NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI TIGA *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika

oleh :

YULIANA
11554201778

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI TIGA *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

Oleh:

YULIANA
11554201778

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru,

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc	**Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19860320 201503 2 003**

LEMBAR PENGESAHAN

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI TIGA *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

Oleh:

YULIANA
11554201778

Telah dipertahankan didepan sidang dewan penguji
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Tekhnologi Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau
diPekanbaru, pada tanggal

Pekanbaru,28 Juli 2020
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag	**Ari Pani Desvina. M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**:Wartono, M.Sc**
Sekretaris	**:Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota I	**:Fitri Aryani, M.Sc**
Anggota II	**:Sri Basriati, M.sc**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan atas izin penulis dan harus dilakukan mengikut kaedah dan kebiasaan ilmiah serta menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin tertulis dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam pada form peminjaman.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 28 Juli 2020

Yang membuat pernyataan

Yuliana
11554201778

LEMBAR PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

"Allah akan meninggikan orang-orang Beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi Ilmu Pengetahuan beberapa derajat" (Q.S. Al-Mujadalah: 11)

Alhamdulillahirabbil'alamiin... Sujud dan syukur ku kehadirat Allah Swt. Yang telah memberikan rahmat dan inayah-Nya, akhirnya Tugas Akhir yang sederhana ini dapat terselesaikan. Sholawat beriring salam ku kirimkan untuk junjungan umat yakni Nabi Muhammad Saw yang telah membawa umatnya dari alam kegelapan ke alam yang berilmu pengetahuan.

Ungkapan hati sebagai rasa terima kasihku kepada orang yang sangat kusayangi

kepada:

ayah dan ibu tercinta

Sebagai tanda bakti, hormat dan rasa terima kasih yang tak terhingga kupersembahkan karya kecil ini kepada Ayah dan Ibu yang telah memberikan kasih sayang yang tiada terhingga yang tak mungkin dapat ku balas hanya dengan selembar kertas yang bertuliskan kata cinta dan persembahan. Untuk Ayah dan Ibu Terimakasih sudah mau menjadi teman curhat terbaikku, teman yang slalu membuatku termotivasi, slalu menyebutku dalam setiap doa, slalu menasehatiku agar menjadi lebih baik dan yang slalu memenuhi segala kebutuhanku.

Untuk kakak dan abang- abangku serta adek-adekku..terimakasih.. Tiada yang paling mengharukan saat berkumpul bersama kalian, walaupun sering bertengkar tapi hal ini selalu menjadikan warna dalam hidupku dan tak akan bisa tergantikan.

Dan untuk seluruh keluarga besarku serta semua pihak yang terlibat yang tak bisa ku sebutkan satu persatu. Terima kasih untuk semua dukungannya dalam bentuk apapun, doa, nasehat serta saran dalam proses penyelesaian karya kecilku ini.

By. Yuliana

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI TIGA *COPY* GRAF BINTANG

YULIANA
NIM: 11554201778

Tanggal Sidang: 28 Juli 2020
Tanggal Wisudah:

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Tekhnologi
Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf dan k adalah bilangan bulat positif. Pelabelan-k total pada graf G adalah suatu pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf yang dinotasikan dengan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$. Bobot titik dinyatakan sebagai penjumlahan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan titik tersebut sedangkan bobot sisi dinyatakan sebagai penjumlahan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan sisi tersebut. Suatu pelabelan-k total $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$dikatakan pelabelan-$k$ total tak teratur total dari graf G, jika bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi juga berbeda. Nilai k terkecil sehingga suatu graf G dapat dilabeli dengan pelabelan k total ketakteraturan total disebut nilai total ketakteraturan total dari graf G, dinotasikan dengan $ts(G)$. Penelitian ini membahas tentang nilai total ketakteraturan total dari tiga copy graf bintang, dimana nilai bobot sisi dan bobot titik tidak ada yang sama. Adapun hasil dari penelitian ini, diperoleh nilai total ketakteraturan total dari tiga copy graf bintang yang dinotasikan dengan $ts(3S_n)$ yaitu $ts(3S_n) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$.

Kata kunci: *Tiga copy graf bintang, nilai total ketakteraturan total, pelabelan total tak teratur total*

TOTAL IRREGULARITY STRENGTH OF THREE COPY STAR GRAPH

YULIANA

NIM: 11554201778

Date of Final Exam: 28 July 2020

Date of Graduation:

Mathematics Department
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

Abstract

Suppose $G(V,E)$ is a graph and k is positive integer. A total k-labeling on a graph G is a mapping that carries of graph elements, denoted by $: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ *. The weight of the vertex is represented by the sum of every the label of vertex and labels of edges that incident with vertex where as the weight of the edge is represented by the sum of every the label of vertex and label of edges that incident with edge. A total k-labeling $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ said irregular total labeling of G, if the weight of the vertex is different and the weight of the edges is also different. The minimum k such that a graph has a totally irregular total k -labeling is called the total irregularity strength of, denoted by $ts(G)$. In this research discusses about the total irregularity strength of three copy star graph, where the set of vertices of each multiplication result is missing. The result of this research, we determine the total irregularity strength of the three copies of star denoted by $ts(3S_n)$ obtained* $ts(3S_n) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$

Keywords: *Three copies of star, total irregularity strength, totally irregular total labeling.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah Subhanahu wa ta'ala, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul "**Nilai Ketakteraturan Total dari Tiga *Copy* Graf Bintang**". Shalawat beriring salam penulis hadiahkan untuk insan terpilih kekasih Allah Subhanahu wa ta'ala yakni Nabi Muhammad Shallallahu 'alaihi wasallam, yang membawa umatnya dari alam kegelapan menuju alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan. Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini, penulis banyak sekali mendapat ilmu, bimbingan, bantuan, motivasi, perhatian serta semangat dari berbagai pihak, terutama kedua orang tua saya tercinta Bapak Zainuddin dan ibu Nirwana. Terimakasih atas do'a, pengorbanan, materi serta kasih sayang yang sangat tulus yang telah Bapak dan Ibu berikan kepada penulis. Selanjutnya, penulis mengucapkan terimakasih juga kepada:

1. Prof. Dr. H. Akhmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negri Sultan Syarid Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag, Selaku Dekan Fakultas Sains dan Tekhnologi Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains Dan Tekhnologi.
4. Bapak Wartono, M.Sc, selaku ketua sidang telah memberikan kritik dan saran sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
5. Ibu Fitri Aryani. M.Sc, selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains Dan Tekhnologi sekaligus penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si, selaku pembimbing Tugas Akhir sekaligus Pembimbing Akademik yang telah memberikan waktu, arahan, bimbingan, motivasi, ilmu serta penjelasan mengenai tugas akhir ini dari awal hingga selesai.

7. Ibu Sri Basriati, M.Sc, selaku penguji II yang telah memberikan kritik dan saran sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Bapak/Ibu Dosen dan Staf Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
9. Terimakasih Buat Yusnita Sari Teman sebimbingan skripsi dan sekaligus sebimbingan akademik yang selalu menyemangati dan memotivasi dalam menyelesaikan tugas akhir ini
10. Terimakasih buat Era Napra Tilopas dan Aminah yang telah meluangkan waktunya untuk mengajariku dan memotivasi dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
11. Terimakasih untuk sahabat dan teman-temanku Inur, Fitri, Burhan, Idham, Rasyid, Kiky, Desi dan Rima yang telah memberikan semangat.
12. Teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika dan terkhusus untuk Matematika kelas B yang tidak bisa disebutkan namanya satu persatu, terimakasih atas kebersamaan yang diberikan selama ini sehingga mewarnai masa perkuliahanku.

Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan dari Allah Subhanahu wa ta'ala. Aamiin.

Demi kesempurnaan Tugas Akhir ini, besar harapan penulis kepada pembaca untuk memberikan kritik dan saran yang sifatnya membangun agar Tugas Akhir ini dapat digunakan dan bermanfaat bagi penulis ataupun pihak-pihak yang memerlukan.

Pekanbaru, 28 Juli 2020

Yuliana

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang terus dikembangkan. Suatu graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V merupakan himpunan yang tidak boleh kosong dari titik-titik (*vertices atau node*), dan E merupakan himpunan yang boleh kosong disebut sebagai sisi (*edges atau arcs*) (Munir,2012).

Salah satu pokok bahasan dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan pemasangan nilai bilangan ke setiap simpul, sisi, atau keduanya. Pelabelan graf terdiri dari berbagai macam diantaranya pelabelan total tak teratur, pelabelan ajaib, pelabelan harmoni dan pelabelan anti ajaib.

Pada tahun 2007 Bača, dkk. mengkaji beberapa jenis pelabelan graf. Salah satunya adalah pelabelan-k total tak teratur. Pelabelan-k total tak teratur dibedakan menjadi dua jenis yaitu: Pelabelan-k total tak teratur titik dan pelabelan-k total tak teratur sisi.

Untuk sebuah graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E didefinisikan sebuah pelabelan $\partial: V \cup E \to \{1,2,\cdots,k\}$ menjadi pelabelan-k total. pelabelan-k total didefinisikan menjadi total tak teratur sisi dari graf G untuk setiap dua sisi yang berbeda e dan f dari G $wt(e) \neq wt(f)$, dan menjadi total tak teratur titik dari G jika untuk setiap dua titik yang berbeda x dan y dari G memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$.(Bača, dkk.,2007)

Pada tahun 2013, Marzuki, Salman dan Miller juga memperkenalkan suatu pelabelan dalam penelitian nya yang berjudul *on total irregularity strength on cycles and paths.* Suatu pelabelan total $f: V \cup E \to \{1,2,\cdots,k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur total dari G jika setiap dua titik x dan y yang berbeda di $V(G)$ memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$ dan setiap dua sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda $E(G)$ memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$ dimana $wt(x) = f(x) + \sum(xz)$ dan $wt(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_2)$. Label k minimum pada G yang memenuhi pelabelan-k total tak teratur total disebut *the total irregularity strength* pada G, yang dinotasikan $ts(G)$.

Pada tahun 2014 Ramdani mengkaji nilai total ketakteraturan total dari dua *copy* graf bintang dengan $ts(2S_n) = n + 1$. Penelitian penentuan nilai ketakteraturan total juga di kaji oleh Siti Julaeha, dkk.,pada tahun 2017. Dalam paper “Pelabelan Total Tak Teratur Total Pada Graf Bunga (F_n)”. Hasil dari penelitian Julaeha diperoleh $ts(F_n) = \left\lceil \frac{4n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$. Tahun 2018 C.C Marzuki, dkk., juga mengkaji Nilai Ketakteraturan Total Dari p-Copy Graf Theta Tak Seragam dengan $ts\left(p\theta\left(4,4,(1,0,1,0)\right)\right) = 2_p + 1$ untuk p bilangan bulat positif.

Berdasarkan uraian-uraian diatas, maka penulis tertarik untuk meneliti nilai total ketakteraturan total (ts) dengan judul **“Nilai Total Ketakteraturan Total dari Tiga *Copy* Graf Bintang**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang sebelumnya, masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah “Bagaimana rumus umum nilai total ketakteraturan total dari tiga *copy* graf bintang”?

1.3 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi perluasan pembahasan, maka diperlukan batasan masalah dalam penelitian tugas akhir ini. Penulis membatasi masalah hanya berkaitan dengan nilai total ketakteraturan total dari tiga *Copy* graf bintang dengan $n \in Z$ dimana $n \geq 2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumus nilai total ketakteraturan total dari tiga *copy* graf bintang.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan mengenai graf
2. Mengetahui nilai total ketakteraturan total dari tiga *copy* graf bintang.
3. Sebagai sarana informasi dan referensi bagi pihak yang membutuhkan.
4. Sebagai bahan pengembangan ilmu selanjutnya.
5. Dapat dijadikan sebagai pertimbangan untuk penelitian selanjutnya tentang pelabelan nilai total ketakteraturan total.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam pembuatan tulisan ini mencakup lima bab yaitu :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan tentang pengertian graf, jenis-jenis graf dan pelabelan graf.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang jenis penelitian dan langkah-langkah menyelesaikan masalah tiga *copy* dari graf bintang.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara terperinci tentang hasil-hasil yang diperoleh dari tiga *copy* graf bintang.

BAB V PENUTUP

Bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari pembahasan dan saran

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang dapat membantu penulis untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

2.1 Pengertian Graf

Teori graf merupakan tpik yang sudah tua namun memiliki banyak aplikasi modern saat ini seperti kimia molekul dan system jaringan. Graf pertama kali dikenal pada saat seorang matematikawan swiss, bernama Leonhard Euler, berhasil mengungkapkan teka-teki Jembatan Konigsberg pada tahun 1736 (sekarang bernama Kaliningrad). Buku pertama yang menulis tentang teori graf adalah "*Thrie der endlichen und unendlichen Graphen*" oleh Konig pada tahun1936.

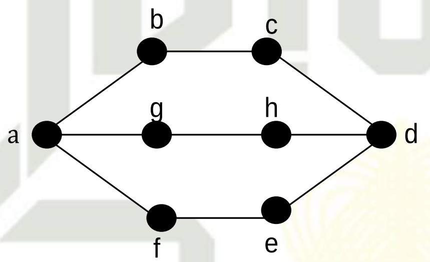
Graf merupakan gambar atau pola dari penghubungan antara himpunan elemen-elemen tidak kosong yang disebut titik (*vertex*) dengan himpunan pasangan tidak terurut titik-titik tersebut yang disebut sisi (*edge*). Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan sebagai sisi.

Definisi 2.1 (Munir, 2012) Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik *(vertices)* dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik.

Definisi 2.1 menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai sisi satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial. Titik pada graf dinomori dengan huruf seperti $a, b, c \ldots, v, w, \ldots$, dengan bilangan asli 1,2,3, ...,atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \ldots,$ dengan kata lain, jika e adalah yang menghubungkan simpul u dengan simpul v, maka e dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$.

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan tak kosong titik $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Banyaknya titik dari graf $G = (V, E)$ disebut *order*, sedangkan banyaknya sisi dari graf $G = (V, E)$ disebut *size*.

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Graf G

Himpunan titik graf pada Gambar 2.1 adalah V = {a,b,c,d,e,f,g,} dan himpunan sisinya adalah E = {ab,bc,cd,de,ef,af,ag,gh,}. Selanjutnya diperoleh order dari graf G adalah 8 dan ukuran dari G adalah 9.

2.2 Jenis-jenis Graf

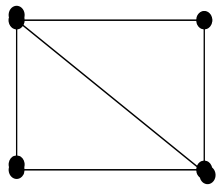
Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori atau jenis tergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan pada graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi gelang, berdasarkan jumlah titik atau berdasarkan orientasi arah pada sisi dan berdasarkan struktur.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi gelang pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu (Munir. R,2012):

1. Graf Sederhana (*Simple Graph*)

   Graf sederhana adalah graf yang tidak mempunyai sisi ganda maupun gelang. Pada graf sederhana sisi adalah pasangan tidak *terurut (unordered pairs).*

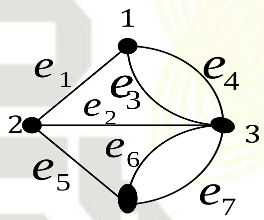
Jadi, menuliskan sisi (u, v) sama saja dengan (v, u). Contoh dari graf sederhana dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Graf Sederhana

2. Graf Tak Sederhana (*Unsimple Graph*)

Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu: graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang titik bisa lebih dari dua buah. Sedangkan graf semu adalah graf yang mengandung gelang *(loop)*. Contoh dari graf tak sederhana dapat dilihat pada Gambar 2.3.

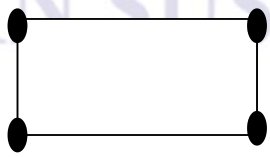


Gambar 2.3 Graf Tak Sederhana

Berdasarkan orientasi arah pada sisinya, maka secara umum graf dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu (Munir, 2012):

1. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

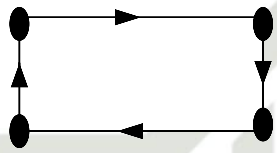
Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Contoh dari graf tak berarah dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf Tak Berarah

2. Graf Berarah (*Directed Graph*)

Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisinya diperhatikan atau sisinya berbeda. Contoh dari graf tak berarah dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf Berarah

Pada graf sederhana (*simple graph*) terdapat beberapa graf khusus, yaitu:

Berdasarkan strukturnya, maka secara umum graf dapat dibedakan menjadi enam jenis, yaitu (Wibisono, 2008):

1. *Multigraph*

   Multigraph adalah graf yang mempunyai satu atau lebih pasangan sisi ganda yang menghubungkan dua buah titiknya.
2. *Pseudograph*

   Pseudograph adalah graf yang mempunyai satu atau lebih pasangan sisi ganda yang menghubungkan dua buah titiknya dan memiliki satu atau lebih *loop* pada titiknya.
3. *Trivialgraph*

   Trivialgraph adalah graf yang hanya terdiri dari satu titik.
4. Graf lengkap

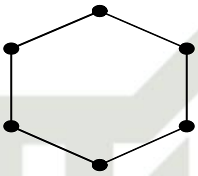
   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya terhubung dengan semua titik yang lain dengan hanya satu sisi.
5. Graf teratur

   Graf teratur adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap titiknya adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur berderajat r.

Pada graf sederhana (simple graph) terdapat beberapa graf khusus, yaitu:

1. Graf Lingkaran (*Cycle*)

Graf lingkaran merupakan graf yang dibentuk dari graf lintasan tertutup, dinotasikan dengan C_n. Contoh dari graf lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf Lingkaran C_6

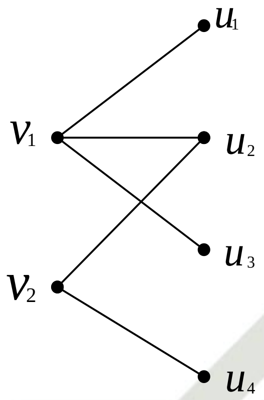
2. Graf Lintasan (*Path*)

Graf lintasan adalah suatu graf berorde n yang memiliki titik awal v_1 dan titik akhir v_n masing-masing berderajat satu dan titik yang lain berderajat dua, dinotasikan dengan P_n. Contoh dari graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.7.

Gambar 2.7 Graf Lintasan P_4

3. Graf Bipartit

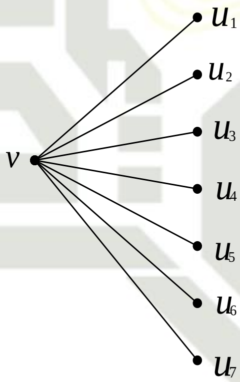
Suatu graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian v_1 dan v_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di v_1 ke sebuah simpul di v_2 disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai $G(v_1, v_2)$.



Gambar 2.8 Graf bipartite $K_{2,4}$

4. Graf Bintang

Graf bintang, dinotasikan dengan S_n adalah suatu graf bipartit lengkap yang semua simpul dipartisi yang lain. Notasi graf bipartit lengkap dengan banyaknya simpul dibagian yang satu m dan bagian yang lain n adalah $K_{m.n}$.



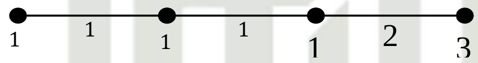
Gambar 2.9 Graf bintang $S_7 \approx K_{1,7}$

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemetaan yang memasangkan elemen-elemen graf dengan bilangan-bilangan bulat positif. Suatu graf Pelabelan dengan domain himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labelling*), pelabelan dengan domain himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge labelling*), dan pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi disebut pelabelan total (*total labelling*).

Definisi 2.2 (Wallis, 2001) Bobot (*weight*) dari elemen graf merupakan jumlah dari semua label yang berhubungan dengan graf tersebut. Bobot dari titik v pada pelabelan total adalah label titik v ditambah dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v, yaitu

$$w_f(v) = f(v) + \sum_{uv \in E} f(uv)\,.$$



Gambar 2.10 Pelabelan Total pada P_4

Misalkan f adalah pelabelan total pada P_4 seperti pada Gambar 2.11, dimana:

$f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = f(v_1v_2) = f(v_2v_3) = 1$

$f(v_4) = 3$

$f(v_3v_4) = 2.$

Maka bobot titikv_1, v_2, v_3 dan v_4 masing-masing adalah

$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) = 1 + 1 = 2$

$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 1 + 1 + 1 = 3$

$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = 1 + 1 + 2 = 4$

$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_3v_4) = 3 + 2 = 5.$

Salah satu jenis pelabelan yang belakangan ini sering menjadi perbincangan yaitu pelabelan total tak teratur. Pelabelan total tak teratur pertama kali diperkenalkan oleh Bača, dkk pada tahun 2007. Pelabelan total tak teratur terdiri dari pelabelan total tak teratur sisi, pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur total. Berikut ini penjelasan tentang jenis pelabelan total tak teratur, yaitu :

2.3.1 Pelabelan-k Total Tak Teratur Titik

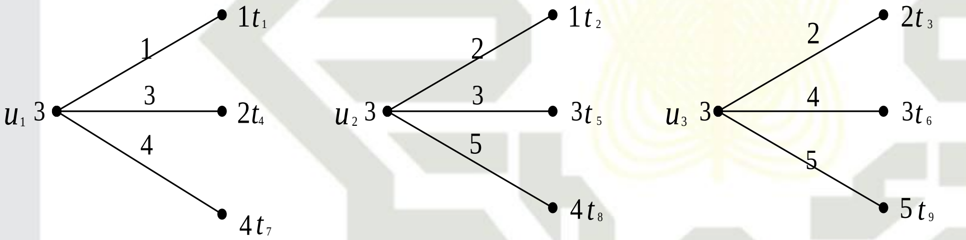
Pada tahun 2007, Baca memperkenalkan pelabelan nilai total ketidakteraturan titik. Pelabelan total tak teratur titik sudah banyak digunakan untuk mencari nilai total tak keteraturan titik dari berbagai macam graf. Berikut definisi dari pelabelan total tak teratur titik:

Definisi 2.3 (Bača, dkk., 2007) Pelabelan-k total disebut pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda maka $w_f(u) \neq w_f(v)$, dimana

$$w_f(u) = f(u) + \sum_{ux \in E} f(ux).$$

Nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf G, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik.

Berikut ini disajikan contoh pelabelan- k total tak teratur titik pada graf bintang $3S_3$



Gambar 2.11 Pelabelan Total Pada $3S_3$

Selanjutnya akan dihitung bobot setiap titik pada $3S_3$

$$w_f(u_1) = f(u_1) + f(u_1t_1) + f(u_1t_4) + f(u_1t_7) + f(u_1t_7)$$
$$= 3 + 1 + 3 + 4 = 11$$
$$w_f(t_1) = f(u_1t_1) + f(t_1) = 1 + 1 = 2$$
$$w_f(t_4) = f(u_1t_4) + f(t_4) = 3 + 2 = 5$$
$$w_f(t_7) = f(u_1t_7) + f(t_7) = 4 + 4 = 8$$
$$w_f(u_2) = f(u_2) + f(u_2t_2) + f(u_2t_5) + f(u_2t_8) = 3 + 2 + 3 + 5 = 13$$
$$w_f(t_2) = f(u_2t_2) + f(t_2) = 2 + 1 = 3$$
$$w_f(t_5) = f(u_2t_5) + f(t_5) = 3 + 3 = 6$$
$$w_f(t_8) = f(u_2t_8) + f(t_8) = 5 + 4 = 9$$

$$w_f(u_3) = f(u_3) + f(u_3t_3) + f(u_3t_6) + f(u_3t_9) = 3 + 2 + 4 + 5 = 14$$
$$w_f(t_3) = f(u_3t_3) + f(t_3) = 2 + 2 = 4$$
$$w_f(t_6) = f(u_3t_6) + f(t_6) = 4 + 3 = 7$$
$$w_f(t_9) = f(u_3t_9) + f(t_9) = 5 + 5 = 10$$

Hasil perhitungan bobot titik pada graf bintang $3S_3$ diperoleh bobot setiap titik berbeda.

Hasil penelitian tentang nilai total ketakteraturan titik diberikan pada teorema-teorema berikut :

Teorema 2.1 (Ahmad, dkk., 2011) Misalkan G adalah graf (p, q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ. Maka

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \le tvs(G) \le p + \Delta - 2\delta + 1$$

Teorema 2.2(Baca, dkk., 2007) Misalkan K_p adalah graf lengkap dengan p titik, maka

$$tvs(K_p) = 2$$

Teorema 2.3 (Baca, dkk.,2007) Misal $K_{1,n}$ merupakan graf bintang dengan n pendant titik maka

$$tvs(K_{1,n}) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil$$

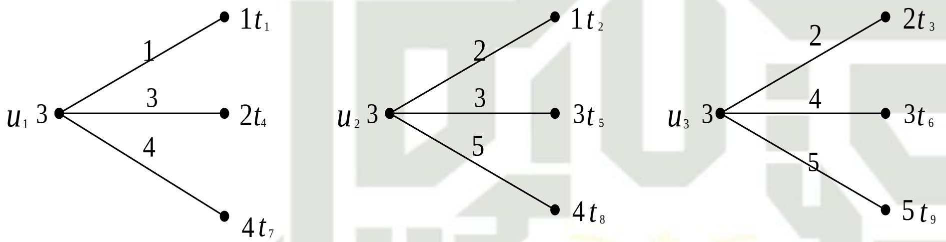
2.3.2 Pelabelan-k Total Tak Teratur Sisi

Pada tahun 2007, Baca memperkenalkan pelabelan tidak teratur lainnya yaitu pelabelan nilai total ketidakteraturan sisi. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur sisi:

Definisi 2.4 (Bača, dkk., 2007) Suatu pelabelan total $f: V \cup E \to \{1,2,\cdots,k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur sisi jika setiap dua sisi yang berbeda u_1v_1 dan u_2v_2 yang di $E(G)$ G memenuhi $w_f(u_1v_1) \ne w_f(u_2v_2)$, dengan $w_f(u_1v_1) = f(u_1) + f(u_1v_1) + f(v_1)$ dan $w_f(u_2v_2) = f(u_2) + f(u_2v_2) + f(v_2)$.

Nilai k terkecil sehingga suatu graf G dapat dilabeli dengan pelabelan- k total tak teratur sisi, dinotasikan dengan $tes(G)$, disebut nilai total ketakteraturan sisi dari graf G. (baca, dkk., 2007).

Berikut ini disajikan contoh pelabelan- k total tak teratur sisi pada graf bintang $3S_3$



Gambar 2.12 pelabelan total pada $3S_3$

Bobot pada sisi $3S_3$ adalah

$$w_f(u_1t_1) = f(u_1) + f(u_1t_1) + f(t_1) = 3 + 1 + 1 = 5$$
$$w_f(u_1t_4) = f(u_1) + f(u_1t_4) + f(t_4) = 3 + 3 + 2 = 8$$
$$w_f(u_1t_7) = f(u_1) + f(u_1t_7) + f(t_7) = 3 + 4 + 4 = 11$$
$$w_f(u_2t_2) = f(u_2) + f(u_2t_2) + f(t_2) = 3 + 2 + 1 = 6$$
$$w_f(u_2t_5) = f(u_2) + f(u_2t_5) + f(t_5) = 3 + 3 + 3 = 9$$
$$w_f(u_2t_8) = f(u_2) + f(u_2t_8) + f(t_8) = 3 + 5 + 4 = 12$$
$$w_f(u_3t_3) = f(u_3) + f(u_3t_3) + f(t_3) = 3 + 2 + 2 = 7$$
$$w_f(u_3t_6) = f(u_3) + f(u_3t_6) + f(t_6) = 3 + 4 + 3 = 10$$
$$w_f(u_3t_9) = f(u_3) + f(u_3t_9) + f(t_9) = 3 + 5 + 5 = 13$$

Penelitian mengenai nilai $tes(G)$ dilakukan oleh Baĉa, dkk., dengan diberikan batas atas dan batas bawah pada teorema berikut ini:

Teorema 2.4 (Baca, dkk., 2007) Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi tak kosong E, maka:

$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|.$$

Pelabelan total tak teratur sisi juga diperkenalkan oleh I.Rajasingh, dkk., dan digunakan untuk mencari graf seri paralel. Pada penelitian sebelumnya Baca, dkk memberikan nilai $tes\,(G)$ jika G adalah graf lintasan atau graf lingkaran. Hasil penelitian tersebut diberikan pada teorema-teorema berikut ini.

Teorema 2.5 (Baca, dkk., 2007) Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan banyaknya sisi n, dimana $n \geq 1$, maka

$$tes(P_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

Teorema 2.6 (Baca, dkk., 2007) Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan banyaknya sisi n, dimana $n \geq 3$, maka

$$tes(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

Penelitian mengenai nilai total ketakteraturan sisi untuk kelas graf tertentu juga telah dilakukan oleh Siddiqui, Ahmad, Nadeem, dan Bashir. Mereka memberikan nilai tes dari gabungan saling lepas dari beberapa graf matahari .

Teorema 2.7 (Salman, dkk.,2013) Misalkan $p, n \geq 3$ dua bilangan bulat. Maka nilai total ketakteraturan sisi dari gabungan saling lepas dari p graf matahari yang isomorph adalah $\left\lceil \frac{2(pn+1)}{3} \right\rceil$.

2.3.3 Pelabelan-*k* Total Tak Teratur Total

Pelabelan total tak teratur total yang diperkenalkan oleh Marzuki, Salman, dan Miller dalam penelitiannya yang berjudul *on total irregularity strength on* cycles *and paths*.

Defenisi 2.5 (Marzuki, dkk., 2013) pelabelan- k total tak teratur total pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\cdots,k\}$ yang memenuhi $w_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$ berbeda untuk setiap $uv \in E(G)$ dan $w_f(u) = w_f(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$.

Nilai k terkecil sehingga suatu graf G dapat dilabeli dengan pelabelan- k total tak teratur total, dinotasikan dengan $ts(G)$, disebut nilai total ketakteraturan total dari graf G (Marzuki, dkk.,2013).

Pada penelitian Marzuki, Salman dan Miller diberikan batas bawah dari $ts(G)$. Di samping itu, diberikan juga nilai total ketakteraturan total dari graf lintasan dan lingkaran. Hasil-hasil yang diberikan sebagai berikut.

Teorema 2.8 (Marzuki, dkk., 2013) Untuk setiap graf G, berlaku

$$ts(G) \geq max\{tes(G), tvs(G)\}$$

Teorema 2.9 (Marzuki, dkk., 2013) Misalkan $n \geq 3$ suatu bilangan bulat positif dan C_n adalah lingkaran dengan n sisi. Maka

$$ts(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

Teorema 2.10 (Marzuki, dkk., 2013) Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan P_n adalah lintasan dengan n titik. Maka

$$ts(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil & untuk\ n = 2\ atau\ n = 5 \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil & untuk\ n\ lainnya \end{cases}$$

Hasil-hasil penelitian mengenai penentuan nilai total ketakteraturan total juga diberikan oleh Rismawati Ramdani yang berjudul “ Nilai Total Ketakteraturan Total Dari Dua *Copy* Graf Bintang”. Pada penelitian tersebut diberikan teorema berikut ini.

Teorema 2.11 (Ramdani., 2014) Misalkan $n \geq 2$. Maka

$$ts(2S_n) = n + 1.$$

Bukti. Graf $2S_n$ memiliki $2n$ titik berderajat 1 dan 2 titik berderajat n. Maka bobot titik terkecil dari $2S_n$ sedikitnya 2 dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat 1 sedikitnya $2n + 1$. Sehingga label terbesar dari titik berderajat 1 adalah sedikitnya $\left\lceil\frac{2n+1}{2}\right\rceil = n+1$. Bobot terkecil dari suatu titik berderajat n sedikitnya $2n+2$ dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat n adalah $2n+2$, sehingga label terbesar dari suatu titik berderajat n adalah sedikitnya $\left\lceil\frac{2n+3}{n+1}\right\rceil = 3$. Dengan demikian, $tvs(2S_n) \geq max\{n+1,3\} = n+1$

Selain itu, banyaknya sisi dari $2S_n$ adalah $2n$, sehingga berdasarkan Teorema 2.4,

$tes(2S_n) \geq \left\lceil\frac{2n+2}{3}\right\rceil$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.8,

$ts\ (2S_n) \geq max\left\{tes\ \left\lceil\frac{2n+2}{3}\right\rceil, tvs\ (n+1)\right\}$

$ts(2S_n) \geq n+1$

Selanjutnya, akan di tunjukkan bahwa $ts(2S_n) \leq n+1$.

a. *Kasus I*: Untuk $n \in \{2,3,4\}$.

Definisikan suatu pelabelan total f pada $2S_n$ sebagai berikut:

$$f(u_i) = \begin{cases} 1\ untuk\ i = 0; \\ \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil untuk\ 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor + 1\ untuk\ 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1\ untuk\ i = 0; \\ \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil untuk\ i = 1; \\ i+1\ untuk\ 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(v_ov_i) = \begin{cases} 3\ untuk\ i = 1; \\ \left\lceil\frac{n+4}{2}\right\rceil untuk\ i = 2; \\ 4\ untuk\ i = 3; \\ 5\ untuk\ i = 4. \end{cases}$$

Berdasarkan pelabelan f di atas, diperoleh bobot pada setiap titik dan setiap sisi sebagai berikut:

1. Untuk $n = 2$

   Bobot pada setiap titik pada $2S_2$ adalah

$$w_f(u_0) = 4;$$
$$w_f(u_1) = 2;$$
$$w_f(u_2) = 3;$$
$$w_f(v_0) = 7;$$
$$w_f(v_1) = 5;$$
$$w_f(v_2) = 6;$$

   Bobot pada setiap sisi $2S_2$ adalah

$$w_f(u_o u_1) = 3;$$
$$w_f(u_0 u_2) = 4;$$
$$w_f(v_0 v_1) = 6;$$
$$w_f(v_0 v_2) = 7.$$

   dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot semua sisi pada $2S_2$ berbeda.

2. Untuk $n = 3$.

   Bobot pada setiap titik pada $2S_2$ adalah

$$w_f(u_0) = 6;$$
$$w_f(u_1) = 2;$$
$$w_f(u_2) = 3;$$
$$w_f(u_3) = 4;$$
$$w_f(v_0) = 12;$$
$$w_f(v_1) = 5;$$
$$w_f(v_2) = 7;$$
$$w_f(v_3) = 8.$$

   Bobot pada setiap sisi pada $2S_3$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3;$$
$$w_f(u_0u_2) = 4;$$
$$w_f(u_0u_3) = 5;$$
$$w_f(v_0v_1) = 6;$$
$$w_f(v_0v_2) = 8;$$
$$w_f(v_0v_3) = 9.$$

Dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan semua sisi pada $2S_3$ berbeda.

3. Untuk $n = 4$.

Bobot pada setiap titik pada $2S_4$ adalah

$$w_f(u_0) = 9;$$
$$w_f(u_1) = 2;$$
$$w_f(u_2) = 3;$$
$$w_f(u_3) = 4;$$
$$w_f(u_4) = 5;$$
$$w_f(v_0) = 17;$$
$$w_f(v_1) = 6;$$
$$w_f(v_2) = 7;$$
$$w_f(v_3) = 8;$$
$$w_f(v_4) = 10.$$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_4$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3;$$
$$w_f(u_0u_2) = 4;$$
$$w_f(u_0u_3) = 5;$$
$$w_f(u_0u_4) = 6;$$
$$w_f(v_0v_1) = 7;$$
$$w_f(v_0v_2) = 8;$$

$$w_f(v_0v_3) = 9;$$
$$w_f(v_0v_4) = 11.$$

Dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan semua sisi pada $2S_4$ berbeda.

b. *Kasus 2* : Untuk $n \geq 5$.

Defenisikan suatu pelabelan f pada $2S_n$, untuk $n \geq 5$, sebagai berikut:

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 \; untuk \; i = 0; \\ \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil untuk \; 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 \; untuk \; 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 \; untuk \; i = 0; \\ \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \; untuk \; 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(v_0v_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \; untuk \; 1 \leq i \leq n.$$

Berdasarkan pelabelan f diatas, diperoleh bobot pada setiap titik dan bobot pada setiap sisi di $2S_n$ sebagai berikut:

1. Bobot pada setiap titik di $2S_n$, untuk $n \geq 5$, adalah

$$w_f(u_0) = \begin{cases} \frac{n^2 + 4n + 3}{4} \; untuk \; n \; ganjil; \\ \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \; untuk \; n \; genap; \end{cases}$$

$$w_f(u_i) = i + 1 \; untuk \; 1 \leq i \leq n;$$

$$w_f(v_0) = \begin{cases} \frac{3n^2 + 4n + 5}{4} \; untuk \; n \; ganjil; \\ \frac{3n^2 + 4n + 4}{4} \; untuk \; n \; genap; \end{cases}$$

$$w_f(v_i) = n + i + 1 \; untuk \; 1 \leq i \leq n.$$

2. Bobot pada setiap titik di $2S_n$, untuk $n \geq 5$, adalah

$$w_f(u_0u_i) = i + 2 \; untuk \; 1 \leq i \leq n;$$

$$w_f(v_0v_i) = n + i + 2 \; untuk \; 1 \leq i \leq n.$$

Jelas bahwa tidak ada dua titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada dua sisi yang memiliki bobot yang sama. Dengan demikian, f adalah suatu pelabelan-$(n+1)$ total tak teratur total pada $2S_n$, sehingga

$ts(2S_n) = n + 1.$ ■

2.3.4 Induksi Matematika

Induksi matematik merupakan tekhnik pembuktian yang baku didalam matematika. Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk kedalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas. Adapun prinsip-prinsip induksi matematika yaitu:

a. Induksi sederhana

Induksi sederhana berbunyi sebagai berikut:

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**. Berisi asumsi(andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi** bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bukat positif n.

Basis induksi digunakan untuk memperlihatkan bahwa pernyataan tersebut benar bila n diganti 1 yang merupakan bilangan bulat pos[itif terkecil. Kemudian kita hrus memperlihatkan bahwa implikasi $p(n) \rightarrow p(n+1)$ benar untuk setiap bilangan bulat postif. Untuk membuktikan implikasi tersebut benar untuk setiap bilangan bulajt positif n, kita perlu menunjukkan bahwa $p(n+1)$ tidak mungkin salah bila $p(n)$ benar. Hal ini diselesaikan dengan cara memperlihatka bahwa berdasarkan hipotesis $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga harus benar.

b. Induksi yang dirampatkan

Kadang-kadang kita ingin membuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $\geq n_0$, jadi tidak hanya bilangan bulat yang mulai dari 1 saja. Prinnsip induksi sederhana dapat dirampatkan(*generalized*) untuk menunjukkan hal ini sebagai berikut:

Misalkan $p(n)$ adalah pernytaan perihal bilanga bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$ untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$, sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Contoh: untuk semua bilangan bulat tidak negative n, buktikan dengan induksi matematika bahwa

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian misalkan $p(n)$ adalah proposisi bilangan bulat tidak negative n, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

(i) Basis induksi: $p(0)$ benar, karena untuk $n = 0$ (bilagan bulat tidak negative pertama), kita peroleh:

$$\begin{aligned} 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 \\ &= 2^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) Langkah induksi: misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Diasumsikan benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar , yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Hal ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak negative n, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$. ■

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian fundamental yang mengarah kepada penjelasan untuk memperoleh model ilmiah dalam menentukan nilai total ketakteraturan total dari tiga *copy* graf bintang sebagai berikut:

1. Diberikan graf $3S_n$ adalah tiga *copy* graf bintang dengan $n \geq 2$.
2. Menentukan batas bawah $tvs(3S_n)$ dengan menggunakan induksi matematika
3. Menentukan batas bawah $tes\ (3S_n)$ dengan menggunakan Teorema 2.4
4. Setelah didapatkan langkah 1 dan 2, kemudian tentukan batas bawah dari $ts(3S_n)$ dengan menggunakan Teorema 2.8
5. Menentukan pelabelan total tak teratur total pada tiga *copy* graf $3S_n$ untuk $2 \leq i \leq 10$ dengan label terbesarnya adalah batas bawah yang diperoleh dari langkah 3.
6. Menentukan rumus untuk pelabelan titik $3S_n$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang yang terdapat pada langkah 4.
7. Menentukan rumus untuk pelabelan sisi $3S_n$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada langkah 4.
8. Berdasarkan langkah yang didapat pada langkah 5 dan 6, dapat ditentukan rumus untuk bobot titik $3S_n$
9. Kemudian berdasarkan langkah yang didapat pada langkah 5 dan 6, dapat ditentukan rumus untuk bobot sisi $3S_n$
10. Membuktikan bahwa pelabelan yang diperoleh merupakan pelabelan-k total tak teratur total dari pada tiga *copy* graf $3S_n$ untuk $n \geq 2$. Dengan membuktikan bahwa tidak ada titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada sisi yang memiliki bobot yang sama, dengan mengunakan induksi matematika
11. Mengaplikasikan rumus $ts(3S_n)$ yang telah diperoleh untuk $n = 12$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari bab IV tentang nilai ketakteraturan total dari tiga copy graf bintang yang dinotasikan dengan $3S_n$ dapat disimpulkan bahwa $ts(3S_n) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$. Hal ini telah dibuktikan dengan $ts(3S_n) \geq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ dan $ts(3S_n) \leq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$. Untuk $ts(3S_n) \leq \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan$-\left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$ total tak teratur total pada graf $3S_n$ dengan menggunakan label maksimum $\left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil$.

Adapun rumus pelabelaan sisi, pelabelan titik, bobot sisi, dan bobot titik pada tiga copy graf bintang yaitu:

a. Pelabelan titik (vertex) pada graf $3S_n$

1. Untuk $n \in \{2,3\}$.

$$f(u_i) = \begin{cases} 4\ untuk\ i = 1,2,3,\ \ dan\ n = 2 \\ 3\ untuk\ i = 1,2,3,\ \ dan\ n = 3 \end{cases}$$

$$f(t_j) = \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\ untuk\ j = 1,2, \dots ,3n$$

2. Untuk $n \geq 4$

$$f(f_{tj}) = \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\ untuk\ j = 1,2,3, \dots ,3n$$

$$f(u_i) = 1\ untuk\ i = 1,2,3$$

b. Pelabelan sisi (edge) pada graf $3S_n$

1. Untuk $n \in \{2,3\}$

$$f(u_i t_j) = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 1\ untuk\ j = 1,2, \dots ,3n$$

2. Untuk $n \geq 4$

$f(u_i t_j) = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 1$ Untuk $i = 1$ dan $j\ \equiv 1(mod3), i = 2\ dan\ j \equiv 2(mod3), i = 3\ dan\ j \equiv 3(mod3)$

5.2 Saran

Dalam Tugas Akhir ini penulis membahas tentang nilai total ketakteraturan total dari tiga copy graf bintang yang dinotasikan dengan $(3S_n)$. Bagi pembaca yang berminat untuk meneruskan Tugas Akhir ini, penulis sarankan untuk melanjutkan pembahasan tentang nilai ketakteraturan total dari tiga copy graf bintang yang diperumum yang dinotasikan dengan (mS_n) serta pembaca juga dapat melanjutkan pembahasan tentang nilai ketakteraturan total dari graf theta yang seragam.

DAFTAR PUSTAKA

Bača, dkk. "On Irregular Total Labelings" *Discrete Math*. Vol. 307, halaman 1378-1388, 2007.

Julaeha, Siti, Ita Luspitasari, and Esih Sukaesih. "Pelabelan Total Tak Teratur Total pada Graf Bunga." *JURNAL ISTEK* 10.1 2017.

Marzuki, Corry Corazon. "Nilai Ketakteraturan Total dari p-copy Graf Theta Tak Seragam." *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri*. 2018.

Marzuki.C.C dkk. "On The Total Irregularity Strength of Cycles and Paths" *Far East Journal of Mathematical Sciences* . Vol. 82, halaman 1-21, 2013.

Munir, R. "*Matematika Diskrit*". Edisi 3, halaman 353, 356-357. Informatika, Bandung. 2009.

Munir, R. "*Matematika Diskrit*". Revisi Kelima,. Informatika Bandung, Bandung. 2012.

Purwanto. "*Teori Graf*". Malang: IKIP MALANG. 1998

Ramdani, Rismawati. "Nilai Total Ketakteraturan Total dari Dua Copy Graf Bintang." *JURNAL ISTEK* 8.2 2014.

Ramdani, R., and A. N. M. Salman. "On The Total Irregularity Strength of Some Cartesian Product Graphs." *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 10.2 (2013): 199-209.

Rosen, K. "*Discrete Mathematics and Its Applications"*. Eighth Edition,. McGraw-Hill, New York 2007

Wallis, W.D. "*Magic Graphs*". Birkhäuser Boston, New York. 2001.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Benteng, pada tanggal 28 Oktober 1997, sebagai anak pertama dari empat bersaudara dari pasangan bapak Zainuddin dan ibu Nirwana, dengan tiga saudara yaituakmal wahyudi, amsyar Mahdi, dan abil azwad. Penulis menyelesaikan pendidikan formal taman kanak-kanak di TK DDI Benteng paa tahun 2003, sekolah dasar di SDN 080 benteng, sekolah menengah pertama di SMPN 1 sungai batangpada tahun 2012 dan menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas dengan jurusan ilmu pengetahuan social pada tahun 2015.

Setelah menyelesaiakn pendidikan dibangku SMA, penulis melanjutkan pendidikan keperguruan tinggi di Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau Dan Lulus Di Fakultas Sains Dan Tekhnologi Dengan Jurusan Matematika pada bulan juli 2015. Penulis melaksanakan kerja praktek di KC. BPJS pekanbaru dengan judul “ **Peramalan Jumlah Peserta BPJS PBI Dengan Menggunakan Metode *Fuzzy Time Series Cheng*”** yang dibimbing oleh ibu Rahmawati, M.Si pada bulan agustus-september 2019. Penulis mengikuti kuliah kerja nyata (KKN) di kabupaten Indragiri hilir, kecematan tempuling , desa Teluk kiambang. Pada tanggal 28 juli 2020 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir “ **Nilai Ketakteraturan Total Dari Tiga *Copy* Graf Bintang**” dibawh bimbingan ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si