J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 17, No. 1, 129-134, September, 2020
doi: 10.20956/jmsk.v%vi%i.11066

p-ISSN: 1858-1382
e-ISSN: 2614-8811

Prime Ideals in Matrices over Γ-*Semihyperrings*

Ideal Prima dalam Matriks atas Γ-*Semihyperring*

Andi Muhammad Anwar [1]*, A. Muh. Amil Siddik [2*], Ainun Mawaddah Abdal [3*]

Abstract

The semihyperring structure is a common form of the hyperring structure with weakening properties. The more general structure is Γ-semihyperring, whose concept is generalized from Γ-semiring. This paper will show that the top matrix Γ-semihyperring is also Γ-semihyperring. The linkage between prime ideal of Γ-semihyperring with prime ideal of a matrix on Γ-semihyperring will also be discussed in this paper.

Keywords: Γ-Semihyperring, matrices over Γ-semihyperrings, prime ideal

Abstrak

Struktur *semihyperring* merupakan perumuman dari struktur *hyperring* dengan memperlemah sifatnya. Struktur lebih umum lagi yaitu Γ-*semihyperring* yang konsepnya diperumum dari Γ-*semiring*. Tulisan ini akan memperlihatkan bahwa matriks atas Γ-*semihyperring* juga merupakan Γ-*semihyperring*. Keterkaitan antara ideal prima dari Γ-*semihyperring* dengan ideal prima dari matriks atas Γ-*semihyperring* tersebut juga akan dibahas pada tulisan ini.

Kata Kunci: Γ-*Semihyperring*, matriks atas Γ-*semihyperring*, ideal prima

1. Pendahuluan

Struktur Γ-*semihyperring* merupakan perumuman dari beberapa konsep struktur aljabar sebelumnya yaitu Γ-*ring* [4] , Γ-*semiring* [3], dan Γ-*semihypergroup* [7,1]. Pada *hyperstructure*, operasi biner yang digunakan adalah *hyperoperation* yang hasil pemetaannya berupa himpunan. Konsep *hyperstructure* memberikan banyak kontribusi pada penerapannya seperti dalam bidang graf yaitu *hypergraphs*, automata, kriptografi, kecerdasan buatan, dan juga dalam teori bilangan [5].

Struktur Γ-*semihyperring* salah satunya diperkenalkan oleh Davvaz dkk [3] pada Penelitian mengenai Γ-*semihyperring* sampai saat ini masih dikerjakan oleh beberapa peneliti. Salah satu penelitian terbaru mengenai Γ-*semihyperring* adalah yang dikerjakan oleh Kishor dkk mengenai Γ-

* *Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*
Email *:[1]andimuhammadanwar08@gmail.com, [2] amilsiddik@unhas.ac.id , [3]ainunabdal@gmail.com*

semihyperring regular dan Γ-*semihyperring* idempoten [6]. Oleh karena itu, tulisan ini akan membahas mengenai bentuk khusus dari Γ-*semihyperring* yaitu himpunan matriks atas Γ-*semihyperring.* Konsep ideal prima pada matriks atas Γ-*semihyperring* juga diperkenalkan beserta dengan sifat yang terkait dengan ideal prima.

2. Beberapa Definisi dan Notasi

Hyperoperation merupakan fungsi $\circ : H \times H \rightarrow \wp(H)$ dengan H merupakan himpunan tak kosong dan $\wp(H)$ merupakan himpunan yang anggota-anggotanya merupakan subhimpunan tak kosong dari H. Pasangan dua objek $(H,\circ)$ dikatakan sebagai *hypergrupoid.*. Misalkan A dan B adalah subhimpunan tak kosong dari H dan $x \in H$, diperoleh aturan pengoperasian sebagai berikut:

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b = \{x | x \in a \circ b, \quad a \in A, b \in B\}$$

dan

$$A \circ x = A \circ \{x\} \text{ dan } x \circ A = \{x\} \circ A.$$

Hypergrupoid $(H,\circ)$ merupakan *semihypergroup* apabila memenuhi sifat asosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in H$ diperoleh $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. S*emihypergroup* $(H,\circ)$ bersifat komutatif jika dan hanya jika setiap $a, b \in R$ memenuhi $a \circ b = b \circ a$. *Subsemihypergroup* $(K,\circ)$ adalah subhimpunan dari *semihypergroup H* yang tertutup atas *hyperoperation* $(a \circ b \subseteq K, a \in K, b \in K)$ dan memenuhi sifat asosiatif. Selanjutnya, struktur yang memiliki dua *hyperoperation* yang akan dibahas adalah Γ-*semihyperring.* Misalkan Γ merupakan grup komutatif dan $(R, +)$ merupakan *semihypergroup* komutatif, maka R merupakan Γ-*semihyperring* apabila terdapat suatu pemetaan $\cdot : R \times \Gamma \times R \rightarrow \wp(R)$, sehingga memenuhi kondisi, untuk setiap $r, s, t \in R$ dan untuk setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$:

(1) $r\alpha(s + t) = r\alpha s + r\alpha t$;
(2) $(r + s)\alpha t = r\alpha t + s\alpha t$;
(3) $r\alpha(s\beta t) = (r\alpha s)\beta t$; dan
(4) $r(\alpha + \beta)s = r\alpha s + r\beta t.$

Struktur Γ-*semihyperring* bersifat komutatif apabila untuk setiap $r, s \in R$ dan $\alpha \in \Gamma$, maka $r\alpha s = s\alpha r$. Struktur Γ-*semihyperring* memuat unsur nol ("*with zero*") apabila terdapat unsur 0 ∈ R yang memenuhi kondisi $r \in r + 0$, $0 \in r\alpha 0$, dan $0 \in 0\alpha r$ untuk setiap $\alpha \in \Gamma$ dan $r \in R$.

Misalkan A dan B adalah subhimpunan tak kosong dari Γ-*semihyperring* sehingga diperoleh aturan pengoperasian sebagai berikut:

$$A\Gamma B = \{x | x \in a\alpha b, a \in A, b \in B, \alpha \in \Gamma\}$$

Contoh 1:

Contoh berikut diperoleh dari [8], namun terdapat sedikit kesalahan pada jurnal tersebut yaitu "$d + c = \{c, d\}$" dimana yang seharusnya adalah $d + c = \{a, b\}$. Berikut contoh dari Γ-*semihyperring*:

Misalkan $R = \{a, b, c, d\}$, maka $(R, +)$ merupakan *semihypergroup* komutatif dengan aturan *hyperoperation*;

$+$	a	b	c	d
a	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$
b	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$
c	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
d	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$

Misalkan $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, sehingga aturan *hyperoperation* : untuk setiap $x, y \in R$, maka $x\bar{0}y = \{a, b\}$ dan;

$\bar{1}$	a	b	c	d
a	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
b	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
c	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$
d	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$

Ideal kiri (kanan) I dari Γ-*semihyperring* R adalah *subsemihypergroup* dari R sedemikian sehingga $\Gamma I \subseteq I$ ($I\Gamma R \subseteq I$) . Jika ideal I memenuhi ideal kiri dan ideal kanan, maka I cukup dikatakan sebagai ideal. Ideal I dari R dikatakan sebagai ideal prima jika $P\Gamma Q \subseteq I$ mengakibatkan $P \subseteq I$ atau $Q \subseteq I$ dengan P dan Q merupakan ideal dari R. Ideal I dari R merupakan ideal maksimal apabila tidak ada ideal sejati dari R $(I \neq R)$ yang memuat I.

Contoh 2:

Pada Contoh 1, $P = \{a, b\}$ merupakan ideal prima dari R karena hanya P satu-satunya ideal sejati dari R.

3. Matriks atas Γ-*Semihyperring*

Hasil utama tulisan ini membahas mengenai himpunan matriks persegi $n \times n$ dengan entri-entrinya merupakan elemen dari suatu Γ-*semihyperring*. Misalkan R merupakan Γ- *semihyperring* dan $M_n(R) = \{X = (x_{ij}) | \, x_{ij} \in R\}$ merupakan himpunan semua matriks $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen dari R. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan matriks $M_n(R)$ juga membentuk Γ'- *semihyperring* dengan Γ' merupakan suatu grup komutatif.

Proposisi 3.1. Misalkan R merupakan Γ-*semihyperring*. Maka $M_n(R)$ merupakan Γ'-*semihyperring* dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$ merupakan grup komutatif atas penjumlahan matriks. Lebih lanjut, jika R memuat unsur nol maka demikian pula dengan $M_n(R)$.

Bukti:

Pertama, akan dibuktikan bahwa terdapat *hyperoperation* di $M_n(R)$ dan memenuhi sifat asosiatif. Definisikan pemetaan $+_M : M_n(R) \times M_n(R) \to \wp(M_n(R))$, yaitu:

$$A +_M B = (a_{ij}) +_M (b_{ij}) = \{(c_{ij}) | c_{ij} \in a_{ij} + b_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$$

dengan $A, B \in M_n(R)$. Ambil $A, B, C \in M_n(R)$, dengan menggunakan sifat asosiatif *hyperoperation* $" + "$ di R sehingga diperoleh;

$$A +_M (B +_M C) = \{(z_{ij}) | (z_{ij}) \in (a_{ij}) + (d_{ij}), \quad (d_{ij}) \in B +_M C\} =$$
$$= \{(z_{ij}) | z_{ij} \in a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}), 1 \leq i, j \leq n\}$$
$$= \{(z_{ij}) | z_{ij} \in (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}), 1 \leq i, j \leq n\}$$
$$= \{(z_{ij}) | (z_{ij}) \in (e_{ij}) + (c_{ij}), \quad (e_{ij}) \in A +_M B\} = (A +_M B) +_M C$$

Jadi terbukti bahwa $(M_n(R), +)$ merupakan *semihypergroup* . Selanjutnya, misalkan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$ dan definisikan pemetaan $\circ_M : M_n(R) \times \Gamma' \times M_n(R) \to \wp(M_n(R))$, yaitu :

$$A \circ_M \alpha \circ_M B = \left\{ (z_{ij}) | z_{ij} \in \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{il} \alpha_{lk} b_{kj}, 1 \leq i, j \leq n \right\}.$$

Berdasarkan *hyperoperation* "$+_M$" dan "$\circ_M$", bisa dengan mudah dibuktikan bahwa untuk setiap $A, B, C \in M_n(R)$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma'$,

$A \circ_M \alpha \circ_M (B +_M C) = A \circ_M \alpha \circ_M B + A \circ_M \alpha \circ_M C$,

$(A +_M B) \circ_M \alpha \circ_M C = A \circ_M \alpha \circ_M C +_M A \circ_M \alpha \circ_M c$,

$A \circ_M \alpha \circ_M (B \circ_M \beta \circ_M C) = (A \circ_M \alpha \circ_M B) \circ_M \beta$, dan

$A \circ_M (\alpha +_M \beta) \circ_M B = A \circ_M \alpha \circ_M B + A \circ_M \beta \circ_M B$.

Jadi, terbukti bahwa $M_n(R)$ merupakan Γ'-*semihyperring*. Selanjutnya, misalkan R memuat unsur nol sehingga terdapat $0_n \in M_n(R)$ yang semua elemennya merupakan unsur nol dari R yang memenuhi kondisi $A \in A + 0_n$, $0_n \in A\alpha 0_n$, dan $0_n \in 0_n \alpha A$ untuk setiap $\alpha \in \Gamma'$ dan $A \in M_n(R)$. ■

Proposition 3.2. Misalkan R merupakan Γ-*semihyperring* dan I merupakan ideal kiri (kanan) dari R, maka $M_n(I)$ merupakan ideal kiri (kanan) dari Γ'-*semihyperring* $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$. Implikasi serupa juga berlaku apabila I merupakan ideal dari R.

Bukti:

Misalkan I merupakan suatu ideal kiri dari R sehingga berdasarkan bukti dari Proposisi 3.1., maka diperoleh bahwa $M_n(I)$ merupakan *subsemihypergroup* dari $M_n(R)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $M_n(R) \circ_M \Gamma' \circ_M M_n(I) \subseteq M_n(I)$. Ambil $X \in M_n(R) \circ_M \Gamma' \circ_M M_n(I)$ sehingga $X \in P \circ_M \alpha \circ_M Q$ dengan $P \in M_n(R)$, $\alpha \in \Gamma'$, dan $Q \in M_n(I)$. Karena

$$P \circ_M \alpha \circ_M Q = \left\{ (z_{ij}) | z_{ij} \in \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{il} \alpha_{lk} q_{kj}, 1 \leq i, j \leq n \right\},$$

maka $X = (x_{ij})$ dengan $x_{ij} \in \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{il} \alpha_{lk} q_{kj}$. Karena I merupakan ideal kiri dari R, sehingga untuk $1 \leq i, j \leq n$, $p_{il} \alpha_{lk} q_{kj} \subseteq I$. Jadi diperoleh $x_{ij} \in I$ untuk $1 \leq i, j \leq n$, sehingga $X \in M_n(I)$. Jadi terbukti bahwa $M_n(I)$ merupakan ideal kiri di $M_n(R)$. Dengan cara yang serupa, mudah juga dibuktikan apabila $M_n(I)$ merupakan ideal kanan dari $M_n(R)$ ataupun $M_n(I)$ merupakan ideal dari $M_n(R)$. ■

Hasil yang akan dibahas berikutnya mengenai hubungan antara ideal prima dari R dengan ideal dari $M_n(R)$. Namun, sebelum menjelaskan hubungan tersebut, proposisi berikut diperlukan.

Proposisi 3.3. Misalkan R merupakan Γ-*semihyperring* dan I merupakan ideal dari R. Jika untuk $r, s \in R$ yang memenuhi $r\Gamma s \subseteq I$ mengakibatkan $r \in I$ atau $s \in I$, maka I merupakan ideal prima dari R.

Bukti: Misalkan I merupakan ideal dari Γ-*semihyperring* R dan untuk $r, s \in R$ yang memenuhi $r\Gamma s \subseteq I$ mengakibatkan $r \in I$ atau $s \in I$. Ambil P dan Q ideal dari R sedemikian sehingga memenuhi $P\Gamma Q \subseteq I$. Misalkan $P \nsubseteq I$, sehingga terdapat $p \in P$ tetapi $p \notin I$. Ambil sebarang $q \in Q$ sehingga $p\Gamma Q \subseteq I$, sehingga diperoleh $p \in I$ atau $q \in I$. Karena $p \notin I$, maka jelas $q \in I$. Akibatnya $Q \subseteq I$. Jadi, terbukti bahwa I merupakan ideal prima dari R. ■

Teorema 3.4. Misalkan R merupakan Γ-*semihyperring* dan I merupakan ideal dari R. Jika $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari Γ'-*semihyperring* $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$, maka I merupakan ideal prima dari R.

Bukti: Misalkan I merupakan suatu ideal dari R dan $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari $M_n(R)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal prima dari R. Ambil $u, v \in R$ sedemikian sehingga $u\Gamma v \subseteq I$ dan $u \notin I$. Misalkan $U = (u_{ij})$ dan $V = (v_{ij})$ dengan $u_{ij} = u$ dan $v_{ij} = v$ untuk $1 \leq i, j \leq n$. Karena I tertutup pada *hyperoperation* "+", diperoleh $U \circ_M \Gamma \circ_M V \subseteq M_n(I)$. Karena $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari $M_n(R)$, maka berdasarkan Proposisi 3.3. diperoleh $U \in M_n(I)$ atau $V \in M_n(I)$. Karena $u \notin I$, sehingga $U \notin M_n(I)$. Jadi $V \in M_n(I)$, sehingga diperoleh $v \in I$. Jadi, I merupakan ideal prima dari R. ■

Lema 3.5. Misalkan I merupakan ideal maksimal dari Γ-*semihyperring* R. Jika $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari Γ'-*semihyperring* $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$, maka $R\Gamma R$ tidak termuat di I.

Bukti: Berdasarkan Teorema 3.4. , diperoleh bahwa I merupakan ideal prima dari R. Andaikan $R\Gamma R \subseteq I$, karena I merupakan ideal prima, sehingga diperoleh $R \subseteq I$. Karena I merupakan ideal maksimal dari R, sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya, $R\Gamma R$ tidak termuat di I. ■

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil di Subbab 3, maka diperoleh kesimpulan:

1. Jika R merupakan Γ-*semihyperring*, maka $M_n(R)$ merupakan Γ'-*semihyperring* dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$ merupakan grup komutatif atas penjumlahan matriks.
2. Jika I merupakan ideal kiri (kanan) dari R, maka $M_n(I)$ merupakan ideal kiri (kanan) dari Γ'-*semihyperring* $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$. Begitupun demikian apabila I merupakan ideal dari R.
3. Jika I merupakan ideal dari R dan $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari Γ'-*semihyperring* $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$, maka I merupakan ideal prima dari R.
4. Jika I merupakan ideal maksimal dari Γ-*semihyperring* R dan $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari Γ'-*semihyperring* $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$, maka $R\Gamma R$ tidak termuat di I.

Daftar Pustaka

[1] D. Heidari, S.O. Dehkordi and B. Davvaz, Γ-*semihypergroups and their properties,* Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A: Appl. Math. Phys., **72**(2010), 195-208.

[2] H. Hedayati and B. Davvaz, *Fundamental relation on* Γ-*hyperrings,* Ars Combin., **100**(2011), 381-394.

[3] M. M. K. Rao, Γ-*semirings. I*, Southeast Asian Bull, Math., **19(1)**(1995), 49-54.

[4] N.Nobusawa, *On generalization of the ring theory*, Osaka J. Math., **1(1)**(1964), 81-89

[5] P.Corsini, V.Leoreanu, *Applications of hyperstructure theory,* Kluwr Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[6] Pawar, Kishor & Patil, Jitendrasing & Davvaz, Bijan. (2019). *On regular* Γ-*semihyperring and idempotent* Γ-*semihyperring*. Kyungpook Mathematical Journal. 59. 35-45.

[7] S. M. Anvariyeh, S. Mirvakilli and B. Davvaz, *On* Γ- *hyperideals in* Γ-*semihypergroups,* Carpathian J. Math., **26**(2010), 11-23.

[8] S. Ostadhadi-Dehkordi and B. Davvaz, *Ideal theory in* Γ-*semihyperrings,* Iran. J. Sci. Tech. Trans. A Sci., **37(3)** (2013), 251-263.