XIV Seminário de Iniciação Científica
Universidade Federal de Juiz de Fora
15 a 17 de outubro de 2008

Área: Ciências Exatas e da Terra

Projeto: CURVAS ALGéBRICAS PLANAS

Orientador: Joana Darc Antonia Santos Da Cruz

Bolsistas:

Raphael Pereira Cordeiro (IV PROVOQUE 2007/2008)

Aretha Fontes Alves (IV PROVOQUE 2007/2008)

Participantes:

Estudamos inicialmente curvas algébricas planas, isto é, o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do tipo *f(x,y)=0*, onde *f* é um polinômio não constante. Uma das questões abordadas foi analisar se a equação *f=0* de uma curva está bem determinada. A partir de tal questão viu-se a necessidade de definir curvas de uma maneira mais cuidadosa:

Uma curva algébrica plana afim é uma classe de equivalência de polinômios não constantes f(X,Y) com coeficientes num corpo K, módulo a relação que identifica dois tais polinômios se um é múltiplo do outro por alguma constante não nula.

Um dos nossos objetivos foi determinar o conjunto das soluções de um sistema de duas equações em duas variáveis. Na linguagem geométrica, o resultado inicialmente estudado foi o seguinte:

A interseção de duas curvas algébricas planas sem componentes irredutíveis em comum é finita.

Dada uma curva *f* e um ponto *P* de *f* provamos que *existe um inteiro m=m_P(f) positivo tal que toda reta passando por P intercepta a curva f em pelo menos m pontos e que existem no máximo m retas e no mínimo uma reta interceptando f em mais que m pontos.* Tal número *m* é a multiplicidade de interseção de *f* em *P*. Convencionamos que se *P* não pertence a curva então sua multiplicidade de interseção é 0. Dizemos que um ponto *P* de uma curva *f* é liso, simples ou não singular se *m_P(f)=1* . Caso contrário dizemos que *P* é um ponto singular. Vimos que o conjunto dos pontos singulares de uma curva *f* é finito. Ainda na busca de nosso objetivo tivemos que começar a trabalhar com o plano projetivo. Observando que duas retas paralelas não se intersectam a "distância finita", bem como a hipérbole de equação *xy=1* não intersecta os eixos coordenados vê-se a necessidade de trabalhar em um ambiente no qual os pontos que estão "faltando" apareçam. O ambiente que precisamos é o plano projetivo:

O Plano projetivo é o conjunto das retas no espaço tridimensional passando pela origem.

Passamos a trabalhar com as curvas planas projetivas, a saber:

Uma curva plana projetiva é uma classe de equivalência de polinômios homogêneos (todos os monômios têm o mesmo grau) não constantes, F(X,Y,Z) no anel dos polinômios nas variáveis X, Y e Z com coeficientes em K, módulo a relação que identifica dois tais polinômios F, G, se um for múltiplo constante do outro.

As curvas algébricas planas, inicialmente estudadas, podem ser consideradas como a parte que se acha a "distância finita" de uma curva projetiva. Além disso, vimos como estender os conceitos estudados no caso de curvas planas afins, como por exemplo a multiplicidade de interseção, para curvas projetivas, assim como os conceitos de ponto singulares e não singulares. Estudamos a relação entre curvas planas afins e curvas planas projetivas. No plano projetivo podemos então caracterizar totalmente a interseção de duas curvas por meio do Teorema de Bézout:

Se F, G são duas curvas planas projetivas sem componentes irredutíveis em comum, de grau m e n, então o número de pontos na interseção de F com G , contados com multiplicidade, é igual a mn.

Na prova deste teorema usamos essencialmente a resultante de dois polinômios. Por esta razão dedicamos boa parte de nosso tempo estudando as propriedades da resultante de dois polinômios. A resultante é calculada levando a partir do determinante de uma matriz que leva em consideração os coeficientes dos polinômios e os seus graus. Sob certas condições podemos afirmar que: *dois polinômios têm fator irredutível em comum se e somente se a resultante de tais polinômios se anula.*

Além disso, sob certas condições podemos provar que *o grau da resultante de dois polinômios é o produto do grau de tais polinômios.* Como se percebe no enunciado do Teorema de Bézout é necessário sabermos calcular as multiplicidade de interseção de duas curvas. A parte final de nosso trabalho foi por esta razão dedicada ao estudo das propriedades do índice de interseção. Nesta etapa estudamos o índice de interseção de duas formas distintas.