



24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific convention



**moNGeometrija**

**2008**

Serbia | Vrnjačka Banja | September 25<sup>th</sup> - 27<sup>th</sup> | [www.mongeometrija.org](http://www.mongeometrija.org)

**PROCEEDINGS | ZBORNIK RADOVA**

**UNDER THE AUSPICES OF:**

**The Republic of Serbia / Ministry of Education  
University of Niš  
Faculty of Architecture and Civil Engineering of Niš  
The Faculty of Mechanical engineering of Niš  
Faculty of Sciences and Mathematics of Niš  
The Faculty of Occupational Safety of Niš  
Donors**

**POKROVITELJI:**

**Ministarstvo prosvete Republike Srbije  
Univerzitet u Nišu  
Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu  
Mašinski fakultet u Nišu  
Prirodno-matematički fakultet u Nišu  
Fakultet zaštite na radu u Nišu  
Donatori**

24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific conference  
24. nacionalni i 1. međunarodni naučni skup

**moNGeometrija 2008**

**PROCEEDINGS | ZBORNİK RADOVA**

September 25<sup>th</sup> - 27<sup>th</sup> 2008

24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific conference  
24. nacionalni i 1. međunarodni naučni skup

## **moNGeometrija 2008**

**Publisher | Izdavač**

**Faculty of Architecture and Civil Engineering in Niš  
Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu**

**Serbian Society for Geometry and Graphics  
Srpsko udruženje za geometriju i grafiku  
SUGIG**

**Title of Publication | Naziv publikacije**

**PROCEEDINGS | ZBORNIK RADOVA**

**Reviewers | Recenzenti**

Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Biserka Marković, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD

**Editor-in-Chief | Glavni urednik**

Biserka Marković, PhD

**Co-Editor | Zamenik urednika**

Sonja Krasić, PhD

**Text formatting | Tehnička obrada teksta**

Vladan Nikolić

**ISBN 978-86-80295-83-1**

Number of copies printed | Tiraž: 100 primeraka / CDs  
Printing | Štampa: M-COPS Niš

Izdavač zadržava sva prava. Reprodukција pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced without either the prior written permission of the publisher.

**Scientific committee | Naučni odbor**

Stachel Hellmuth, PhD  
Weiss Gunter, PhD  
Natasha Danilova, PhD  
Hubert Gollek, PhD

**Organization committee | Organizacioni odbor**

Biljana Predić, PhD  
Dragan Aranđelović, PhD  
Jovan Mandić, architect  
Mića Stanković, PhD  
Mihailo Đurđanović, PhD  
Ljiljana Radović, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD  
Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Biserka Marković, PhD

**Executive committee | Izvršni odbor**

Biserka Marković, PhD  
Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Sonja Krasić, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD  
Ljiljana Radović, PhD  
Mihailo Đurđanović, PhD

## CONTENTS | SADRŽAJ

|  |    |
|--|----|
| Foreword   Predgovor .....   | 13 |
| <b>Aleksandar Čučaković, Magdalena Dimitrijević</b><br>NAČIN ODREĐIVANJA TANGENTI U SINGULARNOJ<br>TAČKI PROSTORNE KRIVE 4.REDA .....              | 16 |
| ONE PROCEDURE FOR DETERMINATION OF TANGENTS<br>IN THE SINGULAR (DOUBLE)<br>POINT OF SPATIAL CURVE OF 4 <sup>TH</sup> ORDER (english summary).....  | 24 |
| <b>Aleksandar Čučaković, Magdalena Dimitrijević</b><br>VARIJANTE MEĐUSOBNOG POLOŽAJA DIREKTRISA KOSOG<br>JEDNOGRANOG ELIPTIČKOG HIPERBOLOIDA ..... | 25 |
| VARIETIES OF SPATIAL SETTING OF DIRECTRICES<br>OF OBLIQUE ELLIPTICAL HYPERBOLOID(english summary).....   | 37 |
| <b>Marija Ćirić</b><br>GRAPHICAL PRESENTATION OF SOME CONSTANT<br>MEAN CURVATURE SURFACES.....   | 38 |
| GRAFIČKI PRIKAZ NEKIH POVRŠI KONSTANTNE<br>SREDNJE KRIVINE (rezime na srpskom) .....   | 47 |
| <b>Natasha K. Danailova</b><br>FRACTAL GEOMETRY - SYNTHESIS OF ART AND SCIENCE .....   | 48 |
| FRAKTALNA GEOMETRIJA - SINTEZA<br>UMETNOSTI I NAUKE (rezime na srpskom) .....  | 60 |
| <b>Hubert Gollek</b><br>PROJECTIVE DUALS OF NULL CURVES.....   | 61 |
| PROJEKTIVNI DUALI NUL KRIVA (rezime na srpskom) .....  | 75 |
| <b>Lozica Ivanović, Danica Josifović, Zoran Ivanović</b><br>MODELIRANJE I VIZUELIZACIJA GEROTORSKIH PUMPI .....                                    | 76 |
| MODELING AND VISUALIZATION<br>OF THE GEROTOR PUMPS (english summary).....  | 86 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Milorad Janić, Dragomir Grujović, Gordana Djukanović</b><br>PRIMENA INŽENJERSKE GRAFIKE<br>U PEJZAŽNOM PROJEKTOVANJU .....                                 | 87  |
| USAGE OF ENGINEERING GRAPHICS<br>IN LANDSCAPE PROJECTION (english summary).....   | 94  |
| <b>Milorad Janić, Dragomir Grujović, Gordana Djukanović</b><br>MODELOVANJE ELEMENATA PEJZAŽNOG PROJEKTOVANJA .....  | 95  |
| MODELLING OF ELEMENTS<br>IN LANDSCAPE PROJECTION (english summary).....   | 103 |
| <b>Marijana Kalabić</b><br>KONUSNA ANAMORFOZA .....   | 104 |
| CONE ANAMORPHOSES (english summary).....  | 116 |
| <b>Vladimir Kubet, Milena Krklješ, Ksenija Hiel</b><br>GEOMETRIJA UGAONIH OBJEKATA MODERNE<br>U NOVOM SADU .....  | 117 |
| GEOMETRY OF CORNER BUILDINGS FROM<br>MODERNA PERIOD IN NOVI SAD (english summary).....  | 123 |
| <b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b><br>DETERMINATION OF ABSOLUTE CONIC FIGURE<br>IN GENERAL COLLINEAR SPACES .....  | 124 |
| ODREĐIVANJE SLIKE APSOLUTNE KONIKE<br>U OPŠTE KOLINEARNIM POLJIMA (rezime na srpskom) .....   | 135 |
| <b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b><br>MAPPING A SPHERE INTO A SPHERE WITH<br>THE AID OF THE ABSOLUTE CONIC OF SPACE<br>IN THE GENERAL COLLINEAR SPACES ..... | 136 |
| PRESLIKAVANJE SFERE U SFERU POMOĆU<br>APSOLUTNE KONIKE PROSTORA U OPŠTE<br>KOLINEARNIM PROSTORIMA (rezime na srpskom) .....                                   | 143 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b><br>MAPPING OF A SPHERE INTO A ROTATIONAL ELLIPSOID<br>WITH THE AID OF THE ABSOLUTE CONIC<br>OF SPACE IN GENERAL COLLINEAR SPACES .....   | 144 |
| PRESLIKAVANJE SFERE U ROTACIONI ELIPSOID<br>POMOĆU APSOLUTNE KONIKE PROSTORA<br>U OPŠTE KOLINEARNIM PROSTORIMA (rezime na srpskom) .....   | 154 |
| <b>Biserka Marković, Marija Jevrić, Vladan Nikolić</b><br>DETERMINING THE CHARACTERS OF INFINITELY DISTANT<br>POINTS OF 4 <sup>th</sup> ORDER CURVE MADE BY THE SQUARE<br>TRANSFORMATION IN AFFINED PENCIL OF CONIC IH .....     | 155 |
| OREĐIVANJE KARAKTERE BESKONAČNO DALEKIH<br>TAČAKA KRIVE 4. REDA NASTALE KVADRATNOM<br>TRANSFORMACIJOM U AFINOM<br>PRAMENU KONIKA IH (rezime na srpskom).....   | 168 |
| <b>Slobodan Mišić, Marija Obradović</b><br>KONKAVNA KUPOLA NAD HENDEKAGONALNOM OSNOVOM .....   | 169 |
| CONCAVE CUPOLA WITH<br>HENDECAGONAL BASE (english summary) .....   | 179 |
| <b>Branko Malešević</b><br>APPLICATIONS OF GROEBNER BASES<br>IN COMPUTER GRAPHICS .....  | 180 |
| PRIMENA BAZISA GROEBNER<br>U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI (rezime na srpskom) .....   | 186 |
| <b>Milan Mitić, Biljana Jović, Aleksandar Čučaković</b><br>PREDLOZI ZA UNAPREĐENJE PRIMENE<br>NACRTNE GEOMETRIJE U NASTAVNOM PROCESU<br>NA ODSEKU ZA PEJZAŽNU ARHITEKTURU,<br>ŠUMARSKOG FAKULTETA, UNIVERZITETA U BEOGRADU ..... | 187 |
| SUGGESTIONS FOR IMPROVED APPLYING OF DESCRIPTIVE<br>GEOMETRY THROUGH TEACHING AT DEPARTMENT<br>FOR LANDSCAPE ARCHITECTURE, FACULTY OF FORESTRY,<br>UNIVERSITY OF BELGRADE (english summary) .....                                | 197 |



|  |     |
|--|-----|
| <b>Miodrag Nestorović, Aleksandar Čučaković, Biljana Jović</b><br>GEOMETRIJSKA KORELACIJA NABORANIH PROSTORNIH<br>STRUKTURA U FUNKCIJI BIONIKE .....         | 198 |
| GEOMETRICAL CORRELATION FOLDED SPACE<br>STRUCTURES IN FUNCTION OF BIONIC (english summary) .....   | 208 |
| <b>Marija Obradović, Slobodan Mišić</b><br>PREVOĐENJE KONKAVNIH KUPOLA DRUGE VRSTE<br>U TRIDIMENZIONALNE KONSTRUKTIVNE SISTEME -<br>PROSTORNE REŠETKE .....  | 209 |
| TRANSPOSING THE CONCAVE CUPOLAE OF SECOND<br>SORT INTO TRIDIMENSIONAL SPATIAL STRUCTURES -<br>SPACE FRAMES (english summary) .....                           | 221 |
| <b>Marija Obradović, Maja Petrović</b><br>PROSTORNA INTERPRETACIJA HÜGELSCHÄFFER-OVE<br>KONSTRUKCIJE JAJASTE KRIVE .....                                     | 222 |
| THE SPATIAL INTERPRETATION OF HÜGELSCHÄFFER'S<br>CONSTRUCTION OF THE EGG CURVE (english summary) .....   | 232 |
| <b>Ratko Obradović, Branislav Beljin</b><br>MODELING TRANSITIONAL DEVELOPABLE<br>SURFACES IN COMPUTER GRAPHICS - TRANSITION<br>FROM POLYGON TO POLYGON ..... | 233 |
| MODELIRANJE PRELAZNIH RAZVOJNIH<br>POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI - PRELAZ SA<br>POLIGONA NA POLIGON (rezime na srpskom).....                                | 243 |
| <b>Branislav Popkonstantinović,<br/>Zorana Jelić, Vladimir Čalić</b><br>KONSTRUKTIVNA GEOMETRIJA I<br>KINEMATIKA MEHANIČKIH ČASOVNIKA .....                  | 244 |
| THE CONSTRUCTIVE GEOMETRY AND<br>KINEMATICS OF MECHANICAL CLOCKS (english summary).....  | 259 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Branislav Popkonstantinović, Dragan Petrović</b><br>OSNOVNI PRINCIPI I KONSTRUKTIVNA REŠENJA<br>KOMPENZACIJE TEMPERATурсKE DILATACIJE KLATNA .....  | 260 |
| BASIC PRINCIPLES AND CONSTRUCTIVE SOLUTIONS<br>OF THE COMPENSATION OF<br>THE PENDULUM TEMPERATURE DILATATION (english summary)   | 270 |
| <b>Branislav Popkonstantinović, Nikola Mladenović</b><br>EVOLUCIJA ZAPREČNO-IMPULSNIH MEHANIZAMA KROZ VEKOVE.  | 271 |
| THE ESCAPEMENT MECHANISMS EVOLUTION<br>THROUGH THE CENTURIES (english summary).....  | 287 |
| <b>Branislav Popkonstantinović, Aleksandar Čučaković</b><br>PROJEKAT I KONSTRUKCIJA<br>VELIKOG WESTMINSTERSKOG ČASOVNIKA .....   | 288 |
| THE PROJECT AND CONSTRUCTION OF<br>THE GREAT CLOCK OF WESTMINSTER (english summary).....   | 304 |
| <b>Ljiljana Radović, Slavik Jablan</b><br>VIZUELNA KOMUNIKACIJA KROZ VIZUELNU MATEMATIKU .....   | 305 |
| VISUAL COMMUNICATION THROUGH VISUAL MATHEMATICS.....   | 315 |
| <b>Zoran Rastović, Radovan Štulić, Radovan Jelača</b><br>STRUKTURA NASTAVE CAD-A METODOM MINIMALNO<br>GEOMETRIJE MAKSIMALNO TIPSKIH FORMI U<br>OSNOVNIM I SREDNJIM ŠKOLAMA I GIMNAZIJAMA ..... | 316 |
| THE STRUCTURE OF THE CAD-LECTURES - THE USE<br>OF THE METHOD "MINIMUM OF GEOMETRY<br>AND MAXIMUM OF THE FEATURES" IN PRIMARY,<br>SECONDARY AND GRAMMAR SCHOOLS (english summary).....          | 326 |
| <b>Vesna Stojaković, Predrag Šidanić</b><br>STRUKTURALIZACIJA I OBRADA ATRIBUTA ARHITEKTONSKOG<br>OBJEKTA RADI KREIRANJA IDEALIZOVANOG 3D MODELA .....   | 327 |
| STRUCTURING AND PROCESSING ARCHITECTURE<br>OBJECT ATTRIBUTES IN PURPOSE OF<br>CREATING IDEALIZED 3D MODEL (english summary).....   | 335 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Tima Segedinac, Milan Segedinac</b><br>KONSTRUKTIVNA GEOMETRIJA U FUNKCIJI<br>OBRADE SLIKE NA RAČUNARU .....  | 336 |
| DESCRIPTIVE GEOMETRY AND FINISHING<br>PICTURE ON THE COMPUTER (english summary).....   | 343 |
| <b>Predrag S. Stanimirović, Marko D. Petković, Milan Zlatanović</b><br>VISUALIZATION IN OPTIMIZATION WITH MATHEMATICA .....  | 344 |
| VIZUALIZACIJA I OPTIMIZACIJA U PROGRAMSKOM<br>PAKETU MATHEMATICA (english summary).....  | 355 |
| <b>Radovan B. Štulić, Vesna Z. Stojaković</b><br>ON POSSIBLE MODIFICATIONS OF DESCRIPTIVE<br>GEOMETRY TOPICS - ARCHITECTURAL CURRICULA<br>BASED UPON COMPETENCES AND LEARNING OUTCOMES ..... | 356 |
| O MOGUĆIM MODIFIKACIJAMA NASTAVE NACRTNE<br>GEOMETRIJE U SKLADU SA NASTAVNIM PLANOM STUDIJA<br>ARHITEKTURE ZASNOVANIM NA KOMPETENCIJAMA I<br>ISHODIMA UČENJA (rezime na srpskom).....        | 364 |
| <b>Risto Taševski</b><br>PROJEKCIJE 4D POVRŠI .....  | 365 |
| PROJECTIONS OF 4D SURFACES (english summary).....  | 373 |
| <b>Bojana Todorović</b><br>CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES .....  | 374 |
| KONSTRUKCIJA MINIMALNIH POVRŠI (rezime na srpskom).....  | 382 |
| <b>Ljubica Velimirović, Svetozar Rančić, Milan Zlatanović</b><br>GRAPHICAL PRESENTATIONS OF INFINITESIMAL<br>BENDING OF CURVES .....   | 383 |
| GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE BESKONAČNO<br>MALOG SAVIJANJA NEKIH KRIVIH (rezime na srpskom).....  | 393 |
| <b>Ljubica Velimirović, Milica Cvetković</b><br>DEVELOPABLE SURFACES AND APPLICATIONS .....  | 394 |
| RAZVOJNE POVRŠI I PRIMENE (rezime na srpskom).....   | 403 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Ljubica Velimirović, Predrag Stanimirović, Milan Zlatanović</b><br>GEOMETRY USING PROGRAM PACKAGE <i>MATHEMATICA</i> .....      | 404 |
| GEOMETRIJA UZ KORIŠĆENJE PAKETA<br><i>MATHEMATICA</i> (rezime na srpskom).....   | 413 |
| <b>Gunter Weiss</b><br>DESCRIPTIVE GEOMETRIC MAPPINGS -<br>A TOOL FOR ELEGANT PROOFS .....   | 414 |
| PRESLIKAVANJA IZ NACRTNE GEOMETRIJE -<br>ALAT ZA ELEGANTNE DOKAZE (rezime na srpskom).....   | 425 |
| <b>Biljana Jović, Branislav Popkonstantinović,<br/>Aleksandar Čučaković, Marija Jevrić</b><br>KLASIFIKACIJA STEREOGRAMA .....      | 426 |
| CLASSIFICATION OF STEREOGRAMS (english summary).....   | 435 |
| <b>Hellmuth Stachel</b><br>THE INFLUENCE OF THE GEOMETRY ON<br>RIGIDITY OR FLEXIBILITY (english summary).....                      | 436 |
| UTICAJ GEOMETRIJE NA KRUTOST I<br>FLEKSIBILNOST(rezime na srpskom).....  | 436 |
| <b>Ivana Marcikić</b><br>NASTAVA GEOMETRIJE NA FAKULTETU<br>PRIMENJENIH UMETNOSTI U BEOGRADU .....                                 | 437 |
| <b>Ivana Marcikić</b><br>MESTO NACRTNE GEOMETRIJE I PERSPEKTIVE<br>U VISOKOM ŠKOLSTVU - BOLONJSKA<br>DEKLARACIJA I POSLEDICE ..... | 439 |

## FOREWORD

There is almost four decades long tradition in organizing scientific conferences on descriptive geometry, all the way since the year 1953. The national conferences were held under different titles and organized by, then Yugoslav and later on Serbian, national societies for descriptive geometry. The conferences have been held, as a rule, once in a two years period.

The city of Nis hosted 10<sup>th</sup> conference in 1975. while celebrating 10<sup>th</sup> anniversary of University of Nis. In the year 2000. Nis hosted the conference again, this time celebrating 35<sup>th</sup> anniversary of the University. Upon foundation of Yugoslav society for descriptive geometry (JUNGIG), organization of scientific conferences has become one of the primary tasks for its members. The scope of activities was, and has remained, quite broad: education issues, human resources, the status of descriptive geometry in educational system. However, the first of all tasks remained to be presenting scientific achievements in the field of descriptive geometry.

Year by year, there is increasing number of fields that are supported by applied descriptive geometry, while submitted conference papers cover ever longer list of topics. Thus significance, actuality and longevity of descriptive geometry are being confirmed all over again. Its methods and graphical representations remain applicable even today. New software packages rely on the principles of descriptive geometry and help us visualize solutions to numerous technical problems.

Our publishing activities have begun by circulating assorted papers in the form of abstracts, followed by release of national conference Proceedings. In order to push our achievements and communication over national level, and to open wide our issues to international community, here we are with Proceedings of The First International Conference organized by Serbian Society for Descriptive Geometry.

Hereby we express our gratitude to members of Scientific Board, particularly our foreign colleagues for their understanding, support and cooperation.

Editor,  
Prof Biserka Markovic, Ph.D.

## PREDGOVOR

Tradicija održavanja stručno-naučnih skupova za nacrtanu geometriju duga je skoro četiri decenije, od 1953. godine do danas. Pod različitim nazivima, najpre u okviru bivše jugoslovenske, zatim državne zajednice Srbije i Crne Gore, danas kao aktivnost srpskog udruženja, UNGIG, za nacrtanu geometriju i kompjutersku grafiku, skup se po pravilu održava svake druge godine.

Niš je, 1975. godine, između ostalih, bio domaćin jubilarnog X Savetovanja, u godini proslave jubileja Univerziteta u Nišu - 15 godina visokoškolske nastave i 10 godina Univerziteta u Nišu. Sticajem okolnosti, 2000. godine, poklopila su se tri jubileja: XX Savetovanje, 40 godina visokoškolske nastave u Nišu i 35 godina Univerziteta u Nišu.

Po osnivanju jugoslovenskog udruženja, JUNGIG-a, ovo postaje jedna od stručnih aktivnosti udruženja. Sadržaj rada je bio i ostaje kompleksan: problemi edukacije, kadrovska pitanja, status nactne geometrije, ali pre svega saopštavanje stručnih i naučnih dostignuća.

Iz godine u godinu širi se spektar oblasti u kojima je geometrija našla svoju primenu i prezentuju radovi sa različitom tematikom. Tako se potvrđuje značaj, stalna aktuelnost i opravdava trajanje ove naučne discipline. Tradicionalno dugovečna geometrija, njena grafička-nacrtna praksa, naučno utemeljena, široko je primenljiva. Stoji pred novim kompjuterskim programima, koje treba da svojim rešenjima predvodi, kontroliše i u određenim segmentima koristi, kako bi pomogla da imaginacija tehničkih problema dobije što verniju vizuelizaciju.

Istorijat izdavaštva radova ovih naučnih skupova počinje od separatnih tekstova, štampanih u izvodima, nekad u celini, preko, relativno skromnih brošura, do Zbornika radova nacionalnog značaja sa međunarodnim učešćem. Odgovarajući potrebi da naše stvaralaštvo i komunikacije prerastu nacionalne okvire i što šire se otvore prema međunarodnim tokovima, ovo je Zbornik radova prve međunarodne Konferencije srpskog Udruženja.

Najsrdahnije zahvaljujemo članovima Naučnog odbora, pre svega cenjenim inostranim kolegama, za razumevanje, podršku i saradnju.

Urednik,  
prof. dr Biserka Marković

# PROSTORNA INTERPRETACIJA HÜGELSCHÄFFER-OVE KONSTRUKCIJE JAJASTE KRIVE

Marija Obradović <sup>1</sup>  
Maja Petrović <sup>2</sup>

## Rezime

*Konstrukcija jajaste kubne krive Hügelschäffer-ovom metodom, zasniva se na konstrukciji elipse metodom koncentričnih krugova različitih radijusa,  $a$  i  $b$ , koji odgovaraju parametrima elipse. Načinjen je pokušaj da se prostornom interpretacijom ovih krugova u baze konusa i cilindra, objasni vrsta pravoizvodne površi koja bi kao ravan presek imala upravo ovako nastalu zatvorenu jajastu krivu. U pitanju je konoid koji kao jednu vodilju ima pravu, a kao drugu vodilju prostornu presečnu krivu ovih kvadrata.*

Ključne reči: konoid, jajasta kriva, cilindar, konus, pravoizvodna površ

## 1. UVOD: JAJASTA KRIVA

U geometriji postoji više vrsta jajastih krivih, kako po geometrijskim svojstvima, tako i po redu i razredu. Ovoidni (jajasti) oblik imaju krive Dekartovog ovala, pojedini slučajevi Persejevih krivih, ravni preseki nekih obrtnih površi viših redova (na pr. rotacionog hiperboličkog levka), familije kubnih jajastih krivih ili ravne projekcije određenih prostornih krivih. Iz tog razloga, kada govorimo o jajastoj krivoj, ne možemo govoriti o jednoj samosvojnoj krivoj sa jedinstvenom konstrukcijom, jednačinom ili nazivom. Ovaj rad se bavi jednom krivom iz pobrojanog mnoštva krivih čiji oblik nalikuje konturi

---

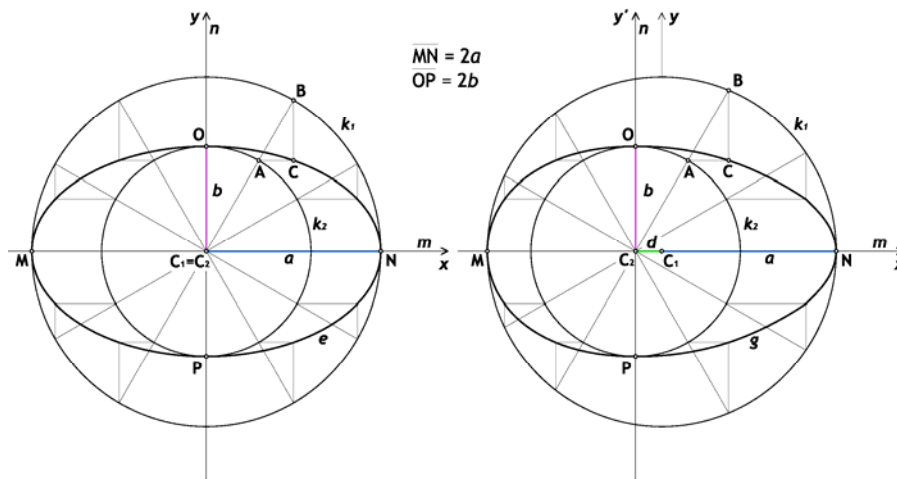
<sup>1</sup> Marija Obradović, dr, Građevinski fakultet, Beograd

<sup>2</sup> Maja Petrović, asistent pripravnik, Saobraćajni fakultet, Beograd

jajeta, a to je kubna jajasta kriva koju je konstruktivno obradio nemački matematičar Fritz Hügelschäffer.

### 1.1 Hügelschäffer-ova konstrukcija jajaste krive

Konstrukcija od koje se polazi u ovom radu, odnosi se na transponovanje poznate konstrukcije elipse metodom koncentričnih krugova, od kojih jedan,  $k_1$  sa centrom u  $C_1$  ima poluprečnik jednak velikom parametru elipse  $a$ , a drugi,  $k_2$  sa centrom u  $C_2$  ima poluprečnik jednak malom parametru elipse  $b$  (slika 1).



Slika 1

S obzirom da se kubne jajaste krive pojavljuju u oblicima koji se mogu izraziti jednačinom:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} f(x) = 1 \dots\dots\dots (1)$$

dok jednačina elipse glasi:

$$e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots (2)$$

Linearnom distorzijom jednačine elipse, dobijamo kubnu jednačinu jajaste krive.

Prilikom uzimanja u obzir veličine poluprečnika polaznih krugova, tj. parametara  $a$  i  $b$ , kao i pomeraj centara ovih krugova (parametar  $d$ ), za



$$f(x) = 1 + \frac{2dx+d^2}{a^2}$$

ova bi kubna kriva imala sledeći oblik:

$$g: \quad b^2x^2 + a^2y^2 + 2dxy^2 + d^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

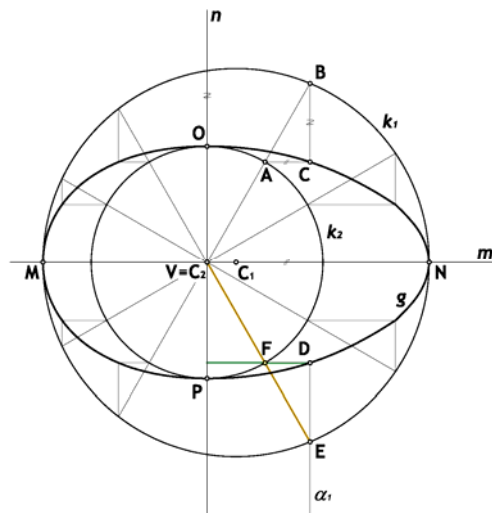
Međutim, da bismo nacrtno geometrijskim (konstruktivnim i deskriptivnim) metodama objasnili poreklo ove konstrukcije, pokušaćemo da je interpretiramo kao ravni presek konoida, pravoizvodne površi koja nastaje pri specifično odabranim uslovima, koje postavljamo prema polaznim postavkama *Hügelschäffer*-ove konstrukcije.

## 2.1 KONSTRUKCIJA JAJASTE KRIVE KAO ORTOGONALNA PROJEKCIJA PROSTORNIH ELEMENATA PRAVOIZVODNE POVRŠI

Ako pogledamo samu konstrukciju koju je dao *Hügelschäffer*, primetićemo dva nekoncentrična kruga, jedan unutar drugoga, pri čemu centar manjeg kruga  $C_2$  biva centar pramena pravih koje se radialno prostiru do tačaka drugog, većeg kruga  $k_1$ .

Ako bismo centre  $C_1$  i  $C_2$  polaznih krugova spojili jednom pravom, spojnicom  $m$ , onda bi na ovoj pravoj ležao veliki parametar  $a$  elipse, kao i velika osa jajaste krive. Iz tačaka preseka  $A$  i  $B$  svake prave (iz pramena pravih sa temenom u  $C_2$ ) sa datim krugovima, povlačili bismo zrake: iz tačke  $A$  manjeg kruga paralelno sa pravom  $m$ , a iz tačke  $B$  većeg kruga  $k_1$  paralelno sa pravom  $n$  koja prolazi centrom  $C_2$  manjeg kruga  $k_2$  i ortogonalna je na pravu  $m$ . U preseku  $C$  datih zraka dobijamo tačke koje će pripadati kubnoj jajastoj krivoj (*slika 2*).

Ove krugove i prave možemo posmatrati kao prve ortogonalne projekcije prostornih elemenata jedne pravoizvodne površi, čiji bi, zapravo, ravan presek sa osnovom paralelnom ravni projektovanja (ili njom samom, u zavisnosti od prostornih koordinata polaznih elemenata) dao upravo krivu o kojoj je reč, jajastu kubnu krivu.



Slika 2

Ako anticipirana površ, kao ravni presek ima kubnu krivu, postavlja se takođe pitanje i reda same površi. Kao što je poznato, konike se javljaju kao ravni preseki kvadrika, dok jajasta kubika o kojoj je reč u radu, može pripadati takođe kubnom konusu sa ovom krivom kao bazisnom, ali i površima viših redova, što će svakako biti slučaj očekivanog konoida.

## 2.2 Objašnjenje polaznih pretpostavki

Pretpostavićemo da je veći krug  $k_1$  bazisni krug konusa, a manji krug  $k_2$  bazisni krug cilindra koji leže u horizontalnici (H), tako da je dati cilindar obrtni, a konus kos, sa vrhom V u proizvoljnoj tački na osovini cilindra. Ove dve kvadrike sekle bi se, u opštem slučaju koji je ovde u pitanju - po prostornoj krivoj četvrtog reda. U konkretnom slučaju, ako odaberemo položaje bazisa ovih tela, kao prema polaznim uslovima Hügelschäffer-ove konstrukcije, tako da su jedan unutar drugog, u odabranoj ravni druge ortogonalne projekcije (na pr. frontalnicu postavljamo tako da bude paralelna spojnici centara bazisa, pravom  $m$ ) ova bi se dvograna prostorna kriva videla preklopljeno, kao hiperbola - usled ravni simetrije koja bi upravo prolazila pravom  $m$  i bila paralelna frontalnici, kao što je prikazano na slici 3.

Dakle, ovu prodornu prostornu krivu usvojićemo kao jednu vodilju pravoizvodne površi koju želimo da dobijemo. Kao drugu vodilju usvojićemo pravu  $p$ , koja prolazi vrhom konusa  $V$  i ortogonalna je na frontalnicu. Sa spojnicom  $m$  centara bazisa, ova će prava biti mimoilazna pod pravim uglom, a u prvoj ortogonalnoj projekciji taj će se njihov ugao videti u pravoj veličini. Obe ove prave vide se kao ortogonalni prečnici manjeg kruga, bazisa cilindra,  $k_2$ .

Za direktrisnu ravan ove površi usvojićemo upravo frontalnicu. Svaka izvodnica površi koju generišemo, prolaziće tačkom prave  $p$  i po jednom tačkom na svakoj grani prostorne krive<sup>3</sup> prodora cilindra i konusa, bivajući istovremeno frontalna. U prvoj ortogonalnoj projekciji ove izvodnice videli bi smo kao snop pravih paralelnih frontalnici, koje prolaze ograničenim područjem prave  $p$  na duž  $OP$ , gde se pojavljuju kao realne. Duž  $OP$  odgovara prečniku manjeg kruga  $k_2$ , tj. bazisa cilindra. Ove prave bi se poklapale sa sponama paralelnim pravom  $m$  u Hügelschäffer-ovoj konstrukciji.

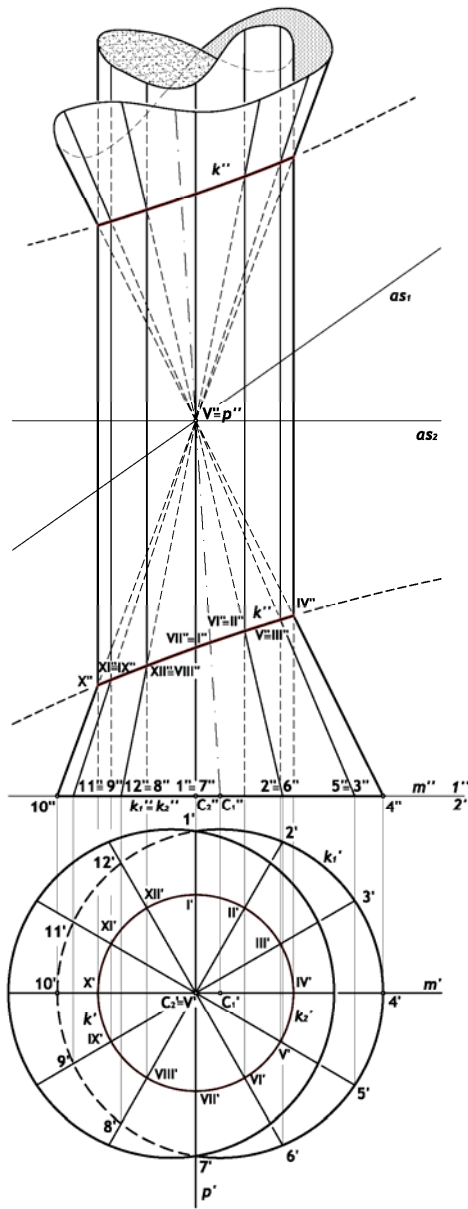
Na ovaj način dobijamo pravoizvodnu površ - KONOID.

*Definicija:* neka su u  $R^3$  data prava  $p$ , ravan  $\rho$  i kriva  $k$ , pravolinijska površ čije generatriše: 1) seku pravu  $p$ ; 2) seku krivu  $k$ ; 3) paralelne su ravni  $\rho$  naziva se KONOIDNA POVRŠ (određena sa  $p, \rho, k$ ). Prava  $p$  se naziva *osa*, ravan  $\rho$  *direktorna ravan*, a kriva  $k$  *direktrisa* konoidne površi.

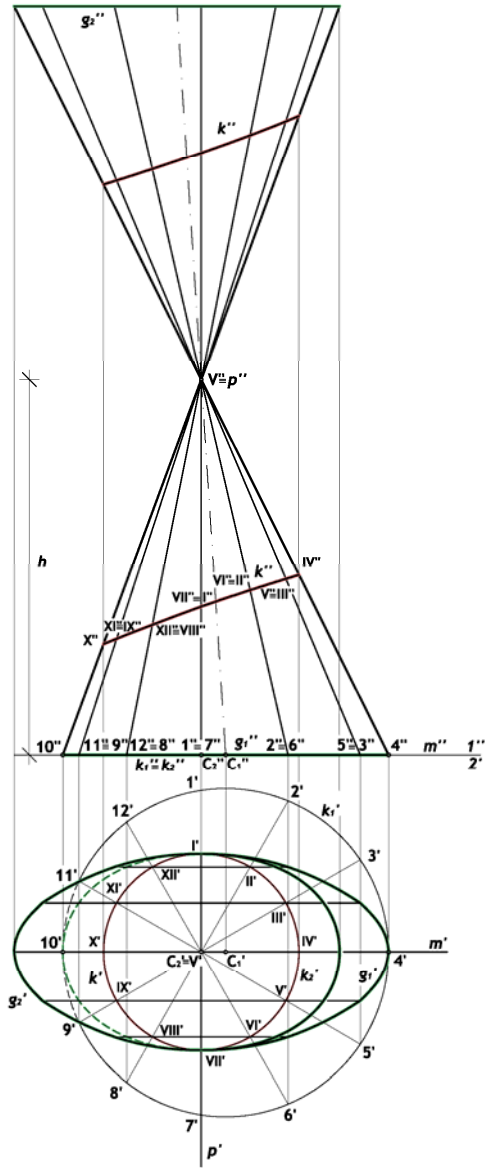
U ovom slučaju u pitanju je prav konoid, površ koju proizvodi generatriša rotirajući oko prave  $p$  - ose, ujedno se i translatorno krećući duž nje, tako da uvek ostaje normalna na pravu. Ako bi smo za ravan bazisa ovog konoida proglasili ravan  $H$  u kojoj leže i bazisi prethodne dve kvadrike, ta ravan bi, kao ravni presek dala krivu koja bi bila upravo jajasta kriva iz početnih premisa. Potrebno je potvrditi pretpostavku nalaženjem prodornih tačaka izvodnica ove površi kroz ovu ravan bazisa.

---

<sup>3</sup> (Naravno, ova će se kriva u prvoj ortogonalnoj projekciji videti kao krug - jer leži na obrtnom vertikalnom cilindru čije se sve izvodnice vide zračno i stopljeno sa bazisnim krugom.)



Slika 3



Slika 4

### 2.3. Jajasta kubna kriva kao ravni presek konoida

Ako sada postavimo pramen ravni kroz osu  $p$  kao pramenjaču, primetićemo sledeće (slika 4):

Svaka ravan iz datog pramena, budući da prolazi pramenjačom  $p$  ortogonalnom na frontalnicu, biće i sama ortogonalna na frontalnicu, tj. videće se zračno u drugoj projekciji, kao prava. Takođe, svaka ravan iz ovog pramena, seći će konus po dve izvodnice (jer sadrži vrh konusa, tačku  $V$ ), a one će u prvoj projekciji odgovarati pravama iz pramena pravih koje prolaze centrom kruga  $k_2$ .

Prvi trag takve ravni  $\alpha_1$ , prolaziće tačkama prodora izvodnica konusa kroz ravan  $H$  njegovog bazisa, odnosno, tačkama (na pr.  $B$  i  $E$ ) na krugu  $k_1$  i biće ortogonalan na pravu  $m$ . Istovremeno, ista ravan iz pramena, seče konoid po dve izvodnice koje prolaze istim tačkama na prethodnim izvodnicama konusa, koje su prodrle kroz cilindar u tačkama (na pr.  $A$  i  $F$ ) prodorne prostorne krive, vodilje same površi. Budući da pripadaju istoj ravni, ove izvodnice konoida moraju imati svoj prodor kroz ravan bazisa  $H$  (konusa i konoida) upravo na prvom tragu ravni, u tačkama (na pr.  $C$  i  $D$ ) koje će odgovarati tačkama jajaste krive dobijene Hügelschäffer-ovom konstrukcijom (slika 2).

Na ovaj način potvrđujemo da dobijeni konoid, kao ravni presek, tj. krivu koju možemo usvojiti i kao bazis konoida - upravo ima kubnu jajastu kivu. Ova se kriva može usvojiti i kao vodilja konoida, pri čemu umesto prostorne krive četvrtog reda, krivu direktrisu svodimo na ravnu krivu trećeg reda.

Kada algebarski obradimo polazne postavke, dobijamo jednačinu ovog konoida u obliku (koji proizilazi iz Abel-Ruffinijeve teoreme):

$$(z-h)^2(a^2y^2+d^2y^2-a^2b^2)-2dhxy^2(z-h)+b^2h^2x^2=0$$

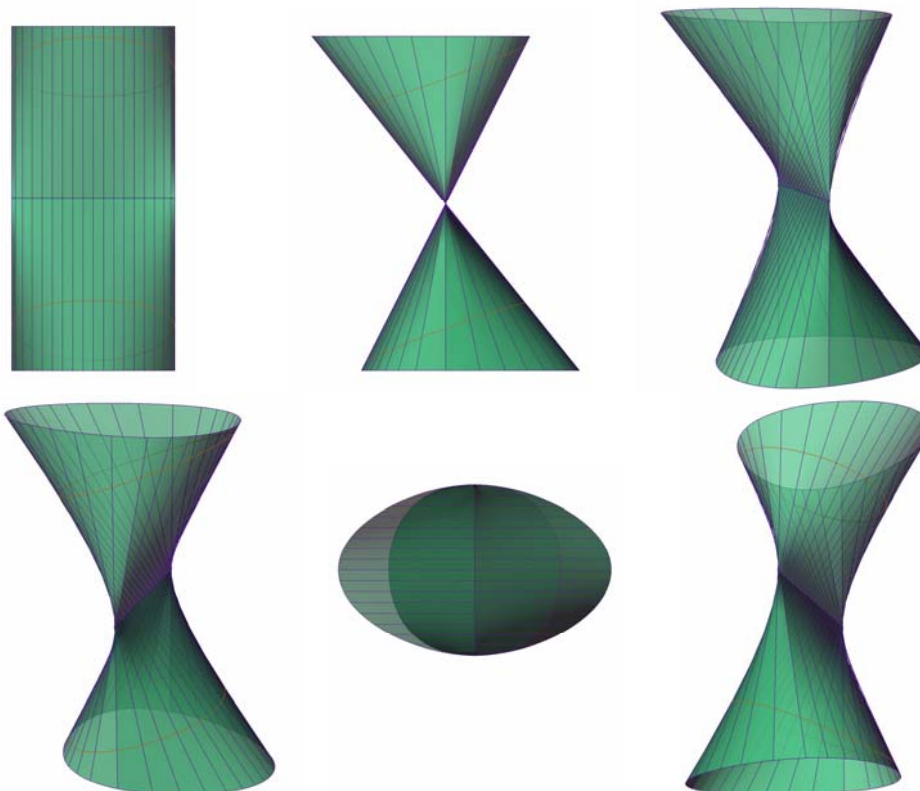


Što potvrđuje da se radi o površi petog reda reda.

To možemo potvrditi i sa aspekta projektivne geometrije. Ako ravan bazisa konoida seče ovu površ po kubnoj zatvorenoj krivoj, ona

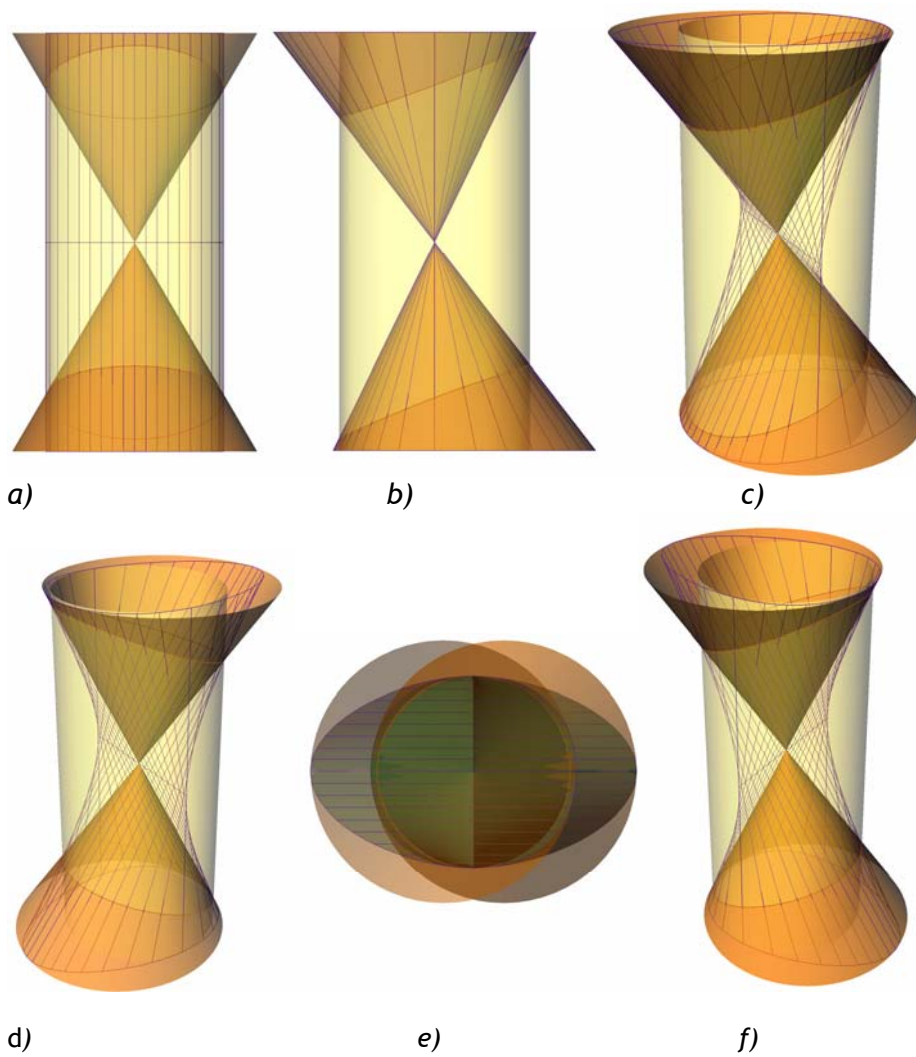
će takođe dati i presek po dve konjugovano imaginarne prave - izvodnice, koje bi se sekle u realnoj beskonačnoj tački prodora prave  $p$  - ose konoida, jer svakom tačkom ove prave prolaze po dve izvodnice konoida, kao što možemo da primetimo na realnom području površi. Međutim, budući da je površ konvergentna u delu ose  $p$  ograničene na duž  $OP$ , spoljno područje prave  $p$  dalo bi parove konjugovano imaginarnih pravih - izvodnica konoida. Na taj način, možemo ponovo konstatovati da se radi o površi petog reda, koju ravan seče po kubnoj krivoj i raspadnutoj konici na dve konjugovano imaginarne prave - izvodnice ovog konoida.

Sam izgled konoida, dat je na slikama 5 (a-f),



Slika 5 (a - f)

dok se na slikama 6 (a - f) može sagledati odnos sve tri površi: kosog konusa, obrtnog cilindra i novodobijenog konoida petog reda.



Slika 6 (a - f)

### 3. ZAKLJUČAK

Konoid o kojem je reč nije posebno razmatran niti nazvan u dosadašnjim geometrijskim sistematizacijama, kao ni većina površi nižih redova - četvrtog, pa ni trećeg reda. Sama površ može biti zanimljiva i inspirativna za dalja istraživanja u smislu pronalaženja:

- Specijalnih slučajeva ravnih preseka
- Određivanja specijalnih slučajeva u kojima bi se kao ravni preseki pojavile i eventualno krive drugog reda
- Određivanja konture
- Određivanja invarijanti i komparativnih osobina sa obrtnim hiperboloidom i konusom, površima drugog reda
- Primene ove površi u raznim oblastima inženjerstva, dizajna itd.

### LITERATURA

1. Obradović M. Mišić. S.: *Krive jajastog oblika u Nacrtnoj geometriji*, MonGeometrija 2004, Zbornik radova, Beograd 2004, str. 147 - 160.
2. Dovniković L.: *Zapisi iz teorije krivih i površi*, skripta za postdiplomske studije, Beograd 1986.
3. Dovniković L.: *Harmonija sfera*, relativistička geometrija harmonijskih ekvivalenata, Matica srpska, Novi Sad 1999.
4. Kočinac LJ.: *Linearna algebra i analitička geometrija*, Univerzitet u Nišu, Niš 1991.
5. Young. J.R.: *The Elements Of The Differential Calculus*; G.F. Hopkins & Son, 44 Nassau Street, New York 1833, str. Str. 200 -207.
6. Koller J.: *Egg Curves, Ovals*, "Mathematische Basteleien", <http://www.mathematische-basteleien.de/eggcurves.htm>, 2000.
7. Wassenaar J.: *Cubic Egg*, Mathematical curves <http://www.2dcurves.com/cubic/cubiceg.html> , 2004



## THE SPATIAL INTERPRETATION OF HÜGELSCHÄFFER'S CONSTRUCTION OF THE EGG CURVE

Marija Obradović <sup>1</sup>  
Maja Petrović <sup>2</sup>

### Abstract

*Construction of an egg curve using the method of mathematician Fritz Hügelschäffer, is based on the construction of ellipse by method of concentric circles, with radii  $a$  and  $b$  that respond to the parameters of the ellipse. There was made an effort, using the spatial interpretation of this circles into basis of solids' surfaces: cone and cylinder, to explain the kind of ruled surface which would have the closed egg cubic curve obtained as in Hügelschäffer's construction, as a plane section. It is the case of a conoid which has a straight line as one generatrix, and the spatial intersecting curve of these quadrics as the second generatrix.*

Key words: conoid, egg curve, cylinder, cone, ruled surface

---

<sup>1</sup> Marija Obradović, PhD, Lecturer, Faculty of Civil Engineering, Belgrade, Serbia

<sup>2</sup> Maja Petrović, Lecturer assistant, Faculty of Traffic and Transport, Belgrade, Serbia