al alumno que genera representaciones que lo “mueven” (en el sentido de que lo impactan, el estudiante siente que esta pasando algo en lo cognitivo) a él, como sujeto, desde la realidad a la matemática y viceversa. Llamando a estas representaciones, “representaciones representadas”[105], llegando de esta forma a los primeros inicios de la Teoría de las *nociones básicas* dadas por Oehl (1967).

En particular, las *nociones básicas* describen relaciones entre contenidos matemáticos y el fenómeno de la formación individual de conceptos. Esta Teoría considera estas descripciones en los siguientes tres aspectos (vom Hofe, 1995):

1. Construcción de ideas o representaciones internas, que permitan una acción operativa de la misma a nivel representativo (Abstracto). En otras palabras, con esta construcción de una representación o idea, se debería poder plantear y resolver problemas de forma mental.
2. En la constitución de un sentido. Un sentido [106] de un concepto matemático será establecido y construido. Este sentido estará basado y vinculado, en relaciones de propiedades o a contextos de acción, ya conocidos.
3. Capacidad de aplicación de la idea básica de un concepto a la realidad.

Con estos tres aspectos, se puede decir que las nociones básicas son la base para el pensamiento matemático, estas permiten una relación entre el concepto matemático, la realidad del individuo y el proceso por el cual se construye los conocimientos, de la misma forma que lo hacen las metáforas conceptuales (sección 3.3). También se puede decir, que estas nociones básicas y sus representaciones representables, son como las metáforas conceptuales y que dependerá desde el punto que sean vistas, si desde el alumno o desde el profesor, lo que hará una pequeña y natural diferencia. Por ejemplo, hoy en día en la región Bávara, los estudiantes para profesor de matemática tienen la posibilidad de aprender una lista de estas nociones básicas, con la intención de transmitírselas a sus alumnos, es decir, no se enseña aún Metodologías para dejar que los alumnos construyan sus nociones básicas, pero es claro que para los estudiantes y para los profesores el proceso es otro y ellos si tienen la posibilidad de construirlas o de hacerse alguna nueva idea básica de algún concepto matemático.

Vom Hofe (1996; 1998), aclara que las *nociones básicas* son temas que deberían ser en su mayor parte tratados en la educación básica, es decir dentro de los primeros cuatro años de

---

[105] *Stellvertretervorstellungen.*

[106] *El autor se refiere aquí a un sentido en su acepción general de sentido, por ejemplo, tener un sentido de lo que es la multiplicación, ya sea que la multiplicación es concebida como el área de un rectángulo o como la repetición de una cantidad o como un árbol de posibilidades o como concatenación, etc.*

la educación escolar. El mismo autor distingue para estos efectos, las llamadas representaciones primarias y secundarias, las cuales serían, las metáforas conceptuales básicas y las metáforas vinculadas (Lakoff et al., 2000), respectivamente. Los ejemplos más conocidos son los dados para tres de las cuatro operaciones básicas (vom Hofe, 1995, 1996, 1998; Presmeg, 1997). Hay otros ejemplos concretos de cómo hacer que los niños de secundaria puedan desarrollar una representación representable o metáforas vinculadas, estos se pueden ver en Weber (2007). Otro intento concreto de comparar las *nociones básicas* y las metáforas, en el caso particular de los caminos al azar, es el realizado por Soto-Andrade y Reyes-Santander (2011).

De estos ejemplos, es interesante ver como la multiplicación es vista también como *nociones básica* para un cierto ritmo, por ejemplo, aplaudir cada tres tiempos. Esto es el alumno cuenta uno, dos y aplaude, si al mismo tiempo la profesora cuenta de uno en uno, el alumno se dará cuenta (se pueden probar otros métodos), que sus aplausos coinciden con los múltiplos de 3 (en su defecto con los múltiplos de dos). Lo más probable es que a esa altura el niño no sepa cuáles son los múltiplos de tres, pero tendrá una idea de que esos números estarán relacionados de tres en tres o mejor aún, que cada vez que sume tres obtendrá un aplauso.

Padberg (2005), considera por lo menos dos tipos de estas nociones para la multiplicación. La multiplicación como acciones temporales-sucesivas, donde se ve la componente dinámica de la multiplicación, como una repetición en el tiempo de una acción como el aplauso mencionado anteriormente y que se entiende en forma verbal una vez, dos veces, tres veces, etc. y la multiplicación como un arreglo espacial-simultaneo, en este caso, se comprueba de forma simultánea y de forma estática la cantidad, como por ejemplo, cuando ya se han ordenado doce círculos en tres por cuatro círculos sobre un papel. Ambas nociones están relacionadas, una conlleva al desarrollo de la otra. Soto-Andrade (2006), propone otra *idea básica*, que es la de ver la multiplicación como un árbol de posibilidades, esta misma *idea básica*, también sirve para la transferencia de la multiplicación de enteros a multiplicación con fracciones. *Nociones básicas* para la división serían los conceptos de repartir, distribuir, etc.

Finalmente se puede ver que las *nociones básicas* son un medio para enseñar, como han sido utilizadas hasta ahora y que también responden a una conexión entre el mundo real y la generación de conocimientos, de la misma forma como las metáforas conceptuales (sección 3.3).

3.8. MATEMÁTICA Y PERCEPCIÓN.

"Todos los conceptos humanos y
por lo tanto también los de la ciencia,
son solo huellas y transformaciones
de puntos de vistas y de sentimientos
vivos y frescos."

Jacobi 1743-1819.[107]

La percepción es el medio que permite tener el primer conocimeinto de un objeto y este primer conocimiento se hace a su vez por medio de los sentidos. La percepción tiene una influencia significante sobre sobre el desarrollo de la imaginación (Maier, 1999) y por lo tanto sobre las representaciones mentales. Es a través de la percepción, donde empieza el contacto con el mundo y con las relaciones que se pueden hacer con él y de él. En matemática la percepcion es y debe ser igual de importante, no se puede pensar que con el trabajo abstracto, se pierde de alguna forma la parte perceptual del medio, de los objetos y de los movimientos. Esta percepción del medio se realiza a través de los sentidos que tiene todo ser humano y que como se ha visto no se limitan a la vista y se hace constantemente durante cualquier proceso. Para ahondar en este tema, nos referiremos a los sentidos que se han visto ya en la sección 2.6. y estos en relación a la matemática.

Una ejemplificación de la percepción en matemática y su importancia se tiene en el desarrollo del concepto de número. Este se inicia con la orientación en el espacio y emana-proviene del desarrollo evolutivo del hombre (Dehaene et al., 2011). La conciencia del cuerpo es tan importante, que incluso es un requisito previo para la adquisición del concepto de número. Si un niño se mueve, pone su cuerpo en relación con el entorno, haciendo de esta forma las bases para la adquisición del concepto de número, ya que debe haber una conexión entre el movimiento, la percepción y la actividad que se produce, para que el entendimiento se produzca y las soluciones sean encontradas (Thomas y Lleras, 2009). Según Dehaene y Brannon (2011), en el curso de la evolución tanto hombres como animales han internalizado codigos y operaciones que son isomorfas[108] a las leyes de la física y de la aritmetica, que gobiernan la interacción entre los objetos del mundo exterior, esto quiere decir, primero que se puede decir que las leyes de la aritmetica son capacidades inherentes al hombre y que su desarrollo dependerá de la percepción que el indidviduo

---

[107] *Citado en vom Hofe, 1995, pág 30.*

[108] *El autor utiliza la palabra "isomorphic".*

tenga, del medio que lo rodea. En esta percepción hay varios sentidos que están en juego, sentimientos y emociones, como ya vimos anteriormente, aquí se considerarán algunos de los sentidos de Steiner (2009), para ejemplificar la relación entre la percepción y la matemática.

Volviendo a la ejemplificación del desarrollo del sentido del número, se tiene que una de las capacidades que provienen de este sentido, es conocer la diferencia entre uno dos o tres objetos, los individuos saben que un conjunto con tres objetos tiene mas que un conjunto con dos objetos, según Dehaene (1999) y Devlin (2006), se nace con esta capacidad y no se necesita aprenderla. Hay otras capacidades que se desarrollan a partir de este sentido del número y su capacidad de diferenciar entre más y menos, como por ejemplo contar hasta una cierta cantidad y poder saber que esta cantidad es invariante.

Otro ejemplo de percepción es el que se tiene en el sentido de la palabra, este es uno de los sentidos considerados externos, el ser humano reacciona a las palabras, de diferentes formas, en clases de matemática, el profesor dirá “cuadrado” y el alumno, a pesar de que la palabra le llega a través del sentido auditivo, su efecto en el sentido de la palabra, producirá sensaciones que lo conducirán a “representar algo”, que su sentido de la palabra ha percibido. Un ejercicio que se puede practicar con niños de educación básica es el siguiente: Se pone en una bolsa de género, recortes de cuadrados de diferentes tamaños y colores y se les pide a los niños, que sin abrir la bolsa, describan el objeto que están tocando, (es muy probable que ellos ya sepan que es un cuadrado, en este caso, se les pedirá no decir la palabra “cuadrado”), con esto se estará fomentando la percepción de un objeto, con una representación proveniente de la percepción del objeto y con una serie de características que definen el objeto. El sentido de la palabra, da un sentido al conjunto de letras que se han escuchado, le da forma y unas determinadas representaciones, que pueden ser utilizadas.

El sentido de la palabra permite relacionar la palabra “función” con las palabras “práctico”, “rápido”, etc. sin realmente entrar en una composición metafórica entre función y “practicidad”. Es el sentido de la palabra (casi intuitivo) el que nos “indica” que estas dos palabras podrían estar relacionadas. Mientras más desarrollado este el sentido de la palabra, más relaciones se pueden hacer y con esto mas representaciones personales de los objetos y conceptos matemáticos. Para fomentar el sentido de las plabaras y de los símbolos se sugieren juegos de creación de idiomas secretos, que debería ser utilizados como medio de comunicación, este juego lo hacen de forma natural niños, que han escuchado otro idioma y que después dicen hablarlo, este debe ser secreto, para que los padres no los entiendan, pero en una sala de clases, se podrían hacer grupos distintos y cada grupo debería hacer su propio idioma y después tratar de comprender al otro grupo, este tipo de juegos, se debería desarrollar por un semestre o un año, no hace ningún sentido el hacer este tipo de juego en un día, ya que, el juego es bastante complejo en cuanto a los procesos cognitvos y a lo que se espera lograr. El sentido que esta ligado a este sentido de la palabra sería el oído, en el caso de no ser sordo, pero para los sordos este sentido estaría mas ligado con la vista y el movimiento.

El sentido del equilibrio, es uno de los sentidos considerados como internos y es de vital importancia en la comprensión del concepto de ecuación e inecuación. Este sentido se empieza a desarrollar con la percepción de la localización espacial y con la idea de lateralidad, que es la conciencia interna de las dos mitades del cuerpo y sus diferencias. El eje longitudinal del cuerpo y el eje transversal son las coordenadas para ello. El sentido kinestésico interior con el que percibimos nuestras acciones y que finalmente se proyecta hacia el exterior, nos permite ubicarnos en el espacio y lograr un equilibrio físico. También la percepción de las formas y la integración de características, proviene o lo permite el sentido de la dirección, este a su vez es mediado por la percepción táctil-kinestésica de la mano y el ojo (Kephart, 1994; Preiß, 1996).

La percepción del espacio es según Maier (1999, pág. 123), una de las capacidades centrales que influencia la percepción con el medio y por lo tanto con las representaciones e interacciones que se hacen con y de él. Con esta capacidad se puede percibir y describir distintos objetos del espacio, en especial de figuras y cuerpos geométricos, como el cubo. Más aún, si el niño ha logrado por medio de diferentes juegos el control de su lateralidad, entonces podrá tener indicios firmes de la ubicación de objetos tridimensionales en el espacio (Preiß, 1996). Para el aprendizaje escolar, es necesario transformar los datos, una vez en el espacio vertical de dos dimensiones de la mesa, y en segundo lugar, el espacio horizontal de dos dimensiones del libro. Este es el espacio-situación-conciencia, que es particularmente importante para el pensamiento matemático. Especialmente en relación con la "relación-traspaso" de las representaciones verticales y horizontales. El niño aprende el primer cuarto, en relación con su propia persona como un espacio egocéntrico. Sólo más tarde se llegará a las relaciones entre los objetos. Sólo si el niño tiene una experiencia estable del espacio, tendrá una percepción relacionada matemáticamente entre objetos en tres dimensiones (ibídem, 1996). Según Reeves (1996), el sentido visual, juega un rol importante en la captación del espacio, agregando que no tan solo son las intensidades de luz, las que se reconocen, sino que también son los patrones entre contrastes. Este reconocimiento de patrones, en la captación de la información espacial, habrá una nueva discusión sobre la importancia del sentido visual y la educación por visualización.

Para el desarrollo del sentido del espacio a temprana edad hay variados juegos del tipo enactiva (Bucher, 2000), como el ir de ciegos, ubicarse según un listado de sentencias del tipo derecha, izquierda, arriba, abajo de tal o cual objeto; otros del tipo icónico sería la búsqueda del tesoro o describir donde se encuentra un objeto determinado, etc. Para los niños más grandes, es importante seguir relacionando matemática con movimiento, por ejemplo si se cuenta hacia atrás, caminar la misma cantidad hacia atrás, si se cuenta hacia adelante, caminar hacia adelante, etc. Encontrar posibilidades de caminar de lado, como se describe esta situación, en relación al movimiento de los pies con contar, etc. Dejar que los niños encuentren una forma de describir el espacio a través de números o de coordenadas derecha e izquierda, determinar qué o quién es el centro (variable o fijo), hacer este tipo de actividades en el patio, le permitirá al niño desarrollar su idea de espacio y de la relación con los números. También se pueden encontrar actividades para relacionar peso (cantidad) y espacio. Si no hay experiencias en el espacio, será cada vez más difícil encontrar estas relaciones y por lo tanto será difícil hacer representaciones propias de las situaciones problemas.

Para jóvenes, se puede desarrollar este sentido, entre otros juegos posibles, con el juego del dado, se les pide cerrar los ojos, la profesora tiene un dado en su mano y les dice a los jóvenes cual es el número que está arriba y cuál es el que está al lado derecho de ella, a continuación se gira el dado una vez a la derecha y otra a la izquierda y se les pregunta cuál es el número que se encuentra arriba, es posible hacer variaciones de este juego y probar la máxima cantidad de giros

El sentido del equilibrio, como se mencionaba anteriormente, permite también, la formación de representaciones mentales adecuadas, en el caso de la solución de ecuaciones. El caso clásico es la representación de una ecuación como una pesa en equilibrio, se muestra una posibilidad de relacionar el modo enactivo, icónico y simbólico con la generación de la representación de una ecuación como pesa, que permitirá junto con otros componentes el obtener una solución de la situación planteada.

En una situación propuesta por Luis Radford[109], que se realizó en Ontario, Canadá, se propone la utilización de sobres para introducir el concepto de ecuación y de su solución. En esta situación, hay dos mesas y sobre ellas hay sobres con una cierta cantidad de cartas (naipes) y por supuesto que hay la misma cantidad en la otra mesa (equilibrio), repartidos en sobres y algunas cartas de naipe sobre la mesa. Los jóvenes tienen que descubrir

[109] *Sin publicar abiertamente, ya que se trató de un proyecto cerrado, comentarios del mismo autor.*

cuantos naipes hay dentro de un sobre, esto es solo posible si el alumno tiene desarrollado el sentido del equilibrio, en todos sus aspectos, debe haber lo mismo aquí y allá, ¿que es lo que se debe hacer para no destruir el equilibrio y llegar a la respuesta?

¿Qué ocurre cuando el niño no tiene desarrollado el sentido del equilibrio? Es muy probable que el alumno resuelva inecuaciones antes que las ecuaciones y en este caso, se deberá preguntar sobre cuál es más pesado, donde hay más naipes y sobre las razones, cuánto más pesado, etc.

En otra situación propuesta y desarrollada en un seminario, dirigido por la autora de este trabajo, con tema central en el aprendizaje por descubrimiento, dictado en la Universidad de Augsburgo, se propone el desarrollo del sentido del equilibrio, en particular el equilibrio del cuerpo y del equilibrio entre la mano derecha y la izquierda, esto considerando cajas de fósforos y rellenadas con porotos (alubias), para introducir la idea básica de ecuación. La idea básica es igual a la de introducir ecuaciones con una "pesa", pero en este caso se ha incluido el sentido del equilibrio, una percepción corporal para la misma idea básica.

El sentido del movimiento tiene un vínculo estrecho con el pensamiento matemático. Los diferentes movimientos que un niño domina, le darán más precisión y amplitud a su mapa corporal. Una de las bases del pensamiento matemático será entonces la percepción y una de las características será entonces el movimiento. Si un niño no ha desarrollado su mundo espacial en movimiento de forma adecuada, tendrá dificultad para agrupar racionalmente los fenómenos, ya que las agrupaciones sólo existen en el espacio y en el tiempo (Kephart, 1994, pág. 11). De la misma forma ocurrirá con los conceptos de rotación, traslación, reflexión, división, distribución, etc.

Para desarrollar desde temprana edad el sentido del número y su percepción, Bucher (2000) recomienda, algunos juegos como el reconocimiento de personas u objetos que están debajo de un paño que los cubre; la misma idea pero con las manos de varios niños (los niños pueden estar con guantes y poner ambas manos o solo una, etc.); el juego de perseguir la colita, a un niño se le pega con cinta adhesiva una cuerda larga y los niños tratan de pisarla, en este caso relacionan movimiento del niño con movimiento de la cuerda. Según la edad de los niños se podrían hacer dibujos que describan la situación y permitan pasar al nivel icónico. También se deberían combinar estos juegos con la constancia y variabilidad de la cantidad (Piaget, 1999), describir esta constancia o invariancia en palabras o por medio de dibujos, le ayudará al niño a entender lo que está percibiendo y tratará de expresar su "percepción" de lo que es la cantidad y sus variabilidades. Un lote o grupo de objetos es concebible sólo si su valor total no ha cambiado, un número (cantidad) es evidente, sólo en la medida en que es independiente de lo que se haga en el juego, esta cantidad se conserva y por otro lado, depende de lo que se haga esta cantidad varia.

Para desarrollar la percepción por medio del cuerpo de formas y figuras, se proponen juegos (Bucher, 2000; Kökenberger, 2000) como el pintado con el dedo, un niño deberá dibujar con el dedo sobre la espalda de otro niño, una figura elegida por el mismo, el niño que percibe la figura tratará de reproducirla, ya sea con palabras o por medio de dibujos; juegos de discriminar formas iguales pero de distinto color, dentro del mismo colegio buscar y distinguir formas y discutir sobre las diferencias en color, tamaño, forma, etc. También es interesante observar, que una gran diferencia en percibir los objetos lo da el hecho de la presencia o ausencia de movimiento. Una suma se puede mirar de forma estática, si el dibujo para sumar está realizado con objetos que no se mueven, por ejemplo frutas, objetos, etc. No es lo mismo si se consideran animales estáticos o en movimiento, como por ejemplo conejos que llegan a la “jaula”, o a la “casa de conejitos” o que se van de un lugar, o bien buscar lo misma “sensación” de movimiento con un dibujo de una piscina y niños que saltan a ella; de esta forma la suma se podrá representar como una acción en el tiempo de agregar objetos.

Hoy en día, es ampliamente aceptado que los seres humanos heredan capacidades específicas para el procesamiento de una cantidad de información (Butterworth, 2010), sin embargo aún no esta claro cual es la naturaleza de la capacidad “aritmetica” y si es esta la que justamente nos permite determinar una cierta cantidad en una pregunta de operatoria. Por lo que se ha visto, hay aún algo mas básico en el pensamiento y que son nuestros sentidos, es a través de ellos y de como se han ido desarrollando, lo que permite determinar cuanto, donde, como, para que y porque de los objetos. Más aún, en el último trabajo de Dehaene et al. (2011) se intenta determinar si la tripleta espacio, tiempo y número es una capacidad inherente al hombre y que se tiene incorporada como un proceso evolutivo del hombre.

Finalmente se puede decir que el PM se debe diagnosticar y fomentar siempre en relación con la percepción, con los sentidos que estan en juego y con todas las capacidades, las desarrollables y las inherentes. Así el PM, no es PM, si es que a este no se le considera como una de sus componentes la percepción, con todo lo subjetivo que este término conlleva.

3.9. EL ESPÍRITU MATEMÁTICO.

Una de las herramientas que utiliza el hombre mientras piensa y que no es tan fácil de describir es la fantasía y en general, las capacidades que provienen de nuestro lado no racional. Muchas cosas que han sido primero pensadas y luego creadas por el hombre son producto directo de la fantasía y formuladas por los diferentes pensamientos que se han visto hasta ahora. Cuando un matemático y muchos de nuestros alumnos, están en la búsqueda de respuestas, la fantasía y por lo tanto la creatividad, están en acción en esos pensamientos. De acuerdo a nuestra experiencia, desde temprana edad, este tipo de acciones y pensamientos son erróneamente manipulados y de esta forma los jóvenes dejan de lado la fantasía y la creatividad productiva, haciendo de esto más bien una forma anárquica de acción, es decir, se confunde la fantasía y la creatividad con actos que tienen más relación con estar en contra de la sociedad.

Otra de las actividades que realiza el ser humano es la toma de decisiones y esta toma de decisiones está fuertemente relacionada con el sentido común que tiene el individuo, este sentido común es en general siempre dejado a la familia y a la sociedad, pero no es trabajado en clases de matemática, siendo que es en matemática y en los problemas escolares, donde más se podría practicar lo del sentido común. La existencia de una gran cantidad de problemas de planteo que están totalmente fuera de todo lo que el sentido común dicta y una crítica abierta y responsable, permitiría incluso mejorar la calidad de los problemas que se desarrollan en clases.

Una de las actividades más conflictivas, pero necesarias en el proceso de pensar en un determinado problema y en vivir una experiencia de la cual se quiere extraer un problema, es la concentración que el individuo está poniendo de su parte en tal actividad. Se tiende a creer, que la concentración de un individuo está relacionada con la inactividad corpórea del mismo, esto es, mientras más quieto está el niño más concentrado estará en lo que escucha o en lo que ve. Lamentablemente esto conduce a que en clases no tenemos niños concentrados ya que están pensando en otra cosa y peor aún se siguen moviendo. Concentración está ligada con la atención y con el interés del alumno, se ha visto en el segundo capítulo, que esto solo es posible si el alumno participa de forma activa en clases, esto significa, entre otras cosas, que el alumno debe estar en movimiento, que debe hacer algo concreto, con material concreto y con movimientos del cuerpo, que no se limiten solo al escribir, el interés sobre algo se puede desarrollar dando libertad de acción, en su sentido más amplio y con sentido común.

En esta misma línea, están los trabajos de Bruner (1971), que proponen el paso por tres etapas, donde la primera involucra una actividad concreta y enactiva (que según lo que se ha visto, la etapa concreta que describe Piaget (1999), dura hasta los 11 años aproximadamente) debería ser alargado a toda la vida. Esto es, la etapa concreta y enactiva en el aprendizaje, debería ser considerada durante toda la vida del individuo, así la utilización de lo concreto versus lo abstracto, dependería de otros factores y no de la edad del desarrollo del niño.

Con lo anterior, se dice que la fantasía, el sentido común y el interés, influyen y son parte del pensamiento, por lo tanto deberían ser incluidos en la caracterización del PM. Es también, parte de la labor docente el desarrollar estos factores del pensamiento en nuestras salas de clase, existiendo hoy en día, la corriente pedagógica basada en el aprendizaje por descubrimiento y sus trabajos en proyectos, que ha logrado romper de cierta forma con el paradigma de la clase tradicional. La fantasía como una capacidad no racional, será agregada en el modelo, ver sección 4.4.e., donde también se considerarán la sensibilidad, la flexibilidad, la intuición y la creatividad.

3.10. CAPACIDADES MATEMÁTICAS.

En genereal concepto de capacidad es definida como una categoría que describe los resultados de los procesos de aprendizaje en lugar de interpretarlos, una categoría para la clasificación de ciertos tipos de conductas que evolucionan en el curso de los procesos de aprendizaje en la escuela. De acuerdo con esta definición, la capacidad matemática de los estudiantes al entrar en la escuela es, en efecto, sin excepción, casi nula, y los objetivos de la enseñanza es cada vez definir un nivel de capacidad de forma acumulativa a lo largo de los años de la escuela. (Damerow, 1996)

Esta definición no esta libre de críticas (ibidem, 1996). Primero, la capacidad matemática esta estrictamente restringida al entorno escolar, un sujeto es capaz en matemática solo cuando el sujeto resuelve los problemas matemáticos que han sido estudiado o trabajado en la escuela. Es entonces, el profesor el que decide cuales son los problemas que se deben trabajar, por lo tanto, es a nivel del profesor de la clase, la capacidad matemática que desarrollará el sujeto. Segundo, el profesor trabaja en sus clases con representaciones semióticas y no con representaciones mentales que podrian generar los individuos, estas representaciones son en general siempre dadas por los profesores y tercero, los problemas en una clase de matemáticas son diseñados con un número limitado de símbolos, signos y términos. Según esto, las capacidades matemáticas que el alumno lográ desarrollar serían bastantes pocas y directamente relacionadas con las capacidades del profesor. Según las secciones que se han tratado hasta este momento las capacidades matemáticas podrían ser más, en cantidad, más amplias y dependerían más bien del desarrollo del alumno en su medio social, cultural y economico, más que de las capacidades del profesor, sobre estas capacidades matemáticas se volverá en el capítulo 4, de la caracterización del PM.

Algunas de estas capacidades generales, que se deberán tener en cuenta y que se han visto en secciones anteriores, se puede nombrar una de las más básicas, a saber, la capacidad de pensar en y con imagenes de cualquier tipo (esto es algo que hace todo el mundo a consciencia y/o incosciente), la capacidad de concentración, de abstracción, espacial, de relacionar, de hacer analogías, de hacer estimaciones (intuición), de percibir los movimientos, de expresarse, de comparar, de distinguir, de orientación, de análisis, de utilizar el pensamiento lógico, de modelar, de hacer combinaciones, de percibir magnitudes, de desarrollar estrategias, de hacer y aprender, de aprender de los errores, etc.

3.11. EL MODELO DE AUGSBURGO PARA EL PM.

Uno de los intentos de caracterizar el pensamiento matemático es el que se realizó en conjunto con dos colegas del equipo de la Universidad de Augsburgo, el cual estuvo limitado solo a las capacidades que podían ser generadas en las clases de matemáticas modernas y/o tradicionales, es decir, clases que están preparadas desde un punto de vista didáctico de hoy en DIA, pero cerradas a las posturas provenientes de la psicología cognitiva.

El modelo de Augsburgo (Ulm, 2010), está compuesto por tres grandes agrupaciones de conceptos, como lo son los pensamientos basados en los procesos, los pensamientos basados en los contenidos y los pensamientos basados en procesos de la información. Una de las intenciones de este trabajo es terminar y completar este modelo, ver figura 8. Cabe destacar que este modelo fue la primera versión de la caracterización que a.C. presento, es decir, el modelo de Augsburgo es una versión preliminar de la caracterización del pensamiento matemático y algunas de las definiciones que se presentan a continuación están basadas en los capítulos y secciones anteriores.

Uno de los componentes que aparece en la figura 8, es la relacionada con los pensamientos basados en los contenidos, como por ejemplo, los relacionados con el pensamiento numérico, en este trabajo se han agregado además, lo que de esto se deriva, como las representaciones básicas que se tienen de los números, sus operaciones y la capacidad numérica. En este trabajo, también se considera el pensamiento geométrico y lo que de esto se deriva, como por ejemplo, formas conceptos e imágenes mentales de figuras en el plano o de cuerpos en el espacio, como también la transformación de imágenes planas a imágenes en el espacio y vice-versa, pensamientos relacionados con objetos y con transformaciones que se pueden hacer en el plano y en el espacio, además se han dado algunos ejemplos de estrategias basadas en algunos de estos conceptos.

Según Hefendehl- Hebeker (2007) y Ulm (2010) el pensamiento algebraico, está relacionado con todos los pensamientos relacionados con las representaciones que se hacen sobre variables, sobre las reglas de un conjunto, al utilizar estas reglas y en particular al utilizar estas reglas en la solución de ecuaciones. Según el mismo autor, el pensamiento estocástico, está relacionado con las situaciones de combinaciones, las situaciones donde se describen las probabilidades de que algo ocurra y el trabajo con la estadística. Donde el autor agrega que el pensamiento funcional, está relacionado con la comprensión de la relación causa-efecto o con relaciones funcionales, es decir, con la dependencia de una variable causa con respecto a la variable-efecto.

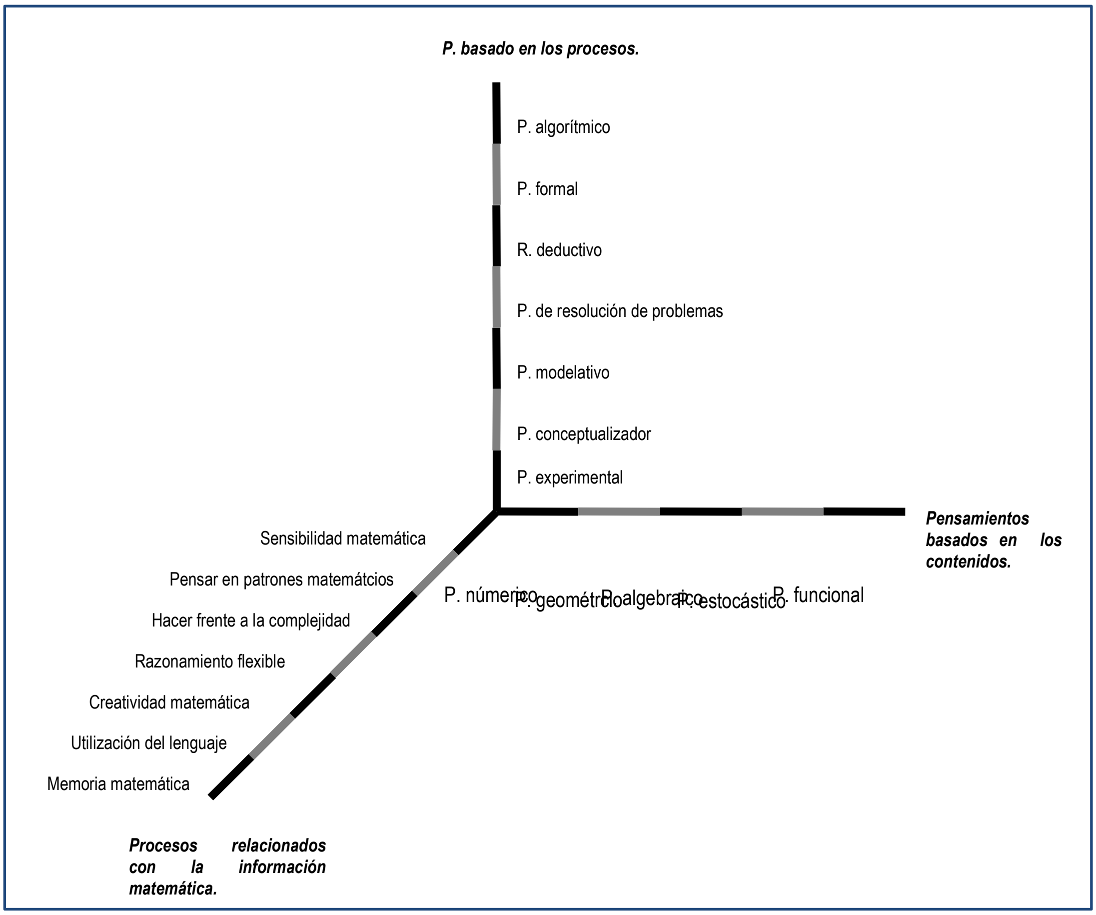


Figura 8: Facetas del pensamiento matemático.

(Ulm, 2010, pág. 4). [110]

[110] *Traducción de la autora.*

Creemos que una denominación nueva del pensamiento relacionado con los contenidos, sería solo una cuestión de nombres, ya que en la realidad el pensamiento numérico, el pensamiento geométrico, el pensamiento algebraico, el pensamiento estocástico y el pensamiento funcional están entre si fuertemente relacionados con el contenido y entre ellos y el intentar hacer una nueva clasificación de ellos y/o una nueva separación, no daría ningún nuevo resultado. Más aún, sacar una conclusión del aprendizaje de un individuo en base a esta clasificación, daría un resultado parcial sobre las capacidades del sujeto; ya que, los diferentes tipos de pensamientos son utilizados de forma caótica en la búsqueda de respuestas y no de forma parcializada.

Otro de los componentes que aparecen en este modelo, es la relacionada con el pensamiento y los procesos. Según este trabajo, esta componente estaría ligada con los procesos cognitivos y las estrategias que el individuo podría ir desarrollando. Dentro de esta componente, según el modelo de Augsburgo, están la experimentación y que según este trabajo es parte de la estrategia llamada prueba sistemática y parte de la estrategia denominada trabajo hacia atrás, es decir, la palabra experimentación ha sido en este trabajo especificada. Otro que ha sido especificado en este trabajo es la modelación y la utilización del pensamiento lógico en la resolución de problemas (ver sección 3.6.1. hasta 3.6.10.), que en el modelo de Augsburgo están dados por dos subcomponentes, llamadas resolución de problemas y razonamiento deductivo (ver figura 8). Otra de las subcomponentes que aparece en el modelo de Augsburgo, es la llamada pensamiento formal, que trata del pensamiento basado en las representaciones semióticas y las utilización mental que se hace con estos símbolos, en este trabajo se ha ampliado este concepto a la utilización de todo tipo de representaciones y se ha denominado como un vehículo del pensamiento, por tener el rol de comunicador (ver capítulos 2 y 3).

Por último está el pensamiento asociado con el procedimiento algorítmico y los procedimientos que se utilizan en la construcción de figuras geométricas clásicas, procedimientos que son necesarios en la resolución de problemas matemáticos tradicionales.

Por último, otra de los componentes, que en este modelo se mencionan, es la del trabajo con la información matemática. Según lo que se ha visto, hasta ahora, esta componente debería recibir otro nombre, ya que, el nombre que tiene no hace una diferencia con los procesos que se mencionaban anteriormente, según las subcomponentes que aparecen en esta categoría, estos pensamiento están más relacionados con la percepción y el medio del individuo, como por ejemplo, la sensibilidad del individuo para percibir patrones, para "ver" los patrones y pensar en patrones o en secuencias que se repiten y de ahí concluir o decir cuál es la secuencia que se repite; la sensibilidad de percibir el mundo y la intención de preguntarse el porqué es así, la intención de querer guardar información matemática y la forma de guardarlas en la memoria, el amor por las figuras simétricas y por las asimétricas.

El pensamiento flexible, que en este caso está relacionado con la capacidad de cambio entre las representaciones, que se hacen desde lo activo, a lo icónico, a lo verbal y a lo simbólico. Esta flexibilidad del pensamiento está relacionada con la capacidad de apreciar de diferentes puntos de vista matemático una situación, por ejemplo mirar una situación tanto desde su aspecto geométrico como desde lo algebraico, capacidad de realizar procesos cognitivos estratégicos tanto hacia delante como hacia atrás. La creatividad matemática, como una capacidad inherente a todo ser humano, vista desde el punto de vista del interés del individuo y la generación de nuevas ideas o de nuevas asociaciones, lo que antes se denominaba, pensamiento divergente y que no es otra cosa, que ver desde otro punto de vista problemas en matemática, quebrar el marco teórico tradicional y proponer uno nuevo, hacer conexiones cruzadas y no necesariamente directas, donde la fantasía juega un rol especial y fundamental. En esta componente del trabajo de la información, está también la subcomponente utilización del lenguaje, esta componente por lo que se ha visto hasta ahora, juega un papel más importante dentro de todo el proceso cognitivo.

El lenguaje es un medio de comunicación y un medio de diálogo interno, es por esto, que esta subcomponente y la subcomponente de la memoria, estarán en otro plano de la categorización del PM y es por este rol especial que juegan estas dos componentes dentro del proceso cognitivo que en este trabajo se les ha prestado un especial interés.

3.12. ENCAPSULANDO O RESUMIENDO.

Sobre el pensamiento matemático se ha dicho bastante en diferentes contextos, en este capítulo se ha visto que parte del pensamiento matemático es la formación y la utilización de estrategias, es decir, no tan solo se utilizan estrategias mientras se resuelve un problema en matemática, sino que también hace falta generarlas en alguna situación y eventualmente guardarlas en la memoria, para su posible utilización a posterior. Se han visto aquí diferentes términos, que en la categorización del PM, estarán unos subordinados a otros, pero de todas formas siempre habrán relaciones entre estas dimensiones, es decir, las dimensiones y categorías no son independientes una de las otras en cuanto a su utilización por parte del individuo y una dimensión o categoría siempre será afectada por la otra y vice versa.

Para el desarrollo del PM es importante la memoria con todas sus capacidades, como la creación de diferentes representaciones, mentales, semióticas, concretas o abstractas, el vehículo de este proceso cognitivo es la comunicación y el diálogo, tanto interno como externo. Es decir, el lenguaje juega un papel fundamental dentro de la tripleta comunicación-aprendizaje-representación. La memoria es también la encargada de almacenar estas representaciones y de llamarlas cuando hace falta, es decir, la memoria y sus capacidades de almacenamiento y por ende la forma de comunicar estas representaciones juegan un papel básico para el PM. Es en este lugar, donde se conjugan las representaciones mentales y semióticas, es en este lugar, donde es más fácil guardar y llamar a un símbolo, que a una representación mental difusa, es en este lugar donde toma sentido la economía de las representaciones semióticas y la facilidad que se produce al ser llamadas como en una cadena de conexiones lógicas. Esto se traduce, en este trabajo como una subordinación de la memoria a las representaciones, es decir, en la categorización del PM, la categoría de la comunicación interna y externa contempla las representaciones y por ende las capacidades de la memoria del individuo.

Con lo anterior, se quiere decir que el deber del maestro cambia, en el sentido que su deber es desarrollar las capacidades de la memoria y por ende el desarrollo de representaciones. Como se vio en este capítulo (sección 3.3), es necesario no quedarse en un tipo de representaciones, sino que abarcar también, la capacidad metafórica de los alumnos, basándose en la percepción y en el desarrollo de estrategias. También se vio, en la sección 3.3, que las metáforas juegan un papel cognitivo, en otro plano diferente al de las representaciones. En un sentido las metáforas están más cerca de las representaciones mentales y de la percepción, pero tendiendo como un límite a una representación semiótica. Esto es, las metáforas son *nociones básicas* de generación personal. Es decir, las metáforas conceptuales, al decirlas o al pensarlas producen un sentimiento vivo y a la vez reproducen en la mente una representación, que es más que una idea, es una representación concreta con un sentimiento. Como menciona Núñez (2008), "...formal definitions and formal languages in mathematics, although extremely useful in the praxis of the discipline, don't capture the full content of mathematical ideas." Lo que podría indicar que existe una diferencia entre las representaciones y las metáforas. Por ser la metáfora una herramienta distinta, tanto en su papel que juega en la comunicación, como en lo que produce en el ámbito perceptual, la metáfora conceptual, está dentro de la categoría de vehículos del PM, es decir dentro de la categoría: comunicación.

Una mirada distinta de la matemática, que nos acerca a la acción corporal que debería tener el PM, es la que nos da Hilbert (1930):

> *„Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die*

> *verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, dass unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet. Schon GALILEI sagt: Die Natur kann nur der verstehen der ihre Sprache und die Zeichen kennengelernt hat, in der sie zu uns redet; diese Sprache aber ist die Mathematik, und ihre Zeichen sind die mathematischen Figuren.“* [111]

Con esto, el PM utiliza variadas herramientas una de ellas es la matemática otras provienen del medio, como las herramientas concretas, las que provienen del interior como las herramientas mentales (cognitivas) y las herramientas virtuales que provienen del desarrollo tecnológico del hombre. La forma en que un individuo utiliza estas herramientas, está ligada a las capacidades y al desarrollo social y cultural en el que este individuo está inmerso. Todas estas herramientas tienen un modo de conectarse a este modo se le ha llamado vehículos del PM. Como conectar una herramienta con otra, como hacer que ellas trabajen para un solo fin, son los vehículos de comunicación y de diálogo.

En este capítulo se ha visto que la percepción juega un papel vital en el desarrollo del PM, es más, la percepción es un factor que gatilla el proceso cognitivo que permite decir que está ocurriendo el PM. Un individuo de cualquier edad, percibe el mundo a través de sus sentidos, de esta forma se hará una representación mental que proviene desde la acción, que se ha llamado aquí como la fase enactiva de Bruner (1971). La percepción será entonces una categoría, que contemplará la forma de percibir el tiempo, la cantidad, los movimientos y los usos que se le dan en el PM, donde algunos ya se han descrito en este capítulo.

Los procesos de trabajo de la información, las estrategias y los procedimientos están directamente relacionados, de tal forma que si uno habla de desarrollo de procesos cognitivos en matemática, lo primero que se entiende es desarrollo de estrategia. Los procesos cognitivos ocurren y se desarrollan en la generación de estrategias, el proceso cognitivo llamado “memorización” es de vital importancia en la resolución de problemas, es por esto que, los procedimientos matemáticos, como los algoritmos deben ser considerados dentro de la categorización del PM, ya que estos procedimientos pueden ser realizados, solo si son recuperados de forma rápida y eficiente desde la memoria

---

[111] *Presentación en el congreso de la sociedad alemana de científicos y médicos, en Königsberg (1930), obtenido de la pág. Web:* http://www.jdm.uni-freiburg.de/JdM_files/Hilbert_Redetext.pdf

(Anderson, 1981), esto ocurre si estos procedimientos han quedado bien registrados y son fáciles de llamar. Esta forma de guardar procedimientos es, por supuesto, también una capacidad del alumno, que puede ser desarrollada, como también la capacidad de guardar y recuperar símbolos, ideas, conceptos, etc. Así, una nueva categoría del PM, es la de las estrategias y de los procedimientos, la categoría de los procesos de trabajo de la información queda en este caso subordinada a esta categoría, entendiendo que esta es más grande en su uso por parte de la psicología, pero que en el desarrollo del PM, solo quedaría reducida a las estrategias y a los procedimientos, con todas sus propiedades.

En este capítulo se ha visto también, que el conocimiento matemático es un constructo cultural, que tiene sus sistemas autónomos y que estos permiten relacionar el lenguaje, la comunicación, las representaciones y los procesos cognitivos ligados a los contenidos, así cuando se habla de pensamiento numérico, no tan solo están involucrados números, optimización, aproximaciones, etc. sino que todo lo que gatilla este proceso cognitivo, como conocimiento, conceptos, situaciones, comunicación de la clase en particular, interpretaciones individuales, representaciones, metáforas, capacidades, percepciones, intuiciones, etc. es decir, este pensamiento no es tan solo el trabajo con representaciones semióticas tradicionales, sino que todo lo que esto conlleva. Así tenemos otra de las dimensiones del PM como lo es la de los pensamientos basados en los contenidos matemáticos, que según el modelo de Augsburgo, tiene 5 categorías.

Las representaciones, las metáforas, la percepción, las estrategias y los procedimientos, los procesos no racionales y los pensamientos relacionados con los contenidos matemáticos o la información matemática, son parte de la base del PM, entendiendo que las representaciones y las metáforas están en todos los procesos cognitivos que realiza un individuo. Se verá en el siguiente capítulo, las relaciones entre estas 6 bases de la categorización del PM, donde las metáforas y las representaciones serán los vehículos de comunicación entre la percepción, las estrategias y procedimientos, los procesos no racionales y los pensamientos relacionados con los contenidos matemáticos.

Este capítulo es un intento de hacer una unificación entre la ciencia cognitiva y la matemática. También es un acercamiento a lo que propone Núñez (2008), que es el hacer de la matemática una materia de estudio de la ciencia cognitiva. Agregando, en este trabajo, que la matemática es un factor importante y que en clases de matemática, sigue teniendo el primer rol, al que se le adjunta el rol de desarrollar el PM en su forma más amplia, es decir, incluyendo las ideas de las metáforas conceptuales y de la cognición encarnada.

Capítulo 4.

4. CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

Con lo que se ha visto en el capítulo 2 y 3, estamos en condiciones de dar una respuesta a la pregunta: ¿Qué es el pensamiento matematico?

Estaría sería: “el pensamiento matemático es un proceso cognitivo activo, por lo tanto, involucra actividades neurológicas, que comprometen un diálogo interno, que relacionan y utilizan representaciones de todo tipo, capacidades racionales y no racionales, capacidades desarrolladas o por desarrollar y conocimientos almacenados en la memoria e información por almacenar. Este proceso esta relacionado con la vivencia de situaciones novedosas e interesantes para el individuo y con la búsqueda de respuestas a problemas que determina el individuo de forma personal, con el objetivo de obtener y guardar nuevos conocimientos y de esta forma construir un mundo matemático individual, con conexiones propias y con sistemas propios de llamados del conocimiento”

Uno de los resultados de este trabajo es hacer la diferencia entre medios del pensamiento y dimensiones del pensamiento. Ambas tienen el sentido de ser herramientas del pensamiento, esto es, ambas son utilizadas en el proceso, pero de diferentes formas. Como medios del PM, se tienen:

1. Los estilos de pensamientos.
2. El conocimiento matemático.
3. Los vehículos de comunicación, entre ellos las representaciones mentales, semióticas, las metáforas conceptuales y las nociones básicas en matemática.
4. La abstracción y la memoria, que estan relacionadas con las representaciones

En lo que sigue del trabajo, se hablará de los vehículos de comunicación, entendiendo que los estilos de pensamientos, la abstracción y la memoria, estan subordinados a los vehículos de comunicación. Esto se deduce de lo tratado en la sección 2.1.1.

Sobre las dimensiones del PM, se trató en el capítulo 2, lo relacionado al pensamiento humano, en la sección 2.2., 2.6, se observan dos grandes componentes del pensamiento, a saber, la componente de la percepción y de las estrategias. En el siguiente capítulo, se trató el pensamiento humano en relación a los contendios matemáticos y de ahí se observa que hay un pensamiento relacionado con el contendio matemático, más aún se observa que hay un pensamiento relacionado con capacidades no racionales.

Así, estas componentes estan agrupadas desde su procedencia cognitiva y desde su estructura, dando como resultado cuatro componentes o dimensiones, a saber:

1. La percepción, que proviene de los sentidos y en esta dimensión se destacan, la percepción del movimiento, la percepción del tiempo, la percepción del espacio y de estas tres, la percepción dinámica y estática de los objetos matemáticos, el sentido de las palabras, etc.
2. Los contenidos matemáticos, que es el producto del ser humano en la historia humana, que a su vez contempla los cinco subcomponentes que se dieron en el resumen del capítulo 3, más el pensamiento formal.
3. Las estrategias y los procedimientos, que provienen del desarrollo del individuo con el contenido y el medio. En esta dimensión se pone en juego el conocimiento y por lo tanto nuevamente la memoria tiene un papel cognitivo relevante, así como también las capacidades que son puestas en marcha en la búsqueda y desarrollo de un plan.
4. Las capacidades no racionales, que provienen del desarrollo de actividades no racionales. Esta dimensión involucra aspectos como la intuición, la creatividad, el sentido común, la fantasia, etc.

La figura 9, muestra la relación que estas dimensiones tienen, además que presenta una completación con una reordenación del modelo de Augsburgo (Ulm, 2010) y muestra en sintesis la categorización del pensamiento matemático. Se ha elegido un tetraedro[112], porque este no da prioridad a ninguno de sus lados y a ningunos de sus vértices, para esto se debe mirar la figura 9, en movimiento continuo, sin pensar que el vértice que esta en la parte superior, podría tener algún peso distinto a los otros. Así como la figura es un tetraedro, se ha denominado a esta caracterización como “modelo tetraédrico para el pensamiento matemático”.

Las dimensiones o componentes del PM, estan relacionadas de forma dependiente unas con las otras y esto se ve en la figura 9 como los cantos del tetraedro, que esta formado por cuatro vértices, que representan los componentes de percepción, de estrategias y procedimientos, procesos y capacidades no racionales y de los pensamientos asociados a los contenidos matemáticos. No es posible determinar un orden entre estas dimensiones y

[112] *Cuerpo platónico de cuatro caras y cuatro vértices, donde los lados tienen igual medida.*

entre las dimensiones, ya que estos procesos ocurren de manera cuasi instantánea y de manera organizada (solo para el individuo) en la mente del individuo, esta organización al ser única, puede ser para el resto, una manera caótica de procesos, sin orden para el resto de la comunidad. Como se ha visto, los resultados de las investigaciones y de las teorías que intentan determinar un orden en el pensamiento y en la resolución de problemas, no proporcionan un avance en la didáctica de la matemática, por lo tanto no es la intención de ordenar además esta categorización.

Por lo tanto, en este trabajo se considera que, cada uno de los cuatro vértices tiene el mismo peso, el mismo valor, no hay uno que este primero que el otro y no existe una de las diemnsiones que este primero que la otra. Más aún, cada una de estas dimensiones esta compuesta por distintas categorías, las que al interactuar entre si, forman lo que sería el pensamiento matematico.

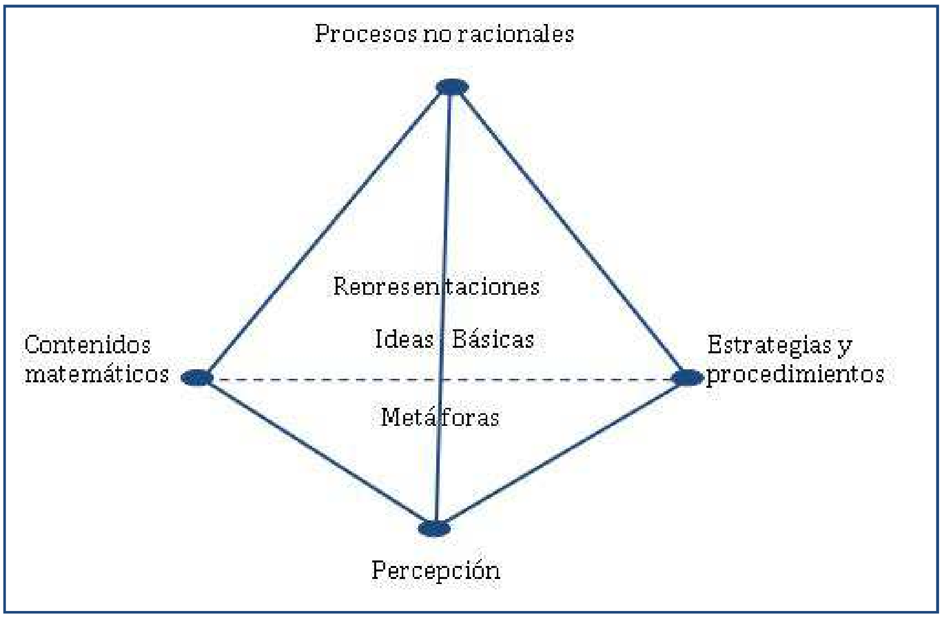


Figura 9: Modelo Tetraédrico del Pensamiento Matemático.

El pensamiento matemático es una iteración y una combinación de ciclos de abstracción y comunicación reflexiva, entendiendo por ciclo, la combinación de alguna de las cuatro dimensiones y de sus categorías, las cuales se presentarán en detalle.

En la figura 9, se tiene que los cuatro vértices, estan dados por las 4 componentes, que se nombran a continuación:

1. Percepción.
2. El pensamiento asociado con el contenido matematico.
3. Las Estrategias y procedimientos.

4. Capacidades o Procesos no racionales.

Los medios de comunicación, como las representaciones, las nociones básicas y las metáforas, son utilizadas para almacenar la nueva información, para llamar la información, para hacer diálogos internos entre estas dimensiones y para comunicarse con el exterior, esto quiere decir que la memoria esta “incluida dentro” del modelo. Es por este motivo, que la comunicación y el diálogo es de vital importancia en las clases de matemática, es en este lugar y en este momento donde la abstracción toma cuerpo y la argumentación se desarrolla. Donde los constructos lógicos y la utilización de la lógica como se vio en la sección 3.6.1., forma parte de la base de las demostraciones matemáticas y es por medio de estos elementos que toman fuerza y sentido, tanto en el individuo, como en el proceso de aprendizaje.

En estos momentos de diálogos, será importante el desarrollo del lenguaje y de la utilización de las palabras adecuadas para “convencer” de que se tiene la mejor postura, donde la crítica constructiva dará paso a mejores resultados, donde el proceso de abstracción tiene su recompensa. Con esto se quiere decir, que la memoria, la abstracción juegan un papel de importancia dentro del proceso de diálogo y de comunicación.

Así, el profesor de matemática debe considerar en la preparación de sus clases, momentos de conversación entre grupos pequeños, posturas y presentaciones de los grupos y de los particulares, el profesor, debe estar consciente, de que en estos momentos de conversación, se obtendrán las conclusiones más importantes provenientes de las necesidades de unificación de los términos, de las acciones y de los conceptos. Es en estos momentos donde se produce el pensamiento matemático, al momento de comunicar algo, ya sea de forma externa o interna. Entre los grupos se debe destacar la comunicación que va desde la acción al lenguaje, ya sea por medio de palabras o por medio de dibujos, o por medio de movimientos. Al final de este proceso cognitivo, se debe preparar una presentación y contemplar la discusión con el objetivo de obtener de estos primeros dibujos y frases, una representación que unifica a los grupos.

La experiencia, nos indica, que hay que estar atento a los errores productivos y a los comentarios que conducirían a los objetivos esperados. De esta forma, se puede observar el desarrollo del pensamiento matemático, como un proceso de aprendizaje diferente. Ya no más como aprendizaje por imitación. Esta caracterización, que incluye a la percepción como un componente, muestra un cambio en la forma de preparar las actividades, un cambio entre la concepción matemática exacta, al constructivismo (personal y colectivo) y una posibilidad para mezclar matemática, lenguaje y comunicación (Ruf y Gallin, 1998). Más aún, la caracterización aquí mostrada es una posibilidad de mezclar lo que se siente con la matemática, de compartir representaciones individuales y por sobre todo compartir, las percepciones individuales, que se producen en el trabajo con un contenido matemático.

En lo que sigue, se entenderán como vehículos de comunicación a los tres conceptos que estan en el centro del tetraedro, ver figura 9, a saber, las representaciones, las nociones básicas y las metáforas. Estos vehículos de comunicación estan siempre presentes en las cuatro dimensiones, por medio del lenguaje, de los conocimientos que estan guardados en la memoria y por el aprendizaje, que es la forma de almacenar el nuevo conocimiento. Las cuatro dimensiones, que estan en los vértices, serán tratadas en las siguientes cuatro secciones.

4.1. LA PERCEPCIÓN.

"Achte beim Lesen dieses Gedichte/dieser Gleichung
Auf deine Gedanke und Gefühle…"
Ruf & Gallin, 1998, pág.28.[113]

En esta categoría se destacan los sentidos mencionados en la sección 2.6, ya que, es a través de los sentidos que se percibe el medio y es através de ellos que se inicia el diálogo interior, es decir, es através de ellos que se forman las representaciones mentales y estas serán entonces, un resultado del desarrollo de estos sentidos, de las conexiones y relaciones que se hacen con la información del medio. Los sentidos que se consideran son:

1. Visual.
2. Auditivo.
3. Táctil y de la presión.
4. Gustativo.
5. Olfativo.
6. De la temperatura.
7. Espacio o de la posición.
8. De la fuerza y de la tensión.
9. De la sensación del cuerpo.
10. El de la palabra o sentido verbal.

---

[113] *"Aprecie al leer ese poema/esa ecuación, a sus pensamientos y a sus sentimientos..." Traducción de la autora.*

11. Del movimiento que incluye el de la rotación.
12. Del equilibrio o sentido estático.
13. Del número.
14. Del tiempo.

La percepción del movimiento, la percepción del tiempo, la percepción del espacio, la percepción del equilibrio dan información sobre el estado de un objeto y en particular permiten decidir al individuo si el objeto en cuestión esta en movimiento o estatico. Así, con estas áreas, se puede percibir y además realizar una representación mental dinámica o estática de los objetos matemáticos. Con todos los sentido, en especial con el sentido de la palabra, se desarrolla la capacidad metafórica como medio de comunicación interno y externo. El sentido del gusto y el sentido del número, pueden ser reunidos para sentir lo que es mas cercano al gusto. Por ejemplo, al tratar de describir la diferencia de sabor entre dos duraznos, se puede acercar a la sensación de muy pequeño, que tan pequeña o que tan grande es esta diferencia de sabor, permitirían desarrollar la capacidad de medida y por ende la capacidad númerica del individuo. Lo mismo puede ocurrir con el sentido de la temperatura y con el olfativo.

Del sentido de la fuerza y de la tensión, se desarrollan las capacidades de percicbir el movimiento, tanto del propio cuerpo como de los otros objetos, con este sentido también se desarrolla la capacidad de percibir la causa y el efecto de los movimientos de nuestro cuerpo, notar que con este sentido y el sentido del cuerpo, es que uno sabe cuando uno se esta moviendo y como se mueven los musculos de nuestro cuerpo. Es con este sentido que conceptos que de la fisica mecanica son mas comprensibles, conceptos como la fuerza, la tensión y la tracción podrían ser aclarados como percepciones de movimientos determinados de nuestro propio cuerpo.

La percepción espacial, es percibida a temprana edad por medio de la sensación del cuerpo y por el sentido del espacio y de la posición. La capacidad visual, es la que permite al individuo hacer conexiones relevantes entre sus representaciones, lo que logra percibir por la vista y con sus otros sentidos. En general, todo lo que el individuo percibe en una situación determinada y que le sirve para dar una respuesta, desarrolla una capacidad en el individuo.

Finalmente con lo visto en la sección 2.6., 3.8. y la sección dedicada a la capacidades matemáticas, se puede dar como un resultado de este trabajo, la siguiente lista de capacidades matemáticas:

1. Capacidad de percibir lo dinámico

2. Capacidad de percibir lo estático
3. Capacidad visual
4. Capacidad espacial
5. Capacidad númerica
6. Capacidad metafórica
7. Capacidad de percibir la causa y el efecto
8. Capacidad de equilibrar e igualar.

A continuación se detalla cada una de estas capacidades.

4.1.1. CAPACIDAD DE PERCIBIR LO DINÁMICO.

En este trabajo se entiende que la capacidad de percibir lo dinámico esta intrinsecamente relacionada con el pensamiento en movimiento y con el sentido del tiempo y del espacio. Además se considera lo que dice Roth (2005, pág. 73), que describe el "pensamiento en movimiento como una parte de una estructura conceptual mas grande", que incluye conceptos como el pensamiento funcional (Schwank, 2003) en el sentido de lo contrario a lo predicativo, esto ya ha sido citado en la sección 2.1.2.

Se agrega además en este trabajo, el principio del movimiento, como un concepto de la física[114], para tener variados puntos de vista. Así, el pensamiento en movimiento se puede resumir en las siguientes tres capacidades:

1. Capacidad de percibir el movimiento y con esta percepción argumentar.
2. Capacidad de percibir el movimiento dentro de una configuración completa junto con la capacidad de hacer un análisis del mismo.
3. Capacidad de describir y de comprender el comportamiento del movimiento.

En la figura 10, realizada por Roth (2005, pág. 74) y adaptada a este trabajo, se puede apreciar como el pensamiento en movimiento y el pensamiento dinámico están inmersos en el pensamiento matemático, en la categorización percepción y como los diferentes conceptos del pensamiento en movimiento, dinámico, kinestésico, funcional, etc. se entrelazan entre sí. Además, se observa en la figura 10, que hay una contención y/o

[114] *El movimiento es un fenómeno físico que se define como todo cambio de posición en el espacio que experimentan los cuerpos de un sistema con respecto a ellos mismos o a otro cuerpo que se toma como referencia.*

intersección de unos y otros conceptos. Calvin (2009) agrega que es necesario para el desarrollo de esta capacidad tener un repertorio de conceptos y de movimientos, como lo serían en un inicio el movimiento de los dedos para contar.

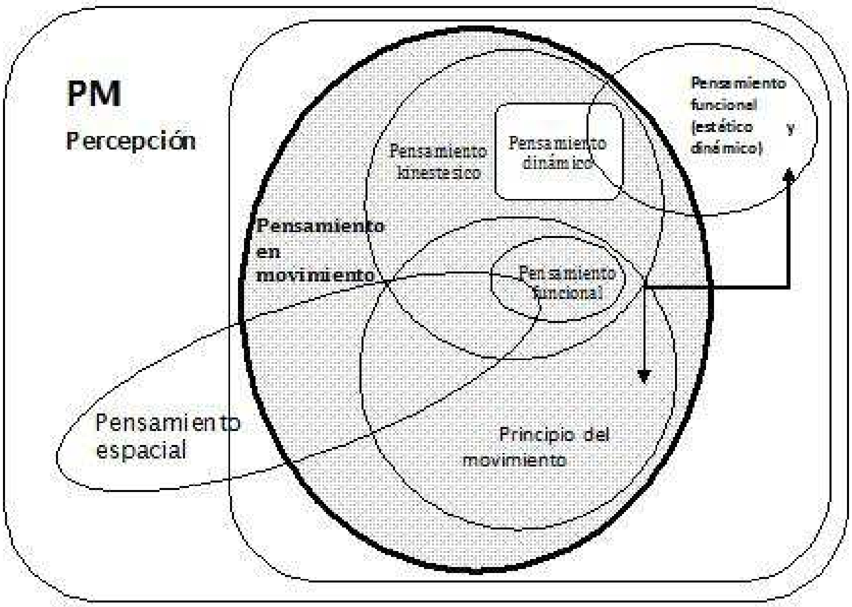


Figura 10: Pensamiento Dinámico en la estructura conceptual Macro.

Adaptación de la figura propuesta por Roth (2005, pág. 74).

Esta capacidad o el desarrollo del pensamiento en movimiento, en clase de matemática, puede ser apreciada en el paso desde una figura plana a un cuerpo, por ejemplo, al describir una prisma vertical, como la traslación vertical continua de un poligono. El pensamiento en movimiento, no es tan solo percibir el movimiento, sino que además, es relacionar el movimiento con los argumentos y hacer un analisis de la causa y del efecto del movimiento.

4.1.2. CAPACIDAD DE PERCIBIR LO ESTÁTICO.

Esta capacidad puede ser vista como lo contrario a la percepción de lo dinámico, como la percepción de lo estático, o como la capacidad de hacer una imagen estática de situaciones en movimiento, es decir, de percibir desde lo dinámico a lo estático. En matemática esto se traduce, por ejemplo, en la realización de un gráfico de una función con variable en el tiempo, entendiendo que una función, de este tipo no es un objeto estático, sino que esta en continuo movimiento, esto es, desde lo dinámico de la función a su representación gráfica que es estática. Esta capacidad esta relacionada con la capacidad visual y el concepto de visualización, que por un lado puede ser interpretado como la capacidad de plasmar de forma estatica situaciones, sentimientos, etc. Esta capacidad, esta relacionada también, con la percepción del tiempo y de lo estático, que vendrá a ser lo que no cambia, a pesar, del transcurso del tiempo.

La capacidad de percibir lo dinámico y lo estático son recursos del pensar, existen algunos materiales donde es necesario aúnar las dos capacidades, entre estos destacan los cubos de Dienes [115], donde se encarna y se hacen tangibles, algunos apsectos del sistema de numeración. Otros materiales donde se puede conjugar lo dinámico con lo estático, son las Plättchen [116], que son fichas planas de cartón, diseñadas por Wittmann (Wittman y Müller, 2006a, 2006b), que vienen de color rojo por una cara y de color azul por la otra cara. Estas son utilizadas en la educación básica, para encarnar la unidad, la decena y algunas propiedades de las operaciones básicas, en forma activa y dinámica.

Según Pimm (1992, pág. 75), estos recursos de lo dinámico y lo estático, “ofrecen ciertas posibilidades a los alumnos para el trabajo matemático con imagenes sobre papel, imagenes de un diagrama, imagenes de un video e imagenes sobre la pantalla de un computador”. Este mismo autor, muestra algunas diferencias y/o conveniencias de cada una estas formas de imagenes, donde el rol de lo estático y lo dinámico juega un papel especial.

4.1.3. CAPACIDAD VISUAL Y VISUALIZACIÓN.

Wenn um Mathematik geht,
scheinen Worte und Zahlen bei mir keine Rolle zu spielen.
Vielmehr dienen mir mehr oder weniger deutliche Bilder,
die ich beliebig abrufen, verändern und kombinieren kann,
als Bausteine für die Gedankengänge.

Albert Einstein. (Citado en Caluori, 2004, pág. 20)

La capacidad visual es la que permite reproducir con imágenes, episodios y conocimientos, que provienen de la información visual[117]. La capacidad visual, es con la que se mira el mundo y por lo tanto, la mayoría de nuestras representaciones mentales son producidas a través del sentido de la vista, por esta razón, es que también el aprendizaje está basado, la

---

115 *Los cubos de Dienes, son cubos de $1x1x1cm^3$, que pueden estar de a uno, representando la unidad o pueden estar agrupados en potencias de 10, para representar el caso del sistema decimal, o pueden estar agrupados en potencias de 2, para el sistema binario.*

116 *Son fichas planas de cartón.*

117 *En el caso de personas ciegas, la información proviene del tacto.*

mayoría de las veces, en episodios visuales y a través de imágenes. La visualización, es la capacidad de almacenar información sensorial, como conocimiento a través de imágenes o lo que se llama conocimiento visual (Pöppel, 2000). La visualización hace de las ideas abstractas unas ideas más “tangibles” y anima a tratar estas ideas como si fueran entidades tangibles (Sfard, 1991, pág. 6).

El conocimiento visual, está contenido dentro de las representaciones mentales, este incluye también los modelos mentales que están representados por imágenes visuales. Una diferencia con otro tipo de representaciones, es que la representación visual, no es discursiva y no es secuencial, esto es, las imágenes del conocimiento visual, no son totalmente describibles en palabras y no aparecen una después de la otra, sino que todas a la vez.

Dado que la visualidad es una de las formas más básicas de nuestra existencia, es de particular relevancia para el PM. El conocimiento visual abarca todas las formas de producción de conocimiento, la distribución y recepción, que se produce, se articula y se difunde con la ayuda del sentido visual, aquí la modelación como estrategia es utilizada en la producción de las imagenes como conocimiento visual. Es más, “a través de la visualización se puede transmitir la información mucho más rápido y más eficaz” (Pöppel, 2000, pág 26). Un trabajo introductorio en visualización en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática, es el dado por los autores Zimmermann y Cunningham (1991) y por Kadunz (2003).

Una experiencia basada en la visualización, es la realizada por Reyes-Santander y Ramos Rodriguez (2010), la cual esta basada en un problema planteado en Sinus (2007), donde se trata de activar un conocimiento matemático por medio de una pintura de Richard Paul Lohse. En el transcurso de esta actividad los alumnos comunican lo que han expresado sobre el área de la pintura y a través de este proceso se concluye cuales términos algebraicos son iguales. Actividades que se preparan en torno a la visualización tienen un proceso, que es el desencadenamiento de conocimiento, por medio de percibir información a través de la vista y este transformarlo a su vez en conocimiento visual (Zimmermann y Cunningham, 1991: Kadunz, 2003).

Finalmente, se puede decir que la visualización (Zimmermann et al., 1991; Kadunz, 2003) también transforma datos simbólicos a imágenes geométricas, de datos numéricos a un gráfico, de una función en su expresión simbólica a su representación gráfica, de los datos de una encuesta a un gráfico en barra y viceversa. La visualización, según los autores, ofrece un “método” para ver lo invisible, es decir, para ver más de lo que hay, obteniendo de una vez, una variedad de representaciones de la información, es decir la visualización, también es resumen de la información. La visualización permite el trabajo de un conjunto grande de datos, hace posible utilizar el sentido visual como medio de percepción y de comunicación interior, las representaciones obtenidas en este proceso son dibujos, pinturas, gráficos, fotos e imágenes computacionales y la modelación es utilizada como estrategia en la producción de estas imágenes (Maier, 1999; Kadunz, 2003).

4.1.4. CAPACIDAD ESPACIAL.

Es la capacidad de identificar lo vertical y lo horizontal, la capacidad de identificar derecha o izquierda, arriba o abajo y todas sus posibles combinaciones en el espacio. En el caso de la visualización espacial se tiene el pensamiento relacionado con las actividades de representación y comparación de cuerpos y de figuras, por medio de pliegues y recortes "imaginarios" (Roth, 2005). Como por ejemplo en la figura 11, se pide identificar los números que aparecen en la figura a) con las letras de la piramide truncada de la figura b), para responder es necesario que el alumno, pliegue y recorte, este proceso se puede hacer de manera concreta las primeras veces. Notar que la letra A, en la base, también forma parte del dibujo tanto en a) como en b).

La capacidad espacial esta fuertemente relacionada con la capacidad de percibir lo dinámico y con la capcidad de realizar rotaciones tanto en el plano como en el espacio. En este caso, hay un problema dado por Maier (1999), que consiste en determinar cuales de las figuras desde la a) hasta la d) son identicas a la figura que esta a la izquierda arriba, ver figura 11.

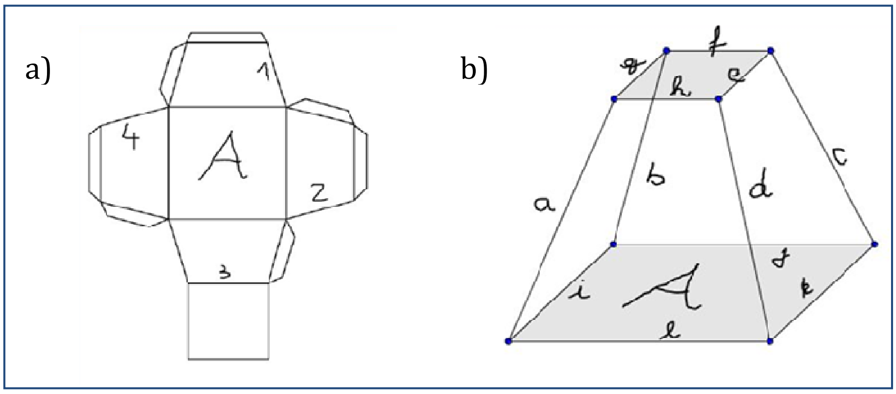


Figura 11: Pirámide truncada

Más aún, la capacidad de percibir el movimiento y la capacidad espacial, permiten hacer relaciones, que a su vez facilitan imaginarse el movimiento del cubo mostrado en la sección 3.8., el cual relaciona movimientos del cubo con elementos del espacio de derecha e izquierda. Esta capacidad y el denominado pensamiento espacial (Roth, 2005), contiene elementos estáticos y dinámicos, como se puede apreciar en los ejemplos aqui mostrados.

Otro problema presentado en Sinus (2007), muestra como al recortar una figura que representa un triángulo, no es posible luego reconstruirlo en el espacio.

En la figura 12, se puede ver que este pensamiento esta estrechamente relacionado con el pensamiento relacionado con el contenido geométrico y la conservación de una figura, la cual se mueve en el espacio.

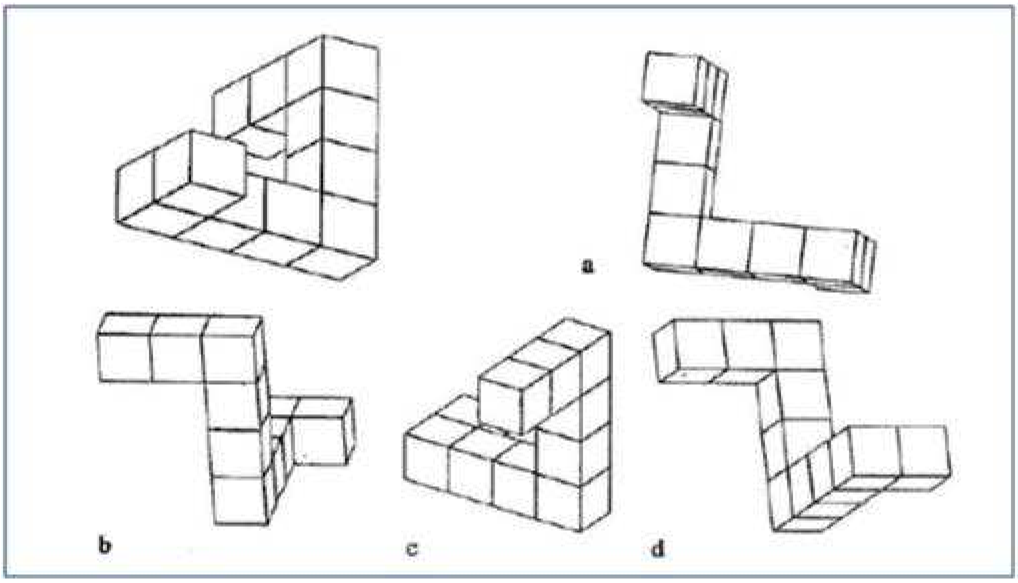


Figura 12: Rotaciones en el espacio.

(Maier, 1999, pág. 9)

En este trabajo adoptaremos lo siguiente para la capacidad espacial, esta tiene 4 grandes fuentes (Maier, 1999) como lo son:

1. Percepción del espacio: percibir lo horizontal y lo vertical como una diferencia de estado. Incluye las relaciones que se hacen desde el punto de vista de otro objeto o cuerpo, por ejemplo, si uno ladea un vaso con agua, notar que la línea que marca el agua en el vaso queda paralela al piso.
2. Visualización espacial: capacidad de reproducir a través de representaciones mentales. Procesos como doblar, correr, cortar, girar objetos o partes de objetos, por ejemplo, mostrar una plantilla de un cubo con los números como en el dado, hacer cambios y descubrir el número de al lado de otro ya dado o intentar ponerlos sobre la plantilla sin tener más información. En el caso de recortes con papel y tijeras mostrar una figura ya recortada y preguntar por los pliegues y por los cortes que se deban hacer para obtener la figura presentada.
3. Rotación interna: Capacidad de representar objetos planos y tridimensionales que giran, como por ejemplo el que se ha descrito en la sección 3.8.

4. Relaciones espaciales: Capacidad de comprender la configuración de varios objetos o partes de objetos, como por ejemplo, reconocer cubos en figuras planas (plantillas), reconocer dibujos (planos) de cuerpos, hacer dibujos de objetos de 3 dimensiones.
5. Orientación espacial: capacidad de cambiar la perspectiva de uno mismo a otro objeto, como por ejemplo el barco en relación al puerto, o bien considerar diferentes fotos y ver en qué secuencia se debieron haber tomado.

Finalmente la capacidad espacial, involucra la capacidad de percibir "exactamente" el espacio en tres dimensiones, poder describir y dibujar figuras en dos dimensiones, transformar con destruir y sin destruir, cuerpos concretos en el espacio y figuras en el plano, capacidad de representar figuras, cuerpos y sus transformaciones y representaciones mentales.

4.1.5. CAPACIDAD NÚMERICA.

Esta capacidad esta basada en el sentido del número, es una capacidad rudimentaria y congenita, que permite distinguir pequeñas cantidades como también permite la ejecución de operaciones aritmeticas elementales (Dehaene, 1999). Este sentido y por lo tanto la capacidad númerica, percibe los cambios y permite hacer cambios en rangos de cantidades pequeñas, en general de uno hasta tres. Un sinonimo de esta capacidad es la llamada destreza númerica, aúnque se advierte al lector que muchos usos de la palabra destreza pueden estar asociados a test de inteligencias, en este trabajo se considera como capacidad y no en relación con términos de la inteligencia.

Esta capacidad, debe ser relacionada con la formación del número, donde existen dos grandes exponentes, Piaget y Dienes (citados en Cofre y Tapia, 2009, págs. 101-102), los cuales dan una relación implícita entre el sentido del número y la formación del número como concepto.

En el siguiente ejemplo, se pide hacer una serie de restas, como por ejemplo 1-1, 3-2, 4-1, 8-1. 8-7, y 15-12, a continuación se pide nombrar un número entre 5 y 12. Lo más probable es que la respuesta sea 7 y es que este sentido. La explicación a este fenómeno esta relacionado con el sentido del número y con la capcidad de almacenar una operación aritmética sencilla, como la diferencia, en este caso el cerebro se ha puesto en "modus diferencia" y por lo tanto realiza de forma inconsciente la diferencia 12-5.

Este fenómeno explicaría muchos de los fracasos de nuestros alumnos, sobretodo si en una prueba se mezclan sumas y diferencias al azar.

En los cursos para profesoras de primaria, se recomienda hacer una asociación entre el número, su representación y el sentido del número que el niño ya tiene y que ya ha desarrollado durante los primeros seis años de su vida (Cofre y Tapia, 2009). Esto quiere decir, que no se les puede enseñar a escribir los números, sino que mas bien a encontrar relaciones entre ellos, a ver los numeros como cantidad con una intención y no como un símbolo dentro de las representaciones semióticas tradicionales, en situaciones reales o fantásticas. Trabajo con material concreto y asociaciones entre cantidad y número, que vienen dadas en preguntas del tipo: ¿Cuántos palitos de helados necesitas para cubrir el dibujo?, donde se la ha entregado un dibujo sin palitos y luego otro dibujo con una cantidad determinada de palitos y el niño debe pegar sobre la hoja los palitos, esto también le ayudara a realizar aproximaciones y estimaciones sobre cantidades y espacio por recubrir y la relación uno a uno que hay de por medio en el dibujo con bastones o lineas.

Tabla 14: Números en diferentes lenguajes.

Cantidad	**Número**	**Español**	**Aleman**	**Chino**[118]
.	1	Uno	Eins	Yi
..	2	Dos	Zwei	Er
...	3	Tres	Drei	San
....	4	Cuatro	Vier	Si
.....	5	Cinco	Fünf	Wu
......	6	Seis	Sechs	Liu
....	7	Siete	Sieben	Qi
....	8	Ocho	Acht	Wa
....	9	Nueve	Neun	Jiu
....	10	Diez	Zehn	Shi
....	11	Once	Elf	Shi yi
....	12	Doce	Zwölf	Shi er
....	20	Veinte	zwanzig	Er shi
....	21	Veinte y uno	Einundzwanzig (1 y 20)	Er shi yi
....	30	Treinta	Dreißig	San shi

El sentido del número y la formación del concepto de número, es la base para nuestra comprension de los números. Si este sentido anda por un lado, la representación (como formación de concepto) por otro lado, no se logrará una buena comprension y entendimiento del número, del concepto cantidad y del concepto medida, que estan relacionados con el sentido del número.

118 *Se le han sacado intencionalmente los acentos a las palabras en chino.*

Una de las formas de evitar este problema del aprendizaje y de concentrarse en lo que es la cantidad, es justamente mostrar que en otras culturas existen otras palabras para designar la misma cantidad (Fuson y Hall, 1983).

En la tabla 14, se muestra un ejemplo, donde se incluye el idioma chino. Aquí, se pueden tambien apreciar algunas de las conveniencias (y de las inconveniencias del idioma alemán) del idioma chino, como por ejemplo que las palabras son mas cortas y esto ayuda a la capacidad de la memoria y que la estructura de las palabras tiene una mejor relación con el sistema decimal.

Con la capacidad númerica, se tiene también una herramienta para hacer estimaciones.

Por ejemplo, saber si hay más de una cosa que de otra que se puede tocar o mirar y en base a esto elejir, por la que tenga más.

Esto significa que la capacidad númerica esta relacionada con la capacidad espacial, el percibir una cantidad es tambien percibir su volumen dentro del espacio, determinar que cantidad es mas grande o que cantidad es mas pequena, sin contar, es hacer una estimación utilizando por lo menos las dos capacidades antes mencionadas.

En los experimentos realizados por Dehaene (2009), se trata del sentido del número y su relación con cantidad, en estos se pregunta también por estimar si la suma entre 53 y 68 esta mas cerca de 120 o de 150. Esto significa que dependerá de la situación en la que el individuo se encuentre para que este desarrolle todas sus capacidades, más aún, es la utilización del lenguaje, que en conjunto con esta capacidad le permitiría al hombre jugar y resolver problemas relacionados con números.

La capacidad númerica puede ser relacionada con los sentidos olfativo, gustativo y de la temperatura, aunque no se desacartan los otros sentidos, es más, se cree que es posible hacer una relacion con los otros sentidos también.

Ejemplos para cursos superiores pueden ser vistos en Royo (2009).

Finalmente, la capacidad númerica permite comprender las operaciones básicas de suma y de diferencia, en pequeñas cantidades, la comprensión de los conceptos cantidad, magnitud, medida.

El sentido del número es independiente del idioma, pero su desarrollo no es idependiente del idioma y según Dehaene (1999), la primera dependencia estaría basada en el área cerebral encargada de los movimientos de los dedos y de los movimientos de los ojos.

El desarrollo de la capacidad númerica permitiría un entendimeinto entre el número y los conceptos asociados. Por consiguiente, también un entendimiento de las operaciones que se pueden hacer con los números.

4.1.6. Capacidad metafórica.

Según Laborde (1990), es necesario incluir en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática, actividades relacionadas con leer, escuchar, escribir y discutir, ya que con esto se logra una variada y amplia cantidad de representaciones y metáforas. Además, como ya se ha visto en los capítulos anteriores sección 1.5 y 2.4, las metáforas juegan un papel en la comunicación, pero tambien juegan un papel en nuestro sentir y en la cognición. Por lo tanto, la capacidad metafórica la hemos considerado dentro de la categoría de las percepciones, ya que al hablar de una capacidad metafórica se esta refiriendo a lo que se puede hacer en especial con el sentido de la palabra y lo que gracias a este sentido se puede percibir en combinación con todos los otros para generar una metáfora, parte cognitiva. Es en este punto donde el lenguaje toma vida e importancia en nuestras clases de matemática, solo en las metáforas conceptuales y en la generación de ellas, es que el lenguaje (Schröder, 2001) sirve como medio de comunicación, que dice más de lo que se dice y como medio de representación, en el sentido que menciona Laborde (1990) y Pimm (1987). Más aún se ha visto en la sección 3.3 que la relación entre metáfora y matemática va mas alla de una mera posibilidad, es un proceso cognitivo que se esta haciendo continuamente en las clases de matemática y mientras mas desarrollado se tenga esta capacidad, se tendrán mejores herramientas para la comprensión de nuevos conceptos.

Se debe entender que el desarrollo del sentido de la palabra y del lenguaje, es una base para la comprensión y para la generación de metáforas, entendiendo que el sentido de la palabra promueve otras imagenes internas y otras expresiones dentro de la comunicación. El sentido del lenguaje va mas allá de escuchar una palabra y va mas allá de decirla, es un sentido interno que genera una cadena de pensamientos y sentimientos cuando se ve, se dice y se escucha, por ejemplo la palabra “amor” o la palabra “paralelo” (Cuando uno junta dos palabras como “amor paralelo”, la representación que se genera en el individuo tiene una fuerza y una connotación que proviene de dos campos diferentes).

Así, este sentido junto con los que se tengan mas desarrollados generarán una imagen mental borrosa (para los que la han olvidado de su repertorio) o tal vez un dibujo de dos lineas paralelas, en el caso de tener desarrollado el sentido espacial; en el caso de dejar mas libre la fantasia y relacionar el paralelismo con vidas paralelas y que no coinciden en ningún punto; en el caso de ser mas concretos, aparcerá en la mente la definición geométrica de lo que es paralelismo. Así, el sentido de la palabra, siempre en conjunto con los otros sentidos, generará en un primer momento una representación, que si quiere ser comúnicada, se podra de nuevo utilizar el sentido de la palabra, para poder expresar de la mejor forma, la representación generada. En ambos casos, se debe tener en cuenta el desarrollo del lenguaje, entendiendo que todo lenguaje esta formado por palabras, lo que incluye el lenguaje que esta formado por símbolos. La capacidad metafórica es entonces utilizada y desarrollada cada vez que nos estamos comúnicando y dialogando con nosotros mismo. Schröder (2001, pág. 231), se refiere a esto como el "lenguaje del pensamiento".

En la sección 3.5.10., se mencionó a Gardner (2009, págs. 340-343) y lo que este autor considera sobre la capacidad temprana analógica o metafórica, como una capacidad de notar similitudes a través de dominios sensoriales, o bien similitudes entre dominios dispares. Como por ejemplo, el dominio de los símbolos y de palabras con similitudes entre dominios sensoriales, esto significa que, en clases de matemáticas es el lugar donde la capacidad metafórica es más desarrollada. Lo que ha ocurrido hasta ahora en clases de matemática es que el dominio abstracto ha sido se ha intentado desarrollar más y no se ha intentado encontrar similitudes entre dominios sensoriales-terrenales y abstractos.

4.1.7. Capacidad de percibir la causa y el efecto.

Esta capacidad permite utilizar el "entonces", de forma intuitiva al inicio y depués de forma rigurosa, cuando se conjuga con otros elementos y con otros sentidos, que permiten conjeturar y argumentar.

La capacidad de percibir la causa y el efecto, también permite concatenar y seguir una serie de hechos o resultados (Devlin, 2006, págs. 202-231). Esta capacidad también esta intrinsecamente relacionada con los sentidos espacial, de movimiento, con el sentido táctil y de la presión, de la fuerza y de la tensión, de la sensación del cuerpo, del numero y del tiempo.

Casi todos los sentidos mencionados anteriormente, estan de a pares, excepto el de la sensacion del cuerpo, que por si mismo permite hacer conjeturas del tipo, "si corro mas rápido que puedo entonces estare mas cansada que antes", lo que es obvio, lo que no es tan obvio es de darse cuenta de que esta es una conjetura del tipo: si pasa esto entonces lo otro y que su valor de verdad proviene de una percepción personal.

No ocurre lo mismo con los otros sentidos, los cuales permiten apreciar causas y efectos de situaciones externas.

Por ejemplo, si se tira un objeto hacia arriba entonces este tendrá que volver hacia abajo, el cual es bastante conocido por los niños que juegan con una pelota, por esta misma causa y efecto, es que el juego con un globo [119], es mucho mas interesante, vuelve hacia abajo, pero necesita mas tiempo, es mas si se pregunta a los niños que les gustaría que pasara, muchos de ellos dirían que les gustaría que el globo se quedara arriba, esto es porque la causa subir tiene el efecto bajar y se espera comprobar que esto ocurre siempre o se necesita un contraejemplo para decir que no es cierto.

Otro fenomeno que los niños experimentan por medio de un juego, es el de la fuerza y de la tensión. Cuando se hacen dos grupos y se pone una cuerda que ambos grupos deben tirar, cada uno para su lado, entonces se hace una fuerza y la cuerda se tensa, es mas se tensa de tal forma que hasta se podria romper, lo interesante de este fenomeno causa y efecto es descubrir cuanto antes en que lugar se podria romper la cuerda o en que momento, para asi evitar la caida al suelo de los niños.

Este tipo de observaciones y otras, solo son posibles de hacer en el caso de que se haya realizado el juego y por medio de diálogos, se espera que en clases de matemática este tipo de observaciones conduzcan al inicio de la formación de conjeturas del tipo si pasa esto entonces ocurrira esto otro.

Es por medio de esta capacidad que muchos de los planes de estrategias son llevados a cabo con exito.

4.1.8. CAPACIDAD DE EQUILIBRAR E IGUALAR.

Esta capacidad esta ligada al sentido del equilibrio, al desarrollo del sentido de lo estatico, del espacio y de la orientación de nuestro cuerpo. Una de las propuestas que aqui se hacen es que justamente el desarrollo de este sentido a temprana edad, permite a los alumnos tener una mejor idea de lo que son las igualdades, las ecuaciones y las inecuaciones en matemática (ver sección 2.4. y 3.8).

Junto con la capacidad espacial, este permitiria tambien una mejor comprensión y un trabajo adecuado con la geometria y en particular con los ángulos. Sobre esta capacidad y sobre el desarrollo que esta podria tener sobre el aprendizaje de la matemática, no se ha podido encontrar material, más que el que mencioanmos en la sección 3.8.

De las 8 capacidades que aqui se proponen y que son parte de la categorización del PM, se cree que habría que desarrollar con mayor profundidad y con mas tiempo, la influencia de

[119] *Ver la preguntaN°42, formulada en la página web: http://ciencianet.es/p42.htm*

esta capacidad sobre el aprendizaje de las matemáticas, se cree que ejercicios que estan en base al balanceo del cuerpo podria permitir resolver problemas de un tipo y no de otros.

Más aún, la existencia de metáforas a partir de movimientos y del pensamiento dinámico han sido tratados con detalle en Hoffstadt (2009).

4.2. EL PENSAMIENTO ASOCIADO CON EL CONTENIDO MATEMÁTICO.

Así como se vio en la sección 3.12., en el modelo de Augsburgo, una de las componentes del PM, es el pensamiento asociado al contenido matemático. Esta componente contiene a su vez, el pensamiento numérico, geométrico, algebraico, estocástico, funcional y formal. Estos pensamientos son considerados como parte de un aprendizaje escolar, y ellos fomentan la utilización de mapas conceptuales estructurados, formales y fuertemente asociados a la memoria.

Para decir finalmente, que estos son los pensamientos asociados al contenido matemático, se hizo una revisión de los programas de las cinco bases, que componen la educación en la región de Baviera (Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus[120], 2000; 2004a; 2004b; 2007; Ziegler, Weigand y a Campo, 2008), a saber, la escuela básica, la escuela secundaria con sus tres niveles [121] y en la formación de profesores de matemática.

Con esta información se hizo un resumen de los contenidos y de los objetivos de cada uno de ellos, este se presenta brevemente en la tabla 15. En las siguientes subsecciones se considera también esta información, para decir, finalmente que es cada uno de estos pensamientos relacionados con el contenido.

Cabe destacar que en estos programas, aparecen los contenidos y también las competencias que deberían desarrollar los alumnos durante sus estudios.

Estas competencias, están asociadas con las otras dimensiones y categorías del pensamiento matemático, con lo cual se ha considerado en la definición, de cada uno de estos pensamientos, lo que cada uno de los contenidos desarrolla, a través de la enseñanza escolar.

Es en esta categoría, donde el conocimiento matemático y sus sistemas autónomos (sección 2.1.3), determinan la forma de la educación y el modo de desarrollar las diferentes dimensiones del PM. Nuestra experiencia en observación de clases, que se ha realizado en

---

[120] *También se puede encontrar por sus siglas BSUK.*

[121] *Mirar pie de página n°4.*

distintos niveles de la educación y en particular en el trabajo con estudiantes de primer semestre, ha mostrado que, es justamente esta dimensión, la que se ha venido desarrollando por años, sin considerar las otras tres dimensiones que conforman el PM.

Finalmente, los contenidos que aparecen en la tabla 15, se pueden agrupar en cinco categorías, que han sido mencionadas anteriormente, cada una de ellas está relacionada con una forma del pensamiento.

Tabla 15: Contenidos matemáticos.

Resumen de contenidos matemáticos de la educación matemática de la región de Baviera, Alemania.

Escuela básica, 1.-4. Clase.	Geometría: Experiencias en el espacio y el desarrollo de la capacidad espacial. Superficies, formas planas y cuerpos, simetría axial, simetrías y dibujar figuras geométricas. Tamaño, medida, cantidad. Números y operaciones: Adición, Substracción, Multiplicación, División.
Escuela secundaria, nivel 1, 5.-10. Clase.	Números naturales, Números enteros, Números racionales, Números decimales, Potencia y raíces, Porcentaje. Geometría: Figuras geométricas y sus relaciones, sistemas de coordenadas, reflexiones, longitudes, perímetro, área, traslaciones, rotaciones, cuerpos geométricos, Algebra: Operaciones básicas, términos e igualdades. Funciones y Medida. Trigonometría. Estadística.
Escuela secundaria, nivel 2, 5. 10. Clase.	Conjunto de los números enteros. Números racionales, construcción del sistema decimal; Proporcionalidad. Las cuatro operaciones básicas. Cálculos con magnitudes del diario vivir. Expresiones algebraicas con fracciones y ecuaciones fraccionarias. Geometría: Conceptos básicos de la geometría plana, formas geométricas básicas y conceptos geométricos básicos. Líneas geométricas y lugares geométricos, triángulos, cuadriláteros, cálculo de áreas de polígonos y de la superficie de cuerpos formados por figuras conocidas. Calculo de áreas circulares. Reflexiones, traslaciones y rotaciones de figuras en el plano y en el espacio. Conceptos básicos de geometría del espacio y medidas en el espacio, volumen y superficies. Divisibilidad de los números naturales; Datos y azar. Números reales; Sistemas de ecuaciones lineales y sistemas con ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales con desigualdades, ecuaciones e inecuaciones; Relaciones y funciones, funciones lineales, cuadráticas, ecuaciones e inecuaciones de funciones; Potencias y funciones de potencias, función exponencial, funciones logarítmicas. Trigonometría.
Escuela secundaria, nivel 3, 5.-12. Clase.	Números naturales y números enteros. Conceptos básicos de geometría, figuras geométricas, circulo, magnitudes, área, volumen, congruencia; el teorema de Tales; prisma, cilindro, cono, pirámide, esfera; geometría con coordenadas en el espacio. Números racionales, porcentaje, Frecuencias. Números reales; Expresiones algebraicas, ecuaciones lineales, evaluación de datos, relaciones funcionales, sistema de ecuaciones lineales, Experimento de Laplace, Parábolas, ecuaciones cuadráticas; experimentos aleatorios, el teorema de Pitágoras, introducción a la trigonometría, seno, coseno y tangente, crecimiento exponencial, logaritmo, probabilidad condicionada, el número Pi, esfera; expansión del concepto función, calculo diferencial y calculo integral, tipos de funciones especiales, profundización en el cálculo y en la teoría de las probabilidades. Introducción en la evaluación de los datos y gráficos estadísticos.

Formación del profesorado en matemáticas	Algebra y aritmética, pensar en números y en estructuras. Estructuración de la geometría del espacio y de la forma. Algebra lineal, linealizar y coordinar. Funciones y análisis funcional, pensamiento funcional e infinitesimal. Análisis de datos estocásticos y modelación del azar. Modelación y matemática aplicada.

Una sexta categoría, se obtiene a partir de las representaciones semióticas y de la metonimia, esto aparece frecuentemente en clases de matemática, es decir, mirar la matemática como la enseñanza de símbolos, esto se traduce en un contenido de la educación matemática, que se presenta durante todos los años escolares de forma implícita, a saber, el llamado pensamiento formal, que es una forma de utilizar las representaciones semióticas tradicionales, que está más relacionada con un lenguaje formal, más que con las relaciones y los conceptos matemáticos.

La tabla 15, muestra los contenidos y cada uno de ellos esta relacionado con pensamientos, estos pensamientos son denominados pensamientos relacionados con los contenidos matemáticos. Cuando se habla del desarrollo del pensamiento matemático, en general, se refiere solo a esta dimensión y al desarrollo de estas cinco categorías. A continuación, el detalle de cada una de ellas.

4.2.1. PENSAMIENTO NUMÉRICO.

Este pensamiento y su desarrollo está ligado con exámenes de inteligencia (ver sección 1.1.), a su vez podemos relacionar el pensamiento numérico con la capacidad numérica (ver sección 4.1.), es esta relación la que mejor se adecua a los fines de este trabajo. Así, el pensamiento numérico en educación matemática y con respecto a los contenidos matemáticos está asociado:

1. Con la apropiación y con la disponibilidad de las representaciones que se tengan de los números y de los sistemas de numeración.
2. Los números y todas las representaciones que estos puedan tener.
3. Los sistemas de numeración.
4. Con las operaciones que con ellos se puedan hacer.
5. Con la relación entre número y medida.
6. Con el concepto de magnitud.
7. La relación entre magnitud, unidad y medida.
8. Con el proceso de medición y con las inexactitudes.
9. Con el concepto de error.

El pensamiento numérico es entonces el encargado de cuantificar, medir, aproximar y contiene conceptos como finito, infinito, cálculo de errores, infinitesimales y su campo de trabajo serían conjuntos de números, como los naturales, los enteros, los racionales, los reales, los complejos y con todas las operaciones que se pueden hacer con ellos, de esta forma este pensamiento está relacionado con el pensamiento algebraico, con el pensamiento aritmético (el cual se detallará a continuación), que lo contiene y de cierta forma con la utilización de cuantificadores de la lógica formal, al decir existe un numero dentro de tal conjunto que tiene tal propiedad, en este caso se debe asociar el pensamiento numérico con otros, o cuando se quiere demostrar alguna propiedad de los números naturales y se utiliza el cuantificador "para todos".

Una de las asociaciones importantes que se deben recalcar es la concerniente al error y las estimaciones. Es suficiente, a forma de introducción al tema del error, pedir a los niños que midan lo más exacto posible algún objeto, como la mesa de trabajo, notar la contradicción intencional entre exacto y error, mientras más exacto se les pida medir a los niños, mas diferencias habrán en la medida de la mesa.

Con esta acción, los alumnos podrán observar que la colección de datos recopilados durante la actividad, tiene sus diferencias, es decir, no todos han obtenido el mismo valor que represente exactamente la cantidad de la magnitud pedida. Esta actividad permite también, introducir el concepto de intervalo, ya que se podrán tomar estos valores recopilados, como objeto de estudio y se dejaran algunos de ellos, por ser demasiado lejanos, con los valores que están más cercanos a la medida, se podrá decir que la medida del objeto esta "entre tanto y tanto" (intervalo). Por otro lado, también se trabaja con el concepto de aproximación, es decir, la magnitud y su medida está "alrededor de" cierta cantidad.

Una actividad en base al EIS, realizada por un estudiante en práctica, donde la autora estaba como docente, en un quinto curso[122], fue la de pedir a estos alumnos que midieran la mesa de trabajo (note que no se les habla de ancho o de largo) con el dedo y que anotaran, que midieran a uno de sus compañeros con una regla, que midieran la pizarra con la mano y que midieran el piso con el antebrazo. Se formaron grupos y se le dio una hoja de trabajo, de esta situación lo niños concluyeron que hay que hacer un promedio en la cantidad que representa la medida del dedo, la mano y el antebrazo. Con esto, la clase toma como objeto

---

[122] *Actividad realizada en un colegio del nivel I (Hauptschule), alumnos 10 a 12 años, semana del 27.04.2010 hasta 04.05.2010.*

de estudio, la medida de los dedos índice, hace una colección de datos, dice el intervalo y luego obtienen una medida estándar, para este objeto. Como conclusión final de la clase, se tiene la utilidad de los centímetros, del metro etc., como unidad de la longitud y se reconstruye la idea de pulgadas, pie, etc.

Otra forma de poner en acción el pensamiento numérico son las denominados tareas Fermi[123], las cuales tienen pocos datos, son tomadas de lo cotidiano y para la escuela básica son el inicio de las estimación, estas preguntas en general comienzan con la palabra "Cuántos", por ejemplo; ¿Cuántos globos caben en la sala de clases? ¿Cuántos dulces caben en una caja de cartón? ¿Cuántos collares hay en la ciudad de Valparaíso?, etc. Estas preguntas se pueden trabajar desde lo enactivo hasta lo simbólico y permiten a los alumnos poner sus propias condiciones, es mas también ellos podrían plantear sus propias tareas Fermi y trabajarlas como proyecto y luego presentarlas a la clase.

4.2.1.1. Pensamiento aritmético.

Este pensamiento esta dentro de la subcategorización del pensamiento numérico, antes de presentar un acercamiento a una definición, se presenta una poesia de Sandburg (citada en Pimm, 1992, pág. 10), la cual introduce a la idea metafórica que se tiene de la aritmetica.

> *Arithmetic is where numbers fly like pigeons in and out of your head. Arithmetic tell you how many you lose or win if you know how many you had before you lost or won.*
>
> *Arithmetic is seven eleven all good children go to heaven -- or five six bundle of sticks.*
>
> *Arithmetic is numbers you squeeze from your head to your hand to your pencil to your paper till you get the answer.*
>
> *Arithmetic is where the answer is right and everything is nice and you can look out of the window and see the blue sky -- or the answer is wrong and you have to start all over and try again and see how it comes out this time.*
>
> *If you take a number and double it and double it again and then double it a few more times, the number gets bigger and bigger and goes higher and higher and*

---

[123] *Enrico Fermi (1901-1954) fue un físico nuclear, obtuvo el premio Nobel (1938) y se caracterizaba por tener una excelente estimación, le proponía a sus estudiantes preguntas de estimación, las que contenían pocos datos, como por ejemplo, determinar cuántos afinadores de piano habían en Chicago (Wikipedia).*

only arithmetic can tell you what the number is when you decide to quit doubling.

Arithmetic is where you have to multiply -- and you carry the multiplication table in your head and hope you won't lose it.

If you have two animal crackers, one good and one bad, and you eat one and a striped zebra with streaks all over him eats the other, how many animal crackers will you have if somebody offers you five six seven and you say No no no and you say Nay nay nay and you say Nix nix nix? If you ask your mother for one fried egg for breakfast and she gives you two fried eggs and you eat both of them, who is better in arithmetic, you or your mother?

Carl Sandburg, 1950 (citado en Pimm 1992, pág. 10)

Traducir una poesía es un riesgo, podría ser que se pierda demasiado o se ganen cosas que el compositor no quería decir. Las palabras tienen un poder increíble en nuestros pensamientos, por este motivo, no se hace una traducción de esta poesía. Lo que sí se puede hacer, es observar y apreciar de ella, lo que produce la arimética en el sentir de un poeta. El autor, representa a los números como palomas, que van y vienen dentro de la cabeza, el ve la utilidad de la aritmética, el ve que parte de la aritmética es el conteo de objetos, el poeta ve como un procedimiento que va desde la cabeza, que pasa por tu mano hacia el lápiz y de ahí a la hoja y que te da la respuesta, el autor ve también en la aritmética seguridad, todo es correcto y simpático, si la respuesta fuera falsa, se vuelve a empezar el procedimiento. Este poema habla de procesos de doblar un número una cantidad finita e infinita y que solo con la aritmética, se puede determinar el número exacto, al momento de parar de doblar la cantidad. Aritmética es donde se multiplica y donde se memoriza. En aritmética no se permiten los errores, pero estos errores no están relacionados con las bondades humanas, pero si con el entendimiento, si se pide un huevo, se debería comer un huevo o ¿Quizás lo dijo por decirlo?

El pensamiento aritmético, es la base para las operaciones con los números y está vinculada con el conteo (sumar de a uno), con la suma, la diferencia, la multiplicación y la división en el sentido operacional y no como conceptos, es decir, el pensamiento aritmético está relacionado con el método de las cuatro operaciones, en el cómo se suma, como se resta, como se multiplica y en el cómo se divide. El pensamiento aritmético está relacionado con los algoritmos y con la comprensión y utilización de ellos. Estos procedimientos quedan registrados en la memoria como actos automáticos y no necesitan de otros procesos cognitivos, más que el ser activados.

Es necesario aprender estos procedimientos, aunque hoy en día exista la tecnología y las calculadoras. Es necesario aprenderlos, porque permiten formar relaciones mentales entre representaciones, símbolos y conceptos, estas relaciones además de desarrollar nuestra capacidad cerebral, facilita la extracción de información de los registros de forma ordenada, es decir, procedimientos que se realizan paso 1 a paso 2, desarrollan el orden de guardar y extraer la información desde los registros. Por otro lado, mientras más herramientas se tengan sobre el cómo funcionan las cosas, más posibilidades tendrán de darse cuenta donde y como reparar un error en los resultados obtenidos gracias a la tecnología.

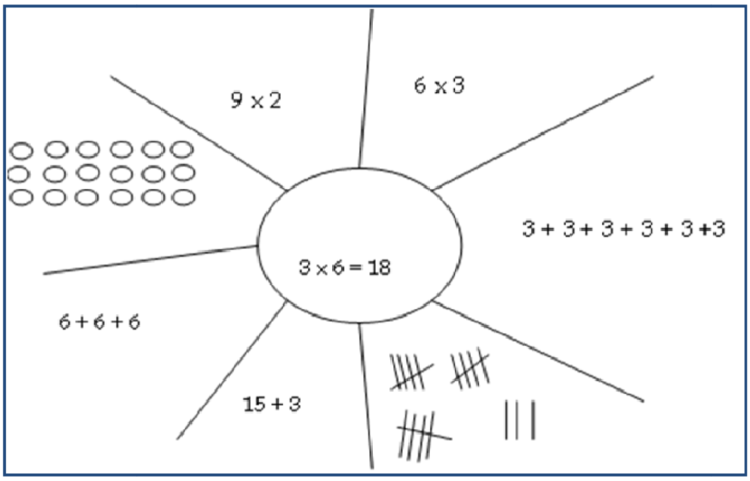


Figura 13: Número, operaciones, representaciones.

El pensamiento aritmético no debe ser desarrollado por sí solo, no se deben hacer solamente multiplicaciones del tipo reproductivas, estas operaciones deben estar acompañadas de otras operaciones y de relaciones que el mismo alumno pueda hacer (Hengartner, Hirt y Wälti, 2007; Schwank, 2011), es decir, la multiplicación, el número, su representación, la suma, la división, el número favorito, debería estar relacionados, una posibilidad, es la que se muestra en la figura 13, que ha sido adaptado del trabajo de Hirt et al. (2007, pág. 31), para este trabajo. Aquí se muestra como la operación 3 x 6 = 18, puede ser realizada de diferentes formas, como está puede estar relacionada con otras representaciones y a su vez con otras operaciones, donde se obtiene el mismo resultado, como en el caso 9 x 2, o bien relacionado multiplicaciones y sumas, si el alumno sabe que 3 x 5 es 15, entonces se le podrá sumar 3 y obtener el resultado de la operación inicial, etc.

El pensamiento numérico y el aritmético están relacionados por la capacidad de realizar operaciones con números, esta capacidad se puede desarrollar, con el caculo mental entre otras alternativas. Sfard (1991) dice que los procesos algorítmicos, tienen una doble naturaleza, tanto de procesos que se basan en una estructura como procesos que tienen un rol operacional. Lo más importante es que el pensamiento aritmético se relacione con otros conceptos dentro y fuera de la matemática, hacer problemas de la vida diaria pero en contexto real y no ficticio es necesario para desarrollar el sentido del número y a la vez la capacidad numérica, utilizando el pensamiento aritmético como base. De esta manera, se desarrolla la orientación espacial numérica (mayor que, menor que, en los números naturales) se verá reforzada. En la resolución de problemas de planteo, que necesitan de un desarrollo aritmético, se requiere ser creativo para hacer un contexto para explicar la aritmética a utilizar. Para preocuparse del pensamiento aritmético, se debe iniciar en edad preescolar con los juegos en mundos matemáticos y el juego será mucho más reforzado, que en la primaria, debido a la seguridad del pensamiento funcional y lógico de los niños (Schwank, 2011).

4.2.2. Pensamiento geométrico.

El pensamiento geométrico y todo lo que esto conlleva, como por ejemplo, formas, conceptos (Castelnuovo, 1966), imágenes mentales de figuras en el plano o de cuerpos en el espacio, como también la transformación de imágenes planas a imágenes en el espacio y vice-versa, pensamientos relacionados con objetos y las transformaciones que se pueden hacer en el plano y en el espacio y todo lo que esté relacionado con las simetrías, las reflexiones y las rotaciones, en general con las transformaciones que respetan la figura y las que las destruyen su forma y la cambian, esto quiere decir que también se incluyen conceptos topológicos.

El pensamiento geométrico tiene dos bases, el pensamiento realizado en el plano y el que se realiza en el espacio, hay transformaciones de figuras que se pueden hacer en el espacio, pero no en el plano. El pensamiento geométrico espacial, está relacionado con nuestro diario vivir y el pensamiento planar está más relacionado con una posible forma o medio de representar figuras, es como decir que el plano solo existe en la hoja de papel (pantallas de televisión, de computadores), que existe como invención del hombre, pero todo lo que existe en este mundo tiene cuerpo y está en el mundo de las tres dimensiones. Lo que no significa que este mundo plano, no sirva, todo lo contrario, este mundo en dos dimensiones nos permite, hablar de mundos de más o menos dimensiones que dos. Dentro de estos mundos se desarrolla el pensamiento geométrico y en general la vida humana y es sobre este mundo y con herramientas geométricas, como el ser humano se hace ideas de figuras que estén alrededor, de objetos que existen y de otros que podría existir.

Para desarrollar el pensamiento geométrico en el aula, en este trabajo se propone el siguiente listado de aspectos que se deberían desarrollar:

1. La observación del medio y de las bondades de las figuras de la naturaleza.
2. Juegos con la perspectiva infantil y el desarrollo de esta a través de la adolescencia
3. Las metáforas deben ser incluidas y aceptadas como la mejor aproximación a la comprensión de las ideas y definiciones en geometría.
4. Conservación o destrucción de las figuras por medio de transformaciones.
5. Propiedades intrínsecas de las figuras.
6. Propiedades externas a las figuras.
7. Interacción entre el plano y el espacio, por medio de dibujos y proyecciones, a mano alzada y con medios tecnológicos.
8. Interacción entre dibujos y propiedad.
9. Interacción entre geometría dinámica y geometría estática

Las interacciones anteriores y posibles explicaciones de la construcción de figuras, pueden dar paso a argumentaciones y al descubrimiento de propiedades geométricas, observar cuando y donde se cumplen estas propiedades, permite la construcción de otros conocimientos basados en conjeturas argumentadas por medio de la construcción de figuras.

Uno de los desarrollos destacados en este tipo de pensamientos, es la arquitectura contemporánea y la construcción de casas y de estadios en el mundo, la que involucra la geometría, conceptos de estabilidad de materiales y de economía, los arquitectos e ingenieros, se reúnen para "crear" construcciones que responden a una serie de condiciones. Hay un tipo especial de estadio, llamado el nido de pájaros[124], que sorprende por la cantidad de herramientas matemáticas utilizadas y por la belleza de su estructura, las dimensiones realmente supera lo que se ve por fuera, es como si el ser humano por fin hubiese logrado esa dualidad entre exterior e interior (normalmente no hay dualidad, ahora sí, la corteza del edificio se ve más pequeño que el interior y están en una relación

[124] *Mirar en http://www.nuestrorumbo.com/2008/07/14/estadio-el-nido-de-pajaro-%C2%BFuna-nueva-maravilla-del-mundo.*

armoniosa). Las casas cúbicas[125] diseñadas por el arquitecto Piet Blom[126], son una muestra más de la utilización de la geometría y otras componentes. Este tipo de construcciones, se prestan para realizar diferentes actividades relacionadas con el pensamiento geométrico. Así se estimulará la visualización (Zimmermann y Cunningham, 1991: Kadunz, 2003) con la construcción de objetos y en la construcción de conocimientos, que permitan llegar a estas construcciones reales. Además que permitirá desarrollar la capacidad del alumno de utilizar las propiedades, de los conocimientos que domina y de desarrollar un pensamiento geométrico intuitivo, al formular la justificación de la solución presentada.

Se deberían incluir entre otras cosas las actividades de plegado, recorte, superposición, engranado. También se pueden incluir actividades en la construcción de pulseras utilizando figuras como mándalas, árboles y curvas, como la curva de Lissajous[127] (no se pretende en cursos iniciales, que el alumno se aprenda la ecuación, si no que más bien, que conozca la forma de la curva y que pueda diferenciarlas de otras curvas). Además está todo el mundo de los fractales[128] para dibujar o para relacionar el infinito con la geometría y otros conceptos matemáticos.

En el caso de las metáforas en geometría, estas son creadas por los alumnos como chistes entre humoristas. Sería bastante contradictorio el hecho de decirle a un alumno que un punto no puede ser un grano de arena, porque claro que un punto es como un grano de arena, que algún día se puede denominar por la letra mayúscula A y una línea recta es como un hilo de coser muy fino y tensado "mágicamente" y algún día se puede denominar por *L*. Ambas metáforas han sido mencionadas también en el trabajo histórico realizado por Menghini (2006), este tipo de metáforas se contrapone de cierta forma a lo propuesto con los niveles del pensamiento geométrico de van Hiele (1999), Pegg y Davey (1991), ya que el contacto que se tiene con arena, semillas, piedrecitas, va más allá de lo visual y de

---

[125] *Mirar en* *http://us.123rf.com/400wm/400/400/peterkirillov/peterkirillov0812/peterkirillov081200113/4059471-kubische-h-user-in-rotterdam-niederlande.jpg.*

[126] *Arquitecto Holandés (8.02.1934 – 8.06.1999).*

[127] *Una curva de Lissajous es el gráfico de un sistema de ecuaciones paramétricas:* $x = A sen(at + \delta)$, $y = B sen(bt)$, *el cual describe un movimiento complejo armónico.*

[128] *Un fractal está definido como "una forma geométrica quebrada o fragmentada, que puede dividirse en partes, donde cada una de las cuales es una copia, de tamaño reducido, de la totalidad." En* Mandelbrot, *B.B. (1982). The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman and Company.*

las analogías que se pueden hacer por medio del sentido de la vista. Una vez que se ha dibujado un punto, una línea y se le han designado letras, esta todo el proceso terminado, es decir, en clases de matemática no se puede empezar cada vez con la visualización (Zimmermann y Cunningham, 1991: Kadunz, 2003) tan concreta, y más aún, en geometría sería la “muerte” inmediata de nuestros alumnos: No ocurre lo mismo, si se hace una secuencia partiendo de construcciones como se mencionaba anteriormente, en este caso no se está asociando una figura geométrica con sus propiedades directamente, se le está dejando al alumno empezar desde lo enactivo hasta lo simbólico. Con esto último, se esta incluyendo lo sensorial y la percepción matemática.

La visualización (Zimmermann y Cunningham, 1991: Kadunz, 2003) como se ha visto en la sección 4.1.3., está relacionada con el planteamiento de la situación, con la toma de decisiones y con la elección de la estrategia, con lo que hay que tomar cuidado es que la visualización también influye en las respuestas y en la formación de argumentos, lo que puede ser en algunos casos muy contradictorio (Barwise y Etchemendy, 1991, pág. 11), cuando el dibujo que ha sido utilizado en la visualización, no es el adecuado para hacer las conjeturas correctas.

En este trabajo no se consideran los tres niveles de van Hiele (1999) para el pensamiento geométrico, a saber el visual, el descriptivo y el de la deducción informal, por estar basados en la edad del individuo y en las capacidades que se tienen a determinada edad. Como se ha visto en este trabajo, ver capítulo I, el hombre piensa y desarrolla capacidades que no van en relación con la edad, sino que con la forma de aprender y con las herramientas que se tengan en el medio y en el interior del individuo. Esto significa que una persona de cuarenta años puede querer aún y hasta el resto de sus días, tocar con la mano todos los objetos y su aprendizaje estará siempre desde lo concreto a lo simbólico, desde el ejemplo a la generalización, sin que esto repercuta en el desarrollo de todas sus capacidades. En el mismo sentido, van Hiele (1999), desarrolla actividades que parten justamente con juegos y desde lo enactivo se intenta llegar a la argumentación, que es lo que se intenta decir en este trabajo, por así decirlo, se considera el trabajo de van Hiele (1999), pero no su modelo teórico.

Finalmente, se puede decir que el pensamiento geométrico, está relacionado con el pensamiento numérico, que desarrolla la capacidad de reconocer patrones, que involucra la percepción de patrones, la expresión de patrones y el reconocimiento de estructuras geométricas en nuestro medio, que está fuertemente ligado con las magnitudes, las medidas y con la percepción espacial.

4.2.3. PENSAMIENTO ALGEBRAICO.

La naturaleza del pensamiento algebraico tiene que ver con el hacer generalizado y con la abstracción desde los casos particulares (Hefendehl-Hebeker, 2007), es decir, con las posibilidades de poder interpretar, representar y capturar, todos los casos en una generalización en conjunto y común. Viceversa, esta representación-capturada debe ser adecuada y siempre de la misma forma interpretada (Schwank y Nowinska, 2007; Mason, 1996; Mason, Graham y Johnston-Wilder, 2005; Lee, 1996). Así el pensamiento algebraico es el que conduce a la generalización y está relacionado con variables que se "mueven" dentro de un conjunto, con expresiones como, "esto representa cualquier número", con estructuras dentro de un conjunto y con reglas dentro del conjunto, con la utilización de estas reglas dentro y fuera del conjunto, el pensamiento algebraico está relacionado con geometría, con sus generalizaciones que trascienden el área y por supuesto que este pensamiento está relacionado con fórmulas, con técnicas de aplicación de estas fórmulas, con la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

En la educación escolar, el desarrollo del pensamiento algebraico incluye al pensamiento aritmético, es decir, se trata de generalizar el pensamiento aritmético, de tratar las operaciones básicas, de forma generalizada, utilizando expresiones del tipo: "la suma es válida para cualquier número", "reducción de expresiones algebraicas". Los inicios de este pensamiento se produce en la suma en primer o segundo grado, los niños suman objetos y no números, es decir, este trabajo denominado concreto, es la raíz para el pensamiento algebraico (Hefendehl-Hebeker, 2007). Cuando la maestra dice: "Tengo 4 manzanas y agrego 8 manzanas, ¿cuántas manzanas hay en el saco?", ver tabla 16. Es en este momento cuando se empieza, sin querer y sin pensar, en el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que da igual cual manzana dentro de todas las manzanas que existen en el mundo, las que se eligen para agregar al saco, da igual si la manzana es roja, verde o amarilla, es más, el alumno sabe que puede hacer el mismo ejemplo con naranjas y con cualquier fruta favorita e incluso verduras, legumbres, lápices, niños, etc. El alumno sabe que las manzanas provienen del mundo de los objetos y que son reemplazables por cualquier otro objeto de este conjunto, es decir el alumno sabe que la palabra manzana puede ser reemplazable por cualquier otro objeto, es decir el alumno toma la manzana en su mano, hace el trabajo enactivo propuesto, pero sabe que, sería lo mismo si tuviera una naranja en su mano. No se debe confundir el pensamiento concreto con el trabajo con materiales, se puede tener pensamiento concreto con objetos abstractos. Otra vez, lo que Piaget (Beth y Piaget, 1966), decía sobre lo concreto, no tiene una validez en el proceso de aprendizaje por medio de materiales y este proceso de aprendizaje con materiales es válido en cualquier etapa de la vida.

Lo que seguramente, es una confusión, es cuando se reemplaza un objeto unitario por un objeto que no es una unidad, si no que más bien es un paquete de objetos, es decir, ya no se trabaja con el uno, sí que se trabaja con números mayores que uno. Lo que confunde es la notación y no queda claro cuál es la operación que hay entre estos dos elementos, entre el número y la letra. En general, los profesores lo saben, pero no se explicita en la notación y no se explica en la clase. Los motivos pueden ser que en los primeros ejemplos de la educación básica este tema no se profundiza y se deja como concepto de lo concreto y no de un inicio básico a lo algebraico. Es decir en la frase: Tengo 4 manzanas en un saco y agrego 8 manzanas al saco, no se ha explicitado que la palabra manzana juega el rol de variable y que además, al realizar la operación 4 M + 8 M = 12 M (ver tabla 16), se debería decir que se puede hacer el mismo ejercicio con manzanas, con peras, con naranjas, con sacos, con paquetes y que la operación que debería aparecer entre medio del número y de la letra es la multiplicación.

Tabla 16: Frases, símbolos y lenguaje, operaciones.

4 M + 8 M = 12	**4 P + 8 P = 12**	**4 N + 8 N = 12**
¿Cuál es la operación que hay entre el 4 y la letra M?		

2 x S + 4 x S = 6 x S	2 x 2 x M + 4 x 2 x M = 12 x M
La operación que hay entre números y letras es la multiplicación, esto es independiente si se trabaja con objetos unitarios como las manzanas o con objetos que contienen a otros objetos, como los saquitos. Incluso cuando se trabaja con medidas de longitud, de masa.	

Note que si se pone un igual y se intenta trabajar en concreto con las manzanas se tendrán en total 24 manzanas (en cada lado hay, se ven y existen 12 manzanas). En este caso, conviene pasar a la fase simbólica para decir que la idea de "se tiene" es equivalente a un "igual". Cuando el alumno trabaja con objetos concretos, como manzanas, se ha observado que existe una confusión entre tener una cantidad, su existencia y el trabajo simbólico.

Es en la utilización de saquitos o cajitas, donde hay un gran paso, no en el uso de las letras, sino que en el paso de pensar en manzanas de a una en una o en un paquete o conjunto de manzanas a la vez. Se ha observado que problemas parecidos, no presentan una dificultad para los alumnos, siempre y cuando, si se realiza con cajas, saquitos, bolsitas, llenas de semillas, porotos o lentejas, de forma concreta y en profundización, con el proceso de los niveles de Bruner E.-I.-S.

Para esto se debe considerar que el alumno, solo necesita saber contar y que la multiplicación será vista de esta forma como el tener tres saquitos, es decir, como una repetición de una cantidad. La intención de estos problemas, debe estar enfatizada en la variabilidad de los objetos a utilizar, esto quiere decir, que en los ejercicios, se debe dar énfasis no tanto a la dificultad de la suma, sino que más al cambio entre manzanas y objetos unitarios y al cambio entre paquetes de objetos y objetos unitarios.

De esta forma el trabajo con el pensamiento algebraico tendrá sus inicios en la educación básica en relación al pensamiento aritmético, para luego tener su expansión a los campos de la geometría y del pensamiento funcional. En estos contextos y con el desarrollo de la estrategia de generalización, se habilitaran los alumnos en la formulación de generalizaciones a la búsqueda de generalidades y a su formulación, teniendo en cuenta que el pensamiento algebraico:

1. Promueve el desarrollo de la estrategia de generalización o la capacidad de generalizar en contextos matemáticos.
2. Promueve el desarrollo de la modelación y de los usos de estas en variados contextos.
3. Da una base eterna, abstracta y fuerte a lo concreto.
4. Es un lugar donde se puede trabajar, obtener frutos de nivel abstracto y con este trabajo se desarrollan diferentes dimensiones y categorías del PM.
5. Otorga una estructuración y comprensión de la matemática.

En particular, estos puntos coinciden con los dados por Butto y Rojano (2004) y con Hefendel-Hebeker (2007), en cuanto a que el álgebra "promueve el desarrollo de un pensamiento matemático y estimula una comprensión más profunda de las operaciones y las propiedades". Más aún, estas autoras están conscientes de que el álgebra y por lo tanto el pensamiento algebraico establece puentes entre lo concreto y lo abstracto. Las dos primeras autoras, promueven el desarrollo del pensamiento algebraico desde la geometría y la última se basa en el álgebra y en los siguientes puntos, para promover y dar una base al pensamiento algebraico:

1. "El álgebra ayuda a materializar y comunicar pensamientos" (Fischer, 2003, citado en Hefendel-Hebeker, 2007, pág. 148).

2. Debido a las reglas exactas de la utilización de los símbolos, permite al mismo tiempo precisar el conocimiento intuitivo y representarlo de forma única (Cohors-Fresenborg, 2001).
3. La posibilidad de transformación, basada en normas, alivia la idea y el pensamiento. Los detalles del contenido lógico de operaciones son en gran parte sustituido por el contenido invariante en las operaciones del pensamiento.
4. En esta área se pueden incluso crear nuevos “productos”, basados en las estructuras y en las condiciones de las operaciones.

A pesar, de que estos cuatro puntos han sido traducidos del original, he debido cambiar en los últimos dos puntos, la intención de las frases y las he adecuado a este trabajo y sus intenciones. Al parecer Hefendel-Hebeker (2007), estima que el álgebra es un mundo donde solo hay reglas y a partir de esas reglas es posible expresar nuestras representaciones, creo que hay un paso entre estas dos, que no ha sido explicitado y es el de donde, hasta donde, se conocen las reglas y las utilizo o bien a través de un proceso constructivo me doy cuenta de que estas reglas responden a un actuar, a un patrón determinado. Al parecer, la autora parte de la base del conocimiento del álgebra y de sus reglas. Más aún, ella no menciona la palabra estructura, pero ha sido agregada, ya que para este trabajo el álgebra es, generalización y estructura.

Con estos cuatro puntos más las cinco consideraciones anteriores, se puede mencionar la frase de Whitehead (1947, citado en Hefendel-Hebeker, 2007, pág. 149), “el álgebra nos proporciona una herramienta poderosa de valor creativo de las matemáticas, en especial de la creación y análisis de patrones”. Desde la mirada de Lee (1996), el álgebra es mirada desde una cultura social, como una forma de hacer grupos de personas, donde cada grupo tiene sus reglas, normas, idiomas, creencias, etc. Este proceso de clasificar y reconocimiento de patrones, no es otra cosa que encontrar generalizaciones y estructurarlas, dentro de un posible.

Finalmente el pensamiento algebraico puede ser considerado como una categoría dentro del PM, que comparte varios elementos con otras categorías, como por ejemplo, con el pensamiento aritmético y con el geométrico. Si el álgebra, es considerada como una cultura dentro de la matemática (ibidem, 1996) en la que se reproduce y se analizan los patrones de una acción o de una función determinada, entonces el "pensamiento algebraico" debe contemplar todos los actos de pensamiento, que conforman esta cultura y que llevan hacia esta forma cultural. De esta forma, el pensamiento algebraico se asocia con muchas actividades mentales, como la generalización, la abstracción, el análisis, la estructuración y la reestructuración.

4.2.4. PENSAMIENTO ESTOCÁSTICO.

Según Scholz (citado en Bea, 1995, pág. 5) el pensamiento estocástico denota la actividad cognitiva de una persona cuando se enfrenta a problemas estocásticos y denota también el proceso de conceptualización, de comprensión y de procesamiento de la información en situaciones o problemas relacionados con elementos de la estocástica, como por ejemplo, elementos de azar y de probabilidad, también denota el proceso cognitivo del trabajo de la información cuando se aplican modelos estocásticos a un problema de probabilidad cerrada. Es decir, el pensamiento estocástico está relacionado con las situaciones y con los problemas que involucran tanto las combinaciones, como los conceptos de probabilidades de que algo ocurra y el trabajo con la estadística (Fischbein, 1975).

Más aún, deberíamos agregar que el pensamiento estocástico es una evaluación crítica de la variabilidad y la incertidumbre, las variables son consideradas como variables aleatorias, sus posibles orígenes se modelan y a diferencia de la matemática determinista, incluye la incertidumbre de forma transparente, con la ayuda de modelos matemáticos de situaciones de decisión, lo que se traduce en las declaraciones de probabilidad, por ejemplo, los intervalos de confianza o en base a las pruebas de hipótesis. El pensamiento estocástico es un intento de obtener claridad acerca de la variabilidad y la incertidumbre, más aún, relaciona tres variables, como lo son la realidad, sujeto y teoría (Borovcnik, 1992, págs. 2-35). La estocástica tiene una base en el conocimiento incierto, pero con el conocimiento de la medida y el tamaño, junto con la proporción de incertidumbre, se transforma en conocimiento útil. Según lo que se ha visto en la sección 2.1, este pensamiento tiene asociado también un razonamiento, que es aquel que infiere a partir de sentencias probabilisticas, esto nos da en conjunto con lo anterior una relación aún mas fuerte con las estrategias, es decir, el pensamiento estocástico parte de una incertidumbre y poco a poco se va transformando en una conjetura, lo que va muy bien con la raíz griega de la palabra estocástico que significa “hábil de conjeturar”.

La intuición juega un rol básico en el pensamiento estocástico[129] (Fischbein, 1975; Borovcnik, 1992), asi como la Heuristica (Bea, 1995), ambas relacionadas con la información otorgada en el problema estocástico, podría derivar en resultados sorprendentes por parte de los alumnos. Por otro lado se debe tomar en cuenta la

[129] *Se puede considerar el pensamiento aleatorio como un sinónimo de pensamiento estocástico.*

formulación del problema para no producir, junto con las creencias individuales, respuestas que no son verdaderas o las llamadas falacias, es por esto que en problemas matematicos y estadisticos es importante no otorgar información, que podría llevar al alumno a hablar de sus creencias y mezclar heuristica con intuición y creencias en las respuestas. Esta es una de las criticas a muchos trabajos de estadisticas, donde la manipulacion de información produce efectos no deseados (ibidem, 1995).

La introducción del pensamiento estocástico en la educación matemática básica, se justifica, no tan solo porque permite revisar de forma crítica toda la información que hoy en día aparece en los medios de comunicación y mientras antes se aprenda mejor, sino que también es parte del pensamiento del ser humano, sin considerar la edad, el predecir, el atreverse a pronosticar, el seguir las intuiciones y proclamarlas como una verdad del interior y mucho mejor si estas tienen un soporte matemático determinista. Según Bea (1995) hay muchos problemas estocásticos que se dejan resolver por la estimación subjetiva, con esto se puede dar paso a otra capacidad matemática como la capacidad estimativa.

Muchos niños juegan al “adivina que”, “te apuesto que” y “yo creo que”, de estos juegos y las posibilidades que tienen para responder o decir, se puede preguntar por qué es así, o por qué no se eligió otra alternativa, para ir desarrollando la formación de conjeturas y para desarrollar el pensamiento estocástico. El desarrollo de este pensamiento podría derivar, en el mejor de los casos, en un tipo de modelación, lo cual es también parte del objetivo de la educación matemática. Estos procesos de educación podrían también repercutir en una evaluación personal de la objetividad y de la subjetividad, por ejemplo, si mi número favorito es cuatro y estoy tirando el dado, debería salir el cuatro porque es mi favorito, pero yo sé que no es así, cada número tiene la misma probabilidad de salir tirado. Esta conjetura solo se logra en la práctica, es decir, tirando dados, una buena cantidad de veces. Otra actividad estocástica, es la que se produce al abrir un paquete que contiene dulces de diferentes colores y preguntarse cuál de los colores viene en más cantidad, yo espero que sea mi color favorito, pero será así, que ocurre con el paquete de dulces de mi compañera, que pasa si los comparamos y después los juntamos, que ocurre si los ordenamos como columnas y luego los dibujamos en el cuaderno y comparamos este dibujo con los otros de la clase, etc.

Para cursos de secundaria, la importancia de desarrollar este pensamiento es bien conocida, pero tenemos la necesidad de agregar en este trabajo, todavía algo más, que está relacionado con lo amplio del pensamiento estocástico y del PM, que es su relación entre el hacer, la intuición y la creación de metáforas conceptuales, como se muestra en (Soto-

Andrade y Reyes-Santander, 2010). Más aún, este pensamiento probabilístico no solo se limita a la matemática, sino que a todas las otras áreas (ver sección 4.4.4.), desde la música con Xenakis[130], hasta la medicina con los trabajos de Gigerenzer[131] e incluso con la teología y los valores de cada religión[132].

Por último y en relación con la sección 2.1.B., muchas de las decisiones del diario vivir, responden más al estilo del pensamiento estocástico y probabilístico, que al estilo de pensamiento lógico. En el caso de pedir dinero prestado, en el caso de cruzar la calle, en el caso de presentarse a un trabajo, de pedir un dulce a la mamá, en todos estos casos y en muchos otros, se estima alguna probabilidad de acierto y de salir con la suya, pero también se sabe, que con cierta probabilidad, se podría perder. En el periódico, en la televisión y en cada trabajo periodístico se incluye este tipo de pensamiento, mezclado con palabras que sugieren diferentes posibilidades. Una de las tareas de las clases de matemática, debería ser el comprender y saber aislar información y tratamiento de contenidos, para no dejarse sorprender por la magia de los números y la potencia de las palabras. Este se puede lograr con el tratamiento de diferentes textos, provenientes del periódico y de encontrar donde podría estar la manipulación "exagerada" o "incorrecta" de la información. Más aún, se espera que el pensamiento estocástico, tenga sus inicios en la educación primaria y que se dé más libertad a este pensamiento en relación con la intuición y en relación al estilo de pensamiento probabilístico.

4.2.5. PENSAMIENTO FUNCIONAL.

El pensamiento funcional está relacionado con la comprensión de la relación causa-efecto o con relaciones funcionales, es decir, con la dependencia de una variable causa con respecto a la variable-efecto (Roth, 2005). Por otra parte, el pensamiento funcional definido por Vollrath, citado en Roth (2005, pág. 69), incluye el pensamiento relacionado con las funciones, su definición matemática y todos los pensamientos que desde ahí se generan, es decir, el pensamiento funcional de Vollrath, es especifico de la representación semiótica tradicional $f(x)$ y todo lo que la definición de función conlleva. Por otro lado, está el pensamiento funcional definido por Schwank (2003), como el contrario de lo

---

130 Iannis Xenakis (1922-2001), músico y arquitecto griego.

131 Gerd Gigerenzer (1947-...) psicólogo alemán, director de "Center for Adaptive Behavior and Cognition (ABC), en el Instituto Max-Planck, Berlín.

132 En este último caso no hay referencia y la autora se refiere a una presentación dada por la Dra. Motzer, colega de la Universidad de Augsburgo. Nota de la autora.

predicativo, en este sentido está más cercano a la definición dada por Roth (2005). En esta sección, se consideran los tres puntos, más la consideración realizada por Vollrath, es decir, la consideración de la definición matemática de función dentro del pensamiento funcional, ya que este pensamiento está considerado dentro de los pensamientos asociados a los contenidos matemáticos y una de las consideraciones que se deben tener aquí es, que no tan solo se debe comprender los conceptos, sino que debe ser posible comunicarlos y expresarlos de manera que todo el mundo lo comprenda. En este sentido, el pensar en la definición de función es una posibilidad de almacenar el concepto matemático función y como se acaba de describir.

El pensamiento funcional que aquí se considera, es entonces el relacionado con las funciones, con el movimiento, con la relación causa y efecto y con las capacidades de percibir lo estático, lo dinámico, la capacidad de percibir la causa y el efecto. Es en este pensamiento donde la generalización tiene una base diferente a la del pensamiento algebraico.

La base del pensamiento funcional es la relación causa - efecto, con todo lo que esto conlleva, como por ejemplo, las estrategias que se desarrollan al haber una causa sin efecto, o bien cuando, hay un efecto y se debe encontrar la causa, como se describen estos procesos y como desde ahí se hace una modelación de causa-efecto, donde x denomina un elemento sobre el cual se produce la causa f y el resultado es otro elemento denominado por la letra y .

DeMarois y Tall (1996), describen cinco diferentes niveles en el pensamiento con funciones, a saber:

1. Nivel de pre-acción: primeras relaciones y correspondencias, por ejemplo, si le pego a Pablito, el me pegara de vuelta, si le pego a Pedro, él no me pegara de vuelta, etc. En este caso la función es pegar y los elementos son los compañeros de curso, los resultados son dos tipos de reacciones, pega de vuelta y no pega de vuelta. Otras situaciones de pre-acción son las maquinas de dulces, si pongo una moneda tengo un dulce, si pongo dos monedas tendré dos dulces, etc. Este nivel de pre-acción es el que tienen los niños de primaria y que raras veces se relaciona con pensamiento funcional.
2. Nivel de acción: que integra la visión “horizontal” de Vollrath (1986), en el sentido de correspondencia horizontal, si esto entonces esto, incluye una notación en tablas o con flechas de correspondencia. Aquí el nivel de acción no tiene la connotación de enactivo, sino que más bien con establecer una correspondencia entre variables, es lo que se denominaría, pensamiento funcional estático.

3. Nivel de procesamiento: donde se integra la visión dinámica, donde el tiempo juega un rol en la situación y en la causa sobre el elemento, incluye la representación gráfica.
4. Nivel de objeto: donde se incluye la generalización, cada vez que se hace algo al objeto, se sabe lo que se obtendrá. Considera el concepto de función solo relación a la definición matemática, la representación de esta generalización es un objeto.
5. Nivel proceptual[133]: relacionado con la flexibilidad y con la capacidad de cambiar entre los distintos niveles.

Aunque DeMarois et al. (1996) solo mencionan la flexibilidad de cambio entre el nivel de procesamiento y de objeto, en este trabajo se considera una ampliación de esta flexibilidad en el sentido que el nivel proceptual, incluye una flexibilidad de cambio entre los 4 niveles.

Desde el momento en que el alumno de básica pueda pasar desde la pre acción al nivel de acción y así sucesivamente, se estará hablando de construcción de metáforas conceptuales y es la intención de este trabajo, el considerar la posibilidad de la flexibilidad, de cambio de uno a otro, ver resumen capítulo 2. Esto es, estos niveles de acción, podrían ser comparados con el proceso de Bruner (1971).

Por otro lado, Höfer (2006) presenta la casa para el pensamiento funcional (Das Haus des funktionalen Denken), que contiene tres de los niveles anteriores y representaciones, realizada con la intención de que el pensamiento funcional fuera un elemento unificador y de esta forma ayudar al profesor de la clase en la estimulación del pensamiento funcional y todas sus variables, en la figura 14, se presenta un adaptación de la casa del pensamiento funcional, la que incluye los aspectos de estático y dinámico.

Eliminada la confrontación entre representaciones, que daba el autor y agregando los otros dos niveles, se muestra en la figura 14 como los procesos, las representaciones y las competencias, vendrían surgiendo a través de un problema. Es decir, el pensamiento funcional, es mirado ahora, a través, de la presentación de un problema y de su desarrollo.

La mayoría de las representaciones que aparecen en un problema son: tablas, gráficos, expresiones algebraicas, dibujo o expresión verbal que describe el comportamiento de una función, son mencionadas por el mismo autor, comentando que en los problemas los alumnos recurren a estas representaciones, más de lo que lo necesitan para resolver el problema.

---

[133] *The procept layer, no se encontró una traducción adecuada a la palabra procept o proceptual como mencionan los autores de este trabajo, se deja la palabra proceptual.*

Cada uno de los cubitos que aparecen en la figura 14, son utilizados según el autor, como un indicador de logro, es decir, se puede considerar como método de evaluación del pensamiento funcional del alumno. Por ejemplo, el problema: "Encuentra algunos puntos de la representación gráfica de la función f , con $f(x)=x^2$, en el intervalo $-3<x<3$ y dibuja la gráfica de la función en un sistema de coordenadas" (Höfer, 2006), puede ser considerado como un puente desde lo algebraico hacia lo gráfico, que requiere de una visión estática de la función.

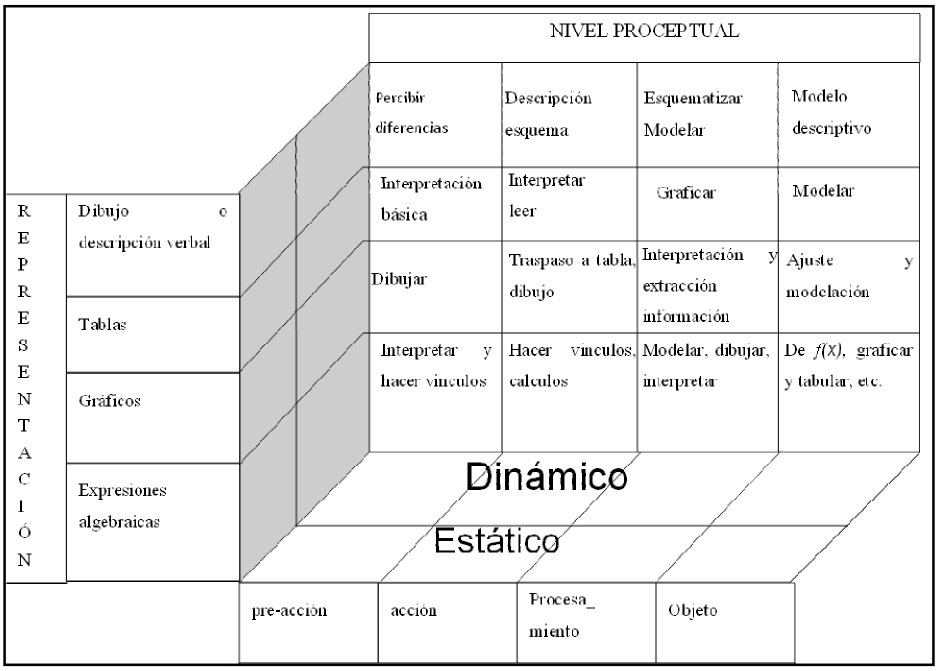


Figura 14: Adaptación[134] de la casa del pensamiento funcional

de Höfer (2006).

Una visión dinámica del mismo problema sería en relación a problemas de analogías entre la ecuación cuadrática y la aceleración de un cuerpo, lanzamiento de una pelota, o bien, viendo en forma general que la variable x , se "mueve" por el eje X .

El alumno deberá utilizar su capacidad de percibir lo dinámico, para ver la dinámica de la función cuadrática.

Es muy probable, que un alumno pueda resolver los problemas relacionados con funciones, utilizando únicamente el pensamiento funcional estático, esto es, porque la dinámica, esta

---

134 *En este caso, se ha incluido el nivel proceptual, la representación y se han realizado las traducciones correspondientes.*

rara vez incluida dentro del concepto de función y se trabaja siempre de manera estática (Krüger, 2000).

La figura 14, nos muestra también la importancia de los dos niveles, en el desarrollo del pensamiento funcional y la inclusión de la pre acción como motivación a empezar con lo más básico, es más, esta casa muestra que si uno se sabe la definición de función, esto no significa que uno también sabe o que se haya realmente "capturado" el concepto de función.

Finalmente y en conexión con la sección 2.1.2., el pensamiento funcional, tiene una base en la capacidad de percibir la causa y el efecto, esto es, la capacidad de percibir diferencias que estan relacionadas y utilizar esta información para ordenar elementos y describirlos, incluyendo descripciones de relaciones estaticas y dinamicas.

Las cinco acciones mencionadas por DeMarois et al. (1996), se relacionan con las características del pensamiento de un individuo, como es el caso del nivel de acción y funcional legislativo, el nivel de procesamiento con el funcional ejecutivo, esto nos da una pauta para decir que el desarrollo del pensamiento funcional esta ligado con la formación de proyecto y con el actuar de un individuo en el desarrollo de este.

Es decir, si un individuo es funcional, entonces el concepto de función estará reflejado en su actuar y desde ese actuar, habría que trabajar con ese individuo en la formación del concepto función en matemática.

Así, en esa interacción entre la personalidad y el concepto matemático de función, se incluye el pensamiento funcional de Vollrath (1986) y el pensamiento funcional definido por Schwank (2003).

4.2.6. PENSAMIENTO FORMAL.

En este trabajo se ha introducido el pensamiento formal, como parte del pensamiento relacionado con los contenidos, en esta sección desarrollamos esta noción, considerando lo visto en los capítulos 1. y 2. especialmente la sección 3.6.1. Agregando además, información de otros autores con respecto a este tema.

El pensamiento formal, esta relacionado con el pensamiento lógico formal, es decir con el pensamiento en base a hipotesis-deducción y en base a los contenidos de la lógica formal, ver sección 3.6.1. En esta subcategoría se consideran las proposiciones formales, sus demostraciones formales como parte de un saber erudito y la capacidad de utilizar el pensamiento lógico (Devlin, 2006) junto con la capacidad de seguir y construir una cadena de hechos o resultados. El alumno, con todo lo que se ha visto en los capítulos anteiores, puede llegar, por si mismo, a entender este mundo formal y puede llegar a realizar demostraciones formales, la primera oportunidad la tiene en la formación de conjeturas y en la ejecución de estrategias, seguido del diálogo, la comunicación, lo que incluye la creación de esquemas (Dubinsky, 1991) y de una comprensión de la verdad y la mentira, en este punto Piaget (2003), menciona la capacidad de critica de los niños y del desarrollo de esta para comprender desde un punto de vista individual el medio y realizar mejoras.

En comparación con el nivel del pensamiento formal de Piaget, que según el autor, se desarrolla a partir de los 11 o 12 años, no esta muy relacionado con la definición que aquí se esta dando, ya que Piaget se refiere mas bien a la abstracción de las operaciones y del paso de lo concreto a lo abstracto. Esto último también ha sido bien discutido en este trabajo, se ha visto que el niño hace este proceso mucho antes y que depende de la forma de la educación, si el proceso de abstracción reflexiva es posible o no. Esto significa que, el niño hace una imagen mental abstracta del objeto y puede ser que por motivos del desarrollo de la capacidad del lenguaje, no la pueda transmitir. Más aún, el trabajo con objetos concretos es importante desde varios puntos, pero lo central aquí es no olvidarse del rol de la percepción en el aprendizaje.

Más aún, experiencias personales, con niños de la tercera y cuarta clase, la edad de estos niños fluctuaba entre 8 y 10 años, me ha mostrado que, hay muchos niños que les gusta trabajar con símbolos, pero que no dominan la estructura lógica de una operación y que más bien obtienen resultados desde la intuición. Por otro lado, muchas niñas, en comparación con niños, muestran un desarrollo de la parte intuitiva y/o crítica y no prefieren el trabajo con símbolos abstractos. Las experiencias son extraídas del curso llamado Knobelkurs[135]

En situaciones donde se debe mostrar que una propiedad es cierta, con argumentos ya trabajados, se pudo observar durante los cuatro semestres que estuve en el curso, que no había ningún problema de conjeturar y de argumentar deductivamente. Lo que quiere decir, es que depende de varios factores y no de la edad, el poder decir si un alumno está en condiciones de utilizar y de desarrollar el pensamiento formal, en este caso se puede relacionar el pensamiento formal, como característica de la personalidad, ver sección 2.1.2.

El pensamiento formal, toma más fuerza en la educación escolar, cuando los programas, ver tabla 2, consideran en sus inicios la argumentación como inicio de la demostración

[135] *Knobelkurs, es un curso que prepara el departamento de didáctica de la matemática de la universidad de Augsburgo, para niños interesados en matemática de todos los colegios de básica de la ciudad, en este curso participan alrededor de 30 a 35 alumnos.*

formal, entendiendo como demostración formal, la utilización de representaciones semióticas tradicionales y las reglas de la lógica formal. Una argumentación, por otro lado, está relacionada con la capacidad de seguir una larga concatenación de hechos o resultados y no con la utilización de las representaciones semióticas simbólicas matemáticas.

Una cita de Schmidt (2000), en la cual se relaciona el pensamiento formal con el arte, en el sentido de su utilidad y de lo práctica en la vida diaria, nos ayuda entender en qué contexto, está situado el pensamiento formal:

> *„Die direkten Anwendungen des formalen Denkens, denen wir begegnen, sind aber relativ selten, eine Tatsache, die Kunst und Mathematik bereits etwas näher rückt.“*[136] *(Schmidt, 2000, pág. 91).*

Con este queremos decir que el pensamiento formal, es cercano a las expresiones artísticas y no a lo cotidiano, pero que es necesario tener un equilibrio entre lo formal y lo cotidiano y estrechar la brecha entre ambas, con conexiones que se producen del actuar y del sentir.

Por último, el pensamiento formal, se considera dentro de los contenidos, ya que la demostración formal y las representaciones que en esta se utilizan, son parte de los programas de estudio escolares, lo que se propone, en vez de enseñar a demostrar, se debería desarrollar el pensamiento formal, como parte del desarrollo del PM. Según la siguiente cita:

> *"Thus one may view the usual mathematician's dichotomy between intuition and rigour as one between the holistic, visual thinking characteristic of the right brain, and the rigour of the sequential, logical thinking characteristic of the left. But the psychologist sees the possibility of more sophisticated (secondary) intuitions arising from refined concept images which can include the mental imagery of logic and deduction. Thus aspects of logic too can be honed to become more "intuitive" to the mathematical mind. The development of this refined logical intuition should be one of the major aims of more advanced mathematical education." (Tall, 1991, pág. 11)*

Se puede mirar el pensamiento formal en el sentido más amplio y no tan solo en la técnica de las demostraciones formales, en el rigor de estas, sino que la intuición y el rigor, pueden estar juntos en el refinamiento de la intuición lógica.

[136] *"Las utilizaciones directas del pensamiento formal, con las cuales nosotros nos encontramos, son relativamente poco frecuentes, un hecho que hace al arte y a la matemática ya estar un poco más cerca."*

4.3. LAS ESTRATEGIAS Y LOS PROCEDIMIENTOS.

Como se vio en las secciones 3.4 y 3.5.1 hasta 3.5.10, las estrategias y los procedimientos son parte de la categorización del PM. Las estrategias que consideramos en este trabajo son:

1. La prueba sistemática.
2. El principio de los extremos.
3. El principio de invariancia.
4. El principio de los casilleros de Dirichlet.
5. Principio simétrico.
6. Trabajo hacia atrás.
7. Descomposición del problema en partes.
8. Reestructuración.
9. Generalización.
10. El principio de analogía.

Donde el desarrollo de cada una de ellas, permite relacionarlas con la creatividad matemática (como se verá en la siguiente sección) y con los procesos cognitivos en matemática. Estas deben ser un medio en el aprendizaje y no un contenido a enseñar, si esto fuera posible de hacer. Estas estrategias deben ser conversadas y analizadas en favor de una comprensión, pero no en el rol de contenido. Las estrategias necesitan tiempo, son combinables y adaptables. Un problema o situación puede generar más de una estrategia de las que aquí se mencionan y es posible, que aquí no se hayan mencionado todas las que existen.

Un ejemplo, que puede ilustrar el desarrollo de diferentes estrategias, es el que se muestra a continuación:

Se quiere mostrar que $90 \cdot 90 - 1$ *es igual a* $91 \cdot 89$ *, de diferentes formas:*

1. Forma numérica (Prueba sistemática y/o el método directo, primero se calcula $90 \cdot 90 - 1$ y se obtiene 8099, luego se calcula $91 \cdot 89$ y se obtiene 8099)

2. Forma algebraica (Principio simétrico y de invariancia, los dos lados son equivalentes y además se observa que hay un menos 1 (principio de los extremos), en uno de los lados, se busca una factorización adecuada.

Primera posibilidad se escribe $1 = 90 - 89$ y se factoriza dos veces:

$$90 \cdot 90 - 1$$

$$= 90 \cdot 90 - (90 - 89)$$

$$= 90 \cdot 90 - 90 + 89$$

$$= 90 \cdot (90 - 1) + 89$$

$$= 90 \cdot 89 + 89$$

$$= (90 + 1) \cdot 89$$

$$= 91 \cdot 89$$

Segunda posibilidad, se escribe $90 = 89 + 1$ y se distribuye:

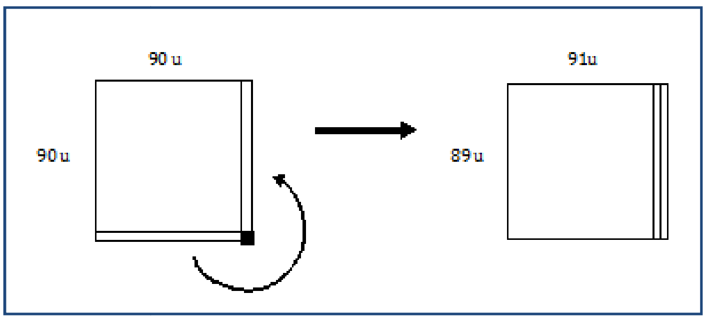
$$90 \cdot (89 + 1) - 1$$

$$= 90 \cdot 89 + 90 - 1$$

$$= 90 \cdot 89 + 89$$

Luego se factoriza por 89 y se obtiene $(90 + 1) \cdot 89 = 91 \cdot 89$.

3. Se recurre al principio de analogía, a las representaciones y a la capacidad de percibir lo dinámico. Si se sabe que la multiplicación de dos números enteros, tiene como representación al área de un rectángulo de lados, con las respectivas magnitudes, se tiene que, el cuadrado que esta a la izquierda es de $90u \cdot 90u$, el cuadrado en negro y la figura completa representa a la expresión $90u \cdot 90u - 1u^2$, si el rectángulo inferior que es $89 \cdot 1$ es "movido" y se coloca, como se muestra en el rectángulo de la derecha, se tiene, por principio de invariancia (conservación del área) que las expresiones $90 \cdot 90 - 1$ y $91 \cdot 89$ son iguales.



Así un problema, puede tener varias estrategias y formas de ser tratados, más aún, no se descarta la posibilidad de la existencia de otra forma de mostrar esta igualdad.

Así un problema, puede tener varias estrategias y formas de ser tratados, más aún, no se descarta la posibilidad, de la existencia, de otra forma de mostrar esta igualdad.

Con respecto a los procedimientos y a las operaciones matemáticas, estas son consideradas como procedimientos cuando son tratadas como técnicas para resolver un problema, cuando las operaciones son tratadas como contenido, ver sección 4.2.1, entonces estas no son consideradas como procedimientos. Los procedimientos no requieren de un abanico de actividades cognitivas, es más, solo es un recurso de la memoria y como metodología de resolucion de problemas con una doble naturaleza Sfard (1991), como algoritmo y como concepto operacional que ayuda en el proceso cognitivo.

4.4. PROCESOS Y CAPACIDADES NO RACIONALES.

En este trabajo hemos considerado los procesos no racionales, los cuales hemos denominados así, por tener una procedencia diferente a la cognitiva, pero de gran influencia en los procesos cognitivos. Estos están relacionados con el espíritu matemático (sección 3.9), con las herramientas del pensamiento matemático y con las habilidades matemáticas, como lo son la utilización de la lógica, el sentido común, la creatividad, la intuición, la fantasía, etc. están dentro de otra categoría del PM, que llamaremos procesos no racionales. Aunque la utilización de la lógica es un proceso absolutamente racional, está también dentro de esta dimensión como en la de estrategias, y es en el uso y en su forma, que estará dentro de una de las dos dimensiones. La intuición aunque relacionada directamente con las estrategias, no se deja categorizar dentro de esta, ya que su uso y su dominio está dentro de las capacidades del individuo, que no se dejan manipular y desarrollar tan solo con contenidos matemáticos, de la misma forma ocurre con la fantasía, la creatividad y el sentido común.

Los procesos y capacidades no racionales, tienen su procedencia en las creencias, en las vivencias diarias y son influenciadas por el medio directo e indirecto. Ejemplos del medio, son los que se observa alrededor, las actividades corporales que se realizan, etc.; como medios indirectos se entiende la economía del país, la cultura, el clima; etc. Estos procesos no racionales, son procesos cognitivos son del mismo tipo como el aprendizaje y el recuerdo, no responden a una estructura determinada, tienen una conexión directa con la cultura, con el medio, con las emociones, con el interés y con la percepción. Algunos de estos procesos y capacidades, tienen especial inferencia en matemática, como lo son: la intuición, la creatividad, la flexibilidad, la sensibilidad, la fantasía y la memoria. Estos procesos y estas capacidades, toman parte inconsciente en nuestras decisiones, en las elecciones de estrategias, en la selección, en las intenciones, en las valoraciones, en las evaluaciones, en las observaciones, en la atención y en la concentración.

A continuación y en relación a los capítulos anteriores, se trataran brevemente los procesos no racionales que tienen inferencia sobre el PM.

4.4.1. INTUICIÓN.

En esta sección se ha debido agregar de forma específica, lo que han desarrollado otros autores sobre la intuición matemática, lo hemos escrito en esta parte para relacionar todo a la vez.

Lo primero a considerar es Käpnick (2007), que da una definición de lo que sería la intuición matemática, en base a diferentes concepciones de lo que se entiende por intuición. La primera concepción de la intuición viene dada como una visión espiritual que captura al objeto, las situaciones, que completa a menudo los objetos, hechos, conceptos, principios, valores., etc., prescindiendo de conciencia (científica). Lo anterior proviene de Platón, que decía que la intuición es como una mirada inconsciente de las ideas y según Husserl, que agregaba que la intuición es como la esencia de la fenomenología. Otra concepción de la intuición, es la dada por la intuición como más que conocimiento obvio o como la certeza inmediata de una proposición o axioma, concepción basada en las ideas de Descartes, Leibniz y otros, donde la intuición es el conocimiento que proviene del inconsciente, pero basado en el conocimiento consciente y con esto, una persona intuitiva es considerada como “espontáneamente certero”. Otras concepciones son la intuición considerada como una súbita inspiración creativa o como imaginación creativa en un momento de la creación artística y la intuición como "sabiduría" del inconsciente, que se compone de emociones intensas y diversos mundos visuales que conforman la inteligencia de los sentidos (Goleman, Kaufman y Ray, 1997).

Para completar la definición de lo que es la intuición matemática (Käpnick, 2007, pág. 388), se agregan a las concepciones anteriores los siguientes tres puntos de vista sobre la intuición (Baldwin, 1974):

1. La formación de la especulación en situaciones ambiguas.
2. Sospechas y comprensiones no verbales.
3. Representaciones pictóricas de los fenómenos cognitivos del medio ambiente.

Con estas concepciones y con estos puntos de vista, que consideran las representaciones, se tiene un acercamiento a lo que serían las intuiciones matemáticas:

1. Un aspecto fenomenológico frecuente e importante de la resolución de problemas matemáticos.

2. Estan basadas en el conocimiento matemático pertinente (esto es en general, pudiendo haber excepciones) y en competencias-habilidades cognitivas que participan en la solución de problemas.
3. Marcan un objeto matemático y lo capturan al mismo tiempo a traves de las emociones sensoriales y de conocimientos holisticos-complejos.
4. No están vinculados exclusivamente a la lengua, sino que también estan impregnados por la construcción subjetiva, inconsciente y compleja de imágenes y mundos simbólicos.
5. Pueden interferir en todas las fases de resolución de problemas y decidir en las respectivas formas y en la calidad de la solución, es decir, en el enfoque del problema, como sugerencia de una solución, en el planteamiento de una estrategia "mirando una solución determinada", en la presentación de una solución incompleta, etc.

Algunos ejemplos de cómo los niños utilizan la intuición, son dados por Käpnick (2006), entre ellos destaca el niño llamado Félix, que está en el tercero básico tercera clase, al que se le pregunta por la cantidad de posibilidades diferentes de dibujar la casa de Nicolás[137], de una sola vez y sin levantar el lápiz de la hoja. La respuesta intuitiva del niño después de haber probado varias posibilidades es: Yo tengo el sentimiento de que si tomo la esquina correcta para empezar, se pueden hacer todos los caminos. Esto quiere decir, que el niño, no sabe exactamente cuántas posibilidades son, sino que su intuición le dice que esto dependerá de la esquina que elija y que de ahí se pueden contar los caminos.

Según Fischbein (1975, pág. 9), "hay que considerar dos tipos de intuición en educación de la matemática, la primaria y la secundaria". Donde la primaria se refiere a las creencias cognitivas que se desarrollan en los seres humanos, de una manera natural, antes e independientemente de la instrucción sistemática y la intuición secundaria, que se desarrollan como resultado de la formación intelectual sistemática, ambas juegan un rol en la resolución de problemas y en la acción de las capacidades cognitivas en una situación matemática. Más aún este autor, considera a la intuición uno de los factores más relevantes en el concepto de probabilidad y en la resolución de problemas relacionados con este.

Por último, en este trabajo se considera también que, "la intuición es el producto de las imágenes conceptuales del individuo" (Tall, 1991, pág. 11) y mientras más conciencia se

---

[137] *Haus vom Ni-ko-la-us, es la casa que se obtiene al unir cinco puntos y la idea es unir estos puntos de una sola vez y no pasar dos veces por el mismo lado.*

tenga de que estas son parte del PM, más posibilidades se tiene que el alumno construya conocimientos, a partir de sus propias herramientas, más aún, estas herramientas, pueden ser la base de otros procesos cognitivos conscientes.

4.4.2. CREATIVIDAD.

„Cuando se es niño,
Todos somos artistas.
La dificultad radica,
en quedarse asi, cuando se es adulto”.

Pablo Picasso.

Creatividad es una capacidad no racional, que permite de forma original e innovadora encontrar soluciones a los problemas, pero no tan solo a encontrar soluciones, sino que también a encontrar problemas (Mönks y Ypenburg, 2005). En la solución de problemas, la creatividad dependerá de cierta forma del problema planteado y de la componente de aceptación de posibles respuestas que tenga el docente (Weth, 1999), es decir, puede ser que la respuesta sea creativa, pero que el docente no se de cuenta de esta creatividad. En el segundo caso, en el encontrar problemas, muy pocos profesores, piensan que sus alumnos podrian llegar a tener exito tanto en el planteamiento de un problema, como en la solución del mismo, es decir, hay una falta de confianza en los alumnos, por parte de los docentes, para incentivar a los alumnos a la “creación de problemas”.

La creatividad es una de las capacidades, que menos se desarrollan, pero no tan solo es un problema escolar, tambien es un problema social, donde muchas veces la creatividad esta asociada con aspectos negativos de la personalidad. En este caso, es necesario introducir de más en más los términos de “independencia” y “autonomia” del trabajo (Leuders, 2003, págs. 133-147), con esto, no tan solo se desarrollaran estas dos características, sino que además se fortalecerá la confianza del docente en sus alumnos, de ellos mismos sobre si mismos y la creatividad entre otras capacidades.

Muchas veces la palabra creatividad esta asociada con la palabra sobredotación, pero de más en más, existe el término creatividad matemática (Weth,1999), como concepto didáctico, que intenta desarrollar esta capacidad desde la creación propia de definiciones (ibidem, 1999, págs. 44-52), desde el planteamiento de problemas abiertos (Ulm, 2004), del trabajo con “entornos del aprendizaje” (Hirt y Wälti, 2008), etc. Más aún, desde el punto de vista de la sobredotación se considera la creatividad con componentes culturales, sociales, clima familiar y educación, que no dan necesariamente a la creatividad como un indicador de sobredotación (Mönks y Ypenburg, 2005; Heller y Ziegler, 2007). Con esto, se puede decir que, el individuo que desarrolla su capacidad creativa tiene mas posibilidades de logro en los problemas que se le plantean y por otro lado, hay muchas personas que son consideradas sobredotadas y que no son creativas, esto quiere decir, que su marco de acción es más reducido, pero sobresaliente. Más aún, Vygostkij (1966) considera que la creatividad existe potencialmente en todos los seres humanos, y es susceptible de ser desarrollada; es decir, que no es privativa de los genios, sino que está presente en cualquier ser humano que imagine, transforme y cree algo.

Con respecto a lo que es el pensamiento creativo, existe un amplio consenso, en que se entiende como una generación de ideas a) que son inusuales u originales y b) que cumplan ciertas normas de valor, por ejemplo, decir que la mitad del símbolo 8 es cero (cuando se corta de forma horizontal) o que la mitad del símbolo 8 es tres (cuando se corta por la mitad de forma vertical) es orginal y creativa, pero no cumple las normas de valor que podrian ser dadas en matemática. Con esto se puede decir, en un primer intento que creatividad matemática es la producción de ideas y de asociaciones en una situación matemática; es el rompimiento de un marco teorico dado, conocimiento matemático conocido utilizado de una forma original y diferente y la generación de relaciones cruzadas (no directas).

Es necesario hacer entonces, una distinción entre pensamiento creativo y producto creativo en lo que respecta a la creatividad matemática (Weth, 1999). El pensamiento creativo esta relacionado con la forma y con la generacion de las representaciones mentales, que deben ser nuevas y el producto creativo tiene que ver con lo que se logra exteriorizar de estas representaciones y que tanbien deben ser nuevas, en este último caso se reconocen dos tipos: "El producto creativo "objetivo", que quiere decir que el producto es nuevo en la historia del ser humano y el producto creativo "subjetivo", que quiere decir que el producto es nuevo para el individuo" (Assanger, 1999, pág 367). Lo otro que también juega un rol en la forma de pensar es la personalidad del individuo, si tiene una personalidad creativa, lo mas probable es que busque de forma natural expresarse de otra forma, que es poco usual, a estas personalidades se les puede desarrollar con mayor facilidad la capacidad creativa matemática, si es que lo desean. Finalmente estan los procesos creativos, donde las eleccion de las estrategias y/o la generacion de las mismas, pueden ser una combinación tanto del pensamiento creativo como del producto creativo.

En la actualidad, se ha planteado la necesidad del estudio de las estrategias para desarrollar la creatividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este interés por las estrategias proviene de los resultados que han obtenido los alumnos alemanes en los estudios PISA (Baumert, Klieme, Neubrand, Prenzel, Schiefele, Schneider, Stanat, Tillmann y Weiß,

2001; OECD, 2001; OECD, 2004; OECD, 2007; OECD, 2009; OECD, 2010) y TIMS (Baumert, Lehmann, Lehrke,1997; Baumert, Bos, Lehmann, 2000a, 2000b; Bos, Bonsen, Baumert, Prenzel, Selter, Walther, 2008; Martin, Mullis y Foy 2008), que muestran, que en los ejercicios de rutina, los alumnos tienen un gran éxito y en los ejercicios que requieren de la capacidad creativa, no se obtienen los resultados esperados. Así, adquiere relevancia la utilización y la generación de estrategias para estimular la capacidad creativa. Con el uso de estas estrategias se tratará de contribuir al desarrollo de la creatividad y en general del PM.

De la capacidad creativa, se desprenden dos formas diferentes de pensamientos, el pensamiento convergente y el pensamiento divergente. El pensamiento convergente y la creatividad, se relacionan en que el producto creativo personal, es el esperado por todos pero con creación individual y es muy probable que la educación tradicional, tienda en mayor grado al desarrollo del pensamiento convergente, en el sentido que, hay muchas especialidades que dependen de la exactitud y de la manera rutinaria de proceder, como por ejemplo, el trabajo en laboratorios, la construcción de máquinas, etc. Ahora, si se logra en la educación un buen equilibrio entre estos dos pensamientos, convergente y creativo, entonces se obtendrán productos nuevos y un progreso en varios aspectos de la industria y la tecnología.

Por otro lado, se entiende como un desarrollo del pensamiento convergente, la asimilación de conceptos y su reproducción con exactitud, se proponen problemas que tienen exactamente una respuesta correcta posible. Esta definición de pensamiento convergente, se encuentra en contraposición al pensamiento creativo general. Según Calvin (2009, pág. 133 y sig.) reconocer el orden y la secuencia de ciertos actos no es una tarea cognitivamente fácil. Más aún, agregá el mismo autor, el imaginarnos un plan a seguir (pensamiento convergente) es al parecer solo una condición humana. La mayoría de los matemáticos trabajan en este modo de pensar, es decir, tienen pensamiento creativo, pero convergente, los resultados son los que la mayoría espera y se deducen de forma convergente. Solo algunos matemáticos trabajan de forma divergente, algunos que trabajan en el área del caos y su modelización, necesitan, al parecer, con mayor frecuencia utilizar el pensamiento divergente.

El pensamiento convergente esta muy relacionado con el pensamiento formal y con un lenguaje formalizado. En este caso, se habla de la utilización de “pocas operaciones cognitivas” (Bösel, 2001, S. 306), lo que no significa que el individuo, no haya necesitado en su momento, muchas operaciones cognitivas para aprender y automatizar las que requiere en un momento dado, al decir, que son pocas operaciones cognitivas, puede significar que el individuo, tiene una excelente conexión entre sus representaciones, la memoria (ver sección 3.1.1) y la utilización de los conceptos ya guardados.

Se entiende como desarrollo del pensamiento divergente el tratar de encontrar y definir un problema, que a su vez tiene más de una respuesta posible. En este caso, se deberá establecer diferentes relaciones, crear nuevos caminos y por lo tanto dar respuestas creativas objetivas y/o subjetivas, en este proceso se realizan también criticas personales de los resultados y no se utiliza la memoria, como fuente de información (Calvin, 2009). Los problemas que conducen a este desarrollo son los llamados “problemas abiertos”, las situaciones en general y la participación activa del individuo en proyectos propuestos por el mismo.

Algunos problemas semiabiertos y sencillos que se pueden trabajar con los alumnos, son los que propone Sattlberger (2006), donde se trabaja en la creación de números grandes y pequeños con una cierta cantidad de cifras, tratar de aproximarse a una cierta cantidad con las cifras dadas, etc., problemas con los “muros” (ver fig. 6, sección 3.5.6.), donde se les propone a los alumnos rellenarlos, con muy poca información, como por ejemplo que el final se obtenga 500 o que elijan una cantidad, también se propone la creación de problemas de textos con ciertas cantidades y magnitudes. O la generación de metáforas, en el caso de encontrar situaciones de la vida cotidiana entre una función en la variable tiempo y su derivada, una de las propuestas es la temperatura de un cuerpo que se está calentando y la velocidad de calentamiento, en todos estos casos se puede desarrollar en cierta medida el pensamiento divergente. También, es posible mirar las clases de matemáticas propuestas por Weth (1999), donde se recurre frecuentemente a la creatividad matemática. Además, cabe destacar que existe una gran variedad de problemas (Hirt y Wälti, 2008), que se pueden proponer a los alumnos, sin una intención concreta de aprender un contenido concreto, más que el jugar con números y con figuras, lo que resulte de este juego será seguramente parte de un contenido, creemos que como docentes, debemos dejar una libertad al aprendizaje en favor del desarrollo de las capacidades no racionales.

4.4.3. SENSIBILIDAD.

Sobre sensibilidad matemática, han escrito los que trabajan en talento matemático (Käpnick, 2006; Bardy, 2007), ellos tienen una tendencia a decir, que estos alumnos destacan sobre el resto, lo que es casi cierto, estos alumnos destacan en la clase de matemática, los motivos seguramente que están relacionados con variados y diferentes factores, no es la intención de este trabajo, basarse en esta postura.

Para comenzar, queremos destacar dos cosas, la primera es que se reconoce que hay niños que les interesa la música, hay otros que tienen más interés por los animales y existen aquellos que tienen una fascinación por la matemática, esta primera observación, no dice nada más, que existe gente que se levanta temprano y otras que se levantan más tarde y que sobre ellas no se puede concluir nada (ni siquiera que una es más floja que la otra, como diría mi madre), esto quiere decir, que como educadores, no podemos pensar que un alumno es más inteligente o que es sobre dotado, porque tiene más interés en la matemática o porque esta le resulta más fácil, lo que si podemos pensar, es en el cómo le resulta más fácil y si estos medios utilizados pueden ser los mismos, que para los otros alumnos. La segunda observación, es que la intención de este trabajo, es mostrar que los procesos no racionales y en general el PM, es desarrollable en todos los seres humanos y que existe una sensibilidad matemática que también se puede desarrollar, algunos la desarrollarán más que otros y solo debemos darle una posibilidad a este desarrollo.

Por sensibilidad matemática se entiende como un sentido para los números y las cantidades, un sentido para las figuras geométricas, sentido para las operaciones y otras relaciones estructuradas y un sentido para los aspectos estéticos de la matemática, así la sensibilidad matemática está relacionada con los sentidos (sección 1. a. - h.) y con la percepción. Como ya se ha visto, esto se puede desarrollar si la concepción de la enseñanza de la matemática cambia a un hacer por parte del alumno, donde la percepción y el hacer personal juegue un rol primario.

Sensibilidad matemática está relacionada con la facilidad y con las dificultades que se tienen de hacer relaciones, de encontrar los patrones, de responder a problemas, de enfrentarse a situaciones, etc. Como un individuo se enfrenta y como se mueve en una situación matemática, es parte de la sensibilidad matemática del individuo. La sensibilidad matemática, se puede observar con mayor frecuencia en individuos, que todo lo encuentran fácil, donde hay un mayor interés por responder y en aquellos que logran percibir la matemática en cada expresión humana o del medio.

Desarrollar la sensibilidad matemática y una expresión de esta misma, se puede obtener en la creación de textos libres, como ensayos o diarios de vida, en el desarrollo de preguntas como: ¿Que te pareció este contenido? ¿Cómo te puedes acercar a este contenido? También es posible combinar el arte y la matemática (Jost, Baptist y Beutelspacher, 2008) para cambiar la percepción que se tiene de una matemática dura y extremadamente formal. Hacer relaciones entre la visualización y lo que se observa en forma personal de lo “observado”, de forma que el individuo tenga que dejar plasmada sus impresiones y las conexiones que hace con respecto a un contenido matemático.

4.4.4. FLEXIBILIDAD.

La flexibilidad matemática es la capacidad no racional que permite hacer traspaso congruentes entre las diferentes representaciones de un mismo concepto matemático, más aún, es la capacidad de utilizar y comprender diferentes medios de comunicación y diálogo. La flexibilidad matemática, no esta relacionada, necesariamente, con la personalidad del individuo y con sus creencias personales, esta relacionada con los medios que utiliza para comunicarse y con la flexibilidad de cambios de los registros semióticos que utiliza. La flexibilidad, esta relacionada con la facilidad que se tenga/desarrolle para manejar ideas, para hacer traspasos desde lo real a lo abstracto y desde lo abstracto a lo real (Fast, 2005, 35ff.).

El pensamiento flexible se deja traslucir en el traspaso de los niveles de representación, como por ejemplo desde el nivel encativo al nivel icónico o al nivel simbólico matemático o a un nivel verbal. También se puede dejar traslucir al momento de hacer observaciones que provienen de diferentes puntos de vista y no de uno solo, al momento de utilizar la estrategia de reestructuración (sección 3.5.7.) y al momento de invertir procesos mentales (Ulm, 2010). En este caso, es importante destacar la utilización de la lengua natural, hablada o escrita, como medio de representación para conceptos y objetos matemáticos.

Finalmente la flexibilidad matemática puede ser desarrollada y para esto es importante considerar los medios de registro semioticos tradicionales y los no tradicionales, como el lenguaje corporal (lenguaje de sordos, mudos y ciegos), el lenguaje a través de imagenes, de poesía, etc. y a otros que podrían ir surgiendo en el camino, esto implica a su vez que se deberán organizar los contenidos de forma flexible y que las clases no tendrán necesariamente una estructura predeterminada.

4.4.5. FANTASÍA.

Fantasia en matemática esta relacionada con la necesidad de encontrar soluciones, esta capacidad se muestra en combinación con la flexibilidad en el uso de la lógica, muchos niños destacados en matemáticas, resuelven problemas de forma lúdica, esta forma de enfrentarse a los problemas es al parecer tipica de los niños y no esta relacionada con el ser destacado en matemática, sino que mas bien con el desarrollo de los niños, en no reconocer los limites entre las distintas áreas y de esta forma ellos hacen comparaciones, relaciones y asociaciones no convencionales (Fast, 2005).

Es importante que la fantasia no sea reducida con el desarrollo personal, esto significa que, como educadores deberíamos potenciar la fantasia en nuestros alumnos de básica, de secundaria y a niveles superiores. En matemática, la mejor palabra para no limitar esta fantasia, es decir: “Pruebe”, “intentelo”, “veamos lo que ocurre” o bien decir: “escriba un libro como los de Terry Pratchtett[138]”, autor que es famoso por sus libros del mundo disco, donde todo funciona bastante diferente. Con esto, quiero decir que la fantasia matemática, no tiene mas limites, que los que tiene una lengua, es todo posible, si hay una buena base, entendiendo buena base, como una estructura que no se cae al primer empujón.

Una de las formas de motivar la fantasia en matemática es en la creación de codigos, de colores, de números, de símbolos, en esta creación se necesita no tan solo la fantasia, sino que una mezcla de actividades coginitivas, que enriquecen el PM. Otra forma de incentivar la fantasia, es el método pedagogico llamado viaje de fantasia, el cual es un proceso imaginativo que se puede implementar en clase de matemática. Este proceso tiene 5 fases: la preparación que consiste en preparar el ambiente, por ejemplo poner música, aromas y estar en una posición comoda, la fase de silencio como introducción, la fase principal donde se lee un cuento y se hacen pausas frecuentes, para que el participante genere representaciones mentales, fase de regreso, que se hace a traves de respiración profunda y movimientos del cuerpo y finalmente la fase de comunicación, que puede ser por medio de la comunicación oral o bien de la pintura. Este proceso se hace con la intención de que el oyente, produzca y luego comparta sus propias representaciones mentales, que se ha imaginado a través de la lectura, que en este caso deberá estar relacionada con conceptos, ideas y objetos matemáticos. También se puede implementar con las frases iniciales: „imaginate que una escalera esta puesta sobre la pared y que lentamente, pero lentamente se empieza a delizar por la pared…“ problemas matemáticos de este estilo, se encuentra en Weber (2007), para secundaria y en Boley, Platz y Wolf (2003), para la primaria o básica.

4.5. RESUMIENDO.

Esta caracterización del pensamiento matemático (PM) permite, por un lado, incluir a la percepción, como una componente importante, a considerar en el desarrollo del PM. Por otro lado, da una respuesta a la pregunta: ¿Qué es el pensamiento matemático?, a saber: Entendemos por pensamiento matemático como un proceso cognitivo (neurobiológico), que vincula percepciones, contenidos, capacidades y estrategias, este se produce cuando el individuo se encuentra en situaciones o problemas relacionados con contenidos matemáticos, que son para el individuo, interesantes o que presentan un desafío a su estructura cognitiva personal. El pensamiento matemático utiliza diferentes medios de comunicación, como lo son las representaciones, las metáforas y las nociones básicas.

---

[138] *Sir Terence David John Pratchett, conocido por Terry Pratchett (28.04.1948 -...) escritor inglés.*

Una visión de lo que se ha visto en este capítulo y que es uno de los primeros resultados de este trabajo, se puede apreciar en la figura 15. La cual muestra las dimensiones del PM y que se muestran subordinadas a cada uno de los componentes, los cuales a su vez forman parte de una relación tetraédrica entre ellos, esto quiere decir, que ninguna de estas componentes esta sobre alguna de ellas y que su relación con las otras tiene el mismo peso. Lo que finalmente muestra es que estas componentes deberían estar en equilibrio y nuestras clases de matemática, deberían desarrollar estas cuatro componentes a la vez. En el centro están los medios de comunicación, de los que dispone el ser humano y de los que se ha hablado en los capítulos iniciales.

La percepción, los contenidos matemáticos y los medios de comunicación, pueden ser relacionados a través de los tres niveles (enactivo, icónico y simbólico) con los niveles de acción propuestos por Bruner (1971), para la formación de situaciones, está la Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1999), lo que también da paso al desarrollo de estrategias y en todos estos procesos, estarán en juego las capacidades no racionales, todas estas consideraciones, hacen de la educación "encarnada" una posibilidad real y mas vivida para los alumnos.

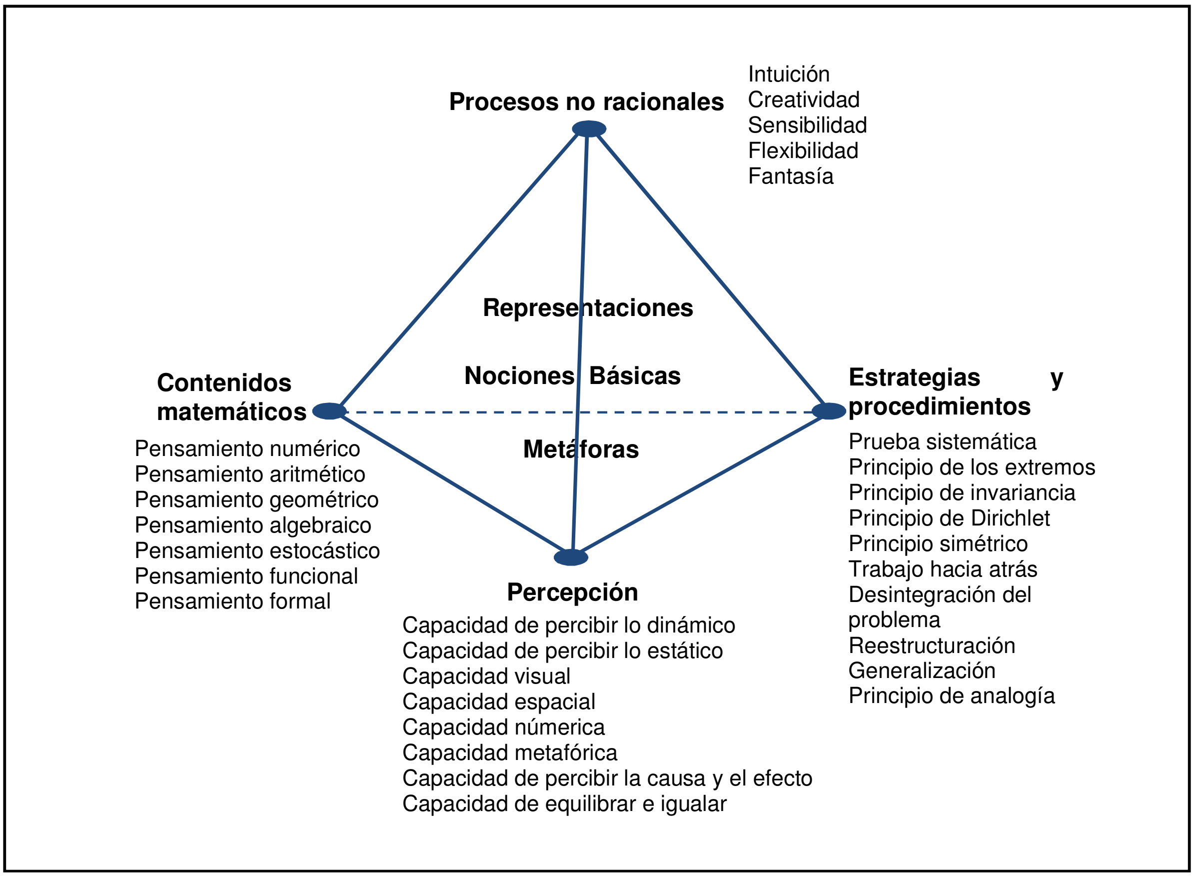


Figura 15: Modelo Tetraédrico del Pensamiento Matemático.

Finalmente, este capítulo muestra el resultado del primer objetivo de este trabajo, que es caracterizar el pensamiento matemático, en los siguientes capítulos se verá como esta caracterización es utilizado en el análisis de textos y como hay estudiantes, que de forma natural, ya reconocen el desarrollo de algunas subcomponentes en el aprendizaje de elementos de la Teoría de Grupos.

Capítulo 5.

5. METODOLOGÍA.

En este capítulo se presenta la metodología de este trabajo, en esta se debe tener presente que el PM tiene cuatro dimensiones que han sido enunciadas en el capítulo 4. En base a esto, se pretende averiguar cuales son los componentes que se desarrollan en diferentes contextos didácticos matemáticos en torno a la Teoría de Grupos.

Para los dos últimos objetivos específicos, se consideraron algunos elementos relevantes sobre la Teoría de Grupos y un curso de álgebra, llamado proseminario de álgebra. Diferentes docentes dictaron este curso durante los años 2008 a 2010. Se diseñó una encuesta y se aplicó a 118 estudiantes del proseminario Algebra de la Univerisdad de Augsburgo, los estudiantes son de las carreras para profesor de matemática de la educación básica y media, niveles uno y dos[139].

Para el primer objetivo específico, se diseñó en base a la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1986, 1998, 2007) y en base a algunos elementos de la Ingenieria Didáctica (Artigue, 2002) dos secuencias didácticas con elementos de la Teoría de Grupos, que estuvieran de acuerdo a los objetivos y programas de educación en matemática de la región de Bavaria, Alemania (Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus[140], 2000, 2004a, 2004b, 2007). Estas secuencias se trabajaron con alumnos del nivel tres (Gymnasium), en dos liceos de la región de Bavaria. Después de un determinado tiempo, se les pidió a los alumnos participantes, que hicieran un "ensayo" con el tema "Grupos". Utilizando este material como instrumento de recopilación de la información.

Para el primer objetivo y el segundo objetivo específico, se trabajo con los estudiantes del proseminario de álgebra, de la Universidad de Augsburgo, en diferentes formas de

[139] *En la región de Baviera, Alemania hay tres tipos diferentes de liceo: Hauptschule, contempla desde el quinto básico hasta el segundo año de secundaria, la edad de los alumnos fluctúa entre los 10 hasta los 16 años, en este trabajo se le denomina por nivel I; Realschule, considera desde el quinto básico hasta el segundo año de secundaria, la edad de los alumnos fluctúa entre los 10 hasta los 16 años, en este trabajo se le denomina por nivel II; Gymnasium, contempla desde el quinto básico hasta el cuarto año de secundaria, la edad de los alumnos fluctúa entre los 10 hasta los 18 años, en este trabajo se le denomina por nivel III. Estas tres formas de colegios, se diferencian por la calidad y cantidad de contenidos en el currículo. http://www.km.bayern.de/*

[140] *Ministerio para la Educación y Cultura de la Región de Baviera, Alemania.*

expresión, por medio de textos, diarios de aprendizajes y ejercicios basados en los componentes de la caracterización del PM.

Para organizar este capítulo, se establece en primer lugar el enfoque en el cual se enmarca la investigación, esto es, se debe mirar la naturaleza de la información (Bortz y Döring, 2006).

Este estudio tiene un enfoque mixto, es decir, cualitativo y cuantitativo. Mixto, ya que hay un tratamiento de datos de forma tanto númerica como cualitativa. Aunque según Bortz y Döring (2006), depende de la forma del análisis de la información, el enfoque que se le debe dar a la investigación, como el análisis de los datos tienen un tratamiento cuantitativo, a través del programa CHIC[141] y el análisis de los gráficos se hace de forma cualitativa, se puede decir, que este estudio tiene un enfoque mixto.

Este capítulo, contempla el tipo de estudio, la definición de las variables, el diseño de la investigación, los sujetos y el contexto, sección en la cual, se separa la investigación en cuatro grupos de sujetos de estudio, para cada uno de los cuales, se comenta sobre la recolección de datos, para pasar al siguiente capítulo, que es el análisis de los datos recopilados.

5.1. TIPO DE ESTUDIO.

En general, para las ciencias humanas y sociales, hay cuatro tipos de estudios, que son clasificados según sus objetivos: descriptivo, exploratorio, correlacional y explicativo (Bortz y Döring, 2006). Este trabajo se ubica dentro de un estudio explicativo, ya que está dirigido a establecer relaciones de causalidad entre la Teoría de Grupo y el pensamiento matemático, esto es, este estudio busca encontrar las causas y los efectos que ocasionan ciertos fenómenos (el fenómeno es el pensar causado por la TG).

En particular, se busca encontrar relaciones entre lo que se aprende y lo que desarrolla, especificamente sobre PM el estudiante en su proceso de aprendizaje de un contenido matemático. Más explicitamente, identificar las dimensiones del PM, que se desarrollan con ciertos elementos de la TG, describiendo las relaciones de causalidad entre PM y TG.

5.2. VARIABLES DEL ESTUDIO.

Como este es un estudio mixto explicativo, se tiene dos variables a relacionar, a saber:

- Elementos de la Teoría de Grupo.

---

[141] *Programa computacional denominado Classification Hiérarchique Implicative et Cohesitivecon acrónimo CHIC,que realiza análisis implicativo (Gras, 1996).*

- Dimensiones del PM.

Ambas variables han sido anteriormente desarrolladas, una en la sección 1.6.1 y la otra en el capítulo 4.

Los elementos de la Teoría de Grupos, que en este trabajo fueron considerados son:

- Definición de Grupos.
- Teoremas y proposiciones relacionados.
- Grupo cociente.
- Orden y Grupos cíclicos.
- Isomorfismo.
- Operaciones de Grupos sobre conjuntos.
- Grupo Simétrico.
- Derivados: cuadrados mágicos, simetrías de ornamentos, parquets y cristales.

5.3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.

Como se ha específicado anteriormente, este es un estudio explicativo y la investigación es de carácter mixto y por la forma de su diseño es experimental (Bortz y Döring, 2006). Se ha manipulado una de las variables, a saber, la de los elementos de la TG.

Para organizar este trabajo, se contemplan dos fases: mixta para el grupo A y cualitativa para el grupo 1, 2.

La primera fase es utilizada como retroalimentación para el modelo tetraédrico presentado en el capítulo 4, esta fase es un estudio mixto, ya que se utiliza el programa CHIC, que hace un tratamiento de los datos de forma cuantitativa, utilizando la implicación sobre la teoría clásica y la ley de Poison en el análisis de los gráficos. Los gráficos son entregados de forma automática por este programa, el análisis de los datos y de las preguntas abiertas del cuestionario se hacen en base al modelo de la caracterización del PM.

En esta primera fase se ha utilizado como herramienta de extracción de datos la encuesta (ibídem, 2006) y se ha realizado un análisis implicativo (Gras, 1996, 2005).

Dentro de los 9 métodos cualitativos (Flick, 2010; Flick, von Kardorff y Steinke, 2005):

- Fenomenológico.
- Etnológico.
- Simbolismo interactivo.

- Constructivismo (investigación-acción).
- Hermenéutica social.
- Descriptivo.
- Generacional.
- Etnográfico.
- Cultural.
- De género.
- Funcionalista.
- Evaluativo.

Se ha elegido para la segunda fase el método cualitativo hermenéutica social, ya que este tiene una especial importancia en la evaluación e interpretación de textos y por ser considerada como el arte de la interpretación (Soeffner, 2005). Por otro lado, se debe entender el significado del texto y hacerlos transparentes en un contexto social (sala de clase), más aún, se trata de comprender el comportamiento general de los individuos con su alrededor y de sus productos resultantes (conocimiento) como parte del pensamiento humano (Danner, 1994).

Como herramienta de recolección de datos se tienen para el grupo 1, los ensayos y para el grupo 2 se tienen los diarios de aprendizaje o diarios de vida matemáticos. En ambos casos, el análisis incluye los cuatro postulados del entendimiento de Lamnek (1988, pág. 84), a saber, el entendimiento psicológico, el entendimiento significativo, el entendimiento elemental y el entendimiento elevado.

Donde el entendimiento psicológico incluye las emociones que podría influenciar la lectura de los textos, el entendimiento significativo, que le da sentido y significación a la utilización de cada conjunto de palabras o a una palabra, el entendimiento elemental es aquel que dice que la palabra "casa", es una casa y el entendimiento elevado, permite entender analogías entre la palabra "casa" y la palabra "nido".

5.4. SUJETOS Y CONTEXTOS.

5.4.1. SUJETOS.

Para este estudio se tiene un grupo para la primera fase y 2 grupos de sujetos, para la segunda fase.

El siguiente grupo es considerado para la primera fase del estudio:

Grupo A: Denominado así para diferenciarlo de los grupos de la segunda fase del estudio. Está compuesto por 144 estudiantes. Todos fueron participantes del pro seminario de álgebra, curso[142] para estudiantes para profesores de matemática, tanto de básica, como de secundaria de los niveles I y II[143]. La mayoría de estos estudiantes, ya han cursado, por lo menos un año del total de cuatro años de estudios. Estos pro seminarios se dictaron por docentes de la Universidad de Augsburgo[144], durante el semestre de verano del 2008, hasta el semestre de verano del 2009, esto es, durante tres semestres.

El tamaño de la muestra, se hizo en base a la fórmula de muestreo probabilístico (Bortz y Döring, 2006):

$$n = \frac{N * Z_\alpha^2 * p * q}{d^2 * (N-1) + Z_\alpha^2 * p * q}$$

Donde las variables se especifican a continuación:

N: Población total, cantidad de estudiantes que estuvieron en los proseminarios durante los semestres de verano 2008, hasta el semestre de verano del 2009.

Z_α: Nivel de confiabilidad, en este caso, se pidió un 95% de confianza.

d: Grado de error, en este caso se tiene un 3.8% de posibilidad de error.

p y q: Ambos valores en este caso, se han dejado en un 50%, ya que esto maximiza la cantidad de encuestados y por ser el valor usual en caso de no conocer la probabilidad de ocurrencia y de no ocurrencia.

Los valores para este estudio, son entonces los siguientes:

$N = 144; Z_\alpha^2 = 1.96^2; d = 0.038; p = 0.5; q = 0.5$

Lo que quiere decir, en otras palabras, que el tamaño total de la población considerada fue de 144 estudiantes, la confiabilidad de la muestra es de un 95%, que el margen de error es de un 3,8% y para maximizar el tamaño de la muestra, se consideró los valores estándar para p y q.

---

[142] *Todos los estudiantes deben hacer por lo menos un Pro seminario, que de por sí es un curso de un área de la matemática, que se trabaja en profundidad.*

[143143] *Sistema educativo de la región de Baviera, nivel I, desde quinto básico hasta segundo de secundaria, desde los 10 años hasta los 15-16 años, denominada Hauptschule y el nivel II, desde quinto básico hasta segundo de secundaria, denominada Realschule, ver pie de página n° 8.*

[144] *Docentes, el Sr. Prof. Dr. Ulm, el Sr. Prof. Dr. Brandl, la Sra. Dr. Motzer y la Docente-investigadora Sra. M. Sc. Reyes-Santander.*

Con lo que se obtiene:

$$n = \frac{144 * 1.96^2 * 0.5 * 0.5}{0.038^2 * (144 - 1) + 1.96^2 * 0.5 * 0.5} = 118.51$$

De esta forma, la cantidad de encuestados fueron 118 estudiantes y la cantidad de cuestionarios, que se analizaron fueron 118 unidades.

Los siguientes dos grupos corresponden a la segunda fase experimental:

Grupo 1: Compuesto por 35 alumnos en total. Donde 23 de ellos son del Liceo[145] Sonthofen, en Sonthofen, Alemania, participantes del curso extra programático área matemática, dictado por dos docentes[146] del liceo. La duración del curso comprendió un año escolar, entre 2008 y 2009.

Los otros 12 alumnos son del Liceo[147] A. B. Stettensches, en Augsburgo, Alemania, participantes del curso extra programático área matemática, dictado por un docente del mismo liceo[148]. El curso se realizó dentro del año escolar, comprendido entre 2009 y 2010. La edad de los alumnos fluctuaba entre los 16 a 17 años de edad. Este grupo es el primero de un muestreo cualitativo teórico (Bortz y Döring, 2006)

Grupo 2: Compuesto por 24 estudiantes en total. Participantes del pro seminario de álgebra, del semestre de verano del 2010, dictado por la docente-investigadora Sra. Reyes-Santander. Este grupo vendría a ser el muestreo avalancha del muestreo cualitativo teórico (ibídem, 2006).

5.4.2. OBJETIVOS POR GRUPOS DE ESTUDIOS.

Cada grupo tiene diferentes herramientas de recopilación de datos, por lo tanto, se deben presentar diferentes objetivos específicos para la experimentación con cada uno de estos grupos.

Objetivo **Grupo A**: Encontrar relaciones entre:

---

[145] *Gymnasium Sonthofen. Más información en la pág. http://www.gymnasium-sonthofen.de*

[146] *Sr. Wucher y Sr. Weber. Ambos docentes con más de diez años de experiencia en el aula.*

[147] *Gymnasium A.B. von Stettensches Institut. Más información en la pág. http://www.stetten-institut.de/*

[148] *El docente Sr. Prof. Dr. Schneider, tiene una destacada trayectoria como docente en la Universidad de Augsburgo, con experiencia de más de veinte años en el aula y colega del departamento de didáctica de la matemática.*

1) Los pensamientos desarrollados por el estudio de elementos de la TG y la enseñanza de la TG.
2) Lo que se aprende y los pensamientos desarrollados por el estudio de elementos de la TG.

Objetivo **Grupo 1**: Reconocer en ensayos de los alumnos, las diferentes dimensiones del PM que fueron desarrolladas por la TG.

Objetivo **Grupo 2**: Reconocer e identificar en diarios de aprendizajes y composiciones de los estudiantes, las diferentes dimensiones del PM, que fueron desarrolladas por la TG.

A continuación se muestra el contexto de cada uno de los grupos de este estudio.

5.4.3. CONTEXTOS.

5.4.3.1. Contexto grupo A.

Los 118 participantes de la encuesta, son los estudiantes del **Grupo A**, los cuales asistieron a los pro seminarios de álgebra, durante un semestre. Para dar mayor libertad a los docentes, en la organización de su curso, se les tomo el cuestionario durante los últimos 20 minutos de la décima sesión, momento en el cual, los estudiantes ya habían tenido, por lo menos, siete sesiones de trabajo con elementos de la TG.

En esta parte de la investigación, fue de interés el sondeo de las siguientes preguntas: ¿Cuál es la relación entre lo que se aprende, lo que se enseñara en un futuro y el desarrollo del PM? ¿Qué reconocen los estudiantes, que ya han trabajado con varios elementos de la TG, que se desarrolla con el estudio de la TG? ¿Para qué enseñar/aprender TG? O bien las preguntas ¿Existe algún tipo especial de pensamiento, que se desarrolla al aprender algunos de los temas de la Teoría de Grupos? ¿Ven los estudiantes, que al ocuparse ellos mismos o sus futuros alumnos con un tema de la teoría de Grupos, les podría servir para desarrollar algún tipo de pensamiento, estrategia o capacidades?

En cuanto a los contenidos de la TG, tratados en los pro seminarios, se tiene el siguiente listado de temas:

- Semigrupos.
- Grupos, Subgrupos.
- Orden.
- Grupos Cocientes.
- Homomorfismos, Isomorfismos.

- Grupos Cíclicos.
- Grupos Simétricos.
- Producto Directo y Semidirecto.
- Acción de Grupos sobre Conjuntos.
- Cuadrados Mágicos.
- Simetrías de Ornamentos, Parquets y Cristales.

Cabe destacar, que cada docente utilizo su propio estilo en la enseñanza de estos temas y que los docentes formaban parte del cuerpo docente del departamento de didáctica de la matemática. Con esto último se intenta recalcar, que, los docentes que diseñaron estos proseminarios, tienen una formación en didáctica universitaria y que no provienen del área de la investigación en matemática.

En esta parte de la investigación, fue de interés el sondeo de las siguientes preguntas: ¿Cuál es la relación entre lo que se aprende, lo que se enseñara en un futuro y el desarrollo del PM? ¿Qué reconocen los estudiantes, que ya han trabajado con varios elementos de la TG, que se desarrolla con el estudio de la TG? ¿Para qué enseñar/aprender TG? O bien las preguntas ¿Existe algún tipo especial de pensamiento, que se desarrolla al aprender algunos de los temas de la teoría de Grupos? ¿Ven los estudiantes, que al ocuparse ellos mismos o sus futuros alumnos con un tema de la teoría de Grupos, les podría servir para desarrollar algún tipo de pensamiento, estrategia o capacidades? Estas preguntas desembocaron en la creación del cuestionario.

5.4.3.2. Contexto Grupo 1.

Este es un grupo que proviene de dos contextos diferentes, pero con un mismo objetivo.

23 alumnos de este grupo fueron participantes de un curso extra programático y cada uno de los docentes de este curso, recibió instrucciones directas de la autora de este trabajo, sobre la forma de proceder con el material preparado. Los docentes por su parte, decidieron el momento y la cantidad de horas que se les podría dedicar al trabajo con Teoría de Grupos. Se preparó la secuencia didáctica, que se muestra en la tabla 17.

Para esta etapa, se diseñó una secuencia de clases, con elementos de la Teoría de grupos con la intención de desarrollar el aprendizaje de estos, en este grupo de alumnos del liceo. La secuencia didáctica para los alumnos, contempló, tanto elementos pedagógicos del aula como por ejemplo el principio del yo, tú y nosotros, como de la didáctica, como por ejemplo, tratamiento didáctico de contenidos. En la tabla 17, se muestra además, las intenciones que se tenían con cada parte de la situación, como una parte del análisis a priori, que se realizó, pero que aquí no se incluye como parte del estudio.

Tabla 17: Intenciones, elementos y ejercicios

	Intenciones	Elementos de la Teoría de Grupos	Gestión de la clase
1	Generar un conocimiento a partir de lo conocido. Traspasar este conocimiento a otras áreas de las matemáticas. Formar el concepto de estructura de grupo.	Conjuntos Operaciones básicas Elemento inverso Elemento neutro Definición de Grupo	Ejercicios IA, IB. Trabajo de a dos personas, una con el formato A y la otra con el formato B, para comparar y en el diálogo construir una idea del tema.
2	Volver al tema de la definición de grupo. Generar una idea de grupo finito e infinito (problemas anteriores)	Realización y completación de Tablas de Grupos. Orden de grupo Orden de un elemento	Ejercicio IIA, IIB. Trabajo personal. Generación y encapsulación de las ideas, que se han tratado. Aquí se pretende desarrollar algunos mecanismos (a nivel biológico) para guardar la información.
3	Tener una idea de lo que es el isomorfismo de Grupos. Comparación de tablas de grupos, donde los elementos y la operación es diferente, pero tienen la misma estructura en su tabla de grupo. Asociar elemento de un grupo con el elemento correspondiente en el otro grupo (representación icónica de lo que es un isomorfismo).	Isomorfismo de Grupos. Definición Teorema: "Si dos grupos son isomorfos, entonces el neutro de un grupo es "aplicado" (por medio de una función) al neutro del otro Grupo."	Ejercicio IIIA y IIIB. Trabajo de a dos personas, una con el formato A y la otra con el formato B. Comparando estos dos ejemplos se busca encontrar semejanzas y analogías entre los dos grupos, no son iguales, pero son isomorfos.
4	Generar la idea de que algunos de los movimientos de figuras, también tienen la estructura de grupo. Diferenciar y encontrar relaciones, entre algunas de las características de los elementos del grupo y del grupo. Comparar con lo que se ha visto, en la parte 1, diferencias entre subconjuntos y subgrupos. Tener la idea de que un subgrupo es un subconjunto del grupo que a su vez es un grupo	Rotaciones de una figura plana. Grupo cíclico. Elemento generador de un grupo. Grupo abeliano. Subgrupos.	Ejercicio IVA e IVB. Trabajo personal, nuevamente por medio de los dibujos, se espera que el alumno pueda guardar la nueva información. Se traspasa desde ejemplos sencillos y el reconocimiento de características, a posibles conjeturas, que luego son reforzadas en un diálogo común, dirigido por el docente. Los alumnos buscan encontrar símbolos propios para resumir el trabajo.
5	Encontrar notaciones personales para comprender lo que es un Grupo finito, formado por subconjuntos infinitos de otro Grupo. Relacionar el resto con la pertenencia a una clase. Utilizar los conocimientos anteriores para facilitar el trabajo. Determinar el orden de un Grupo cociente. Reconocer cuando un grupo es abeliano o no (caso particular).	Grupos cocientes, en particular los grupos Z_5 y Z_6 Tablas de Grupos. Subgrupos. Teorema de Lagrange, sobre el orden de un subgrupo. (Enunciado en palabras, a partir de las observaciones) Consecuencia del teorema de Lagrange.	Ejercicio VA y VB. Trabajo grupal, sin límites. Encontrar una notación personal, es un gran desafío, por esto, se les da libertad de elegir a sus camaradas y con la seguridad de que siempre buscarán la comparación y el mejor representante.

	Encontrar los elementos del grupo que permiten facilitar el trabajo con los subgrupos y de ahí hacer alguna conjetura, probando en otros grupos. Buscar Grupos isomorfos a los del ejemplo dado.	Isomorfismo	
6	Por medio de la introducción de una reflexión, se intenta romper el esquema de que todos los Grupos conocidos son abelianos: ¿qué ocurre cuando al Grupo formado por las rotaciones de un triángulo, se agrega una reflexión? Se agregan las representaciones semióticas. Encontrar todos los movimientos que dejan fijo el triángulo y completar la tabla: ¿es un grupo? ¿Por qué? ¿Cuáles son sus características nuevas? ¿Vale el teorema de Lagrange?	Grupos no abelianos. Grupos diédricos. Subgrupos	Ejercicios VIA y VIB. Trabajo en grupo. Traspaso de lo que se ha visto a un Grupo que no es abeliano. Por medio de la comunicación entre los pares, se espera que ellos mismos obtengan los resultados correctos, no hay intervención del docente en ningún momento.
7	La intención de esta última fase, es la de mostrar que un teorema matemático tiene dos partes principales, las condiciones iniciales y la conjetura y que para llegar de un parte a la otra, hace falta una demostración. Para esto se les da a los alumnos, solo la demostración (incompleta) y se les pide que la completen, es decir que encuentren las condiciones y las partes que faltan de la demostración. Se plantean otras proposiciones, para que los alumnos prueben de hacer una demostración	Unicidad del neutro. Unicidad del inverso de un elemento. Propiedad de inversos multiplicativos.	Ejercicios VIIA, VIIB y VIIIA, VIIIB Para la completación de la demostración, se hace un trabajo personal y para la segunda parte, que es la propuesta de d os proposiciones, se hace trabajo grupal. En ambos casos, se espera encontrar herramientas personales, para la formación de un nuevo conocimiento, en este caso de la forma de demostrar. Al final, se hace un pleno y se buscan las demostraciones más completas o se completan en conjunto.

Para la forma de la clase, se han considerado el trabajo en dos grupos, denominados A y B, el trabajo personal, puesta en escena de lo aprendido, de tal forma que la discusión y el diálogo sea una de las herramientas utilizadas. La sigla IA, se refiere al bloque I del grupo A, la sigla IB corresponde al bloque I del grupo B y así sucesivamente como corresponda.

Después de dos meses aprox. de haber terminado el curso, se les pidió a los alumnos escribir un ensayo sobre el tema Grupos, se les explicó, sobre la importancia de los escritos, como medio de extraer información sobre lo que ellos piensan que es un Grupo, lo que es también una forma indirecta de necesidad del escrito para los alumnos.

En cuanto al contexto de los otros alumnos de este grupo, son 12 Alumnos provenientes del liceo Stetten-Institut, Augsburgo, Alemania. Todos participantes de un curso extra programático, al cual se les preparo una situación didáctica para construir la definición de Grupo, partiendo por la acción de un grupo sobre un conjunto, la separación de este conjunto en órbitas y de ahí a la caracterización de Subgrupos y Grupos. Esta forma de construir la definición de Grupos, incluyó elementos de combinatoria y necesitó de determinados elementos del Grupo de movimientos de orden 12. Estos elementos del Grupo, recibieron al final del proceso, los nombres usuales y las respectivas representaciones semióticas.

La situación fue llamada “El collar de Margarita” y se les pidió a estos alumnos, después de un mes aprox. de haber terminado el curso, escribir un ensayo sobre lo que es un Grupo. La necesidad de escribir el ensayo, fue la misma que en el caso anterior, es decir, como medio de extraer información sobre lo que ellos pensaban.

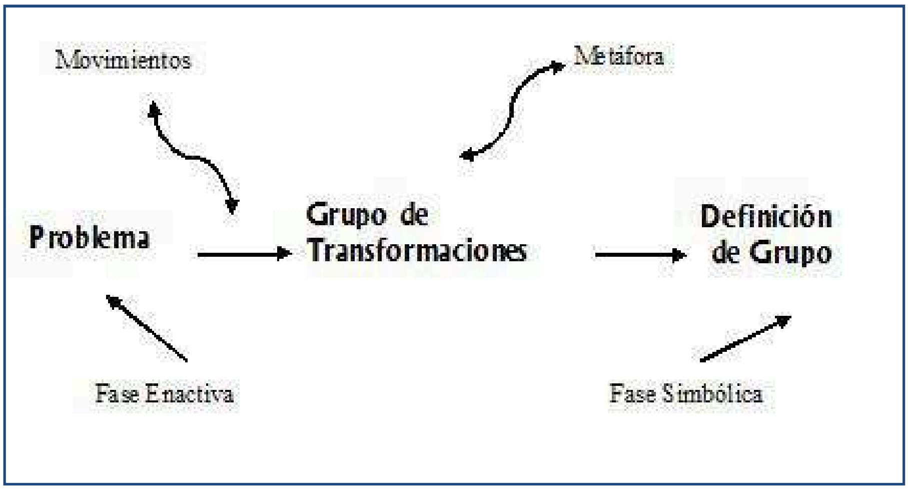


Figura 16: Tránsito Cognitivo para el Collar de Margarita.

Para este grupo de alumnos, se pensó en el tránsito cognitivo Problema-Movimientos-Metáfora-Grupo, donde la metáfora vendría dada por la representación de un Grupo como un Grupo de transformaciones del polígono regular de seis lados (hexágono).

Esto es, los alumnos tendrían como representación de un Grupo a los 12 movimientos que dejan fijo al hexágono, con esta representación, se intentó generar la definición de Grupo, partir de las características de los movimientos.

En la figura 16, se muestra de forma esquemática, el tránsito cognitivo que se trató de incorporar en los alumnos de este Grupo.

La pregunta a responder fue:

¿Cuantos collares se pueden hacer, con 6 perlas de dos colores y dispuestas a igual distancia?

Pregunta que fue presentada a los alumnos y que se diseñó en base a los momentos descritos por Brousseau (1998), a saber, el momento de la acción, donde las enunciaciones o consignas son claras para los alumnos, la formulación, momento en el cual se produce la confrontación de saberes para validar o no los planteamientos que se desprenden en la discusión; la validación donde el alumno debe establecer la validez de una afirmación, y por último la institucionalización, presentada por el docente como saber sabio, que debe estar vinculado con el trabajo realizado anteriormente por los alumnos (en la fase de validación).

Donde al momento de la acción y de la consigna, se les propuso a los alumnos, la utilización de material, para hacer los collares, que ellos estimaran necesarios hasta entender el problema, fase enactiva.

Con esto y con la falta de material intencional, se da paso a la elaboración de una estrategia, que concluyo en una fase icónica, como necesidad de hacer dibujos, para aclarar la situación y encontrar todos los posibles collares. Finalmente se llegó al cálculo correspondiente, en una fase simbólica, que es la ecuación de orbitas del conjunto de los 64 collares (encontrados en forma combinatoria) y con la acción del Grupo D_6 (Grupo Diédrico de orden 12). Con esto se concluye sobre la cantidad de collares reales que se pueden hacer con las condiciones dadas.

La confrontación, se produce al momento de comparar el número obtenido, con los collares que realmente se pueden hacer y en la pregunta: ¿Dónde están los otros collares? La validación proviene del proceso icónico y de la acción de rotaciones y de reflexiones de los collares "reales".

Antes de entrar en la validación, el docente encargado, realiza preguntas sobre la cantidad de estos movimientos y como estos "actúan" sobre cada uno de los collares, de esta forma, los alumnos y los estudiantes, discriminan subconjuntos (idea de clausura) del total de movimientos (que luego serán los subgrupos) y encuentran movimientos que destacan sobre los otros, como por ejemplo, el llamado collar o posición inicial (idea del elemento neutro), expresiones del tipo: "si muevo el collar así y luego así, se obtiene el collar en su posición inicial" dieron origen a la idea de los inversos, luego de una lluvia de estas "percepciones", se dio inicio a la institucionalización del concepto grupo.

5.4.3.3. Contexto grupo 2.

En este caso, se preparó una secuencia y se eligió la bibliografía adecuada, como contenido de apoyo y se preparó en conjunto con los estudiantes, las diferentes sesiones, que componían el pro seminario. Al final del seminario y como material para esta investigación, se les pidió la entrega del diario de vida y de forma libre el escrito de un ensayo, esto es, los estudiantes del seminario, debían elegir entre escribir un ensayo y escribir un diario de vida.

Estos diarios de vidas matemático, llamados anteriormente diarios de aprendizaje, se analizan de forma cualitativa, de la misma forma que los ensayos del grupo 1.

La secuencia didáctica se puede observar en la tabla 18. En esta tabla, se pueden apreciar los temas y elementos de las sesiones del seminario.En estas sesiones, son los estudiantes los que deben elegir un tema y la bibliografía adecuada para el tema, estuvo organizada por la docente-investigadora. Por cada tema, hay dos o tres estudiantes y ellos, junto con la docente-investigadora, preparan la sesión correspondiente, donde al inicio del pro seminario se les advierte sobre la existencia de una regla general: “No se puede partir la sesión con una definición y/o teorema”.

Tabla 18: Secuencia para los estudiantes.

	Temas	Forma de la clase
1	Semigrupos, Grupos y Subgrupos. G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 1-11.	Trabajo en grupo (2 o 3 estudiantes) con material concreto. Sesión basada en el E-I-S proceso.
2	¡Existen muchos Grupos! G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 11– 19. P. Reyes-Santander (Documentos).	Trabajo personal, recopilación de situaciones de la vida diaria donde está el concepto modulo n involucrado.
3	¿Similares, iguales, isomorfos? G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 20-26 und 38-39. Holz, Repetitorium der Algebra; S.141-150.	Trabajo en grupo (2 o 3 estudiantes), preparación de tablas de Grupos de orden cuatro.
4	Grupos nuevos o un producto entre Grupos. G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 40 und 50 und Sie bekommen eine Übungsaufgabe von Fr. Reyes-Santander. (Se recibe un problema por parte de la docente Sra. Reyes-Santander.)	Trabajo personal
5	Operaciones de Grupos sobre conjuntos, Grupos simétrico. G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 12-13 und 70-73. Usted recibe un problema por parte de la docente Sra. Reyes-Santander.	Trabajo en grupo, trabajo con material concreto, construcción de “cuboides de tres colores”. Sesión basada en el E-I-S proceso.
6	Un mundo cíclico. Lit.: G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 26-32, 54-59 und 65-69. P. Reyes-Santander; (Documento) S. 5-6.	Trabajo personal, recopilación de contenidos anteriores, demostraciones y pleno de preguntas y respuestas.
7	Simetrías de ornamentos, parquets y cristales. Lit.: M. Klemm (1982); Symmetrien von Ornamenten und Kristallen, S. 4-13.	Trabajo de estaciones, creación de puzles, trabajo de visualización y de reconocimiento de los 17 grupos clásicos.

8	Figuras mágicas: Como uno puede hacer nuevas figuras a partir de las conocidas. Lit: R. Motzer; Magische Figuren.	Operación de Grupos sobre las figuras mágicas. Las figuras mágicas y su estructura de Grupo.

En cada preparación del tema, se intenta que los estudiantes intenten partir con una situación o con un quiebre de lo común en los pro seminarios que se dictan en la Universidad, algo que se mantiene es la entrega de un "Handout"[149], en el cual no hay participación de la docente.

Cabe destacar, que en la tabla 18, de resumen, no se puede incluir todas las horas de preparación, ni los resultados de estas horas de trabajo, ya que se espera que estos resultados se vean reflejados, en los escritos que los estudiantes realizan durante el semestre.

Además, se organizó una cierta cantidad de horas destinadas a la preparación de la sesión. En estas horas, solo se encontraban los estudiantes que debían preparar la sesión y la docente, en estos momentos se buscaba en conjunto problemas y/o situaciones para introducir una nueva noción o una nueva proposición.

Además, se reflexionaba sobre la forma de la sesión, sobre las posibilidades de aplicación del tema, se aclaraban dudas y sobre los materiales adecuados para lo que se había discutido. En la tabla 18 se agregan algunos de los problemas más destacados.

Los estudiantes de este grupo fueron invitados a escribir un diario de vida matemático, en el cual podía quedar registrado todo lo que se refería a un problema, todo lo que se refería a la comprensión de un tema, todo lo que se refería a la búsqueda de soluciones, todo lo que ellos percibían tanto del material que se trabajó como de la estructura de la clase y se les menciono sobre la libertad, que tenían de escribir todo lo que pensaban al respecto.

A Los estudiantes que no querían, desarrollar o escribir un diario de vida matemático, se les invito a desarrollar los problemas que fueron quedando de tarea. Ellos debían ser entregados al final del semeste y debían explicar en sus propias palabras, como lo habían desarrollado. Este desarrollo y estos problemas, no entraron al análisis de este estdio, ya que tenían otro objetivo.

[149] *En este caso es una especie de resumen, con los aspectos más relevantes de la sesión.*

Cabe destacar, que la mayoría de los estudiantes conoce el término en alemán para diario de vida matemático[150].

La entrega de este diario de vida, debían hacerlo al final del semestre, esto quiere decir, que entre el término de las sesiones relacionadas con la TG y la entrega del diario de vida habían de por medio tres a cuatro semanas.

5.5. BASES TEÓRICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS TAREAS.

En esta sección se muestra, un resumen de las teorías didácticas que sirvieron en la elaboración de las tareas, que se trabajaron con alumnos y con estudiantes.

5.5.1. TEORÍA DE SITUACIONES.

La Teoría de situaciones didácticas, que ha comenzado a desarrollarse a fines de los años sesenta, se encuentra inspirada en la epistemología constructivista piagetiana: el aprendizaje resulta de procesos de adaptación, en el sentido biológico del término, que son desarrollados frente a situaciones problemáticas (Brousseau, 1998; Artigue 2002). En este sentido, la Teoría de las situaciones didácticas (TSD), se puede clasificar dentro de la teoría constructivista y más aún, con lo que se ha visto en la sección 2.7, esta se podría calificar como una de las herramientas de la cognición encarnada.

La TSD tiene como objeto central a la situación didáctica, un objeto que modela el conjunto complejo de las interacciones que se entretejen en una situación de enseñanza entre maestro, alumnos y saber (Artigue, 2002). Estas relaciones condicionan y dan forma a los procesos de adaptación que los alumnos pueden desarrollar en un contexto determinado y a los conocimientos matemáticos que son susceptibles de ser construidos allí, mirar sección 3.1.3.

Otro de los elementos que de esta teoría se desprende es la de secuencia didáctica o ingeniería didáctica, sus bases están en la fenomenología matemática de Freudenthal, 1974, 1979, 1987) y/o en las del diseño experimental[151] (Wittmann, 1996).

Lo que es la ingeniería didáctica y su doble función, tanto en la investigación como en producciones de enseñanza-aprendizaje, queda reflejado en su totalidad, en la siguiente cita:

---

[150] *Mathetagebuch*

[151] *Conocido como "design science".*

> *"…el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase."* (Douady, 1996, pág. 241).

Con esto, se puede decir que, tanto en el diseño experimental, como en las ingenierías didácticas, se incluye una fase de análisis a priori y posterior. En particular estas, no forman parte de este trabajo de forma directa, ya que no son parte del estudio, sino que aquí la ingeniería didáctica es parte del contexto de los sujetos y la hemos denominado secuencia didáctica.

5.5.2. APRENDIZAJE DIALÉCTICO EN MATEMÁTICA.

Todos los individuos utilizan diferentes formas de comunicación, entre ellos y de forma interna-personal, esta última forma la hemos denominado como diálogo interno, en las secciones anteriores. Cuando un individuo está en el proceso de construir nuevas ideas, conceptos, de acomodar la nueva información, es necesario que se realice un diálogo entre el individuo y el contenido matemático, es lo que los autores Ruf y Gallin (1998), han denominado como el aprendizaje dialéctico en lenguaje y matemática. Ellos proponen las clases de matemática en tres fases: una personal donde el alumno debe desarrollar y utilizar al máximo sus competencias (arreglárselas como pueda), una con los compañeros y una en conjunto, que incluye la participación del profesor, este método de trabajo, es conocido como el *Yo-Tu-Nosotros*. Este tiene como propósito, que el escolar logre entrelazar la matemática singular (del individuo) y la matemática regular (saber sabio) de la clase (mirar sección 3.1) y que este proceso de unificación, se desarrolle como un medio de comunicación entre el interior del individuo con el exterior (el medio). El trabajo en clases, sobre estas dos dimensiones permite una retroalimentación en dos diferentes lenguajes, el lenguaje natural y el lenguaje matemático.

Notar que la estrategia de clases, propuesta por estos autores, proviene del ámbito de la pedagogía y que por medio de estas tres palabras: yo tú y nosotros, el individuo debe registrar y explorar sus propios pensamientos, a través de diálogos. Una de las alternativas de registro de estos diálogos, tanto internos como externos, en clases de matemática, está dada por los escritos libres, como los diarios de vida y los ensayos, entre otros,

Algunas de las características de estos escritos son:

1. Se combina el lenguaje del diario vivir (como por ejemplo: “peludo” para indicar que algo es difícil) con el lenguaje formalizado de una clase de matemática (como por ejemplo: “coseno”).
2. Se mezclan las palabras formales con diferentes sentidos (como por ejemplo: “ser racional”, puede ser utilizado tanto para un número como para una persona en un determinado momento).
3. Se utiliza una gramática especial, proveniente de errores, proveniente de la formalización de la matemática, que en general no se utiliza en una conversación.
4. Se mezclan símbolos con palabras (como por ejemplo: “me da =”), para formar una frase.
5. Se tiende a nombrar a los ángulos y otros objetos, por las letras que han sido utilizadas en la clase de matemática, esto es, no se buscan nuevas letras, ni nuevas expresiones para ángulos, esquinas, etc. Esto quiere decir además, que las representaciones semióticas serán mezcladas con las propias palabras, que son utilizadas en la calle.

Una vez que se ha dado una definición, en los escritos, los alumnos tienden a tomar esta definición de forma textual, ya que resulta más corto, que en propias palabras, está mejor formulado, se utiliza un lenguaje común y no se entiende otra cosa. Si no conocen bien la definición trataran de definir algo con sus propias palabras, en este caso, se utilizarán más herramientas del PM.

Más aún, los mismos autores (ibídem, 1998), proponen la siguiente relación entre los resultados, el lenguaje y la matemática, que se puede ver relacionado con otros conceptos, que ya se han visto en este trabajo, como por ejemplo los vistos en el capítulo 1 y 2. En la figura 17, se muestran las tres fases del proceso de representación de Bruner (1971), en relación con el lenguaje dialéctico (Ruf et al., 1998) y como estos están en continua relación y en formación del PM. En esta figura se puede apreciar, también como el paso por las representaciones semióticas puede ayudar a la comprensión y finalmente al aprendizaje. Notar aquí, que los autores, proponen la construcción del lenguaje matemático y por lo tanto de las representaciones semióticas, por medio de experiencias vividas, de acciones y en una mezcla continua con el lenguaje natural.

Producto, se entiende como el resultado que se comunica, solo lo que se escribe, lo que se habla, donde hay una constancia externa de la existencia de un resultado, eso es el producto. La actividad es concebida en su término más amplio, donde la acción del individuo debe ser reflejada no tan solo por un resultado final, sino que por medio de una cadena de acciones.

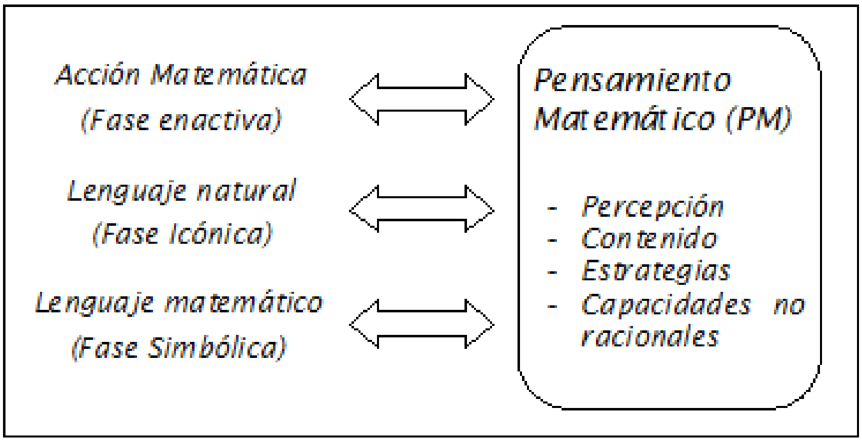


Figura 17: El PM, el lenguaje y las fases E-I-S.

En la figura 17, se puede reconocer también, la matemática regular y la matemática singular (ibídem, 1998), que serían el lenguaje matemático y la matemática que el individuo intenta descubrir, respectivamente. Ambas matemáticas, la regular y la singular tienen su punto de encuentro en la fase icónica donde el individuo trata de hacer sus propias conexiones, para subir y bajar de una fase a la otra. Notar que entre las formas de lenguajes no hay un paso entremedio, esto es, porque los pasos que ocurren son simultáneos e indescriptibles para el propio individuo, el tratar de describir estos pasos, produciría en el individuo un desconcierto y una tarea agobiante (ver capítulo I). Lo interesante es el traspaso fluido del lenguaje natural al lenguaje matemático, en los escritos libres, donde no hay una tarea o algo preciso que explicar.

El lenguaje natural, ayuda a entender mejor los conceptos matemáticos y ayuda a la motivación de un tema matemático (Ruf et al., 1998), con esto se entiende que en clases de matemática se deberían dejar de lado, al principio, todo lo relacionado con el lenguaje matemático, con las definiciones formales y los nombres técnicos o propios de la matemática, los alumnos deberían encontrar, buscar, crear metáforas para lo que está ocurriendo, para lo que pasa y después de esta búsqueda y de esta creación, se debería establecer, lo que se ha llamado en este trabajo, un lenguaje común. Donde este lenguaje común es el lenguaje matemático. Con esto, se quiere decir que matemática es más que un lenguaje (capítulo 3).

Una analogía para el lenguaje matemático, serían las partituras de música, aprender a escribir partituras sin tocarlas, no tiene sentido para ningún músico, es más, hay muchos músicos que tocan música sin saber ni leer, ni escribir partituras, ellos comparten un sentir, una representación de algún sentimiento, etc. Lo mismo con matemática, se puede aprender sin necesidad de las partituras, lo importante es tocar, sentir y compartir con otros las ideas centrales de la matemática.

Resumiendo, los escritos libres en matemática, tienen las siguientes características:

- Permiten relacionar el lenguaje natural (incluyendo representaciones) con el lenguaje matemático.
- Permiten hacer conexiones cognitivas individuales de aprendizaje.
- Son un medio de diálogo personal y de comunicación con el que los lea.
- Permiten a través de ejemplos personales comprender un concepto matemático.
- Es una forma para "concretizar" de forma "abstracta", analogías y metáforas.
- Son un medio de control del aprendizaje individual.
- Son un medio de evaluación para el profesor, en ellos se pueden encontrar las causas de la incomprensión, el motivo de distracción, el origen de los errores, donde están las dificultades y los éxitos de un aprendizaje favorable y los comentarios de satisfacción y de reproches.
- Son un medio de extracción de información para el investigador.

Escritos libres son los ensayos, los diarios de vida, los libros de viaje, las cartas personales sobre un tema específico, estos tipos de escritos libres pueden ser utilizados también en el aprendizaje de la matemática.

5.5.2.1. Ensayos.

Un ensayo es una "obra literaria en prosa, generalmente de corta extensión, en la que el autor expone sus propias ideas acerca de un asunto o tema general" (Lucena 2002, pág. 745). Cabe destacar que en un ensayo no es necesaria la exigencia de los tratados y no son extensivos. Además, no es necesario hacer citas o informar sobre la fuente donde se ha extraído la información. Ensayo, es en este trabajo un escrito, que expresa ideas subjetivas sobre un tema, en él se pueden mezclar el lenguaje natural y el lenguaje matemático (ver sección anterior).

Para escribir un ensayo, es necesario tener un tema y hacer una discusión subjetiva y crítica del objeto, la discusión se puede llevar acabo solo si el individuo ha tenido “contacto” con el objeto.

En este caso, los dos grupos de alumnos han trabajado con elementos de la Teoría de Grupos. Para comenzar un ensayo, es necesario tener una pregunta, que involucre al objeto en cuestión, para este trabajo se consideró la pregunta:

¿Qué es un Grupo?

En general, la gente no escribe ensayos porque si, es necesario que haya un motivo relevante para escribir un ensayo, como por ejemplo estar en desacuerdo con lo propuesto o bien, tener intenciones de cambiar el punto de vista ya presentado.

5.5.2.2. Diario de vida matemático.

Se entiende como diario de vida matemático, a un cuaderno con observaciones escritas en lenguaje natural o icónico, que el individuo realiza cuando está en el proceso de aprender un tema o bien, cuando el sujeto ha “querido” explicitar lo que el mismo ha entendido por algún concepto.

El individuo debe estar de acuerdo en que otros, como el profesor, lea y mire (Leuders, 2003), estos diarios de aprendizajes.

Estos diarios de aprendizajes, son como diarios vida, en ellos el individuo intenta encontrar relaciones personales, comparar métodos, hacer reflexiones personales sobre la matemática singular y la matemática regular (Ruf et al., 1998) y hacer de estas comparaciones u observaciones un material de reencuentro entre ambas matemáticas.

5.6. RECOLECCIÓN DE DATOS.

Debido a la cantidad de grupos que hay en este estudio, se mencionará brevemente el tipo de instrumento de recolección en la tabla 19 y luego se hará una sección especial para profundizar en el instrumento y en las variables de ese grupo.

Tabla 19: Resumen de la Metodología.

Grupo	Contexto	Sujetos	Instrumento
A	Proseminario de álgebra, diferentes docentes.	Estudiantes para profesores de matemática	Cuestionario

1	Curso extra programático en matemática, secuencia didáctica.	Alumnos, 17 años de edad aproximadamente.	Ensayo.
2	Pro seminario de Algebra, docente-investigadora.	Estudiantes para profesor de matemática.	Diarios de aprendizajes.

En la tabla 19, se muestra un resumen de los grupos de estudio, el tipo de sujeto, el contexto y el material de extracción de información, sobre el cual se hará el análisis.

Así, se tiene ya caracterizado el estudio, los sujetos y establecidos los diferentes contextos, pasamos a describir los datos que nos ayudan a identificar elementos del PM y a encontrar relaciones entre la TG (enseñanza-aprendizaje) y el PM.

5.6.1. Datos e Instrumentos del Grupo A

5.6.1.1. La encuesta.

El objetivo de la encuesta es encontrar relaciones entre:

1) Los pensamientos desarrollados por el estudio de elementos de la TG y la enseñanza de la TG.
2) Lo que se aprende (lo que gusta) y los pensamientos desarrollados por el estudio de elementos de la TG.

Un objetivo secundario de la encuesta, es observar las diferentes componentes del PM, en este caso, no se hace de forma directa, sino que más bien se leen y se analizan según las diferentes dimensiones y categorías del PM.

Para la encuesta se diseñó un cuestionario con 10 preguntas, la cual tuvo una fase piloto y una fase de aplicación (Krosnick, 1999; Porst, 2000, 2008). La fase piloto fue revisada durante el semestre de verano del 2008, por dos docentes de la de la Universidad de Augsburgo, ambos con experiencia en investigaciones científicas en el área de la didáctica de la matemática, con esto se tiene la validez del experto.

Ambas encuestas, se pueden ver en los Anexos 1), 2) y se pueden observar los siguientes cambios:

- Paso de preguntas abiertas a preguntas cerradas, lo que facilitó el trabajo de la información con el programa CHIC.
- Eliminación de dos preguntas, por no ser relevantes para el estudio.

Finalmente, el instrumento de recolección de datos es un cuestionario de 8 preguntas, con 3 preguntas cerradas, 4 preguntas abiertas y una semicerrada, el cual se puede ver en su versión original en el Anexo 1.

Las preguntas de los cuestionarios, que llevaron al objetivo y al análisis de las encuestas, según las relaciones 1) y 2) mencionadas anteriormente, pueden ser observados en la tabla 21, la cual incluye una traducción al español de las preguntas pertinentes, la encuesta completa, puede ser mirada en el Anexo 1.

Tabla 20: Preguntas de la encuesta y sus objetivos.

N°	Pregunta original	Pregunta traducida	Objetivo- Relación
1	Wie oft waren Sie anwesend? (bezüglich der ersten 7 Doppelstunden)	¿Cuántas veces estuvo usted presente? (con respecto a las 7 primeras sesiones)	Tener inf. sobre el tiempo presencial en las sesiones con TG.
2	Welche Themen haben Ihnen am besten gefallen?	¿Qué temas le han gustado a usted, de forma especial?	Relación 2)
3	Haben Sie etwas zur Gruppentheorie gelernt? Welche Inhalte?	¿Qué es lo que usted ha aprendido sobre la TG? ¿Cuál tema?	Relación 2)
4	Glauben Sie, dass man Gruppentheorie Gymnasialschülern beibringen kann?	¿Usted cree posible enseñar esto en el liceo?	Relación 1)
6	Könnten Sie sich vorstellen, dass durch die Beschäftigung mit Gruppentheorie Schüler bzw. Studenten auf andere Art und Weise zu denken lernen? Wie?	¿Usted se puede imaginar, qué a través del trabajo con TG, alumnos y estudiantes desarrollen algún tipo de pensamiento? ¿Cómo?	Relación 1) y 2)
7	Glauben Sie, dass Gruppentheorie Bestandteil des Lehramtsstudiums sein sollte? Warum?	¿Usted cree que la TG debería ser parte de los estudios? ¿Por qué?	Relación 1) y 2)
8	Allgemeine Bemerkungen	Observaciones generales	Relación 1) y 2)

Para las preguntas abiertas, estas se analizaron con la tabla 22, donde cada palabra y frases escritas por los estudiantes, fueron contrastadas con la definición de las dimensiones de la caracterización del PM, para esto se analizó cada cuestionario y cada pregunta abierta. Las 7 preguntas, incluyendo la parte de observaciones, que aparecen en la tabla 21, son las preguntas centrales de la investigación, para el **grupo A**.

Para la relación 2), fue necesario incluir dos preguntas por separado, una que incluyera el tema que más les gustaba a los estudiantes y otra que incluyera el tema que aprendieron. En esto, no se podrá asegurar de antemano que hubiera una relación uno a uno, entre gustar y aprender. Es más, los resultados muestran que no hay una relación entre los temas que más le gustan a los alumnos y los temas que se aprenden.

5.6.1.2. Dimensiones, categorías y siglas utilizadas.

De todos los temas que trabajaron los estudiantes, ver sección 5.3.1, se hicieron siete grandes grupos, a saber:

- Grupos.
- Grupo cociente.
- Orden y Grupos cíclicos.
- Isomorfismo.
- Operaciones de Grupos sobre conjuntos.
- Cuadrados Mágicos.
- Simetrías de ornamentos, parquets y cristales.

Donde los 7 aparecieron en el cuestionario, para el análisis se ha debido sacar el relacionado con isomorfismo, ya que ninguno de los estudiantes lo mencionó o lo marcó dentro de sus posibilidades, quedando solo 6 grandes temas.

En la tabla 21, se da la lista de las siglas a utilizar y las relaciones que se deben considerar en el análisis implicativo. Los tres columnas, que se pueden apreciar en la tabla 21, provienen de la recopilación de la estructura de los distintos pro seminarios y la parte inferior corresponde a la caracterización del pensamiento matemático y de sus dimensiones, algunas de estas variables pueden estar en más de un grupo y la decisión de poner una variable en más de una de las agrupaciones, dependía del contexto en la que los estudiantes lo mencionaban.

Así, se tiene una cantidad de variables, que el programa CHIC deberá considerar, lo primero que interesa, es ver cuales variables están en mejor relación y cuáles de ellas, no están tan relacionadas. Para esto, se debe considerar en primer lugar, el árbol de similitud.

Tabla 21: Siglas de la encuesta y descripción de las dimensiones del estudio.

Pregunta 2: El estudiante reconoce que le gusta el tema relacionado con:		**Pregunta 3: El estudiante reconoce haber aprendido los temas relacionados con:**		**Pregunta 4: El estudiante reconoce que es posible enseñar en otros niveles de sistema educacional, los temas de:**	
Sigla	Tema	Sigla	Tema	Sigla	Tema
T1GE	Grupos.	**T1A**	Grupos.	**T1E**	Grupos.
T2GE	Grupo cociente.	**T2A**	Grupo cociente.	**T2E**	Grupo cociente.
T3GE	Orden y Grupos cíclicos.	**T3A**	Orden y Grupos cíclicos.	**T3E**	Orden y Grupos cíclicos.
T4GE	Operaciones de grupos sobre conjuntos.	**T4A**	Operaciones de grupos sobre conjuntos.	**T4E**	Operaciones de grupos sobre conjuntos.
T5GE	Cuadrados Mágicos.	**T5A**	Cuadrados Mágicos.	**T5E**	Cuadrados Mágicos.
T6GE	Simetrías de ornamentos, parquets y cristales.	**T6A**	Simetrías de ornamentos, parquets y cristales.	**T6E**	Simetrías de ornamentos, parquets y cristales.
Pregunta 6: El estudiante cree que la TG, desarrolla lo siguiente...					
Pregunta 8: El estudiante cree necesario que la TG sea parte de los estudios porque desarrolla					

lo siguiente... Pregunta 9: Observaciones generales con respecto a la TG y el desarrollo de...	
PMC	Pensamiento matemático relacionado con el contenido. Especificaciones de los estudiantes: desarrolla el pensamiento aritmético, el pensamiento formal, una mirada profunda en las bases de la matemática, estructura matemática, pensamiento sistemático, pensamiento lógico, reúne relaciones (ayuda a reconocerlas también), se tiene un pensamiento complejo.
PMP	Pensamiento matemático relacionado con la percepción. Especificaciones de los estudiantes: desarrolla la capacidad de hacerse ideas, la representación, el pensamiento matemático, se puede ver las cosas desde otro punto de vista, el pensamiento a través de imágenes, pensamiento geométrico espacial, , el movimiento, a través de situaciones lúdicas, percibir el espacio de otra forma, representación espacial, imaginación.
PME	Pensamiento matemático relacionado con las estrategias, más aún, todo lo relacionado con la reversibilidad (Olfos, 1981, S.98). Especificaciones de los estudiantes: la utilización de las permutaciones de objetos, pensamiento sistemático, búsqueda de esquemas simples o modelos personales.
PMCR	Pensamiento matemático relacionado con capacidades no racionales. Especificaciones de los estudiantes: no tener solo números en la cabeza, otra forma de ver la matemática, flexible, una nueva forma de pensar.
PMV	Vehículos del pensamiento, diálogo interno, la abstracción, medios de representación, ver la matemática como expresión del espacio, hacer comparación, utilización de analogías y metáforas, utilización de las ideas básicas.

En el caso de la siglas **T1GE**, **T1A**, **T1E**, la palabra Grupos, se refiere a los primeros pasos en TG, esto incluye, la definición de Grupo, de Subgrupos, de Semigrupos, de ejemplos y los teoremas que se dan en esta primera parte del tratamiento de la TG, es decir, según la bibliografía utilizada en estos pro seminarios, la palabra Grupos, comprende desde Semigrupos hasta Subgrupos, incluye el trabajo con matrices, con funciones y con intervalos, también incluye el trabajo con los generadores de un Grupos y de los Subgrupos (Fischer, 2008, pp. 1-7).

5.6.1.3. Análisis implicativo, cohesitivo y de similaridad.

El análisis estadístico implicativo, proporciona una herramienta particularmente eficaz para quedarse con las mejores relaciones a partir de los datos empíricos. El programa computacional llamado *Clasification Hiérarchique Implicative et Cohesitive* con acrónimo *CHIC,* está especialmente diseñado para el análisis implicativo.

Básicamente el análisis implicativo consiste en, tener una población E (alumnos, estudiantes, objetos) y un conjunto de variables V (preguntas de un cuestionario o atributos). Se busca dar sentido estadístico a una implicación no estricta $a \Rightarrow b$ a partir de la observación excepcional, en situaciones reales de implicación estricta de la variable a sobre la variable b . Para diferenciar esta implicancia de la lógica matemática, se llama a este análisis “cuasi lógico” (Gras, 1996). Si algunos individuos verifican la variable a y no la variable b , es decir, $a \wedge \overline{b}$, es posible atribuir un valor de la veracidad de la implicación a todo el grupo de encuestados. La noción de implicación estadística, desarrollada por Gras (1996, 2005), se centra en las siguientes ideas:

- Encontrar un criterio que permita evaluar numéricamente, la distancia entre el valor verdadero (en implicación estricta) del conjunto de circunstancias, en las que los datos observados contradicen la implicación.
- Propagar este estudio binario a todas las parejas de variables.
- Organizar las variables en una gráfica no simétrica ponderada y transitiva, que de una imagen estructurada del conjunto de variables. Esta gráfica representa al conjunto de cuasi teoremas empíricos del tipo $a \Rightarrow b$ y la estructura puede ser considerada como conjetura empírica de una propuesta, tesis o teoría.

En este trabajo, la implicación $a \Rightarrow b$ será admisible en una experiencia, si el número de individuos de E que la contradicen es muy pequeño, en términos probabilísticos.

A partir de las nociones de la estadística implicativa, es posible construir árboles de implicación o gráficos implicativos, que dan cuenta de los niveles significativos de implicación entre las variables o clases, muestra los niveles de intensidad, los sujetos y las categorías de sujetos, que contribuyen a la gráfica, mostrando las “rutas” más relevantes. También es posible hacer una clasificación cohesiva o gráficas dirigidas, que reúne niveles importantes, la contribución de los encuestados y las categorías de estos sujetos en estos niveles. Ambas representaciones gráficas, la de implicación y la cohesiva, permiten analizar la relación de causalidad entre las variables y observar las clases consideradas. Dos árboles implicativos serán mostrados en el análisis de las encuestas.

5.6.2. DATOS E INSTRUMENTOS GRUPO 1 Y 2.

Los datos para estos dos grupos son recogidos desde los escritos libres, esto es, desde los ensayos y desde los diarios de aprendizajes. Del total de 23 alumnos que participaron en el curso extra programático (grupo 1), se recibieron 12 ensayos y del otro contexto, con un total de doce se recibieron solo 4 ensayos (grupo 1).

En total se revisan y se analizan los 16 ensayos, con el objetivo de observar la aparición de las dimensiones de la caracterización del PM y encontrar algunas relaciones de causalidad entre el PM y la TG.

Estos datos son producto de la memoria como una parte productiva de la experiencia. Esto significa que los recuerdos están asociados con ciertas expectativas y que estos escritos son el producto de los recuerdos del sujeto.

El alumno formuló en ellos sus recuerdos vívidos, sus paisajes, sonidos, olores, las escenas y el lenguaje utilizado en las experiencias vividas (Los ensayos fueron realizados después de tres semanas, como mínimo, de transcurrido el trabajo con TG.).

El investigador continúa la interpretación en diferentes condiciones y objetivos. Una característica importante de la experiencia de vida es la experiencia colectiva.

De esta forma lo que se desprenda de estos textos, no solo influye al individuo, sino que también a todo el grupo, como también se dice en la siguiente cita:

> *„… die individuellen Erfahrungen immer mit anderen Menschen aus verschiedenen Gruppen (Familie, Freunde, Berufskollegen, Klassenkameraden, soziale Schicht usw.) geteilt werden. Die Interpretation ist daher nie nur auf das Individuum gerichtet, sondern schließt noch zahlreiche anderen Aspekte seiner Umwelt mit ein.“*[152] *(Schulze, 1997, pág. 325).*

La interpretación como método, se deja establecer en cuatro momentos, según (Schulze, 1997, pág. 332):

1. Separación en partes relevantes del texto, están dadas por el reconocimiento de algunas de las dimensiones del PM, de la tabla 20 o por los elementos dados en la figura 21.
2. Localización del argumento, según las dimensiones y según los elementos del aprendizaje dialéctico en matemática.
3. Separación final del párrafo elegido. A esto se le ha llamado subdivisión de la unidad de análisis.
4. Registro de las reacciones personales del investigador según el marco teórico establecido y si fuera necesario anotaciones con respecto a problemas de significación.

El proceso de codificación de datos, se realizó en base a estos cuatro puntos.

En la tabla 20 se muestra la operacionalización de las dimensiones del PM. Se han agregado también, algunas frases operacionales, para poder luego hacer la interpretación de los escritos.

---

[152] *“... las experiencias individuales siempre serán compartidas con otros (familia, amigos, colegas, compañeros, etc.). Por lo tanto la interpretación no puede estar solo dirigida al individuo, sino que también incluye muchos otros aspectos del medio del individuo.” Traducción de la autora.*

Este desglose, debe ser relacionado con la dialéctica matemática para dar origen a las dimensiones y categorías del estudio.

Tabla 22: Componentes del PM.

<table>
<tr><th>Dimensiones del PM y las siglas a utilizar</th><th colspan="2">Operacionalización</th></tr>
<tr><td>Percepción.
PMP</td><td colspan="2">Todo lo que indica que hay una relación con el medio que se percibe en un momento real y determinado. En esta percepción juegan un rol definitivo los 14 sentidos y las capacidades mencionadas en la sección 4.1.1.-8. Por ejemplo expresiones del tipo: El objeto se mueve, el objeto no se mueve, es lindo para mí porque el circulo en relación con la línea..., es feo porque se escucha como..., me gusta ya que es armónico con respecto a..., no me gusta ya que no va al mismo tiempo que..., este elemento está dentro de o fuera de..., yo creo que esto es así porque el objeto estaba..., yo siento que los elementos están, son..., etc.</td></tr>
<tr><td>Pensamiento asociado con el contenido matemático.
PMC</td><td colspan="2">Todo lo que está relacionado con un contenido matemático, que ha sido aprendido en el colegio o instituciones de educación. El desarrollo de relaciones nuevas entre diferentes contenidos, priorizar un contenido sobre otro. Considerar los pensamientos desarrollados en la sección 4.2.1-6. Por ejemplo: expresar todo en números, buscar o hacer algoritmos, encontrar relaciones geométricas, destacar variables o mencionar variables, utilizar expresiones deterministas, etc.</td></tr>
<tr><td>Estrategias y procedimientos.
PME</td><td colspan="2">Todo lo que indica un camino a seguir, pueden ser planes de acción propios o bien las estrategias conocidas, que han sido mencionadas en la sección 3.5.1 – 3.5.10. Por ejemplo: hacer mención explícita de lo que va primero y lo que va en segundo, hacer mención de la forma y/o de la estructura de algunos procesos , utilizar un procedimiento concreto, etc.</td></tr>
<tr><td>Procesos y capacidades no racionales.
PMCR</td><td colspan="2">Todo lo que está relacionado con la forma de ser del individuo en relación con la matemática, en particular se han visto algunas en la sección 4.4.1.-5. Por ejemplo: expresiones formales y/o naturales que sean nuevas y desconocidas, expresiones que indican desconcierto, descontento, alegría y/o encanto con la integración de un contenido matemático, decir algo concreto y no saber de dónde proviene, expresiones del tipo: yo creo que es simplemente así, no podría definirlo/decirlo, etc. Describir relaciones inusuales con otras áreas.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Vehículos del PM.
PMV</td><td>R</td><td>Para las representaciones: Los dibujos, símbolos etc.</td></tr>
<tr><td>M/A</td><td>Para las Metáforas y analogías: La palabra “como”, las frases “se parece a”, etc.</td></tr>
<tr><td>G</td><td>Para las nociones básicas: hacer mención de conceptos previos en un lenguaje natural, como por ejemplo: “él ya le debía 150 pesos a su hermana...”</td></tr>
</table>

Esta relación se describe en la figura 18. Esta es una extensión de la figura 15 de la sección 5.2., donde aquí se explicita la matemática singular, la regular y las dimensiones del PM.

Más aún, en esta figura, se incluyen los procesos provenientes del contexto de acción del individuo, ya que son estos tres momentos los que determinan la forma de comunicación y finalmente la forma de expresarse de los individuos. Como se vio en los capítulos anteriores, este es un proceso del pensar.

Se procede a realizar la interpretación de los ensayos, utilizando la paráfrasis, para cada una de las frases consideradas relevantes, para esto se han puesto números dentro de las unidades de análisis, también se han realizado algunas notas, de acuerdo a las dimensiones del estudio.

La paráfrasis, se lleva a cabo por la investigadora y no se ha realizado una traducción del texto desde el alemán al español, lo que se incluye en el análisis es solo la paráfrasis. Luego de la interpretación, se ha procedido con la construcción de una tabla, en la que aparecen las dimensiones y categorías del estudio del estudio, es decir, la codificación de la interpretación.

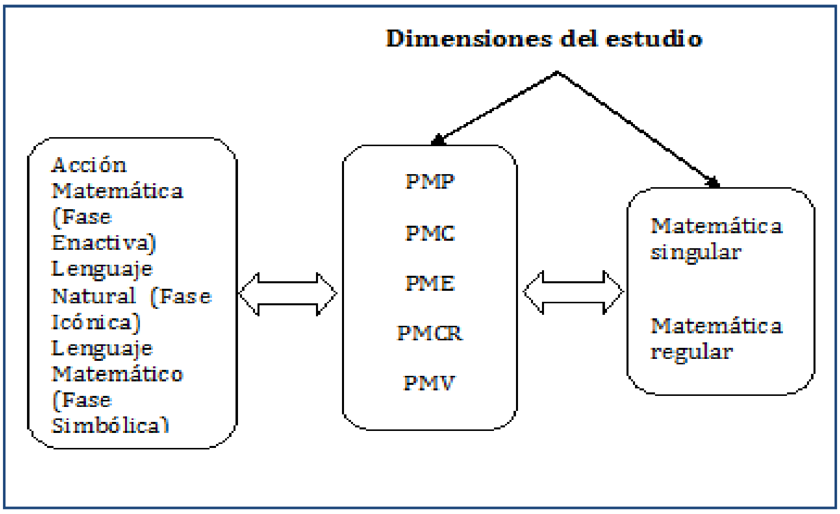


Figura 18: Dimensiones del estudio.
El PM, el lenguaje y las fases E-I-S

Cada una de las cuatro dimensiones, provenientes de la caracterización del pensamiento matemático, en la cual se incluye para el estudio los vehículos de comunicación, la matemática regular y la singular. Con esto, este estudio tiene 7 dimensiones y 33 categorías.

Capítulo 6.

6. ANÁLISIS.

En este capítulo se hace en primer lugar el análisis de las encuestas, luego el análisis de los ensayos de los alumno y luego el análisis de los diarios de aprendizajes.

6.1. ANÁLISIS DE LOS CUESTIONARIOS

El objetivo de este análisis, es recopilar información sobre los tipos de pensamientos que se desarrolla con la Teoría de Grupos y encontrar relaciones entre lo que se debería enseñar en el colegio/universidad y las dimensiones de la caracterización del PM.

La primera pregunta del cuestionario, tiene relación con la asistencia de los estudiantes a clases, realizada con la intención de comprobar la relación asistencia y comprensión de los elementos de la TG, tratados en los proseminarios. Un 72,5% del total de los estudiantes, asistió a un total mayor o igual de siete sesiones, un 26,8% del total asistió a menos de siete sesiones y un estudiante no responde a la pregunta, esto quiere decir que sobre los elementos de la TG, todos los encuestados han escuchado por lo menos 7 sesiones y han trabajado con elementos de la TG.

6.1.1. ANÁLISIS IMPLICATIVO.

En esta sección, se muestran los gráficos generados por el programa CHIC, con los datos de los cuestionarios. Como hay dos relaciones, se muestra en primer lugar el gráfico con las respectivas variables para el análisis de la relación 1) y a continuación el gráfico con las variables para la relación 2).

Relación 1)

Para comenzar con el análisis, debemos considerar la relación que nos interesa observar, comenzando con la relación 1), donde se analizarán, las posibles relaciones entre los pensamientos desarrollados por el estudio de elementos de la TG y la enseñanza de la TG en el colegio y en la universidad.

El árbol de implicaciones que se muestra en el gráfico 1, corresponde entonces a las variables para la relación antes mencionada, con una certeza de implicancia de 99% y de 95%. Los datos para esta gráfica, se encuentran en el anexo 13 y 14 respectivamente.

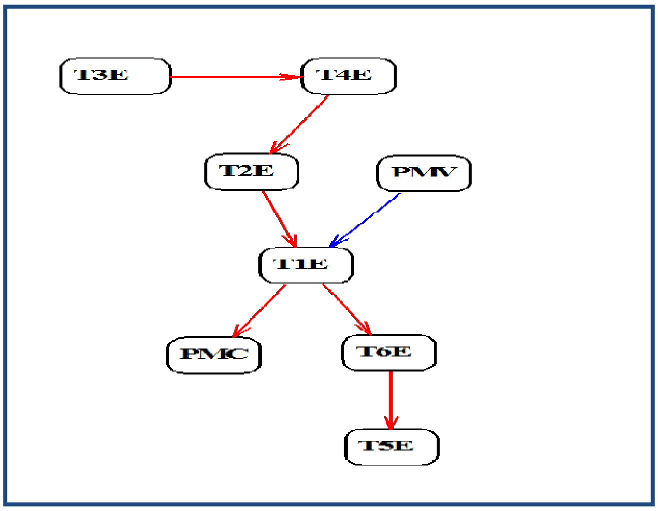


Gráfico 1: Árbol Implicativo para la relación 1.

Del análisis del gráfico 1, se desprende que:

Con un 99% de implicación, se puede hacer la siguiente conclusión sobre las respuestas de los estudiantes, con respecto al tema enseñar elementos de la TG: "Si es posible enseñar lo que es orden y lo que son los Grupos cíclicos (**T3E**) a nivel del liceo, entonces también es posible enseñar lo que son las operaciones de Grupos sobre conjuntos (**T4E**); si es posible enseñar **T4E**, entonces es posible enseñar lo que son los grupos cocientes (**T2E**); si es posible enseñar lo que son los Grupos cocientes, entonces es posible enseñar Grupos (**T1E**).

Con un 99% de implicación, si se enseña Semigrupos, Grupos y Subgrupos (**T1E**), entonces se estaría desarrollando el **PMC**, es decir, desarrollando el pensamiento matemático relacionado con los contenidos.

Con 99% de implicación, si se enseña lo relacionado con Grupos (**T1E**), entonces se puede enseñar lo relacionado con simetrías de ornamentos y cristales (**T6E**). Finalmente, con la misma confianza, se puede decir que si se enseña **T6E**, entonces se puede enseñar lo relacionado con Cuadrados Mágicos (**T5E**).

Por otro lado y con 95% de implicación, se puede decir que si hay un desarrollo de los vehículos de comunicación del PM (**PMV**), entonces es posible enseñar los primeros pasos de la Teoría de Grupos (**T1E**).

En resumen, el análisis cualitativo de estos gráficos dice que, para los estudiantes fue de vital importancia, el tipo de representaciones que debieron utilizar en el trabajo con TG. Lo otro que se puede decir, es que el trabajo con las definiciones y teoremas, desarrollan el pensamiento matemático relacionado con los contenidos. Este resultado, es bastante destacado y permite encontrar una relación bastante estrecha entre lo que se enseña y el desarrollo de una de los componentes del PM. Por otro lado, nos advierte de la necesidad de desarrollar los vehículos de comunicación del PM, para poder enseñar la primera parte de la TG, para luego poder continuar con las simetrías de ornamentos, parquets y cristales, esto es, hay que tener desarrollada las representaciones mentales, semióticas, metáforas y todas las ideas básicas.

Relación 2)

Para la segunda relación, se han agregado las variables relacionadas con la motivación por el tema, esto es, si le gusto el tema en cuestión, con la intención de hacer una relación adecuada entre lo que se aprende, lo que gusta y los pensamientos desarrollados por el estudio de elementos de la TG. Además se han eliminado las variables relacionadas con orden de un Grupo (o elemento) y Grupos cíclicos (**T3A**; **T3GE**) y la variable relacionada con el aprendizaje de los Grupos cociente (**T2A**), ya que estas variables, no aportan directamente al análisis de los resultados de la encuesta. Estas ya están consideradas en la enseñanza y en el análisis donde se incluye estas variables, y se aprecia que no aportan una relación directa con el PM (de forma indirecta en la sexta categoría), no ocurre lo mismo con las variables **T4GE** y **T4A**, como se puede apreciar en el Gráfico 2.

Los datos del análisis con las 13 variables consideradas, se encuentran en el Anexo 15 y 16 respectivamente.

La lectura del Gráfico 2, dice que:

Con un 100% de implicancia, si ocurre el aprendizaje del tema cuadrados mágicos, como estructura de Grupo (**T5A**), entonces también se aprende lo que son las operaciones de Grupos sobre conjuntos (**T4A**). Este resultado es uno de los resultados inesperados, esto quiere decir, que de todos los estudiantes encuestados, ninguno de ellos contradijo a esta proposición.

Con 98% de implicancia, ocurre la siguiente cadena de implicancias. Si a los estudiantes les gusta **T4GE,** entonces también les gusta **T2GE** (Grupos cocientes) y si les gusta los Grupos cocientes, entonces también les gusta la primera parte de la TG (**T1GE**).

Con un 80% de implicancia, se tiene la implicancia, si a los estudiantes les gusta el tema de los grupos cocientes (**T2GE**), entonces también les gusta el tema relacionado con los Cuadrados Mágicos (**T5GE**). Para este resultado, no es tan obvio encontrar una razón de porque es así, podría ser que ambos temas fueron tratados de forma “amigable”, con bastantes ejemplos y que por este motivo, los estudiantes los relacionan.

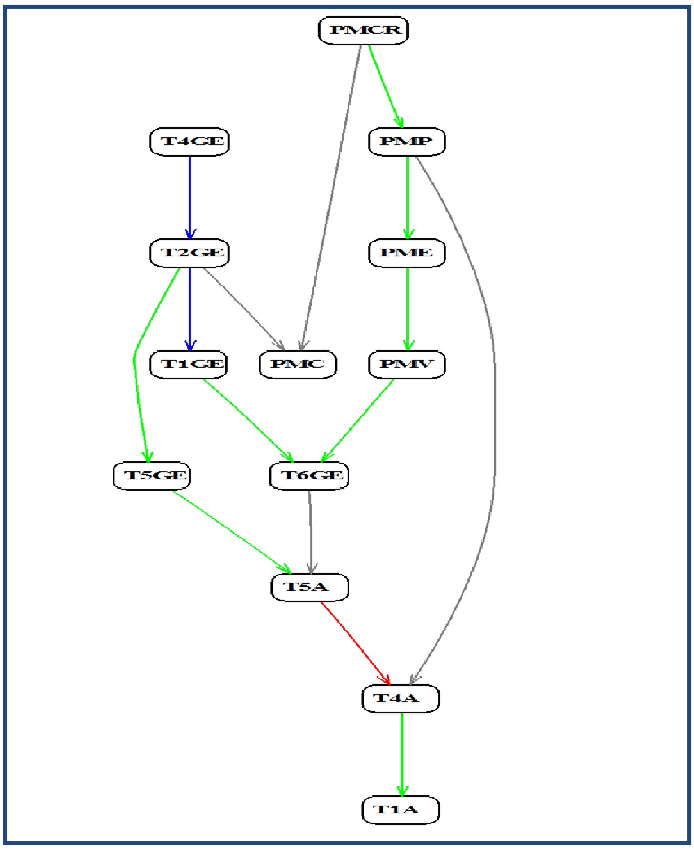


Gráfico2: Árbol implicativo para la relación 2.

Con un 80% de implicancia, se tiene la siguiente cadena de implicancias relacionadas con el PM: Si el estudiante reconoce un desarrollo de las capacidades no racionales (**PMCR**), entonces también se reconoce un desarrollo de la percepción matemática (**PMP**). Si se desarrolla la percepción (**PMP**), entonces se desarrollan también las estrategias (**PME**). Si se desarrollan las estrategias entonces se desarrollarán los vehículos del PM (**PMV**). Finalmente, si se desarrollan estos vehículos, entonces a los estudiantes les gusta el tema de las simetrías de ornamentos, parquets y cristales (**T6GE**). Este es uno de los resultados relevantes de este trabajo, es en este momento donde por fin se encuentra un buen motivo para desarrollar los vehículos del PM, estos dan las bases para encontrar sentido matemático a los ornamentos y desde una base perceptual (arriba) poder acercarse a lo teórico como se ve en la parte inferior del gráfico 2.

Con un 80% de implicancia, se puede decir, no se tiene que si se aprende operaciones de Grupos sobre conjuntos (**T4A**), sin que se aprenda lo básico de la TG (**T1A**).

Con implicancias más bajas, se encuentra que con un 77% de implicancia, si el alumno reconoce que le gusta el tema de los Grupos cocientes (**T2GE**), entonces el estudiante reconoce que la TG, desarrolla el pensamiento basado en el contenido (**PMC**). Con un 72% de implicancia, se puede decir que: “si se desarrolla el PM relacionado con la percepción (**PMP**), entonces se aprende el tema de las operaciones de Grupos sobre conjuntos (**T4A**)". Este resultado también es uno de los sorprendentes y esperados, el estudiante reconoce la importancia de la percepción, en el caso de los movimientos en el espacio, para la construcción y el aprendizaje del conocimiento.

Por último y con un 72% de implicancia, se puede decir que: "Si se desarrollan las capacidades no racionales (**PMCR**), entonces se desarrolla el pensamiento matemático basado en los contenidos (**PMC**)". Este resultado también es esperado y dentro de los márgenes de credibilidad, no se espera que los estudiantes puedan decir otra cosa, cuando se les ha mostrado durante 12 años, que lo más destacado de la matemática son los contenidos matemáticos. En todo caso, este es un buen resultado y un logro por parte de los docentes que impartieron los proseminarios, ya que podría haber pasado que ni siquiera esta implicancia estuviera dentro de los resultados.

En resumen, el análisis implicativo cualitativo, para la relación 2) muestra una gran cantidad de subrelaciones destacables para el estudio de la TG y el desarrollo del PM. Como por ejemplo la cadena de implicancia, que relaciona los componentes del PM, con el tema de las simetrías. Más aún, el lugar que ocupan los vehículos del PM, es fundamental para comprender la importancia que tienen las *ideas básicas* para los estudiantes, como se basan en ellas para justificar un desarrollo del pensamiento. El otro resultado que destaca, es el que relaciona de forma implicativa el **PMP** y el tema de la acción de Grupos sobre conjuntos, este nos asegura entonces que los estudiantes consideran la percepción de objetos del medio en su aprendizaje, con esto, la componente de la percepción, toma su lugar correspondiente en el PM.

Con este análisis de las respuestas de los estudiantes, se pudo encontrar relaciones entre los pensamientos desarrollados por el estudio de la TG y la enseñanza de la TG y relaciones entre lo que se aprende y los pensamientos desarrollados por la TG.

Cabe destacar, que la pregunta 7 y la parte de observaciones generales 8 contribuyeron de forma indirecta a la búsqueda de las relaciones, ya que para muchos estudiantes, el responder a estas preguntas incluía hacer especificaciones sobre el desarrollo del PM. En estos casos, como eran preguntas abiertas, se leyó cada comentario y según lo que decían, se relacionaba con la caracterización y con la pregunta 6, para así complementarla, si era pertinente el comentario entraba al análisis, en caso contrario, si no se mencionaba algunas de las componentes de la caracterización como argumento, quedaban estas preguntas fuera del análisis.

También podemos decir que, en el desarrollo del PM, se reconoce que no es suficiente con enseñar algunas cosas, que se enseñarán luego en un futuro laboral, sino que es necesaria una profundización del tema, para que los estudiantes reconozcan que el PM se ha desarrollado. En los análisis realizados se ve que, enseñar cosas básicas no es suficiente para el estudiante, que él cree por un lado, que está en la universidad para aprender algo más de lo que luego enseñara, pero por otro lado, si estos contenidos no promueven alguna forma de pensar, entonces es trivial este contenido y puede ser obtenido desde un libro. El estudiante espera que los contenidos que se ven en la universidad le produzcan a él nuevas formas de pensar.

Este análisis dice, que la tarea para los docentes es recordar que uno de los motivos por los cuales se enseña matemática, es porque esta promueve el pensar, la búsqueda de estrategias, el encuentro entre lo que se percibe y la matemática. Los estudiantes concuerdan con lo anterior, siempre y cuando el docente prepare sus clases en dirección al desarrollo de las 4 componentes del PM, en este caso, se tendrán estudiantes motivados, no tan solo porque verán en este estilo un pensamiento que desarrollar, sino que también porque verán que esto es posible desarrollar también con sus futuros alumnos (en este caso se trabajó con estudiantes para profesores de matemática).

6.2. RESULTADOS DE LAS ENCUESTAS.

En cuanto a los objetivos, se puede decir brevemente que:

- En la relación 1) se observan dos de las caracterizaciones del PM, a saber la del pensamiento relacionado con el contenido (PMC) y la de los vehículos de comunicación, esto quiere decir que, de forma significativa enseñar la definición de Grupo y elementos cercanos (T1E), desarrolla la dimensión del pensamiento relacionada con el contenido y que si hay un buen desarrollo de los vehículos de comunicación, este aprendizaje, de estos elementos de la TG, se desarrollaría.
- En la relación 2) se observan las cuatro dimensiones del PM y se observa como están, en primera instancia, relacionadas entre ellas y en segunda instancia, relacionadas con el gustar de algunos temas de la TG y en tercera instancia relacionadas con el aprendizaje de algunos temas de la TG. Esto quiere decir que, existen factores previos (probablemente en el desarrollo de la personalidad), que participan entre estas instancias.
- En las respuestas de los estudiantes se observaron elementos identificables con las dimensiones del PM, en algunos casos aportaron en el enriquecimiento de las dimensiones del PM.

Finalmente, los resultados de las encuestas aportan a las relaciones ya mencionadas y aportan al segundo objetivo de esta investigación, para que este aporte sea completo y el escenario completo sea presentado, es necesario hacer el análisis de los ensayos y de los escritos.

6.3. ANÁLISIS DE LOS ENSAYOS.

Estos datos provienen de dos contextos diferentes, los alumnos que trabajaron la secuencia didáctica mostrada en la sección 5.4.3, tabla 17 y los alumnos que trabajaron con la situación del "collar de Margarita".

Se recibieron un total de 16 ensayos, cada uno de los cuales fue leído y analizado según el modelo del PM, presentado en capítulo 4 y su operacionalización mostrada en la tabla 20, todo esto, en conjunto con el aprendizaje dialéctico y matemática, mostrado en la figura 20.

En esta sección se presenta el análisis de algunos de los ensayos (los más representativos), ya que hemos descartado aquellos ensayos que hacen una descripción poco detallada de la tarea propuesta (se muestra uno de ellos) y de los restantes hemos seleccionados aquellos en los cuales se observó en el análisis preliminar, una mayor riqueza en relación a las dimensiones contempladas. Cabe destacar en este sentido que todos los ensayos son diferentes, no se puede decir que un ensayo es similar al otro, se puede decir que, bajo la mirada de las dimensiones y categorías contempladas, hay algunas unidades de análisis que son más representativas que otras, por contemplar las mismas categorías.

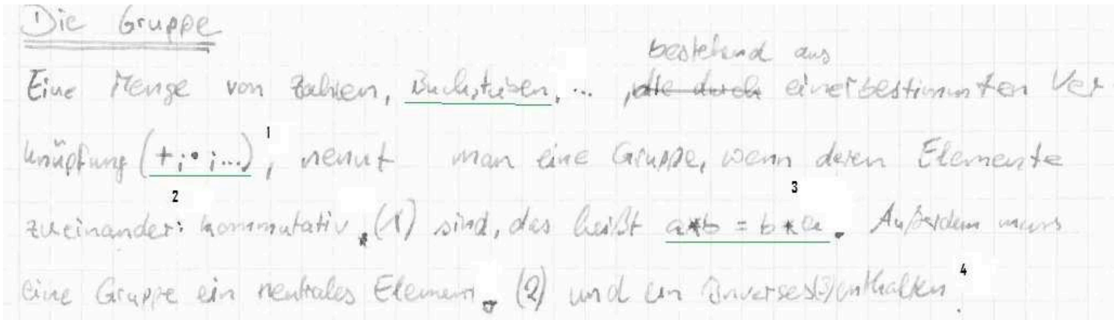
En todos los textos, se puede apreciar la utilización las representaciones semióticas lenguaje natural, en lo sucesivo se entiende que, al mencionar representación semiótica, nos referimos en particular a las representaciones semióticas simbólicas, utilizadas frecuentemente en matemática.

Los ensayos han sido denominados por E1, E2,..., E16. Y se ha considerado como unidades de análisis a los párrafos completos, es decir, de inició de un párrafo hasta un punto aparte, cada párrafo es denominado con la letra P y a continuación se les agregó un número posicional, es decir, según el orden en que aparecen en el ensayo. Cada unidad de análisis ha sido subdividida en frases o en un conjunto de frases, esta subdivisión corresponde a la observación de las dimensiones y categorías, es por esto que después de cada párrafo, se anota entre paréntesis la cantidad de subdivisiones realizadas. Finalmente, al final de cada subdivisión se anota entre paréntesis, las categorías que han sido observadas.

Ensayo 1

El primer ensayo (E1), fue separado en 11 diferentes partes, cada una de las cuales, muestra una o varias de las dimensiones del PM, estas partes aparecen dentro del párrafo con un número.

E1P1 (1, 2, 3, 4)


Die Gruppe
bestehend aus
Eine Menge von Zahlen, Buchstaben, ... ~~die durch~~ einer bestimmten Verknüpfung (+;·;...)[1], nennt man eine Gruppe, wenn deren Elemente
2 3
zueinander kommutativ (1) sind, das heißt a*b = b*a. Außerdem muss eine Gruppe ein neutrales Element (2) und ein Inverses enthalten.[4]

E1P1.1. Dimensiones observadas: PMCR, PMVR y PMC.

La utilización de la palabra “letras”, esto indica, que el alumno, considera conjuntos de letras y que estos conjuntos podrían ser también un Grupo. Esto indica por un lado, la utilización de la abstracción y por otro lado la utilización de una capacidad no racional, como lo es la flexibilidad. Además, el alumno utiliza, puntos suspensivos, lo que indicaría que podrían ser considerados otros tipos de elementos.

En esta parte, también se observa una discordancia entre la matemática regular y la singular, ya que el alumno escribe que es el conjunto el que consiste de una operación (borra las palabras “a través”), en vez de poner “junto” a una operación.

Se observa la utilización de símbolos, suma, multiplicación, lo que indica que el pensamiento realizado, se basó en representaciones semióticas.

Aquí nuevamente se utiliza puntos suspensivos para indicar que podrían haber otras operaciones, con lo que se podría decir que el alumno intuye o sabe sobre la existencia de otras operaciones.

E1P1.2. Dimensión observada: PMVG.

La utilización de la palabra “zueinander”, que quiere decir “unos con otros”, muestra la utilización de una idea básica, para el concepto “operación”, que es una función de GxG en G , tal que toma dos elementos y los opera entre sí. Con esto se puede observar PMVG, de forma indirecta, ya que el alumno no dice que la palabra “zueinander” es como el concepto operación, sino que la utiliza de forma directa en el texto.

E1P1.3. Dimensión observada: PMC y PMVR.

Nuevamente se observa una inconsistencia entre la matemática regular y la singular, ya que como condición para ser Grupo, no es necesario que la operación sobre el conjunto, sea conmutativa. Además, se observa que para explicar lo que es la conmutatividad, el alumno se basa en una representación semiótica. La utilización de la palabra conmutatividad, nos da cuenta de la utilización del pensamiento relacionado con los contenidos PMC.

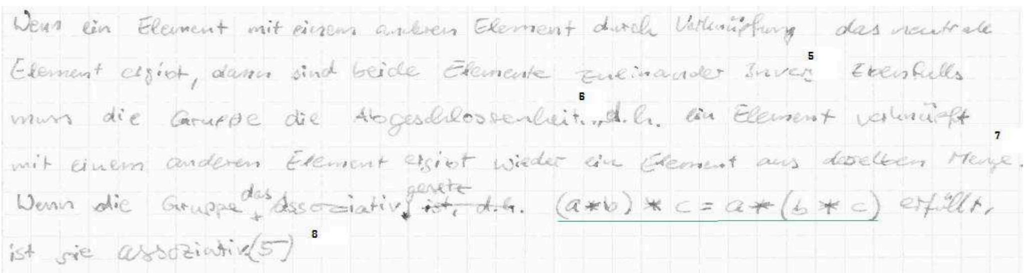
E1P1.4. Categoría observada: PMC.

En esta parte se observa la utilización del pensamiento relacionado con el contenido, al mencionar las palabras "ein Neutrales Element" y "ein Inverses", que respectivamente se refieren al elemento neutro y al inverso.

En este párrafo, se han observado tres diferentes dimensiones, resalta el pensamiento relacionado con el contenido algebraico, en cuanto a las veces en que este aparece. Resalta, aunque no por su cantidad, la interpretación relacionada con una capacidad no racional, como lo es la flexibilidad.

Por otro lado, se observa la interacción entre las representaciones semióticas lenguaje natural y simbólica matemática. Con respecto a la matemática regular y singular, se observan algunas diferencias, estas podrían tener inferencias en la comprensión de la TG y en último caso, podrían derivar en la falta de resultados óptimos del aprendizaje.

E1P2 (5,6,7,8)



Wenn ein Element mit einem anderen Element durch Verknüpfung das neutrale Element ergibt, dann sind beide Elemente zueinander Invers 5 Ebenfalls muss die Gruppe die Abgeschlossenheit, 6 d.h. ein Element verknüpft mit einem anderen Element ergibt wieder ein Element aus derselben Menge. 7 Wenn die Gruppe das Assoziativgesetz ~~ist, d.h.~~ $(a*b)*c = a*(b*c)$ erfüllt, ist sie assoziativ(5) 8

E1P2.5. Dimensiones observadas: PME y PMC.

El alumno explica como dos elementos son inversos uno del otro, con esto se puede observar la estrategia que el alumno tiene para identificar elementos inversos, utilizando como elemento crucial, el elemento neutro, esto quiere decir, que la parte 5, es una mezcla entre PME y PMC.

E1P2.6 y E1P2.7. Dimensiones observadas: PMVG y PME.

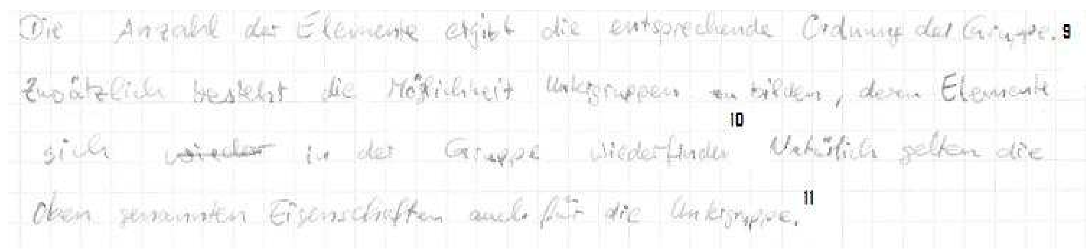
Utilización de la palabra "Abgeschlossenheit", que quiere decir, "clausura", "cerradura", como idea básica, para el concepto de "operación", en este caso, también se podría entender como una metáfora conceptual, ya que el alumno, en la parte 7, explica, de que se trata el concepto de ser cerrado. Con esto, se tiene además, la estrategia que el alumno ha utilizado, para reconocer cuando un conjunto con una operación es cerrado.

E1P2.8. Dimensiones observadas: PMVR y PMC.

Se observa la utilización de representaciones semióticas, para la asociatividad, lo que indica que el pensamiento realizado, se basó en representaciones semióticas y en pensamientos relacionados con el contenido.

Este párrafo utiliza 4 diferentes categorías y se observa una concordancia entre la matemática regular y la singular. Resalta la observación de estrategias, en forma de una explicación del proceso que debe realizarse para obtener un elemento en particular.

E1P3 (9,10,11)


Die Anzahl der Elemente ergibt die entsprechende Ordnung der Gruppe. 9
Zusätzlich besteht die Möglichkeit Untergruppen zu bilden, deren Elemente
sich ~~wieder~~ in der Gruppe wiederfinden 10 Natürlich gelten die
oben genannten Eigenschaften auch für die Untergruppe. 11

E1P3.9. Dimensión observada: PMC.

El alumno describe lo que él entiende por el orden de un Grupo, mencionando que la cantidad de elementos da el orden del Grupo. Con esto se observa que hubo un pensamiento relacionado con el contenido.

E1P3.10. Dimensiones observadas: PMP y PMC.

Aquí se observa, que el alumno percibe a los Subgrupos, no como algo que podría tener el Grupo, si no que más bien, como algo que se puede "formar", en este caso el alumno utiliza su capacidad metafórica, para interpretar lo que es la generación de Subgrupos. Con esto se observa también una discordancia conceptual mínima, entre la matemática regular y la singular, ya que los Subgrupos existen y la confusión sobre la formación de Subgrupos, proviene de la utilización de generadores para un Grupo y para Subgrupos. Si existe esta confusión entre generadores y formación-existencia de Subgrupos, entonces se puede decir que el alumno utilizó además la capacidad de percibir la causa y el efecto, es decir, tomar un elemento del Grupo y hacer potencias del mismo, implica la generación de un Subgrupo. El alumno menciona también que el Subgrupo es nuevamente un Grupo, con lo que se observa la integración de los contenidos.

E1P3.11. Dimensión observada: PMC.

El alumno agrega que “naturalmente se tienen las propiedades antes mencionadas”, con lo cual asegura, que un Subgrupo es también un Grupo, esto está relacionado con el contenido matemático.

Así, en este ensayo, se pudo observar 1 vez el pensamiento matemático no racional, 3 veces la utilización de representaciones semióticas simbólicas matemáticas, 7 veces la utilización de frases que contenían elementos relacionados con el contenido algebraico y aritmético (en este caso, no se cuentan las palabras que tienen relación directa con el contenido, si no que más bien, se cuenta la frase como un todo), 2 veces se observa la utilización de un vehículo del pensamiento, que está relacionado con las *nociones básicas* (PMVG), dos veces se hace una explicación de una forma de proceder, esto es, se explica una estrategia incorporada, como un proceso a seguir, 1 vez se hizo una apreciación sobre un objeto matemático.

<u>Ensayo 2</u>

El segundo ensayo (E2), ha sido separado en 12 diferentes partes, cada una de las cuales, muestra una o varias de las dimensiones del PM, estas partes aparecen dentro del párrafo marcadas con un número. Al final de las unidades de análisis, se intenta hacer un resumen de lo observado en toda la unidad, en algunos casos, este resumen, se hace en la subdivisión de la unidad.

E2P1 (1,2,3,4,5,6)

Eine Gruppe ist ein Überbegriff über mehrere Elemente [1] e durch die Erfüllung verschiedener Axiome, die bestimmten Elemente unter sich zusammenfasst[2] ußerdem muss eine Verknüpfung zwischen den Elementen vorliegen[3] ine Gruppe ist nur dann eine Gruppe, wenn sie die 4 folgenden Axiome erfüllt. Erstens muss sie kommutativ sein[4] ußerdem muss sie ein neutrales und ein inverses Element besitzen.[5] d zudem muss sie abgeschlossen sein, was bedeutet, dass man mit den Elementen der Gruppe und der Verknüpfung nur Elemente aus der Gruppe erzeugen kann. [6]

E2P1.1. Categoría observada: PMP.

En esta frase se observa una percepción del concepto Grupo, como una definición que está por sobre otras definiciones, esto se puede interpretar como percibir a los Grupos como un tópico nuevo o como una estructura que está por sobre otras, en este caso el alumno utiliza su capacidad metafórica para intentar describir lo que él entiende como Grupo. El alumno agrega “sobre muchos elementos”, esto se puede interpretar como la consideración de varios elementos, que un Grupo está por sobre los elementos o como la diversidad de los elementos.

E2P1.2. Dimensiones observadas: PMVG y PMC.

Se observa la utilización de las palabras “cumplimiento” y “axiomas”, lo que indica que el alumno se apoya en un conocimiento de contenidos y en la idea básica de lo que es una definición, esto es, un objeto puede ser llamado Grupo, si cumple con determinados axiomas. Esto podría ser interpretado también como una estrategia, para el chequeo de Grupos, pero en este caso, no es considerado como tal, ya que se necesita además una aclaración de cada uno de los procedimientos a seguir. La utilización de las palabras “sich zusammenfasst”, que quiere decir “resumirse”, es una idea básica para la idea de agrupar los elementos que cumplen con los axiomas.

E2P1.3, E2P1.4 y E2P1. 5. Dimensión observada: PMC.

El alumno habla de la existencia previa de una operación, como no se agrega ningún comentario, esto se interpreta como un pensamiento de contenidos. En la parte 4 de este párrafo se aprecia una discordancia entre la matemática regular y la singular, que se observa en la afirmación, que para ser Grupo el primer axioma es la conmutatividad.

En la quinta parte, se observa el pensamiento relacionado con el contenido y nuevamente una discordancia entre la matemática regular y la singular, al asegurar que el Grupo debe poseer un elemento inverso.

E2P1.6. Dimensiones observadas: PMC, PME, PMVG.

Aquí se observan tres dimensiones, la de los contenidos, la de estrategias y los vehículos de comunicación, el alumno habla sobre la clausura como contenido, explica en que consiste, utilizando en este momento la palabra “generar”. Esto se puede interpretar como una idea básica para la tabla de Grupos, a su vez de la clausura, esto es, el alumno interpreta la palabra generar no el sentido de la matemática regular, sino que utiliza la palabra como un vehículo de comunicación.

Es por esto, que esta parte no se puede interpretar como una discordancia entre ambas matemáticas, puesto que la palabra generar podría estar relacionada con un proceso más amplio que hacer solo potencias de un elemento, podría ser de considerar todos los elementos con todos los elementos, con ellos mismos también, como en la tabla de Grupos y no se hace una especificación al respecto en el ensayo.

En este párrafo destaca la observación de cuatro diferentes dimensiones, en particular la relacionada con la interpretación de la utilización de nociones básicas (PMVG), por otro lado se observa la utilización de palabras relacionadas con el contenido, pero no se observa alguna explicación del cómo se entienden estas palabras, esto muestra que hay una diálogo directo con la matemática regular y no se observa un diálogo con la matemática singular.

E2P2 (7,8,9)

Des Weiteren gibt es noch den Begriff Untergruppe. Eine Untergruppe muss dieselben Kriterien einer Gruppe erfüllen[7] nd darf nur einzelne (oder je nach Definition auch alle) Elemente ihrer Hauptgruppe haben[8] /enn man zum Beispiel eine Gruppe mit 6 Elementen hat, und von denen 2 Elemente selbst wieder eine Gruppe ergeben können, spricht man von einer Untergruppe. [9]

E2P2.7. Dimensión observada: PMC.

La séptima parte se interpreta en relación con el contenido matemático, en comparación con la percepción que se tenía de lo que era un Grupo, el alumno utiliza la palabra “concepto” y no “tópico”, para Subgrupos, esto es, Subgrupos no es un concepto que está por sobre el resto, como en el caso del concepto de Grupos.

El alumno menciona además, que se deben cumplir los mismos axiomas que para un Grupo.

E2P2.8. Categoría observada: PMVG.

Lo primero que se observa de esta parte, es que hay una discordancia entre la matemática regular y singular, en particular con el objeto Subgrupo comprendido por el alumno y la matemática singular.

Una posibilidad que se desprende del texto, es la confusión de considerar un elemento generador de un Subgrupo y el Subgrupo generado por un elemento, el alumno entendió que el Subgrupo es solo el elemento generador, es más, el asegura que solo se puede tener un elemento en un Subgrupo y entre paréntesis agrega que se podría tener otra definición para tener a todos los elementos.

Aunque esta discordancia entre las dos matemáticas, se aclara de cierta forma en la parte E2P2.9.

Lo otro que se observa es la idea básica para la noción de contención de un Subgrupo en un Grupo, reflejada en la palabra “Hauptgruppe”, que quiere decir “conjunto principal”, cabe destacar, que esta palabra solo aparece en este ensayo y al ser consultado el profesor del curso, sobre la utilización de esta palabra, se confirmó que el alumno la habría obtenido por otros caminos, que no fueron los de las clases de matemáticas.

E2P2.9. Categoría observada: PMC.

En esta parte el alumno intenta explicar (no es considerada como estrategia), que hay Subgrupos que no están formados por un solo elemento, utilizando el conocimiento relacionado con los contenidos.

Como en el párrafo anterior, se observa con mayor cantidad la categoría del pensamiento matemático relacionado con el contenido, de forma tal que solo la matemática regular, juega un rol fundamental.

E2P3 (10, 11,12)

Ein weiteres Phänomen das bei Gruppen auftreten kann, ist wenn man 2 Gruppen miteinander vergleicht 10 'enn diese komplett identisch sind, also aufeinander abbildbar, dann spricht man von isomorphen Grupper 11 Venn man 2 Gruppentafeln miteinander vergleicht, müssen alle Symmetrieachsen identisch sein. 12

E2P3.10, E2P3.11 y E2P3.12. Dimensiones observadas: PMP, PMC y PME.

El alumno percibe la existencia de un fenómeno, agregando que este ocurre cuando se comparan entre sí, a dos Grupos. En este caso, el alumno ocupa su capacidad de percibir lo estático, esto es, el fenómeno lo percibe de forma estática comparando dos Grupos a través de sus tablas de Grupo (E2P3) o haciendo una biyección entre los elementos.

La estrategia a utilizar es la comparación y esta la hace de dos formas, a través de funciones y por observación de los ejes de simetrías de dos tablas de Grupos. En la parte E2P3.12, no queda claro la palabra "identisch", que quiere decir "idénticos", esto se podría interpretar como una discordancia entre las dos matemáticas.

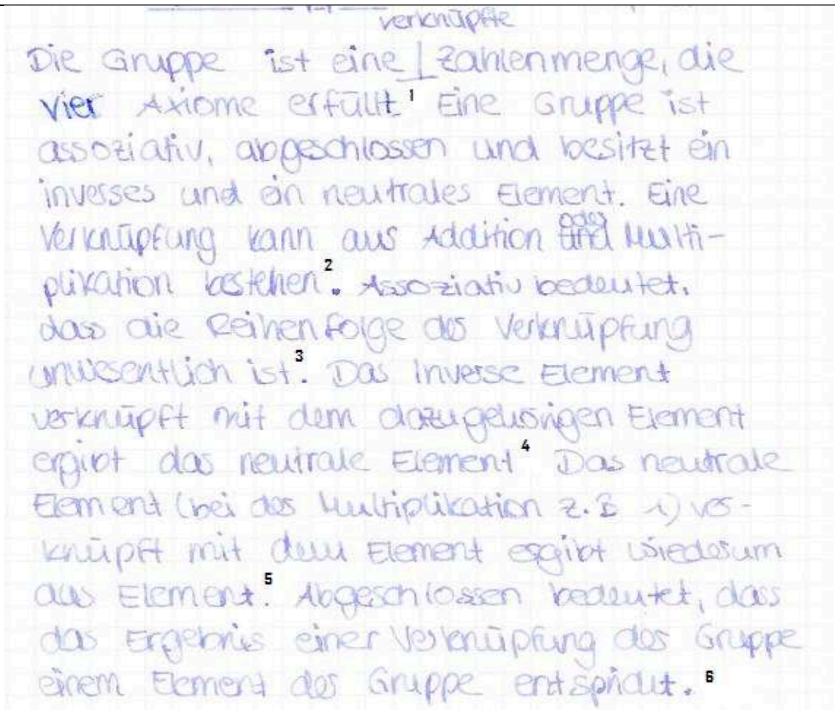
Se observa en la parte E2P3.11 la utilización de conocimiento de contenido previo relacionado con contenido nuevo, el concepto de isomorfismo y el de funciones.

Así, en este ensayo, se pudo observar la dimensión de la percepción, la utilización de vehículos de comunicación, por medio de nociones básicas, el pensamiento relacionado con los contenidos y la dimensión de las estrategias.

Ensayo 3

El tercer ensayo (E3), tiene tres unidades de análisis y tiene en total siete subdivisiones, las cuales se consideran como diferentes partes Cada una de estas subdivisiones, muestra una o varias de las dimensiones del PM, estas partes aparecen dentro del párrafo marcada con un número.

E3P1 (1, 2, 3, 4, 5, 6)


verknüpfte
Die Gruppe ist eine Zahlenmenge, die vier Axiome erfüllt.[1] Eine Gruppe ist assoziativ, abgeschlossen und besitzt ein inverses und ein neutrales Element. Eine Verknüpfung kann aus Addition oder Multiplikation bestehen.[2] Assoziativ bedeutet, dass die Reihenfolge der Verknüpfung unwesentlich ist.[3] Das inverse Element verknüpft mit dem dazugehörigen Element ergibt das neutrale Element.[4] Das neutrale Element (bei der Multiplikation z.B. 1) verknüpft mit dem Element ergibt wiederum das Element.[5] Abgeschlossen bedeutet, dass das Ergebnis einer Verknüpfung der Gruppe einem Element der Gruppe entspricht.[6]

E3P1.1. Dimensiones observadas: PMVG y PMC.

Se observa la utilización de la idea básica “conjunto de números vinculados”, para indicar que un Grupo es un conjunto de números con una operación (en este caso, se utiliza la palabra “operacionados”, que no existe en el idioma español, por lo tanto se ha traducido como vinculados) y se agrega que se deben cumplir los cuatro axiomas, es decir, se incluye el pensamiento relacionado con los contenidos.

E3P1.2. Dimensión observada: PMC.

En esta parte, se observa que hay una discordancia entre la matemática regular y la singular, que es muy similar a la mencionada en E2P1.5. El escrito en esta parte solo se puede interpretar como relacionado con contenidos. Carece de explicaciones y aunque da dos ejemplos de operación (vinculo), estos son solo menciones en lenguaje natural, de la suma y la multiplicación, conocimiento considerado en este nivel como básico.

E3P1.3. Dimensiones observadas: PMVM/A y PMC.

El alumno utiliza la metáfora “el orden a seguir de la operación es irrelevante”, para indicar que la operación es asociativa. La interpretación que se hace aquí es la siguiente, el alumno compara la frase, “da igual si opero dos elementos primero y luego los opero con un tercero o si lo hago primero con los últimos dos y luego con el primero” con la frase “el orden a seguir de la operación es irrelevante” y la representación semiótica simbólica “ $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todo a, b, c que pertenecen al Grupo.” Todo esto está relacionado con el contenido matemático de la asociatividad.

E3P1.4, E3P1.5. Dimensiones observadas: PMC y PME.

En esta parte se observa una relación con el pensamiento relacionado con el contenido matemático y con la explicación de cómo se hace el proceso de determinar el inverso de un elemento del Grupo. En la parte E3P1.5, se agrega además un ejemplo de elemento neutro para la multiplicación, sin especificar cuál es el Grupo.

E3P1.6. Dimensiones observada: PMC.

Se observa el pensamiento relacionado con el contenido y una explicación, sin llegar a ser esta la aclaración de una estrategia a seguir, tiene más bien el carácter de repetición de una definición de la clausura de un Grupo.

En esta unidad de análisis se observa, la utilización tanto de la categoría de las nociones básicas (PMVG), como de las capacidades no racionales. No se observan estrategias y se observa tanto la matemática regular como la singular. En la unidad de análisis, E2P1, se hizo una subdivisión más estrecha, en esta unidad de análisis, la subdivisión no contempla cada paso del alumno, si no que más bien una agrupación, donde se repite la misma categoría.

También se observa la utilización de estrategias, de forma que explican cómo se debería proceder.

En esta unidad de análisis se observa el pensamiento relacionado con el contenido matemático, de forma similar que en la primera unidad de análisis del ensayo anterior. Lo otro que resalta de esta unidad, es la aparición de un vehículo de comunicación metafórico, esto es, un intento por comunicar lo que se entiende de un objeto matemático por medio de una metáfora.

E3P2 (7)

Jede Gruppe kann auch Untergruppen enthaltet,
welche ~~ein~~ ebenfalls die Axiome erfüllen
und ~~Ele~~ Teilmenge des Gruppe sein müssen. [7]

E3P2.7. Dimensiones observadas: PMC y PMVG.

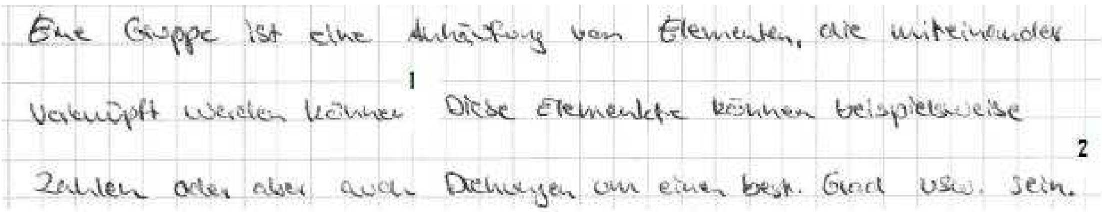
Se utiliza y se aclara la idea básica de "contener", un Grupo puede contener Subgrupos, siempre que se cumplan los axiomas y debe ser un subconjunto del Grupo. En este caso se trata de una idea básica, para el concepto de contención y está relacionada con los contenidos matemáticos trabajados, Subgrupo de un Grupo.

Así, en este ensayo, se pudo observar la dimensión de los vehículos de comunicación nociones básicas, el pensamiento relacionado con el contenido, el vehículo metáfora y una explicación considerada como estrategia.

Ensayo 4

El ensayo E4, tiene cuatro unidades de análisis y 8 subdivisiones diferentes, cada una de las cuales, muestra una o varias de las dimensiones del PM, estas partes aparecen dentro del párrafo marcadas con un número.

E4P1 (1, 2)


Eine Gruppe ist eine Anhäufung von Elementen, die miteinander Verknüpft werden können 1 Diese Elemente können beispielsweise Zahlen oder aber auch Drehungen um einen best. Grad usw. sein. 2

E4P1.1. Dimensiones observadas: PMC y PMVG.

Esta parte, se puede interpretar en relación a los vehículos de comunicación nociones básicas, ya que el alumno utiliza la palabra “Anhäufung”, que quiere decir “acopio”, “acumulación”, “amontonamiento”, para decir que un Grupo es un conjunto, además agrega que estos elementos podrían ser operados entre ellos, esto es, el alumno utiliza una idea básica y conocimientos previos, para intentar describir lo que es un Grupo.

E4P1.2. Dimensiones observadas: PMP, PMC y PMCR.

La frase se deja interpretar en relación a la percepción, ya que el alumno nombra entre las posibilidades para los elementos de un Grupo a las rotaciones y con esto, el percibe los elementos del Grupo como objetos dinámicos (capacidad de percibir lo dinámico).

Con esto también está utilizando la abstracción y la flexibilidad, como en el caso de E1P1.1.

En esta unidad de análisis, resalta la observación de la categoría capacidades no racionales, la categoría del pensamiento matemático relacionado con el contenido es frecuentemente observada y aparecen dos diferentes vehículos de comunicación, a saber el de representaciones semióticas simbólicas y el de las nociones básicas.

E4P2 (3, 4, 5, 6, 7)

Eine Gruppe ist jedoch durch bestimmte Eigenschaften definiert. 3
So muss eine Gruppe assoziativ $[(a*b)*c = a*(b*c)]$ aber auch
kommutativ $a*b = b*a$, was auch abelsch genannt wird sein. 4
Zusätzlich muss sie ein neutrales Element beinhalten. Dies
Erachten wenn eine Verknüpfung mit diesem Element gemacht
wird, darf sich das Ursprungselement nicht verändern.
[vgl. $e*a = a*e = a$] 5 Außerdem muss es auch ein Inverses
geben. Somit muss die Verknüpfung mit dem Inversen, das
Neutrale Element ergeben. [vgl. $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$] 6
Abgeschlossen ist eine Gruppe wenn alle Verknüpfungen wieder
Elemente ergeben, die schon in der Gruppe vorhanden sind. 7

E4P2.3. Dimensiones observada: PMC.

La frase está relacionada con el pensamiento de contenidos, ya que se menciona la necesidad de cumplir con las Características de Grupo, para ser un Grupo.

E4P2.4. Dimensiones observadas: PMVR y PMC.

En esta parte el alumno utiliza representaciones semióticas simbólicas matemáticas, para ejemplificar la asociatividad y la conmutatividad. En esta parte, se observa también una discordancia entre la matemática regular y la singular, similar a la vista en E2P1.4. En ambos casos se tiene el pensamiento relacionado con los contenidos matemáticos.

E4P2.5. Dimensiones observadas: PMVG, PMVR, PMC y PME.

Se explica lo que es un elemento neutro, describiendo una estrategia y se utiliza la expresión "Ursprungselement", que quiere decir "elemento originario", esto es una idea básica, para la operación de cualquier elemento del Grupo con el elemento neutro, esto es, cualquier elemento operado con el neutro sigue siendo el mismo que antes o el elemento originario. También se utiliza la representación semiótica simbólica y todo está relacionado con el pensamiento de contenido.

E4P2.6. Dimensiones observadas: PMVR, PMC y PME.

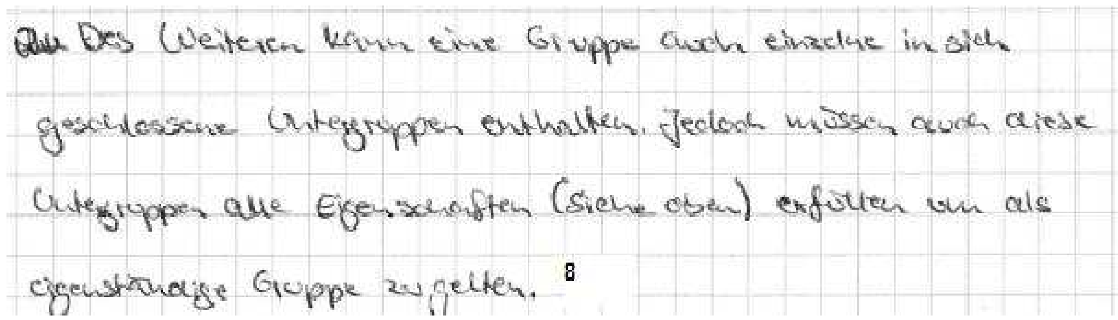
Se observa una descripción de pasos para describir lo que es el inverso de un elemento, que se puede considerar como una estrategia. También se utiliza la representación semiótica simbólica y el PMC.

E4P2.7. Dimensiones observadas: PMVG y PME.

Utilización de la palabra “Abgeschlossenheit”, que quiere decir, “clausura”, “cerradura”, como idea básica, para el concepto de “operación”, en este caso, también se podría entender como una metáfora conceptual. Se tiene además, la estrategia que el alumno ha utilizado, para reconocer cuando un conjunto con una operación es cerrado. Muy similar al caso E1P2.6 y E1P2.7.

Esta es una unidad de análisis que destaca, por la cantidad y variedad de las categorías observadas. La dimensión que aquí no se observa es la PMCR y como en las otras unidades de análisis se observa frecuentemente la categoría PMC.

E4P3 (8)


~~Qu~~ Des Weiteren kann eine Gruppe auch einzelne in sich geschlossene Untergruppen enthalten. Jedoch müssen auch diese Untergruppen alle Eigenschaften (siehe oben) erfüllen um als eigenständige Gruppe zu gelten. 8

E4P3.8. Dimensiones observadas: PMC y PMVG.

Se utiliza la palabra “geschlossene”, que quiere decir “cerrado”, como idea básica para decir que un Subgrupo es nuevamente un Grupo, con una operación. En este caso no queda claro, si se podría considerar otra operación. El alumno agrega a continuación, que se deben cumplir nuevamente las propiedades anteriores.

Así, en este ensayo, se pudo observar con bastante frecuencia el pensamiento relacionado con el contenido, en segundo lugar resalta la utilización del vehículo del pensamiento nociones básicas, también es observada una frase que es interpretada en relación a la categoría PMP, es decir, de la percepción. Esta proviene de la percepción del alumno con respecto a un objeto matemático, se observa una frase (palabras) que se interpreta con la categoría PMCR, es decir con una capacidad no racional. Resalta la aparición frecuente de la utilización de representaciones semióticas simbólicas matemáticas y de frases que indican una forma de actuar o de proceder, que están relacionadas en este caso con la dimensión de las estrategias (PME).

<u>Ensayo 5</u>

Este ensayo tiene 4 unidades de análisis y se han realizado 11 subdivisiones en total, donde en cada una de las cuales se observan diferentes dimensiones y categorías.

E5P1 (1, 2, 3)

In der Mathematik versteht man unter dem
Begriff „Gruppe" eine Zahlenmenge, ~~welche~~
~~vier bestimmte~~ deren Elemente durch eines
~~eine bestimmte Verknüpfung verknüpft werden~~.
~~und~~ vier der Grundrechenzeichen miteinander
verknüpft werden.[1] Diese Verknüpfungen müssen
vier Charakteristika ~~[illegible]~~, oder Axiome
aufweisen:[2] jedes der ~~möglichen~~ Verknüpfungen
müssen ein ~~[illegible]~~ Ergebnis aufweisen, welches
~~ebenfalls~~ ein Element der Zahlenmenge
der Gruppe ist. Man spricht hierbei von der
„Abgeschlossenheit" einer Zahlenmenge.[3]

E5P1.1. Dimensiones observadas: PMC, PMVG y PMP.

En esta parte se observa en primer lugar, una percepción del alumno, relacionada con la sensibilidad matemática. El alumno percibe desde la matemática el concepto de Grupo, no directamente desde su propio punto vista, esto se puede interpretar como si el hablará desde la matemática, por la matemática, como si él fuera una voz de la matemática.

En esta misma parte, se puede apreciar una relación entre conocimientos anteriores y los nuevos, a través de la idea básica de operación y de clausura, representada por las palabras “Grundrechenzeichen” y “miteinander”, que quiere decir “signos de operaciones básicas” y “entre ellos”, respectivamente. Se observa una buena relación entre la matemática singular y la regular.

E5P1.2. Dimensiones observada: PMVM/A.

Se utiliza la palabra “oder”, que quiere decir “o”. Esto da un indicio para la observación de una analogía, que pudo hacer el alumno. En este caso, el alumno hace una analogía entre axiomas y Características, esto se puede interpretar como un vehículo del PM, esto es, el alumno dice que un Grupo debe “mostrar” estas cuatro Características.

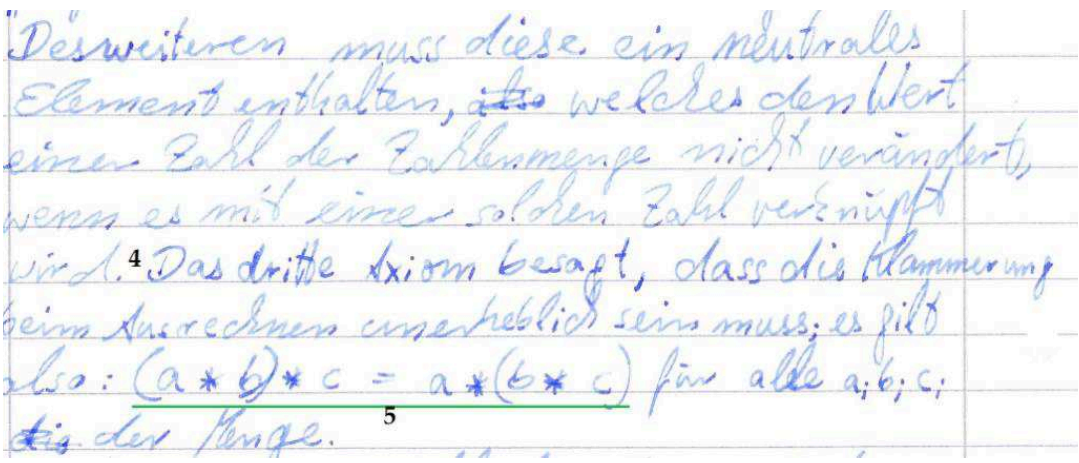
E5P1.3. Dimensiones observadas: PMP, PMVM/A y PMC.

En esta subdivisión se puede observar la siguiente frase: “Cada una de las posibles operaciones debe mostrar un resultado, el cual es un elemento del conjunto de números del Grupo”. Se ha traducido en forma especial, ya que se ve una posible intuición por parte del alumno, al utilizar la palabra “posible”, esto se deja interpretar como si existiera la posibilidad de que un mismo conjunto pudiera ser Grupo con más de una operación (lo cual es factible). Por otro lado, el alumno deja traslucir en su frase que un Grupo no es solo el conjunto, sino que es una dupla, conjunto y operación. Con esta frase el alumno explica de forma analógica, lo que es la clausura, considerando de esta forma el PMC y PMVA. Utilizando además la palabra “spricht”, que quiere decir “habla”, esto es, se menciona directamente que la frase utilizada antes es un medio para comunicar la clausura.

En esta unidad de análisis, se observan cuatro dimensiones diferentes, resalta la cantidad de interpretaciones relacionadas con la categoría vehículos del pensamiento, en particular sobre el uso de analogías. No se observa la categoría de las capacidades no racionales y la de estrategias.

Con respecto a la matemática regular y singular, se aprecian ambas en todo el párrafo y hay coherencia entre ambas, predominando la matemática regular en varias de las subdivisiones de esta unidad de análisis.

E5P2 (4, 5)


Desweiteren muss diese ein neutrales Element enthalten, ~~das~~ welches den Wert einer Zahl der Zahlenmenge nicht verändert, wenn es mit einer solchen Zahl verknüpft wird. 4 Das dritte Axiom besagt, dass die Klammerung beim Ausrechnen unerheblich sein muss; es gilt also: $(a*b)*c = a*(b*c)$ für alle a; b; c; ~~die~~ der Menge. 5

E5P2.4. Dimensiones observadas: PME y PMC.

En esta parte, se puede observar la categoría de las estrategias, en particular el principio de invariancia, es decir, un elemento es neutro, porque no cambia el “valor” de los elementos con los que se opera. Se aprecia también la conexión con el pensamiento de contenido.

E5P2.5. Dimensiones observadas: PMC y PMVR.

En este caso no se observa la utilización de una explicación para la asociatividad, sino que más bien se refuerza el concepto de asociatividad[153], con representaciones semióticas simbólicas matemáticas. Se utiliza también la palabra "unerheblich", que quiere decir "irrelevante", como idea básica para la asociatividad. En este caso, la interpretación nos induce a pensar que el alumno, quiere eliminar los paréntesis, pero como de todas maneras los considera, se podría decir que no hay una seguridad sobre lo que quiere decir el alumno y por lo tanto no se ha incluido la categoría PMVG.

Esta unidad de análisis resalta por la inclusión de la categoría de las estrategias y la representación semiótica simbólica, utilizada como apoyo de comprensión. Se observa tanto la matemática regular como la singular, se aprecia una coherencia entre ambas y como en la unidad de análisis anterior, se aprecia una predominancia de la matemática regular sobre la singular. Esto podría significar, entre otras cosas, que el alumno ha encapsulado en su memoria las representaciones claves, que le ayudan a reproducir lo que se entiende por Grupo.

E5P3 (6, 7, 8)

Auch muss „jede Zahl der Gruppe ein Inverses Element" besitzen, d.h. verknüpft man eine Zahl der Menge mit dem entsprechenden ~~Invers~~ inversen Element, so ist das Ergebnis das oben beschriebene neutrale Element. 6
Ein Beispiel für eine Gruppe wäre die Menge der ganzen Zahlen, verknüpft ~~mit der~~ durch Addition. Man schreibt dann $(\mathbb{Z}, +)$ für die Gruppe. 7 Das neutrale Element ~~ist~~ ist hier die 0, das inverse Element zu einer Zahl (x) ~~in~~ $\in \mathbb{Z}$ wäre $(-x)$. 8

E5P3.6. Dimensiones observadas: PMC y PME.

[153] *La asociatividad es un concepto. En ocasiones se puede decir que un Grupo es un concepto y en otras se puede decir que un Grupo es un objeto matemático, pero para la asociatividad no hay esta dualidad matemática.*

Esta parte del párrafo es muy similar a la subdivisión 5 de la unidad de análisis E1P1 y a la subdivisión E3P1.4.

E5P3.7. Dimensiones observadas: PMVR, PME y PMC.

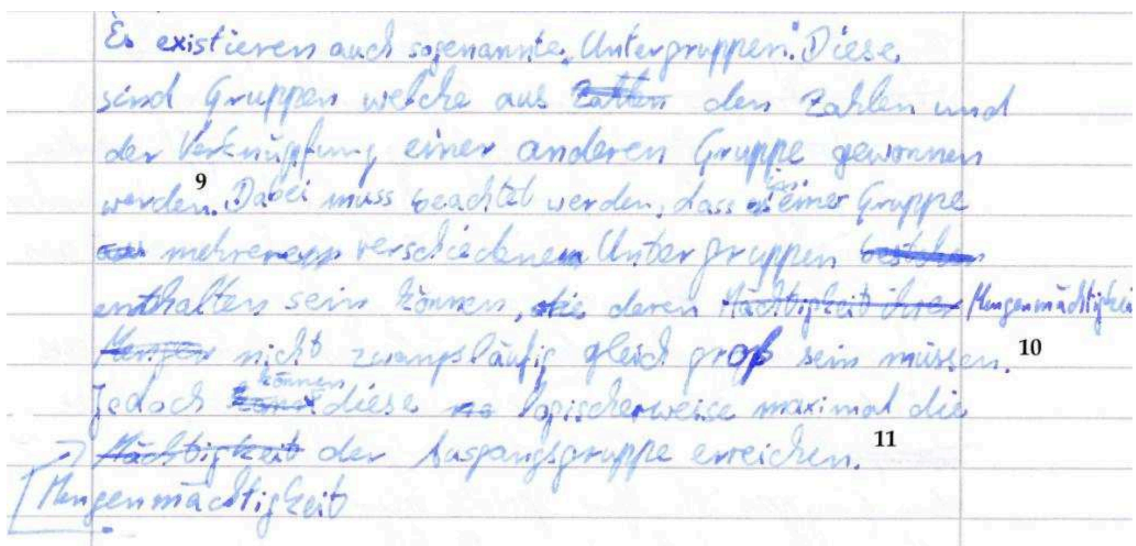
El alumno utiliza una representación semiótica simbólica matemática, describiendo incluso la misma por medio del lenguaje natural y utiliza la estrategia del principio de analogía. Utiliza además conocimientos matemáticos, tanto los nuevos como los antiguos, en concordancia con la matemática regular.

E5P3.8. Dimensiones observadas: PMVR y PMC.

En esta última subdivisión del párrafo, se observa que el alumno ha utilizado representaciones semióticas simbólicas y el conocimiento relacionado con el contenido algebraico en relación al pensamiento aritmético.

Esta unidad de análisis, resalta por las interpretaciones relacionadas con la categoría estrategias, en relación a la categoría pensamiento relacionado con el contenido y la utilización de representaciones semióticas simbólicas.

E5P4 (9, 10, 11)


Es existieren auch sogenannte Untergruppen. Diese
sind Gruppen welche aus ~~Zahlen~~ den Zahlen und
der Verknüpfung einer anderen Gruppe gewonnen
werden. 9 Dabei muss beachtet werden, dass ~~es~~ einer Gruppe
~~es~~ mehreren verschiedenen Untergruppen ~~bestehen~~
enthalten sein können, ~~die~~ deren ~~Mächtigkeit ihrer~~ Mengenmächtigkeit
~~Mengen~~ nicht zwangsläufig gleich groß sein müssen. 10
Jedoch ~~kann~~ können diese ~~so~~ logischerweise maximal die
~~Mächtigkeit~~ der Ausgangsgruppe erreichen. 11
Mengenmächtigkeit

E5P4.9. Dimensiones observadas: PMC y PMP.

En esta parte se observa la utilización de las palabras “existencia” y “serán ganados”, para indicar que en un Grupo se puede “ganar” la existencia de Subgrupos, esto se puede interpretar en relación a la percepción (en la cual utiliza la capacidad de percibir el dinamismo del elemento generador) que tiene el alumno, sobre un elemento generador de un Grupo, respectivamente de un Subgrupo. Esta percepción se hace en relación al contenido matemático.

E5P4.10. Dimensiones observadas: PMCR y PMC.

En estas frases, se puede observar que el alumno utiliza tanto la sensibilidad matemática en relación a la posible cantidad y variedad (en cuanto a la cardinalidad) de los Subgrupos. Aunque la relación entre la capacidad no racional y el contenido matemático no es muy nítida, se agrega de todas formas la categoría PMC, ya que el alumno utiliza de forma correcta conocimientos anteriores y los nuevos.

E5P4.11. Dimensiones observadas: PME y PMC.

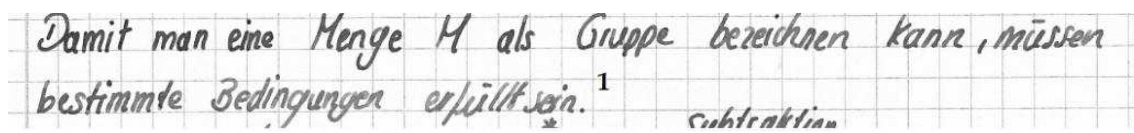
En esta parte destaca la utilización de la palabra "maximal", como una estrategia, para determinar la cardinalidad de algún Subgrupo, en este caso el alumno dice que la cardinalidad de un Subgrupo puede ser como máximo la cardinalidad del Grupo. Esto puede ser interpretado en relación a la categoría PMC y a la categoría PME, en particular al principio de los extremos.

Este ensayo destaca por la variedad de las categorías que se pudieron observar, también destaca por la unidad y concordancia entre la matemática regular y la singular. También se puede decir, que este es un ensayo en el cual se observó en gran medida, los vehículos del pensamiento, en particular de las analogías. En las tres unidades de análisis se observó la categoría del pensamiento relacionado con el contenido matemático, no tan solo del algebraico y aritmético, sino que también del pensamiento funcional.

<u>Ensayo 6</u>

El ensayo E6 tiene 7 unidades de análisis, que no fueron subdividas por la estructura del ensayo y porque coinciden justamente con las mismas dimensiones observadas. En este caso, solo se ha agregado el número correlativo correspondiente al final del párrafo.

E6P1 (1)


Damit man eine Menge M als Gruppe bezeichnen kann, müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein. 1

E6P1.1. Dimensiones observadas: PMC y PMVG.

Se observa la utilización de las palabras "bestimmte Bedingungen", que quiere decir "determinadas condiciones", esto se puede interpretar como una idea básica para la noción de definición de Grupo. Se utiliza también la palabra conjunto y toda la frase refleja un apoyo en el pensamiento de contenido, tanto del nuevo como del antiguo.

E6P2 (2)

Subtraktion
Zuerst braucht man eine Verknüpfung, Addition oder Multiplikation.
Das Assoziativgesetz muss gelten, also dass $\cancel{(a+b)}$ $(a*b)*c = a*(b*c)$
ist.[2]

E6P2.2. Dimensiones observadas: PMVR y PMC.

En este caso se utiliza la representación semiótica simbólica como apoyo para el concepto de asociatividad. No se observa una explicación, que pudiera indicar la utilización de una estrategia y hay algunos vacíos en cuanto a la matemática regular. Esta unidad de análisis se caracteriza por la utilización o por la repetición de representaciones y de palabras utilizadas en la definición de Grupo.

E6P3 (3)

Man braucht ein neutrales Element, dass $e*a = a*e = a$ gilt.
Außerdem muss es ein Inverses Element geben, damit
$a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ gilt.[3]

E6P3.3. Dimensiones observadas: PMP, PMC y PMVR.

Se observa la utilización de las palabras "Man braucht", que quiere decir "uno necesita", para indicar la existencia del elemento neutro, esto se deja interpretar en relación a la percepción que tiene el alumno, sobre el cumplimiento de los axiomas de Grupo, esto en relación a la sensibilidad matemática indicaría que este alumno percibe a la matemática desde un punto de vista de necesidades y soluciones a ellas. El alumno utiliza de la misma forma que en la unidad de análisis anterior las dimensiones PMC y PMVR.

E6P4 (4)

Die Gruppe kann kommutativ sein, wenn $a*b = b*a$.
a, b, c, e, a^{-1} müssen aus der Gruppe sein.[4]

E6P4.4. Dimensiones observadas: PMC y PMVR.

En esta unidad de análisis se observan las dimensiones pensamiento matemático relacionado con el contenido y las representaciones semióticas simbólicas matemáticas, de la misma manera que en la unidad E6P2.2. Esto podría indicar una ausencia de la matemática singular o una identificación uno a uno entre la matemática regular y la singular.

La última frase de esta unidad, se deja entender si se observan las otras dos unidades de análisis anteriores.

E6P5 (5)

Eine Gruppe muss abgeschlossen sein, also wenn die Ergebnisse einer Verknüpfung wieder in der Gruppe liegen.[5]

E6P5.5. Dimensiones observadas: PMVG y PMC.

En esta unidad de análisis, se observa como en las otras la categoría del pensamiento relacionado con el contenido, de forma directa, salvo que para la noción de pertenecer a un conjunto, el alumno utiliza la palabra “liegen”, que quiere decir “estar tendido”, “estar recostado”, “estar ubicado”, que se puede interpretar desde la categoría de las nociones básicas para esta noción.

E6P6 (6)

Innerhalb einer Gruppe kann es mehrere ~~ode~~ Untergruppen geben, die auch wieder alle Bedingungen erfüllen müssen.[6]

E6P6.6. Dimensión Observada: PMC.

En esta unidad de análisis, a diferencia de la unidad de análisis E3P2.7, no se puede apreciar ningún tipo de aclaración, explicación, que indique la utilización de alguna idea básica.

Por lo tanto esta unidad de análisis, solo se observa la matemática regular y en especial el pensamiento relacionado con el contenido.

E6P7 (7)

Zwei Gruppen $(G,*)$ und $(G',*')$ sind isomorph, wenn $\rho(a*b) = \rho(a) *' \rho(b)$.[7]

E6P7.7. Dimensiones observadas: PMC y PMVR.

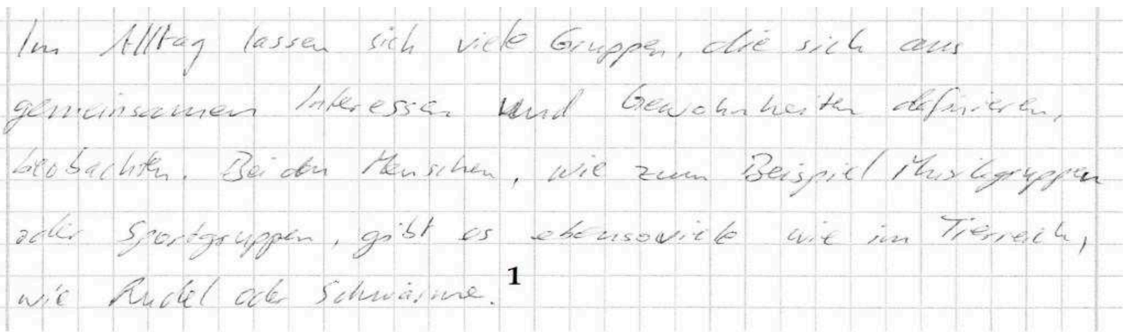
En esta unidad de análisis se observa el contenido algebraico y la utilización de representaciones semióticas simbólicas, en cuanto a la matemática regular, se observa un vacío, con respecto a la función ρ , aquí mostrada.

Finalmente, en este ensayo se observa con mucha frecuencia la categoría del pensamiento relacionado con el contenido y la categoría de las representaciones semióticas. Las otras dimensiones aparecen con poca frecuencia y no fue posible observar la dimensión PME.

<u>Ensayo 7</u>

El ensayo E7 tiene 3 unidades de análisis y 8 subdivisiones. Este ensayo también se puede analizar como un todo, ya que el primer párrafo, está relacionado con el primero y el segundo, de forma muy estrecha.

E7P1 (1)


Im Alltag lassen sich viele Gruppen, die sich aus gemeinsamen Interessen und Gewohnheiten definieren, beobachten. Bei den Menschen, wie zum Beispiel Musikgruppen oder Sportgruppen, gibt es ebensoviele wie im Tierreich, wie Rudel oder Schwärme.

1

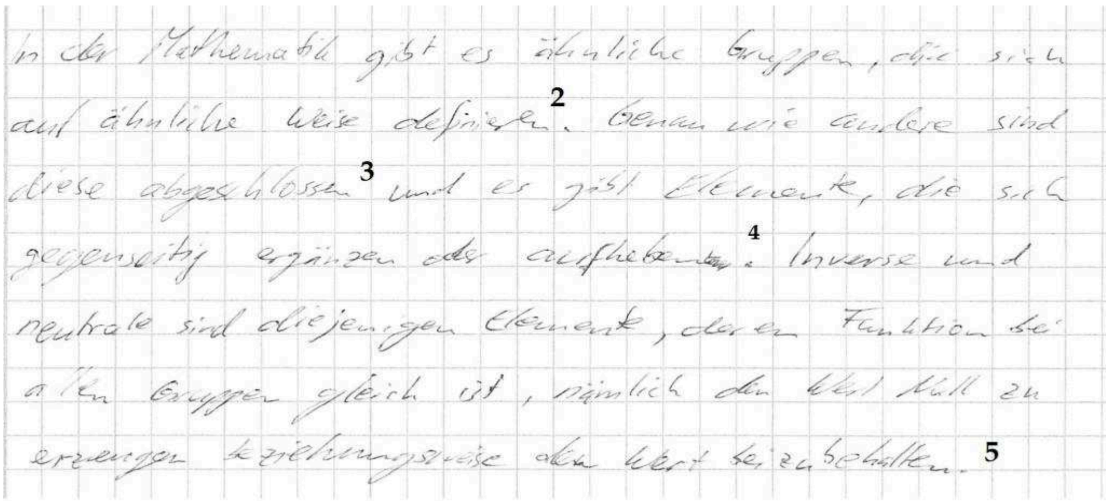
E7P1.1. Dimensiones observadas: PMP y PMCR.

Textualmente, de este párrafo: "En la vida cotidiana, se dejan observar muchos grupos, grupos que se definen por intereses y costumbres comunes. Como por ejemplo, grupos de música y grupos deportivos, existen otros tantos en el reino animal, como manadas y bandadas."

Lo que se observa en este párrafo, es una introducción para el próximo párrafo, también se observa en todo el párrafo una capacidad no racional, que se deja interpretar por medio de la fantasía matemática, la cual permite encontrar relaciones entre la matemática y otras áreas, en este caso, con la vida cotidiana, con la naturaleza, de forma no tan cotidiana, se podría interpretar también desde el punto de la creatividad.

En cuánto a la dimensión percepción, se mezclan varias de las capacidades, pero por sobre todo, destaca la forma de percibir el medio, con sus Características y costumbres, como lo menciona explícitamente el alumno.

E7P2 (2, 3, 4, 5)


In der Mathematik gibt es ähnliche Gruppen, die sich auf ähnliche Weise definieren. 2 Genau wie andere sind diese abgeschlossen 3 und es gibt Element, die sich gegenseitig ergänzen oder aufheben. 4 Inverse und neutrale sind diejenigen Element, deren Funktion bei allen Gruppen gleich ist, nämlich den Wert Null zu erzeugen beziehungsweise den Wert beizubehalten. 5

E7P2.2 Dimensiones observadas: PMC y PMVM/A.

La frase textual escrita por el alumno es: "En la matemática existen Grupos análogos (similares), que se definen de forma similar." Aquí se observa la unión entre el párrafo anterior y el segundo, también se observa en esta frase, el pensamiento relacionado con el contenido, en particular con la definición de Grupo y la generación de una metáfora. En lo que sigue del texto, se podrá observar como el alumno intenta generar una metáfora conceptual. En este caso, nos limitamos a decir, que es una analogía, para la definición de Grupo.

E7P2.3. Dimensiones observadas: PMC y PMVM/A.

En este caso se observa la primera biyección, entre la clausura de un Grupo y lo que se entiende por grupo cerrado, con la idea de club (deportivo o de música), como se menciona en la unidad de análisis E7P1.1. Esto se deja interpretar en términos de la categoría del pensamiento de contenido y del vehículo de comunicación analogía.

E7P2.4. Dimensiones observadas: PMP, PMVG y PMVM/A.

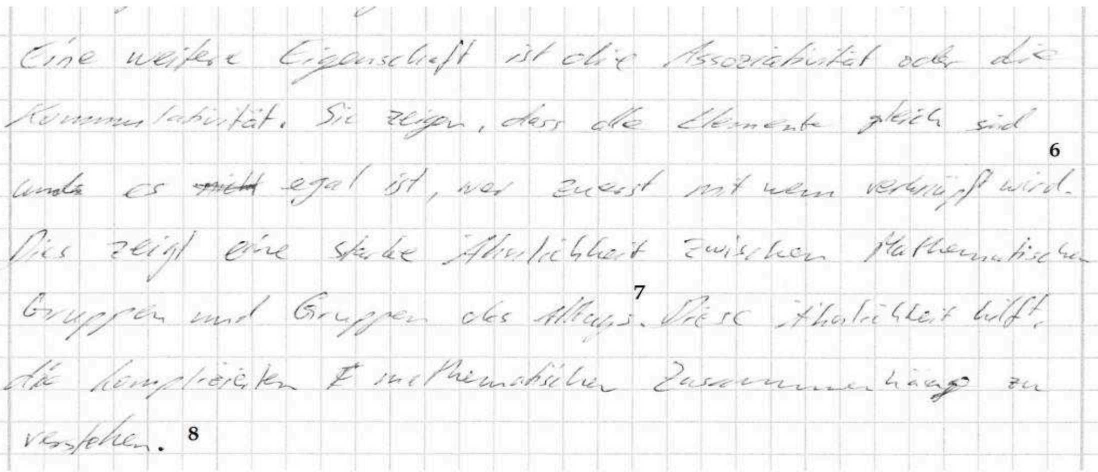
En esta subdivisión, se observan estas tres dimensiones, de forma que la matemática singular, juega un rol muy particular, ya que el alumno utiliza la palabra "complementarse" y la palabra "conservar", para denominar respectivamente a los elementos inversos y al elemento neutro de un Grupo. Esto se deja interpretar desde la categoría de los vehículos de comunicación como una idea básica, pero también desde la percepción, con la capacidad de percibir la causa y el efecto desde los individuos de un grupo de personas o de animales y eso trasladarlo a la noción de Grupo. Este es nuevamente un intento de la creación de una metáfora conceptual, por lo tanto se ha vuelto a considerar la dimensión PMVM/A.

E7P2.5. Dimensiones observadas: PMC, PMVM/A y PMVG.

En esta subdivisión se puede apreciar no tan solo el pensamiento relacionado con el contenido algebraico, sino que también con el pensamiento funcional, más aún el alumno escribe: “cumplen la misma función”, para decir que el neutro y los inversos cumplen una función y agregando que es una predeterminada función. En esta parte no queda muy claro la relación entre la matemática regular y la singular, con lo que se ha escrito no hay una posibilidad de decir que hay una discordancia, ya que falta más información o una aclaración. En cuanto a la categoría PMVG, esta se observa en la interpretación de la utilización de las palabras “generar el neutro”, para la idea básica de inversos y las palabras “mantener el valor”, para la idea básica de la función del elemento neutro del Grupo. Se observa que el alumno sigue con la intención de hacer de la analogía, entre grupos del medio natural y los Grupos, una metáfora conceptual.

Esta unidad de análisis, destaca por la observación de la categoría PMVM/A, más aún destaca por la observación de dos dimensiones, que no fueron muy frecuentes de observar en otras unidades de análisis.

E7P3 (6, 7, 8)


Eine weitere Eigenschaft ist die Assoziativität oder die Kommutativität. Sie zeigen, dass alle Elemente gleich sind 6 und es ~~nicht~~ egal ist, wer zuerst mit wem verknüpft wird. Dies zeigt eine starke Ähnlichkeit zwischen mathematischen Gruppen und Gruppen des Alltags. 7 Diese Ähnlichkeit hilft, die komplizierten ~~F~~ mathematischen Zusammenhänge zu verstehen. 8

E7P3.6. Dimensiones observadas: PMC, PMVM/A y PMP.

En esta subdivisión se tiene la siguiente frase: “... Estas muestran que todos los elementos son iguales y...”, la que muestra una sensibilidad matemática relacionada con el “comunismo”, esto quiere decir, que la metáfora que está utilizando el alumno para decir que la operación es asociativa, tiene una connotación de “igualdad social”, todo esto se hace en relación al contenido matemático.

Sobre la concordancia entre la matemática regular y la singular, hace falta más información y por lo que el alumno aclara a continuación, se puede observar que hay una comprensión del concepto asociatividad.

E7P3.7. Categoría observada: PMVM/A.

En esta subdivisión se comprueba el intento del alumno por hacer de la analogía entre Grupos y grupos de la vida cotidiana, algo más, ya que agrega “eine starke Änhlichkeit”, que quiere decir, “un fuerte parecido”. Las analogías que hizo el alumno en todo el ensayo se comprenden, pero no existe una biyección biunívoca entre algún grupo de la vida cotidiana y algún Grupo, ya que un Grupo, como se explicó en la sección 1.6.a, es una dupla, conjunto y operación, y en los grupos de la vida cotidiana, la operación no está bien definida, en el sentido del resultado que se obtiene al “operar” a dos personas de un grupo.

En todo caso, el pensamiento aquí observado, está relacionado con los vehículos de comunicación en particular con la intención de generar algo más que una analogía.

E7P3.8. Dimensiones observadas: PME, PMP, PMVM/A y PMCR.

El alumno escribe: “Esta similitud ayuda a comprender las conexiones complicadas de la matemática.” En esta frase se observa la categoría de las capacidades no racionales, como es la sensibilidad matemática y más aún, de la utilización de la palabra comprensión en un sentido muy particular, ya que el alumno ve en esta analogía la posibilidad de comprender el “mundo complicado” de la matemática, dando a entender que los grupos de la vida cotidiana también lo son, pero que es justamente esta “comparación” la que ayuda a comprender.

Esta frase está en relación con el párrafo 1 y 2, momentos en los que el alumno trato de hacer una metáfora conceptual (ver E7P3.7), con esto se observa entonces también la capacidad metafórica y por ende el PMP. Esta frase puede ser interpretada también desde el punto de vista estratégico, en particular del principio de analogía.

Este ensayo, destaca por sobre los otros ensayos hasta ahora analizados, por la estructura del ensayo y por el intento del alumno de comparar los grupos de la vida cotidiana con los Grupos, es más, se observa el intento de hacer una biyección entre lo terrenal y lo abstracto (sección 3.3), esto quiere decir que la capacidad metafórica se observó durante todo el ensayo.

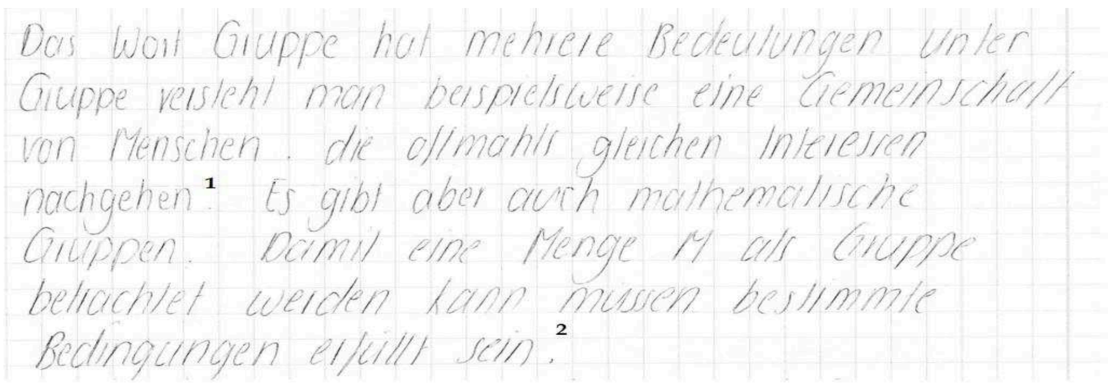
En las unidades de análisis se contemplaron los otros intentos de hacer analogías y se observaron algunas nociones básicas.

Este ensayo resalta también por la observación no tan frecuente del pensamiento relacionado con el contenido, lo que se interpreta no como ausencia del mismo, sino que en este caso destacan los pensamientos observados por sobre la utilización directa del contenido.

Ensayo 8

Este ensayo tiene tres unidades de análisis y contempla 6 subdivisiones, donde en cada una de las cuales se han podido observar una o varias de las ddimensiones de este estudio. Estas subdivisiones aparecen marcadas con un número dentro del párrafo.

E8P1 (1, 2)


Das Wort Gruppe hat mehrere Bedeutungen. Unter Gruppe versteht man beispielsweise eine Gemeinschaft von Menschen, die oftmahls gleichen Interessen nachgehen.1 Es gibt aber auch mathematische Gruppen. Damit eine Menge M als Gruppe betrachtet werden kann müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein.2

E8P1.1. Dimensiones observadas: PMVG, PMP y PMCR.

Como en la unidad de análisis E7P1.1, se puede observar una introducción, más breve en este caso, relacionadas con las dimensiones percepción y capacidades no racionales, por medio de la percepción del medio con el sentido del yo y del otro y la fantasía, respectivamente.

Además, se utiliza la palabra “Gemeinschaft”, que quiere decir “comunidad”, “colectividad”, que podría ser interpretada como una idea básica, para conjunto con ciertas características

E8P1.2. Dimensiones observadas: PMVM/A y PMC.

En esta subdivisión se observa la comparación entre las comunidades y los Grupos, como si fuera lo más natural, de que si existen en la vida cotidiana, también existen en matemática, aunque el alumno agrega que se deben cumplir ciertas condiciones, de esta observación se puede deducir el pensamiento relacionado con el contenido.

E8P2 (3, 4)

Zuerst einmal ist eine abgeschlossene Verknüpfung auf einer Menge M notwendig. Solche Verknüpfungen reeller Zahlen sind meist Addition, Subtraktion und Multiplikation[3]. Weiterhin muss folgender gelten:
- Assoziativität
- ein neutrales Element
- ein Inverses sowie
- eine abelsche Gruppe[4]

E8P2.3 y E8P2.4. Dimensiones observada: PMC.

En estas subdivisiones se observa la misma categoría, en la primera en relación al pensamiento aritmético y en la segunda en relación al pensamiento algebraico.

E8P3 (5, 6)

Additive Gruppen werden (G, +) genannt wohingegen multiplikative Gruppen mit (G, ·) bezeichnet werden.[5] Existieren innerhalb einer Gruppe weitere Gruppen, so werden diese Untergruppen genannt.[6]

E8P3.5. Dimensiones observadas: PMC y PMVR.

En este caso se observa el pensamiento relacionado con el contenido, en particular con el pensamiento algebraico. Se observa también una fuerte presencia de la matemática regular y se observa la utilización de representaciones semióticas simbólicas matemáticas.

E8P3.6. Dimensión observada: PMC.

En este caso se observa nuevamente el pensamiento relacionado con el contenido nuevo, además se observa una inconsistencia entre la matemática regular y la singular, ya que no todo Grupo, que contiene otros Grupos son estos denominados Subgrupos del Grupo.

Así para este ensayo, se ha observado en un inicio una analogía pero no se ha continuado con ella en el resto del texto. Se observa como en los otros ensayos una dominancia del pensamiento de contenidos.

Así se han analizado 8 ensayos de los 16 ensayos entregados, en cada uno de ellos se pudo observar de diferentes formas las dimensiones y categorías del estudio, que contemplan las dimensiones del PM y la dialéctica en matemática, representada por la matemática regular y la singular.

Se presenta un resumen del análisis de los ensayos en la sección de resultados (6.5), además se entrega en esa misma sección los resultados más destacados.

En la sección final de este capítulo (6.6) se hace un resumen final, donde se relacionan los resultados de los escritos y se realiza al final un resumen en relación al objetivo.

6.4. ANÁLISIS DE LOS DIARIOS DE APRENDIZAJE.

En este análisis se consideraron 5 diarios de aprendizajes de un total de 14 recibidos.

El criterio de selección fue el contenido de estos diarios con respecto a las dimensiones y categorías del estudio y en algunos casos, la aparición de categorías, que no fueron observadas en los ensayos de los alumnos (sección 6.3), para el mismo tema. 3 de estos diarios de aprendizaje fueron eliminados, por ser muy parecidos a un cuaderno de trabajo y uno de ellos, porque no se escribió en detalle los temas correspondientes a las sesiones de Teoría de Grupos, sino que escribió sobre otros temas del pro seminario.

A modo de recuerdo, las dimensiones de este estudios son 7, las cuatro dimensiones de la caracterización de pensamiento matemático, más los medios de comunicación, la matemática regular y la singular.

Los diarios de aprendizaje seleccionados, reciben las siglas D1, D2, D3, D4, D5.

Para este análisis, se han considerado como unidades de análisis los 8 temas, en los cuales se dividió el pro seminario (ver tabla 19), las cuales aparecerán con la letra U y a continuación con un número del 1 al 8.

Además cada unidad de análisis ha sido subdividida. Estas subdivisiones están marcadas con un número dentro de la unidad de análisis, por ejemplo D1U1.3 indica la subunidad 3, de la unidad de análisis 1, dentro del diario de aprendizaje número 1.

A continuación se hace el análisis de cada uno de los cinco diarios.

Diario de aprendizaje 1.

En el primer diario de vida, contempla tres unidades de análisis ya que han destacado tres temas de los 8 temas tratados en el pro seminario de álgebra.

Unidad de análisis	Traducción del tema.
U1	2. Existen muchos Grupos.
U2	7. Simetrías de ornamentos, parquets y cristales.
U3	8. Figuras mágicas: Como uno puede hacer nuevas figuras a partir de las conocidas.

A continuación el detalle de cada unidad de análisis.

D1U1 (1, 2, 3, 4, 5, 6)


28.04.2010
Es gibt viele Gruppen
Heute haben wir Gruppen konstruiert. 1
Die Assoziativgleichungen für n=1, n=2 und n=3 waren noch gut herauszufinden, schwierig wurde es bei n=4. 2
Hier gibt es die „kleinische Vierergruppe" und die „zyklische Gruppe". Hier nahmen wir uns ein

Rechteck und ein Quadrat zu Hilfe. 3
Bei erster Gruppe erschloss ich mir durch das Element e, dass es sich um die Spiegelung handelt. Denn wenn eine Spiegelung an einer Achse ausgeführt wird und danach an der gleichen Achse erneut spiegelt erhält man wieder die Identität. 4

Bei der zyklischen müsste es sich dann um die Drehungen handeln, denn im Gegensatz zu den Rechtecken erkennt man bei Quadraten nicht, ob die Abbildung um 90° gedreht wurde oder die Identität ist!
90°
90°
5

Danach schauten wir uns die Quaternionengruppen an. Bei der Erstellung der Multiplikationstabelle hatte ich Schwierigkeiten, obwohl ich eigentlich ziemlich sicher war bei solcher Art von Multiplikationen. Im Nachhinein erfuhr ich, dass bei der Tabelle denen Rechnerinnen ein Fehler unterlaufen war, weshalb meine Lösung doch stimmte. 6

D1U1.1. Dimensiones observadas: PMCR, PMP y PMC.

En la frase: “Hoy día hemos construido Grupos”, se percibe el pensamiento relacionado con el contenido algebraico, la percepción dinámica de una acción de construcción del objeto, junto con l capacidad espacial, esto es representar movimientos en el espacio, por medio de grados y flechas. La capacidad no racional, como la fantasía y la sensibilidad matemática.

D1U1.2. Dimensiones observadas: PMC, PMVR y PMVG.

Se observa el pensamiento relacionado con el contenido algebraico, con la palabra “asociatividad”, las representaciones simbólicas matemáticas y en la palabra “herauszudrücken”, que quiere decir “exprimir”, se puede observar la idea básica de un procedimiento matemático.

D1U1.3. Dimensiones observadas: PME, PMC y PMVM/A.

En esta subdivisión, se observa el pensamiento relacionado con el contenido algebraico y geométrico, el estudiante menciona la utilización de cuadrados y rectángulos como ayuda para el caso en que el valor de “n” sea cuatro, de esa forma, está indicando una forma de proceder en ese caso y por ende, los pasos iniciales de una posible estrategia, la del principio de analogía. Más aún, estos dos objetos, los menciona en relación al Grupo de Klein y en relación a un Grupo cíclico, esto se puede identificar con un vehículo de comunicación como el de las analogías o el metafórico.

D1U1.4. y D1U1.5. Dimensiones observadas: PME, PMC, PMP y PMVR.

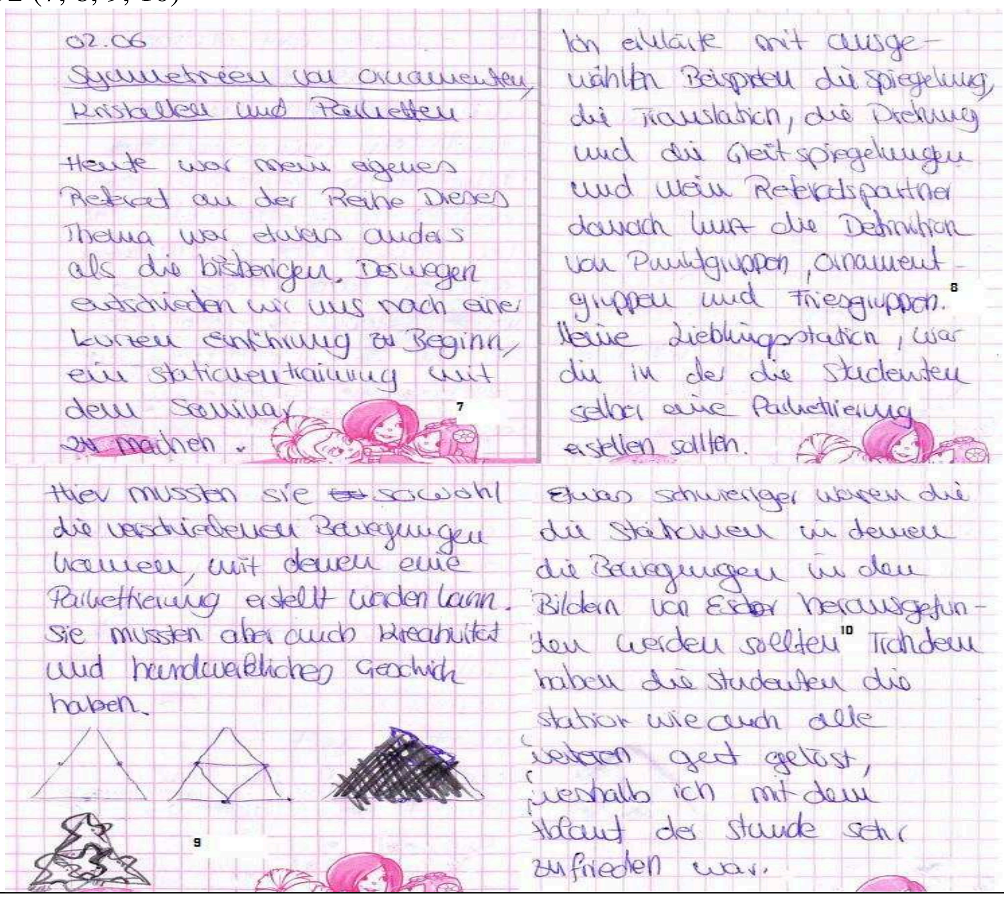
En este caso el estudiante, explica como utilizó el elemento neutro, para decir que se trata de una reflexión (esta frase se entiende en relación a la siguiente subdivisión restantes), al parecer el estudiante busca encontrar la diferencia entre el Grupo de Klein y el Grupo cíclico de orden cuatro. Con el resto de la explicación, se observa una estrategia, donde utiliza la capacidad de percibir los objetos de forma dinámica, es decir la categoría de la percepción. También se observa la utilización de representaciones icónicas (dibujo de rectángulos) y nuevamente el pensamiento relacionado con el contenido geométrico. Cabe destacar que el estudiante no considera en su observación y en su forma de proceder, un tipo de reflexión del rectángulo, a saber la reflexión con respecto a la diagonal. Con esto, se podría decir, que hay una leve discordancia entre la matemática regular y la singular.

En esta subdivisión se observa al igual que en el caso anterior una explicación conducente a un resultado, que en este caso, si existe una concordancia entre la matemática regular y la singular, esto es, lo que resulta de la unión de estos diferentes tipos de pensamientos, está en relación con la matemática regular. Se observa nuevamente la utilización de representaciones icónicas, como medio de aclarar lo que se está explicando y como se vería entre estos dos Grupos, donde uno de ellos está siendo comparado con los movimientos que dejan “fijo” a un cuadrado y el otro Grupo, con los movimientos que dejan fijo a un rectángulo. En este caso, se observa la utilización de conocimiento nuevo en la utilización de palabras relacionadas con los conceptos de la TG y con palabras pertenecientes al conocimiento básico.

D1U1.6. Dimensiones observadas: PMC y PME.

En esta subdivisión, se observa el pensamiento relacionado con el contenido y con los procedimientos. En este caso, el estudiante asegura que al inicio fue difícil, pero que estaba seguro de saber ese “tipo” de multiplicación (En este caso, el estudiante escribe sobre la multiplicación de los cuaterniones), con esto se ve como un procedimiento esta tan arraigado en el pensar, que es difícil detectar los errores. En el resto del texto, se asegura que el procedimiento realizado era correcto y que en realidad era el expositor, el que había cometido un error en la pizarra. En esta subdivisión, también se podría haber observado la capacidad de percibir la causa y el efecto, pero por falta de más información, no se puede concluir, que más estaba pensando el estudiante, en cuanto a los motivos de la generación o de dónde provenía el/su error.

D1U2 (7, 8, 9, 10)



02.06
Symmetrien von Ornamenten, Kristallen und Parketten

Heute war mein eigenes Referat an der Reihe. Dieses Thema war etwas anders als die bisherigen. Deswegen entschieden wir uns nach einer kurzen Einführung zu Beginn, ein Stationentraining mit dem Seminar zu machen. 7

Ich erkläre mit ausgewählten Beispielen die Spiegelung, die Translation, die Drehung und die Gleitspiegelungen und mein Referatspartner danach kurz die Definition von Punktgruppen, Ornamentgruppen und Friesgruppen. 8 Meine Lieblingsstation war die in der die Studenten selber eine Parkettierung erstellen sollten.

Hier mussten sie ~~es~~ sowohl die verschiedenen Bewegungen kennen, mit denen eine Parkettierung erstellt werden kann. Sie mussten aber auch Kreativität und handwerklichen Geschick haben. 9

Etwas schwieriger waren die die Stationen in denen die Bewegungen in den Bildern von Escher herausgefunden werden sollten. 10 Trotzdem haben die Studenten die Station wie auch alle anderen gut gelöst, weshalb ich mit dem Ablauf der Stunde sehr zufrieden war.

D1U2.7. Dimensiones observadas: PMC y PMCR.

El estudiante reconoce que el tema de simetrías de ornamentos, parquets y cristales es diferente en comparación a los otros temas, esto se puede interpretar como una cierta sensibilidad matemática, por lo tanto, se podría interpretar en función de la categoría de las capacidades no racionales. El estudiante al hacer una comparación con los temas anteriores, está utilizando el pensamiento relacionado con los contenidos, tanto de los contenidos anteriores, algebraicos con los nuevos, que al parecer estarían vinculados con otros.

D1U2.8. Dimensiones observadas: PMP, PMC, PME y PMCR.

El estudiante explica la forma, de hacer entender a sus camaradas, por medio de ejemplos, lo que son las reflexiones, las traslaciones, las rotaciones y la reflexión puntual. En este caso, el estudiante utiliza varias estrategias, pero como no explicó en su diario, lo que había realizado, solo podemos dejar la estrategia de analogía, a través de ejemplos, se entiende lo que es en general.

En este caso se tiene la categoría PME.

En esta misma frase, da cuenta del pensamiento relacionado con el contenido, tanto algebraico, como geométrico. Además, está utilizando la capacidad espacial, para explicar lo que son los movimientos y la capacidad de percibir lo dinámico de los movimientos de las figuras. Esto está todo en relación a la categoría de la percepción. Por último, se tiene también una capacidad no racional, a saber, la de la creatividad, que reconoce el estudiante, que fue una de las "estaciones" que más les gusto. Esto se entiende en relación a la siguiente subdivisión de la unidad de análisis.

D1U2.9. Dimensiones observadas: PMVR, PMCR y PMP.

El estudiante explica cuáles son los elementos necesarios para enfrentarse a la "estación", donde los estudiantes, debían "crear" o hacer una completación del plano ("Parkettierung"), entre las cosas que nombra, destacan en un principio, el conocimiento de los movimientos, lo cual está relacionado con la categoría de la percepción.

Luego menciona la necesidad de ser creativos, lo cual está relacionado con la categoría de las capacidades no racionales (proceso no racionales, en este caso) y utiliza una representación icónica, para mostrar cómo se podría hacer una completación del plano (las figuras que aquí aparecen son similares a los dibujos realizados por Escher[154]).

D1U2.10. Dimensiones observadas: PMC y PMP.

El estudiante comenta lo difícil que fue encontrar el Grupo asociado a las creaciones de Escher. Mencionando que se debían "encontrar los movimientos en estas figuras", lo cual

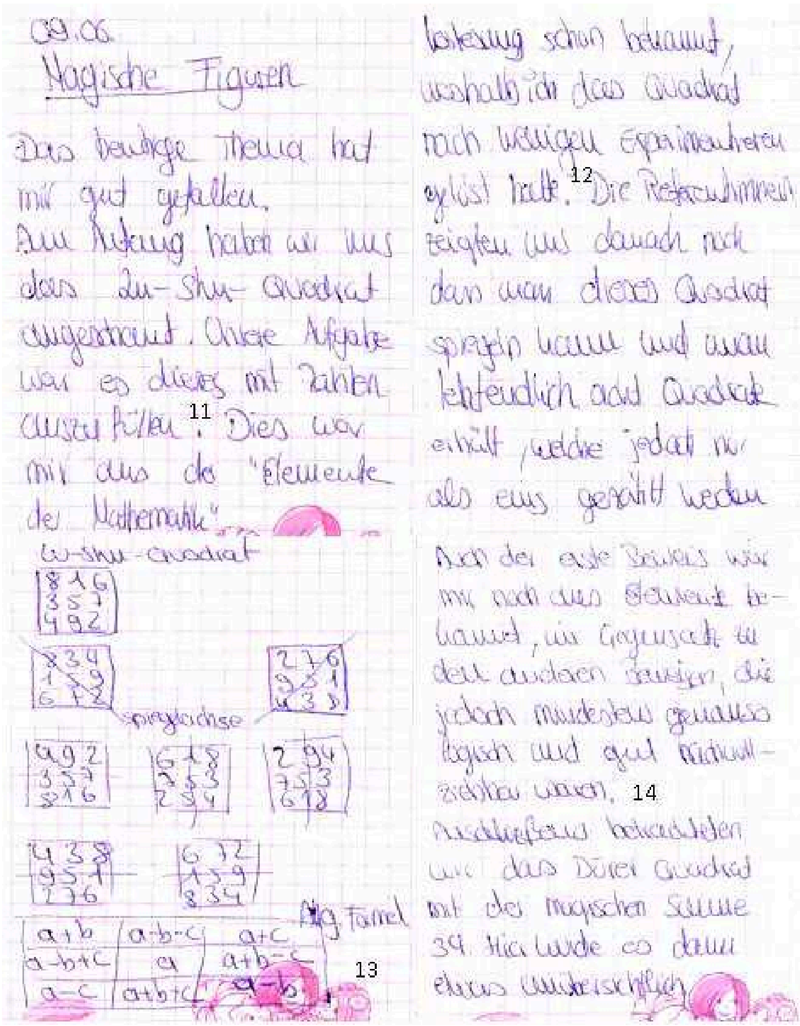
---

[154] *M. C. Escher (*17. Junio, 1898; † 03.1972), artista gráfico holandés, conocido por la creación de "dibujos imposibles".*

se deja interpretar por medio de la categoría de la percepción, en particular de la capacidad de percibir lo dinámico en figuras estáticas.

También vuelve a participar la capacidad espacial y los contenidos algebraicos, relacionados con los Grupos, que debía ser asociado a estas figuras.

D1U3 (11, 12, 13, 14)



09.06.

Magische Figuren

Das heutige Thema hat mir gut gefallen. Am Anfang haben wir uns das Lu-Shu-Quadrat angeschaut. Unsere Aufgabe war es dieses mit Zahlen auszufüllen. 11 Dies war mir aus der "Elemente der Mathematik" Vorlesung schon bekannt, weshalb ich das Quadrat nach wenigen Experimentieren gelöst hatte. 12 Die Referentinnen zeigten uns danach noch dass man dieses Quadrat spiegeln kann und man letztendlich acht Quadrate erhält, welche jedoch nur als eins gezählt werden.

Lu-Shu-Quadrat

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Spiegelachse

Alg. Formel

a+b	a-b-c	a+c
a-b+c	a	a+b-c
a-c	a+b+c	a-b

13

Auch der erste Beweis war mir noch aus Elemente bekannt, im Gegensatz zu den anderen Beweisen, die jedoch mindestens genauso logisch und gut nachvollziehbar waren. 14 Anschließend betrachteten wir das Dürer Quadrat mit der magischen Summe 34. Hier wurde es dann etwas unübersichtlich

D1U3.11. Dimensiones observadas: PMP y PMC.

El estudiante escribe que en esta sección han debido "mirar" el cuadrado de Lo Shu (el estudiante escribe Lu-Schu-Quadrat) y rellenarlo con números. Esto se deja interpretar como una acción, en este caso mirar, pero que implica además, notar las reglas para completar el cuadrado, "mirar" es utilizado aquí en el sentido de "trabajar". Esto último se deja interpretar, en particular, como la utilización de la capacidad visual y de la visualización (sección 4.1.3.), donde el estudiante ha mezclado además el pensamiento relacionado con el contenido numérico, al decir que debe ser "rellenado con números", no tan solo en la palabra números se deja reflejar este pensamiento, sino que en la acción que se debe hacer con estos números para obtener la completación del cuadrado, también en las relaciones que debió hacer para completarlo, esto último se puede apreciar en conjunto con la subdivisión D1U3.12.

D1U3.12. Dimensión observada: PME.

El estudiante menciona la estrategia de experimentación, para obtener la resolución del problema planteado. En este caso, el estudiante se refiere a la prueba sistemática de resolver un problema, es decir, probó con uno (experimentó con un número) y luego con los otros, a esto el estudiante le llamo experimentación.

D1U3.13. Dimensiones observadas: PMVR, PMC y PMP.

La percepción de los movimientos, se puede observar en esta subdivisión de dos formas diferentes. La primera por medio de la palabra relacionada "reflexión" y la segunda por medio de representaciones icónicas, como es la línea diagonal que aparece en los cuadrados mágicos. En ambos casos, se percibe los movimientos y por ende se observa la percepción y dos diferentes medios de comunicación.

El pensamiento relacionado con el contenido, puede ser observado por medio de las frases, se obtienen 8 cuadrados, que cuentan como uno, frases que reflejan el pensamiento algebraico (sección 4.2.3) , otorgando una estructura de "clases de equivalencia" a los 8 cuadrados mágicos y poniendo de relieve que se puede tener un representante (vale como uno).

Se utilizan representaciones simbólicas icónicas, para indicar la forma de obtener el resto de los cuadrados mágicos y se muestra su forma general, que es una mezcla del pensamiento algebraico y del uso de un vehículo de comunicación.

D1U3.14. Dimensiones observadas: PMP y PMC.

En esta subdivisión se puede observar la percepción de la causa y del efecto, por medio de la frase "las demostraciones se pueden seguir muy bien", esto es, el estudiante reconoce que entendió las demostraciones, que se hicieron durante la sesión, para mostrar que se tenía la fórmula general del cuadrado de Lo-Shu, esto se hace en relación al pensamiento relacionado con el contenido algebraico, numérico (aritmético) y formal.

Diario de aprendizaje 2.

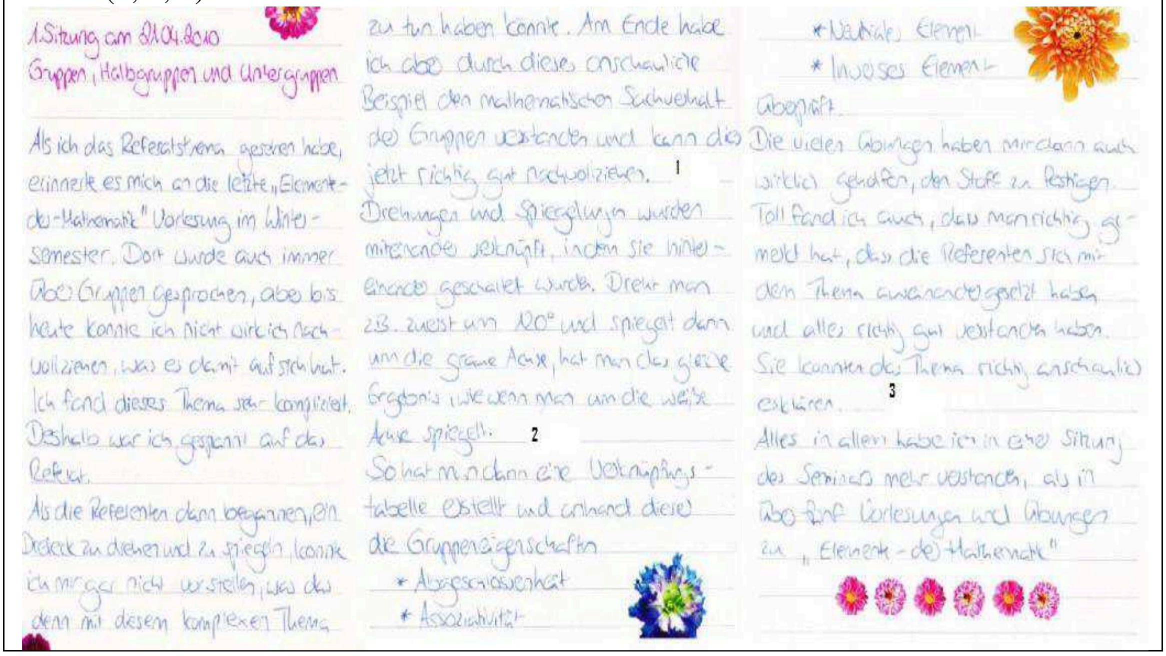
El segundo diario de vida tiene 3 unidades de análisis, ya que han destacado tres temas, de los 8 temas tratados en el pro seminario de álgebra (tabla 18).

Unidad de análisis	Traducción del tema.
U1	1. Semigrupos, Grupos y Subgrupos.

U2	3. ¿Similar, igual, isomorfo?
U3	5. operaciones de grupos sobre conjuntos, Grupos simétricos.

A continuación el detalle de cada unidad de análisis.

D2U1 (1, 2, 3)


1. Sitzung am 21.04.2010
Gruppen, Halbgruppen und Untergruppen

Als ich das Referatsthema gesehen habe, erinnerte es mich an die letzte „Elemente-der-Mathematik" Vorlesung im Wintersemester. Dort wurde auch immer über Gruppen gesprochen, aber bis heute konnte ich nicht wirklich nachvollziehen, was es damit auf sich hat. Ich fand dieses Thema sehr kompliziert. Deshalb war ich gespannt auf das Referat.
Als die Referenten dann begannen, ein Dreieck zu drehen und zu spiegeln, konnte ich mir gar nicht vorstellen, was das denn mit diesem komplexen Thema zu tun haben könnte. Am Ende habe ich aber durch dieses anschauliche Beispiel den mathematischen Sachverhalt der Gruppen verstanden und kann dies jetzt richtig gut nachvollziehen. 1
Drehungen und Spiegelungen wurden miteinander verknüpft, indem sie hintereinander geschaltet wurden. Dreht man z.B. zuerst um 120° und spiegelt dann um die grüne Achse, hat man das gleiche Ergebnis, wie wenn man um die weiße Achse spiegelt. 2
So hat man dann eine Verknüpfungstabelle erstellt und anhand dieser die Gruppeneigenschaften
* Abgeschlossenheit
* Assoziativität
* Neutrales Element
* Inverses Element
überprüft.
Die vielen Übungen haben mir dann auch wirklich geholfen, den Stoff zu festigen. Toll fand ich auch, dass man richtig gemerkt hat, dass die Referenten sich mit dem Thema auseinandergesetzt haben und alles richtig gut verstanden haben. Sie konnten das Thema richtig anschaulich erklären. 3
Alles in allem habe ich in einer Sitzung des Seminars mehr verstanden, als in über fünf Vorlesungen und Übungen zu „Elemente-der-Mathematik"

D2U1.1. Dimensiones observadas: PMP, PMC, PMVR, PMVA/M y PMCR.

En estos dos párrafos, el estudiante cuenta como a través de movimientos de un triángulo, logra comprender lo que son los Grupos, mencionando que este contenido había sido trabajado en semestres anteriores, pero que la representación que se tenía, de ese "tema complejo", no era la misma, con la que el expositor de la sesión estaba comenzando. El estudiante continuo, escribiendo que solo a través del ejemplo visual presentado, logra entender y seguir correctamente. Esta subunidad, se deja interpretar con la categoría de la percepción, los movimientos juegan un papel relevante, ya que a través de ellos y de lo que se está viendo (el triángulo en movimiento), se logra entender un concepto matemático, con esto último se quiere decir, también que el pensamiento algebraico, por fin está en relación (el estudiante dice haber trabajado antes con el tema, pero que no lo ha entendido) la percepción y el contenido matemático.

El estudiante menciona también algo sobre la representación, en el sentido de que en un principio no logra conectar el contenido con lo que está viendo, esto quiere decir, que el estudiante tenía una representación previa del tema Grupos y esta no coincidía con la que se estaba mostrando, en este caso, el estudiante se refiere a la representación en lenguaje natural y simbólica de la definición de Grupos y la representación que estaba siendo mostrada es más bien una metáfora conceptual, donde un Grupo es visto como un Grupo de movimientos, en este caso, el estudiante compara dos tipos de vehículos, las representaciones y las metáforas. La capacidad no racional, que aquí se puede observar es la flexibilidad matemática, en cuanto a la forma de pasar de un vehículo de comunicación a otro.

D2U1.2. Dimensiones observadas: PMP, PME y PMC.

En esta subunidad el estudiante explica, la operación que se hace con los movimientos y como se procede en un caso particular. Esto se puede interpretar como un procedimiento, que se debe realizar con cada uno de los elementos del Grupo, para obtener la “tabla de Grupo”, lo cual es mencionado en la subunidad siguiente, por lo tanto, esto está en relación a la categoría de las estrategias y de los procedimientos. También esto se relaciona con el pensamiento geométrico y con la percepción, tanto con la capacidad del espacial como la capacidad de percibir y trabajar con lo dinámico.

D2U1.3. Dimensiones observadas: PMP, PMVA/M y PMC.

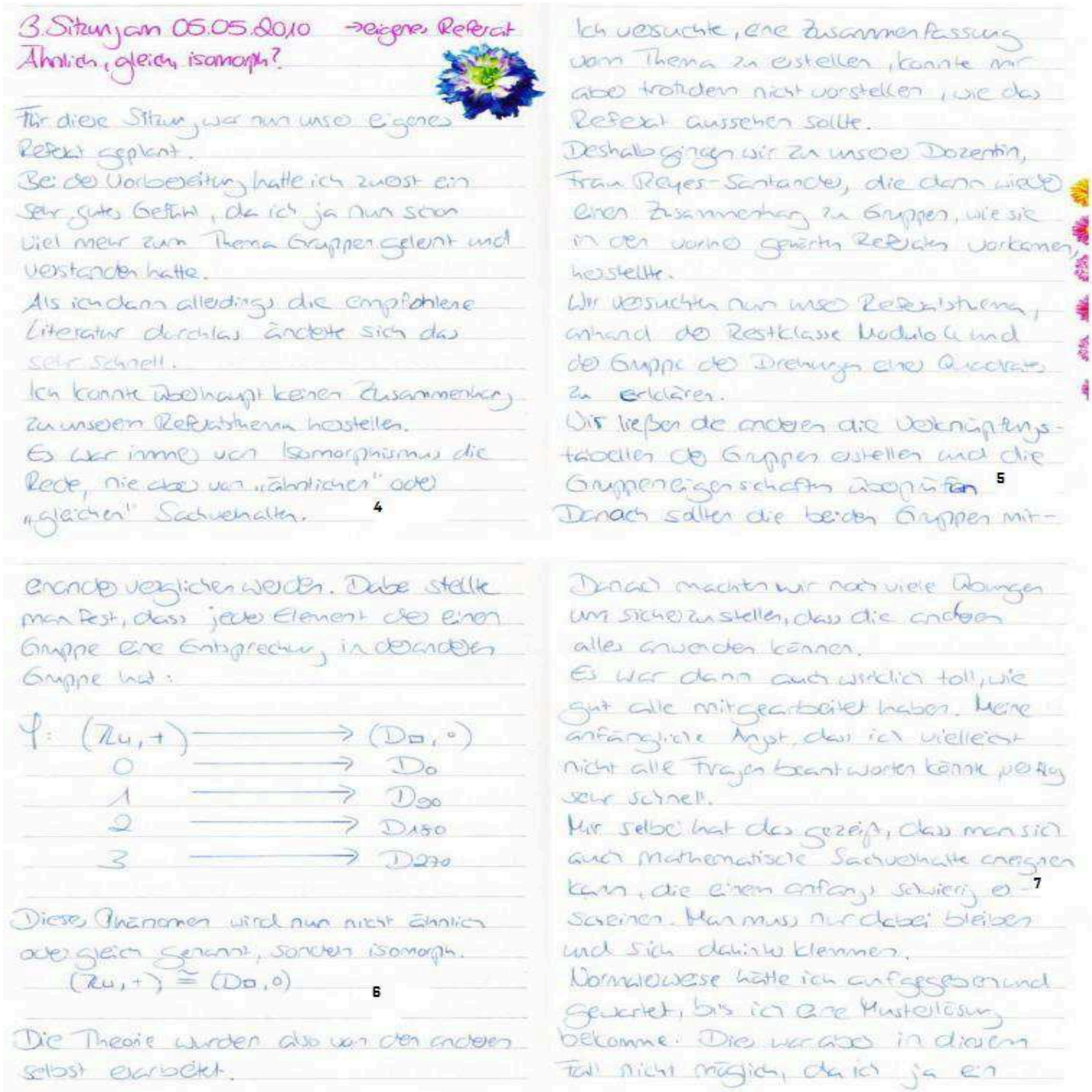
El estudiante comenta aquí, lo que se hace con la “tabla de Grupo” y con la definición de Grupo, esto es comparar de forma visual la representación en lenguaje natural y simbólico de la definición de Grupo, con una representación icónica y simbólica, como lo es la tabla de Grupo, aunque esta comparación no logra ser uno a uno, es posible observar, la definición de operación “cerrada” (clausura)[155], la presencia del elemento neutro en la tabla, la presencia de los elementos inversos y en caso de que el grupo sea conmutativo, también se puede apreciar en la tabla de Grupo. Esto se deja interpretar entonces con la categoría percepción, en particular con la capacidad visual, con la categoría de los vehículos de comunicación, por medio de la analogía y del contenido algebraico, como generalización.

En esta unidad de análisis se observa, como en los casos anteriores, una concordancia entre la matemática regular y la singular. En todas las subunidades se aprecia en mayor grado, la matemática singular. Además, esta unidad de análisis destaca sobre las otras por la cantidad de dimensiones que fueron observadas, entre ellas la percepción, con la capacidad de percibir lo dinámico, la capacidad visual y la espacial. En el análisis de esta unidad, se

[155] *En la definición de Grupo, se menciona al inicio, que un Grupo es una dupla, un conjunto y una operación, esto quiere decir, que se ha definido previamente una operación y se ha especificado el conjunto de llegada de esta, es decir, a la imagen de la función. La clausura, tiene relación con este conjunto de llegada y con la definición previa de operación. Si esta no se ha realizado previamente, esta puede estar incluida dentro de la definición de Grupo.*

observa la representación semiótica lenguaje natural y no se observó la utilización de representaciones icónicas y/o simbólicas.

D2U2 (4, 5, 6, 7)



3. Sitzung am 05.05.2010 → eigenes Referat
Ähnlich, gleich, isomorph?

Für diese Sitzung war nun unser eigenes Referat geplant.
Bei der Vorbereitung hatte ich zuerst ein sehr gutes Gefühl, da ich ja nun schon viel mehr zum Thema Gruppen gelernt und verstanden hatte.
Als ich dann allerdings die empfohlene Literatur durchlas änderte sich das sehr schnell.
Ich konnte überhaupt keinen Zusammenhang zu unserem Referatsthema herstellen.
Es war immer von Isomorphismus die Rede, nie aber von „ähnlichen" oder „gleichen" Sachverhalten. 4

Ich versuchte, eine Zusammenfassung vom Thema zu erstellen, konnte mir aber trotzdem nicht vorstellen, wie das Referat aussehen sollte.
Deshalb gingen wir zu unserer Dozentin, Frau Reyes-Santander, die dann wieder einen Zusammenhang zu Gruppen, wie sie in den vorher gehörten Referaten vorkamen, herstellte.
Wir versuchten nun unser Referatsthema, anhand der Restklasse Modulo 4 und der Gruppe der Drehungen eines Quadrates zu erklären.
Wir ließen die anderen die Verknüpfungstabellen der Gruppen erstellen und die Gruppeneigenschaften überprüfen. 5
Danach sollten die beiden Gruppen miteinander verglichen werden. Dabei stellte man fest, dass jedes Element der einen Gruppe eine Entsprechung in der anderen Gruppe hat:

$$\varphi: (\mathbb{Z}_4, +) \longrightarrow (D_\square, \circ)$$
$$0 \longrightarrow D_0$$
$$1 \longrightarrow D_{90}$$
$$2 \longrightarrow D_{180}$$
$$3 \longrightarrow D_{270}$$

Dieses Phänomen wird nun nicht ähnlich oder gleich genannt, sondern isomorph.
$$(\mathbb{Z}_4, +) \cong (D_\square, \circ)$$ 6

Die Theorie wurden also von den anderen selbst erarbeitet.

Danach machten wir noch viele Übungen um sicherzustellen, dass die anderen alles anwenden können.
Es war dann auch wirklich toll, wie gut alle mitgearbeitet haben. Meine anfängliche Angst, dass ich vielleicht nicht alle Fragen beantworten könnte, verflog sehr schnell.
Mir selbst hat das gezeigt, dass man sich auch mathematische Sachverhalte aneignen kann, die einem anfangs schwierig erscheinen. 7 Man muss nur dabei bleiben und sich dahinter klemmen.
Normalerweise hätte ich aufgegeben und gewartet, bis ich eine Musterlösung bekomme. Dies war aber in diesem Fall nicht möglich, da ich ja ein

D2U2.4. Dimensiones observadas: PMVA/M y PMC.

Esta subunidad es un ejemplo para observar que el estudiante no hace comparaciones, donde no se utilizan las representaciones mentales, que podrían haber brindado el lenguaje. El estudiante se refiere al contenido (de la literatura recomendada) y a las palabras del título de la sesión como dos cosas diferentes, esto es, reconoce que no entiende lo que es un isomorfismo y no se ayuda de las palabras “iguales” y/o “similares”. En la subunidad siguiente, se refiere a la ayuda externa presentada para comprender, pero en este subunidad se observa la ausencia de un diálogo, entre la matemática singular y la matemática regular.

D2U2.5. Dimensiones observadas: PMC y PME.

En esta subunidad, se puede observar una estrategia de comparación, que viene dada por la elección de dos Grupos, a saber, el Grupo cociente Z_4 y el Grupo de las rotaciones de un cuadrado (Subgrupo del Grupo Diédrico D_4). Estos dos Grupos son comparados, con la intención de explicar la sesión correspondiente. En este caso se observa la categoría del pensamiento relacionado con el contenido, en particular del pensamiento geométrico y aritmético, junto con el principio de analogía (PME).

D2U2.6. Dimensiones observadas: PMVG, PMC, PMP y PMVR.

La categoría vehículos de comunicación, en particular, la de las nociones básicas, se puede observar en esta subunidad por la utilización de la palabra "Entsprechung", que se puede traducir como "equivalente", "concordancia", "conformidad" y "analogía", en este caso, el estudiante, menciona que cada elemento de los grupos mencionados anteriormente, tiene su "equivalente" en el otro Grupo.

A continuación, por medio de representaciones icónicas y simbólicas (PMVR), muestra en qué sentido está utilizando esta palabra, esto es, finalmente utiliza esta palabra como una idea básica para lo que es el isomorfismo de Grupos. Lo anterior, lo hace en base al pensamiento relacionado con el contenido, en particular con el pensamiento funcional. Se observa también, la categoría de la percepción, por la utilización y asociación de la capacidad espacial, dinámica y numérica.

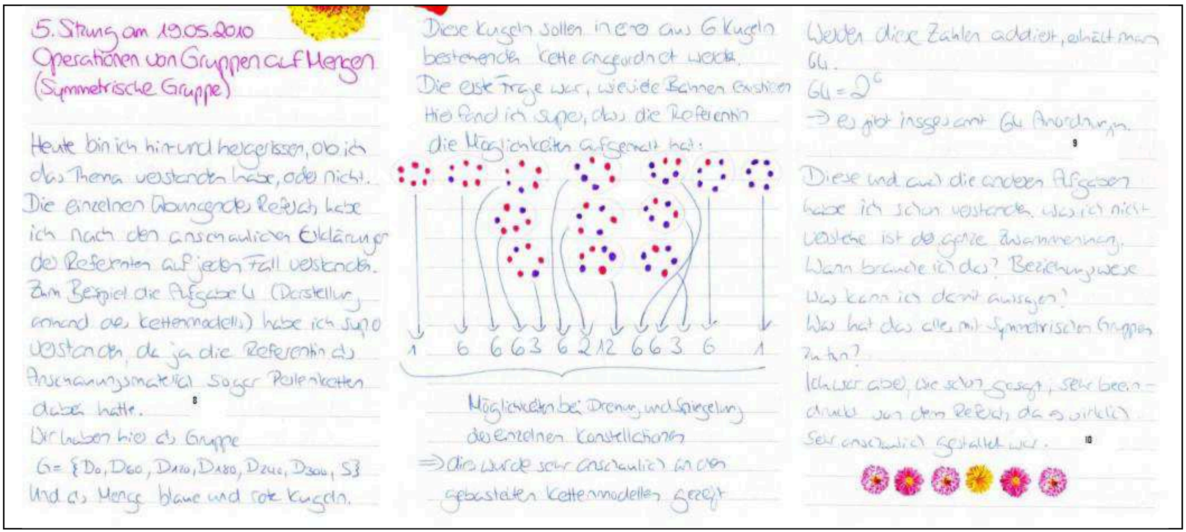
D2U2.7. Dimensión observadas: PMCR.

En esta subdivisión, el estudiante explica como él procedió con sus miedos y temores con respecto al contenido. Utiliza la metáfora de "apretarse el cinturón", para decir, que si no se entiende un contenido matemático hay que esforzarse el doble.

Aunque se utiliza una expresión metafórica, esta no tiene relación directa con un concepto o con un objeto matemático, sino que más bien tiene relación con la forma de enfrentarse a la matemática y a sus temáticas. Esto se deja interpretar como una capacidad no racional, a saber, la de la sensibilidad matemática, se podría decir, incluso que la sensibilidad matemática de este estudiante se fue desarrollando a través del trabajo con la noción de isomorfismo.

En esta unidad de análisis se observa una reunificación de la matemática regular y de la singular, ya que el estudiante reconoce que ha trabajado con los temas aquí tratado, pero que en un principio no logra entender y que solo después de un trabajo visual, logra entender realmente o reunificar la matemática singular con la regular.

D2U3 (8, 9, 10)



D2U3.8. Dimensión observada: PMP.

El estudiante menciona, como en otras ocasiones, la utilización de “material visual” y en relación a este material, ocurre la comprensión del contenido por parte del estudiante, es decir, nuevamente hace alusión de la capacidad visual y por lo tanto se observa la categoría de la percepción.

D2U3.9. Dimensiones observadas: PMVG, PMVR, PMC, PMP y PME.

Toda esta subunidad es una explicación de la estrategia utilizada para resolver el problema del “collar de margarita”, como se descompone el problema en partes y luego se reúne en la ecuación de órbitas (en este caso no es mencionado explícitamente la ecuación, pero si se menciona la suma de las órbitas). Esto se deja interpretar bajo la categoría de las estrategias, con la estrategia “descomposición en partes”.

Una palabra utilizada en esta explicación es la de ”Konstellationen”, que quiere decir “constelaciones”, esta palabra es utilizada en relación a las órbitas y a los representantes que aparecen aquí de forma icónica. Esto quiere decir, que una constelación es el número que está indicado abajo, la figura asociada al número y las posibilidades de reflexión y rotación en cada caso, es decir, para el estudiante una constelación es una órbita. Esto puede ser interpretado como una analogía o como una idea básica, en este caso descartamos lo de analogía, porque no son utilizadas las palabra “como una constelación”, ni tampoco se explica lo que el estudiante entiende como constelación, esto es, para el estudiante es una idea básica.

También se puede observar la utilización de representaciones icónicas (puntos círculos, flechas, líneas) y simbólicas (números, notación de Grupo y de elementos del Grupo dentro de una llave), todo en relación a la percepción de los movimientos y al pensamiento relacionado con el contenido, en particular el pensamiento geométrico, algebraico y numérico (aritmético). En toda esta subunidad se observa una concordancia entre la matemática regular y la singular.

D2U3.10. Dimensiones observada: PMCR.

Al final de esta unidad de análisis, el estudiante se plantea preguntas en relación a lo que ocurre y cuáles podrían ser las relaciones entre lo que se trabajó con el medio, en que momento él podría utilizar este contenido en particular y que es lo que él, en forma particular podría decir de este tema. También hace la pregunta sobre la relación entre este tema y el Grupo simétrico.

Estas preguntas y el desarrollo de estas mismas (lamentablemente el estudiante no las responde en el diario de aprendizaje), pueden ser interpretadas en relación a la capacidad no racional creatividad. El planteamiento de preguntas, sobre todo las del último tipo, encontrar una relación entre el Grupo simétrico y el problema del "collar de Margarita", puede ser productivo matemáticamente, en este caso, no se sabe si es que el estudiante logró, en otra instancia, responder a la pregunta y esta subunidad se muestra como un ejemplo de la creación de preguntas.

En las siguientes unidades de análisis, solo se considerará como creatividad matemática, el planteamiento de preguntas con intento de respuestas.

Cabe destacar, la utilización frecuente del estudiante de las palabras relacionadas con la capacidad visual, no tan solo en esta subunidad, sino que en toda esta unidad de análisis y en general en el diario de aprendizaje completo.

<u>Diario de aprendizaje 3</u>.

En el tercer diario de aprendizaje o de vida matemática, ha destacado un tema, de los 8 temas tratados en el pro seminario de álgebra (tabla 18). Este tema ha destacado en relación a los temas que ya se han analizado y en relación a las categorías del análisis, este tema ya ha sido analizado en el segundo diario de aprendizaje en la unidad de análisis D2U3.

Unidad de análisis	Traducción del tema.
U1	5. Operaciones de Grupos sobre conjuntos, Grupos simétricos.

A continuación el detalle de la unidad de análisis.

D3U1 (1, 2, 3, 4, 5)

5. Sitzung am 19. 05. 2010

Operationen von Gruppen auf Mengen (Symmetrische Gruppe)

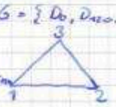
Nun war unser Referatsthema an der Reihe. Ich war ganz schön nervös, da bei der Vorbereitung nicht alles so verlief, wie es bei einer optimalen Referatsvorbereitung gehören würde.
Als ich mir die dazu gehörige Literatur durchlas, verstand ich zuerst nichts.
Doch nun ist mir einiges klar geworden und oft steckt hinter höchstkomplizierten Definitionen gar nichts tragisches.
So ist quasi die Operation einer Gruppe G auf eine nicht leere Menge M nichts anderes als das Anwenden einer best. Abbildungsvorschrift die lautet:
$J_{a\circ b}(x) = J_a(J_b(x))$ mit $a, b \in G$ und $x \in M$

$\underbrace{J_{D_{120}\,D_{240}}}_{\text{Schaltet man eine } D_{120} \text{ mit } D_{240} \text{ hintereinander, erhält man } D_0}(1) = J_{D_{120}}\underbrace{(J_{D_{240}}(1))}_{\text{gesucht}}$

$\Rightarrow \underbrace{J_{D_0}(1)}_{1} = J_{D_{120}}(\text{gesucht} \boxed{})$
$1 \overset{!}{=} 1$
$\Rightarrow J_{D_{120}}(x) = 1$
Also schaut man bei $J_{D_{120}}$ nach, welches x den Wert 1 ergab.
$\Rightarrow J_{D_{120}}(\boxed{2}) = 1$
$\Rightarrow J_{D_{240}}(1) = \boxed{2}$

Analog: $J_{D_{120}\,D_{240}}(2) = J_{D_{120}}(J_{D_{240}}(2))$
$J_{D_0}(2) = J_{D_{120}}(x)$
$2 \overset{!}{=} 2$
$\Rightarrow J_{D_{120}}(x) = 2 \Rightarrow x = 3$
$\Rightarrow J_{D_{240}}(2) = 3$
$J_{D_{120}\,D_{240}}(3) = J_{D_{120}}(J_{D_{240}}(3))$
$J_{D_0}(3) = J_{D_{120}}(x)$
$3 \overset{!}{=} 3$
$J_{D_{120}}(x) = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow J_{D_{240}}(3) = 1$

Aufgabe 1) $M = \{1, 2, 3\}$ $G = \{D_0, D_{120}, D_{240}\}$
$J : G \times M \to M$



Drehrichtung entgegen Uhrzeigersinn
$\Rightarrow (D_0, 1) \to J_{D_0}(1) = 1$
$(D_0, 2) \to J_{D_0}(2) = 2$
$(D_0, 3) \to J_{D_0}(3) = 3$
Anschließend Bestimmung D_{120}:
$(D_{120}, 1) \to J_{D_{120}}(1) = 2$
=> daran erkennt man, dass die Drehrichtung entgegen Uhrzeigersinn festgelegt wurde. Theoretisch könnte man auch folgendermaßen zuordnen.
$(D_{120}, 1) \to J_{D_{120}}(1) = 3$
$(D_{120}, 2) \to J_{D_{120}}(2) = 1$
$(D_{120}, 3) \to J_{D_{120}}(3) = 2$
Wenn D_{120} festgelegt wurde kann man rechnerisch die letzten Werte für D_{240} herausbekommen:
(Zeige nun Zuordnung im Uhrzeigersinn)

Sowohl bei der Operationsdefinition als auch bei der Bahngleichung sieht man, dass sich hinter dem Formelwirrwar etwas einfaches versteckt.
Bahngleichung: $\text{ord}\, M = \sum_{x \in V} \text{ord}\, G(x)$

ord M stellt die Anzahl dar, wie viel Möglichkeiten es gibt, z. B. sechs Kugeln im Kreis anzuordnen mit zwei verschiedenen Farben, wobei die Möglichkeit, alle in einer Farbe besteht. $\boxed{\text{ord}\, M = 2^6 = 64}$
$\sum_{x \in V} \text{ord}\, G(x)$ ist die Summe der Anzahl der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten.
Insgesamt gibt es in unserem Beispiel 13 Bahnen, die da wären:

1	6	6	6	6	6	1

Die Zahl in der Mitte zeigt die Möglichkeiten bzw. die jeweilige Ordnung.

6	2	6
3	12	3

$1 + 6 + 6 + 6 + 3 + 6 + 2 + 12 + 6 + 6 + 3 + 6 + 1 = 64 = \sum_{x \in V} \text{ord}\, G(x)$

So ergibt sich dann die Formel:

D3U1.1. Dimensiones observadas: PMVM/A, PMVG, PMVR y PMC.

El estudiante escribe sobre la impresión, que él tiene, de las definiciones complicadas y como esto al final de todo, no es tan trágico como se creía al principio, agregando que este comentario es válido, en el caso de la definición de la “acción de un Grupo sobre un conjunto”. A continuación, utiliza las palabras “ist cuasi...als”, que quiere decir “es cuasi...como” para comparar la “acción de Grupo sobre un conjunto” con la “utilización” de una “función de la regla” determinada. Con estas frases, el estudiante utiliza la analogía para comparar y explicar lo que es la acción de un Grupo sobre un conjunto, utilizando algunas nociones básicas como “das Anwenden”, que quiere decir “la aplicación y/o la utilización”, para referirse a la función, con dominio el producto cruz del Grupo y del conjunto de elementos sobre el cual actúa el Grupo, que aplica a un par del dominio en un elemento del conjunto. La utilización de la palabra "Abbildungsvorschrift", que quiere decir "mapeo de la regla", se puede relacionar con la utilización de otra idea básica para la noción de "permutaciones", esto se entiende en el contexto completo en la cual se ha escrito la palabra. Se utilizan representaciones simbólicas matemáticas y se observa el pensamiento relacionado con el contenido, en particular con el pensamiento algebraico y el pensamiento funcional.

D3U1.2. Dimensiones observadas: PME, PMVR, PMP y PMC.

En esta subunidad de análisis se puede observar la categoría PME, el estudiante explica de forma sistemática como él actuó para responder al problema, esto es, se observa la utilización de la prueba sistemática, el principio simétrico y la descomposición del problema en partes. Utilizando en este proceso (para el que lee es un proceso) representaciones semióticas e icónicas, se observa también el pensamiento geométrico y el pensamiento aritmético. En particular, se observa la categoría de la percepción y la capacidad de percibir lo dinámico y el paso de lo dinámico a lo estático, esto es, el estudiante logra plasmar las rotaciones en expresiones simbólicas.

D3U1.3. Dimensiones observadas: PME y PMVR.

En esta subunidad de análisis, el estudiante hace explícita la utilización de la estrategia principio de analogía (sección 3.5.10.), para continuar con la respuesta del problema. En este proceso se utilizan representaciones semióticas simbólicas. Aunque no se puede considerar en este caso dentro de la categoría de la percepción, se observa la capacidad de percibir la causa y el efecto, en el sentido que el estudiante sabe que si se hace esto, entonces se obtendrá el paso siguiente, pero al no existir una explicación al respecto, consideramos que es adecuado no agregar la categoría PMP.

D3U1.4. Dimensiones observadas: PMCR.

En este párrafo, "tanto como en la definición de operación, como también en la ecuación de órbitas, uno puede ver que detrás de una fórmula de "Babel" algo simple se esconde". Esto se puede interpretar como sensibilidad matemática, más aún, como desarrollo de la misma, ya que el estudiante logra "ver" los elementos que le "alumbran" el camino, logra ver y se da cuenta, de que en realidad no es tan caótico, sino que sencillo.

D3U1.5. Dimensiones observadas: PMVR, PMC y PME.

En esta subunidad se puede observar la estrategia descomposición del problema, en una parte de combinatoria y en una parte aritmética. Se observa también el uso de representaciones icónicas y por lo tanto de la categoría de los vehículos de comunicación.

Todo esto en conjunto con el pensamiento relacionado con los contenidos, en particular con el pensamiento aritmético, con el pensamiento estocástico, el pensamiento algebraico y el pensamiento geométrico.

En esta unidad de análisis se puede observar tanto la matemática regular como la singular, destacando ambas casi de igual forma y se aprecia una concordancia entre ambas. Se observa además una utilización de representaciones semióticas simbólicas mezcladas con lenguaje natural en la solución de los problemas. En esta unidad resalta la categoría de los vehículos de comunicación, tanto por su frecuencia como en la variedad de estos.

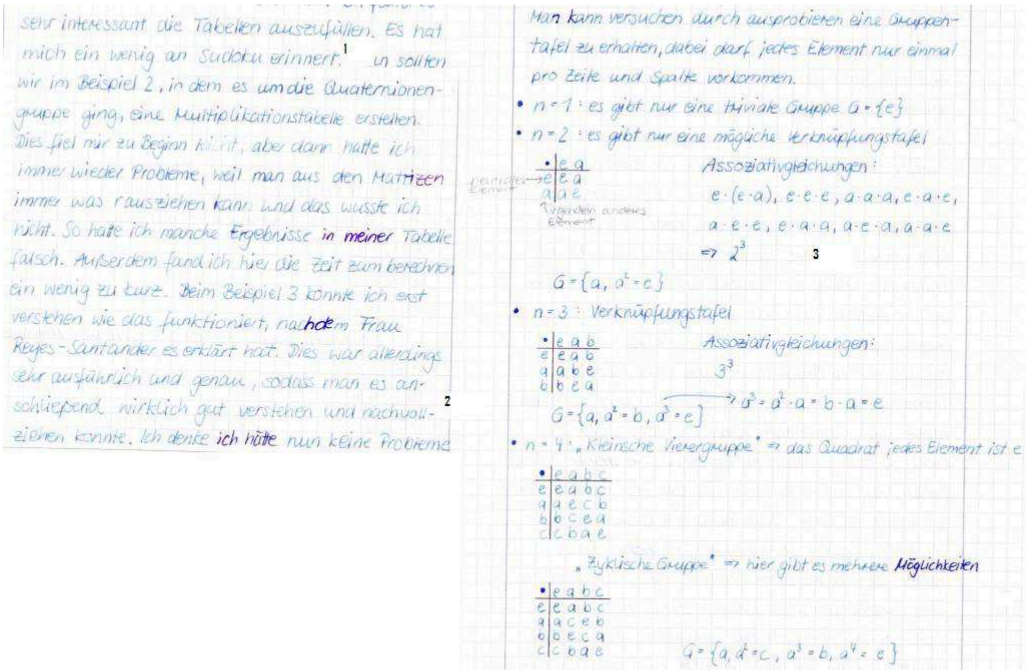
Diario de aprendizaje 4.

En el cuarto diario de aprendizaje, han destacado 3 temas, de los 8 temas tratados en el pro seminario de álgebra (tabla 18).

Unidad de análisis	Traducción del tema
U1	2. ¡Existen muchos Grupos!
U2	7. Simetrías de ornamentos, parquets y cristales.

A continuación el detalle de las unidades de análisis.

D4U1 (1, 2, 3)


sehr interessant die Tabellen auszufüllen. Es hat mich ein wenig an Sudoku erinnert.[1] … sollten wir im Beispiel 2, in dem es um die Quaternionengruppe ging, eine Multiplikationstabelle erstellen. Dies fiel mir zu Beginn leicht, aber dann hatte ich immer wieder Probleme, weil man aus den Matrizen immer was rausziehen kann und das wusste ich nicht. So hatte ich manche Ergebnisse in meiner Tabelle falsch. Außerdem fand ich hier die Zeit zum berechnen ein wenig zu kurz. Beim Beispiel 3 konnte ich erst verstehen wie das funktioniert, nachdem Frau Reyes-Santander es erklärt hat. Dies war allerdings sehr ausführlich und genau, sodass man es anschließend wirklich gut verstehen und nachvollziehen konnte.[2] Ich denke ich hätte nun keine Probleme

Man kann versuchen durch ausprobieren eine Gruppentafel zu erhalten, dabei darf jedes Element nur einmal pro Zeile und Spalte vorkommen.

- $n=1$: es gibt nur eine triviale Gruppe $G=\{e\}$
- $n=2$: es gibt nur eine mögliche Verknüpfungstafel

•	e	a
e	e	a
a	a	e

neutrales Element; irgendein anderes Element

Assoziativgleichungen:
$e\cdot(e\cdot a),\ e\cdot e\cdot e,\ a\cdot a\cdot a,\ e\cdot a\cdot e,$
$a\cdot e\cdot e,\ e\cdot a\cdot a,\ a\cdot e\cdot a,\ a\cdot a\cdot e$
$\Rightarrow 2^3$ [3]

$G=\{a, a^2=e\}$

- $n=3$: Verknüpfungstafel

•	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Assoziativgleichungen:
3^3

$G=\{a, a^2=b, a^3=e\}$ $\rightarrow a^3=a^2\cdot a=b\cdot a=e$

- $n=4$: „Kleinsche Vierergruppe" $\Rightarrow$ das Quadrat jedes Element ist e

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

„Zyklische Gruppe" $\Rightarrow$ hier gibt es mehrere Möglichkeiten

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

$G=\{a, a^2=c, a^3=b, a^4=e\}$

D4U1.1. Dimensiones observadas: PME y PMVM/A.

En esta frase, donde el estudiante menciona que la “tabla de Grupo”, le recuerda al juego Sudoku (ver nota al pie de página n°78), puede ser interpretada tanto como en la categoría de las estrategias, como en la categoría de los vehículos de comunicación analogías. El alumno utiliza la misma forma de proceder en este juego, para encontrar las tablas de Grupos, como se puede ver en la subunidad D4U1.3, esto es está utilizando el principio de analogía. Al mencionar que las tablas de Grupos, le recuerdan al juego Sudoku, está procediendo de forma diferente, ya que en primer lugar tiene a las “tablas de Grupo” y luego esto le recuerda al juego Sudoku, con lo cual se produce un diálogo entre la memoria y el contenido.

D4U1.2. Dimensión observada: PMC.

En esta subunidad, se observa un dialogo entre la matemática regular y la matemática singular, en relación al pensamiento algebraico. El estudiante comenta sobre sus conocimientos previos, sobre sus dificultades y de cómo a través de la ayuda externa logra solucionar estas dificultades. En esta subunidad se observa la categoría del pensamiento relacionado con el contenido (PMC).

D4U1.3. Dimensiones observadas: PMC, PME y PMVR.

En esta subunidad se observa como el estudiante hace un resumen de lo que entendió sobre “tablas de Grupos” para los Grupos finitos de orden 2, 3 y 4. Por lo que se puede leer de este diario, se entiende que el estudiante utilizó dos cuadernos, uno era el cuaderno de trabajo y el otro el diario de aprendizaje. Al inicio se muestra la influencia del juego Sudoku, sobre la forma de resolver o encontrar las tablas de Grupo, de forma generalizada. También se puede observar una estrategia personal para proceder con la comprobación de la asociatividad, agregando en algunos casos el cálculo de todas las posibilidades que se deberían chequear para decir que esto es cierto. Esto se deja interpretar bajo la categoría de las estrategias.

En cuanto a los pensamientos relacionados con el contenido, se observa el pensamiento estocástico y el pensamiento algebraico (por medio de generalizaciones, ya que el estudiante realiza tablas de Grupo, sin evocar ningún Grupo conocido en especial), además se puede observar el uso de representaciones semióticas simbólicas e icónicas, donde las icónicas son flechas, que son utilizadas para conectar pasos y poner explicaciones. Este sería un ejemplo de mapa conceptual personal, donde la matemática regular y la singular interactúan. Sobre la matemática singular, se observa un comentario sobre los Grupos cíclicos “aquí hay más posibilidades”, que se puede interpretar en relación al comentario anterior, como una libertad en cuanto a los resultados de las potencias de cada elemento.

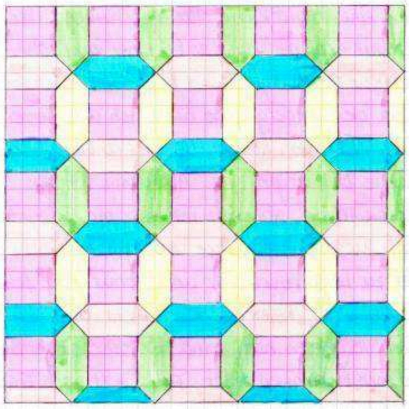
D4U2 (4, 5, 6)

Bei dieser Sitzung ist mir die Translation zum 1. Mal begegnet. Es wurde gut von der Referentin erklärt, was eine Translation ist und auch die Erklärung auf dem Handout ist sehr verständlich. Drehungen und Spiegelungen waren mir schon bekannt. Allerdings kannte ich die Gleitspie-gelung noch nicht und auch hier war die Er-klärung verständlich und nachzuvollziehen, dass ich es in den Aufgaben sofort verwenden konnte. Bei der Definition der zyklischen Gruppe habe ich mir noch eine Bemerkung dazugeschrieben. Hier habe ich mir ergänzt, dass es bei einer zyklischen Gruppe nur Drehungen und keine Spiegelungen gibt[4] Bei der Diedergruppe habe ich die Bemer-kung des Referenten notiert, dass es so viele Spiegel-achsen wie Drehungen gibt. Allerdings ist das nicht sehr wichtig, aber eine interessante Erkenntnis. Das Bsp. für die Friesgruppe war gut gewählt, da es nicht zu kompliziert war und somit jeder folgen konnte. Dass der Referent dann nicht alle Defi-nitionen vorgelesen hat, fand ich sehr angenehm, da dies meist langweilig ist. Falls jetzt noch Fragen zu den Definitionen aufkommen, kann man den Referenten in den folgenden Sitzungen ansprechen. Die Ornamentgruppen haben wir dann in einem Stationentraining selbst „erkunden" können. 5

Dies fand ich eine willkommene Abwechslung zu den „normalen" Referaten. Durch diese Aufgaben hat man die Gruppen einfacher nachvollziehen können, weil man sich damit auseinandersetzen musste.

Aufgabe 1

Erstelle eine Parkettierung auf einem 12cm × 12cm Quadrat.



6

D4U2.4. Dimensiones observadas: PMP, PMVM/A y PMC.

En esta subunidad el análisis se concentra en las siguientes frases textuales del estudiante: “Para la definición de Grupo cíclico, yo escribí una nota al margen. Aquí yo complete para mí, que en los Grupos cíclicos solo existen rotaciones y no hay reflexiones.” Esto se puede interpretar con la categoría de la percepción, en el sentido de que la definición estática de lo que es un Grupo cíclico, está siendo ahora referida en términos de movimientos, con lo cual el estudiante está utilizando la capacidad de percibir lo dinámico. La metáfora que el estudiante utiliza es la de rotación, es decir, que los elementos de los Grupos cíclicos solo “giran”.

En cuanto a los pensamientos relacionados con los contenidos, se puede observar el pensamiento algebraico.

D4U2.5. Dimensiones observadas: PMC y PMP.

En esta subunidad, se observa la percepción del espacio y de los movimientos, tanto como medio de aprendizaje, como conceptos para ser utilizados en la resolución de problemas.

En cuanto a los pensamientos relacionados con el contenido, se observa el pensamiento geométrico y el pensamiento algebraico.

En cuanto al diario completo, se puede observar una cierta inseguridad con respecto a la matemática singular y en los otros temas, se observa una tendencia a escribir sobre los momentos propios de la sesión.

D4U3.6. Dimensión observada: PMVR.

En esta subunidad se observa la utilización de una representación icónica para responder a la tarea planteada.

En este caso, hace falta recordar que en el diario de aprendizaje no es un cuaderno de ejercicios y que en este diario, los estudiantes solo deben poner lo que ellos quieren, en relación a la sesión. En este caso, el medio de comunicación utilizado es una representación icónica que muestra como el estudiante procedió en la completación del plano (notar las medidas explicitadas).

Esta unidad de análisis, destaca por la integración explícita de un contenido anterior a uno nuevo, más aún, el estudiante hace referencia a la forma en que él considera los Grupos cíclicos, haciendo una especie de metáfora para estos Grupos.

En el resto de las subunidades no se observa la dimensión estrategias y en general se observa muy poco del pensamiento matemático, ya que el estudiante escribe comentarios que están relacionados más con el proceder de la sesión, que con el contenido.

Diario de aprendizaje 5.

El quinto diario de aprendizaje tiene 5 unidades de análisis, ya que han destacado 5 de los 8 temas tratados en el pro seminario de álgebra (ver tabla 18).

Unidad de análisis	Traducción del tema.
U1	1. Semigrupos, Grupos y Subgrupos
U2	3. ¿Similar, igual, isomorfos?
U3	4. Grupos nuevos o un producto entre Grupos.
U4	6. Un mundo cíclico
U5	7. Simetrías de ornamentos, parquets y cristales

A continuación el detalle de las unidades de análisis.

D5U1 (1)

Zu Beginn der Stunde haben wir am Beispiel eines Dreiecks die Verknüpfungen von Drehungen und Spiegelungen betrachtet. Beim selbständigen Ausfüllen der Tabelle hatte ich teilweise Schwierigkeiten, mir die Verknüpfungen im Kopf vorzustellen. Es wäre dabei sichre hilfreich gewesen, ein zweites ausgeschnittenes Dreieck zu verwenden, wie es von den Referenten gemacht wurde. Wie man die Ergebnisse für die Tabelle kommt, war jedoch gut verständlich. Mit Hilfe der Verknüpfungstabelle wurde mir schnell klar, welche Eigenschaften eine Gruppe hat. Das Ausfüllen der Beispiele stellte daher keine großen Schwierigkeiten für mich dar. Das selbständige Bearbeiten der Beispiele zu Halbgruppen und Untergruppen war für mich zu Beginn etwas schwieriger, allerdings kam ich dann nach kurzer Zeit trotzdem auf die richtigen Ergebnisse. Die abschließend besprochenen Definitionen zu Halbgruppen und Untergruppen waren für mich einleuchtend. Bei der Definition einer Gruppe wurde mir jedoch nicht klar, was mit Unterpunkt 2.2d) in dem es um die abelsche Gruppe ging, gemeint war.

D5U1.1. Dimensiones observadas: PME, PMP, PMVR, PMC y PMCR.

El estudiante escribe como por medio de un triángulo, se entendió la operación entre rotaciones y reflexiones. Esto se podría interpretar en términos de una forma de proceder, es decir, se gira el triángulo en esa dirección y luego se refleja en torno a una recta, eso es lo mismo que una rotación operada con una reflexión. Agregando que al llenar la tabla de Grupo, tuvo dificultades en la representación mental de la acción. Esto en conjunto se deja interpretar como un camino al desarrollo de la capacidad visual, espacial, al pensamiento relacionado con los contenidos, tanto el pensamiento geométrico, como el algebraico. Más aún, esto es, una forma de la flexibilidad matemática, el paso de la visualización a lo simbólico, con esto se observa entonces una de las capacidades no racionales. El estudiante comenta, que este proceso hubiese sido más fácil, si él también hubiese tenido un triángulo como los otros[156].

El estudiante escribe también, como es el momento de escribir la definición de Semigrupos y Subgrupos, utilizando la palabra “einleuchtend”, que quiere decir “evidente”. Esto muestra el momento de la institucionalización (sección 3.10.1 y sección 5.5.1) como un medio de comunicación (representaciones semióticas lenguaje natural y simbólico) y como apoyo para el aprendizaje.

---

[156] *Los expositores preparaban el material para la sesión y si era necesario, se debía compartir el material. Como docente del pro seminario, no podía exigir la preparación de material para cada uno de los participantes, ya que el costo de ellos no se limitaba tan solo a sacar fotocopias, sino que era un gasto más elevado tanto de dinero como en tiempo de preparación.*

D5U2 (2)

In der heutigen Stunde haben wir uns mit Restklassen beschäftigt. Zu Beginn haben wir das Beispiel Modulo 4 betrachtet. Dabei haben wir zunächst verschiedene Zahlen aus $\mathbb{N}$ einem Element aus $\mathbb{Z}_4$ zugeordnet. Ich fand es positiv, dass wir es mit der Zahl 33 selbständig versuchen sollten. Wir haben uns die Regel gemerkt, dass man positive Zahlen durch 4 teilen muss, wobei der Rest der übrigbleibt das Element aus $\mathbb{Z}_4$ angibt. Danach haben wir uns überlegt, ob $(\mathbb{Z}_4, +)$ eine Gruppe ist. Dazu haben wir die Merkmale einer Gruppe, also Abgeschlossenheit, Assoziativität, Neutrales Element und Inverses Element erfüllt sein. Da jeder dies für sich selbst überprüfen sollte, war es eine gute Wiederholung der Gruppenmerkmale. Anschließend sollten wir die Tabelle der Verknüpfungen von Drehungen eines Quadrates ausfüllen. Wir konnten feststellen, dass jedem Element aus $\mathbb{Z}_4$ genau ein Element aus D_Q zugeordnet werden kann. Deshalb sind die beiden Gruppen isomorph. Danach haben wir uns die Definition von Homomorphismus angeschaut. Das anschließende Beispiel war gut zur Veranschaulichung. Außerdem haben wir definiert, dass jeder Homomorphismus der außerdem bijektiv ist ein Isomorphismus ist. Bijektiv heißt, dass φ injektiv und surjektiv ist. Dann haben wir Bijektivität noch am Beispiel von $\mathbb{Z}_4$ und D_Q betrachtet. Im Anschluss daran haben wir uns mit den wichtigsten Eigenschaften von Homomorphismen beschäftigt. Anhand der Beispiele 1 und 2 konnte jeder für sich überprüfen, ob die Eigenschaften erfüllt sind, was meiner Meinung nach das Verständnis vertiefte. Ich konnte dadurch die Regeln sehr gut nachvollziehen. Abschließend haben wir uns noch mit dem Satz von Lagrange beschäftigt. Er besagt, dass jede Gruppe zwei triviale Untergruppen hat und die Ordnung jeder weiteren Untergruppe ein Teiler der Ordnung der ursprünglichen Gruppe ist. Anhand der danach betrachteten Beispiele 1 und 2 konnten wir die Anwendung des Satzes noch selbständig üben. 2

D5U2.2. Dimensiones observadas: PME, PMC, PMP y PMVR.

El estudiante aclara en que consiste el procedimiento “modulo 4” y la forma para mostrar que un conjunto con una operación es un Grupo, con esto se observa la categoría de las estrategias y procedimientos. Lo anterior lo hace utilizando tanto el lenguaje natural como el simbólico, con esto se observa la categoría del vehículo de comunicación representaciones. La categoría de la percepción se observa en la mención explícita de la palabra “visualización”. En cuento a los pensamientos relacionados con el contenido, se observa el pensamiento formal y el pensamiento algebraico.

D5U3 (3)

Zu Beginn der Sitzung haben wir eine Aufgabe zu Modulo 2 und Modulo 3 bearbeitet. Wir haben verschieden Zahlen betrachtet und sie den Elementen in Modulo 2 und Modulo 3 zugeordnet. Diese Aufgabe war relativ einfach zu bearbeiten und war gut zur Wiederholung von Restklassen. Anschließend haben wir das direkte äußere Produkt von Gruppen := das kartesische Produkt betrachtet. Anhand der Verknüpfung von G_1 und G_2 wurde anschaulich erklärt, wie die komponentenweise Verknüpfung funktioniert. Die anschließend besprochenen Beweise 1), 2) und 3) waren einleuchtend und wiederholten zudem die Eigenschaften einer Gruppe. Positiv war meiner Ansicht nach, dass wir den Beweis zu 3) zunächst selbständig bearbeiten sollten. Durch das Wissen der vorangegangen Sitzungen konnte ich den Beweis auch selbständig durchführen. Im Anschluss daran haben wir das Beispiel $Z_2 \times Z_3$ betrachtet und überprüft ob das Ergebnis Z_6 entspricht. Damit dies der Fall ist muss es ein Isomorphismus sein, d.h. bijektiv und ein Homomorphismus. Dazu ordneten wir jedem der Elemente aus $Z_2 \times Z_3$ ein Elementen aus Z_6 zu. Wir haben dies anhand von Ausprobieren getan. Mir wurde allerdings nicht klar, wie man die Zuordnung ohne Ausprobieren durchführen kann. Das Anschließende Ausfüllen der Tabellen war meiner Meinung leicht zu bewältigen, allerdings habe ich nicht verstanden, wozu wir diese Tabellen benötigt haben. Das Ausfüllen der Tabelle zu den Restklassen Modulo 2 bis 10 war etwas verwirrend, da nicht ganz klar wurde, warum $Z_4 \cong Z_2 \times Z_2$ nicht gilt. 3

D5U3.3. Dimensiones observadas: PMC, PME y PMVR.

En esta unidad de análisis, se puede observar tanto el pensamiento relacionado con el contenido, en particular el pensamiento formal, el pensamiento funcional y el pensamiento algebraico, como el uso de representaciones simbólicas como medio de comunicación. En este párrafo, es estudiante hace mención de la estrategia de la prueba sistemática y menciona que no sabría cómo solucionar un problema similar sin esta estrategia.

D5U4 (4)

Am Anfang der Stunde haben wir die Definition einer zyklischen Gruppe besprochen. Eine Gruppe wird demnach als zyklische bezeichnet, wenn es ein Element ‹a› in der Gruppe gibt, mit dem alle anderen Elemente der Gruppe erzeugt werden können. Es gibt dabei multiplikative und additive zyklische Gruppen. Zudem haben wir festgestellt, dass jede zyklische Gruppe auch eine abelsche Gruppe ist. Anschließend haben wir ein Beispiel für eine endliche zyklische Gruppe betrachtet. Wir haben festgestellt, dass die erzeugenden Elemente von Z_3 ‹1› und ‹2› sind. Analog gilt dies auch für die Drehung eines gleichseitigen Dreiecks. Daraufhin haben wir noch eine unendliche zyklische Gruppe, nämlich (Z,+) betrachtet. Als Beispiel für eine nichtzyklische Gruppe wurde (R,+) genannt. In einer Wiederholung wurde dann noch erklärt was der ggT und was Teilerfremd heißt. Die Gruppenordnung die wir danach behandelt haben, gibt die Anzahl der Elemente der Gruppe an. Dies ist wichtig, da jede Gruppe genau so viele Untergruppen hat, wie es ganzzahlige positive Teiler der Gruppenordnung gibt. Daraus folgt dann, dass Z_p (p = Primzahl) keine Untergruppen, außer den trivialen besitzt. Am Ende der Sitzung sollten wir noch 3 Aufgaben bearbeiten, deren Lösungen mir leider nicht ganz klar wurden. 4

D5U4.4. Dimensiones observadas: PMVR, PMC y PME.

En esta unidad de análisis, se puede observar el uso de representaciones semióticas simbólicas y lenguaje natural. El pensamiento relacionado con el contenido, se observa en todo el párrafo por medio del pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

En cuanto a la estrategia, se observa la utilización de la palabra “Analog”, que quiere decir “análogo”, para indicar que el procedimiento que se hace en el caso de Z_3, para encontrar los generadores, es parecido al proceso que se hace cuando se quieren encontrar los generadores en el caso del Grupo de rotaciones de orden 3. En este caso, esta palabra no es considerada como un vehículo de comunicación del pensamiento, es decir, no está siendo considerada como una analogía entre conceptos, ya que el estudiante no la utiliza para decir finalmente que por este motivo, proceder de la misma forma, entonces los Grupos son “similares” o isomorfos. Lo cual quiere decir que el estudiante podrá seguir utilizando esta estrategia de analogía, como procedimiento para encontrar generadores de otros Grupos.

D5U5 (5)

Die heutige Sitzung habe ich mit Tatjana gemeinsam gestaltet. Zu Beginn der Stunde hat Tatjana die verschiedenen Bewegungen der Ebene erklärt. Zum besseren Verständnis sollten dann die anderen Studenten verschiedene Bilder den Bewegungen Spiegelung, Gleitspiegelung, Translation und Drehung zuordnen. Im Anschluss daran habe ich dann die Definition einer diskreten Bewegungsgruppe erklärt. Daraufhin habe ich dann die 3 verschiedenen diskreten Bewegungsgruppen erläutert. Zunächst die Punktruppe, die sich in zyklische Gruppe und Diedergruppe untergliedert, dann die Friesgruppe, die ebenfalls in 7 Gruppen aufgeteilt werden kann und als letztes die Ornamentgruppe, die aus 17 verschiedenen Gruppen besteht. Durch Beispiele sollten die Kommilitonen die verschiedenen Gruppen besser verstehen und ihre Eigenschaften erkennen. Danach hatten wir eine Gruppenarbeit geplant, bei der verschiedene Aufgaben bearbeitet werden sollten. Einige Aufgaben waren so gestellt, dass verschiedenen Bildern von Escher die jeweilige Ornamentgruppe zugeordnet werden sollte. So konnte das neue Wissen direkt angewendet werden. Andere Aufgaben waren eher handlungsorientiert gestaltet. Bei ihnen mussten eigene Parkettierungen gestaltet werden, Puzzle aus Escher Bildern gelegt werden, oder mit einer Schablone eine Parkettierung erstellt werden. Zudem hatten wir noch Aufgaben zu Punkt- und Friesgruppen vorbereitet. Da wir mehr Stationen als Gruppen vorbereitet hatten, konnten die Aufgaben jeder Zeit ausgetauscht werden und die Kommilitonen konnten die Aufgaben bearbeiten, die sie persönlich am interessantesten fanden. Am Ende der Stunde haben wir dann gemeinsam die Lösungen aller Stationen besprochen. 5

D5U5.5. Dimensiones observadas: PMP, PMCR y PMC.

En esta unidad de análisis, se observa la flexibilidad y la capacidad del estudiante, para transitar en diferentes niveles de representación, de lo enactivo a lo icónico y de ahí a lo simbólico o vice-versa, desde la definición de los Grupos de ornamentos y de los Grupos de “Frisos”, a los dibujos y a la acción de movimientos. Con esto se observa la capacidad no racional flexibilidad y la categoría de la percepción, con la capacidad de percibir lo dinámico y la capacidad visual. En todo el párrafo se observa el pensamiento relacionada con el contenido, como el pensamiento algebraico y el pensamiento geométrico.

Este diario destaca en la utilización del lenguaje natural y por la síntesis con la que el estudiante presenta cada una de las sesiones.

En todos los diarios de aprendizaje se observó el lenguaje natural.

En ninguno de ellos se observó una discordancia entre la matemática regular y la singular. En todos los diarios, incluso en los que aquí no se presentan, destaca la motivación por parte de los estudiantes y la comprensión de temas que ya habían sido tratados en otro seminario.

En la sección 6.5.2, se muestran los resultados de este análisis y al final de esta misma se hace un resumen, en relación a los ensayos escritos por los estudiantes.

6.3. RESULTADOS DE LOS ENSAYOS Y DE LOS ESCRITOS.

6.3.1. RESULTADOS DE LOS ENSAYOS.

En la tabla 21 se muestran de manera resumida las observaciones, que se hacen de cada uno de los ensayos. Para cada ensayo se ha anotado la subdivisión donde pudo ser observada la categoría. En caso de no haber sido observada la categoría, se anotó, en forma abreviada "s. o.", sin observación.

Tabla 23: Resumen del análisis de los ensayos.

	PMP	PMC	PME	PMCR	PMV		
					R	M/A	G
E1	E1P3.10.	E1P1.1, E1P1.3, E1P1.4, E1P2.5, E1P2.8, E1P3.9, E1P3.10, E1P3.11.	E1P2.5, E1P2.6, E1P2.7.	E1P1.1.	E1P1.1, E1P1.3, E1P2.8.	s. o.	E1P1.2, E1P2.6, E1P2.7.
E2	E2P1.1, E2P3.10, E2P3.11, E2P3.12.	E2P1.2, E2P1.3, E2P1.4, E2P1.5, E2P1.6, E2P2.7, E2P2.9, E2P3.10, E2P3.11, E2P3.12.	E2P1.6, E2P3.10, E2P3.11, E2P3.12.	s. o.	s. o.	s. o.	E2P1.2, E2P1.6, E2P2.8.
E3	s. o.	E3P1.1, E3P1.2, E3P1.3, E3P1.4, E3P1.5, E3P1.6, E3P2.7.	E3P1.4, E3P1.5.	s. o.	s. o.	E3P1.3	E3P1.1, E3P2.7.
E4	E4P1.2.	E4P1.1, E4P1.2, E4P2.3, E4P2.4, E4P2.5, E4P2.6, E4P3.8.	E4P2.5, E4P2.6, E4P2.7.	E4P1.2	E4P2.4, E4P2.5, E4P2.6	s. o.	E4P1.1, E4P2.5, E4P2.7, E4P3.8.
E5	E5P1.1, E5P1.3, E5P4.9.	E5P1.1, E5P1.1, E5P2.4, E5P2.5, E5P3.6, E5P3.7, E5P3.8, E5P4.9, E5P4.10, E5P4.11.	E5P2.4, E5P3.6, E5P3.7, E5P4.11.	E5P4.10.	E5P2.5, E5P3.7, E5P3.8.	E5P1.2, E5P1.3	E5P1.1.
E6*	E6P3.3.	E6P1.1, E6P2.2, E6P3.3, E6P4.4, E6P5.5, E6P6.6, E6P7.7.	s. o.	s. o.	E6P2.2, E6P3.3, E6P4.4, E6P7.7.	s. o.	E6P1.1, E6P5.5
E7	E7P1.1, E7P2.4, E7P3.6, E7P3.8.	E7P2.2, E7P2.3, E7P2.5, E7P3.6.	E7P3.8.	E7P1.1, E7P3.8.	s. o.	E7P2.2, E7P2.3, E7P2.4, E7P2.5, E7P3.6, E7P3.7, E7P3.8.	E7P2.4, E7P2.5.
E8*	E8P1.1, E8P1.2.	E8P2.3, E8P2.4, E8P3.5, E8P3.6.	s.o.	E8P1.1, E8P1.2	E8P3.5.	E8P2.3	E8P1.2

Los ensayos marcados con asterisco, provienen del segundo contexto. Del segundo contexto se recibieron cuatro ensayos. Los otros dos ensayos fueron descartados por ser similares en cuanto al análisis con las dimensiones y categorías de este estudio.

En cuanto a los resultados más relevantes, se tiene:

- No se observó, una diferencia cualitativa entre los ensayos provenientes de un contexto y los provenientes del otro contexto. Esto podría indicar, que el PM, depende no tan solo de la clase de matemática, sino que existen otros factores, como por ejemplo la personalidad, que podrían tener una influencia en la cantidad de dimensiones y categorías observadas.

- En todos los ensayos se observa la categoría del pensamiento relacionado con el contenido, en este caso el pensamiento algebraico y en algunos casos, se observó el pensamiento funcional y el pensamiento aritmético.
- La categoría de la percepción (PMP), fue observada en varios ensayos, en particular en los ensayos E2 y E7.
- La categoría de las estrategias (PME), fue observada en casi todos los ensayos, excepto en los provenientes del segundo contexto, esto se puede deber al tiempo de trabajo que tuvo un grupo de alumnos en relación al otro, o bien, pueden ser otros factores, pero en general se puede decir que, no hay una diferencia cualitativa entre los dos contextos del grupo 1.
- La categoría de las capacidades no racionales (PMCR), fue la menos observada y apareció con más frecuencia en los ensayos E7 y E8. Esto puede tener su origen en la dificultad de escribir "ideas" personales sobre conceptos y/o objetos matemáticos.
- En relación a los vehículos de comunicación se utilizó como base el lenguaje natural, pero se pudo observar tanto las representaciones semióticas simbólicas matemáticas, como nociones básicas, algunas analogías y en algunos casos metáforas o intentos de metáforas. Una de las hipótesis que de aquí se desprenden es, la elección de los vehículos de comunicación tiene que ver con la personalidad del individuo y no con la forma de preparar la secuencia didáctica.
- En cuanto a la matemática singular y la regular, se observaron algunas discordancias, pero en general, se observó una armonía entre las dos matemáticas. Resaltan algunos ensayos en los que no se apreció la matemática singular.

En relación a los objetivos de la investigación se tiene que:

- Es posible observar las diferentes componentes del PM en ensayos escritos.
- Es posible establecer una relación de causalidad entre las variables PM Y TG, esto significa, que si los alumnos trabajan con elementos de la TG, se desarrolla el pensamiento relacionado con el pensamiento algebraico, se desarrolla tanto el desarrolllo de estrategias personales, como la comprensión de procedimientos. Se tiene una relación entre la TG y la categoria de las capacidades no racionales y se utilizan por lo menos tres diferentes vehículos de comunicación.

- Hay un rol metafórico en el aprendizaje. En particular fue posible observar el intento de la generación de una metáfora conceptual en el ensayo E7.
- Con respecto a observar pensamiento relacionado con el contenido, en particular con el pensamiento geométrico, se puede decir que en los ensayos, no fue observable.

Finalmente, se puede decir que, con la TG (Teoría de Grupos) se desarrollan pensamientos matemáticos que estan incluidos en la caracterización del PM, con esto el segundo objetivo de este trabajo.

6.3.2. RESULTADOS DE LOS DIARIOS.

En la tabla 22 se muestran, de manera resumida, las observaciones, que se hacen de los diarios de aprendizaje. Para cada diario de aprendizaje, se ha anotado la subdivisión donde pudo ser observada la categoría correspondiente. En caso de no haber sido observada la categoría, en los temas seleccionados, se anotó, en forma abreviada "s. o.", sin observación. En este caso, solo quiere decir que estas dimensiones no fueron observadas en los temas que se muestran en el análisis, pero no se puede concluir con respecto al diario completo.

En cuanto a los resultados más relevantes, se tiene:

- En todos los diarios de aprendizaje se observa la categoría de la percepción.
- En todos los diarios se observa la categoría del pensamiento relacionado con el contenido, en particular el pensamiento algebraico, el pensamiento geométrico, el pensamiento funcional, el pensamiento aritmético y en algunos casos el pensamiento estocástico.
- En todos los diarios de aprendizaje se observa la categoría de las estrategias y de los procedimientos. En algunos casos, el tipo de procedimiento utilizado es mencionado de forma explícita.
- La categoría de las capacidades no racionales, no es observada en uno de los diarios de aprendizaje. Esta categoría fue observada con mayor frecuencia en el diario de aprendizaje 1.
- En relación a los vehículos de comunicación, se observó en todos los diarios el lenguaje natural, también se pudo observar, las representaciones semióticas simbólicas matemáticas y las representaciones icónicas. En cuanto a la observación de nociones básicas, estas fueron observadas solo en tres de los ensayos y en general se puede decir que los estudiantes no utilizaron nociones básicas para los nuevos contenidos

(elementos de la TG). Se pudo observar en algunos casos algunas analogías y en algunos casos metáforas o intentos de metáforas.

- En cuanto a la matemática singular y la regular, se observa en todos los diarios de aprendizaje, que hay una buena relación entre ambas.
- En el cuarto diario de aprendizaje aparece una analogía con intenciones de ser metáfora, para un Grupo cíclico (D4U2.4.), en este caso sería necesario hacer una entrevista al estudiante, para determinar en qué dirección o en que dominios trabajó el estudiante, al escribir esas frases.

Tabla 24: Resumen del análisis de los diarios.

	PMP	PMC	PME	PMCR	PMV		
					R	M/A	G
D1	D1U1.1, D1U1.4, D1U1.5, D1U2.8, D1U2.9, D1U2.10, D1U3.11, D1U3.13, D1U3.14.	D1U1.1, D1U1.2, D1U1.3, D1U1.4, D1U1.5, D1U1.6, D1U2.7, D1U2.8, D1U2.10, D1U3.11, D1U3.13, D1U3.14.	D1U1.3, D1U1.4, D1U1.5, D1U1.6, D1U2.8, D1U3.12.	D1U1.1, D1U2.7, D1U2.8, D1U2.9.	D1U1.2, D1U1.4, D1U1.5, D1U2.9, D1U3.13.	D1U1.3.	D1U1.2.
D2	D2U1.1, D2U1.2, D2U1.3, D2U2.6, D2U3.8, D2U3.9.	D2U1.1, D2U1.2, D2U1.3, D2U2.4, D2U2.5, D2U2.6, D2U3.9.	D2U1.2, D2U2.5, D2U3.9.	D2U1.1, D2U2.7, D2U3.10.	D2U1.1, D2U2.6, D2U3.9.	D2U1.1, D2U1.3, D2U2.4.	D2U2.6, D2U3.9.
D3	D3U1.2.	D3U1.1, D3U1.2, D3U1.5.	D3U1.2, D3U1.3, D3U1.5.	D3U1.4.	D3U1.1, D3U1.2, D3U1.3, D3U1.5.	D3U1.1.	D3U1.1.
D4	D4U2.5.	D4U1.2, D4U1.3, D4U2.4, D4U2.5.	D4U1.1, D4U1.3.	s.o.	D4U1.3, D4U2.6.	D4U1.1, D4U2.4	s.o.
D5	D5U1.1, D5U2.2, D5U5.5.	D5U1.1, D5U2.2, D5U3.3, D5U4.4, D5U5.5.	D5U1.1, D5U2.2, D5U3.3, D5U4.4.	D5U1.1, D5U5.5.	D5U1.1, D5U2.2, D5U3.3, D5U4.4.	s.o.	s.o.

En relación a los objetivos de la investigación y en particular al tipo de escrito diario de aprendizaje, se tiene que:

- Es posible observar las diferentes componentes del PM en diarios de aprendizajes.
- Es posible establecer una relación de causalidad entre las variables PM Y TG, esto significa, que si los alumnos trabajan con elementos de la TG, se desarrolla el pensamiento relacionado con el pensamiento algebraico, se desarrolla tanto el desarrolllo de estrategias personales, como la comprensión de procedimientos. Se tiene una relación entre la TG y la categoría de las capacidades no racionales. Además que se se utilizan por lo menos tres diferentes vehículos de comunicación.

- En el diario de aprendizaje se observa, que hay una intentó de comprensión de los temas, que no involucra el desarrollo de metáforas.

Finalmente, se puede decir que, con la TG (Teoría de Grupos) se desarrollan pensamientos matemáticos que estan incluidos en la caracterización del PM, con esto nuevamente se tiene el segundo objetivo de este trabajo.

6.3.3. RESUMEN DE LOS RESULTADOS

En cuanto a los resultados de los ensayos y de los diarios de aprendizaje, se tiene lo siguiente:

- Existe una diferencia cualitativa entre ambas formas de escritos libres.
- En los diarios de aprendizaje se pudo observar con mayor frecuencia la categoría de la percepción y de los procesos y capacidades no racionales.
- En los ensayos se pudo apreciar con mayor frecuencia el vehículo de comunicación nociones básicas.
- En ambos tipos de escritos, se aprecia frecuentemente el pensamiento relacionado con el contenido matemático.

La diferencia cualitativa entre estos escritos, proviene de la forma en que los alumnos intentan explicar y formular, lo que es un Grupo. Las herramientas (ver sección 3.6) de los alumnos son menos sofisticadas y por lo tanto son más abiertas, es decir, incluyen diferentes vehículos de comunicación. En los diarios de aprendizajes, las herramientas son sofisticadas, los estudiantes no pretenden transmitir una idea, sino que más bien pretenden entender esa idea y los vehículos de comunicación utilizados, son más bien producto de la enseñanza escolar. Lo cual se puede resumir en los dos siguientes puntos:

- En los ensayos hay intentos de explicar lo que es un Grupo, por medio de palabras y nociones propias.
- En los diarios de aprendizaje hay intentos de comprender con palabras y nociones, provenientes de la matemática regular.

En cuanto a la observación frecuente de las dimensiones percepción y procesos y capacidades no racionales, se cree que, esta proviene de la forma y de la estructura de las sesiones del pro seminario. Es decir, la estructura del pro seminario, contempló en su diseño ambas dimensiones, por medio del trabajo con material y por medio de la utilización de variadas formas de comunicación. De la misma forma, se puede comprender el resultado del análisis de los ensayos y la observación del vehículo de comunicación nociones básicas, esto se debe a la forma, muy común en los colegios, de explicar los contenidos utilizando estas nociones básicas, como introducción. Se cree que la aparición de estas nociones básicas es un producto de la enseñanza escolar que han tenido los alumnos. Con respecto a lo observado con el ensayo y los vehículos de comunicación, esto se puede resumir en los siguientes puntos:

- El desarrollo de la categoría de la percepción y de la categoría de los procesos y capacidades no racionales, pueden ser un producto del diseño de la secuencia didáctica del pro seminario.
- La utilización de los vehículos de comunicación, provienen tanto del estilo de pensamiento del individuo, como del proceso individual de aprendizaje que han desarrollado durante sus años escolares.

En cuanto a la observación del pensamiento relacionado con el contenido en ambos tipos de escritos, nos indica justamente que estas cuatro componentes son inseparables al momento de referirse al pensamiento matemático. En los diarios de aprendizaje D2 y D3, se observa que existen unidades de análisis, que no están relacionadas con el pensamiento relacionado con el contenido, es decir, existe el pensamiento matemático, que no está vinculado con el pensamiento relacionado con el contenido.

En ambos tipos de escritos y en relación al segundo objetivo de este estudio se tienen los siguientes resultados:

- Se establecen relaciones de causalidad entre el aprendizaje de los elementos de la TG y las dimensiones del PM. En particular entre algunos de los elementos de la TG y las dimensiones PMC, PMP y PMV.
- En cuanto al rol que tienen las metáforas en el aprendizaje, no se pudo detectar una diferencia cualitativa, entre las observaciones concernientes a la matemática regular y singular. Esto significa, por un lado, que no se observó entre los ensayos y los escritos, una diferencia cualitativa en la forma de presentar el aprendizaje. Por otro lado, no se puede descartar en base a las herramientas de recolección de datos, aquí presentadas, la existencia de metáforas en el aprendizaje de los sujetos de este estudio.

Finalmente, cabe destacar que en estos escritos, no tan solo se pudo apreciar el PM, sino que también se pudo apreciar elementos relacionados con la personalidad de los individuos y en muchos casos momentos de frustración, de alegrías y de éxito. Los diarios de aprendizaje, contenían muchas apreciaciones personales sobre la forma de exponer en la sesión, comentarios de errores y de la forma en que estos se solucionaban, esto último es considerado como un gran aporte, a este estudio, sino que también es un aporte para la preparación de otros seminarios. También había comentarios sobre la participación de elementos externos al propio individuo, para lograr la comprensión de un objeto, lo cual muestra la importancia de la comunicación en el proceso del aprendizaje.

Por último, el análisis preliminar sobre el PM es reflejado en los ensayos y en los diarios de aprendizaje. El pensamiento matemático se muestra diferente, si ocurre en momentos de mostrar el resultado de un aprendizaje, como en los ensayos o en momentos del aprendizaje mismo, como en los diarios. El análisis de los ensayos, de los diarios de aprendizaje, muestran tres escenarios diferentes, que se unen en los resultados, en un macro escenario, que relaciona de forma causal la enseñanza, el aprendizaje, la Teoría de Grupos y el pensamiento matemático, para decir que: "Tanto la forma como el diseño de una clase, tanto el desarrollo individual como el medio cultural, influyen en el pensamiento matemático, durante la enseñanza y el aprendizaje de elementos de la Teoría de Grupos."

Capítulo 7.

7. CONCLUSIÓN.

La caracterización del pensamiento matemático, que surge a partir de este estudio, está constituido por cuatro grandes componentes, que están fuertemente integradas: la percepción, el pensamiento relacionado con el contenido matemático, las estrategias y los procedimientos y los procesos y capacidades no racionales.

Como resultados sobresalientes de este trabajo y con respecto al primer objetivo: **Caracterizar el pensamiento matemático**, se puede concluir que:

- Con la caracterización presentada se responde en gran medida a la pregunta inicial, sobre qué es el pensamiento matemático y se puede decir que: *El pensamiento matemático es un proceso cognitivo, que incluye a la percepción, a pensamientos relacionados con el contenido matemático, a los procedimientos y a las estrategias, como también, a los procesos y capacidades no racionales.*
- El pensamiento matemático utiliza vehículos de comunicación, estos utilizan a su vez a la memoria y a la abstracción. De esto último se puede decir que: *El pensamiento matemático tiene como vehículos de comunicación (externos) y diálogos (internos), a las nociones básicas, a las metáforas y a las representaciones.*

Este primer resultado, tiene implicaciones en la forma de enseñar matemática y en la forma de aprender matemática. Estas provienen de considerar a la percepción y a las capacidades no racionales, como componentes del pensamiento matemático, lo cual indica que en la forma de enseñar deberían existir necesariamente momentos que promuevan la percepción del objeto matemático, por parte del sujeto que está aprendiendo. Aprender matemática, significa también desarrollar capacidades racionales y no racionales. Desarrollar el pensamiento matemático, parte del desarrollo de todos los sentidos del ser humano, por ende y principalmente de todas sus capacidades.

Es importante destacar en este momento, que los procedimientos también son parte del pensamiento matemático, estos no se pueden dejar de lado, es parte también del desarrollo de la memoria y de conexiones cerebrales (de organización de la información) relevantes en los procesos cognitivos, que se realizan a diario. Nuevamente esto, tiene sus implicaciones en la enseñanza de la matemática, estos procedimientos deben ser tratados al inicio como parte de la generación de una estrategia individual y no como contenidos.

La caracterización del pensamiento matemático aquí presentada, nos muestra una relación entre los tres niveles: enactivo, icónico y simbólico y la matemática, ampliándolos al pensamiento matemático como percepción, contenidos, capacidades, estrategias y vehículos. Más aún, esta caracterización permite relacionar los sistemas autónomos (ver tabla 3, sección 3.1.3), de forma que cada sistema autónomo, puede ser tratado en el cuádruplo de la caracterización.

En este trabajo y para el segundo objetivo: **Establecer relaciones de causalidad entre el aprendizaje de los elementos de la Teoría de Grupos y la caracterización del pensamiento matemático**, utilizamos esta caracterización como un marco teórico, para el análisis de las respuestas abiertas de los cuestionarios y de los textos libres de los alumnos y estudiantes. De este análisis y de los resultados presentados, se puede concluir, con respecto al segundo objetivo, que la caracterización como un marco teórico, para el análisis de los textos libres de los alumnos y estudiantes.

Del análisis y de los resultados presentados, se puede concluir, con respecto al segundo objetivo, que:

- Hay relaciones de causalidad entre el aprendizaje de los elementos de la Teoría de Grupos y el desarrollo (observación) de las dimensiones del pensamiento matemático y se puede decir que: *Tanto la forma como el diseño de una clase y tanto el desarrollo individual como el medio cultural, influyen en el pensamiento matemático, en la enseñanza y en el aprendizaje de elementos de la Teoría de Grupos.*

- La relación de causalidad percepción de los objetos matemáticos, aprendizaje y preparación de la secuencia didáctica del pro seminario, queda verificada en el análisis y en los resultados de los diarios de aprendizaje. Lo mismo ocurre en la relación de causalidad procesos y capacidades no racionales y preparación de la secuencia didáctica y se puede decir que: *La inclusión de objetos físicos y de una fase enactiva, en las sesiones con jóvenes del pro seminario de álgebra, fomenta el desarrollo de la capacidad de percibir lo dinámico, la capacidad espacial, la sensibilidad y la flexibilidad matemática.*

- La relación de causalidad vehículos de comunicación, enseñanza de elementos básicos de la Teoría de Grupos (ver secuencia didáctica preparada para los alumnos), queda verificada en los ensayos y en los diarios de aprendizaje. Se cree que, la variedad en esta causalidad, depende de dos factores, primero de la enseñanza a largo plazo, como lo es la enseñanza escolar y de lo que se espera como un resultado final de ella (estudiantes) y segundo de la forma del escrito. Podemos decir que: *La utilización de los tres vehículos de comunicación, depende de los momentos de aprendizaje en los que se encuentra el individuo.*

Con respecto a las hipótesis planteadas, para este segundo objetivo se tiene como conclusión de los resultados, lo siguiente:

1. En todos los ensayos y en todos los diarios de vida fue posible observar alguna de las dimensiones del pensamiento matemático, lo que indica que estas componentes del pensamiento matemático, fueron en algún grado desarrolladas por el trabajo con elementos de la Teoría de Grupos.

2. La utilización de la caracterización del pensamiento matemático, tuvo la función de marco teórico y por lo tanto hubo una retroalimentación desde lo observado con lo teórico. Cabe destacar, que en los escritos libres se observaron elementos que no están relacionados con el pensamiento matemático, como por ejemplo elementos relacionados con conductas sociales.

3. En los ensayos fue posible observar la creación de una metáfora. En general, en los escritos libres, se apreciaron de forma sobresaliente las analogías. Se puede decir que, esta hipotesis fue parcialmente confirmada, que en realidad no hubo una generación propia de metáforas, ya que la metáfora de que un Grupo es como un Grupo de transformaciones, fue directamente diseñada por la docente-investigadora y por lo tanto, casi todos los estudiantes "asimilaron" esta concepción de Grupo.

   El caso de los dos ensayos (E7, E8), es realmente destacable la intención de generar una metáfora de Grupo, en relación a conceptos sociales.

4. Esta hipótesis es confirmada, los pensamientos asociados al contenido, en particular el pensamiento geométrico y la percepción, en particular la capacidad de percibir lo dinámico, fueron observadas en los escritos.

   De forma excepcional, cabe destacar la observación del pensamiento estocástico (D3, D4) y de la capacidad no racional intuición (E5).

Como resultado de este trabajo, se obtuvo un modelo sobre la caracterización del pensamiento matemático, el cual fue utilizado como marco teórico y se puede reconocer entonces como el primer objetivo, quedo relacionado con el segundo objetivo de este trabajo, como los tres escenarios, aquí presentados, muestran el inicio a la contribución del desarrollo del pensamiento matemático y más aún a fortalecer la necesidad del aprendizaje de la matemática, como desarrollo de capacidades.

En la siguiente sección, queremos hacer conclusiones de este trabajo, con respecto a este tema, como esta caracterización puede influenciar en nuestras clases de matemática.

7.1. EN NUESTRAS CLASES DE MATEMÁTICA.

Uno de los resultados que se muestran en este trabajo, muestra la relación entre lo que el alumno aprende y los vehículos de comunicación que utiliza. Esta relación depende de varios factores, dentro de los cuales destaca el desarrollo individual. En este desarrollo, participa el individuo y el medio que lo rodea. Las clases de matemática pertenecen, al medio y dependerá justamente de este medio y del desarrollo de este medio, la utilización de varios tipos de vehículos de comunicación.

En el caso de los alumnos, se ve en los resultados de la categoría PMV (tabla 21, sección 6.5.1), de los vehículos de comunicación, que ellos están influenciados por dos medios, el medio de las clases de alemán, representado por el lenguaje natural y el estilo del escrito libre ("*ensayos solo se escriben en las clases de alemán"*) y el medio de la enseñanza de las matemáticas, durante sus años escolares, si a esto se le agrega la edad de los alumnos (con todas sus características), se obtienen los resultado presentados. Estos son una muestra de la influencia de los factores mencionados relacionados con el contenido Teoría de Grupos, que no es más parte del programa (sección 1.6.3). Con esto, se quiere decir, que en nuestras clases de matemáticas, deberíamos "mezclar" medios y provocar situaciones donde los alumnos se sientan libres de expresión. Aquí, se mostró un ensayo, pero podría haber sido una pintura, una escultura, un juego, una canción, una poesía, etc.

En el caso de los estudiantes, se ve en los resultados de la categoría PMV (tabla 22, sección 6.5.2), de los vehículos de comunicación, que ellos están influenciados por lo esperado, por el resultado de la enseñanza escolar y por la preparación de las sesiones. Con lo esperado, nos referimos a lo que los estudiantes creen que en la universidad se espera de ellos, es decir, ellos creen que la creatividad y que el uso de analogías no es lo que se espera en la universidad, en clases de matemática, más bien ellos creen que se espera de ellos, que sus textos sean ordenados, formales y congruentes ("*textos con introducción, desarrollo y conclusión*"). Los estudiantes muestran en sus diarios dibujos y hacen esquemas, estos tienen la intención de aprendizaje y en muchos casos, no fueron más allá de lo que se les pidió en las sesiones o de lo que se vio en ellas. Con esto, queremos decir que, en la enseñanza previa a la universidad, se debería considerar una variedad más amplia de vehículos de comunicación, en los seminarios y en las cátedras de matemática, hay que darles más libertad de expresión a los estudiantes, el diario de aprendizaje es una posibilidad, pero hay otras como la utilización de nubes de pensamientos sobre el cuaderno de trabajo, hacer ensayos sobre un contenido específico, creación de metáforas para conceptos matemáticos, realizar más trabajos en grupos y poner a la discusión como un hacer central de los seminarios y cátedras.

Como consecuencia de estas reflexiones, se debe considerar también el tema de la evaluación, en esto podemos decir que, si hubiera que evaluar los diarios de aprendizajes y otros escritos libres, este debería ser por medio de criterios y utilizando la noción de matemática regular y singular. Aunque, se debe tomar en cuenta que los escritos libres y todos los medios de comunicación, son un medio de aprendizaje y por lo tanto no deberían ser evaluados. Al observar en los escritos libres, aquí presentados, la matemática regular y la singular, se habló de concordancia y discordancia entre ambas, este es un tipo de criterio, para comparar entre lo que se enseña y lo que se aprende.

Otro de los resultados, es la observación de la categoría de la percepción y de las capacidades no racionales. Esta relación depende de la estructura y forma de preparación de las secuencias didácticas. Más aún, esta preparación de clases y sesiones tiene la base en la concepción personal de lo que es el pensamiento matemático y en el cómo se debería desarrollar. Si el profesor de la clase, cree que el desarrollo del pensamiento matemático va dirigido al desarrollo de estrategias, entonces preparara sus clases en esa dirección. Si el profesor, de la clase, cree que el desarrollo del pensamiento matemático, esta dirigido a desarrollar los pensamientos matemáticos, entonces preparará sus secuencias desde este punto de vista.

Como aquí se muestra, en la tercera secuencia didáctica, hay una concepción del pensamiento matemático basado en la caracterización presentada. De esto, se pueden ver los resultados obtenidos por los estudiantes en las dimensiones PMP y PMCR (ver tabla 22, sección 6.5.2), de la percepción y de las capacidades no racionales, respectivamente. Aunque en estas sesiones, se incluyeron diferentes vehículos, esto no se pudo ver reflejado en los diarios de aprendizaje, pero si se observó un cambio de actitud y una motivación diferente, por parte de los estudiantes.

Este resultado en particular, puede influenciar la actitud de un profesor y en la preparación de sus clases. Para esto, se debe tener en cuenta que el desarrollo del pensamiento matemático, pasa por el desarrollo de los cuatro componentes y de los vehículos de comunicación. Es decir, se debe integrar a la percepción en nuestras salas de clases, se deben considerar las capacidades no racionales, como la intuición y la fantasía, por supuesto que los pensamientos relacionados con los contenidos habría que ampliarlos a nociones más generales e incluir el paso de estrategia a procedimiento.

Además se deberían incluir cambios de producción y de recepción. Los mismos contenidos pueden ser trabajados de formas muy diversas, con la intención de permitir al alumno la construcción de conceptos partiendo de sus capacidades y aprovechando sus puntos fuertes.

El desarrollo de los cuatro componentes y de los vehículos de comunicación, implica considerar algunas ideas para nuestras clases de matemáticas, algunas que se fueron desarrollando en el transcurso de este trabajo fueron:

- Cambios entre el lenguaje natural hablado, el lenguaje natural escrito y el lenguaje corporal.
- Creación de cuentos matemáticos.
- Dictados matemáticos.
- Descripción de construcciones y modelos.
- Comentar textos matemáticos.
- Profundizar en la relación personal que se tiene con el contenido matemático.
- Utilización de textos libres y de cuadernos de trabajo.

Como docente es nuestra obligación mostrar un abanico de posibilidades y dejar que los alumnos y estudiante en formación, hagan por si mismos, entre algunas de esta posibilidades de desarrollar el trabajo personal y grupal, se tienen: proyectos, preparación de pruebas personales, exposiciones, trabajos escrito (ensayos), prácticas, creación de material, de juegos, etc.

En cuánto a los métodos de evaluacion, hay otras posibilidades, que podrían ser consideradas en nuestras clases de matemáticas, posibilidades que provienen del desarrollo de las capacidades de cada individuo, donde la base son los vehículos de comunicación y el desarrollo de expresar conceptos y objetos matemáticos a través de diferentes formas.

La concepción del modelo tetraédrico del pensamiento matemático, busca cambiar la forma de enfocar la enseñanza de la matemática, centrándonos en los cuatro componentes centrales y en las capacidades que cada una de ellas contienen. Nuestra tarea como educadores es tratar de presentar la enseñanza de las matemáticas desde diversos ángulos, estimulando todos o la mayoría de las capacidades. Descubriendo las diferencias entre los educandos y tratar de usar ese conocimiento para personalizar la instrucción y logro. La concepción implica cambios en la forma de planificar nuestra clase y un tratamiento personalizado e inclusivo y a la vez más motivante, desarrollando nuevas herramientas para conocer más a nuestros estudiantes y dándoles más oportunidades para lograr éxito en su experiencia de aprendizaje.

7.2. DISCUSIÓN EN TÉRMINOS DEL MODELO.

En cuánto a decir que esta caracterización es un modelo, podemos decir que se acerca a ser un modelo del pensamiento matemático, reconociendo que faltan, aún más escenarios que presentar.

Destacamos de esta caracterización, la inclusión de la categoría de la percepción, en comparación con el modelo de Augsburgo (sección 3.12) , en particular de la capacidad de percibir lo dinámico y lo estático. También destacamos la inclusión de la categoría procesos y capacidades no racionales, que se muestra en este estudio por la presencia de la intuición y de la fantasía.

Como se vio en la sección 4.4.1., en el análisis de los ensayos y diarios, la intuición juega un rol en varios momentos de la resolución de problemas y en la presentación de resultados de aprendizaje. Más aún, la intuición es considerada dentro de un estilo de pensamiento (sección 2.1.2), y podemos concluir que: *la intuición juega un rol especial en la resolución de problemas y las intuiciones realizan lazos fuertes entre lo que se cree sobre algún objeto y/o concepto matemático y el saber sabio.*

En cuanto a la fantasía, podemos decir que: *la fantasía permite acercarse al saber sabio de forma indirecta y no tradicional, ella debería ser estimulada y en muchos casos escuchada.*

En cuanto a los pensamientos relacionados con el contenido, se puede apreciar que ellos involucran mucho más que a los contenidos escolares, ellos son por si mismos un tipo de pensamiento apoyado por conocimientos de un contenido y que en algunos casos, como en el caso del pensamiento funcional (sección 4.2.5) y del estocástico (sección 4.2.4.), estos incluyen factores de los estilos de pensamientos y son reforzados por estos estilos de pensamientos. Es necesario profundizar en estos pensamientos y en las implicancias que cada uno de ellos tiene en los procesos de aprendizaje y como estos pensamientos relacionados con el contenido se dejan “dominar” por los estilos de pensamientos.

Destacamos la importancia de las estrategias y la consideración de que una estrategia, tiene distintas fases, siendo la última de ellas, como logro cognitivo, el ser mirada como un procedimiento. Los procedimientos como tales, son aceptados dentro del pensamiento matemático, ya que juegan un rol especial entre las conexiones (memoria), que hacen del proceso pensar, un camino o vía, más rapida de transitar.

En cuanto a los vehículos de comunicación, creemos que todo lo que es aprehendido en matemática es una metáfora de un concepto u objeto matemático y toda metáfora que hace el individuo es producto de un aprendizaje personal.

Esto nos induce a decir que, *incluso las representaciones y las nociones básicas serían un tipo de metáfora*, quizás más débiles, en el sentido de que no se pueden expresar todas las representaciones y muchas de las nociones básicas no son asimiladas o no son generadas.

7.3. PREGUNTAS ABIERTAS.

En el transcurso de este trabajo, fueron surgiendo muchas preguntas, algunas de las cuales queremos compartir, ya que brindan la posibilidad de nuevos temas de investigación en pensamiento matemático. La primera de ellas, concierne directamente con la pregunta inicial, a recordar: ¿Qué es el pensamiento matemático? Creemos que hemos respondido de forma integral a la pregunta por medio de la caracterización del PM, no estamos seguro de que sea de forma completa. En particular, durante el estudio, nos dimos cuenta de la necesidad de incluir un pensamiento relacionado con la inseguridad matemática y el error. Como este tipo de pensamientos generó, sobre todo en los diarios de aprendizaje, otrospensamientos, que ya estaban dentro de la categorización, pero justamente el pensamiento generador, como el del error, no estuvo contemplado. Esto se traduce en las siguientes dos pregutas: ¿Esta categorización esta completa? y ¿Hay un pensamiento del error o es un pensamiento relacionado con el contenido?

Sobre esta úlitma pregunta y el trabajo aquí presentado, podemos decir que el error fue interpretado en este trabajo como una discordancia entre la matemática regular y la singular, pero creemos que hay un proceso cognitivo que se debería trabajar más ampliamente, ya que en los diarios de aprendizaje, el comentar un error derivó en una autocorrección ypor lo tanto una unificación de ambas matemáticas. En los ensayos no se pudo observar este proceso, lo que daría un par de hipotesis sobre el pensamiento del error.

La segunda de las inquietudes que nos planteamos en este trabajo, es la relacionada con la inclusión de los sentidos y de la percepción en matemática. ¿De qué forma puede influir esta percepción en los procesos de aprendizaje y del pensamiento? En particular, el tema del movimiento corporal y la inclusión del sentido del yo, podrían tener repercusiones en la toma de decisiones y en la resolución de problemas y en este sentido surgen las preguntas: ¿De qué forma pueden influenciar los movimientos corporales en la resolución de problemas en matemática? y ¿Qué movimientos corporales darían inicio al pensamiento funcional? Creemos que estas preguntas podrían tener respuestas utilizando esta caracterización y probando determinados movimientos corporales.

Una dirección de investigación que surge de este trabajo, es la continuación de las presentaciones iniciales de este trabajo. Qué está relacionada con la concepción de la Teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner, presentado en la sección 1.1, esta da algunos indicios de lo que se debería fomentar, desarrollar en una persona para que se le considere capaz y/o inteligente. De esta manera surgen las preguntas: ¿Qué significa inteligencia matemática? y ¿Cuál es la relación entre inteligencia matemática y la caracterización del pensamiento matemático? Por el momento, la inteligencia matemática no es una nueva inteligencia, si no que una especificidad del conjunto de inteligencias, esta caracterización es una mirada nueva de las capacidades matemáticas del individuo y por ende, se muestra una nueva forma de mirar la inteligencia matemática, basada en los vehículos de comunicación y en las cuatro dimensiones.

Las últimas preguntas abiertas, que surgen de este trabajo, están relacionadas con la caracterización del pensamiento matemático aquí presentada, la relación entre los tres niveles: enactivo, icónico y simbólico y su ampliación al pensamiento matemático como percepción, contenidos, capacidades, estrategias y vehículos de comunicación, de forma que estos elementos se puedan aplicar directamente en las aulas, nos preguntamos: ¿De qué forma esta caracterización permite relacionar los sistemas autónomos (ver tabla 3, sección 3.1.3), de forma qué cada sistema autónomo, pueda ser tratado en el cuádruplo de la caracterización? O bien ¿Cómo podría ser trabajado cada sistema autónomo en relación con la caracterización del pensamiento matemático?

REFERENCIAS

Aebli, H. (1963). *Psychologische Didaktik, didaktische Auswertung der psychologie von Jean Piaget*. Stuttgart: Klett.

Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la matemática*. Buenos Aires: Editorial Zorzal.

Amelang, M., Bartussek, D., Stemmler, G. y Hagemann, D. (2006). *Differentielle Psychologie und Persönlichkeitsforschung*. 6ta edición. Stuttgart: Verlag W. Kohlhammer.

Anderson, B. (1981). *The Complete Thinker. A Handbook of Techniques for Creative and Critical Problem Solving*. New Jersey: Prentice-Hall.

Andler, D. (2004). *Introduction aux sciences cognitives*. Paris: Gallimard.

Araya, R. (2004). *Inteligencia Matemática*. 2da edicion. Santiago: Editorial Universitaria.

Araya, R., Calfucura, P., Jiménez, A., Aguirre, C., Palavicino, M. A., Lacourly, N., Soto-Andrade, J. y Dartnell, P. (2010). The effect of analogies on learning to solve algebraic equations. En *Pedagogies: An International Journal.* (5), 216-232.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique: que rôle dans la recherche didactique aujourd´hui? En Les dossiers des Sciences de l´Education 8. Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes. *Revue Internationale des Sciences de l´Education.* Mirail : Presses Universitaires du Mirail.

Asanger, R. y Wenninger, G. (1999). *Handwörterbuch Psychologie*. Weinheim: BELTZ Psychologie Verlags Union.

Asendorpf, J. (2005). *Psychologie der Persönlichkeit*. 3. Auflage. Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

Barbosa, A. (2010). Patterning´s Problems: Sixth Graders ‘Ability to Generalize. En actas del Cerme 7, extraído de la pág. web: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/3/CERME7_WG3_BarbosaA.pdf

Barkow, J., Cosmides, L. y Tooby, J. (1992). *The adapted mind: Evolutionary psychology and the generation of culture*. Oxford: Oxford University Press.

Baldwin, A. (1974). Die Entwicklung von Intuition in Lernen, Motivation und Curriculum. En J. Bruner, *Lernen, Motivation und Curriculum ('Learning about Learning – A Conference Report').* Frankfurt: Athenäum Fischer Taschenbuch Verlag.

Bardy, P. (2007). Mathematisch begabte Grundschulkinder. Spektrum Akademische Verlag, München.

Barwise, J. y Etchemendy J. (1991). Visual information and valid reasoning. En W. Zimmermann y S. Cunningham, Visualization in Teaching and Learning mathematics. *Mathematical Association of America* (19), 9-24.

Baumert, J., Lehmann, R. y Lehrke, M. (1997): TIMSS mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J., Bos, W. y Lehmann, R. (2000a). TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Vol. 1, Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung am Ende der Pflichtschulzeit. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J., Bos, W. y Lehmann, R. (2000b). TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn, Bd. 2. Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.-J. y Weiß, M. (2001). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. (2000): Lehrplan für die bayerische Grundschule. Extraído el 07.07.2009 de la página web: http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp?MNAV=0yQNAV=4yTNAV=0yINAV=0ySTyp=1yLpSta=6yFach=30.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. (2004a): Lehrplan für die bayerische Gymnasium. Extraído el 07.07.2009 de la página web: http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp?MNAV=0yQNAV=4yTNAV=0yINAV=0ySTyp=14yLpSta=6yFach=30

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. (2004b): Lehrplan für die bayerische Hauptschule. Extraído el 07.07.2009 de la página web: http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp?STyp=27yLpSta=6yFach=30yMNAV=3yQNAV=4yTNAV=0yINAV=0.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. (2007): Lehrplan für die bayerische Realschule. Extraído el 07.07.2009 de la página web: http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp?MNAV=0yQNAV=4yTNAV=0yINAV=0ySTyp=5yLpSta=6yFach=30.

Bea, W. (1995). Stochastisches Denken. Wien: Peter Lang.

Becker, J.-P. y Shimada, Sh. (1997). *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Beth, E. W. y Piaget, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Biehler, R., Scholz, R. W., Sträßer, B. y Winkelmann, B. (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academics Publishers.

Bigalke, H.-G. (1984). Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen, Ausgabe N, Gymnasium, 8. Schuljahr. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg.

Blum, W., Drüke-Noe, Ch., Hartung, R. y Köller, O. (2007). *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlín: Cornelsen Scriptor.

Bock, H. y Walsch, W. (1975). Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. Berlín: Volk und Wissen Volkseigener.

Boley, E; Platz, F. y Wolf, H. (2003). *Bewegte Schule Bewegtes Lernen 3.* Leipzig: Klett.

Borba, M. y Villarreal M. (2005). *Humans-with- Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* United States of America: Springer.

Borovcnik, M. (1992). *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik.* Mannheim: Bibliograhisches Institut u. F.A. Brockhaus.

Borromeo R. (2004). *Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Bortz, J. y Döring, N. (2006). Forschungsmethoden und Evaluation: für Human und Sozialwissenschaftler. 3ra edición, Berlín: Springer.

Bos, W., Bonsen, M., Baumert, J., Prenzel, M., Selter, Ch. Y Walther, G. (2008): TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich. Münster.

Bösel, R. (2001): Denken, Ein Lehrbuch. Hogrefe Verlag für Psychologie, Göttingen.

Brousseau, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1999): Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Traducción con fines de trabajo educativo sin referencia. Reeditado como documento de trabajo para el PMME de la UNISON por Hernández y Villalba.

Brousseau, G. (2007): Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruder, R. y Müller, H. (1990). Heuristisches Arbeiten im Mathematikunterricht beim komplexen Anwenden mathematischen Wissens und Können. *Mathematik in der Schule.* (28) 876–886.

Bruder, R. (2003): Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms »Sinus« zur »Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts«. Extraído el 25.06.2009 de la página web: http://www.sinus-transfer.uni-bayreuth.de/uploads/media/Bruder_Referat.doc

Bruner, J. (1971): Toward a Theory of Instruction. Fifth printing. Cambridge: The Belknap prees of Harvard University.

Brunner, E.J. (2001). Lehrer-Schüler-Interaktion. En D. H. Rost, Handwörterbuch Pädagogische Psychologie, 3ra edición. Weinheim: Psychologie VerlagsUnion.

Brunstig-Müller, M. (1997): *Wie Kinder denken oder denken, sie denken.* Ein metakognitiver Interventionsansatz. Edition SZH/SPC (der Schweizerischen Zentralstelle für Heilpädagogik Luzern). Biel: Druckerei Schüler AG.

Bucher, W. (2000): *Bewegtes Lernen*. Schondorf: Hofmann.

Bundy, A. (1975). *Analysing mathematical proofs (or reading between the lines).* Edinburg: University of Edinburg.

Butterworth, B. (2010): Stability and Change in Basic Numerical Capacities and the Foundations of Arithmetic. En J. Haack, H. Wiese, A. Abraham y Ch. Chiarcos, 10th Biannual Meeting of the German Society for Cognitive Science, KogWis 2010. Potsdam: Universitätsverlag.

Butto, C. y Rojano, T. (2004): Introducción Temprana al Pensamiento Algebraico: abordaje basado en la geometría. México: Santillana.

Calvin, W. (2009). Wie das Gehirn denkt. München: Elsevier.

Caluori, F. (2004): Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern – Theoretische Modelle und empirische Befunde. Disertación para el grado de Doctor en filosofía. Versión extraída de la pág. Web: http://deposit.ddb.de/cgi-bin/dokserv?idn=970649851&dok_var=d1&dok_ext=pdf&filename=970649851.pdf

Castelló, A. Y Batle, C. (1998). Theoretical Aspects of Gifted and Talented: A Protocol Model. *Faisca*. 6, 26-66.

Castelnuovo, E. (1966). Geometría Intuitiva. Barcelona: Labor.

Castro, J. (2001): *Metodología de la investigación*, *Fundamentos* 1. Salamanca: Amarú.

Craig, A. (2009): Comparing Research into Mental Calculation Strategies in Mathematics Education and Psychology. En M. Joubert, Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 29(1).

Cohors-Fresenborg, E. (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. En *Der Mathematikunterricht* (47)1, 5-13.

Cohors-Fresenborg, E. y Kaune, C. (2005): The Metaphor "Contracts to deal with Numbers" as a Structuring Tool in Algebra. In M. Bosch, Proceedings of CERME 4, 300 – 310.

Cofre, A. y Tapia, L. (2009): *Cómo Desarrollar el Razonamiento Lógico Matemático.* Santiago: Editorial Universitaria.

DeMarois, P y Tall, D. (1996): Facets and Layers of the Function Concept. En Proceedings of PME 20, 297–304.

Damerow, P. (1996). Abstraction and Representation. Essay on the Cultural Evolution of Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Danner, H. (1994): Methoden geisteswissenschaftlicher Pädagogik. 3ra edición. München: Reinhardt.

Davis, R. (1983). Complex Mathematical Cognition. In H. Ginsburg, *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press, 253-290.

Dehaene, S. (1999). Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. Basel: Birkhäuser.

Dehaene, S. y Brannon, E. (2011): *Space, Time and Number in the Brain*. Ámsterdam: Elsevier.

Devlin, K. (2006). *Das Mathe - Gen*. 5 Edición. München: Deutscher Taschenbuch.

Dittmann, H. (1987). *Komplexe Zahlen*. 4ta edición. München: Bayerischer Schulbuchverlag.

Douady, R. (1996): Ingeniería Didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En E. Barbin y R. Douady. *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas.* S. C.: Topiques éditions.

Doering, W y Doering, G. (1996): Wahrnemung ein Thema ohne Ende? En W. Doering, W. Doering, G. Dose, M. Stadelmann, Sinn y Sinne im Dialog. Dortmund: Borgmann Publishing. 13-18.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall, Advanced Mathematical Thinking. Netherlands: Kluwer Academics Publishers. 95-123.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. y Zazkis R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mtahematics* 27, 267 – 305. Netherlands: Kluwer Academics Publisher.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de educación y Pedagogía.

Edelman, G. M. (1987). Neural Darwinism; the theory of neuronal group selection, New York: Basic Books.

Edelman, G. M. (1992). Bright air, brilliant fire; On the matter of mind, London: Penguin.

Engel, A. (1998): *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer.

English, L. D. (1997): *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Eves, H. (1983). *An Introduction to the History of Mathematics*. 5ta edición. Philadelphia: The Saúnders series.

de Farias, E. (2001): La tecnología y sus múltiples representaciones. En *Innovaciones educativas*: Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias. 2-5.

Fast, M. (2005): Mathematische Leistung und Intellektuelle Fähigkeiten. Integrative Begabungsförderung bei Sechs- bis Zehjährigen. Begabungskultur, (5). Wien: LIT Verlag.

Fenk, A. (2009). Semiotische Dreiecke als Problem für den radikalen Konstruktivismus. En: V.A. Munz, K. Puhl, y J. Wang (eds.), *Language and World. Contributions of the 32nd International Wittgenstein Symposium, Vol. XVII.* Kirchberg am Wechsel: The Austrian Ludwig Wittgenstein Society, 123-126.

Fischbein, E. (1975): The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fischer, G. (2008): *Lehrbuch der Algebra.* Wiesbaden: Vieweg.

Flessas, J. y Lussier F. (2005): *La neuropsychologie de l'enfant*. Paris: Dunod.

Flick, U. (2010): *Qualitative Forschung, ein Handbuch*. Reinbeck: Rowohlt.

Frauenfelder, U. y Floccia, C. (1999): Das Erkennen gesprochener Wörter. En A. D. Friederici, *Sprachrezeption*. Göttingen: Hogrefe Verlag für Psychologie. (2) 1-48.

Freudenthal, H. (1974): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Vol. I. Stuttgart: Klett Studienbücher.

Freudenthal, H. (1979): Mathematik als pädagogische Aufgabe. 2. Edición. Band II. Stuttgart: Klett Studienbücher.

Freudenthal, H. (1987): Theoriebildung zum Mathematikunterricht. En *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* ZDM, vol. 3, 96-103.

Funke, J. (2006): *Enzyklopädie der Psychologie*. Serie II Kognition, Vol. 8, Denken und Problemlösen. Göttingen: Hogrefe.

Fuson, K. y Hall, J. (1983): The Acquisition of Early Number Word Meanings: A conceptual Analysis and Rewiew. En H. Ginsburg, *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press. 49-107.

Gardner, H. (2009): Estructuras de la mente. La Teoría de las inteligencias múltiples. 7ma edición en español. Mexico: Fondo de la cultura económica.

Gallistel, Ch. (1998): Symbolic Processes in the Brain: The Case of Insect Navigation. En D. Scarborough y S. Sternberg, Methods, Models, and Conceptual Issues, An invitation to Cognitive Science. Massachusets: MIT Press, (4) 1-51.

Gras, R. (1996): *L`implication Statistique. Nouvelle méthode exploratoire de donnèes*. La Pensée Sauvage, éditions, Francia.

Gras, R. (2005): Panorama du développement de l`A.S.I. à partir de situations fondatrices. Troisièmes Rencontres Internationales, Palermo, Italia. Extraído en febrero del 2010 de la página web: http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_05_gras_1.pdf

Graumann, G. (1982): Es muss wieder mehr Kopfrechnen und Kopfgeometrie betrieben werden!. *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 16. Bundestagung für Didaktik der Mathematik.* Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Gerstenmaier, J. (1995): Einführung in die kognitionspsychologie. München: Ernst Reinhardt Verlag.

Glasersfeld, E. (1987). *Wissen, Sprache und Wirklichkeit*. Braúnschweig: Vieweg.

Glasersfeld, E. (1991). Radical Constructivism in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goatly, A. (2011). *The Language of Metaphors*. 2da edición, New York: Routledge.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Gutiérrez, R. (2010). *Estudio cognitivo-contrastivo de las metáforas del cuerpo*. Frankfurt: Peter Lang.

Goleman, D., Kaufman, P. y Ray, M. (1997): Kreativität entdecken. München: Hanser.

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Haas, N. (2000): *Das Extremalprinzip als Element mathematischer Denk- und Problemlöseprozesse*. Hildesheim: Franzbecker.

Habermas, J. (1982). *Theorie des kommunikativen Handelns*. Tomos I, II, Frankfurt: Suhrkamp.

Habermas, J. (1984). Vorstudien und Ergänzungen zur Theorie des kommunikativen Handelns. Frankfurt: Suhrkamp

Hayes, N. (1995). Kognitive Prozesse - eine Einführung. In J. Gerstenmaier (eds.), *Einführung in die Kognitionspsychologie*. München: Ernst Reinhardt. 11-40.

Hefendehl-Hebeker, L. (2007): Algebraisches Denken- was ist das? En *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hildesheim: Franzbecker. 148-151.

Hendriks-Jansen, H. (1996). Catching ourselves in the act: Situated activity, interactive emergence, evolution and human thought. Cambridge: MIT.

Hengartner, E., Hirt, U. y Wälti, B. (2007): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Zug: Klett und Balmer.

Hermann, A. (1994): Einstein, Der Weltweise und sein Jahrhundert, Eine Biographie. Editorial Piper. München, Alemania.

Heller, A. y Ziegler, A. (2007). *Talentförderung Expertise Entwicklung Leistungsexzellenz.* Berlin: LIT Verlag Dr. W. Hopf.

Herbart, J. F. (1887). Pestalozzi's Idee einer ABC der Anschauung als ein Cyclus von Vorübungen im Auffassen der Gestalten. En *Johan Friedrich Herbart's Werke*. Langenzala: Hermann Beyer & Söhne.

Hesse, Ch. (2009): Das kleine Einmaleins des klaren Denkens. München: Verlag C. H. Beck oHG.

van Hiele, P. (1999) Developing Geometric Thinking through Activities that Begin with Play. *Teaching Children Mathematics.* 310-316

vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

vom Hofe, R. (1996): Neue Beweglichkeit beim Umgang mit Funktionen. *Mathematik lehren*, *78*, 50-54.

vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: normative, descriptive and constructive aspects. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick, *Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity*. Great Britain: Kluwer Academic Publishers.

Höfer, Th. (2006): Funktionales Denken ganzheitlich fördern. Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Hoffstadt, Ch. (2009): *Denkräume und Denkbewegungen, Untersuchungen zum metaphorischen Gebrauch der Sprache der Räumlichkeit*. Karlsruhe: Universitätsverlag.

Holz, M. (2005). *Repetitorium der Algebra*. 2da edición. Barsinghausen: Binomi.

Huamán-Arismendi, L. (2006). *Escuelas inclusivas para estudiantes talentosos y superdotados.* [versión electrónica]. Recuperado el 10 de diciembre de 2008 de http://portal.perueduca.edu.pe/basicaespecial/articulos/art03_10-03-06.doc

Hübner, S. (2000): Denkförderung und Strategieverhalten. Münster: Waxmann.

Hüther, G. (2009). *Die macht der inneren Bilder. Wie visionen das Gehirn, den Menschen und die Welt verändern*. Göttingen: Vandenhoeck y Ruprecht.

Jonassen, D.H. (1997). Instructional design model for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology: Research and Development, 45* (1), 65-95.

Jost, E., Baptist, P. y Beutelspacher, A. (2008). *Alles ist Zahl!* Köln: Kölner Univ.-Verlag.

Kadunz, G. (2003). *Visualizierung*. Wien: Profil.

Kandel, E.R. (2009). *Auf der Suche nach dem Gedächtnis – Die Entstehung einer neuen Wissenschaft des Geistes*, 2da edición. München: Siedler.

Kant, I. (1787). *Kritik der reinen Vernunft*. 2da edición. Vol. 3. Riga: (s. e.)

Käpnick, F. (2006). Intuitives Erfassen, Vortasten und Lösen – ein besonderer Problembearbeitungsstil mathematisch begabter Grundschulkinder. En *Tagungsband der 40. GDM-Bundestagung*. Osnabrück: Franzbecker.

Käpnick, F. (2007): Intuitionen – ein häufiges Phänomen beim Problemlösen mathematisch begabter Grundschulkinder. En *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Gemeinsamde Jahrestagung von DMV y GDM, 386-389.

Kephart, N. (1994). *El alumno retrasado*. 2da edición. Barcelona: Luis Miracle.

Kettler, M. (1998): *Der Symbolschock*. Frankfurt: Peter Lang.

Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems Com From?. En A. Schoenfeld, *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum. 123-147.

Klauß, H. (1986): *Zur Genealogie des wissenchaftlichen Bilcks*. Oldenburg: Bibliotheks- und Informationssystem der Universität Oldenburg.

Klemm, M. (1982). Symmetrien von Ornamenten und Kristallen. Berlín: Springer.

Knauff, M. (2006): Deduktion und logisches Denken. en Funke J. (2006): *Enzyklopädie der Psychologie.* Serie II Kognition, Band 8 Denken und Problemlösen. Göttingen: Hogrefe Verlag für Psychologie.

Knoblich, G. y Öllinger, M. (2006). Einsicht und Umstrukturierung beim Problemlösen. En J. Funke, *Enzyklopädie der Psychologie*. Serie II Kognition, Band 8 Denken und Problemlösen. Göttingen: Hogrefe Verlag für Psychologie.

Köckenberger, H. (2000). Emotionen bewegen leibhaftig. *Praxis der Psychomotorik 1.* Dortmund.

Krosnick, J. A. (1999): Maximizing Questionnaire Quality. En J. P. Robinson, P. R. Shaver y L. S. Wrightsman, *Measures of Political Attitudes*. San Diego: Academic. 37-57.

Krüger, K. (2000). *Erziehung zum Funktionalen Denken*. Berlin: Logos.

Kühnel, J. (1920). *Gedanken über Lehrerbildung, eine Gegenschrift*. Leipzig: Klinkhardt.

Lakoff, G. and M. Johnson (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. y M. Johnson (1999). *Philosophy in the Flesh. The embodied mind and its challenge to western thought*. New York: Basic Books.

Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York: Basic Books.

Laborde, C. (1990): Language and Mathematics. En *Mathematics and Cognition*. Cambridge: University Press.

Lamnek S. (1988): *Qualitative Sozialforschung*. Weinheim: Psychologische Verlags-Union.

Largier, N. (2012). Zahlenmuster als Metonymie. Zwischen *Figura Mystica*, Mnemotechnik und Metamorphose. En M. Wedell, *Was Zählt*. Köln: Böhlau. 209-218.

Lars, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *Journal of Mathematical Behavior*, 10.1016.

Lee, L. (1996): An initiation into algebraic culture through generalization activities. En N. Bednarz, *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching,* Dordrecht: Kluwer. (18), 87-106.

Lehr, U. (1999): Gerontopsychologie. Pag. 232-237 en R. Asanger y G. Wenninger, *Handwörterbuch Psychologie*. Weinheim: BELTZ Psychologie Verlags Union.

Leron, U., Hazzan, O. y Zazkis, R. (1995). Learning Group Isomorphism: A Crossroads of Many Concepts. *Educational Studies in Mathematics* 29, 153 – 174.

Lesch, R. y Kelly, A. (1994). Action-Theoretic and Phenomenological Approach to Research in Mathematics Education: Studies of Continually Developing Experts. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 277-286. (1994). Dordrecht: Kluwer Academics Publishers.

Leuders, T. (2003): *Mathematik Didaktik, Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Leuders, T. (2010): *Erlebnis Arithmetik. Zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten*. Heidelberg: Sprektrum Verlag.

Lucena, N. (2002). *Diccionario de uso del español de América y España*. Primera edición. Barcelona: SPES-VOX.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren, Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Maier, P.H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth: Auer.

Maier, H. y Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache*. Wien: Öbv y hpt Verlagsgesellschaft.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, Problem Solving, Cognition. 2da edición.* New York: W. H. Freeman.

Mayer W. (2003). *Lösungsstrategien für mathematische Aufgaben*. 2da edición. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Margulies, N. (2000): *Cartografia de nuestro espacio interno*. Caracas: Ediciones cartografía mental computarizada.

Marland, S. P. (1972). *Federal policy and educational technology before the annual meeting of the Education Commission of the States United*. Washington: U.S. Dept.of Health, Education, and Welfare.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley Publisching Company.

Mason, J. (1989): Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the learning of mathematics*. 9(2), 2-8.

Mason, J. (1996): Expressing Generality and roots of Algebra. En N. Bednarz, *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching,* Dordrecht: Kluwer. (18), 65-86.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: The Open University.

Mason, J. (2006). Micro-Structure of Attention in the Teaching and Learning of Mathematics. *Canterbury Mathematical Association Newsletter (June)*. 2-6.

Maturana, H. & VARELA, F. (1980): *Autopoiesis and cognition. The realization of the living*. Boston: Reidel.

Maturana, H. y Varela, F. (2007). *El árbol del conocimiento*. 19na edición. Santiago: Editorial Universitaria

Meyerhöfer, W. (2003). Objektiv-hermeneutische Interpretation der internationalen PISA-Aufgabe „Bauernhöfe". U Potsdam. Documento extraído de la pág. Web: www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/am/Veroe/bauernhoefe.doc.

Menghini, M. (2006). The Role of Projective Geometry in Italian Education and Institutions at the End of the 19th Century. En *International journal for the history of Mathematics Eduaction*, (1), 35-55.

Mönks, F. y Ypenburg I. (2005): *Unser Kind ist hochbegabt, ein leitfaden für Eltern und Lehrer*. 4ta edición. München: Ernst Reinhardt Verlag.

Moritz, K. P. (1790). *Neues A. B. C. Buch, welches zugleich eine Einleitung zum Denken für Kinder enthält*. Berlín: Schöne.

Nuñéz, R. (2008): Conceptual Metaphor, Human Cognition and the Nature of Mathematics. En W.-R. Gibbs Jr. *The Cambridge Handbook of Metaphor and Thought*. Cambridge: University Press. (19), 339-362.

Obersteiner, A., Dresler, T. y Vogel, C. (2008): *Was passiert im Gehirn beim Kopfrechnen?*. Schwabmünchen: Leonhard-Wagner-Realschule.

Oehl, W. (1967). *Der Rechenunterricht in der Hauptschule (fünftes bis achtes Schuljahr); didaktisch-methodische Überlegungen und Hinweise für die tägliche Unterrichtsarbeit*. Hannover: Schroedel Verlag.

OECD. (2001): *Lernen für das Leben. Erste Ergebnisse der Internationalen Schulleistungsstudie PISA 2000*. Paris: OECD.

OECD. (2004): *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003*. Paris: OECD.

OECD. (2007): *PISA 2006*. Vol. 2. Paris: OECD.

OECD. (2009): *Equally prepared for life? How 15-year-old boys and girls perform in school*. Paris: OECD

OECD. (2010): *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do. Student Performance in Reading, Mathematics and Science*. Vol. 1. Paris: OECD.

Olfos, R. (1981): *Grupos: En Pos De Un Objetivo General*. Memoria para optar al Título de Profesor de Estado. Valparaíso: Universidad Católica de Valparaíso.

Padberg, F. (2005). *Didaktik der Arithmetik*. München: Spektrum.

Parzysy, B., Kadunz, G., Robotti, E. y Rogers, L. (2008): The role of images and metaphors in the learning and understanding of mathematics (including embodied cognition). En *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Osnabruck: European Society for Research in Mathematics Education, 84-89.

Palmer, S. E. (1978): Fundamental aspects of cognitive representation. En E. Rosch y B. B. Lloyd (Eds.). *Cognition and Categorization*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 259 – 303.

Parra, C. y Saiz, I. (1995). *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones*. Buenos. Aires: Editorial Paidós.

Pavel, S. A. (2007). *Einführung in die Gruppentheorie.* Frankfurt: Harri Deutsch.

Pegg, J. y Davey, G. (1991). Levels of Geometric Thought. *The Australian Mathematics Teacher.* (7) 2.

Pestalozzi, J.-H. (1803). *Fabeln*. 2da edición. Basel: Flick

Piaget, J. (1999). *Über Pädagogik.* Weinheim: Beltz Verlag.

Piaget, J. (2003). *Meine Theorie der geistigen Entwicklung*. Traducción de R. Fatke y H. Kober. Weinheim: Beltz Verlag.

Picon, D. (s.a.). *Optische Täuschungen*. Königswinter: Tandem.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically. Comunications in Mathematics Classrooms*. London: Routledge.

Pimm, D. (1992). *Mathematics: Symbols and Meanings*. London: The Open University.

Polya, G. y Szegö, G. (1970). *Aufgaben und lehrsätze aus der Analysis I*. 4ta edición. Heidelberg: Springer.

Polya, G. (1995). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. 4ta edición, Tübingen: A. Franke.

Pöppel, E. (2000). *Grenzen des Bewußtseins: wie kommen wir zur Zeit, und wie entsteht Wirklichkeit?* Leipzig: Insel.

Porst, R. (2000). Question Wording- Zur Formulierung von Fragebogen-Fragen. Gesis ZUMA, *How-to-Reihe*, Nr. 2, extraído de la pág web: http://www.gesis.org/fileadmin/upload/forschung/publikationen/gesis_reihen/howto/how-to2rp.pdf?download=true.

Porst, R. (2008). *Fragebogen. Ein Arbeitsbuch*. Wiesbaden: VS.

Potari, D. y Jaworski, B. (2002). Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 5, 4, 351-380.

Preiß, G. (1996). Beiträge einen Neurodidaktik. En: G. Eberle y R. Kornmann, *Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Sonderschulen*. Weinheim: Deutscher Studien.

Presmeg, N. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. En L. D. English*, Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. London: Lawrence Erlbaum. 267-279.

Rauh, G. (1989). Präpositionengesteuerte Metaphorik. En C. Habel, M. Herweg y K. Rehkämper, *Raumkonzepte in Verstehensprozessen*. Tübingen: Niemeyer, 249-282.

Reeves, A. (1996). Temporal Resolution in Visual Perception, En W. Prinz y B. Bridgeman, *Handbook of Perception and Action*. Vol. I. London: Academic Press. 11-24.

Reyes-Santander, P. (2010). *Mathematische Knobelgeschichten*. Bad-Honnef: Lehrerselbst-Verlag.

Reyes-Santander, P. y Ramos-Rodriguez, E. (2010). An Experience with Wireless Technology and Outstanding Students of Mathematics. En V. Ulm y T. Bianco, *Mathematics Education with Technology, Experiences in Europe*. Augsburg: University of Augsburg. 244-259.

Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction.* New York: Erlbaum.

Richland, L.-E., Holyoak, K.-J. y Stigler, J.-W. (2004). Analogy Used in Eigth-Grade Mathematics Classroom. *Cognition and Instrution.* 22(1), 37-60.

Riding, R. (2001). The nature und effects of cognitive style en perspectives on thinking. En R. Sternberg, L.-F. Zhang, *Perspectives on Thinking, learning and Cognitives Styles.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum. 39-59.

Rivero, F. (2006). Simetrías en el cubo: Un paseo por la teoría de los grupos. Extraído de la página Web: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/algebra2/sime_cubo.pdf

Roth, E. (1989). Kognition und Emotion: Der Problembereich. En E. Roth, *Denken und Fühlen*. Heidelberg: Springer. 3-16.

Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Berlin: Franzbecker.

Royo, P. (2009): Revisión de destrezas númericas con un enfoque competencial. En *Indivisa, Boletín de estudios e investigación.* XII, 283-297.

Ruf, U. y Gallin, P. (1998): *Dialogisches lernen in Sprache und Mathematik*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Rumelhart, D. E. y McClelland, J. L. (1987). Parallel distributed processing; Explorations in the microstructure of cognition. *Foundations* (1). Cambridge: MIT Press.

Rumelhart, D. E, Hinton, G. E. y McClelland, J. L. (1987). A general framework for PDP. En D. E. Rumelhart, J. L. McClelland y the PDP research group Parallel distributed processing; Explorations in the microstructure of cognition, *Foundations*. Cambridge: MIT Press. (1) 45 - 76.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Editorial Zorzal.

Sattlberger, E. (2006): Kreativität im Mathematikunterricht oder ein Plädoyer für Schokolade und Wasser. En *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, 38.

Saxe, G. y Posner, J. (1983): The development of Numerical Cognition: Cross-Cultural Perspectives. In H. Ginsburg, *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press, 291-317.

Schmidt, W. M. (2000): Die Kunst im formalen Denken anhand zweier Beispiele der Zahlentheorie. En R.E. Burkard, W. Maass y P. Weibel, *Zur Kunst des formalen Denkens*. Wien: Passagen Verlag. 91-99.

Schnotz, W. y Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. *Zeitschrift für experimentelle Psychologie,* 46, 217-236.

Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on Doing and Teaching Mathematics. En A. Schoenfeld, *Mathematical Thinking and problem Solving.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 53-70.

Schröder, J. (2001). Die sprache des denkens. Würzburg: Königshausen y Neumann.

Schulze, T. (1997). Interpretation von autobiographischen Texten. En Friebertshäuser B., Prengel A. *Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft*. München: Juventa Verlag. 323-340.

Schwank, I. (2003). Einführung in funktionales und prädikatives Denken. En Themenheft: Zur Kognitiven Mathematik, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM). 35(3), 70-78.

Schwank, I. (2007). Einführung zum Minisymposium „Neurowissenschaftliche Grundlagen mathematischen Denkens“. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 348-349.

Schwank, I. y Nowinska, E. (2007): Zur Vorbereitung algebraischen Denkens. En L. Hefendehl-Hebeker y I. Schwank, *Entwicklung des algebraischen Denkens*. Preprint para el Minisymposium D05 der gemeinsamen Jahrestagung von DMV und GDM in Berlin. *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker. 116-119.

Schwank, I. (2009): Mädchen und Jungen fördern – Kognitive Grundlagen kennen. *KLEXER, magazin für die Grundschule* (23) 3-5. Cornelsen.

Schwank, I. (2011): Arithmetisches Denken pflegen. Revisado diciembre 12, 2011 en http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/bzmu2011/_BzMU11_2_Einzelbeitraege/BzMU11_SCHWANK_Inge_Denken_.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(3), 1 – 36.

Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *For the learning of mathematics.* (14, 1), 44-55.

Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. En L. D. English, *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. London: Lawrence Erlbaum Associates. 339-371.

Sfard, A. y Kieran, C. (2001). Cognition as commúnication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students’ mathematical interactions. Mind, Culture, and Activity, 8(1), 42-76.

Sfard, A. (2008). Thinking as Commúnicating. Human Development, the Growth of Discourse, and Mathematizing. Cambridge: University Press.

Shanon, B. (1993). *The representational and the presentational.* New York: Harvester/Wheatsheaf

Siegler, R.S. y Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale: Erlbaum.

Silver, E. (1987). Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem-Solving Instruction. En A. Schoenfeld, *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum. 33-60.

SINUS Bayern, (2007): Vorstellungen aufbauen. *Beiträge zur Weiterentwicklung des mathematisch- naturwissenschaftlichen Unterrichts.* Regensburg: Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. 16-29

Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l’apprentissage des maths. *Ann. Didactique Sciences Cogn.*, 11, 123– 147.

Soto-Andrade, J. (2007a). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. En D. Pitta-Pantazi, y J. Philippou, *Proceedings CERME 5*. 191-200.

Soto-Andrade, J. (2007b). La cognición hecha cuerpo florece en metáforas. En A. Ibañez y D. Cosmelli, *Nuevos Enfoques de la Cognición : Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad*. Santiago: Universidad Diego Portales. 71-90.

Soto-Andrade, J. y Reyes-Santander, P. (2011): Conceptual Metaphors and "Grundvorstellungen": A case of Convergence. Extraído de la pág. Web: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/11/CERME7_WG11_Soto-Andrade.pdf

Speiser, A. (1948). La notion de groupe et les arts. En F. Le Lionnais, Les grands courants de la pensée mathématique. *Cahiers du Sud*, 475 – 479.

Spitzer, M. (2007). *Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens*. München: Spektrum Akademisches Verlag.

Stadler, M., Seeger, F. y Raeithel, A. (1975). *Psychologie der Wahrnemung*. München: Juventa.

Steiner, H.-G. (1968). Examples of Exercises in Mathematización on the Secondary School Level. En H. Freudenthal, *Educational Studies in Mathematics*. Holland: D. Reidel. 181-201.

Steiner, R. (1988). Über Metaphern, Modelle und Mathematik. En P. Bender, *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*. Berlin: Cornelsen.

Steiner, R. (2009). *Die zwölf Sinne des Menschen*. 6ta Edición. Dornach: Rudolf Steiner.

Steinbring, H. (1998): Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* ZDM. (5), 161-167.

Sternberg, R. J. (1985) *Beyond IQ: A Triarchic Theory of Intelligence*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (1996): What is Mathematical Thinking? En R.J. Sternberg y T. Ben-Zeev, *The Nature of Mathematical Thinking*. New Jersey: Lawrence Erlbaum. 303-318.

Sternberg, R. J. (1997) A Triarchic View of Giftedness: Theory and Practice. En N. Coleangelo y G. A. Davis, *Handbook of Gifted Education*. Boston: Allyn and Bacon. 43-53.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall, Advanced Mathematical Thinking. Netherlands: Kluwer Academics Publishers. 3-21.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, *Proceedings of PME 19*. (1), 161-175.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop, *International Handbook of Mathematics Education*,. Netherlands: Kluwer. 289-325.

Tall, D. (1997): Metaphorical objects in Advanced Mathematical Thinking, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. (1), 61–65.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*. (12), 151-169.

Thomas, L. E., y Lleras, A. (2009). Swinging into thought: directed movement guides insight in problem solving. Psychonomic Bulletin y Review, 16, 719-723

Thompson, P. y Sfard, A. (1994): Problems of reification: Representations and mathematical objects. En D. Kirshner, *Proceeding of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (1) 1-32.

Thurstone, L.L. (1924): *The Nature of Intelligence*. Westport, Connecticut: Greenwood Press.

Ulm, (2004): *Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen*, Sekundarstuffe. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Ulm, V. (2010). Mathematisches Denken und mathematische Begabung. En V. Ulm. *Mathematische Begabungen fördern*. Berlin: Cornelsen Scriptor. 3-7.

Varela, F. (1997). Erkenntnis und Leben. En F. B. Simon, *Lebende Systeme. Wirklichkeitskonstruktionen in der Systemischen Therapie.* Frankfurt am main: Suhrkamp. 52-48.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psichology of mathematics education. En P. Necher y J. Kilpatrick, *Mathematics and Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1991). El *niño, las matemáticas y la realidad*. México: Editorial Trillas.

Vygotskij (1966). *Thought and language*. Edited and translated by E. Hanfmann and G. Varkar. Cambridge: MIT Press.

Vollrath, H.-J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *ESTM*. (17), 387-400.

de Vries, R. (1998). *Zur Bedeutung der Abstraktion im Mathematikunterricht*. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Watson, A. y Mason, J. (1998). *Questions and prompts for mathematical thinking*. Derby: ATM.

Weber, C. (2007). *Mathematische Vorstellungen bilden. Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der S. II*. Bern: HEP Verlag.

Weth, T. (1999): *Kreativität im Mathematikunterricht, Begriffsbildung als kreatives Tun*. Hildesheim: Franzbecker.

Wittenberg, A. (1963): *Bildung und Mathematik*. Stuttgart: Klett Verlag.

Wittmann, E.-Ch. (1995): Mathematics Education as „Design Science”. En *Educational Studies in Mathematics.* 29 (4), 355-374.

Wittmann, E.-Ch. y Müller, G. (2006a): Das Zahlenbuch 1, Lehrerband. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Wittmann, E.-Ch. y Müller, G. (2006b): Das Zahlenbuch 2, Lehrerband. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Wittmann, E.-Ch. y Müller, G. (2007a): Das Zahlenbuch 3, Lehrerband. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Wittmann, E.-Ch. y Müller, G. (2007b): Das Zahlenbuch 4, Lehrerband. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Wollring, B. (1994). Animistische Vorstellungen von Vor- und Grundschulkindern in stochastischen Situationen. *Journal für Mathematikdidaktik.* 15 (1/2), 3-34.

Wußing, H. (2009). *6000 Jahre Mathematik, Von Euler bis zur Gegenwart*. Berlin: Springer.

Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. *Cognitive Science.* 21, 179-217.

Zhang, J. y Norman, D. A. (1994). Representations in dristributed cognitive tasks. *Cognitive Science.* 18, 87-122.

Ziegler, G., Weigand, H.-G. y a Campo, A. (2008): Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik, Empfehlungen von DMV, GDM, MNU. Extraído de la página Web: http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf.

Zimmer, R. (2005): Handbuch der Sinneswahrnehmung, Grundlagen einer ganzheitlichen Bildung und Erziehung. 7ma Edición. Freiburg: Herder.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Visualization in Teaching and Learning mathematics. *Mathematical Association of America* (19).

Anexos

Anexo 1: Cuestionario 1

Fragebogen

Die Antworten werden in einer Doktorarbeit verwendet, die sich mit Gruppentheorie als Teil des Universitätsstudiums befasst. Darum wäre es wünschenswert, wenn Sie möglichst viele Fragen und diese so persönlich und objektiv als möglich beantworten.

1. Wie oft waren Sie anwesend? (bezüglich der ersten 7 Doppelstunden)

_ zwischen 4 und 6 Mal

_ 7 Mal

2. Welche Themen haben Ihnen am besten gefallen?

_ Gruppen

_ Restklassen

_ Ordnung und Zyklisch

_ Isomorphismus

_ Operationen von Gruppen auf Mengen Symmetrische Gruppe

_ Magische Quadrate

_ Symmetrien von Ornamenten, Parketten und Kristallen

_ Sonstige: ………………………………………………………………………..

3. Haben Sie etwas zur Gruppentheorie gelernt? Welche Inhalte?

4. Welche Themen sind Ihrer Meinung nach als Lehrstoff im Gymnasium geeignet – In welcher Klassenstufe?

_ Gruppen

_ Restklassen

_ Ordnung und Zyklisch

_ Isomorphismus

_ Operationen von Gruppen auf Mengen Symmetrische Gruppe

_ Magische Quadrate

_ Symmetrien von Ornamenten, Parketten und Kristallen

_Sonstige: …………………………………………………………………………..

5. Würden Sie gerne einen Kurs zur Vertiefung der Kenntnisse der Gruppentheorie belegen?

_Ja, ……………………………………………………………………………….

_Nein,………………………………………………………………………..........

6. Könnten Sie sich vorstellen, dass durch die Beschäftigung mit diesem 7 Themen Schüler bzw. Studenten auf andere Art und Weise zu denken lernen? Wie?

7. Glauben Sie, dass Gruppentheorie Bestandteil des Lehramtsstudiums sein sollte? Warum?

8. Allgemeine Bemerkungen:

Vielen Dank für Ihre Bemühungen!

Sollten Sie Wünsche und/oder Anregungen bezüglich des Fragebogens haben, stehe ich gerne zur Verfügung.

Pamela Reyes-Santander.

Anexo 2: Cuestionario 2.

Fragebogen

Die Antworten werden in einer Doktorarbeit verwendet, die sich mit Gruppentheorie als Teil des Universitätsstudiums befasst. Darum wäre es wünschenswert, wenn Sie möglichst viele Fragen und diese so persönlich und objektiv als möglich beantworten.

1. Wie oft waren Sie anwesend? (bezüglich der ersten 7 Doppelstunden)

2. Haben Sie etwas zur Gruppentheorie gelernt? Wenn ja, welche Inhalte?

3. Glauben Sie, dass man Gruppentheorie Gymnasialschülern beibringen kann (als Wahlfach)? (Falls "nein", machen Sie bitte mit Frage 6 weiter)

4. Sollte man es Ihrer Meinung nach in der Schule genau so lehren wie in der Universität? Warum?

5. Könnten Sie sich vorstellen, dass durch die Beschäftigung mit Gruppentheorie Schüler bzw. Studenten auf andere Art und Weise zu denken lernen? Wie?

6. Glauben Sie, dass Gruppentheorie Bestandteil des Lehramtsstudiums sein sollte? Warum?

7. Gibt es Veranstaltungen, die Ihnen wichtiger als „Gruppentheorie“ erscheinen? Welche?

8. Was von den sieben Stunden hat Ihnen am besten gefallen? Warum?

9. Würden Sie gerne einen Kurs zur Vertiefung der Kenntnisse der Gruppentheorie belegen?

10. Allgemeine Bemerkungen

Vielen Dank für Ihre Bemühungen!

Sollten Sie Wünsche und/oder Anregungen bezüglich des Fragebogens haben, stehe ich gerne zur Verfügung.

Pamela Reyes S.

Anexo 3: Secuencia Didáctica.

I. Was ist eine Gruppe? (Gruppenarbeit)

1. Betrachtet die folgenden Mengen mit der jeweils angegebenen Verknüpfung. Füllt die folgende Tabelle aus:

	(N,-)	(N,+)	(N,˙)	(Z,+)	(Z,˙)	(Q,+)	(Q\{0},˙)	(R,˙)
Ist die Verknüpfung abgeschlossen?								
Ist die Verknüpfung assoziativ?								
Gibt es ein Neutrales Element? Welches?								
Gibt es für jedes Element ein Inverses Element?								
Ist die Verknüpfung kommutativ?								

2. Die folgenden Paare sind Gruppen. Findet jeweils das neutrale Element und zu jedem Element das Inverse.

a) Die Potenzen von 10, d.h. $\{10^n | n \in \mathbf{Z}\}$, zusammen mit der Multiplikation.

Das neutrale Element ist:

Das inverse Element von 10^n ist:

b) Die Drehungen der Punkte der Ebene um ein fixes Zentrum zusammen mit der Operation $\circ$, welche bedeutet, eine Drehung nach der anderen auszuführen.

Das neutrale Element ist:

Das inverse Element der Drehung um 20° ist:

Das inverse Element der Drehung um 67° ist:

c) Die kartesische Ebene mit der Vektorsumme $\left(\mathbf{R}^2, +\right)$.

Das neutrale Element ist:

Das inverse Element des Vektors $(5;7)$ ist:

Das inverse Element des Vektors $(x;y)$ ist:

d) Die Menge aller umkehrbaren Abbildungen über einer Menge X, d.h. die Menge $Bij(X)=\{f:X\to X\ /\ f\ \text{ist umkehrbar}\}$, zusammen mit der Verknüpfung von Funktionen.

Das neutrale Element ist:

Das inverse Element der Funktion f ist:

II. Welche Ordnung hat diese Gruppe? (Einzelarbeit)

1. Gegeben seien die Menge der natürlichen Zahlen N und die gewöhnliche Operation der Addition. Wir bezeichnen die Teilmenge der geraden Zahlen mit **E** (engl.: even = gerade) und die Teilmenge der ungeraden Zahlen mit **O** (engl.: odd = ungerade).

a) Vervollständige die folgende Tabelle:

		Zweiter Summand	
	+	**E**	**O**
Erster Summand	**E**		
	O		

Damit wird eine Verknüpfung auf der Menge G ={**E, O**} definiert.

b) Ist diese Verknüpfung abgeschlossen? Warum?

c) Erfüllt diese neue Menge G zusammen mit der Addition das Assoziativgesetz? Warum?

d) Finde das neutrale Element und das inverse Element zu jedem Element der Gruppe G.

e) Ist die neue Menge G endlich oder unendlich? (Ordnung von G)

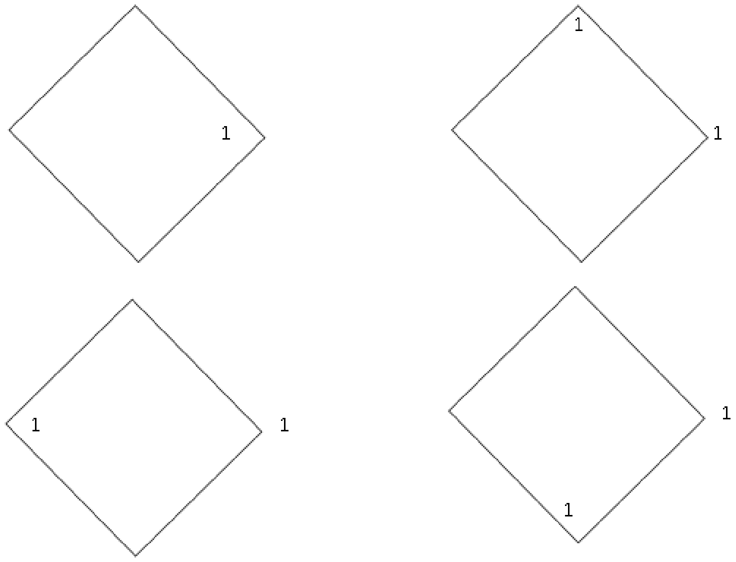
III. Wann sind Gruppen isomorph? (Puzzlearbeit)

Wenn Du mit den bisherigen Übungen fertig bist, bilde eine Arbeitsgruppe mit Mitschülern, die die Übung B bearbeitet haben.

1) Stelle deinen Mitschülern deine Aufgaben und Ergebnisse vor.
2) Worin gleichen und worin unterscheiden sich eure Ergebnisse?
3) Versucht in eurer Arbeitsgruppe die Frage "Wann sind zwei Gruppen isomorph?" zu beantworten. Sind die drei Beispiele isomorph?

IV. Drehungen des Quadrats (Einzelarbeit)

1) Eine mögliche Beschreibung der 4 Rotationen eines Quadrats ist die folgende:



a) Ist die Menge aller Drehungen des Quadrats eine Gruppe? Warum?
b) Die Erzeugenden dieser Gruppe sind:
c) Ist die Gruppe abelsch? Warum?
d) Die Ordnung der Gruppe ist:
e) Finde alle Untergruppen dieser Gruppe von Drehungen und die Ordnung aller dieser.

2) Bislang hast du Drehungen des regelmäßigen Vierecks, d.h. des Quadrats, untersucht. Nun kannst du dies auf beliebige regelmäßige n-Ecke erweitern. Zur Erinnerung: Wann nennt man ein n-Eck regelmäßig?

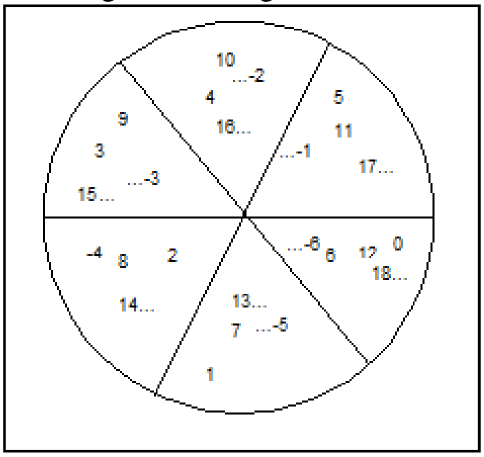
Zeichne ein regelmäßiges n-Eck für n = 2, n = 3 und n=6.			
Wie viele Drehungen bilden das n-Eck auf sich selbst ab?			
Welche Ordnung hat die Gruppe dieser Drehungen?			
Welche Untergruppen gibt es?			
Wie viele Erzeugende hat die Gruppe und welche sind es?			

a) Bestimme die Ordnung der Gruppe der Drehungen eines regelmäßigen n-Ecks.

b) In welchen Fällen bist du sicher, dass die Gruppe der Drehungen keine Untergruppen hat?

V. Viel mehr als eine Teilung (Gruppenarbeit)

1) Gegeben sei das folgende Arrangement von ganzen Zahlen:



a) Beschreibt jede der Teilmengen. Hinweis: Beginnt mit der Teilmenge, die die Null enthält.

b) Vervollständigt

- Da 234 = 6˙39 gilt, ist 234 in der Teilmenge _______
- Da 1345 = 2 + 6˙24 gilt, ist 1345 in der Teilmenge _______
- Da -31 = 5 +6˙(-6) gilt, ist -31 in der Teilmenge _______

Wählt aus jeder Teilmenge die kleinste ganze Zahl größer gleich 0. Bildet eine neue Menge G mit diesen Repräsentanten.

2) Definiert für die Menge dieser Repräsentanten eine Addition als innere Verknüpfung:

+						

Erläutert die im Folgenden gemachten Beobachtungen **an der Tafel.**

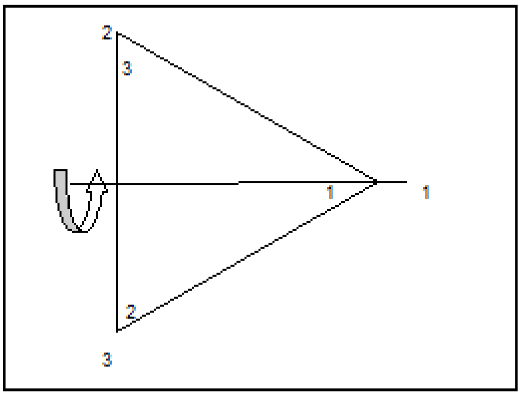
1. Ist $(G,+)$ eine abelsche Gruppe?
2. Die Ordnung von $(G,+)$ ist:

Wir nennen diese Gruppe G nun $\mathbf{Z}_6$.

3. Findet den oder die Erzeugenden der Gruppe $(\mathbf{Z}_6,+)$. Ist die Gruppe zyklisch?
4. Finde alle Untergruppen der Gruppe $(\mathbf{Z}_6,+)$
5. Die Ordnungen dieser Untergruppen sind:
6. Findet einen Bezug zwischen den Ordnungen der Untergruppen und der Ordnung der Gruppe.
7. Zu welcher Untergruppe von Drehungen ist die Gruppe $(\mathbf{Z}_6,+)$ isomorph? Beschreibt diesen Gruppenisomorphismus.

VI. Ist G eine abelsche Gruppe? (Gruppenarbeit)

Wir haben in der dritten Sequenz gesehen, was die Rotationen eines regulären Polygons mit n Seiten sind. Betrachten wir nun die drei Drehungen (im Gegenuhrzeigersinn) eines gleichseitigen Dreiecks und nennen sie $D_{0°}, D_{120°}, D_{240°}$. Wir wissen, dass diese drei Rotationen eine Gruppe bilden. Fügen wir zu der Menge (Gruppe) die folgende Spiegelung hinzu:



Wir werden sie S_1 nennen.

1) Welche Art Bewegung (Spiegelung, Drehung) erhält man, wenn man zuerst $D_{120°}$ und dann S_1 ausführt? Schreibweise: $S_1 \circ D_{120°} = ?$
2) Welche Art Bewegung erhält man, wenn man zuerst S_1 und dann $D_{120°}$ ausführt? Schreibweise: $D_{120°} \circ S_1 = ?$
3) Finde alle Bewegungen (Spiegelungen, Drehungen), die man mit einem gleichschenkligen Dreieck durchführen kann, wobei das Dreieck auf sich selbst abgebildet werden soll. Nenne die Menge G. Vervollständige die folgende Tabelle mit den gefundenen Bewegungen:

		Zweite Bewegung				
	$\circ$	$D_{0°}$	$D_{120°}$	$D_{240°}$	S_1	...
Erste Bewegung	$D_{0°}$					
	$D_{120°}$					
	$D_{240°}$					
	S_1					
	...					

4) Wir wissen, dass die Operation “$\circ$” assoziativ ist. Zeigt, dass die Menge G, aller Bewegungen, die das gleichseitige Dreieck fest lassen, eine Gruppe ist.
5) Ist die Gruppe kommutativ? (Ist es eine zyklische Gruppe?)
6) Findet mindestens drei Untergruppen von G.

VII. Was ist das? (Einzelarbeit)

Ulla bat Luther eine Aufgabe zu lösen. Als sie nach einem verregneten Tag nach Hause kommt, findet sie die folgenden noch lesbaren Auszüge einer Nachricht an ihrer Tür. (den Rest haben die Regentropfen unleserlich gemacht)

Liebe Ula:

...

befolgen:

$e * \bar{e} = e$ nämlich $\bar{e}$ ist neutrales Element in G.
$e * \bar{e} = \bar{e}$ nämlich e ist neutrales Element in G.

folglich ...

Viel Glück!

Luther.

1) Von was handelt die Aufgabe, um die Ulla Luther bat? Finde die Aufgabenstellung!

2) Vervollständige, was der Übung fehlt.

3) Welchen Schluss zieht Luther oder Ula.

VIII. Satz und Beweis (Puzzlearbeit)

Wenn Du mit den bisherigen Übungen fertig bist, bilde eine Arbeitsgruppe mit Mitschülern, die die Übungen A bearbeitet haben.

Stelle deinen Mitschülern deine Aufgaben und Ergebnisse vor.

1) Versucht gemeinsam die Frage “Was ist das?“ zu beantworten.

2) Begründet, dass für jede Gruppe $(G, *)$ Folgendes gilt:

a) Wenn $e \in G$ linksneutrales Element ist, dann ist es auch rechtsneutrales Element.

Anexo 4: Secuencia Didáctica.

I. Was ist eine Gruppe? (Gruppenarbeit)

1. Betrachtet die folgenden Mengen mit der jeweils angegebenen Verknüpfung. Füllt die folgende Tabelle aus:

	(N,-)	(N,+)	(N,˙)	(Z,+)	(Z,˙)	(Q,+)	(Q\{0},˙)	(R,˙)
Ist die Verknüpfung abgeschlossen?								
Ist die Verknüpfung assoziativ?								
Gibt es ein Neutrales Element? Welches?								
Gibt es für jedes Element ein Inverses Element?								
Ist die Verknüpfung kommutativ?								

2. Die folgenden Paare sind Gruppen. Findet jeweils das neutrale Element und zu jedem Element das Inverse.

a) Die Potenzen von 10, d.h. $\{10^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$, zusammen mit der Multiplikation.

Das neutrale Element ist:

Das inverse Element von 10^n ist:

b) Die Drehungen der Punkte der Ebene um ein fixes Zentrum zusammen mit der Operation $\circ$, welche bedeutet, eine Drehung nach der anderen auszuführen.

Das neutrale Element ist:

Das inverse Element der Drehung um 20° ist:

Das inverse Element der Drehung um 67° ist:

c) Die kartesische Ebene mit der Vektorsumme $(\mathbf{R}^2,+)$.

Das neutrale Element ist:

Das inverse Element des Vektors $(5;7)$ ist:

Das inverse Element des Vektors $(x;y)$ ist:

d) Die Menge aller umkehrbaren Abbildungen über einer Menge X, d.h. die Menge $Bij(X)=\{f:X\to X \;/\; f \text{ ist umkehrbar}\}$, zusammen mit der Verknüpfung von Funktionen.

Das neutrale Element ist:

Das inverse Element der Funktion f ist:

II. Welche Ordnung hat diese Gruppe? (Einzelarbeit)

1. Wir betrachten eine Strecke und ihren Mittelpunkt als Drehzentrum. Sei **E** die Drehung um 0°, **D** die Drehung um 180° und bezeichne $\circ$ Hintereinander-Ausführung der Abbildungen.

a) Vervollständige die folgende Tabelle:

		Zweiter Faktor	
	$\circ$	**E**	**D**
Erster Faktor	**E**		
	D		

Damit wird eine Verknüpfung auf der Menge G ={E, D} definiert.

b) Ist diese Verknüpfung abgeschlossen? Warum?

c) Erfüllt diese neue Menge G zusammen mit der $\circ$ das Assoziativgesetz?

d) Finde das neutrale Element und das inverse Element zu jedem Element der Gruppe G.

e) Ist die neue Menge G endlich oder unendlich? Welche Ordnung hat G?

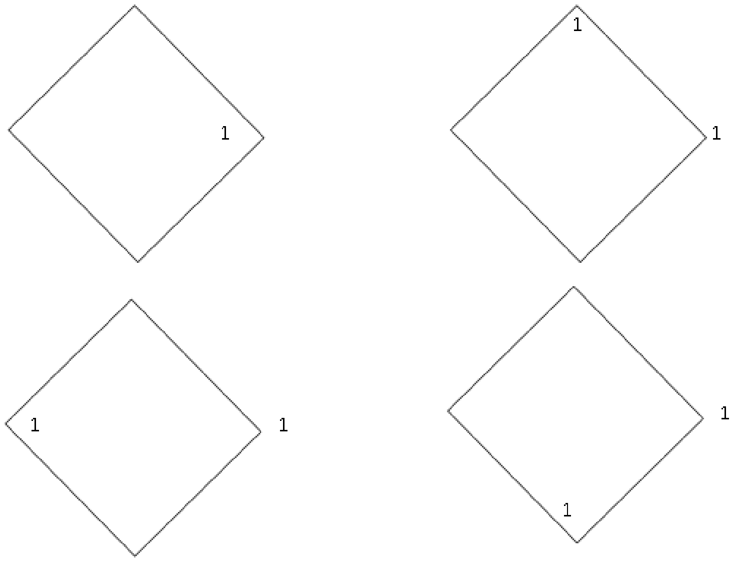
III. Wann sind Gruppen isomorph? (Puzzlearbeit)

Wenn Du mit den bisherigen Übungen fertig bist, bilde eine Arbeitsgruppe mit Mitschülern, die die Übung B bearbeitet haben.

1) Stelle deinen Mitschülern deine Aufgaben und Ergebnisse vor.
2) Worin gleichen und worin unterscheiden sich eure Ergebnisse?
3) Versucht in eurer Arbeitsgruppe die Frage "Wann sind zwei Gruppen isomorph?" zu beantworten. Sind die drei Beispiele isomorph?

IV. Drehungen des Quadrats (Einzelarbeit)

2) Eine mögliche Beschreibung der 4 Rotationen eines Quadrats ist die folgende:



a) Ist die Menge aller Drehungen des Quadrats eine Gruppe? Warum?
b) Die Erzeugenden dieser Gruppe sind:
c) Ist die Gruppe abelsch? Warum?
d) Die Ordnung der Gruppe ist:
e) Finde alle Untergruppen dieser Gruppe von Drehungen und die Ordnung aller dieser.

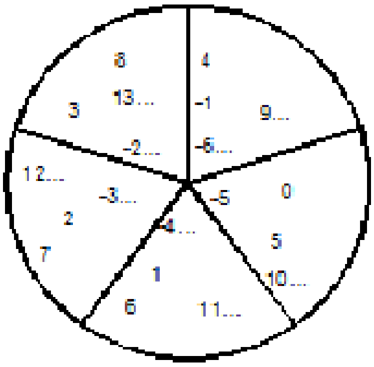
2) Bislang hast du Drehungen des regelmäßigen Vierecks, d.h. des Quadrats, untersucht. Nun kannst du dies auf beliebige regelmäßige n-Ecke erweitern. Zur Erinnerung: Wann nennt man ein n-Eck regelmäßig?

Zeichne ein regelmäßiges n-Eck für n = 2, n = 3 und n=6.			
Wie viele Drehungen bilden das n-Eck auf sich selbst ab?			
Welche Ordnung hat die Gruppe dieser Drehungen?			
Welche Untergruppen gibt es?			
Wie viele Erzeugende hat die Gruppe und welche sind es?			

a) Bestimme die Ordnung der Gruppe der Drehungen eines regelmäßigen n-Ecks.
b) In welchen Fällen bist du sicher, dass die Gruppe der Drehungen keine Untergruppen hat?

V. Viel mehr als eine Teilung (Gruppenarbeit)

1) Gegeben sei das folgende Arrangement von ganzen Zahlen:



a) Beschreibt jede der Teilmengen. Hinweis: Beginnt mit der Teilmenge, die die Null enthält.
b) Vervollständigt
   - Da $234 = 4 + 5 \cdot 46$ gilt, ist 234 in der Teilmenge _______
   - Da $1345 = 5 \cdot 269$ gilt, ist 1345 in der Teilmenge _______
   - Da $-31 = 4 + 6 \cdot (-7)$ gilt, ist -31 in der Teilmenge _______

Wählt aus jeder Teilmenge die kleinste ganze Zahl größer gleich 0. Bildet eine neue Menge G mit diesen Repräsentanten.
2) Definiert für die Menge dieser Repräsentanten eine Addition als innere Verknüpfung

+					

Erläutert die im Folgenden gemachten Beobachtungen an der Tafel.

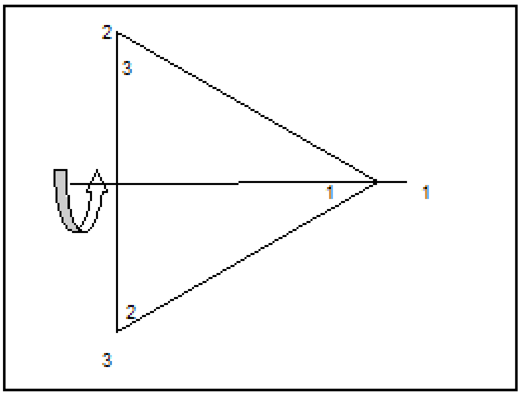
1. Ist $(G,+)$ eine abelsche Gruppe?
2. Die Ordnung von $(G,+)$ ist:

Wir nennen diese Gruppe G nun $\mathbf{Z}_5$.

3. Findet den oder die Erzeugenden der Gruppe $(\mathbf{Z}_5,+)$. Ist die Gruppe zyklisch?
4. Finde alle Untergruppen der Gruppe $(\mathbf{Z}_5,+)$. Wenn es keine gibt, überlege vor, warum das so sein könnte.
5. Zu welcher Untergruppe von Drehungen ist die Gruppe $(\mathbf{Z}_5,+)$ isomorph? Beschreibt, wenn möglich, diesen Gruppenisomorphismus.

VI. Ist G eine abelsche Gruppe? (Gruppenarbeit)

Wir haben in der dritten Sequenz gesehen, was die Rotationen eines regulären Polygons mit n Seiten sind. Betrachten wir nun die drei Drehungen (im Gegenuhrzeigersinn) eines gleichseitigen Dreiecks und nennen sie $D_{0°}, D_{120°}, D_{240°}$. Wir wissen, dass diese drei Rotationen eine Gruppe bilden. Fügen wir zu der Menge (Gruppe) die folgende Spiegelung hinzu:



Wir werden sie S_1 nennen.

1) Welche Art Bewegung (Spiegelung, Drehung) erhält man, wenn man zuerst $D_{120°}$ und dann S_1 ausführt? Schreibweise: $S_1 \circ D_{120°} = ?$
2) Welche Art Bewegung erhält man, wenn man zuerst S_1 und dann $D_{120°}$ ausführt? Schreibweise: $D_{120°} \circ S_1 = ?$
3) Finde alle Bewegungen (Spiegelungen, Drehungen), die man mit einem gleichschenkligen Dreieck durchführen kann, wobei das Dreieck auf sich selbst abgebildet werden soll. Nenne die Menge G. Vervollständige die folgende Tabelle mit den gefundenen Bewegungen:

		Zweite Bewegung				
	$\circ$	$D_{0°}$	$D_{120°}$	$D_{240°}$	S_1	...
Erste Bewegung	$D_{0°}$					
	$D_{120°}$					
	$D_{240°}$					
	S_1					
	...					

4) Wir wissen, dass die Operation "$\circ$" assoziativ ist. Zeigt, dass die Menge G, aller Bewegungen, die das gleichseitige Dreieck fest lassen, eine Gruppe ist.
5) Ist die Gruppe kommutativ? (Ist es eine zyklische Gruppe?)
6) Findet mindestens drei Untergruppen von G.

VII. Was ist das? (Einzelarbeit)

Antje schreibt der Lehrerin Folgendes an die Tafel:

$b*a=e$

$c*b=e$

$a*b=e*a*b=(c*b)*(a*b)=c*b*a*b=c*e*b=c*b=e$

Die glückliche Lehrerin stellt Antje folgende Fragen:

1) Wie bist du sicher, dass du die zweite Zeile schreiben darfst?

2) Bist du sicher, dass du die Klammern so verwenden darfst?

3) Warum bringst du das neutrale Element nach dem Gleichheitszeichen am Anfang der dritten Zeile ins Spiel?

4) Welchen Schluss hast du daraus gezogen? Bringe es in Verbindung mit der ersten Zeile.

5) Beantworte die Fragen, die die Lehrerin Antje stellt. (Hinweis: Beginne mit Frage4))

VIII. Satz und Beweis (Puzzlearbeit)

Wenn Du mit den bisherigen Übungen fertig bist, bilde eine Arbeitsgruppe mit Mitschülern, die die Übungen A bearbeitet haben.

1) Stelle deinen Mitschülern deine Aufgaben und Ergebnisse vor.

2) Versucht gemeinsam die Frage "Was ist das?" zu beantworten.

3) Begründet, dass für jede Gruppe $(G,*)$ Folgendes gilt:

a) Wenn $e \in G$ linksneutrales Element ist, dann ist es auch rechtsneutrales Element.

Anexo 5: Situación „El collar de Margarita”

Die Halskette von Margarita:

Meine Klassenkameradin hat eine schone Halskette mit 6 Perlen. Jeden Tag kommt es mir vor es ist eine andere Kette. Ich habe Sie gefragt wie sie das macht und sie hat mir geantwortet:

Ich habe 6 Perlen genommen und habe sie in gleicher Entfernung voneinander an dem Band festgemacht. Mit dem Verschluss hat mir meine Mama geholfen, damit man es möglichst nicht sieht.

Als ich das Geheimnis herausgefunden hatte, machte ich mich daran eine Kette mit 5 Perlen unterschiedlicher Farben zu basteln, um sie meiner Lehrerin zu schenken.

Auf wie viele Weisen kann sich die Lehrerin die Kette umhangen, wenn eine Perle jeweils in der Mitte hangt?

Warum sieht die Perle meiner Freundin immer anders aus?

Was wurde mit einer Kette aus ganz vielen Perlen passieren?

Traducción:

El collar de Margarita:

Mi companera de clase tiene un lindo collar de 6 perlas, cada dia me parece que fuera otro. Le pregunte como lo habia hecho y me dijo:

Tome 6 perlas y las puse en un hilo a la misma distancia una de la otra, mi mama me ayudo con el cierre para que no se note.

Una vez descubierto el secreto de porque se veía diferente cada día, me propuse hacer un collar con 5 perlas de distinto color, para ponermelos y que se viera diferente toda la semana. (Regalo para la profesora en el texto original)

¿De cuántas formas diferentes se podría poner la profesora este collar? (Una perla siempre en el centro)

¿Por qué el collar de mi amiga parece cada día distinto?

¿Qué pasaría con un collar con muchas más perlas?

Anexo 6: Secuencia original Proseminario álgebra.

Reyes-Santander, SS 2010, **1056 /N**

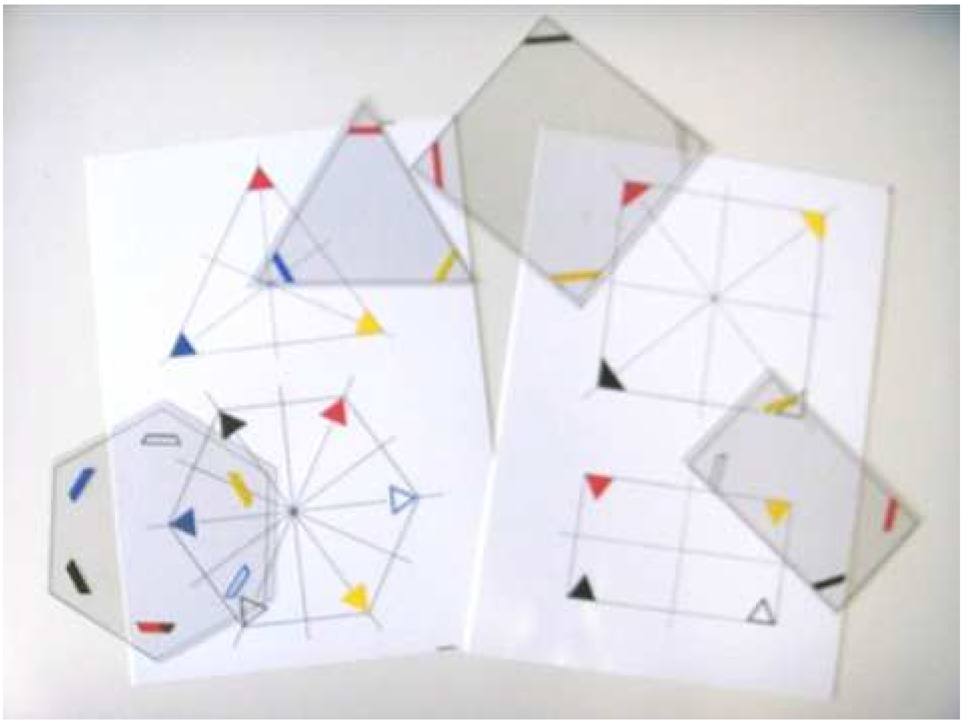
Proseminario Algebra

Jede Sitzung besteht aus einem 50 – 60 minütigem Vortrag und anschließend gemeinsam zu bearbeitender Übungsaufgaben. Die Referate werden von je 2 Studierenden vorgetragen. Um den Schein oder Punkte zu erhalten, muss außerdem eine Metapher über eines der im Proseminario behandelten Konzepte (inklusive einer Erläuterung diese Metapher, zwei handgeschriebener Seiten nicht überschreitend) oder ein Mathetagebuch ausgearbeitet und bis spätestens 14.07.10 abgegeben werden.
Zur Vorbereitung des Vortrags vereinbaren Sie bitte einen Termin unter der folgenden e-Mail Adresse: pamela.reyes-santander@math.uni-Augsburgo.de

Termine	Themen	Referenten
Mi. 21.04.	Halbgruppen, Gruppen und Untergruppen Lit.: G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 1-11	
Mi. 28.04.	Es gibt viele Gruppen! Lit.: G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 11–19 P. Reyes-Santander (Skript)	
Mi. 05.05.	Ähnlich, gleich, isomorph? (Nebenklassen) Lit.: G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 20-26 und 38-39 Holz, Repetitorium der Algebra; S.141-150.	
Mi. 12.05.	Neue Gruppen oder ein Produkt zwischen Gruppen Lit.: G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 40 und 50. und Sie bekommen eine Übungsaufgabe von Fr. Reyes-Santander.	
Mi. 19.05.	Operationen von Gruppen auf Mengen, Symmetrische Gruppe. G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 12-13 und 70-73 Und Sie bekommen eine Übungsaufgabe von Fr. yes-Santander.	
Mi. 26.05.	Eine Zyklische Welt Lit.: G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 26-32, 54-59 und 65-69 P. Reyes-Santander; (Skript) S. 5-6	
Mi. 02.06.	Symmetrien von Ornamenten, Parketten und Kristallen. Lit.: M. Klemm; Symmetrien von Ornamenten und Kristallen, S. 4-13.	
Mi. 09.06.	Magische Figuren: Wie kann man aus bekannten magischen Figuren neue herstellen.	

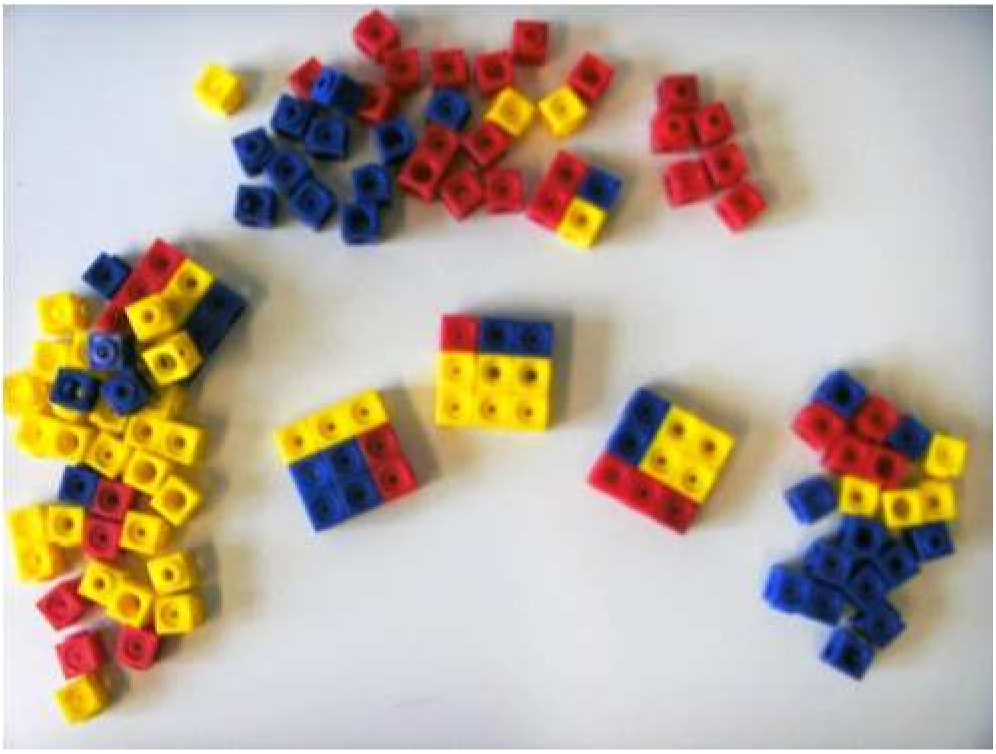
Mi. 16.06.	Zwei Verknüpfungen mit den gleichen Elementen und wie kann man aus bekannten Ringen neue machen? Ideale und Hauptideale Lit.: Holz, Repetitorium der Algebra; S. 273-277 + 285 + 293 +297-298	
Mi. 23.06.	Polynomringe Lit.: G. Fischer; Lehrbuch der Algebra; S. 151-156	
Mi. 30.06.	Wo und wann ist ein Polynom irreduzibel? (Immer reduzibel!) Lit.: Kurzweil, Endliche Körper. Holz, Repetitorium der Algebra; S.336-345	
Mi.07.07.	Ein Unterschied zwischen Z[X] und Q[X]. „Der (Haupt-) Idealring der Polynome. Holz, Repetitorium der Algebra; S. 336-345	
Mi. 14.07.	Eine große Struktur: Körper! Lit.: Beutelspacher. Kurzweil, Endliche Körper; S. 24-37	
Mi. 21.07.	Zusammenfassung. (Repetitorium von einigen Themen)	
	Referat Realschule (Themen zum Auswahl) (Mittwochs um 13:30 bis 15:00 Uhr)	

Anexo 7: Fotos material (Grupos y Subgrupos).



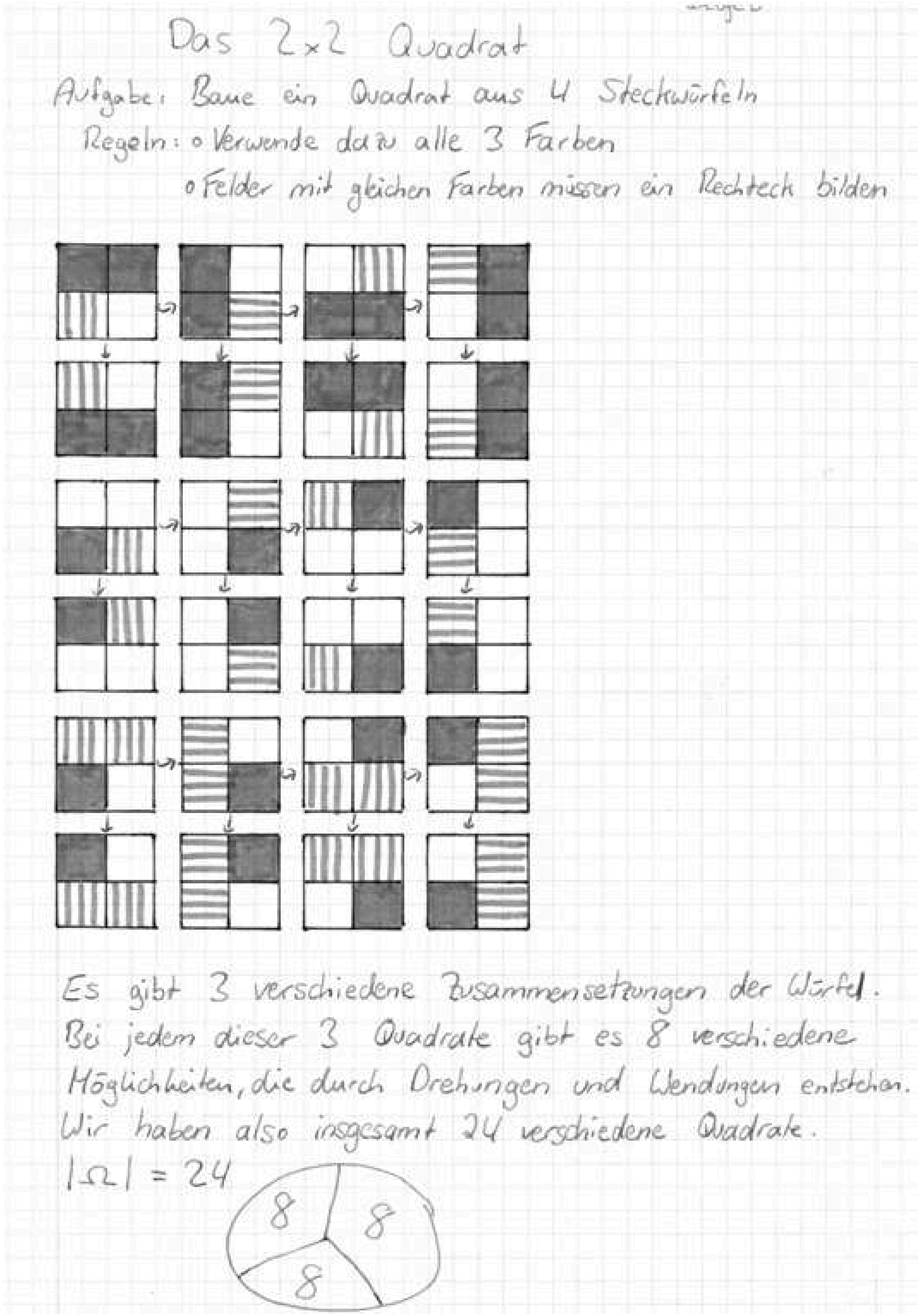
Anexo 8: Fotos Fase Enactiva.

Construcción de Cuboides 2x2 y 3x3, acción de grupos sobre un conjunto, encontrando orbitas



Anexo 9: Fase Icónica.

Dibujos y resultados de la fase enactiva en fase icónica para la construcción de cuboides de 2x2.


Das 2x2 Quadrat

Aufgabe: Baue ein Quadrat aus 4 Steckwürfeln

Regeln: ∘ Verwende dazu alle 3 Farben

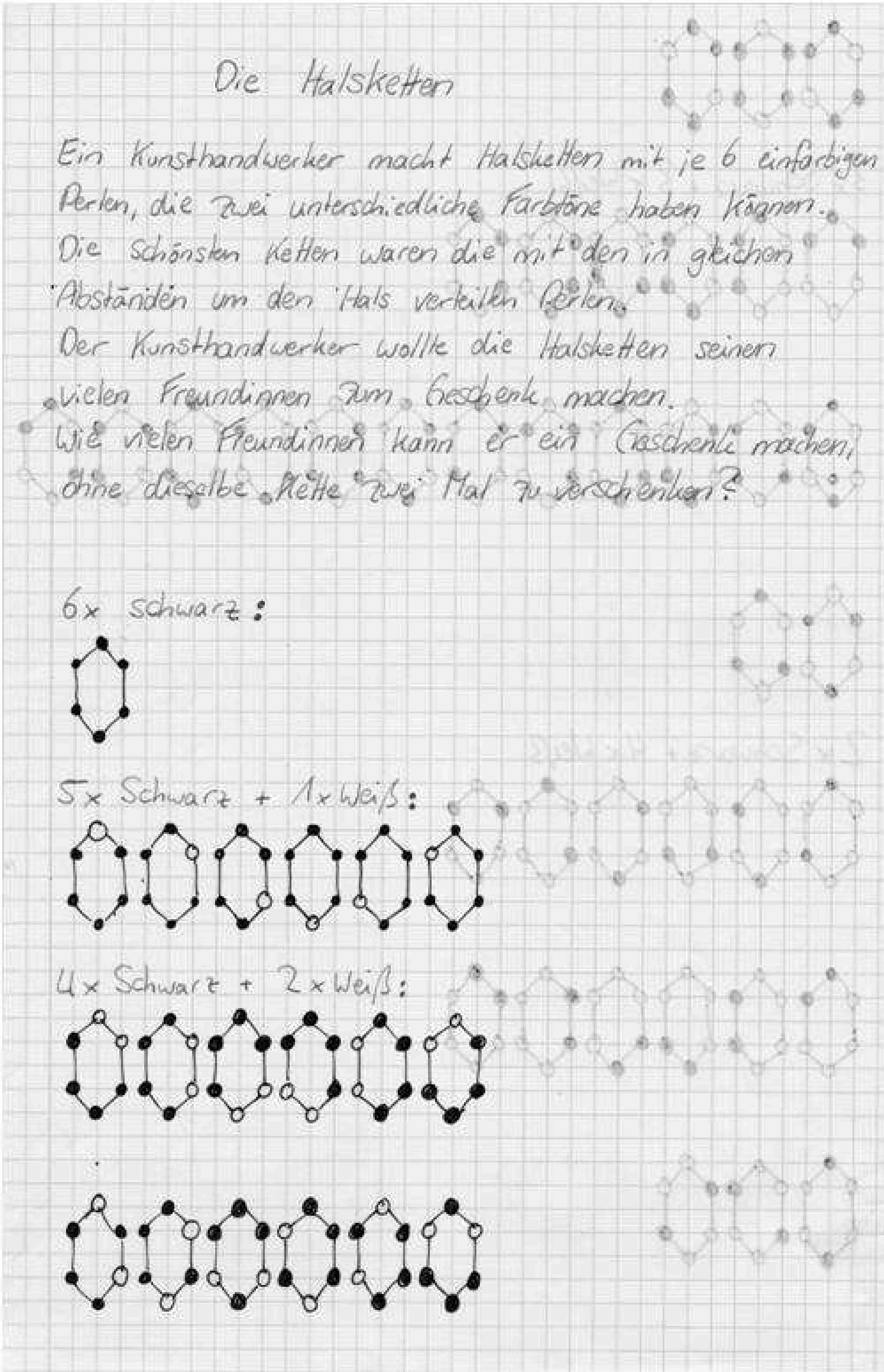
∘ Felder mit gleichen Farben müssen ein Rechteck bilden

Es gibt 3 verschiedene Zusammensetzungen der Würfel. Bei jedem dieser 3 Quadrate gibt es 8 verschiedene Möglichkeiten, die durch Drehungen und Wendungen entstehen. Wir haben also insgesamt 24 verschiedene Quadrate.

$|\Omega| = 24$

Anexo 10: Reproducción enactiva de "El collar de Margarita"

Anexo 11: Representación icónica para “El collar de Margarita”.



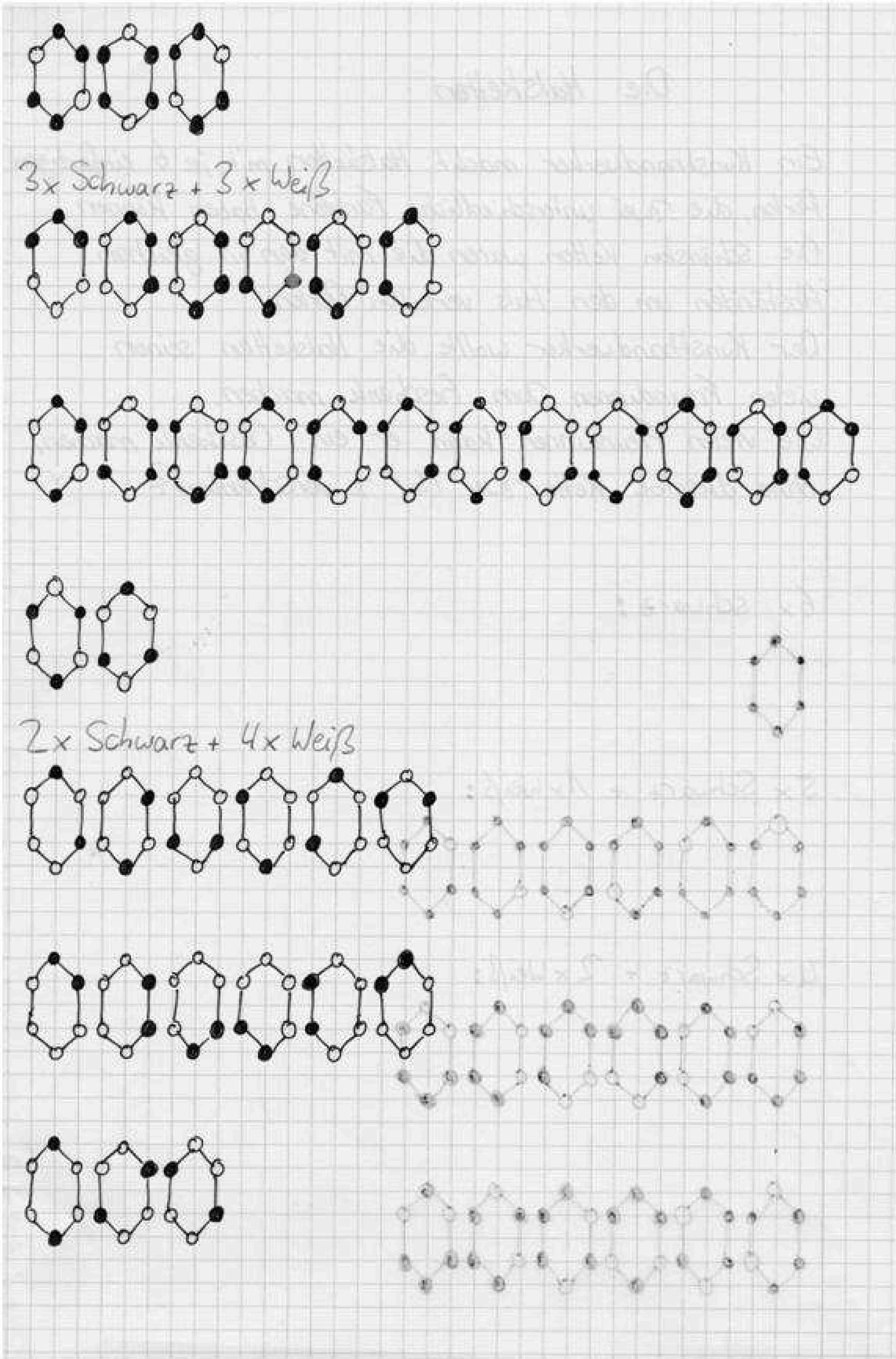
Die Halsketten

Ein Kunsthandwerker macht Halsketten mit je 6 einfarbigen Perlen, die zwei unterschiedliche Farbtöne haben können.
Die schönsten Ketten waren die mit den in gleichen Abständen um den Hals verteilten Perlen.
Der Kunsthandwerker wollte die Halsketten seinen vielen Freundinnen zum Geschenk machen.
Wie vielen Freundinnen kann er ein Geschenk machen, ohne dieselbe Kette zwei Mal zu verschenken?

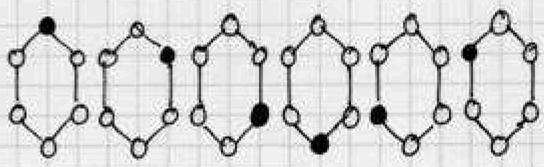
6x schwarz:

5x Schwarz + 1x Weiß:

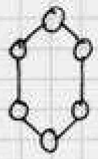
4x Schwarz + 2x Weiß:


3x Schwarz + 3x Weiß
2x Schwarz + 4x Weiß

5x Schwarz + 1x Weiß:



6x Weiß:



Durch die verschiedene Zusammensetzung der Perlen erhalten wir 13 verschiedene Anordnungen. Durch Drehung und Spiegeln dieser Anordnungen erhält man insgesamt 64 unterschiedliche Perlenketten.

$|\Omega| = 64 = 1+6+6+6+3+6+12+2+6+6+3+6+1$

Anexo 12. Datos del gráfico pág 312.

CHIC - [Graphe implicatif C:\Users\Pamela Reyes\Desktop\CHIC 4.2a\Chic 4.1 envoi\tesisCHICcohesitiv.csv 2:1]

Fichier Edition Affichage Option Fenêtre ?

nb col : 17, nb lig : 118

	Occurrence	Moyenne	Ecart type
T1GE	: 44.00	0.37	0.48
T2GE	: 32.00	0.27	0.44
T3GE	: 30.00	0.25	0.44
T4GE	: 28.00	0.24	0.43
T5GE	: 73.00	0.62	0.49
T6GE	: 73.00	0.62	0.49
T1E	: 67.00	0.57	0.50
T2E	: 62.00	0.53	0.50
T3E	: 52.00	0.44	0.50
T4E	: 53.00	0.45	0.50
T5E	: 83.00	0.70	0.46
T6E	: 73.00	0.62	0.49
PMC	: 103.00	0.87	0.33
PMP	: 20.00	0.17	0.38
PME	: 29.00	0.25	0.43
PMCR	: 10.00	0.08	0.28
PMV	: 51.00	0.43	0.50

Fréquence des couples de variables : :

	T1GE	T2GE	T3GE	T4GE	T5GE	T6GE	T1E	T2E	T3E	T4E	T5E	T6E	PMC	PMP	PME	PMCR	PMV
T1GE		0.23	0.21	0.21	0.25	0.26	0.23	0.21	0.17	0.17	0.22	0.22	0.33	0.06	0.08	0.03	0.16
T2GE			0.20	0.19	0.21	0.23	0.19	0.19	0.15	0.14	0.20	0.18	0.25	0.05	0.07	0.03	0.14
T3GE				0.19	0.19	0.21	0.18	0.18	0.17	0.16	0.19	0.17	0.24	0.04	0.07	0.01	0.10
T4GE					0.19	0.24	0.16	0.16	0.14	0.16	0.17	0.17	0.21	0.04	0.05	0.02	0.11
T5GE						0.45	0.33	0.31	0.26	0.25	0.49	0.38	0.54	0.12	0.15	0.05	0.26
T6GE							0.40	0.36	0.31	0.32	0.45	0.45	0.55	0.10	0.15	0.05	0.31
T1E								0.53	0.44	0.45	0.49	0.51	0.55	0.08	0.15	0.06	0.31
T2E									0.44	0.45	0.45	0.48	0.51	0.08	0.12	0.06	0.27
T3E										0.43	0.42	0.43	0.42	0.06	0.08	0.04	0.24
T4E											0.42	0.44	0.43	0.07	0.09	0.05	0.25
T5E												0.55	0.64	0.14	0.20	0.07	0.37
T6E													0.57	0.10	0.14	0.05	0.33
PMC														0.14	0.23	0.08	0.39
PMP															0.08	0.04	0.10
PME																0.05	0.14
PMCR																	0.06
PMV																	

Coefficient de corrélation :

	T1GE	T2GE	T3GE	T4GE	T5GE	T6GE	T1E	T2E	T3E	T4E	T5E	T6E	PMC	PMP	PME	PMCR	PMV
T1GE		0.59	0.56	0.60	0.06	0.14	0.07	0.07	0.02	0.01	-0.19	-0.04	0.03	-0.02	-0.03	0.02	-0.00
T2GE			0.69	0.69	0.20	0.28	0.19	0.20	0.15	0.10	0.06	0.05	0.12	0.03	0.01	0.02	0.08
T3GE				0.73	0.14	0.26	0.16	0.20	0.27	0.22	0.04	0.06	0.11	-0.00	0.03	-0.11	-0.04
T4GE					0.19	0.44	0.12	0.17	0.19	0.26	0.01	0.11	0.03	0.01	-0.04	-0.03	0.04
T5GE						0.28	-0.09	-0.08	-0.04	-0.10	0.25	-0.01	0.01	0.08	0.00	-0.01	-0.02
T6GE							0.20	0.16	0.13	0.18	0.06	0.28	0.07	-0.02	0.00	-0.01	0.16
T1E								0.92	0.77	0.79	0.41	0.65	0.33	-0.06	0.06	0.08	0.28
T2E									0.84	0.86	0.35	0.65	0.30	-0.02	-0.05	0.11	0.18
T3E										0.95	0.46	0.66	0.24	-0.08	-0.11	0.04	0.19
T4E											0.44	0.67	0.24	-0.04	-0.08	0.09	0.21
T5E												0.52	0.14	0.10	0.16	0.06	0.30
T6E													0.17	-0.02	-0.08	-0.01	0.26
PMC														-0.03	0.10	0.12	0.08

CHIC - [Graphe implicatif C:\Users\Pamela Reyes\Desktop\CHIC 4.2a\Chic 4.1 envoi\tesisCHICcohesitiv.csv 2:1]

Fichier Edition Affichage Option Fenêtre ?

T4GE					0.19	0.24	0.16	0.16	0.14	0.16	0.17	0.17	0.21	0.04	0.05	0.02	0.11
T5GE						0.45	0.33	0.31	0.26	0.25	0.49	0.38	0.54	0.12	0.15	0.05	0.26
T6GE							0.40	0.36	0.31	0.32	0.45	0.45	0.55	0.10	0.15	0.05	0.31
T1E								0.53	0.44	0.45	0.49	0.51	0.55	0.08	0.15	0.06	0.31
T2E									0.44	0.45	0.45	0.48	0.51	0.08	0.12	0.06	0.27
T3E										0.43	0.42	0.43	0.42	0.06	0.08	0.04	0.24
T4E											0.42	0.44	0.43	0.07	0.09	0.05	0.25
T5E												0.55	0.64	0.14	0.20	0.07	0.37
T6E													0.57	0.10	0.14	0.05	0.33
PMC														0.14	0.23	0.08	0.39
PMP															0.08	0.04	0.10
PME																0.05	0.14
PMCR																	0.06
PMV																	

Coefficient de corrélation :

	T1GE	T2GE	T3GE	T4GE	T5GE	T6GE	T1E	T2E	T3E	T4E	T5E	T6E	PMC	PMP	PME	PMCR	PMV
T1GE		0.59	0.56	0.60	0.06	0.14	0.07	0.07	0.02	0.01	-0.19	-0.04	0.03	-0.02	-0.03	0.02	-0.00
T2GE			0.69	0.69	0.20	0.28	0.19	0.20	0.15	0.10	0.06	0.05	0.12	0.03	0.01	0.02	0.08
T3GE				0.73	0.14	0.26	0.16	0.20	0.27	0.22	0.04	0.06	0.11	-0.00	0.03	-0.11	-0.04
T4GE					0.19	0.44	0.12	0.17	0.19	0.26	0.01	0.11	0.03	0.01	-0.04	-0.03	0.04
T5GE						0.28	-0.09	-0.08	-0.04	-0.10	0.25	-0.01	0.01	0.08	0.00	-0.01	-0.02
T6GE							0.20	0.16	0.13	0.18	0.06	0.28	0.07	-0.02	0.00	-0.01	0.16
T1E								0.92	0.77	0.79	0.41	0.65	0.33	-0.06	0.06	0.08	0.28
T2E									0.84	0.86	0.35	0.65	0.30	-0.02	-0.05	0.11	0.18
T3E										0.95	0.46	0.66	0.24	-0.08	-0.11	0.04	0.19
T4E											0.44	0.67	0.24	-0.04	-0.08	0.09	0.21
T5E												0.52	0.14	0.10	0.16	0.06	0.30
T6E													0.17	-0.02	-0.08	-0.01	0.26
PMC														-0.03	0.10	0.12	0.08
PMP															0.27	0.27	0.15
PME																0.25	0.18
PMCR																	0.16
PMV																	

Indices d'implications : (selon la théorie classique)
Calcul avec la loi de poisson

	T1GE	T2GE	T3GE	T4GE	T5GE	T6GE	T1E	T2E	T3E	T4E	T5E	T6E	PMC	PMP	PME	PMCR	PMV
T1GE	0	100	99	100	61	78	62	61	50	47	7	33	49	43	40	48	45
T2GE	100	0	100	100	92	98	88	89	79	68	61	56	77	49	46	47	64
T3GE	100	100	0	100	80	97	83	90	95	90	53	59	73	44	50	34	35
T4GE	100	100	100	0	91	100	77	85	86	94	45	74	48	47	37	42	52
T5GE	57	76	68	73	0	92	29	31	39	30	91	44	45	58	50	49	43
T6GE	68	82	81	92	92	0	81	75	69	77	58	92	58	48	50	49	72
T1E	58	73	68	67	27	84	0	100	100	100	99	100	99	43	59	57	89
T2E	58	75	75	70	27	80	100	0	100	100	99	100	98	47	43	59	78
T3E	50	70	84	74	34	77	100	100	0	100	100	100	96	35	29	50	82
T4E	47	62	79	82	23	85	100	100	100	0	100	100	96	40	34	55	85
T5E	25	58	55	52	86	57	96	93	96	96	0	99	73	59	68	54	87
T6E	39	57	58	64	44	92	100	100	100	100	100	0	82	48	40	49	86
PMC	53	59	58	53	48	54	82	78	73	74	63	66	0	48	58	55	58
PMP	38	49	42	46	64	36	25	35	24	31	71	36	25	0	89	74	80
PME	37	45	50	37	43	43	60	31	20	26	86	22	71	82	0	72	84
PMCR	44	44	22	36	33	33	63	70	49	64	57	33	72	84	87	0	82
PMV	45	60	40	51	39	81	95	83	83	86	98	95	63	66	73	62	0

Anexo 13: Datos del gráfico pág 314.

nb col : 23, nb lig : 118

	Occurrence	Moyenne	Ecart type
T1GE	: 44.00	0.37	0.48
T2GE	: 32.00	0.27	0.44
T3GE	: 30.00	0.25	0.44
T4GE	: 28.00	0.24	0.43
T5GE	: 73.00	0.62	0.49
T6GE	: 73.00	0.62	0.49
T1A	: 114.00	0.97	0.18
T2A	: 98.00	0.83	0.38
T3A	: 97.00	0.82	0.38
T4A	: 96.00	0.81	0.39
T5A	: 89.00	0.75	0.43
T6A	: 98.00	0.83	0.38
T1E	: 67.00	0.57	0.50
T2E	: 62.00	0.53	0.50
T3E	: 52.00	0.44	0.50
T4E	: 53.00	0.45	0.50
T5E	: 83.00	0.70	0.46
T6E	: 73.00	0.62	0.49
PMC	: 103.00	0.87	0.33
PMP	: 20.00	0.17	0.38
PME	: 29.00	0.25	0.43
PMCR	: 10.00	0.08	0.28
PMV	: 51.00	0.43	0.50

Fréquence des couples de variables : :

	T1GE	T2GE	T3GE	T4GE	T5GE	T6GE	T1A	T2A	T3A	T4A	T5A	T6A	T1E	T2E	T3E	T4E	T5E	T6E	PMC	PMP	PME	PMCR	PMV
T1GE		0.23	0.21	0.21	0.25	0.26	0.35	0.25	0.25	0.25	0.23	0.25	0.23	0.21	0.17	0.17	0.22	0.22	0.33	0.06	0.08	0.03	0.16
T2GE			0.20	0.19	0.21	0.23	0.25	0.23	0.23	0.22	0.22	0.23	0.19	0.19	0.15	0.14	0.20	0.18	0.25	0.05	0.07	0.03	0.14
T3GE				0.19	0.19	0.21	0.25	0.22	0.23	0.22	0.21	0.23	0.18	0.18	0.17	0.16	0.19	0.17	0.24	0.04	0.07	0.01	0.10
T4GE					0.19	0.24	0.24	0.21	0.21	0.21	0.20	0.22	0.16	0.16	0.14	0.16	0.17	0.17	0.21	0.04	0.05	0.02	0.11
T5GE						0.45	0.59	0.55	0.54	0.53	0.53	0.54	0.33	0.31	0.26	0.25	0.49	0.38	0.54	0.12	0.15	0.05	0.26
T6GE							0.61	0.54	0.53	0.53	0.49	0.54	0.40	0.36	0.31	0.32	0.45	0.45	0.55	0.10	0.15	0.05	0.31
T1A								0.82	0.81	0.81	0.75	0.82	0.54	0.50	0.43	0.45	0.69	0.61	0.85	0.17	0.25	0.08	0.42
T2A									0.81	0.80	0.75	0.80	0.45	0.43	0.37	0.38	0.62	0.53	0.73	0.16	0.19	0.07	0.33
T3A										0.81	0.75	0.81	0.45	0.43	0.39	0.39	0.61	0.52	0.72	0.14	0.19	0.06	0.32
T4A											0.75	0.81	0.44	0.42	0.37	0.39	0.61	0.51	0.71	0.15	0.20	0.07	0.32
T5A												0.75	0.42	0.41	0.36	0.37	0.60	0.50	0.66	0.14	0.19	0.06	0.29
T6A													0.47	0.45	0.40	0.41	0.62	0.53	0.73	0.15	0.20	0.07	0.34
T1E														0.53	0.44	0.45	0.49	0.51	0.55	0.08	0.15	0.06	0.31
T2E															0.44	0.45	0.45	0.48	0.51	0.08	0.12	0.06	0.27
T3E																0.43	0.42	0.43	0.42	0.06	0.08	0.04	0.24
T4E																	0.42	0.44	0.43	0.07	0.09	0.05	0.25
T5E																		0.55	0.64	0.14	0.20	0.07	0.37
T6E																			0.57	0.10	0.14	0.05	0.33
PMC																				0.14	0.23	0.08	0.39
PMP																					0.08	0.04	0.10
PME																						0.05	0.14
PMCR																							0.06
PMV																							

PMCR																							0.06
PMV																							

Coefficient de corrélation :

	T1GE	T2GE	T3GE	T4GE	T5GE	T6GE	T1A	T2A	T3A	T4A	T5A	T6A	T1E	T2E	T3E	T4E	T5E	T6E	PMC	PMP	PME	PMCR	PMV
T1GE		0.59	0.56	0.60	0.06	0.14	-0.15	-0.31	-0.33	-0.31	-0.25	-0.35	0.07	0.07	0.02	0.01	-0.19	-0.04	0.03	-0.02	-0.03	0.02	-0.00
T2GE			0.69	0.69	0.20	0.28	-0.10	0.02	0.03	-0.00	0.08	0.02	0.19	0.20	0.15	0.10	0.06	0.05	0.12	0.03	0.01	0.02	0.08
T3GE				0.73	0.14	0.26	0.00	0.06	0.12	0.08	0.11	0.11	0.16	0.20	0.27	0.22	0.04	0.06	0.11	-0.00	0.03	-0.11	-0.04
T4GE					0.19	0.44	0.10	0.09	0.10	0.11	0.13	0.15	0.12	0.17	0.19	0.26	0.01	0.11	0.03	0.01	-0.04	-0.03	0.04
T5GE						0.28	-0.05	0.20	0.18	0.16	0.32	0.16	-0.09	-0.08	-0.04	-0.10	0.25	-0.01	0.01	0.08	0.00	-0.01	-0.02
T6GE							0.14	0.16	0.09	0.12	0.12	0.16	0.20	0.16	0.13	0.18	0.06	0.28	0.07	-0.02	0.00	-0.01	0.16
T1A								0.29	0.28	0.39	0.33	0.29	-0.07	-0.08	0.07	0.17	0.19	0.14	0.07	0.08	0.11	0.06	0.07
T2A									0.85	0.83	0.74	0.76	-0.12	-0.02	0.04	0.04	0.20	0.11	0.03	0.14	-0.06	-0.02	-0.15
T3A										0.92	0.82	0.91	-0.09	0.00	0.15	0.11	0.18	0.05	0.02	0.03	-0.04	-0.10	-0.18
T4A											0.84	0.89	-0.11	-0.02	0.07	0.13	0.21	0.03	0.01	0.10	0.02	-0.01	-0.15
T5A												0.79	-0.02	0.05	0.15	0.16	0.36	0.16	0.02	0.05	0.01	-0.04	-0.18
T6A													-0.03	0.07	0.17	0.18	0.20	0.06	0.03	0.08	-0.00	-0.02	-0.11
T1E														0.92	0.77	0.79	0.41	0.65	0.33	-0.06	0.06	0.08	0.28
T2E															0.84	0.86	0.35	0.65	0.30	-0.02	-0.05	0.11	0.18
T3E																0.95	0.46	0.66	0.24	-0.08	-0.11	0.04	0.19
T4E																	0.44	0.67	0.24	-0.04	-0.08	0.09	0.21
T5E																		0.52	0.14	0.10	0.16	0.06	0.30
T6E																			0.17	-0.02	-0.08	-0.01	0.26
PMC																				-0.03	0.10	0.12	0.08
PMP																					0.27	0.27	0.15
PME																						0.25	0.18
PMCR																							0.16
PMV																							

Indices d'implications : (selon la théorie classique)
Calcul avec la loi de poisson

	T1GE	T2GE	T3GE	T4GE	T5GE	T6GE	T1A	T2A	T3A	T4A	T5A	T6A	T1E	T2E	T3E	T4E	T5E	T6E	PMC	PMP	PME	PMCR	PMV
T1GE	0	100	99	100	61	78	6	0	0	1	3	0	62	61	50	47	7	33	49	43	40	48	45
T2GE	100	0	100	100	92	98	10	46	50	39	67	46	88	89	79	68	61	56	77	49	46	47	64
T3GE	100	100	0	100	80	97	27	57	78	66	74	75	83	90	95	90	53	59	73	44	50	34	35
T4GE	100	100	100	0	91	100	61	70	73	76	82	85	77	85	86	94	45	74	48	47	37	42	52
T5GE	57	76	68	73	0	92	24	87	83	80	97	79	29	31	39	30	91	44	45	58	50	49	43
T6GE	68	82	81	92	92	0	71	79	65	71	71	79	81	75	69	77	58	92	58	48	50	49	72
T1A	43	46	50	54	43	55	0	65	64	72	67	65	46	45	54	59	58	55	48	53	54	51	54
T2A	20	52	55	58	73	67	84	0	100	100	100	100	31	43	54	55	74	61	48	60	45	49	33
T3A	18	53	61	59	71	59	84	100	0	100	100	100	34	46	67	63	72	52	46	52	46	45	30
T4A	19	50	57	60	69	63	96	100	100	0	100	100	31	44	59	65	77	50	45	58	52	49	32
T5A	20	59	61	64	90	65	95	100	100	100	0	100	42	54	67	69	94	72	46	54	51	48	26
T6A	17	52	60	62	67	67	84	100	100	100	100	0	42	55	70	71	74	55	48	56	50	49	38
T1E	58	73	68	67	27	84	19	17	22	19	38	35	0	100	100	100	99	100	99	43	59	57	89
T2E	58	75	75	70	27	80	16	36	42	37	56	60	100	0	100	100	99	100	98	47	43	59	78
T3E	50	70	84	74	34	77	53	52	82	63	82	87	100	100	0	100	100	100	96	35	29	50	82
T4E	47	62	79	82	23	85	83	54	72	77	84	88	100	100	100	0	100	100	96	40	34	55	85
T5E	25	58	55	52	86	57	77	83	80	84	97	83	96	93	96	96	0	99	73	59	68	54	87
T6E	39	57	58	64	44	92	71	69	54	49	79	58	100	100	100	100	100	0	82	48	40	49	86
PMC	53	59	58	53	48	54	46	48	47	46	47	48	82	78	73	74	63	66	0	48	58	55	58
PMP	38	49	42	46	64	36	49	85	48	72	54	66	25	35	24	31	71	36	25	0	89	74	80
PME	37	45	50	37	43	43	63	23	26	46	42	37	60	31	20	26	86	22	71	82	0	72	84
PMCR	44	44	22	36	33	33	29	24	11	29	23	24	63	70	49	64	57	33	72	84	87	0	82
PMV	45	60	40	51	39	81	52	10	8	10	9	16	95	83	83	86	98	95	63	66	73	62	0

Breve reseña de la autora

Pamela Reyes-Santander,nacio en Santiago de Chile, el 20 de enero de 1975.

Esta casada con Martin Hoefele y es madre de Amaya y Ainara.

Hizo sus estudios de licenciatura, magister y de profesora en matemática en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Ha trabajado como docente en la Universidad de Augsburgo y en el Instituto Kolping, Augsburgo, Alemania. También ha trabajo en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile y desde el 2012 en la Universidad de Valparaíso, Chile.

Desde el 2012, trabaja como asesora en el Ministerio de Eduación, Chile, donde se destaca la elaboración de las Bases Curriculares de Enseñanza Media para Matemática y la generación de los Programas de Estudio para la educación secundaria.

Algunas de sus publicaciones destacadas son “Mathematische Knobelgeschichten”, cuentos para matemática en educación básica y el trabajo realizado, junto con el Prof. Dr. Brandl “Die Gestalt des ‚Nichts’ in der Mathematik”, el cual trata el cero como objeto de la nada en la matemática.

Sus investigaciones se basan principlamente en el pensamiento matemático, metáforas, y nociones básicas, algunas de ellas son las publicadas con el prof. Dr. Jorge Soto-Andrade, como “Mathematisches Denken, Grundvorstellungen und Metaphern” y “Conceptual Metaphors and “Grundvorstellungen”: A case of convergence”.

Dentro de otra área de la investigación en didáctica, la autora desarrolla algunas metodologías innovadoras en la formación de profesores, entre ellas se destacan publicaciones como “Diarios de aprendizaje como alternativa metodológica en educación universitaria” y “An Experience with Wireless Technology and Outstanding Students of Mathematics”, ambas realizadas junto con la Dr (c) Elisabeth Ramos-Rodríguez.

Dentro de su tiempo libre, se dedica a coordinar la revista “Esfera Didáctica”, la cual es para todo lector y tiene como objetivo acercarse de manera sencilla a todos los interesados en la didáctica de la matemática. Participa activamente en proyectos nacionales e internacionales y organiza talleres de matemática para escolares con diferentes intereses.