УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ненад Стојановић

ЛОГИКЕ СА МЕТРИЧКИМ ОПЕРАТОРИМА

Докторска дисертација

ментор: проф. др Небојша Икодиновић

Крагујевац, 2018. година

Идентификациона страница докторске дисертације

I. Аутор
Име и презиме: Ненад Стојановић
Датум и место рођења: 22. мај 1987. године, Нови Пазар
Садашње запослење: Асистент на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу
II. Докторска дисертација
Наслов: Логике са метричким операторима
Број страница: 100
Број слика: 0
Број библиографских података: 78
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет, Крагујевац
Научна област (УДК): Математичка логика (510.6)
Ментор: др Небојша Икодиновић, ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 29. мај 2018. године
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-01-775/11 од 10.10.2018. године
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата: 1. др Миодраг Рашковић, ред. проф. МИ САНУ 2. др Радосав Ђорђевић, ванр. проф. ПМФ-а у Крагујевцу 3. др Небојша Икодиновић, ванр. проф. Математичког факулета у Београду 4. др Ангелина Илић-Степић, научни сарадник МИ САНУ 5. др Владимир Ристић, доцент ФПН-а у Јагодини
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: 1. др Миодраг Рашковић, ред. проф. МИ САНУ 2. др Радосав Ђорђевић, ванр. проф. ПМФ-а у Крагујевцу 3. др Ангелина Илић-Степић, научни сарадник МИ САНУ 4. др Силвана Маринковић, доцент ПМФ-а у Крагујевцу 5. др Марија Боричић, доцент ФОН-а у Београду
Датум одбране дисертације:

Садржај

Предговор

Формализми за представљање неодређених, нејасних или непотпуних података, различитих типова информација као и знања, изазивају велико интересовање у многим научним областима, посебно у ужим научним областима и гранама наука које директно утичу на развој нових технологија. Иако је данас доста развијена формализација вероватносног резоновања [27], [28], [35], [59], [60], [63] и [65], где се могу јасно издвојити два приступа, тј. две врсте логика (логике са вероватносним квантификаторима [29], [38] и [50], логике са вероватносним операторима [15], [58] и [62]), при решавању неких проблема погодније је користити функције растојања, а не вероватносне функције.

Функције растојања су од суштинског значаја за многе области математике и рачунарских наука, пре свега због своје широке примене [6], [52]. Грубо речено, функције растојања изражавају степен сличности (или различитости) између два објекта: матрица (у алгебри), графова (у дискретној математици, у комбинаторици), стратегија (у теорији игара), знања (у вештачкој интелигенцији), порука (у криптографији), стрингова (у теорији информација) и тако даље.

Истраживања у областима математичке логике која имају додирне тачке са растојањима долазе до изражаја у другој половини XX века, а нарочито у последњих двадесет година. Мотив и интересовање за таквом везом произлазе из проблема при закључивању у ситуацијама када је знање непотпуно или двосмислено или када није јасно која правила закључивања се могу применити. Сви наведени проблеми отворили су многа нова питања и наметнули истраживачима нове изазове. Тема овог рада јесу логике са метричким операторима.

Идеја за разматрањем и откривањем логичких система са циљем да представљају знања о растојањима није нова. На пример, у радовима [36], [47], [67], [72] и [77] су уведене и разматране логике растојања код којих су растојања просторне природе. У прошлом веку, а и у последње време доста пажње је посвећено метричкој (или квантитативној) темпоралној логици, рецимо у раду [37], при чему растојања нису посматрана у просторном смислу. Што се тиче логичких система развијених у новије време у којима су растојања просторног карактера, неопходно је истаћи резултате који се појављују у радовима [12], [13], [41], [42], [43] и [44]. У тим системима логике са растојањима су замишљене као формализми за представљање знања, са циљем да се нумерички, квантитативни концепт растојања искористи за квалитативно закључивање. Главне области у којима су применљиви поменути формализми су просторне природе. Међутим, појам „растојање”, као што је поменуто у првој глави, може имати широк спектар тумачења.

Централни појам у овом раду су логике са растојањима (метриком), тј. логике које у свом језику садрже операторе растојања (метричке операторе) и које омогућавају експлицитно резоновање о удаљености.

У првој глави су дефинисани најважнијих појмови везани за функције растојања, затим наведен је низ особина које овакве функције могу имати, у зависности од њихове примене. Примене функција растојања могу се видети у радовима [6] и [52]. Наведене особине имају значај и у неким теоријским дисциплинама. У првој глави наведен је и низ примера метричких простора. Класификација простора растојања изложена у првој глави је скраћена верзија класификације изложене у радовима [8] и [52]. На крају прве главе резматрана су растојања (метрике) дефинисана на скупу исказних формула, а размотрена су и нека актуелна питања везана за такве функције, што је илустровано примерима. Поменути примери су мотивација за посматрање логика које су представљене у трећој глави. Идеја за увођењем метрика на поменутом скупу исказних формула потекла је од професора Миодрага Рашковића, Небојше Икодиновића и Радосава Ђорђевића (видети [14], [20] и [73]).

У уводном делу друге главе биће уведене модалне логике растојања и логика растојања првог реда чији логички системи у свом језику садрже листе унарних метричких оператора. Техника филтрације која се користи у доказивању потпуности биће приказана за модалне логике растојања са минималним скупом поменутих оператора $D = \{A^{\leqslant a}, A^{>a}\}$. Иста техника се користи и у доказима потпуности за друге модалне логике растојања и може се видети у раду [40]. Оператори облика $\{A^{\leqslant a} \mid a \in M\}$, $\{A^{>a} \mid a \in M\}$, где је $M \subseteq \mathbb{R}^{+}$, се интерпретирају као „сви се налазе на растојању највише a” и „сви се налазе на растојању већем од a”, а такве логике су намењене за резоновање о растојањима, где се појам „растојања” схвата у широком, не обавезно просторном смислу. Садржај друге главе дисертације су резултати базирани на радовима [40], [41], [42], [43], [44] и представљали су добру основу за даља истраживања.

У трећој глави су приказане исказне логике са бинарним метричким операторима. Полазне основе чине резултати досадашњих истраживања модалних логика и некласичних вишевредносних логика, као и логика са генерализованим квантификаторима и операторима, са посебним освртом на вероватносне логике које су изучаване од стране аутора окупљених око Семинара за вероватносне логике Математичког института САНУ у Београду, под руководством професора др Миодрага Рашковића. Недостаци неких од поменутих логика и недостаци класичне логике, као и идеје о побољшању изражајности, доводе нас до независног развоја нових логика, и као такве представљају основу за даља истраживања и надоградњу и примену истих. У овој глави дисертације биће описане исказне логике са листама бинарних метричких оператора облика $D_{\geqslant s}(\alpha,\beta)$ и $D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$ који се интерпретирају као „растојање између формула α и β је најмање s" и „растојање између формула α и β је највише s" и који омогућавају експлицитно резоновање о растојању, а као мотив за проучавање наведених логика је реалан проблем из области медицинских наука наведен у првој глави. За наведене логике биће описане класе модела и приказане аксиоматизације за које ће бити показана потпуност. Како за већину посматраних логика не важи компактност (осим за логике $L_M^{FR(n)}$ и $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$), јака потпуност се не може доказати уз коначну аксиоматизацију, па из тог разлога, наводићемо бесконачне аксиоматизације у којој су формуле коначне, а постоје бесконачна правила (бесконачно правило) извођења. Овај део дисертације биће базиран на оригиналним резултатима аутора [14] и [73], као и на саопштењима на међународним и националним научним скуповима посвећених математичкој логици и рачунарству.

Истраживање изложено у овом раду представља део пројекта ON174026, Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, чији је руководилац проф. др Силвиа Гилезан.

Највећу захвалност дугујем свом ментору проф. др Небојши Икодиновићу, који је био укључен у све фазе истраживања приказаних у овом раду. Велику захвалност дугујем и проф. др Миодрагу Рашковићу и проф. др Радосаву Ђорђевићу на корисним дискусијама и идејама. Захвалност дугујем проф. др Силвији Гилезан, проф. др Зорану Огњановићу, др Ангелини Илић-Степић, др Силвани Маринковић, др Марији Боричић и др Владимиру Ристићу на корисним сугестијама и несебичној подршци.

Такође, желим да се захвалим проф. др Марији Станић и проф. др Браниславу Поповићу за пријатељске савете током студија и за време израде овог рада, као и свим колегама са Института за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу.

На крају, желим да се захвалим мојим родитељима, сестри и њеној породици што су веровали у мене и са великим стрпљењем пропратили и подржали израду овог рада.

Глава 1

О растојањима

Растојање, посматрано као мера физичке удаљености два објекта, је резултат човековог искуства и незаобилазна је информација приликом планирања и закључивања. У свакодневном животу при свакодневним активностима под растојањем подразумевамо одређени степен близине два физичка објекта, као на пример физичка удаљеност између градова a и b, најчешће изражена у километрима. Иако о дужини пруге која повезује поменуте градове a и b у свакодневном говору не говоримо као о растојању, она то заправо јесте, јер растојање као математички појам може бити индуковано различитим мерама, тако да и време које је потребно да стигнемо из града a у град b, неким превозним средством или пешке, јесте једно растојање које се мери минутима, сатима или чак данима. Под растојањем можемо сматрати и број градова који се налазе на путу од града a до града b, а разлика у надморској висини градова a и b такође представља једно растојање и тако даље.

Метрика, али и метрички простори као структуре, дефинисани су пре више од једног века од стране француског математичара Морис Рене Фрешеа[1] и немачког математичара Феликса Хауздорфа[2], као посебан случај бесконачног тополошког простора. Увођењем метричких простора у геометрији од стране аустријско-америчког математичара Карла Менгера[3] и америчког математичара Леонарда Блументала[4] јавља се велико интересовање за истраживања у коначним и бесконачним метричким просторима. У тим истраживањима јавио се тренд да многе математичке теорије, у својој генерализацији се уздигну на ниво метричког простора, а тај процес је и

[1] Maurice René Fréchet (1878–1973)
[2] Felix Hausdorff (1868–1942)
[3] Karl Menger (1902–1985)
[4] Leonard Mascot Blumenthal (1901–1984)

данас актуелан, на пример у Римановој геометрији, реалној анализи и тако даље.

Одређивање растојања и метрика су данас постали један од основних алата у многим областима математике и њене примене, укључујући геометрију, вероватноћу, статистику, анализу података, криптографију, рачунарску графику, као и многе друге науке попут астрономије, молекуларне биологије и других. Иако је појам растојања универзалан и стандардан у свим наукама, често у свакодневном животу не користимо вредности да изразимо растојање између тачака a и b (нпр. неких локација), већ користимо придеве у смислу да је растојање кратко, средње или дугачко, па из тог разлога таква растојања називамо фази растојањима. Особина симетричности очигледно важи, док неједнакост троугла не, иако се то очекује, јер се ради о физичком растојању два објекта.

Налажење најпоузданијих растојања и метрика како би се одредила најприкладнија „близина" неког објекта постала је уобичајена и поуздана метода у многим наукама, а уједно је постао и задатак за многе истраживаче. За таквим растојањима најчешће се трага у рачунарској биологији, анализи слике, препознавању говора и наукама које се баве проналажењем недостајућих података. Оно што је веома битно, а и корисно је то што се иста растојања могу употребљавати у различитим контекстима у зависности од области, као на пример Хамингово растојање дефинисано на речима, а растојања у различитим контекстима могу бити мотивација за нова истраживања. Појмови дефинисани у овој глави су универзални па се дефиниције и класификације простора са растојањима могу пронаћи у скоро свакој књизи функционалне анализе. Класификација наведена у овом раду базира се на класификацијама приказаним у радовима [8] и [52].

1.1 Простори са растојањем

Појам метрике и метричког простора је у многим математичким дисциплинама незаобилазан појам, док појам растојања и простора са растојањима је њихово уопштење и као такви су погодни за одређене примене. Растојања у општем случају не задовољавају неједнакост троугла, а као ненегативне функције задовољавају само услове симетричности и рефлексивности. Међутим, неки аутори сматрају да растојање не мора да задовољава услов симетричности. На пример, време потребно да стигнемо авионом из места a у место b није исто као и време потребно да стигнемо из места b у место a ако се крећемо у правцу исток-запад.

Дефиниција 1.1.1. *Пресликавање* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *је функција растојања на непразном скупу* X *ако за свако* $x, y \in X$ *важи:*

$(D1)$ $d(x, y) = d(y, x)$ *(симетричност),*

$(D2)$ $d(x, x) = 0$ *(рефлексивност).*

Простор X *на коме је дефинисана функција растојања* d *зове се простор са растојањем и означава са* (X, d), *или краће само са* X *када подразумевамо о којој функцији растојања* d *се ради.*

Дефиниција 1.1.2. *Нека је* X *непразан скуп. Пресликавање* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *које задовољава само услов* $(D2)$ *претходне дефиниције назива се квази-растојање на скупу* X.

На основу искуства, било да се ради о физичком растојању два објекта (удаљености), дужини временског интервала, мери различитости два елемента и других растојања, запажамо различите особине које могу имати функције растојања. На основу тих особина можемо извршити класификацију функција растојања. Поменуте особине и карактеристичне функције растојања описаћемо у следећем одељку, а детаљан преглед и класификација простора са растојањима, као и њихове значајне особине могу се погледати у [8], док се неке од примена, нарочито у обради слика, и једна од класификација могу видети у [52].

1.1.1 Особине функција растојања

Функције растојања могу задовољавати и неке друге особине, па су таква растојања названа метриком, ултраметриком и тако даље. Неке особине које карактеришу специјална растојања наведене су у следећој дефиницији.

Дефиниција 1.1.3. *Пресликавање* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *на непразном скупу* X *може имати следеће особине* $(x, y, z \in X)$:

$(D3)$ $d(x, y) = 0$ *акко* $x = y$,

$(D4)$ $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(неједнакост троугла),*

$(D5)$ $d(y, x) = 0$ *ако је* $d(x, y) = 0$ *(слаба симетричност),*

$(D6)$ $x = y$ *ако је* $d(x, y) = d(y, x) = 0$,

$(D7)$ $d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ *(ултраметричка неједнакост),*

$(D8)$ $d(x,x) \leqslant d(x,y)$ *(растојање* $d(x,x)$ *(сопствено-растојање) је мало),*

$(D9)$ $d(x,y) \leqslant d(x,x)$ *(растојање* $d(x,x)$ *(сопствено-растојање) је велико),*

$(D10)$ $x = y$ *ако је* $d(x,x) = d(x,y) = d(y,y) = 0$ *(*T_0 *аксиома сепарације),*

$(D11)$ $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) - d(z,z)$,

$(D12)$ $d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) = d(x,z) + d(z,y) + d(y,x)$ *(релаксирана симетричност).*

Функције растојања на непразном скупу X које задовољавају неке од претходно наведених особина имају посебне називе, а свакако најпознатија функција растојања је метрика и она задовољава услове $(D3)$ и $(D4)$. Функција растојања која задовољава услов $(D3)$ назива се семи-метрика (или полу-метрика), док функција растојања која задовољава услов $(D4)$ назива се псеудометрика, а важно је напоменути да семи-метрика не мора да задовољава неједнакост троугла. Квази-растојање које задовољава услове $(D3)$ и $(D4)$ зове се квази-метрика, а квази-растојање које задовољава само услов $(D4)$ назива се квази-семи-метрика. Слаба квази-метрика је квази-семи-метрика која задовољава услов $(D5)$, а Албертова-квази-метрика је квази-семи-метрика која задовољава услов $(D6)$. Тежинска квази-семи-метрика је квази-семи-метрика која задовољава услов релаксиране симетричности, тј. услов $(D12)$. Ултраметрика је функција растојања која задовољава особине $(D3)$ и $(D7)$. Парцијалну метрику на непразном скупу X дефинишемо као симетрично пресликавање $d : X \times X \to [0, +\infty)$ које задовољава услове $(D8)$, $(D10)$ и $(D11)$.

1.2 Метрички простори

У зависности од потребе метрику можемо ојачати и неким посебним условима.

Дефиниција 1.2.1. *Простор* X *на коме је дефинисана метрика* d *зове се метрички простор и означава са* (X,d)*, или краће само са* X *када подразумевамо о којој се метрици* d *ради.*

• *Слаби метрички простори*

Растојање d дефинисано на непразном скупу X зове се слаба метрика ако за свако $x, y, z \in X$ и неку константу $C \in [1, +\infty)$ важи

$$d(x,z) \leqslant C(d(x,y) + d(y,z)).$$

Претходна неједнакост назива се C-неједнакост троугла, а простор (X,d) слаби метрички простор.

• *Хелдерови слабо-метрички простори*

Слаба метрика d дефинисана на непразном скупу X зове се Хелдерова слаба метрика ако неједнакост

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leqslant \beta d(y,z)^{\alpha}(d(x,y) + d(x,z))^{1-\alpha}$$

важи за све $x, y, z \in X$ и неке вредности $\beta > 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1$. Простор (X,d) назива се Хелдеров слабо-метрички простор.

• *Метрички простори са Coarse-path метриком*

Метрика d дефинисана на непразном скупу X назива се Coarse-path метрика ако за неку фиксирану константу $C \in [0, +\infty)$ важи да за све $x, y \in X$ постоји низ елемената $x = x_0, x_1, \ldots, x_t = y$ такав да је $d(x_{i-1}, x_i) \leqslant C$, $i = 1, 2, \ldots, t$ и

$$d(x,y) \geqslant d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{t-1}, x_t) - C.$$

• *Слаби ултраметрички простори*

Слаба ултраметрика (или C-псеудорастојање) d је растојање дефинисано на непразном скупу X тако да за неку константу $C \in [1, +\infty)$ и све $x, y, z \in X$, $x \neq y$ важи

$$0 < d(x,y) \leqslant C \cdot \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

Претходна неједнакост назива се слаба C-ултраметричка неједнакост, а простор (X,d) слаби ултраметрички простор.

• *Адитивни метрички простори*

Метрика d дефинисана на непразном скупу X зове се адитивна метрика или метрика са неједнакошћу четири тачке ако d задовољава јачу верзију неједнакости троугла која се зове неједнакост четири тачке, тј. за све $x, y, z, u \in X$ важи

$$d(x,y) + d(z,u) \leqslant \max\{d(x,z) + d(y,u), d(x,u) + d(y,z)\}.$$

Простор (X,d) зове се адитивни метрички простор.

• *Птоломејев метрички простор*

Птоломејева метрика на скупу X је метрика d за коју важи Птоломејева неједнакост

$$d(x, y) \cdot d(u, z) \leqslant d(x, u) \cdot d(y, z) + d(x, z) \cdot d(y, u),$$

за свако $x, y, z, u \in X$. Простор (X, d) назива се Птоломејев простор, а као пример Птоломејеве метрике наводимо пресликавање $d = \sqrt{d_1}$, где је d_1 произвољна метрика.

• *δ-хиперболички метрички простор*

За $\delta \in [0, +\infty)$, метрика d на непразном скупу X зове се δ-хиперболичка метрика ако за све $x, y, z, u \in X$ задовољава Громову δ-хиперболичку неједнакост

$$d(x, y) + d(z, u) \leqslant 2\delta + \max\{d(x, z) + d(y, u), d(x, u) + d(y, z)\}.$$

Метрички простор (X, d) је 0-хиперболички ако метрика d задовољава неједнакост четири тачке.

• *$2k$-гонални метрички простори*

$2k$-гонална метрика d је метрика на непразном скупу X која задовољава $2k$-гоналну неједнакост, тј. ако за све различите елементе $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и све $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$

$$\text{из} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} |b_i| = 2k\right) \text{ следи } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leqslant 0.$$

• *Негативни $2k$-гонални метрички простори*

Негативна $2k$-гонална метрика d је метрика на непразном скупу X која задовољава негативну $2k$-гоналну неједнакост, тј. ако за све различите елементе $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и све $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$

$$\text{из} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \text{ следи } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leqslant 0.$$

• $2k+1$-*гонални метрички простори*

$2k+1$-гонална метрика d је метрика на непразном скупу X која задовољава $2k+1$-гоналну неједнакост, тј. ако за све различите елементе $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ и све $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$

$$\text{из} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} b_i = 1 \wedge \sum_{i=1}^{n} |b_i| = 2k+1 \right) \text{ следи } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leqslant 0.$$

• *Хиперметрички простори*

Хиперметрика d је растојање на непразном скупу X која задовољава хиперметричку неједнакост, тј. ако за све различите елементе $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ и све $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$

$$\text{из } \sum_{i=1}^{n} b_i = 1 \text{ следи } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leqslant 0.$$

1.2.1 Метрика

Неке метрике су од универзалног значаја и користе се у многим наукама, како теоријским тако и у онима које се баве применама. У овом одељку биће наведени неки примери добро познатих метрика, а примери метрика у простору ограничених низова, конвергентних низова, непрекидних функција на коначном интервалу $[a, b]$, ограничених функција на интервалу $[a, b]$ као и у многим другим просторима, могу се пронаћи у [8].

• l_p-*метрика*

Једна од познатих метрика је l_p-метрика, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, која се дефинише на простору свих бесконачних реалних или комплексних низова $x = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$, таквих да је збир $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p$ (за $p = +\infty$, збир $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|$) коначан, на следећи начин

$$d_{l_p}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

За $p = +\infty$, метрика $d_{l_p^\infty}$ је дата са $d_{l_p^\infty}(x, y) = \max_{i \geqslant 1} |x_i - y_i|$.

• *Стандардна еуклидска метрика*

Специјалан случај l_p метрике је стандардна еуклидска метрика, али је због важности и широке примене посебно наводимо. У векторском простору $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ можемо дефинисати метрику на следећи начин

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Метрички простор $(\mathbb{R}^n, d_2)$ се најчешће означава са $\mathbb{E}^n$ и зове се Еуклидски простор или реални Еуклидски простор. Некада, када се каже Еуклидски простор подразумеваће се да је $n = 3$, а када кажемо Еуклидска раван то је за случај када је $n = 2$. Еуклидска права (реална права) је случај за $n = 1$, тј. ради се о метричком простору $(\mathbb{R}, d)$ где је $d(x, y) = |x - y|$ такозвана природна метрика.

• *L_p-метрика*

За произвољно $p \in [1, +\infty)$ и векторе $x, y \in \mathbb{R}^n$ векторског простора $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ је са

$$d_{L_p}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

дефинисана једна метрика на скупу $\mathbb{R}^n$.

Специјално, за $p = 1$ добијамо познату метрику $d_{L_1}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

• *L_∞-метрика*

За произвољне тачке $x, y \in \mathbb{R}^n$ векторског простора $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ је са

$$d_{L_\infty}(x, y) = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i - y_i|,$$

дефинисана једна метрика на скупу $\mathbb{R}^n$. Метрика d_{L_∞} је у литератури које се баве применама често названа и Чебишевљева метрика.

1.2.2 Метрике на речима

Примери растојања наведени у претходном одељку, углавном, налазе примену у математичким дисциплинама. Међутим, растојања нису значајна и примењива само у математици, већ се користе и у рачунарским наукама, пре свега дефинисана на скупу речи (стрингова).

Под алфабетом Σ подразумевамо било који непразан коначан скуп чије елементе називамо симболима или карактерима. Сваки алфабет користимо да бисмо написали неки текст, а у рачунарским наукама веома важан је бинарни алфабет $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. У рачунарству термин реч (или стринг) је основна јединица језика, а за разлику од стандардног говорног језика, представља неки произвољан текст. Другим речима, реч (стринг) је низ симбола датог коначног алфабета Σ. Скуп свих речи над алфабетом Σ означавамо са Σ^*. Примери примена растојања дефинисаним на скуповима речи из реалног света су многобројна, рецимо код препознавања говора, у биоинформатици, при налажењу недостајућих података, а посебно у криптографији приликом откривања грешака, затим при чувању и преносу информација итд.

Појмови подстринга, префикса, суфикса и других дефинисани су у многим књигама, а означавање у овом раду преузето је из [55]. У следећим примерима наведена су растојања (метрике) значајна у рачунарским наукама.

• *Хаминīово расūојање*

Нека је Σ алфабет и нека је Σ^n скуп свих речи фиксне дужине $n \in \mathbb{N}$ над алфабетом Σ. За речи $a = a_1 a_2 \ldots a_n$ и $b = b_1 b_2 \ldots b_n$, где су $a, b \in \Sigma^n$, дефинишемо функцију растојања

$$d_H(a, b) = |\{i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}, a_i \neq b_i\}|.$$

Вредност $d_H(a, b)$ је број позиција, тј. слова у речима a и b, у којима се те две речи разликују. Функција растојања $d_H(a, b)$ је једна метрика и као таква се примењује у многим наукама у зависности од контекста.

• *Левенштајново расūојање*

Поред Хаминговог растојања у рачунарским наукама користи се и Левенштајново растојање. Левенштајново растојање речи a и b, у ознаци $d_{\text{lev}}(a, b)$ је дато рекурзивном дефиницијом

$d_{\text{lev}}(a, b) = d_{\text{lev}}(a, b)[|a|, |b|]$,

$$d_{\text{lev}}(a,b)[i,j] = \begin{cases} \max\{i,j\}, & \min\{i,j\} = 0, \\ \min \begin{Bmatrix} d_{\text{lev}}(a,b)[i-1,j] + 1 \\ d_{\text{lev}}(a,b)[i,j-1] + 1 \\ d_{\text{lev}}(a,b)[i-1,j-1] + \chi_{a_i \neq b_j} \end{Bmatrix}, & \min\{i,j\} > 0, \end{cases}$$

где је $\chi_{a_i \neq b_j} = \begin{cases} 0, & a_i = b_j, \\ 1, & a_i \neq b_j, \end{cases}$ $|a|$ је дужина речи a, а вредност $d_{\text{lev}}(a, b)[i, j]$ је растојање између низа првих i знакова речи a и првих j знакова речи b.

Претходна дефиниција се може интерпретирати и рећи да је Левенштајново растојање речи a и b минималан број извршених трансформација над знаковима речи a, тако да се реч a може трансформисати у реч b. Трансформације су:

(1) брисање (изостављење) једног симбола $a_i \in \Sigma$ из речи, тј. трансформација речи $a_1a_2\ldots a_n$ дужине n у реч $a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n$ дужине $n-1$,

(2) уметање (додавање) једног симбола $x \in \Sigma$ у реч, тј. трансформација речи $a_1a_2\ldots a_n$ дужине n у реч $a_1a_2\ldots a_i x a_{i+1}\ldots a_n$ дужине $n+1$,

(3) замена једног симбола $a_i \in \Sigma$ симболом $b \in \Sigma$ у речи, тј. трансформација речи $a_1a_2\ldots a_{i-1}a_ia_{i+1}\ldots a_n$ у реч $a_1a_2\ldots a_{i-1}ba_{i+1}\ldots a_n$.

Као и Хамингово растојање, Левенштајново растојање је једна метрика на скупу свих речи.

• *Дамерау-Левенштајново растојање*

Дамерау-Левенштајново растојање, које је такође метрика на скупу свих речи, је модификовано Левенштајново растојање, а разлика је у томе што се трансформацијама Левенштајновог растојања додаје још једна трансформација

(4) замена места два суседна симбола у речи, тј. трансформација речи $a_1\ldots a_{i-1}a_ia_{i+1}a_{i+2}\ldots a_n$ у реч $a_1\ldots a_{i-1}a_{i+1}a_ia_{i+2}\ldots a_n$.

1.3 Растојања између два скупа

У овом одељку приказана су нека растојања између скупова. Растојања између скупова представљају мотивацију за примену логика посматраних у [14] и [73], а које ће бити разматране у трећој глави. Нека од наведених растојања користе се само у дискретној математици.

• *Еуклидско растојање тачке и коначног скупа*

Еуклидско растојање тачке $x \in \mathbb{R}^n$ и скупа $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ је дефинисано са

$$d_E(x,Y) = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} d_2^2(x,y_i)},$$

где је d_2 еуклидско растојање између две тачке.

• *Еуклидско растојање два коначна скупа*

Еуклидско растојање између два произвољна коначна скупа $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\} \subseteq \mathbb{R}^n$ можемо дефинисати на следећи начин

$$d_E(X,Y) = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d_E^2(x_i, Y)} = \sqrt{\frac{1}{pq}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} d_2^2(x_i, y_j)},$$

где је $d_E(x_i, Y)$ еуклидско растојање тачке од скупа претходно дефинисано.

• *Растојање тачка-скуп*

Нека је d произвољна функција растојања дефинисана на неком непразном произвољном скупу X. За произвољну тачку x и произвољан непразан скуп $A \subseteq X$ је са

$$d_{\inf}(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

дефинисана функција растојања тачке од скупа $d_{\inf} : X \times (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \to [0, +\infty)$ и често се још назива и инфимум растојање тачке од скупа, а често се користи приликом обраде слика и говора и у многим сродним областима. Овакво пресликавање се обично додефинише вредностима $d_{\inf}(x, \emptyset) = 1$ или $d_{\inf}(x, \emptyset) = +\infty$ које представљају растојање произвољне тачке до празног скупа.

• *Растојање скуп-скуп*

Растојање тачка-скуп дефинисано у претходном одељку може се на једноставан начин проширити до растојања скуп-скуп. Нека је d произвољна функција растојања дефинисана на неком непразном произвољном скупу X. За произвољне непразане скупове $A, B \subseteq X$ је са

$$d_{\inf}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

дефинисана функција растојања два скупа $d_{\inf} : (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \to [0, +\infty)$ и често се још назива и инфимум растојање скупова. Овако дефинисано пресликавање обично се додефинише и вредностима $d_{\inf}(A, \emptyset) = d_{\inf}(\emptyset, A) = +\infty$ и $d_{\inf}(\emptyset, \emptyset) = 0$ и представља растојање произвољних скупова. Наравно, ово растојање није метрика, јер не задовољава неједнакост троугла.

• *Хауздорфова метрика*

Најпознатије, а и међу првим међускуповним растојањима је Хауздорфова метрика. Нека је d произвољна функција растојања дефинисана на неком непразном произвољном скупу X и нека је $d_{\inf}(x, A)$ растојање тачке x до скупа A које је претходно дефинисано. За произвољне непразане скупове $A, B \subseteq X$,

$$d_{Haus}(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d_{\inf}(x, B), \sup_{y \in B} d_{\inf}(y, A) \right\}$$

дефинише функцију $d_{Haus} : (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \to [0, +\infty)$ растојања два скупа. Пресликавање d_{Haus} можемо додефинисати вредностима $d_{Haus}(A, \emptyset) = d_{Haus}(\emptyset, A) = +\infty$ и $d_{Haus}(\emptyset, \emptyset) = 0$ тако да додефинисана функција растојања буде метрика, коју називамо Хауздорфова метрика. Хауздорфова метрика има велики недостатак приликом примена у обради слика. Наиме, вредност растојања два скупа се драстично промени ако се једном од скупова дода само једна тачка која је знатно удаљена од осталих.

• *Модификована Хауздорфова метрика*

Хауздорфова метрика се може модификовати и на тај начин је ублажен недостатак Хауздорфове метрике. Наведена модификација у великој мери ограничава функцију d_{Haus}, јер се ограничавамо само на коначне скупове. Наиме, нека је d произвољна функција растојања дефинисана на неком непразном произвољном скупу X и нека је $d_{\inf}(x, A)$ растојање тачке x до скупа A. Означимо са $|A|$ кардинални број скупа A, а са $\mathcal{F}(X)$ фамилију свих коначних подскупова скупа X. За произвољне коначне непразне скупове $A, B \in \mathcal{F}(X)$ је са

$$d_{MHaus}(A, B) = \max \left\{ \frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} d_{\inf}(x, B), \frac{1}{|B|} \sum_{y \in B} d_{\inf}(y, A) \right\}$$

дефинисана функција $d_{MHaus} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, +\infty)$ растојања два скупа. Иако ова функција растојања није метрика, јер не задовољава неједнакост троугла, она има широку примену у техничким наукама.

• *Сума минималних растојања*

Сума минималних растојања је још једно растојање настало модификовањем Хауздорфове метрике у циљу отклањања недостатака. За произвољне коначне непразне скупове $A, B \in \mathcal{F}(X)$ је са

$$d_{SMD}(A,B) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|A|}\sum_{x\in A} d_{\inf}(x,B) + \frac{1}{|B|}\sum_{y\in B} d_{\inf}(y,A)\right)$$

дефинисана функција $d_{SMD} : \mathcal{F}(X)\times\mathcal{F}(X) \to [0,+\infty)$ растојања два скупа. Као и модификована Хауздорфова метрика ова функција растојања није метрика, јер не задовољава неједнакост троугла.

• *L_p-Хауздорфово растојање*

Ако је $(X, d_{\inf})$ коначан метрички простор, L_p-Хауздорфово растојање између два скупа $A, B \subseteq X$ дефинише се на следећи начин

$$d_{L_p-Haus}(A,B) = \left(\sum_{x\in X} |d_{\inf}(x,A) - d_{\inf}(x,B)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

У случају када је $p = +\infty$, ради се о уобичајеној Хауздорфовој метрици.

• *Мера симетричне разлике*

Нека је на скупу X дефинисана σ-алгебра $\mathcal{A}$ и ако је μ нека σ-коначна мера на мерљивом простору $(X, \mathcal{A})$, тада функција $d_{\triangle} : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to [0,+\infty)$ дефинисана са

$$d_{\triangle}(A,B) = \mu(A\triangle B),$$

представља функцију растојања на σ-алгебри $\mathcal{A}$, где је $\triangle$ симетрична разлика скупова.

Функција $d_{\triangle}$ је рефлесивна, симетрична и задовољава неједнакост троугла, а како не задовољава особину $(D3)$ онда она није метрика, већ једна псеудометрика.

У општем случају, од сваке псеудометрике можемо изградити метрику, али на количничком скупу на следећи начин. На скупу $\mathcal{A}$ можемо дефинисати релацију еквиваленције

$$A \sim B \;\Leftrightarrow\; \mu(A\triangle B) = 0.$$

Функција дефинисана на количничком скупу $\widetilde{d}_{\triangle} : (\mathcal{A}_{/\sim})\times(\mathcal{A}_{/\sim}) \to [0,+\infty)$ на следећи начин

$$\widetilde{d}_{\triangle}([A],[B]) = \mu(A\triangle B),$$

одређује једну метрику.

Нека је X коначан скуп и нека је μ мера кардиналности, тј. $\mu(X) = |X|$. Пресликавање $d_{|\triangle|}(A, B) = |A \triangle B|$ је једна метрика, јер у овом случају важи еквиваленција $|A \triangle B| = 0$ акко $A = B$.

• *Липшицово растојање између две мере*

За дати компактни метрички простор (X, d), Липшицова семи-норма (полу-норма) у ознаци $\| \cdot \|_{Lip}$ на скупу функција $f : X \to \mathbb{R}$ је дата са

$$\|f\|_{Lip} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

Липшицово растојање између мера μ и ν дефинисаних на скупу X је дато са

$$d_{Lip}(\mu, \nu) = \sup_{\|f\|_{Lip} \leqslant 1} \int f d(\mu - \nu).$$

Ако су μ и ν вероватносне мере, растојање d_{Lip} се зове Канторович-Маловс-Монге-Васерштајнова метрика.

1.4 Исказне формуле и растојања

Растојања приказана у претходним одељцима су опште позната и примењива у многим наукама. Идеја да се на скупу исказних формула дефинише функција растојања потекла је од професора Миодрага Рашковића који је дефинисао $\max \min$-метрику на скупу исказних формула. Растојања приказана у овом одељку била су мотив за проучавање исказних логика са метричким операторима које ће бити приказане у трећој глави.

Нека је For_n скуп класичних исказних формула над исказним словима $p_1, \ldots, p_n$. Означимо са $a_1, \ldots, a_N$, где је $N = 2^n$, све атоме над $p_1, \ldots, p_n$, тј. све конјункције облика $p_1^{e_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{e_n}$, где су $e_1, \ldots, e_n \in \{0, 1\}$ ($p^1 = p$ и $p^0 = \neg p$). Нека је $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$. Скуп A се може посматрати и као скуп валуација исказних слова $p_1, \ldots, p_n$, па из тог разлога сваку исказну формулу можемо посматрати и као одговарајући скуп атома. За било коју исказну формулу α постоји $S_\alpha \subseteq A$ тако да је α еквивалентна са $\bigvee S_\alpha$:

$$S_\alpha = \{a \in A \mid a \models \alpha\} = \{a \in A \mid v_a(\alpha) = 1\}.$$

Идентификовањем атома скупа A са бинарним речима дужине n, свака функција растојања дефинисана на скупу речи може бити трансформисана у растојање у логичком контексту. На пример, Хамингово растојање може бити од велике користи. Прелазак са логичке нотације на бинарне речи омогућује нам пресликавања

$$v(a,\alpha)=\begin{cases}1, & a\models\alpha,\\ 0, & a\not\models\alpha.\end{cases}$$

Међу бинарним низовима дужине n на разне начине се може увести метрика. На пример, функција $d : A\times A\to[0,+\infty)$ дата са

$$d(e,f)=|\{i\in\{1,\dots,n\}\mid e_i\neq f_i\}|,\ \ e,f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\},$$

јесте метрика на скупу A, јер задовољава особине

1. $d(e,f)=0$ акко $e=f$,
2. $d(e,f)=d(f,e)$,
3. $d(e,f)\leqslant d(e,g)+d(g,f)$.

Неједнакост троугла следи директно из чињенице $e_i\neq f_i\Rightarrow e_i\neq g_i\vee g_i\neq f_i$. Други пример, пример ограничене метрике на скупу A, јесте пресликавање $d_1 : A\times A\to[0,1]$, дато са

$$d_1(e,f)=\frac{|\{i\in\{1,\dots,n\}\mid e_i\neq f_i\}|}{n},\ \ e,f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}.$$

Сада, циљ нам је да метрику $d : A\times A\to[0,+\infty)$ проширимо са скупа A на скуп исказних формула For, а то можемо урадити на више начина.

• $\max\min$-*метрика на скупу исказних формула*

Метрику d над скупом атома A проширимо до метрике на скупу исказних формула. Метрику дату у следећој теореми дефинисао је професор Миодраг Рашковић.

Теорема 1.4.1. Пресликавање $D : \mathrm{For}\times\mathrm{For}\to[0,+\infty)$ дато са

$$D(\alpha,\beta)=\frac{\max\limits_{a\models\alpha}\min\limits_{b\models\beta}d(a,b)+\max\limits_{b\models\beta}\min\limits_{a\models\alpha}d(a,b)}{2}$$

је метрика на скупу For.

Доказ. Докажимо да пресликавање D задовољава услове метрике, а очигледно је да се ради о ненегативном пресликавању.

(1) Покажимо да важи еквиваленција: $D(\alpha, \beta) = 0$ акко $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.

$$
\begin{array}{lll}
D(\alpha,\beta)=0 & \text{акко} & \max\limits_{a\models\alpha}\min\limits_{b\models\beta} d(a,b)=0 \ \text{ и } \ \max\limits_{b\models\beta}\min\limits_{a\models\alpha} d(a,b)=0 \\
 & \text{акко} & \text{за свако } a\models\alpha, \min\limits_{b\models\beta} d(a,b)=0 \text{ и} \\
 & & \text{за свако } b\models\beta, \min\limits_{a\models\alpha} d(a,b)=0 \\
 & \text{акко} & \text{за свако } a\models\alpha \text{ постоји } b\models\beta \text{ тако да } d(a,b)=0, \text{ тј. } a=b \text{ и} \\
 & & \text{за свако } b\models\beta \text{ постоји } a\models\alpha \text{ тако да } d(a,b)=0, \text{ тј. } a=b \\
 & \text{акко} & \text{за свако } a\models\alpha,\ a\models\beta \text{ и за свако } b\models\beta,\ b\models\alpha \\
 & \text{акко} & \alpha\models\beta \text{ и } \beta\models\alpha \\
 & \text{акко} & \models\alpha\leftrightarrow\beta.
\end{array}
$$

(2) Једнакост $D(\alpha, \beta) = D(\beta, \alpha)$ важи очигледно.

(3) Нека су α, β и γ произвољне формуле. Тада важи неједнакост $d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b)$, за све $a \models \alpha$, $b \models \beta$ и $c \models \gamma$. За фиксирано $c \models \gamma$, нека је $a_c \models \alpha$ такав да је $d(a_c, c) \leqslant d(a, c)$, за свако $a \models \alpha$, дакле, $d(a_c, c) = \min\limits_{a\models\alpha} d(a, c)$. Како је $d(a_c, b) \leqslant d(a_c, c) + d(c, b)$, за било које $b \models \beta$, имамо

$$\min_{a\models\alpha} d(a,b) \leqslant d(a_c,b) \leqslant d(a_c,c)+d(c,b) = \min_{a\models\alpha} d(a,c)+d(c,b).$$

Одавде добијамо да је

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_{a\models\alpha} d(a,b) & \leqslant & \min\limits_{a\models\alpha} d(a,c)+d(c,b) \\
 & \leqslant & \max\limits_{c\models\gamma}\min\limits_{a\models\alpha} d(a,c)+d(c,b), \text{ за све } b\models\beta, c\models\gamma.
\end{array}
$$

Даље, имамо да за све $b \models \beta$ важи

$$\min_{a\models\alpha} d(a,b) \leqslant \max_{c\models\gamma}\min_{a\models\alpha} d(a,c) + \min_{c\models\gamma} d(c,b).$$

На крају, ако је b' такав да је $\min\limits_{a\models\alpha} d(a, b') \geqslant \min\limits_{a\models\alpha} d(a, b)$, за све $b \models \beta$, онда је

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{b\models\beta}\min\limits_{a\models\alpha} d(a,b) & = & \min\limits_{a\models\alpha} d(a,b') \\
 & \leqslant & \max\limits_{c\models\gamma}\min\limits_{a\models\alpha} d(a,c)+\min\limits_{c\models\gamma} d(c,b') \\
 & \leqslant & \max\limits_{c\models\gamma}\min\limits_{a\models\alpha} d(a,c)+\max\limits_{b\models\beta}\min\limits_{c\models\gamma} d(c,b).
\end{array}
$$

Дакле, важи неједнакост

$$\max_{b\models\beta}\min_{a\models\alpha} d(a,b) \leqslant \max_{c\models\gamma}\min_{a\models\alpha} d(a,c) + \max_{b\models\beta}\min_{c\models\gamma} d(c,b).$$

Полазећи од неједнакости $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$, за све $a \models \alpha$, $b \models \beta$ и $c \models \gamma$, аналогно добијамо

$$\max_{a \models \alpha} \min_{b \models \beta} d(a,b) \leqslant \max_{a \models \alpha} \min_{c \models \gamma} d(a,c) + \max_{c \models \gamma} \min_{b \models \beta} d(c,b).$$

На основу добијених неједнакости следи да је $D(\alpha,\beta) \leqslant D(\alpha,\gamma) + D(\gamma,\beta)$, што је и требало показати. $\square$

Да бисмо лако одредили растојања између формула α и β потребно је формуле α и β записати у канонској дисјунктивној нормалној форми, као у следећем примеру.

Пример 1.4.1. За дате формуле α и β одредимо њихове канонске дисјунктивне нормалне форме, тј. нека је $\alpha : (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ и $\beta : (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$. Сада, имамо да је $\max\limits_{a \models \alpha} \min\limits_{b \models \beta} d(a,b) = 0$ и $\max\limits_{b \models \beta} \min\limits_{a \models \alpha} d(a,b) = 1$, па је $D(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}$. Како је $\max\limits_{a \models \alpha} \min\limits_{b \models \alpha} d(a,b) = 0$ и $\max\limits_{b \models \alpha} \min\limits_{a \models \alpha} d(a,b) = 0$ закључујемо да је $D(\alpha,\alpha) = 0$.

• *Хамингова метрика на скупу исказних формула*

На основу Хаминговог растојања између атома можемо дефинисати пресликавање $\overline{D} : \mathrm{For} \times \mathrm{For} \to [0, +\infty)$, на следећи начин

$$\overline{D}(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{N} |v(a_i,\alpha) - v(a_i,\beta)|$$

Како је Хамингово растојање једна метрика, то је и пресликавање $\overline{D}$ метрика на скупу формула For. Нормирањем метрике $\overline{D}$, добијамо метрику

$$D(\alpha,\beta) = \left(\sum_{i=1}^{N} |v(a_i,\alpha) - v(a_i,\beta)| \right) / N,$$

коју ћемо искористити да у следећем примеру скицирамо идеје за озбиљније примене. Метрика $\overline{D}$ је дефинисана у раду [73] и била је један од мотива за разматрање логика са бинарним метричким операторима.

Пример 1.4.2. За одређену болест, да би се излечио, пацијент може користити четири различита лека (мешајући два или више лекова, или један појединачно). Различити лекови су означени словима A, B, C и D. На основу искуства три излечена пацијента, четвртом пацијенту је потребно предложити тачно један лек, тако да тај лек буде најефикаснији. Искуства три излечена пацијента су следећа:

1. пацијент је користио лек A и лек B истовремено;

2. пацијент је користио лекове A, C и D (некада само један, некада два истовремено, а некада и сва три);

3. пацијент је користио сва четири лека истовремено или по два (A и D заједно или B и C заједно).

Исказним словима означимо следеће исказе:

p_1–пацијент је користио лек A;

p_2–пацијент је користио лек B;

p_3–пацијент је користио лек C;

p_4–пацијент је користио лек D;

q–пацијент је оздравио.

Искуства три излечена пацијента можемо записати исказним формулама:

1. $(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow q$;
2. $(p_1 \vee p_3 \vee p_4) \Rightarrow q$;
3. $((p_1 \wedge p_4) \vee (p_2 \wedge p_3)) \Rightarrow q$.

Да бисмо одредили најефикаснији лек одредимо растојања $D(\alpha, \beta)$, где је α формула која представља искуство пацијента, а формула β је формула облика $p_i \Rightarrow q$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, тј. растојања од формула које представљају искуства и формула које означавају стање да ће пацијент оздравити ако користи само један лек током терапије.

Како у наведеном примеру имамо 5 исказних слова, имаћемо 32 валуације. На основу дефиниције $v(a, \alpha)$, сваку од формула можемо посматрати као низ дужине 32 састављен од 0 и 1. Тако на пример, из дефиниције пресликавања v за формулу $(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow q$ добијамо низ

$$10101010111111111111111111111111,$$

а за формулу $p_1 \Rightarrow q$ добијамо низ

$$10101010101010101111111111111111,$$

при чему су вредности на истим позицијама у низовима добијене из исте валуације.

Како се ови низови разликују на 4 позиције, имамо да је растојање њихових формула $D((p_1 \wedge p_2) \Rightarrow q, p_1 \Rightarrow q) = \frac{4}{32}$. На сличан начин можемо одредити и остала растојања, која су наведена у табели испод.

$D(\alpha,\beta)$	$p_1 \Rightarrow q$	$p_2 \Rightarrow q$	$p_3 \Rightarrow q$	$p_4 \Rightarrow q$
$(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow q$	0.125	0.125	0.25	0.25
$(p_1 \vee p_3 \vee p_4) \Rightarrow q$	0.1875	0.25	0.1875	0.1875
$((p_1 \wedge p_4) \vee (p_2 \wedge p_3)) \Rightarrow q$	0.15625	0.15625	0.15625	0.15625

Анализирајући податаке из табеле, видимо да су растојања формуле $p_1 \Rightarrow q$ до формула које представљају искуства пацијената најмања, па из тог разлога пацијенту је потребно препоручити лек A.

Можемо приметити да метрика D, дефинисана у овом одељку, има занимљива својства, као на пример:

1. $D(\alpha, \neg\alpha) = 1$,
2. $D(\alpha, \neg\beta) = 1 - D(\alpha, \beta)$,
3. $D(\alpha, \beta \vee \gamma) = D(\alpha, \beta) + D(\alpha, \gamma) - D(\alpha, \beta \wedge \gamma)$,

за све формуле α, β и γ.

Метрике наведене у овом поглављу представљају мотивацију за разматрање логика које у свом језику садрже листе бинарних метричких оператора о којима ће бити речи у трећој глави. Наведена својства Хамингове метрике подсећају на својства условне вероватноће, па би било добро истражити неке дубље везе метричког оператора D и одговарајућих вероватносних оператора посматраних у радовима [26], [27], [34], [56], [59], [60] и [65].

Глава 2

Модалне логике растојања

Као што је наведено у првој глави и разматрано у радовима [40], [42] и [44] простор са растојањем (W, d) задовољава само услов $(D3)$ и као такав он је модел језика који ће бити проучаван у овој глави, а класу свих простора са растојањем означаваћемо са $\mathcal{D}^d$ или једноставно $\mathcal{D}$. Код наведеног простора са растојањем често ћемо захтевати да функција d задовољава и неке додатне услове, на пример да за функцију d важе услови $(D1)$ и $(D3)$, а класу таквих простора називаћемо класом простора са симетричним растојањем и означавати са $\mathcal{D}^s$. Класу простора са растојањем код којих за функцију d важе услови $(D3)$ и $(D4)$ назваћемо класом простора са троугаоним растојањем и означавати са $\mathcal{D}^t$, а класу свих метричких простора означаваћемо са $\mathcal{D}^m$.

На самом почетку ове главе описаћемо синтаксу и семантику логике растојања првог реда као и модалних логика растојања, а на реалном примеру дискутоваћемо њихове изражајне моћи и навести класе логика у зависности од њиховог језика. Посматрајмо реалан пример у коме је на основу задатих услова потребно добити добар закључак.

Пример. Приликом куповине куће заинтересовани купци су одабрали град у коме желе живети, а детаље око локације препустили су агенцији уз дефинисање неколико неопходних услова.

(1) Кућа не би требала бити далеко од факултета, рецимо, на растојању не већем од 10 километара.

(2) Кућа би требало да буде близу продавница и ресторана, а требало би да буду доступни, рецимо, у кругу од 1 километра.

(3) Потребно је да постоје паркови близу куће, на растојању бар 2 километра у сваком правцу од куће.

(4) Фабрике и ауто-путеви не треба да буду близу куће, на растојању не мањем од 5 километара.

(5) Мора постојати спортски центар, а осим тога, сви спортски центри тог града требало би бити доступни за пешаке, односно на растојању не већем од 3 километра.

(6) Јавни превоз би требао бити доступан, тј. кад год сте на растојању не већем од 8 километара од ваше куће, треба да постоји аутобуска станица на удаљености до 1 километра.

(7) Наравно, мора постојати аутобуска станица, не превише близу, али не превише ни далеко од куће - негде између 0.5 и 1 километра.

Услови у претходно наведеном примеру могу се записати језиком логике растојања првог реда, у ознаци $\mathcal{LF}[\mathbb{Q}^+]$ и представити формулама $(1')-(7')$. Кућу и факултет, у наведеном примеру, можемо посматрати као константе и означити их са k и f, а особину објекта бити продавница, ресторан, парк, фабрика, ауто-пут, спортски центар, стајалиште јавног превоза као унарне предикате (релације) и означавати их редом са P, R, Z, F, AP, SC, A. Услове претходног примера сада можемо представити на следећи начин:

$(1')$ $\delta(k,f) \leqslant 10$;

$(2')$ $(\exists x)(\delta(k,x) \leqslant 1 \wedge P(x))$ и $(\exists x)(\delta(k,x) \leqslant 1 \wedge R(x))$;

$(3')$ $(\forall x)(\delta(k,x) \leqslant 2 \rightarrow Z(x))$;

$(4')$ $(\forall x)(F(x) \vee AP(x) \rightarrow \delta(k,x) \geqslant 5)$;

$(5')$ $(\exists x)(\delta(k,x) \leqslant 3 \wedge SC(x))$ и $(\forall x)(\delta(k,x) > 3 \rightarrow \neg SC(x))$;

$(6')$ $(\forall x)(\delta(k,x) \leqslant 8 \rightarrow (\exists y)(\delta(x,y) \leqslant 1 \wedge A(y)))$;

$(7')$ $(\exists x)(\delta(k,x) > 0.5 \wedge \delta(k,x) \leqslant 1 \wedge A(x))$.

Слично, као и код темпоралних, дескриптивних и других некласичних логика тако и код модалних логика растојања избегавамо употребу квантификатора тако што их замењујемо различитим врстама модалних оператора. Језици модалних логика растојања су екстензије класичног исказног језика који поред класичних симбола садрже и листе унарних метричких оператора. Унарни оператори растојања могу бити оператори облика наведени у скупу

$$\{A^{<a}, A^{\leqslant a}, A^{>a}, A^{\geqslant a}, A^{=a}, A^{>a}_{<b}, A^{\geqslant a}_{<b}, A^{>a}_{\leqslant b}, A^{\geqslant a}_{\leqslant b} \mid a, b \in M\},$$

са значењем, на пример $A^{\leqslant a}$ означава „свуда у кругу полупречника a”, а $A^{>a}$ означава „свуда ван круга полупречника a” и где уместо константи језика првог реда користимо номинале, тј. атомичне формуле интерпретиране синглтонима који су подскупови скупа W. Језике који садрже наведене операторе означавамо са $\mathcal{LO}_O[M]$, а ако номинали нису део језика, језик означавамо са $\mathcal{L}_O[M]$, где је O подскуп наведеног скупа оператора, а M скуп параметара, $M \subseteq \mathbb{R}^+$. Претходно наведени пример можемо представити формулама језика $\mathcal{LO}_O[M]$, где су k и f номинали, а унарне предикате P, R, Z, F, AP, SC, A сада посматрамо као исказне променљиве интерпретиране подскуповима домена простора растојања. У наведеном примеру јављају нам се услови попут „негде у кругу полупречника b” или слични услови које можемо представити језиком модалне логике растојања користећи дуалне операторе наведених оператора растојања. Дуалне операторе уводимо на следећи начин, $E^{\leqslant a} = \neg A^{\leqslant a} \neg$ и тако даље. На тај начин добијамо скуп оператора модалне логике растојања који су дуални операторима претходно наведеног скупа

$$\{E^{<a}, E^{\leqslant a}, E^{>a}, E^{\geqslant a}, E^{=a}, E^{>a}_{<b}, E^{\geqslant a}_{<b}, E^{>a}_{\leqslant b}, E^{\geqslant a}_{\leqslant b} \mid a, b \in M\}.$$

Услове $(1) - (7)$ из примера сада можемо записати језиком модалне логике растојања на следећи начин:

$(1'')$ $k \to E^{\leqslant 10} f$;

$(2'')$ $k \to (E^{\leqslant 1} P \wedge E^{\leqslant 1} R)$;

$(3'')$ $k \to A^{\leqslant 2} Z$;

$(4'')$ $k \to \neg E^{<5}(F \vee AP)$;

$(5'')$ $k \to (E^{\leqslant 3} SC \wedge A^{>3} \neg SC)$;

$(6'')$ $k \to A^{\leqslant 8} E^{\leqslant 1} A$;

$(7'')$ $k \to E^{\geqslant 0.5}_{\leqslant 1} A$.

Значење формула записаних језиком модалне логике растојања је у складу са интерпретацијом поменутих оператора, тако на пример, формула $E^{\leqslant 1} P$ је тачна за све оне тачке из домена, за које је најмање једна продавница доступна на растојању до 1 километра. На сличан начин можемо одредити и значења осталих формула.

Ради доказивања сагласности, потпуности и других особина логика растојања, метричке просторе, у општем случају просторе растојања, представићемо као релацијске структуре у односу на језик $\mathcal{LO}_O[M]$ као у теоремама 2.2.2 и 2.2.3, што има за последицу да формула језика $\mathcal{LO}_O[M]$ важи у неком метричком простору ако и само важи у одређеној врсти Крипкеовог оквира, названог D-метрички оквир (D је конкретан скуп оператора о којем ће бити речи касније). Сложеном филтрацијом и техником „надоградње оквира” желимо да покажемо да Крипкеови оквири имају својство коначног оквира и да се могу конструисати адекватни метрички простори из посматраних оквира.

У овој глави наводимо потпуну аксиоматизацију логике $\mathcal{MS}_D[M]$, за конкретан скуп оператора D и где језик не садржи номинале, која је представљена у радовима [40], [42] и [43]. Потпуне аксиоматизације логика растојања првог реда, као и модалне логике растојања са скупом оператора F чији језици могу да садрже номинале представљене су у радовима [40] и [41].

2.1 Језик логике растојања првог реда и модалне логике растојања

Сви језици које посматрамо биће дефинисани у односу на неки скуп параметара из $\mathbb{R}^+$ чији елементи се јављају у формулама поменутог језика. Ове скупове називаћемо параметарским скуповима и дефинишемо их на следећи начин.

Дефиниција 2.1.1. *Нека је $M \subseteq \mathbb{R}^+$ скуп ненегативних реалних бројева. Скуп M називамо параметарским скупом, ако су задовољена следећа два услова:*

(1) $0 \in M$;

(2) *ако $a, b \in M$ и ако постоји $c \in M$ такав да $a + b < c$, онда и $a + b \in M$.*

Скупови $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{N}$ се намећу као природни кандидати за параметарске скупове, али су сви они бесконачни. Поред наведених бесконачних кандидата лако можемо уочити и коначан скуп са наведеним особинама претходне дефиниције, на пример скуп $M = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, за $n \in \mathbb{N}$.

Што се тиче семантике, језици ће бити интерпретирани у различитим класама растојања као што је поменуто у уводном делу. Класе које посматрамо у будућем излагању су:

- $\mathcal{D}^d$ или само $\mathcal{D}$ – класа свих простора растојања;
- $\mathcal{D}^s$ – класа свих простора симетричних растојања;
- $\mathcal{D}^t$ – класа свих простора троугаоних растојања;

- $\mathcal{D}^m$ или само $\mathcal{MS}$ – класа свих метричких простора.

Језик у коме бисмо могли најпрецизније да изразимо својства простора растојања, а и метричких простора, јесте стандардни језик првог реда. Нека је M параметарски скуп. Језик првог реда $\mathcal{LF}[M]$ логике растојања садржи пребројив скуп симбола константи $\{c_1, c_2, \ldots\}$, пребројив скуп променљивих $\mathrm{Var} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, пребројив скуп унарних релацијских симбола $\{P_1, P_2, \ldots\}$, знак једнакости $=$, два скупа (скупови могу бити и бесконачни) бинарних релацијских симбола облика

$$\delta(\cdot,\cdot) < a \ \text{ и } \ \delta(\cdot,\cdot) = a, \ \ (a \in M),$$

класичне логичке везнике, логичке константе $\top$ и $\bot$ и квантификатор $\exists$ (егзистенцијални).

Атомске формуле дефинишемо на уобичајени начин, тј. атомске формуле су облика

$$\top, \ \ \bot, \ \ \delta(t_1, t_2) < a, \ \ \delta(t_1, t_2) = a, \ \ t_1 = t_2 \ \text{ и } \ P_i(t),$$

где су t, t_1 и t_2 терми, тј. променљиве или константе, а $a \in M$. Формуле језика $\mathcal{LF}[M]$ дефинишемо на стандардан (уобичајени) начин, а формулу $\delta(t_1, t_2) > a$ можемо представити у облику $\neg\delta(t_1, t_2) < a \wedge \neg\delta(t_1, t_2) = a$.

$\mathcal{LF}[M]$-формуле су интерпретиране у скупу W који је домен структуре облика

$$\mathbf{A} = \langle W, d, P_1^{\mathbf{A}}, \ldots, c_1^{\mathbf{A}}, \ldots \rangle,$$

где је (W, d) одговарајући простор растојања, $P_i^{\mathbf{A}}$ су подскупови од W (интерпретације унарних релацијских симбола P_i), а $c_i^{\mathbf{A}}$ су елементи од W (интерпретације симбола константи c_i). Валуација променљивих у скупу W јесте свака функција $v : \mathrm{Var} \to W$. Уређени пар $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, v \rangle$ зовемо $\mathcal{LF}[M]$-модел или једноставно модел првог реда логике растојања.

За терм t, нека $t^{\mathbf{M}}$ означава $c_i^{\mathbf{M}}$ ако је t константа c_i, а $v(x)$ ако је t променљива x. Релацију задовољења дефинишемо на уобичајени начин, тј. $\mathbf{M} \models \varphi$ за $\mathcal{LF}[M]$-формулу φ, дефинишемо индуктивно по сложености формуле φ на следећи начин:

- $\mathbf{M} \models \top$ и $\mathbf{M} \not\models \bot$;
- $\mathbf{M} \models \delta(t_1, t_2) < a$ акко $d(t_1^{\mathbf{M}}, t_2^{\mathbf{M}}) < a$;
- $\mathbf{M} \models \delta(t_1, t_2) = a$ акко $d(t_1^{\mathbf{M}}, t_2^{\mathbf{M}}) = a$;
- $\mathbf{M} \models t_1 = t_2$ акко $t_1^{\mathbf{M}} = t_2^{\mathbf{M}}$;
- $\mathbf{M} \models P_i(t)$ акко $t^{\mathbf{M}} \in P_i^{\mathbf{M}}$;

- $\mathbf{M} \models \exists x_i \psi$ акко $\langle \mathbf{A}, w \rangle \models \psi$, за неку валуацију w за коју важи $w(x) = v(x)$ за $x \neq x_i$;
- $\mathbf{M} \models \neg\psi$ акко $\mathbf{M} \not\models \psi$;
- $\mathbf{M} \models \psi \wedge \phi$ акко $\mathbf{M} \models \psi$ и $\mathbf{M} \models \phi$.

Појмови ваљаност и задовољивост се дефинишу аналогно као и у класичној логици првог реда, али у односу на класе уведених модела.

Нека су $\mathcal{D}^i$, $i \in \{d, s, t, m\}$ класе простора растојања, а M параметарски скуп и $\varphi \in \mathcal{LF}[M]$ произвољна формула.

Дефиниција 2.1.2. *Формула φ је задовољива у класи $\mathcal{D}^i$ ако постоји модел $\mathbf{M}$ базиран на простору $\langle W, d \rangle \in \mathcal{D}^i$, такав да $\mathbf{M} \models \varphi$. Формула φ важи у простору растојања $\langle W, d \rangle \in \mathcal{D}^i$ ако за сваки модел $\mathbf{M}$ базиран на $\langle W, d \rangle$ имамо да $\mathbf{M} \models \varphi$. Коначно, формула φ важи у класи $\mathcal{D}^i$ ако формула φ важи у сваком простору растојања $\langle W, d \rangle$ класе $\mathcal{D}^i$.*

Сада ћемо се упознати са модалним логикама растојања чији језици су фино одабрани тако да имају добру изражајну моћ, али су мање изражајни од језика логика растојања првог реда. Нека је M параметарски скуп. Језици које дефинишемо, зависиће од скупа $M \subseteq \mathbb{R}^+$, јер језик садржи листе оператора растојања који зависе од вредности $a \in M$.

Дефиниција 2.1.3. *Алфабет језика $\mathcal{L}_O[M]$ се састоји од пребројивог скупа исказних слова $P = \{p_1, p_2, \dots\}$, класичних везника $\wedge$ и $\neg$, логичких константи $\top$ и $\bot$, као и од подскупа скупа оператора растојања $O \subseteq \mathfrak{O}[M]$, названог скуп оператора, који зависи од M:*

$$\{A^{<a}, A^{\leqslant a}, A^{>a}, A^{\geqslant a}, A^{=a}, A^{>a}_{<b}, A^{\geqslant a}_{<b}, A^{>a}_{\leqslant b}, A^{\geqslant a}_{\leqslant b} \mid a, b \in M\}.$$

Грађење формула се дефинише на уобичајени начин. Често, када је дат конкретан параметарски скуп M, ознаку M изостављамо из записа, јер особине логике углавном не зависе од конкретног избора скупа M, као што рецимо аксиоматизација не зависи од њега. Међутим, компактност зависи од тога да ли је скуп M бесконачан, а одлучивост од тога да ли је рекурзиван скуп.

Друге класичне вазнике, као и дуалне модалне операторе $E^{\leqslant a}$, $E^{>a}$ итд, уводимо на уобичајен начин, тако на пример уводимо да је $E^{\leqslant a} = \neg A^{\leqslant a} \neg$ и $E^{>a} = \neg A^{>a} \neg$. Слова $p, q, r, \dots$ користимо да означимо исказна слова (исказне променљиве), а малим словима грчког алфабета $\chi, \varphi, \psi, \dots$ означавамо формуле, док велика слова грчког алфабета $\Delta, \Sigma, \Theta, \dots$ су резервисана за означавање скупова формула.

На тај начин смо дефинисали синтаксу логике језика $\mathcal{L}_O[M]$, а семантику дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 2.1.4. *Модел језика $\mathcal{L}_O[M]$ је структура облика*

$$\mathbf{B} = \langle W, d, p_0^{\mathbf{B}}, p_1^{\mathbf{B}}, \ldots \rangle,$$

где је (W, d) простор растојања, а $p_i^{\mathbf{B}}$ су подскупови од W. Релација задовољења $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models \varphi$, за $\mathcal{L}_O[M]$-формулу φ и свет $w \in W$, се дефинише индуктивно по сложености формуле φ:

- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models p$ *акко* $w \in p^{\mathbf{B}}$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models \varphi \wedge \psi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models \varphi$ *и* $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models \psi$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models \neg\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, w \rangle \not\models \varphi$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{<a}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $d(w, u) < a$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{\leqslant a}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $d(w, u) \leqslant a$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{>a}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $d(w, u) > a$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{\geqslant a}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $d(w, u) \geqslant a$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{=a}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $d(w, u) = a$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{>a}_{<b}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $a < d(w, u) < b$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{\geqslant a}_{<b}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $a \leqslant d(w, u) < b$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{>a}_{\leqslant b}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $a < d(w, u) \leqslant b$;
- $\langle \mathbf{B}, w \rangle \models A^{\geqslant a}_{\leqslant b}\varphi$ *акко* $\langle \mathbf{B}, u \rangle \models \varphi$ *за све* $u \in W$, *за које је* $a \leqslant d(w, u) \leqslant b$.

Уобичајено, формула φ важи у моделу ако важи у свакој тачки модела; формула φ важи у простору растојања $\langle W, d \rangle$ ако важи у сваком моделу базираном на простору растојања (W, d). Коначно, формула φ важи у класи простора растојања $\mathcal{D}$ ако важи у сваком простору растојања класе $\mathcal{D}$.

Лако је закључити да је језик $\mathcal{L}_O[M]$ редундантан у смислу да се неки оператори растојања могу изразити преко других. На пример, оператор $A^{\geqslant a}_{\leqslant b}\varphi$ можемо записати као

$$A^{\geqslant a}_{\leqslant b}\varphi = A^{>a}_{<b}\varphi \vee A^{=a}\varphi \vee A^{=b}\varphi.$$

Из претходног јавља се потреба за добро одабраним минималним и интересантним подскуповима O скупа оператора $\mathfrak{O}[M]$. Карактеристични језици формирани на основу тако одабраних подскупова јесу $\mathcal{L}_{F[M]}$ и $\mathcal{L}_{D[M]}$.

Дефиниција 2.1.5. *Фиксирајмо параметарски скуп M и нека је:*

- $F[M] = \{A^{<a}, A^{>a}, A^{=a}, A^{>a}_{<b} \mid a, b \in M\}$;
- $D[M] = \{A^{\leqslant a}, A^{>a} \mid a \in M\}$.

На овај начин дефинишемо језике $\mathcal{L}_{F[M]}$ и $\mathcal{L}_{D[M]}$, или једноставно $\mathcal{L}_F$ и $\mathcal{L}_D$ уколико се подразумева о ком параметарском скупу се ради.

Као и код логика растојања првог реда, модалне логике растојања су дефинисане у смислу семантике, тј. као скупови формула језика које важе у одређеној класи простора растојања. За нас најинтересантнија логика је модална логика растојања, код које је растојање метрика, а скуп оператора D. Такву логику означавамо са $\mathcal{MS}_D[M]$.

2.2 Оквири

Представљање простора растојања у облику релацијских структура омогућава да се процесом филтрације докаже теорема потпуности за посматране логике.

Дефиниција 2.2.1. *За параметарски скуп M његов M-оквир (или само оквир) је структура*

$$\mathfrak{f} = \langle W, (R_{\leqslant a})_{a \in M}, (R_{>a})_{a \in M} \rangle \,,$$

чији је домен скуп W (скуп могућих светова, често кажемо и скуп тачака), и две фамилије бинарних релација дефинисаних на скупу W у ознаци $(R_{\leqslant a})_{a \in M}$ и $(R_{>a})_{a \in M}$.

Значење бинарних релација из претходне дефиниције је очекивано, тако да $uR_{\leqslant a}v$ означава „растојање од тачке u до тачке v је највише a”, а значење за $uR_{>a}v$ је „растојање од тачке u до тачке v је веће од a”, $a \in M$.

Дефиниција 2.2.2. *За параметарски скуп M његов M-модел (или само модел) базиран на оквиру $\mathfrak{f}$ је структура облика*

$$\mathbf{M} = \left\langle \mathfrak{f}, p_0^{\mathbf{M}}, p_1^{\mathbf{M}}, \ldots \right\rangle ,$$

где су $p_i^{\mathbf{M}}$ подскупови скупа W.

Користећи стандардну Крипкеову семантику над могућим световима рећи ћемо да

- $\langle \mathbf{M}, w\rangle \models A^{\leqslant a}\varphi$ акко $\langle \mathbf{M}, u\rangle \models \varphi$ за све тачке $u \in W$ за које је $wR_{\leqslant a}u$,
- $\langle \mathbf{M}, w\rangle \models A^{>a}\varphi$ акко $\langle \mathbf{M}, u\rangle \models \varphi$ за све тачке $u \in W$ за које је $wR_{>a}u$,

за $a \in M$.

Дефиниција 2.2.3. *Нека је $\overline{M}$ подскуп скупа M. Редуковани оквир, у ознаци $\mathfrak{f}_{\downarrow(D,\overline{M})}$, оквира $\mathfrak{f}$ је структура*

$$\mathfrak{f}_{\downarrow(D,\overline{M})} = \left\langle W, (R_{\leqslant a})_{a\in\overline{M}}, (R_{>a})_{a\in\overline{M}}\right\rangle.$$

За фиксиран параметарски скуп M, може се показати да за сваку формулу φ језика $\mathcal{L}_D\left[\overline{M}\right]$ и сваки модел $\mathbf{M}$ базиран на оквиру $\mathfrak{f}$ важи еквиваленција:

$$\left\langle \mathfrak{f}, p_0^{\mathbf{M}}, p_1^{\mathbf{M}}, \ldots, w\right\rangle \models \varphi \;\;\Leftrightarrow\;\; \left\langle \mathfrak{f}_{\downarrow(D,\overline{M})}, p_0^{\mathbf{M}}, p_1^{\mathbf{M}}, \ldots, w\right\rangle \models \varphi.$$

На први поглед, оквире никако не можемо довести у контекст простора растојања или метричког простора. Међутим, показаћемо да све посматране логике растојања могу бити окарактерисане класама оквира.

Дефиниција 2.2.4. *Нека је $S = \langle W, d\rangle$ простор растојања и M параметрански скуп. Пријатељски M-оквир простора S језика $\mathcal{L}_D$ је структура*

$$\mathfrak{f}_{D,M}(S) = \langle W, (R_{\leqslant a})_{a\in M}, (R_{>a})_{a\in M}\rangle,$$

таква да за све $u, v \in W$ важи:

- *$uR_{\leqslant a}v$ акко $d(u,v) \leqslant a$,*
- *$uR_{>a}v$ акко $d(u,v) > a$,*

а $(R_{\leqslant a})_{a\in M}$ и $(R_{>a})_{a\in M}$ су две фамилије бинарних релација дефинисаних на скупу W.

Нека су $\mathcal{MS}^i_O[M]$, $i \in \{m,t,s,d\}$ модалне логике растојања, за $O \subseteq \mathfrak{O}[M]$. Са $\mathrm{Fr}(\mathcal{MS}^i_O[M])$ означимо класу оквира тако да за сваки оквир $\mathfrak{f} \in \mathrm{Fr}(\mathcal{MS}^i_O[M])$ и M-модел базиран на њему важи да $\langle \mathbf{M}, w\rangle \models \varphi$, за $\varphi \in \mathcal{MS}^i_O[M]$. За произвољну класу оквира $\mathbf{F}$ означимо са $\mathrm{Th}(\mathbf{F}) = \{\varphi \in \mathcal{L} \mid \mathbf{F} \models \varphi\}$. Теорему која нам даје значајну еквиваленцију наводимо без доказа, а доказ се може пронаћи у раду [40].

Теорема 2.2.1. Нека су $\mathcal{MS}^i_O[M]$, $i \in \{m,t,s,d\}$ модалне логике растојања, за $O \subseteq \mathfrak{O}[M]$. За неки фиксирани параметарски скуп M важи једнакост

$$\mathcal{MS}^i_O[M] = \mathrm{Th}(\mathrm{Fr}(\mathcal{MS}^i_O[M])).$$

На основу претходне теореме можемо закључити да за сваки модел $\mathbf{M} = \left\langle W, d, p_0^{\mathbf{M}}, p_1^{\mathbf{M}}, \ldots \right\rangle$, где је $S = \langle W, d\rangle$ простор растојања, и његов пријатељски модел $\mathbf{M}' = \left\langle \mathfrak{f}_{D,M}(S), p_0^{\mathbf{M}'}, p_1^{\mathbf{M}'}, \ldots \right\rangle$, за произвољну формулу $\varphi \in \mathcal{L}_D[M]$ и свет $w \in W$ важи

$$\langle \mathbf{M}, w\rangle \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathfrak{f}_{D,M}(S), w\rangle \models \varphi.$$

Како су нама потребни оквири са одређеним особинама, ради довођења у контекст простора растојања, за релације оквира уведимо нека ограничења. Рећи ћемо да је M-оквир $\mathfrak{f}$ облика

$$\mathfrak{f} = \langle W, (R_{\leqslant a})_{a\in M}, (R_{>a})_{a\in M}\rangle\,,$$

D-метрички ако за све $a, b \in M$ и $u, v, w \in W$ важе следећи услови:

$(D1)$ $R_{\leqslant a} \cup R_{>a} = W \times W$;

$(D2)$ $R_{\leqslant a} \cap R_{>a} = \emptyset$;

$(D3)$ ако је $uR_{\leqslant a}v$ и $a \leqslant b$, тада $uR_{\leqslant b}v$;

$(D4)$ $uR_{\leqslant 0}v$ акко $u = v$;

$(D5)$ $uR_{\leqslant a}v$ акко $vR_{\leqslant a}u$;

$(D6)$ ако $uR_{\leqslant a}v$ и $vR_{\leqslant b}w$, тада $uR_{\leqslant a+b}w$.

Особине $(D4)$, $(D5)$ и $(D6)$ описују особине матричких простора. Отуда, за M-оквир $\mathfrak{f}$ кажемо да је

- D-стандардан, ако задовољава особине $(D1) - (D4)$;
- D-симетричан, ако задовољава особине $(D1) - (D5)$;
- D-троугаони, ако задовољава особине $(D1) - (D4)$ и $(D6)$.

Приметимо да сви D-метрички оквири задовољавају и додатне особине:

$(D7)$ ако $uR_{\leqslant a}v$ и $uR_{>a+b}w$, тада $vR_{>b}w$;

$(D8)$ ако $uR_{>a}v$ и $a \geqslant b$, тада $uR_{>b}v$;

$(D9)$ $uR_{>a}v$ акко $vR_{>a}u$;

$(D10)$ ако $uR_{\leqslant a}v$ и $uR_{>a}w$, тада $vR_{>0}w$.

Није тешко закључити да је особина $(D7)$ последица особина $(D1)$, $(D2)$ и $(D6)$; особина $(D8)$ следи из $(D1)$, $(D2)$ и $(D3)$, док особина $(D9)$ из $(D1)$, $(D2)$ и $(D5)$, а $(D10)$ из $(D1)$, $(D2)$ и $(D4)$. Дакле, сви D-стандарни оквири задовољавају особине $(D8)$ и $(D10)$, сви D-троугаони оквири задовољавају особине $(D7)$, $(D8)$ и $(D10)$, а сви D-симетрични оквири задовољавају особине $(D8)$, $(D9)$ и $(D10)$. Услов $(D10)$ је специјалан случај услова $(D7)$ за $b = 0$. Означимо са $\mathcal{F}^d[M]$, $\mathcal{F}^s[M]$, $\mathcal{F}^t[M]$ и $\mathcal{F}^m[M]$ редом, класе свих D-стандарних, D-симетричних, D-троугаоних и D-метричких M-оквира.

Ако је $S = \langle W, d \rangle$ метрички простор (простор растојања, простор симетричних растојања, простор троугаоних растојања) и M параметарски скуп, пријатељски оквир $\mathfrak{f}_{D,M}(S)$ биће D-метрички M-оквир (D -стандардни, D-симетрични, D-троугаони).

Теорема 2.2.2. За сваки коначан параметарски скуп $\overline{M}$ и D-метрички $\overline{M}$-оквир $\mathfrak{f}$ (D-стандардни, D-симетрични, D-троугаони) постоји метрички простор S (простор растојања, простор симетричних растојања, простор троугаоних растојања) тако да је $\mathfrak{f}$ његов пријатељски оквир, тј. $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{D,\overline{M}}(S)$. Посебно, ако је $\mathfrak{f}$ коначан, такав је и S.

Доказ. Нека је $M = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, \gamma\}$ коначан параметарски скуп, где је $\gamma = \max\big(M\big)$ и нека је

$$\mathfrak{f} = \langle W, (R_{\leqslant a})_{a \in M}, (R_{>a})_{a \in M} \rangle .$$

Дефинишимо скуп

$$D = \{a_i + a_j - \gamma \mid a_i + a_j > \gamma, a_i, a_j \in M\},$$

и означимо са $\varepsilon = \min(D \cup \{1\}) > 0$. Дефинисањем вредности ε обезбедили смо важну особину: ако $a, b \in M$ и $a + b < \gamma + \varepsilon$, тада је $a + b \leqslant \gamma$. Заиста, ако је $a, b \in M$ и $a + b < \gamma + \varepsilon$ и ако је $a + b > \gamma$, тада $a + b - \gamma \in D$, па је $\varepsilon \leqslant a + b - \gamma$, тј. $a + b \geqslant \gamma + \varepsilon$, што је контадикција. На основу претходног, ако $a, b \in M$ и $a + b < \gamma + \varepsilon$, тада $a + b \in M$. Дефинишимо функцију d на $W \times W$ на следећи начин

$$d(u, v) = \min(\{\gamma + \varepsilon\} \cup \{a \in M \mid uR_{\leqslant a}v\}).$$

Како је M коначан скуп, d је добро дефинисано. Показаћемо да ако је $\mathfrak{f}$ D-стандардни оквир, тада је d функција растојања, ако је $\mathfrak{f}$ D-симетрични оквир, тада је d симетрична функција растојања, и ако је $\mathfrak{f}$ D-троугаони оквир, тада је d троугаона функција растојања. Отуда, ако је $\mathfrak{f}$ D-метрички оквир, тада је d метрика. Очигледно да је кодомен пресликавања d скуп $M \cup \{\gamma + \varepsilon\}$.

(а) $d(u,v)=0$ акко $uR_{\leqslant 0}v$ акко $u=v$, на основу услова $(D4)$.

(б) Претпоставимо да услов $(D5)$ важи за D-симетрични оквир и нека је $d(u,v)=a$.

• Ако је $a=\gamma+\varepsilon$, тада је $uR_{>b}v$ за свако $b\in M$, тј. важи $\neg uR_{\leqslant b}v$ за свако $b\in M$, односно $\neg vR_{\leqslant b}u$ за свако $b\in M$, тј. важи $vR_{>b}u$ за свако $b\in M$. Дакле, $d(v,u)=\gamma+\varepsilon=a$.

• Слично, ако је $a=i$, где је $i=\min\{b\in M\mid uR_{\leqslant b}v\}$, тада је $uR_{\leqslant i}v$ и $\neg uR_{\leqslant c}v$ за свако $c<i$, односно $vR_{\leqslant i}u$ и $\neg vR_{\leqslant c}u$ за свако $c<i$, тј. $i=\min\{b\in M\mid vR_{\leqslant b}u\}=d(v,u)$. Дакле, $d(u,v)=d(v,u)$.

(в) Претпоставимо да услов $(D6)$ важи за D-троугаони оквир и нека је $d(u,v)=a$ и $d(v,w)=b$. Покажимо да важи неједнакост $d(u,w)\leqslant a+b$.

• Ако је $a+b\geqslant\gamma+\varepsilon$, тада $d(u,w)\leqslant a+b$, јер је $d(u,w)\in M\cup\{\gamma+\varepsilon\}$.

• Сада, можемо претпоставити да је $d(u,v)=a\leqslant\gamma$ и $d(v,w)=b\leqslant\gamma$ и $a+b<\gamma+\varepsilon$. На основу уводног разматрања имамо да $a+b\in M$, а на основу услова $(D6)$ имамо и да је $uR_{\leqslant a+b}w$. Отуда, на основу дефиниције пресликавања d закључујемо да $d(u,w)\leqslant a+b$.

Дакле, можемо дефинисати простор растојања $S=\langle W,d\rangle$. Остаје да докажемо да је $\mathfrak{f}_{D,M}(S)=\mathfrak{f}$. Потребно је показати да:

(а) $d(u,v)\leqslant a$ акко $uR_{\leqslant a}v$, за свако $a\in M$;

(б) $d(u,v)>a$ акко $uR_{>a}v$, за свако $a\in M$.

(а) Прво претпоставимо да је $d(u,v)\leqslant a$. Тада, на основу дефиниције пресликавања d постоји $b\in M$, такво да је $b\leqslant a$ за које је $uR_{\leqslant b}v$. На основу услова $(D3)$ закључујемо и да је $uR_{\leqslant a}v$. Супротно, нека је $uR_{\leqslant a}v$ за сваки $a\in M$, тада је $d(u,v)\leqslant a$ на основу дефиниције пресликавања d.

(б) Прво претпоставимо да је $d(u,v)>a$. Тада је $\neg uR_{\leqslant a}v$, на основу дефиниције пресликавања d, а из услова $(D1)$ закључујемо да је $uR_{>a}v$. Супротно, ако је $uR_{>a}v$, за свако $a\in M$, тада $\neg uR_{\leqslant a}v$ на основу услова $(D2)$. Из услова $(D3)$ имамо да $\neg uR_{\leqslant b}v$, за све $b\leqslant a$. Дакле, $d(u,v)>a$.

Као што примећујемо доказ теореме не зависи од тога да ли је скуп W коначан, већ само од тога да ли је параметарски скуп M коначан. $\square$

Теорема 2.2.3. Нека је M произвољан параметарски скуп. Формула φ језика $\mathcal{L}_D[M]$ важи у метричком простору (простору растојања, простору симетричних растојања, простору троугаоних растојања) дефинисаном на скупу W ако и само ако важи у моделу базираном на D-метричком M-оквиру (D-стандардном, D-симетричном, D-троугаоном) дефинисаном на скупу W.

Доказ. Претпоставимо да формула φ важи у моделу $\mathbf{A} = \langle W, d, p_0^{\mathbf{A}}, p_1^{\mathbf{A}}, \ldots \rangle$ који је базиран на простору растојања $S = (W, d)$, тј. $\mathbf{A}, w \models \varphi$ за неко $w \in W$. На основу теореме 2.2.1, имамо да φ важи у моделу пријатељског оквира $\mathbf{M}_D(\mathbf{A})$. Лако се проверава да оквир $\mathfrak{f}_D(S)$, који је основа модела $\mathbf{M}_D(\mathbf{A})$ је D-метрички, тј. задовољава особине $(D1) - (D6)$ ако је S метрички простор. Аналогно за остале просторе растојања.

Са друге стране, претпоставимо да формула φ важи у D-страндардном M-оквиру $\mathfrak{f}$. Дефинишимо коначан параметарски скуп $M(\varphi)$ и D-стандардни $M(\varphi)$-оквир $\mathfrak{f}^\dagger$, тако да φ важи у $\mathfrak{f}$ ако и само ако φ важи у $\mathfrak{f}^\dagger$.

Нека је $\mathrm{Par}(\varphi) = \{a \in M \mid a \text{ се јавља у формули } \varphi\}$, $\gamma = \max(\mathrm{Par}(\varphi))+1$ и нека је

$$M(\varphi) = \{a \in M \mid a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \gamma, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathrm{Par}(\varphi), n < \omega\}.$$

Очигледно да је $M(\varphi)$ параметарски скуп и да је коначан. Сада, дефинишимо оквир $\mathfrak{f}^\dagger$ као редуковани оквир оквира $\mathfrak{f}$ у односу на $M(\varphi)$, тј.

$$\mathfrak{f}^\dagger = \mathfrak{f}_{\downharpoonleft(D,M(\varphi))}.$$

Као што смо у уводном делу нагласили, како $\varphi \in \mathcal{L}_D[M(\varphi)]$, φ важи у $\mathfrak{f}$ акко важи у $\mathfrak{f}_{\downharpoonleft(D,M(\varphi))}$. На основу теореме 2.2.2 постоји простор растојања S тако да $\mathfrak{f}^\dagger$ је његов пријатељски оквир, тј.

$$\mathfrak{f}_{D,M(\varphi)}(S) = \mathfrak{f}_{\downharpoonleft(D,M(\varphi))}.$$

На основу теореме 2.2.1, формула φ важи у простору растојања S, што је и требало показати. $\square$

2.3 Логике растојања $\mathcal{MS}_D^i[M]$, $i \in \{d, s, t, m\}$

У овом одељку наводимо аксиоматизације логика $\mathcal{MS}_D^i[M]$, $i \in \{d, s, t, m\}$, чији језик $\mathcal{L}_D[M]$ не садржи номинале, а D је скуп модалних оператора растојања. За доказивање потпуности користићемо технику филтрације о којој ће бити речи у наредним одељцима.

2.3.1 Аксиоматски системи $MS^i_D[M]$, $i \in \{d, s, t, m\}$

На почетку, наводимо аксиоматске системе за логике $\mathcal{MS}^d_D[M]$, $\mathcal{MS}^s_D[M]$, $\mathcal{MS}^t_D[M]$ и $\mathcal{MS}^m_D[M]$, где је $M \subseteq \mathbb{R}^+$ произвољно изабрани параметарски скуп. Аксиоматске системе означаваћемо редом са $MS^d_D[M]$, $MS^s_D[M]$, $MS^t_D[M]$ и $MS^m_D[M]$. Поред оператора скупа D језик $\mathcal{L}_D$ „садржи" стандардне модалне операторе попут

- универзалног модалитета - $\Box_a\varphi = A^{\leqslant a}\varphi \wedge A^{>a}\varphi$ (φ важи „свуда"),
- његовог дуалног оператора - $\Diamond_a\varphi = E^{\leqslant a}\varphi \vee E^{>a}\varphi$ (φ важи „негде").

Аксиоматски систем $MS^d_D[M]$ за логику $\mathcal{MS}^d_D[M]$ садржи следеће схеме аксиома:

(1) аксиоме исказног рачуна,

(2) $A^{\leqslant a}(\varphi \to \psi) \to (A^{\leqslant a}\varphi \to A^{\leqslant b}\psi)$, $\quad a, b \in M$ и $a \geqslant b$,

(3) $A^{>a}(\varphi \to \psi) \to (A^{>a}\varphi \to A^{>b}\psi)$, $\quad a, b \in M$ и $a \leqslant b$,

(4) $A^{\leqslant a}\varphi \to A^{\leqslant b}\varphi$, $\quad a, b \in M$ и $a \geqslant b$,

(5) $A^{>a}\varphi \to A^{>b}\varphi$, $\quad a, b \in M$ и $a \leqslant b$,

(6) $A^{\leqslant 0}\varphi \to \varphi$,

(7) $\varphi \to A^{\leqslant 0}\varphi$,

(8) $E^{\leqslant a}A^{>0}\varphi \to A^{>a}\varphi$, $\quad a \in M$,

(9) $\Box_0\varphi \to \Box_a\varphi$, $\quad a \in M$,

(10) $\Box_a\varphi \to \Box_0\varphi$, $\quad a \in M$,

(11) $\Box_a\varphi \to \Box_a\Box_a\varphi$, $\quad a \in M$,

(12) $\varphi \to \Box_a\Diamond_a\varphi$, $\quad a \in M$;

и следећа правила извођења:

($R1$) из $\varphi \to \psi$ и φ закључујемо ψ,

($R2$) из φ закључујемо $A^{\leqslant a}\varphi$, $a \in M$,

($R3$) из φ закључујемо $A^{>a}\varphi$, $a \in M$.

Претходно наведене аксиоме и правила извођења чине аксиоматски систем логике $\mathcal{MS}^d_D[M]$, а аксиоматски системи остале три логике, поред претходно наведених аксиома укључују и још неке додатне аксиоме, које описују особине у зависности о којој логици се ради. Додатне аксиоме за логичке системе $MS^s_D[M]$, $MS^t_D[M]$ и $MS^m_D[M]$ су:

(13) $\varphi \to A^{\leqslant a}E^{\leqslant a}\varphi, \quad a \in M,$

(14) $\varphi \to A^{>a}E^{>a}\varphi, \quad a \in M,$

(15) $A^{\leqslant a+b}\varphi \to A^{\leqslant a}A^{\leqslant b}\varphi, \quad a, b \in M,$

(16) $E^{\leqslant a}A^{>b}\varphi \to A^{>a+b}\varphi, \quad a, b \in M.$

Аксиоматске системе логика $\mathcal{MS}^s_D[M]$, $\mathcal{MS}^t_D[M]$, $\mathcal{MS}^m_D[M]$ можемо представити на основу аксиоматског система логике $\mathcal{MS}^d_D[M]$ на следећи начин:

- $MS^s_D[M] = MS^d_D[M] \oplus (13) \oplus (14);$
- $MS^t_D[M] = MS^d_D[M] \oplus (15) \oplus (16);$
- $MS^m_D[M] = MS^d_D[M] \oplus (13) \oplus (14) \oplus (15) \oplus (16).$

За $\mathcal{L}_D[M]$-формулу φ пишемо $\vdash_{MS^d_D[M]} \varphi$, $\vdash_{MS^s_D[M]} \varphi$, $\vdash_{MS^t_D[M]} \varphi$ и $\vdash_{MS^m_D[M]} \varphi$ ако је φ теорема аксиоматског система, редом $MS^d_D[M]$, $MS^s_D[M]$, $MS^t_D[M]$ и $MS^m_D[M]$, а ради једноставнијег записивања често ћемо изостављати $[M]$ и писати само $\vdash_{MS^d_D} \varphi$, MS^d_D, итд.

Следећа лема нам даје две корисне теореме система $MS^m_D[M]$ које су нам потребне у доказу теореме потпуности, а доказ се може видети у [40].

Лема 2.3.1. За свако $\varphi \in \mathcal{L}_D[M]$ важи:

(1) $\vdash_{MS^m_D} \Box_a\varphi \leftrightarrow \Box_b\varphi, \quad a, b \in M;$

(2) $\vdash_{MS^m_D} \Box_a\varphi \to \varphi, \quad a \in M.$

2.3.2 Сагласности система $MS^i_D[M]$, $i \in \{d, s, t, m\}$

Један од битнијих резултата ове главе јесте потпуност аксиоматских система, тј. теорема потпуности. Да бисмо доказали теорему потпуности неопходан услов је сагласност аксиоматских система.

Теорема 2.3.1. (Теорема сагласности) Нека је $MS^i_D[M]$, $i \in \{d,s,t,m\}$ аксиоматски систем и $\mathcal{MS}^i_D[M]$ одговарајућа логика. За сваку $\mathcal{L}_D[M]$-формулу φ важи

$$\text{из } \vdash_{MS^i_D} \varphi \text{ следи } \varphi \in \mathcal{MS}^i_D[M].$$

Доказ. Потребно је доказати да је свака аксиома одговарајућег аксиоматског система ваљана формула, а јасно је да правила извођења чувају ваљаност. Како је поступак доказивања појединих аксиома сличан, наводимо доказе за одређене аксиоме.

• Аксиома 2: Претпоставимо да формула $A^{\leqslant a}(\varphi \to \psi) \to (A^{\leqslant a}\varphi \to A^{\leqslant b}\psi)$, $a \geqslant b$, $a,b \in M$, није ваљана. Тада постоји модел $\mathbf{M}$ и свет (тачка) $w \in W$ тако да $\mathbf{M}, w \not\models A^{\leqslant a}(\varphi \to \psi) \to (A^{\leqslant a}\varphi \to A^{\leqslant b}\psi)$. Дакле, имамо да $\mathbf{M}, w \models A^{\leqslant a}(\varphi \to \psi)$, $\mathbf{M}, w \models A^{\leqslant a}\varphi$ и $\mathbf{M}, w \models \neg A^{\leqslant b}\psi$. На основу дефинисаног значења оператора $E^{\leqslant b}$ имамо да $\mathbf{M}, w \models E^{\leqslant b}\neg\psi$, па за неки свет $u \in W$ за који је $d(w,u) \leqslant b \leqslant a$ важи $\mathbf{M}, u \models \neg\psi$. Са друге стране, из тога да $\mathbf{M}, w \models A^{\leqslant a}(\varphi \to \psi)$ и $\mathbf{M}, w \models A^{\leqslant a}\varphi$ и како је $d(w,u) \leqslant a$, закључујемо да за свет $u \in W$ важи $\mathbf{M}, u \models \varphi \to \psi$ и $\mathbf{M}, u \models \varphi$, односно $\mathbf{M}, u \models \psi$, што је контрадикција са $\mathbf{M}, u \models \neg\psi$. Дакле, формула $A^{\leqslant a}(\varphi \to \psi) \to (A^{\leqslant a}\varphi \to A^{\leqslant b}\psi)$, $a \geqslant b$, $a,b \in M$, јесте ваљана.

• Аксиома 5: Претпоставимо да формула $A^{>a}\varphi \to A^{>b}\varphi$, $a \leqslant b$, $a,b \in M$, није ваљана. Тада постоји модел $\mathbf{M}$ и свет $w \in W$ тако да $\mathbf{M}, w \not\models A^{>a}\varphi \to A^{>b}\varphi$. Дакле, имамо да $\mathbf{M}, w \models A^{>a}\varphi$ и $\mathbf{M}, w \models \neg A^{>b}\varphi$, односно $\mathbf{M}, w \models E^{>b}\neg\varphi$, па за неки свет $u \in W$ за који је $d(w,u) > b \geqslant a$ важи $\mathbf{M}, u \models \neg\varphi$. Са друге стране, из тога да $\mathbf{M}, w \models A^{>a}\varphi$ и како је $d(w,u) > a$, закључујемо да за свет $u \in W$ важи $\mathbf{M}, u \models \varphi$, што је контрадикција са $\mathbf{M}, u \models \neg\varphi$. Дакле, формула $A^{>a}\varphi \to A^{>b}\varphi$, $a \leqslant b$, $a,b \in M$, јесте ваљана.

Ваљаност аксиома 6 и 7 тривијално важи.

• Аксиома 8: Нека је $\mathbf{M}$ произвољан модел и $w \in W$ произвољан свет и претпоставимо да $\mathbf{M}, w \models E^{\leqslant a}A^{>0}\varphi$. Тада постоји свет $u \in W$ такав да је $d(w,u) \leqslant a$ и за сваки свет $v \in W$ за који је $d(u,v) > 0$ (тј. $u \neq v$) важи $\mathbf{M}, v \models \varphi$. Ако одаберемо произвољни свет v' такав да је $d(w,v') > a$, тада је очигледно да је $u \neq v'$, па на основу претходног имамо да $\mathbf{M}, v' \models \varphi$, односно $\mathbf{M}, w \models A^{>a}\varphi$, што је и требало показати.

Ваљаност аксиома 9, 10, 11 и 12 је очигледна, а за испитивање ваљаности аксиома 13, 14, 15 и 16 претпостављаћемо да пресликавање d задовољава услов симетричности, односно неједнакост троугла.

• Аксиома 13: Претпоставимо да за пресликавање d важи особина симетричности, тј. $d(u,v) = d(v,u)$ за све $u,v \in W$ и претпоставимо да формула $\varphi \to A^{\leqslant a}E^{\leqslant a}\varphi$ није ваљана. Тада постоји модел $\mathbf{M}$ и свет $w \in W$ тако да

$\mathbf{M}, w \not\models \varphi \to A^{\leqslant a}E^{\leqslant a}\varphi$. Дакле, имамо да $\mathbf{M}, w \models \varphi$ и $\mathbf{M}, w \not\models A^{\leqslant a}E^{\leqslant a}\varphi$, односно $\mathbf{M}, w \models E^{\leqslant a}A^{\leqslant a}\neg\varphi$. Тада постоји свет $u \in W$ за који је $d(w, u) \leqslant a$, тако да $\mathbf{M}, u \models A^{\leqslant a}\neg\varphi$. Како за пресликавање d важи особина симетричности имамо да је $d(u, w) \leqslant a$ и $\mathbf{M}, u \models A^{\leqslant a}\neg\varphi$, тј. за сваки свет из W, па и за w важи $d(u, w) \leqslant a$ и $\mathbf{M}, w \models \neg\varphi$, што је контрадикција. Дакле, формула $\varphi \to A^{\leqslant a}E^{\leqslant a}\varphi$ јесте ваљана.

• Аксиома 15: Нека пресликавање d задовољава неједнакост троугла и претпоставимо да формула $A^{\leqslant a+b}\varphi \to A^{\leqslant a}A^{\leqslant b}\varphi$, $a, b \in M$ није ваљана. Тада постоји модел $\mathbf{M}$ и свет $w \in W$ тако да $\mathbf{M}, w \not\models A^{\leqslant a+b}\varphi \to A^{\leqslant a}A^{\leqslant b}\varphi$, односно $\mathbf{M}, w \models A^{\leqslant a+b}\varphi$ и $\mathbf{M}, w \not\models A^{\leqslant a}A^{\leqslant b}\varphi$, тј. $\mathbf{M}, w \models E^{\leqslant a}E^{\leqslant b}\neg\varphi$. Тада постоји свет $u \in W$ за који је $d(w, u) \leqslant a$, тако да $\mathbf{M}, u \models E^{\leqslant b}\neg\varphi$, тј. постоји свет $v \in W$ за који је $d(u, v) \leqslant b$, тако да $\mathbf{M}, v \models \neg\varphi$. Како за пресликавање d важи неједнакост троугла имамо да је $d(w, v) \leqslant d(w, u) + d(u, v) \leqslant a + b$. Са друге стране, како је $\mathbf{M}, w \models A^{\leqslant a+b}\varphi$, тада за сваки свет $x \in W$ за који је $d(w, x) \leqslant a + b$ важи $\mathbf{M}, x \models \varphi$, па и за v (јер је $d(w, v) \leqslant a + b$) важи $\mathbf{M}, v \models \varphi$, што је контрадикција. Дакле, формула $A^{\leqslant a+b}\varphi \to A^{\leqslant a}A^{\leqslant b}\varphi$, $a, b \in M$ јесте ваљана. $\square$

2.3.3 Потпуности система $MS^i_D[M]$, $i \in \{d, s, t, m\}$

За доказ теореме потпуности користићемо репрезентацију простора растојања у облику релацијских структура. Главни резултат потребан у доказу теореме потпуности наведен је у облику следеће теореме.

Теорема 2.3.2. Нека је $MS^i_D[M]$, $i \in \{d, s, t, m\}$ аксиоматски систем и $\mathcal{F}^i$ одговарајућа класа стандардних оквира. За сваку $\mathcal{L}_D[M]$-формулу φ важи

$$\vdash_{MS^i_D} \varphi \ \text{ акко } \ \mathfrak{f} \models \varphi \text{ за све коначне } \mathfrak{f} \in \mathcal{F}^i.$$

Доказ. Прво, претпоставимо да $\vdash_{MS^i_D[M]} \varphi^i$, $i \in \{d, s, t, m\}$. Нека је $M' \supset \mathrm{Par}(\varphi^i)$ коначан параметарски скуп који садржи параметре који се појављују у формули φ^i. Тада, за произвољни (коначан) D-стандардни M-оквир $\mathfrak{f}^i \in \mathcal{F}^i$ имамо да φ^i важи у $\mathfrak{f}^i$ ако и само ако φ^i важи у редукованом оквиру $\mathfrak{f}^i_{\restriction(D,M')} = \langle W, (R_{\leqslant a})_{a \in M'}, (R_{>a})_{a \in M'}\rangle$. На основу теореме 2.2.2, $\mathfrak{f}^i_{\restriction(D,M')}$ је пријатељски оквир за неки простор растојања S, где је S метрички простор ако је $\mathfrak{f}^i_{\restriction(D,M')}$ један D-метрички M'-оквир, а слично разматрамо и за остале просторе. На основу сагласности аксиоматских система у односу на одговарајуће класе простора растојања, φ^i важи у класи $\mathcal{D}^i$, отуда φ^i важи у одговарајућој класи $\mathcal{F}^i$ (коначних) M-оквира.

Са друге стране, нека је $MS^i_D[M]$, $i \in \{d,s,t,m\}$ аксиоматски систем и $\mathbf{M}^i$ његов канонски модел базиран на канонском оквиру $\mathfrak{f}^i$. Како су све аксиоме система $MS^i_D[M]$ Салквист формуле, за $i \in \{d,s,t,m\}$, на основу Салквистове теореме имамо да $\mathfrak{f}^i \models MS^i_D[M]$ (видети [70]). На основу структуре оквира $\mathfrak{f}^i$ није тешко закључити да оквир $\mathfrak{f}^i$ задовољава све особине одговарајуће класе оквира $\mathcal{F}^i$, изузев можда особина $(D1)$ и $(D2)$.

Претпоставимо да $\nvdash_{MS^i_D} \varphi^i$. Тада постоји свет w_i таков да $\mathbf{M}^i, w_i \not\models \varphi^i$. Нека је $\mathbf{M}^i_{w_i}$ подмодел модела $\mathbf{M}^i$ генерисан са w_i, па $\mathbf{M}^i_{w_i}, w_i \not\models \varphi^i$, а оквир $\mathfrak{f}^i_{w_i}$ који је у основи овог подмодела задовољава поменуте особине, изузев можда особина $(D1)$ и $(D2)$. Тврдимо да за $i \in \{d,s,t,m\}$, $\mathfrak{f}^i_{w_i}$ задовољава и особину $(D1)$. Заиста, на основу аксиома (11), (12) и особине (2) леме 2.3.1, за свако $a \in M$, оператор $\Box_a$ је интерпретиран релацијом $R^i_{\leqslant a} \cup R^i_{>a}$, па су $R^i_{\leqslant a} \cup R^i_{>a}$ релације еквиваленције на скупу W^i. На основу особине (1) из леме 2.3.1, имамо да је $R^i_{\leqslant a} \cup R^i_{>a} = R^i_{\leqslant b} \cup R^i_{>b}$ за све $a, b \in M$. Како је оквир $\mathfrak{f}^i_{w_i}$ основа посматраног подмодела, закључујемо да је $R^i_{\leqslant a} \cup R^i_{>a}$ универзална релација на W^i, тј. $R^i_{\leqslant a} \cup R^i_{>a} = W^i \times W^i$, што је и требало показати.

Остаје да се трансформише модел $\mathbf{M}^i_{w_i}$ у коначни модел $\mathbf{M}^\ddagger_i$ у коме неће важити формула φ^i, а који ће имати све особине одговарајуће класе $\mathcal{F}^i$, укључујући и $(D2)$.

У даљем доказу теореме, као и у наведеним лемама посматраћемо сва четири случаја. Основна претпоставка је да $MS^d_D[M] \nvdash \varphi^d$, $MS^s_D[M] \nvdash \varphi^s$, $MS^t_D[M] \nvdash \varphi^t$ и $MS^m_D[M] \nvdash \varphi^m$, а претпоставимо да $\mathbf{M}_d, w_d \not\models \varphi^d$, $\mathbf{M}_s, w_s \not\models \varphi^s$, $\mathbf{M}_t, w_t \not\models \varphi^t$ и $\mathbf{M}_m, w_m \not\models \varphi^m$.

Без губљења општости можемо претпоставити да су модели $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_t$ и $\mathbf{M}_m$ базирани на $M(\varphi^d)$,$M(\varphi^s)$,$M(\varphi^t)$,$M(\varphi^m)$-оквирима $\mathfrak{f}_d$, $\mathfrak{f}_s$, $\mathfrak{f}_t$ и $\mathfrak{f}_m$, редом дефинисани као у доказу теореме 2.2.3, где су $M(\varphi^d)$, $M(\varphi^s)$, $M(\varphi^t)$ и $M(\varphi^m)$ коначни параметарски скупови. Нека је $M_d = M(\varphi^d)$, $M_s = M(\varphi^s)$, $M_t = M(\varphi^t)$ и $M_m = M(\varphi^m)$.

Тада су оквири $\mathfrak{f}_d$, $\mathfrak{f}_s$, $\mathfrak{f}_t$ и $\mathfrak{f}_m$ који су у основи модела $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_t$ и $\mathbf{M}_m$ облика

$$\mathfrak{f}_d = \langle W_d, (D_{\leqslant a})_{a \in M_d}, (D_{>a})_{a \in M_d} \rangle \,,$$

за ког важе особине $(D1)$, $(D3) - (D4)$, $(D8)$ и $(D10)$;

$$\mathfrak{f}_s = \langle W_s, (S_{\leqslant a})_{a \in M_s}, (S_{>a})_{a \in M_s} \rangle \,,$$

за ког важе особине $(D1)$, $(D3) - (D5)$ и $(D8) - (D10)$;

$$\mathfrak{f}_t = \langle W_t, (T_{\leqslant a})_{a \in M_t}, (T_{>a})_{a \in M_t} \rangle \,,$$

за ког важе особине $(D1)$, $(D3)-(D4)$, $(D6)-(D8)$ и $(D10)$;

$$\mathfrak{f}_m = \langle W_m, (M_{\leqslant a})_{a\in M_m}, (M_{>a})_{a\in M_m}\rangle\,,$$

за ког важе особине $(D1)$ и $(D3)-(D10)$.

Потребно је да трансформишемо моделе $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_t$ и $\mathbf{M}_m$ у коначне моделе $\mathbf{M}_d^{\ddagger}$. $\mathbf{M}_s^{\ddagger}$, $\mathbf{M}_t^{\ddagger}$ и $\mathbf{M}_m^{\ddagger}$ који ће задовољавати особину $(D2)$, а у којима не важе формуле φ^d, φ^s, φ^t и φ^m. Дефинишимо затворења $cl(\varphi^d)$, $cl(\varphi^s)$, $cl(\varphi^t)$ и $cl(\varphi^m)$ за формуле φ^d, φ^s, φ^t и φ^m као најмање скупове T^d, T^s, T^t и T^m, $\mathcal{L}_D[M]$-формула тако да $\varphi^d\in T^d$, $\varphi^s\in T^s$, $\varphi^t\in T^t$ и $\varphi^m\in T^m$, и

$(C1)$ T^i је затворен за подформуле;

$(C2)$ ако $\psi\in T^m$, тада $A^{\leqslant 0}\psi\in T^m$, кад год ψ није облика $A^{\leqslant 0}\chi$;

$(C3)$ ако $A^{\leqslant a}\psi\in T^{t,m}$ и $a\geqslant a_1+\cdots+a_n, a_i\in M_{t,m}\setminus\{0\}$, тада $A^{\leqslant a_1}\ldots A^{\leqslant a_n}\psi\in T^{t,m}$;

$(C4)$ ако $A^{>a}\psi\in T^{t,m}$ и $b\in M_{t,m}$, тада $\neg A^{\leqslant b}\neg A^{>a}\psi\in T^{t,m}$;

$(C5)$ ако $A^{>a}\psi\in T^m$ и $b>a$ ($b\in M_m$), тада $A^{>b}\psi\in T^m$ и ако $a+b\in M_m$ ($b\in M_m\setminus\{0\}$), тада $\neg A^{>a+b}\neg A^{>a}\psi\in T^m$;

$(C6)$ ако $A^{>a}\psi\in T^{d,s,t}$ и $b>a$, тада $A^{>b}\psi\in T^{d,s,t}$;

$(C7)$ ако $A^{\leqslant a}\psi\in T^{d,s}$ и $a>b$, тада $A^{\leqslant b}\psi\in T^{d,s}$;

$(C8)$ ако $A^{>0}\psi\in T^{d,s}$, тада $\neg A^{\leqslant b}\neg A^{>0}\psi\in T^{d,s}$;

$(C9)$ ако $A^{>0}\psi\in T^{s}$, тада $\neg A^{>b}\neg A^{>0}\psi\in T^{s}$.

Може се показати да су затворења за φ^d, φ^s, φ^t и φ^m коначни скупови. Моделе $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_t$ и $\mathbf{M}_m$ је потребно филтрирати кроз скупове $\Theta^d=cl(\varphi^d)$, $\Theta^s=cl(\varphi^s)$, $\Theta^t=cl(\varphi^t)$ и $\Theta^m=cl(\varphi^m)$. Дефинишимо релације еквиваленције $\equiv_d$, $\equiv_s$, $\equiv_t$ и $\equiv_m$ на W_d, W_s, W_t и W_m узимајући, за $u,v\in W_i$:

$$u\equiv_i v \;\;\Leftrightarrow\;\; (\mathbf{M}_i,u\models\psi \;\text{ акко }\; \mathbf{M}_i,v\models\psi)\,,\;\text{ за све }\;\psi\in\Theta^i.$$

Нека је $[u]_i=\{v\in W_i\mid u\equiv_i v\}$ и нека су модели

$$\mathbf{M}_d^{\mathfrak{f}}=\left\langle W_d^{\mathfrak{f}},\left(D_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}}\right)_{a\in M_d},\left(D_{>a}^{\mathfrak{f}}\right)_{a\in M_d},p_0^{\mathbf{M}_d^{\mathfrak{f}}},p_1^{\mathbf{M}_d^{\mathfrak{f}}},\ldots\right\rangle,$$

$$\mathbf{M}_s^{\mathfrak{f}}=\left\langle W_s^{\mathfrak{f}},\left(S_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}}\right)_{a\in M_s},\left(S_{>a}^{\mathfrak{f}}\right)_{a\in M_s},p_0^{\mathbf{M}_s^{\mathfrak{f}}},p_1^{\mathbf{M}_s^{\mathfrak{f}}},\ldots\right\rangle,$$

$$\mathbf{M}_t^{\mathfrak{f}} = \left\langle W_t^{\mathfrak{f}}, \left(T_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}}\right)_{a \in M_t}, \left(T_{>a}^{\mathfrak{f}}\right)_{a \in M_t}, p_0^{\mathbf{M}_t^{\mathfrak{f}}}, p_1^{\mathbf{M}_t^{\mathfrak{f}}}, \dots \right\rangle,$$

$$\mathbf{M}_m^{\mathfrak{f}} = \left\langle W_m^{\mathfrak{f}}, \left(M_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}}\right)_{a \in M_m}, \left(M_{>a}^{\mathfrak{f}}\right)_{a \in M_m}, p_0^{\mathbf{M}_m^{\mathfrak{f}}}, p_1^{\mathbf{M}_m^{\mathfrak{f}}}, \dots \right\rangle,$$

добијени филтрацијом модела $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_t$ и $\mathbf{M}_m$ кроз скупове Θ^d, Θ^s, Θ^t и Θ^m, где је

- $W_i^{\mathfrak{f}} = \{[u]_i \mid u \in W_i\}$;
- $p_k^{\mathbf{M}_i^{\mathfrak{f}}} = \left\{[u]_i \mid u \in p_k^{\mathbf{M}_i}\right\}$ за $k < \omega$,

а релације дефинисане на следећи начин

- $a > 0$: $[u]_d D_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} [v]_d$ акко за све $A^{\leqslant a}\psi \in \Theta^d$
  - из $\mathbf{M}_d, u \models A^{\leqslant a}\psi$ следи $\mathbf{M}_d, v \models \psi$;
- $a \geqslant 0$: $[u]_d D_{>a}^{\mathfrak{f}} [v]_d$ акко за све $A^{>a}\psi \in \Theta^d$
  - из $\mathbf{M}_d, u \models A^{>a}\psi$ следи $\mathbf{M}_d, v \models \psi$;
- $a = 0$: $[u]_d D_{\leqslant 0}^{\mathfrak{f}} [v]_d$ акко $[u]_d = [v]_d$,

за оквир $\mathfrak{f}_d^{\mathfrak{f}}$;

- $a > 0$: $[u]_s S_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} [v]_s$ акко за све $A^{\leqslant a}\psi \in \Theta^s$
  - из $\mathbf{M}_s, u \models A^{\leqslant a}\psi$ следи $\mathbf{M}_s, v \models \psi$;
  - из $\mathbf{M}_s, v \models A^{\leqslant a}\psi$ следи $\mathbf{M}_s, u \models \psi$,
- $a \geqslant 0$: $[u]_s S_{>a}^{\mathfrak{f}} [v]_s$ акко за све $A^{>a}\psi \in \Theta^s$
  - из $\mathbf{M}_s, u \models A^{>a}\psi$ следи $\mathbf{M}_s, v \models \psi$;
  - из $\mathbf{M}_s, v \models A^{>a}\psi$ следи $\mathbf{M}_s, u \models \psi$,
- $a = 0$: $[u]_s S_{\leqslant 0}^{\mathfrak{f}} [v]_s$ акко $[u]_s = [v]_s$,

за оквир $\mathfrak{f}_s^{\mathfrak{f}}$;

- $a > 0$: $[u]_t T_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} [v]_t$ акко за све $A^{\leqslant a}\psi \in \Theta^t$
  - из $\mathbf{M}_t, u \models A^{\leqslant a}\psi$ следи $\mathbf{M}_t, v \models \psi$;
- $a \geqslant 0$: $[u]_t T_{>a}^{\mathfrak{f}} [v]_t$ акко за све $A^{>a}\psi \in \Theta^t$

– из $\mathbf{M}_t, u \models A^{>a}\psi$ следи $\mathbf{M}_t, v \models \psi$;

- $a = 0$: $[u]_t T^{\mathfrak{f}}_{\leqslant 0}[v]_t$ акко $[u]_t = [v]_t$,

за оквир $\mathfrak{f}^{\mathfrak{f}}_t$;

- $a > 0$: $[u]_m M^{\mathfrak{f}}_{\leqslant a}[v]_m$ акко за све $A^{\leqslant a}\psi \in \Theta^m$
  – из $\mathbf{M}_m, u \models A^{\leqslant a}\psi$ следи $\mathbf{M}_m, v \models \psi$;
  – из $\mathbf{M}_m, v \models A^{\leqslant a}\psi$ следи $\mathbf{M}_m, u \models \psi$,
- $a \geqslant 0$: $[u]_m M^{\mathfrak{f}}_{>a}[v]_m$ акко за све $A^{>a}\psi \in \Theta^m$
  – из $\mathbf{M}_m, u \models A^{>a}\psi$ следи $\mathbf{M}_m, v \models \psi$;
  – из $\mathbf{M}_m, v \models A^{>a}\psi$ следи $\mathbf{M}_m, u \models \psi$,
- $a = 0$: $[u]_m M^{\mathfrak{f}}_{\leqslant 0}[v]_m$ акко $[u]_m = [v]_m$,

за оквир $\mathfrak{f}^{\mathfrak{f}}_m$. Како су Θ^d, Θ^s, Θ^t и Θ^m коначни, такви су и $W^{\mathfrak{f}}_d$, $W^{\mathfrak{f}}_s$, $W^{\mathfrak{f}}_t$ и $W^{\mathfrak{f}}_m$. Овако добијеном филтрацијом обезбедили смо да важи следећа лема коју наводимо на нивоу исказа, а детаљан доказ се може видети у [40].

Лема 2.3.2. 1. За свако $\psi^i \in \Theta^i$ и свако $u_i \in W_i$:

$$\mathbf{M}_i, u_i \models \psi^i \text{ акко } \mathbf{M}^{\mathfrak{f}}_i, [u]_i \models \psi^i.$$

Посебно, $\mathbf{M}^{\mathfrak{f}}_i, [w_i]_i \not\models \varphi^i$.

2. Оквир $\mathfrak{f}^{\mathfrak{f}}_d$ који је основа модела $\mathbf{M}^{\mathfrak{f}}_d$ задовољава особине $(D1)$, $(D3) - (D4)$, $(D8)$ и $(D10)$.

3. Оквир $\mathfrak{f}^{\mathfrak{f}}_s$ који је основа модела $\mathbf{M}^{\mathfrak{f}}_s$ задовољава особине $(D1)$, $(D3) - (D5)$ и $(D8) - (D10)$.

4. Оквир $\mathfrak{f}^{\mathfrak{f}}_t$ који је основа модела $\mathbf{M}^{\mathfrak{f}}_t$ задовољава особине $(D1)$, $(D3) - (D4)$, $(D6) - (D8)$ и $(D10)$.

5. Оквир $\mathfrak{f}^{\mathfrak{f}}_m$ који је основа модела $\mathbf{M}^{\mathfrak{f}}_m$ задовољава особине $(D1)$ и $(D3) - (D10)$.

Са техником филтрације завршавамо када будемо обезбедили да оквири $\mathfrak{f}^{\mathfrak{f}}_i$ задовољавају и услов $(D2)$. Дефинишимо скупове

$$D(W^{\mathfrak{f}}_d) = \left\{ v \in W^{\mathfrak{f}}_d \;\middle|\; \exists a \in M_d \exists u \in W^{\mathfrak{f}}_d \left(u D^{\mathfrak{f}}_{\leqslant a} v \wedge u D^{\mathfrak{f}}_{>a} v \right) \right\},$$

$$D(W_s^{\mathfrak{f}}) = \left\{ v \in W_s^{\mathfrak{f}} \;\middle|\; \exists a \in M_s \exists u \in W_s^{\mathfrak{f}} \left(u S_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} v \wedge u S_{>a}^{\mathfrak{f}} v \right) \right\},$$

$$D(W_t^{\mathfrak{f}}) = \left\{ v \in W_t^{\mathfrak{f}} \;\middle|\; \exists a \in M_t \exists u \in W_t^{\mathfrak{f}} \left(u T_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} v \wedge u T_{>a}^{\mathfrak{f}} v \right) \right\},$$

$$D(W_m^{\mathfrak{f}}) = \left\{ v \in W_m^{\mathfrak{f}} \;\middle|\; \exists a \in M_m \exists u \in W_m^{\mathfrak{f}} \left(u M_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} v \wedge u M_{>a}^{\mathfrak{f}} v \right) \right\}.$$

Нека је,

$$W_i^* = \left\{ \langle v, j \rangle \mid v \in D(W_i^{\mathfrak{f}}), j \in \{0,1\} \right\} \cup \left\{ \langle u, 0 \rangle \mid u \in W_i^{\mathfrak{f}} \setminus D(W_i^{\mathfrak{f}}) \right\}.$$

Сада, дефинишимо моделе $\mathbf{M}_d^*$, $\mathbf{M}_s^*$, $\mathbf{M}_t^*$ и $\mathbf{M}_m^*$ базиране на оквирима

$$\mathfrak{f}_d^* = \left\langle W_d^*, (D_{\leqslant a}^*)_{a \in M_d}, (D_{>a}^*)_{a \in M_d} \right\rangle,$$

$$\mathfrak{f}_s^* = \left\langle W_s^*, (S_{\leqslant a}^*)_{a \in M_s}, (S_{>a}^*)_{a \in M_s} \right\rangle,$$

$$\mathfrak{f}_t^* = \left\langle W_t^*, (T_{\leqslant a}^*)_{a \in M_t}, (T_{>a}^*)_{a \in M_t} \right\rangle,$$

$$\mathfrak{f}_m^* = \left\langle W_m^*, (M_{\leqslant a}^*)_{a \in M_m}, (M_{>a}^*)_{a \in M_m} \right\rangle,$$

узимајући за $k < \omega$ и $j \in \{0,1\}$ да је

$$p_k^{\mathbf{M}_i^*} = \left\{ \langle u, j \rangle \in W_i^* \mid u \in p^{\mathbf{M}_i^{\mathfrak{f}}} \right\},$$

и дефинисањем релација $D_{\leqslant a}^*$, $D_{>a}^*$, $S_{\leqslant a}^*$, $S_{>a}^*$, $T_{\leqslant a}^*$, $T_{>a}^*$, $M_{\leqslant a}^*$ и $M_{>a}^*$ на следећи начин:

- $a > 0$: $\langle u, i \rangle D_{\leqslant a}^* \langle v, j \rangle$ акко
  - $i \neq j$ и $u D_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} v$ и $\neg u D_{>a}^{\mathfrak{f}} v$, или
  - $i = j$ и $u D_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} v$;
- $a = 0$: $\langle u, i \rangle D_{\leqslant 0}^* \langle v, j \rangle$ акко $\langle u, i \rangle = \langle v, j \rangle$;
- $D_{>a}^*$ је дефинисано као комплемент од $D_{\leqslant a}^*$, тј.

$$\langle u, i \rangle D_{>a}^* \langle v, j \rangle \text{ акко } \neg \langle u, i \rangle D_{\leqslant a}^* \langle v, j \rangle.$$

- $a > 0$: $\langle u, i \rangle S_{\leqslant a}^* \langle v, j \rangle$ акко
  - $i \neq j$ и $u S_{\leqslant a}^{\mathfrak{f}} v$ и $\neg u S_{>a}^{\mathfrak{f}} v$, или

- $i = j$ и $uS^{\mathfrak{f}}_{\leqslant a}v$;

- $a = 0$: $\langle u, i\rangle S^*_{\leqslant 0}\langle v, j\rangle$ акко $\langle u, i\rangle = \langle v, j\rangle$;
- $S^*_{>a}$ је дефинисано као комплемент од $S^*_{\leqslant a}$, тј.

$$\langle u, i\rangle S^*_{>a}\langle v, j\rangle \text{ акко } \neg\langle u, i\rangle S^*_{\leqslant a}\langle v, j\rangle.$$

- $a > 0$: $\langle u, i\rangle T^*_{\leqslant a}\langle v, j\rangle$ акко
  - $i \neq j$ и $uT^{\mathfrak{f}}_{\leqslant a}v$ и $\neg uT^{\mathfrak{f}}_{>a}v$, или
  - $i = j$ и $uT^{\mathfrak{f}}_{\leqslant a}v$;
- $a = 0$: $\langle u, i\rangle T^*_{\leqslant 0}\langle v, j\rangle$ акко $\langle u, i\rangle = \langle v, j\rangle$;
- $T^*_{>a}$ је дефинисано као комплемент од $T^*_{\leqslant a}$, тј.

$$\langle u, i\rangle T^*_{>a}\langle v, j\rangle \text{ акко } \neg\langle u, i\rangle T^*_{\leqslant a}\langle v, j\rangle.$$

- $a > 0$: $\langle u, i\rangle M^*_{\leqslant a}\langle v, j\rangle$ акко
  - $i \neq j$ и $uM^{\mathfrak{f}}_{\leqslant a}v$ и $\neg uM^{\mathfrak{f}}_{>a}v$, или
  - $i = j$ и $uM^{\mathfrak{f}}_{\leqslant a}v$;
- $a = 0$: $\langle u, i\rangle M^*_{\leqslant 0}\langle v, j\rangle$ акко $\langle u, i\rangle = \langle v, j\rangle$;
- $M^*_{>a}$ је дефинисано као комплемент од $M^*_{\leqslant a}$, тј.

$$\langle u, i\rangle M^*_{>a}\langle v, j\rangle \text{ акко } \neg\langle u, i\rangle M^*_{\leqslant a}\langle v, j\rangle.$$

Важна последица претходно дефинисаних модела је следећа лема, а доказ се може видети у [40].

Лема 2.3.3.
1. Модел $\mathbf{M}^*_d$ је D-стандардни.
2. Модел $\mathbf{M}^*_s$ је D-симетрични.
3. Модел $\mathbf{M}^*_t$ је D-троугаони.
4. Модел $\mathbf{M}^*_m$ је D-метрички.

На основу претходне леме закључујемо да поред услова карактеристичних за одређене моделе, сви модели задовољавају и услов $(D2)$, а следећа лема нам обезбеђује да се филтрацијом очувало важење формуле.

Лема 2.3.4. За све $\langle v, j\rangle \in W_i^*$ и све $\psi^i \in \Theta^i$ важи

$$\mathbf{M}_i^*, \langle v, j\rangle \models \psi^i \text{ акко } \mathbf{M}_i^{\mathfrak{f}}, v \models \psi^i.$$

За комплетирање доказа теореме 2.3.2, потребно је да оквир $\mathfrak{f}_m^*$ који је у основи модела $\mathbf{M}_m^*$ трансформишемо у D-метрички M-оквир који не задовољава формулу φ^m. Ово може бити урађено техником као у претходном разматрању, јер како је параметарски скуп M_m коначан, одредићемо метрички простор S_m чији је пријатељски оквир $\mathfrak{f}_m^*$. Затим, посматрајмо пријатељски M-оквир $\mathfrak{f}_m^{\ddagger}$. Он је коначан D-метрички M-оквир који не задовољава формулу φ^m. Све наведене претходне чињенице следе на основу теорема 2.2.2 и 2.2.3. Овим је доказ теореме 2.3.2 комплетан. □

Сада, на основу сагласности и теореме 2.3.2 у позицији смо да докажемо теорему потпуности.

Теорема 2.3.3. (Теорема потпуности) За сваку $\mathcal{L}_D[M]$-формулу φ важи

1. $\vdash_{MS_D^d} \varphi$ акко $\varphi \in \mathcal{MS}_D^d[M]$;
2. $\vdash_{MS_D^s} \varphi$ акко $\varphi \in \mathcal{MS}_D^s[M]$;
3. $\vdash_{MS_D^t} \varphi$ акко $\varphi \in \mathcal{MS}_D^t[M]$;
4. $\vdash_{MS_D^m} \varphi$ акко $\varphi \in \mathcal{MS}_D^m[M]$.

Доказ. Прво, претпоставимо да $\nvdash_{MS_D^m} \varphi$. На основу теореме 2.3.2 имамо да постоји модел у коме не важи формула φ, а који је базиран на коначном M-оквиру $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^m$. Остаје да се оквир $\mathfrak{f}$ трансформише у метрички простор логике $\mathcal{MS}_D^m[M]$ који такође не задовољава φ. То се увек може урадити на начин као што је приказано у теореми 2.2.3. На основу сагласности имамо да важи друга импликација. За остале случајеве доказ се изводи аналогно. □

Глава 3

Логике са бинарним метричким операторима

У овој глави биће разматране исказне логике са бинарним метричким операторима. Одговарајући језици поменутих логика добијени су екстензијом језика класичне исказне логике метричким операторима. Следећи идеје из [27], [28], [35], [59], [60], [63] и [65], за сваку од логика биће наведене бесконачне аксиоматизације (осим за логике $L_M^{FR(n)}$ и $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$), а за све посматране логике доказане теореме потпуности и компактности (или наведени контрапримери којима се показује да компактност не важи). Усвајајући терминологију из [14] и [73], логике које се разматрају у овој глави означене су са:

- L_{PM}, логика чији су модели псеудометрички простори, а у којој нису дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула;
- L_M, логика која представља екстензију логике L_{PM} у којој нису дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула, а модели су метрички простори;
- L_{FAM}, логика која представља рестрикцију логике L_M у којој нису дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула, а метрички оператори имају сличне особине као условно-вероватносни оператори; модели су нормирани метрички простори;
- $L_{\widetilde{PM}}$, логика у којој су дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула, а модели су псеудометрички простори;

- $L_{\widetilde{M}}$, логика у којој су дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула, а модели су метрички простори;

- $L_M^{FR(n)}$, логика која представља рестрикцију логике L_M у којој су дозвољена само растојања са коначним унапред фиксираним рангом;

- $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$, логика која представља рестрикцију логике $L_{\widetilde{M}}$ у којој су дозвољена само растојања са коначним унапред фиксираним рангом.

Због некомпактности, да би се доказала јака потпуност неопходно је увести бесконачну аксиоматизацију. За логике L_{PM}, L_M, L_{FAM}, $L_{\widetilde{PM}}$ и $L_{\widetilde{M}}$ наведене бесконачне аксиоматизације су у смислу да се бесконачност односи на дужину доказа, а формуле морају бити коначне. За логике $L_M^{FR(n)}$ и $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$ биће наведене коначне аксиоматизације код којих теорема компактности важи.

3.1 Исказна логика L_{PM}

У овом поглављу разматрамо логику са бинарним метричким операторима, у ознаци L_{PM}, а као главни резултат је потпуност аксиоматског система $Ax(L_{PM})$.

3.1.1 Синтакса и семантика

Нека је $\mathbb{Q}_0^+$ скуп свих ненегативних рационалних бројева. Језик $\mathcal{L}_{PM}$ логике L_{PM} је пребројиво проширење класичног исказног језика које се састоји од пребројивог скупа исказних слова $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$, класичних везника $\neg$ и $\wedge$ и две листе бинарних метричких оператора $D_{\leqslant s}$ и $D_{\geqslant s}$ за сваки $s \in \mathbb{Q}_0^+$. Скуп For_C свих класичних исказних формула над скупом P дефинишемо уобичајено. Елементе скупа For_C означаваћемо малим словима грчког алфабета: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Ако су α и β класичне исказне формуле и $s \in \mathbb{Q}_0^+$, тада су формуле $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$ и $D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ елементарне метричке формуле. Скуп метричких формула, у ознаци For_M, је најмањи скуп који задовољава следеће особине:

- Скуп For_M садржи све основне метричке формуле.

- Ако су A и B метричке формуле, онда су и $\neg A$ и $A \wedge B$ метричке формуле.

Формуле скупа For_M означаваћемо великим словима латинице: $A, B, C, \ldots$ Нека је $\mathrm{For} = \mathrm{For}_C \cup \mathrm{For}_M$. Формуле скупа For означаваћемо са $\Phi, \Psi, \ldots$

Приметимо да није дозвољено мешање класичних исказних и метричких формула, нити је дозвољена итерација метричких оператора. На пример, $D_{\leqslant 0.4}(\alpha, \beta) \wedge \neg D_{\geqslant 0.1}(\alpha \wedge \gamma, \neg\beta)$ је формула логике L_{PM}, док $D_{\leqslant 0.4}(\alpha, \beta) \wedge \neg\alpha$ и $D_{\geqslant 0.7}(\alpha, D_{\leqslant 0.1}(\gamma, \beta))$ то нису.

Остале исказне везнике $\vee$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ уводимо на уобичајен начин, $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, $\alpha \rightarrow \beta =_{def} \neg\alpha \vee \beta$ и $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. За сваки ненегативан рационалан број s уводимо нове метричке операторе:

- $D_{>s}(\alpha, \beta) =_{def} \neg D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$,
- $D_{<s}(\alpha, \beta) =_{def} \neg D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$,
- $D_{=s}(\alpha, \beta) =_{def} D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \wedge D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ и
- $D_{\neq s}(\alpha, \beta) =_{def} \neg D_{=s}(\alpha, \beta)$.

Са $\perp$ ћемо означавати формуле $\alpha \wedge \neg\alpha$ и $A \wedge \neg A$, сматрајући да је значење јасно из контекста, док ћемо са $\top$ означавати $\neg\perp$.

Семантика логике L_{PM} се у основи заснива на функцији растојања $D : \mathrm{For}_C \times \mathrm{For}_C \rightarrow [0, +\infty)$ која за све $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{For}_C$ задовољава услове:

$(D1)$ Ако је $\alpha \leftrightarrow \beta$ таутологија, тада је $D(\alpha, \beta) = 0$;

$(D2)$ $D(\alpha, \beta) \leqslant D(\alpha, \gamma) + D(\gamma, \beta)$;

$(D3)$ $D(\alpha, \beta) = D(\beta, \alpha)$.

Другим речима, семантика се заснива на псеудометрици дефинисаној на Линденбаумовој (Линденбаум–Тарски) алгебри класичне исказне теорије, односно на количничкој алгебри добијеној разбијањем скупа For_C релацијом еквиваленције $\sim$ која је дефинисана са: $\alpha \sim \beta$ ако и само ако $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Међутим, за давање значења формулама уводимо моделе у којима је растојање дефинисано над могућим световима налик моделима за вероватносне логике [60]. Наведени приступ је посебно погодан за разна уопштења и модификације логике L_{PM}. Оваква интерпретација исказног језика подразумева пар (W, v) где је за сваку формулу $\alpha \in \mathrm{For}_C$ одређен скуп светова ког ћемо означавати са $[\alpha] = \{w \mid v(w, \alpha) = 1\}$. Нека је $\mathcal{F} = \{[\alpha] \mid \alpha \in \mathrm{For}_C\}$.

Дефиниција 3.1.1. *L_{PM}-модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$, где је:*

- *W непразан скуп објеката које називамо световима и $v : W \times P \rightarrow \{0, 1\}$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује једну двовредносну валуацију исказних слова; свака валуација $v(w, \cdot)$ се на уобичајени начин проширује на све класичне формуле;*

- $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ *псеудометрика.*

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.2. *Релација задовољења испуњава следеће услове за сваки L_{PM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d \rangle$:*

- *ако $\alpha \in \mathrm{For}_C$, $\mathbf{M} \models \alpha$ акко за сваки свет $w \in W$, $v(w, \alpha) = 1$,*
- *ако $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$, $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$ акко $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s$,*
- *ако $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$, $\mathbf{M} \models D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ акко $d([\alpha], [\beta]) \geqslant s$,*
- *ако $A \in \mathrm{For}_M$, $\mathbf{M} \models \neg A$ акко $\mathbf{M} \not\models A$,*
- *ако $A, B \in \mathrm{For}_M$, $\mathbf{M} \models A \wedge B$ акко $\mathbf{M} \models A$ и $\mathbf{M} \models B$.*

Формула $\Phi \in \mathrm{For}$ је L_{PM}-задовољива ако постоји L_{PM}-модел $\mathbf{M}$ такав да $\mathbf{M} \models \Phi$. Скуп формула T је L_{PM}-задовољив ако постоји L_{PM}-модел такав да $\mathbf{M} \models \Phi$ за свако $\Phi \in T$. Формула Φ је L_{PM}-ваљана ако за сваки L_{PM}-модел $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \models \Phi$.

3.1.2 Аксиоматизација

Аксиоматски систем $Ax(L_{PM})$ за логику L_{PM} садржи следеће схеме аксиома:

$(A1)$ све For_C-инстанце класичних исказних таутологија,

$(A2)$ све For_M-инстанце класичних исказних таутологија,

$(A3)$ $D_{\geqslant 0}(\alpha, \beta)$,

$(A4)$ $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \to D_{<r}(\alpha, \beta)$, $r > s$,

$(A5)$ $D_{<s}(\alpha, \beta) \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$,

$(A6)$ $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \wedge D_{\leqslant r}(\beta, \gamma) \to D_{\leqslant s+r}(\alpha, \gamma)$,

$(A7)$ $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \to D_{\leqslant s}(\beta, \alpha)$;

и следећа правила извођења:

$(R1)$ из Φ и $\Phi \to \Psi$ закључујемо Ψ,

$(R2)$ из $\alpha \leftrightarrow \beta$ закључујемо $D_{=0}(\alpha, \beta)$,

$(R3)$ из $A \to D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број k, закључујемо $A \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$,

$(R4)$ из $A \to D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, закључујемо $A \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ $(s \neq 0)$.

Продискутујмо значење наведених аксиома и правила извођења. Аксиоме $(A1)$ и $(A2)$, као и правило извођења $(R1)$ обезбеђују да је класична исказна логика подлогика логике L_{PM}. Аксиоме $(A3)$, $(A4)$ и $(A5)$ као и правила извођења $(R3)$ и $(R4)$ изражавају особине функције растојања и обезбеђују да домен функције растојања буде интервал $[0, +\infty)$. Приметимо да су правила извођења $(R3)$ и $(R4)$ бесконачна, а свако од њих се односи на пребројив скуп претпоставки и само један закључак. Интуитивно, њима се каже да, ако је растојање формула α и β произвољно близу неком рационалном броју s, онда је оно управо једнако са s, и одговарају Архимедовој аксиоми за реалне бројеве. Аксиоме $(A6)$ и $(A7)$ и правило извођења $(R2)$ описују услове $(D1)$, $(D2)$ и $(D3)$. Правило $(R2)$ личи на правило нецеситације у модалним логикама, при чему овде може бити примењено само на исказне формуле.

Дефиниција 3.1.3. *Формула Φ је доказива (синтаксна последица) из скупа формула T (у ознаци $T \vdash \Phi$) ако постоји највише пребројив низ формула $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi$ такав да је свака формула Φ_i аксиома или припада скупу T или се може добити из претходних формула низа применом неког од правила извођења.*

Формула Φ је теорема ($\vdash \Phi$) ако је доказива из празног скупа формула, а доказ за Φ је одговарајући низ формула.

Скуп формула T је непротивречан (конзистентан) ако постоји бар једна формула из For_C и бар једна формула из For_M која није доказива из T; у супротном скуп формула T је противречан (неконзистентан) скуп.

Непротивречан скуп формула T је максимално непротивречан ако за сваку формулу $A \in \mathrm{For}_M$, или $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Скуп формула T је дедуктивно затворен ако за сваку формулу $\Phi \in \mathrm{For}$ важи: ако $T \vdash \Phi$, тада $\Phi \in T$.

Лема 3.1.1. Нека је T максимално непротивречан скуп формула и $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$. Ако $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, тада $D_{=0}(\alpha, \beta) \in T$.

Доказ. Нека $T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, тада $T \vdash D_{=0}(\alpha, \beta)$ на основу правила извођења $(R2)$. Претпоставимо супротно, тј. да $D_{=0}(\alpha, \beta) \notin T$, тада $\neg D_{=0}(\alpha, \beta) \in T$ (јер је T максимално непротивречан скуп формула) што је контрадикција са непротивречношћу скупа формула T. Дакле, $D_{=0}(\alpha, \beta) \in T$. $\square$

3.1.3 Сагласност и потпуност

Следећи идеје из [27], [28], [35], [59], [60], [63] и [65] није тешко доказати теореме сагласности и потпуности.

Теорема 3.1.1. (Теорема сагласности) Аксиоматски систем $Ax(L_{PM})$ је сагласан у односу на L_{PM}-моделе.

Доказ. Сагласност аксиоматског система $Ax(L_{PM})$ следи из сагласности класичне исказне логике и особина псеудометрике. Наиме, показаћемо да је свака инстанца аксиома ваљана формула, тј. да аксиоме важе у сваком L_{PM}-моделу као и да правила извођења чувају ваљаност.

Једноставно закључујемо да за сваку инстанцу класичне исказне таутологије α и сваки L_{PM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$, $\mathbf{M} \models \alpha$. Размотримо аксиоме $(A3) - (A7)$.

• Аксиома $(A3)$: Нека су α и β произвољне исказне формуле и $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$ произвољан L_{PM}-модел. Тада је $d([\alpha], [\beta]) \geqslant 0$, одакле директно из дефиниције 3.1.2 следи $\mathbf{M} \models D_{\geqslant 0}(\alpha, \beta)$.

• Аксиома $(A4)$: Нека $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, за произвољни L_{PM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$ и нека је $r > s$. Из дефиниције 3.1.2 добијамо да је $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s$, а како је $s < r$ закључујемо да је $d([\alpha], [\beta]) < r$, тј. да $\mathbf{M} \models D_{<r}(\alpha, \beta)$.

• Аксиома $(A5)$: Нека $\mathbf{M} \models D_{<s}(\alpha, \beta)$, за произвољни L_{PM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$. Како је $d([\alpha], [\beta]) < s$, очигледно је и $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s$, тј. $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$.

• Аксиома $(A6)$: Нека $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \wedge D_{\leqslant r}(\beta, \gamma)$, за произвољни L_{PM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$. Тада, $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$ и $\mathbf{M} \models D_{\leqslant r}(\beta, \gamma)$, односно $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s$ и $d([\beta], [\gamma]) \leqslant r$. Како је d пресудометрика, на основу неједнакости троугла имамо да је $d([\alpha], [\gamma]) \leqslant d([\alpha], [\beta]) + d([\beta], [\gamma]) \leqslant s + r$, тј. важи $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s+r}(\alpha, \gamma)$.

• Аксиома $(A7)$: Нека $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, за произвољни L_{PM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$. Тада је $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s$, а како је d псеудометрика, на основу особине симетричности имамо да је $d([\alpha], [\beta]) = d([\beta], [\alpha]) \leqslant s$, тј. $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\beta, \alpha)$.

Размотримо сада правила извођења:

• Правило $(R1)$: Ово правило чува ваљаност из истог разлога као и у класичној исказној логици.

• Правило $(R2)$: Претпоставимо да је формула $\alpha \leftrightarrow \beta$ таутологија. Тада $[\alpha] = [\beta]$ важи у сваком L_{PM}-моделу. Дакле, $D_{=0}(\alpha, \beta)$ важи у сваком L_{PM}-моделу.

• Правило $(R3)$: Нека је $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$ произвољан L_{PM}-модел и $\mathbf{M} \models A \to D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha,\beta)$, за сваки природан број k. Прво, ако $\mathbf{M} \models \neg A$, онда $\mathbf{M} \models A \to D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$. Сада, ако $\mathbf{M} \models A$, онда на основу претпоставке $\mathbf{M} \models D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha,\beta)$ за сваки природан број k. Тада је $d([\alpha],[\beta]) < s + \frac{1}{k}$ за сваки природан број k. Према Архимедовој аксиоми, $d([\alpha],[\beta]) \leqslant s$, одакле следи $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$, а самим тим и $\mathbf{M} \models A \to D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$.

• Правило $(R4)$: Нека је $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$ произвољан L_{PM}-модел и $\mathbf{M} \models A \to D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha,\beta)$, за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, $s \neq 0$. Ако $\mathbf{M} \models \neg A$, онда $\mathbf{M} \models A \to D_{\geqslant s}(\alpha,\beta)$. У супротном, ако $\mathbf{M} \models A$, онда на основу претпоставке $\mathbf{M} \models D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha,\beta)$ за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, $s \neq 0$. Тада је $d([\alpha],[\beta]) > s - \frac{1}{k}$ за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, $s \neq 0$. Према Архимедовој аксиоми, $d([\alpha],[\beta]) \geqslant s$, одакле следи $\mathbf{M} \models D_{\geqslant s}(\alpha,\beta)$, а самим тим и $\mathbf{M} \models A \to D_{\geqslant s}(\alpha,\beta)$. $\square$

У поступку доказивања потпуности користиће се поступак који је увео Леон Хенкин[1]. Пре теореме потпуности доказујемо неколико помоћних тврђења.

Теорема 3.1.2. (Теорема дедукције) Ако је T скуп формула, Φ формула и $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$, тада $T \vdash \Phi \to \Psi$, где су и Φ и Ψ или обе класичне исказне формуле или обе метричке формуле.

Доказ. Доказ изводимо коришћењем трансфинитне индукције по дужини доказа за Ψ из скупа $T \cup \{\Phi\}$. Ако је дужина доказа 1, имамо следећа три случаја:

(1) Ψ је аксиома. На основу аксиома $(A1)$ и $(A2)$ имамо да је $\vdash \Psi \to (\Phi \to \Psi)$, а како је $\vdash \Psi$, следи да је $\vdash \Phi \to \Psi$ према правилу $(R1)$. Дакле, $T \vdash \Phi \to \Psi$.

(2) $\Psi \in T$. Слично као и у претходном случају, имамо да $T \vdash \Psi$ и $T \vdash \Psi \to (\Phi \to \Psi)$, па је $T \vdash \Phi \to \Psi$.

(3) $\Psi = \Phi$. На основу аксиома $(A1)$ и $(A2)$ имамо да је $\vdash \Phi \to \Psi$. Дакле, $T \vdash \Phi \to \Psi$.

Претпоставимо да $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ и да теорема важи за све формуле доказиве из $T \cup \{\Phi\}$, а чија је дужина доказа мања од дужине доказа формуле Ψ из $T \cup \{\Phi\}$. Ако је Ψ аксиома или $\Psi \in T$ или $\Psi = \Phi$, показује се да $T \vdash \Phi \to \Psi$, слично као и у случајевима $(1) - (3)$. Размотримо случајеве када је Ψ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом неког од правила извођења.

Ако је Ψ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила $(R1)$ на формуле Θ и $\Theta \to \Psi$, тада према индуктивној претпоставци имамо да $T \vdash \Phi \to \Theta$ и

[1] Leon Albert Henkin (1921–2006)

$T \vdash \Phi \to (\Theta \to \Psi)$. На основу аксиома $(A1)$ и $(A2)$ имамо да је

$$\vdash (\Phi \to (\Theta \to \Psi)) \to ((\Phi \to \Theta) \to (\Phi \to \Psi)),$$

па двоструком применом правила извођења $(R1)$ добија се да $T \vdash \Phi \to \Psi$.

Претпоставимо да је $\Psi = D_{=0}(\alpha, \beta)$ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила $(R2)$ и да $\Phi \in \mathrm{For}_M$. Тада $T \cup \{\Phi\} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.
Како $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{For}_C$ и $\Phi \in \mathrm{For}_M$, Φ не утиче на доказ за $\alpha \leftrightarrow \beta$ из $T \cup \{\Phi\}$, па имамо:

$T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$

$T \vdash D_{=0}(\alpha, \beta)$, на основу правила извођења $(R2)$

$T \vdash D_{=0}(\alpha, \beta) \to (\Phi \to D_{=0}(\alpha, \beta))$, на основу аксиоме $(A2)$, јер је формула $p \to (q \to p)$ таутологија,

$T \vdash \Phi \to D_{=0}(\alpha, \beta)$, на основу правила извођења $(R1)$

$T \vdash \Phi \to \Psi$.

Даље, претпоставимо да је $\Psi = A \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила извођења $(R3)$ и $\Phi \in \mathrm{For}_M$. Тада:

$T \cup \{\Phi\} \vdash A \to D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број k

$T \vdash \Phi \to (A \to D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta))$, за сваки природан број k, на основу индуктивне претпоставке

$T \vdash (\Phi \wedge A) \to D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број k

$T \vdash (\Phi \wedge A) \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, на основу правила извођења $(R3)$

$T \vdash \Phi \to (A \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta))$

$T \vdash \Phi \to \Psi$.

Слично, претпоставимо да је $\Psi = A \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила извођења $(R4)$ и $\Phi \in \mathrm{For}_M$. Тада:

$T \cup \{\Phi\} \vdash A \to D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, $s \neq 0$

$T \vdash \Phi \to (A \to D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta))$, за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, $s \neq 0$, на основу индуктивне претпоставке

$T \vdash (\Phi \wedge A) \to D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, $s \neq 0$

$T \vdash (\Phi \wedge A) \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$, на основу правила извођења $(R4)$

$T \vdash \Phi \to (A \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta))$

$T \vdash \Phi \to \Psi$. $\square$

Један од битнијих корака у доказу теореме потпуности биће конструкција максимално непротивречног скупа, који је проширење неког произвољног непротивречног скупа.

Теорема 3.1.3. Сваки непротивречан скуп формула T се може проширити до максимално непротивречног скупа формула.

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула и нека је $A_0, A_1, A_2, \ldots$ једно набрајање свих формула из For_M. Дефинишимо низ скупова T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ на следећи начин:

(1) $T_0 = T \cup \mathrm{Con}_C(T) \cup \{D_{=0}(\alpha, \beta) : \alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)\}$, где је $\mathrm{Con}_C(T)$ скуп свих класичних последица од T ($\mathrm{Con}_C(T) \subset \mathrm{For}_C$);

За свако $i \geqslant 0$,

(2) ако је $T_i \cup \{A_i\}$ непротивречан скуп, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{A_i\}$;

(3) иначе, ако је $T_i \cup \{A_i\}$ противречан, онда:

  (а) ако је A_i облика $B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i, B \to D_{\geqslant s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)\}$, где је k природан број изабран тако да је скуп T_{i+1} непротивречан;

  (б) ако је A_i облика $B \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i, B \to D_{\leqslant s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)\}$, где је k природан број изабран тако да је скуп T_{i+1} непротивречан;

  (в) иначе, $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i\}$.

Нека је $T^* = \cup_{i=0}^{\infty} T_i$. Остатак доказа је подељен на три тврђења.

Тврђење 1. T_i је непротивречан скуп формула за свако $i \geqslant 0$.

Доказ тврђења 1. Скупови добијени у корацима (1) и (2) су очигледно непротивречни. Скупови добијени у кораку (3в) су такође непротивречни. Претпоставимо супротно, тј. ако $T_i \cup \{A_i\} \vdash \bot$, на основу теореме дедукције $T_i \vdash \neg A_i$, и како је T_i непротивречан, непротивречан је и скуп $T_i \cup \{\neg A_i\}$.
Размотимо корак (3а).

Ако је скуп $T_i \cup \{B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)\}$ противречан, тада се T_i може непротивречно проширити како је описано у овом кораку. Претпоставимо да то није могуће. Тада

$T_i, \neg(B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)), B \to \neg D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta) \vdash \bot$, за сваки природан број k

$T_i, \neg(B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)) \vdash \neg(B \to \neg D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta))$, за сваки природан број k, на основу теореме дедукције

$T_i, \neg(B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)) \vdash B \to D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број k, на основу познате таутологије $\neg(p \to q) \to (p \to \neg q)$

$T_i, \neg(B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)) \vdash B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, на основу правила извођења $(R3)$

На тај начин долазимо до контрадикције са претпоставком да је T_i непротивречан. Дакле, у кораку (3а) добијамо непротивречне скупове.

Сада, размотимо корак (3б).

Ако је скуп $T_i \cup \{B \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)\}$ противречан, тада се T_i може непротивречно проширити како је описано у овом кораку. Претпоставимо да то није могуће. Тада

$T_i, \neg(B \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)), B \to \neg D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta) \vdash \bot$, за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, $s \neq 0$

$T_i, \neg(B \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)) \vdash \neg(B \to \neg D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta))$, за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, на основу теореме дедукције

$T_i, \neg(B \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)) \vdash B \to D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број $k > \frac{1}{s}$, на основу познате таутологије $\neg(p \to q) \to (p \to \neg q)$

$T_i, \neg(B \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)) \vdash B \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$, на основу правила извођења $(R4)$

На тај начин долазимо до контрадикције са претпоставком да је T_i непротивречан. Отуда, и у кораку (3б) добијамо непротивречне скупове, па је доказ тврђења 1 комплетан.

Нека је $\mathrm{Con}(T)$ скуп свих синтаксних последица скупа T. За скуп T кажемо да је дедуктивно затворен скуп ако је $\mathrm{Con}(T) = T$.

Тврђење 2. T^* је дедуктивно затворен скуп формула.

Доказ тврђења 2. Нека је Φ формула скупа For. Ако је Φ класична формула тврђење следи на основу теореме дедукције класичне исказне логике. Размотримо случај када је Φ метричка формула. Приметимо да ако $T_i \vdash A$ и $A = A_n$, онда је $A \in T^*$, јер је скуп $T_{\max\{n,i\}+1}$ непротивречан, а у n-том кораку конструкције низа (T_n) додато је A_n или $\neg A_n$.

Претпоставимо да је низ формула $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi$ доказ формуле Φ из T^* и да је пребројиво бесконачан. Показаћемо да за свако i, ако је Φ_i добијено помоћу неког од правила извођења и све претпоставке припадају T^*, тада и $\Phi_i \in T^*$.

Претпоставимо да је Φ_i добијено применом правила $(R1)$ и да његове претпоставке Φ_i^1 и Φ_i^2 припадају T^*. Тада постоји неко k такво да је $\Phi_i^1, \Phi_i^2 \in T_k$. Како је $T_k \vdash \Phi_i$, имамо да $\Phi_i \in T^*$.

Ако је Φ_i добијено применом правила $(R2)$, тада претпоставка припада T_0, па исто важи и за Φ_i.

Нека је $\Phi_i = B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$ добијено применом бесконачног правила $(R3)$ на претпоставке

$\Phi_i^k = B \to D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за све природне бројеве k,

а које припадају скупу T^*. Ако $\Phi_i \notin T^*$, према кораку (3а) конструкције скупа T^* постоји природан број j, такав да $B \to \neg D_{<s+\frac{1}{j}}(\alpha, \beta) \in T^*$. Из горе наведеног низа, постоји m такав да $B \to D_{<s+\frac{1}{j}}(\alpha, \beta) \in T_m$ и $B \to$

$\neg D_{<s+\frac{1}{j}}(\alpha, \beta) \in T_m$. Дакле, $T_m \cup \{B\}$ је противречан скуп. $T_m \vdash B \rightarrow \bot$ имплицира да $T_m \vdash B \rightarrow D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, па стога $B \rightarrow D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*$, тј. $\Phi_i \in T^*$ што је у контрадикцији са претпоставком да $\Phi_i \notin T^*$.

Нека је $\Phi_i = B \rightarrow D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ добијено применом бесконачног правила $(R4)$ на претпоставке

$\Phi_i^k = B \rightarrow D_{>s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за све природне бројеве $k > \frac{1}{s}$, $s \neq 0$,

а које припадају скупу T^*. Ако $\Phi_i \notin T^*$, према кораку (3б) конструкције скупа T^* постоји $j > \dfrac{1}{s}$, такав да $B \rightarrow \neg D_{>s-\frac{1}{j}}(\alpha, \beta) \in T^*$. Из горе наведеног низа, постоји m такав да $B \rightarrow D_{>s-\frac{1}{j}}(\alpha, \beta) \in T_m$ и $B \rightarrow \neg D_{>s-\frac{1}{j}}(\alpha, \beta) \in T_m$. Дакле, $T_m \cup \{B\}$ је противречан скуп. $T_m \vdash B \rightarrow \bot$ имплицира да $T_m \vdash B \rightarrow D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$, па стога $B \rightarrow D_{\geqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*$, тј. $\Phi_i \in T^*$ што је у контрадикцији са претпоставком да $\Phi_i \notin T^*$.

На основу претходног разматрања закључујемо да је скуп T^* дедуктивно затворен, што је и требало показати.

Тврђење 3. T^* је максимално непротивречан скуп формула.

Доказ тврђења 3. Лако је закључити да T^* не садржи све формуле. Ако $\alpha \in \mathrm{For}_C$, према дефиницији скупа T_0, α и $\neg\alpha$ не могу истовремено припадати скупу T_0. Ако за неко A, и A и $\neg A$ припадају T^*, тада постоји скуп T_i тако да $A, \neg A \in T_i$, што је контрадикција са непротивречношћу скупа T_i. Укратко, за формулу Φ, или $\Phi \in T^*$ или $\neg\Phi \in T^*$, а скуп T^* не садржи обе. Отуда, T^* је непротивречан скуп. На основу изградње скупа T^* закључујемо да је максималан. $\square$

Следећом лемом описана су нека очигледна својства максимално непротивречних скупова која су нам потребна у доказу теореме потпуности.

Лема 3.1.2. Нека је T^* максимално непротивречан скуп формула дефинисан у доказу теореме 3.1.3. Нека су A и B или обе класичне или обе метричке формуле и нека су α и β класичне формуле. Тада важи:

(1) $A \in T^*$ ако и само ако $\neg A \notin T^*$.

(2) $A \in T^*$ и $B \in T^*$ ако и само ако $A \wedge B \in T^*$.

(3) Ако је $A \in T^*$ и $A \rightarrow B \in T^*$, онда је $B \in T^*$.

(4) Све теореме припадају скупу T^*.

(5) $\inf\{s \in \mathbb{Q}_0^+ \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant r$ ако и само ако $D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*$, за сваки ненегативан рационалан број r.

(6) $\inf\{s \in \mathbb{Q}_0^+ \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} < r$ ако и само ако $D_{<r}(\alpha, \beta) \in T^*$, за сваки позитиван рационалан број r.

Доказ. (1) Прво, нека $A \in T^*$ и претпостатвимо да $\neg A \in T^*$. Тада постоји скуп T_i тако да $A, \neg A \in T_i$, што је контрадикција са непротивречношћу скупа T_i. Са друге стране, ако $\neg A \notin T^*$ и претпоставимо да $A \notin T^*$, тада је скуп $T^* \cup \{\neg A\}$ противречан, као и скуп $T^* \cup \{A\}$, одакле добијамо да је скуп T^* противречан, што је контрадикција.

(2) За све формуле $A, B \in T^*$ важи да $T^* \vdash A$ и $T^* \vdash B$, одакле следи $T^* \vdash A \wedge B$.
Због дедуктивне затворености скупа T^*, $A \wedge B \in T^*$. Обрнуто, из $A \wedge B \in T^*$ следи $T^* \vdash A \wedge B$. Користећи инстанце класичних таутологија $\vdash (A \wedge B) \to A$ и $\vdash (A \wedge B) \to B$, закључујемо $T^* \vdash A$ и $T^* \vdash B$, одакле због дедуктивне затворености скупа T^* следи $A, B \in T^*$.

(3) За формуле $A \in T^*$ и $A \to B \in T^*$ важи да $T^* \vdash A$ и $T^* \vdash A \to B$, одакле следи $T^* \vdash B$. Због дедуктивне затворености скупа T^*, $B \in T^*$.

(4) Због дедуктивне затворености скупа T^*, ако је A теорема, тј. ако је $\vdash A$, онда је $T^* \vdash A$, па $A \in T^*$.

(5) Претпоставимо да је $\inf\{s \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant r$ да бисмо доказали нетривијалан део еквиваленције. Претпоставимо супротно, тј. $D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \notin T^*$, тада $\neg D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*$, па на основу корака (3а) постоји природан број k такав да је $D_{\geqslant r+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta) \in T^*$. Како је скуп T^* непротивречан, не постоји рационалан број $s < r + \frac{1}{k}$ такав да $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*$, што је контрадикција са претпоставком.

(6) На крају, докажимо и нетривијални део овог тврђења. Ако $D_{<r}(\alpha, \beta) \in T^*$, тада на основу аксиоме $(A5)$ и дедуктивне затворености скупа T^* добијамо да $D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*$, па на основу дела (5) ове леме имамо да је $\inf\{s \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant r$. Једнакост $\inf\{s \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} = r$ имплицира $D_{\leqslant r-\frac{1}{n}}(\alpha, \beta) \notin T^*$, па је дакле $D_{>r-\frac{1}{n}}(\alpha, \beta) \in T^*$, за сваки природан број $n > \frac{1}{r}$. На основу правила извођења $(R4)$, закључујемо да је $D_{\geqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*$, што је контрадикција. Дакле, $\inf\{s \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} < r$. □

Како смо произвољан непротивречан скуп проширили до максимално непротивречног скупа сада је циљ да од максимално непротивречног скупа изградимо канонски модел.

Теорема 3.1.4. (Теорема потпуности) Сваки непротивречан скуп формула T има L_{PM}-модел.

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула и T^* његово максимално непротивречно проширење описано у теореми 3.1.3. Узимајући скуп T^*, дефинишемо тројку $\mathbf{M} = \langle W, v, d \rangle$, где је:

- W скуп свих класичних исказних интерпретација (валуација исказних слова) које задовољавају $\mathrm{Con}_C(T)$;
- $v : W \times P \to \{0, 1\}$ пресликавање тако да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in P$, $v(w, p) = 1$ акко $w \models p$;
- Нека је $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ дато са $d([\alpha], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\}$.

Присетимо се да је $[\alpha] = \{w \in W : w \models \alpha\}$ и $\mathcal{F} = \{[\alpha] : \alpha \in \mathrm{For}_C\}$.

Тврђење 1. $\mathbf{M}$ је L_{PM}-модел.

Доказ тврђења 1. Проверимо да ли модел $\mathbf{M}$ задовољава услов ненегативности и услове $(D1)$, $(D2)$ и $(D3)$.

За све формуле $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$,

$$d([\alpha], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \geqslant 0,$$

јер је формула $D_{\geqslant 0}(\alpha, \beta)$ аксиома и $D_{\geqslant 0}(\alpha, \beta) \in T^*$ на основу дедуктивне затворености скупа T^*. Дакле, d испуњава услов ненегативности.

$(D1)$ Претпоставимо да је $[\alpha] = [\beta]$. Тада, за сваки свет $w \in W$, $w \models \alpha$ акко $w \models \beta$, те стога $\mathrm{Con}_C(T) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, на основу теореме потпуности класичне исказне логике. Отуда, $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)$ и $D_{=0}(\alpha, \beta) \in T_0 \subseteq T^*$, па закључујемо да је

$$d([\alpha], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} = 0.$$

$(D2)$ Нека је

$$d([\alpha], [\gamma]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \gamma) \in T^*\} = s_1$$

и

$$d([\gamma], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\gamma, \beta) \in T^*\} = s_2.$$

Примењујући услов (5) леме 3.1.2, за све рационалне бројеве $r \geqslant s_1$ и $t \geqslant s_2$, $D_{\leqslant r}(\alpha, \gamma) \in T^*$ и $D_{\leqslant t}(\gamma, \beta) \in T^*$. Аксиома $(A6)$ и дедуктивна затвореност скупа T^* имплицирају да $D_{\leqslant r+t}(\alpha, \beta) \in T^*$, тј.

$$d([\alpha], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant r + t,$$

за све рационалне бројеве $r \geqslant s_1$ и $t \geqslant s_2$.

Дакле, $d([\alpha],[\beta]) \leqslant s_1 + s_2 = d([\alpha],[\gamma]) + d([\gamma],[\beta])$.

$(D3)$ У овом случају испустићемо неке детаље који су наведени у претходном разматрању.
Ако је $d([\alpha],[\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \in T^*\} = s_0$, тада за произвољан рационалан број $r \geqslant s_0$, $D_{\leqslant r}(\alpha,\beta) \in T^*$, па дакле, $D_{\leqslant r}(\beta,\alpha) \in T^*$, на основу аксиоме $(A7)$, па следи да је $d([\beta],[\alpha]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\beta,\alpha) \in T^*\} \leqslant s_0$. Ако би постојао рационалан број $t < s_0$, такав да $D_{\leqslant t}(\beta,\alpha) \in T^*$, имали бисмо $D_{\leqslant t}(\alpha,\beta) \in T^*$, што је контрадикција. Дакле, услов симетричности $d([\beta],[\alpha]) = s_0 = d([\alpha],[\beta])$ важи.

Тврђење 2. За сваку формулу Φ, $\mathbf{M} \models \Phi$ акко $\Phi \in T^*$.

Доказ тврђења 2. За свако $\alpha \in \mathrm{For}_C$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \models \alpha \text{ акко } & w \models \alpha, \text{ за свако } w \in W \\
\text{акко } & \mathrm{Con}_C(T) \vdash \alpha, \text{ на основу дефиниције скупа } W \\
\text{акко } & \alpha \in T_0 \\
\text{акко } & \alpha \in T^*.
\end{aligned}$$

За све $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$ и $r \in \mathbb{Q}_0^+$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \models D_{\leqslant r}(\alpha,\beta) \text{ акко } & d([\alpha],[\beta]) \leqslant r \\
\text{акко } & \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \in T^*\} \leqslant r, \text{ на основу дефиниције за } d \\
\text{акко } & D_{\leqslant r}(\alpha,\beta) \in T^*, \text{ из услова (5) леме 3.1.2;} \\
\mathbf{M} \models D_{\geqslant r}(\alpha,\beta) \text{ акко } & d([\alpha],[\beta]) \geqslant r \\
\text{акко } & \text{ не важи } d([\alpha],[\beta]) < r \\
\text{акко } & \text{ не важи } \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \in T^*\} < r \\
\text{акко } & D_{<r}(\alpha,\beta) \notin T^*, \text{ из услова (6) леме 3.1.2} \\
\text{акко } & D_{\geqslant r}(\alpha,\beta) \in T^*.
\end{aligned}$$

За све $A, B \in \mathrm{For}_M$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \models A \wedge B \text{ акко } & \mathbf{M} \models A \text{ и } \mathbf{M} \models B \\
\text{акко } & A \in T^* \text{ и } B \in T^*, \text{ на основу индуктивне претпоставке} \\
\text{акко } & A \wedge B \in T^*, \text{ из услова (2) леме 3.1.2;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \models \neg A \text{ акко } & \mathbf{M} \not\models A \\
\text{акко } & A \notin T^*, \text{ на основу индуктивне претпоставке} \\
\text{акко } & \neg A \in T^*, \text{ из услова (1) леме 3.1.2.}
\end{aligned}$$

□

На овај начин је показано да за аксиоматски систем $Ax(L_{PM})$ важи јака потпуност у односу на L_{PM}-моделе. Следећи идеје овог поглавља уз одређене модификације може се показати и јака потпуност аксиоматског система $Ax(L_M)$ у односу на L_M-моделе.

3.2 Исказна логика L_M

Језик $\mathcal{L}_M$ логике L_M је пребројиво проширење класичног исказног језика и исти је као и језик L_{PM}, тј. и он садржи две листе бинарних метричких оператора $D_{\leqslant s}$ и $D_{\geqslant s}$ за сваки $s \in \mathbb{Q}_0^+$. Напоменимо да и код логике L_M није дозвољено мешање класичних исказних и метричких формула, нити је дозвољена итерација метричких оператора, а метричке формуле и друге појмове дефинишемо исто као код логике L_{PM}. Разлика се огледа у смислу семантике, јер се семантика логике L_M у основи заснива на функцији растојања $D : \mathrm{For}_C \times \mathrm{For}_C \to [0, +\infty)$ која за све $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{For}_C$ задовољава услове:

$(D1)$ $\alpha \leftrightarrow \beta$ је таутологија акко $D(\alpha, \beta) = 0$;

$(D2)$ $D(\alpha, \beta) \leqslant D(\alpha, \gamma) + D(\gamma, \beta)$;

$(D3)$ $D(\alpha, \beta) = D(\beta, \alpha)$.

Слично као и код логике L_{PM}, семантика логике L_M се заснива на метрици дефинисаној на Линденбаумовој алгебри класичне исказне теорије о којој је било речи у претходном поглављу.

Дефиниција 3.2.1. *L_M-модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$, где је:*

- *W непразан скуп објеката које називамо световима и $v : W \times P \to \{0,1\}$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује једну двовредносну валуацију исказних слова; свака валуација $v(w, \cdot)$ се на уобичајени начин проширује на све класичне формуле;*

- *$d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ метрика.*

Релација задовољења се дефинише на исти начин као и код логике L_{PM}, али у контексту L_M-модела.

Дефиниција 3.2.2. *Релација задовољења испуњава следеће услове за сваки L_M-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$:*

- *ако $\alpha \in \mathrm{For}_C$, $\mathbf{M} \models \alpha$ акко за сваки свет $w \in W$, $v(w, \alpha) = 1$,*

- *ако* $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$, $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$ *акко* $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s$,
- *ако* $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$, $\mathbf{M} \models D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ *акко* $d([\alpha], [\beta]) \geqslant s$,
- *ако* $A \in \mathrm{For}_M$, $\mathbf{M} \models \neg A$ *акко* $\mathbf{M} \not\models A$,
- *ако* $A, B \in \mathrm{For}_M$, $\mathbf{M} \models A \wedge B$ *акко* $\mathbf{M} \models A$ *и* $\mathbf{M} \models B$.

Формула $\Phi \in \mathrm{For}$ *је* L_M*-задовољива ако постоји* L_M*-модел* $\mathbf{M}$ *такав да* $\mathbf{M} \models \Phi$. *Скуп формула* T *је* L_M*-задовољив ако постоји* L_M*-модел такав да* $\mathbf{M} \models \Phi$ *за свако* $\Phi \in T$. *Формула* Φ *је* L_M*-ваљана ако за сваки* L_M*-модел* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \models \Phi$.

3.2.1 Компактност

Одговор на питање, да ли постоји коначна аксиоматизација логике L_M (L_{PM}) за коју важи теорема сагласности и теорема јаке потпуности, добијамо ако испитамо да ли компактност важи. Са тим циљем проверимо да ли је произвољан скуп формула T језика $\mathcal{L}_M$ ($\mathcal{L}_{PM}$) задовољив ако је сваки његов коначан подскуп задовољив. Наиме, посматрајмо скуп формула

$$T = \{D_{<\frac{1}{n}}(\alpha, \beta) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg D_{=0}(\alpha, \beta)\}.$$

Нека је T' произвољан коначан подскуп скупа T. Тада је

$$T' \subseteq \left\{D_{<\frac{1}{n_1}}(\alpha, \beta), D_{<\frac{1}{n_2}}(\alpha, \beta), \ldots, D_{<\frac{1}{n_k}}(\alpha, \beta)\right\} \cup \{\neg D_{=0}(\alpha, \beta)\},$$

за неке природне бројеве $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Ако је $m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} + 1$, онда је јасно да постоји модел $\mathbf{M}_{T'} = \langle \{w_1, w_2\}, v, d \rangle$ такав да рецимо $w_1 \models \alpha$, $w_2 \not\models \alpha$, $w_1 \models \beta$ и $w_2 \models \beta$ у коме важи да је $d(\{w_1\}, \{w_1, w_2\}) = \frac{1}{m}$. Тада је $d([\alpha], [\beta]) = \frac{1}{m} > 0$. Очигледно је да модел $\mathbf{M}_{T'}$ задовољава све формуле скупа T'.

Међутим, не постоји модел $\mathbf{M}$ који задовољава све формуле скупа T. Нека је $d([\alpha], [\beta]) = r$ за неко $r > 0$, тада постоји природан број k такав да је $\frac{1}{k} < r$ и $\mathbf{M} \not\models D_{<\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, а ако је $d([\alpha], [\beta]) = 0$ тада $\mathbf{M} \not\models \neg D_{=0}(\alpha, \beta)$. Закључујемо да је сваки коначан подскуп скупа T задовољив, док скуп T није.

На основу претходног примера закључујемо да компактност не важи. Продискутујмо зашто је некомпактност условила не постојање коначне аксиоматизације логике L_M (L_{PM}) за коју важи теорема сагласности и теорема јаке потпуности. Претпоставимо супротно, тј. да постоји коначна сагласна аксиоматизација за логику L_M (L_{PM}) за коју се може доказати теорема јаке потпуности. Посматрајмо скуп T дефинисан изнад. Тада је сваки коначан подскуп бесконачног скупа T формула задовољив, док скуп T то није. На основу претпостављене потпуности аксиоматског система, скуп T није непротивречан, па се из овог скупа формула изводи контрадикција. Како је аксиоматски систем (по тој претпоставци) коначан, то извођење контрадикције је коначно. Из тог разлога постоји коначан подскуп T' скупа T са истом особином, тј. из T' се изводи контрадикција, па скуп T' није непротивречан. Због претпостављене сагласности аксиоматског система скуп T' не би био задовољив, што је супротно претпоставци.

На основу претходног, потпун аксиоматски систем $Ax(L_M)$ за логику L_M биће бесконачан. Поменути аксиоматски систем је исти као и аксиоматски систем $Ax(L_{PM})$, а појмови из одељка 3.1.2 дефинисани за аксиоматски систем $Ax(L_{PM})$ се исто дефинишу и за аксиоматски систем $Ax(L_M)$, па их из тог разлога не наводимо.

3.2.2 Потпуност

Докази теорема сагласности и дедукције се спроводе као и докази теорема из претходног поглавља, а једна од битнијих разлика је конструкција максимално непротивречног скупа.

Теорема 3.2.1. (Теорема сагласности) Аксиоматски систем $Ax(L_M)$ је сагласан у односу на L_M-моделе.

Теорема 3.2.2. (Теорема дедукције) Ако је T скуп формула, Φ формула и $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$, тада $T \vdash \Phi \to \Psi$, где су и Φ и Ψ или обе класичне исказне формуле или обе метричке формуле.

Теорема 3.2.3. Сваки непротивречан скуп формула T се може проширити до максимално непротивречног скупа формула.

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула и нека је $A_0, A_1, A_2, \ldots$ једно набрајање свих формула из For_M. Дефинишимо низ скупова T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ на следећи начин:

(1) $T_0 = T \cup \mathrm{Con}_C(T) \cup \{D_{=0}(\alpha, \beta) : \alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)\}$, где је $\mathrm{Con}_C(T)$ скуп свих класичних последица од T ($\mathrm{Con}_C(T) \subset \mathrm{For}_C$);

За свако $i \geqslant 0$,

(2) ако је $T_i \cup \{A_i\}$ непротивречан скуп, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{A_i\}$;

(3) иначе, ако је $T_i \cup \{A_i\}$ противречан, онда:

   (а) ако је A_i облика $B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i, B \to D_{\geqslant s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)\}$, где је k природан број изабран тако да је скуп T_{i+1} непротивречан;

   (б) ако је A_i облика $B \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i, B \to D_{\leqslant s-\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)\}$, где је k природан број изабран тако да је скуп T_{i+1} непротивречан;

   (в) ако је A_i облика $D_{=0}(\alpha, \beta)$, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i, \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)\}$;

   (г) иначе, $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i\}$.

Нека је $T^* = \cup_{i=0}^{\infty} T_i$. Остатак доказа је потпуно аналоган доказу теореме 3.1.3, а једина новина је доказ тврђења 1. у кораку (3в).

Тврђење 1. T_i је непротивречан скуп формула за свако $i \geqslant 0$.

Доказ тврђења 1. Размотимо корак (3в).
Претпоставимо да је $T_i \cup \{\neg A_i, \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)\} \vdash \bot$, тј. $T_i \cup \{\neg A_i\} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Како $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{For}_C$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ припада Con_C, па је стога $D_{=0}(\alpha, \beta) \in T_0$, што је контрадикција са непротивречношћу скупа T_i. □

Циљ нам је да од максимално непротивречног скупа изградимо канонски модел на начин описан у теореми 3.1.4.

Теорема 3.2.4. (Теорема потпуности) Сваки непротивречан скуп формула T има L_M-модел.

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула и T^* његово максимално непротивречно проширење описано у теореми 3.2.3. Узимајући скуп T^*, дефинишемо тројку $\mathbf{M} = \langle W, v, d \rangle$, где је:

- W скуп свих класичних исказних интерпретација (валуација исказних слова) које задовољавају $\mathrm{Con}_C(T)$;
- $v : W \times P \to \{0, 1\}$ пресликавање тако да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in P$, $v(w, p) = 1$ акко $w \models p$;
- Нека је $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ дато са $d([\alpha], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\}$.

Присетимо се да је $[\alpha] = \{w \in W : w \models \alpha\}$ и $\mathcal{F} = \{[\alpha] : \alpha \in \mathrm{For}_C\}$.

Тврђење 1. $\mathbf{M}$ је L_M-модел.

Доказ тврђења 1. $(D1)$ Претпоставимо да је $[\alpha] = [\beta]$. Тада, за сваки свет $w \in W$, $w \models \alpha$ акко $w \models \beta$ те стога $\mathrm{Con}_C(T) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ на основу теореме потпуности класичне исказне логике. Отуда, $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)$ и $D_{=0}(\alpha, \beta) \in T_0 \subseteq T^*$, па закључујемо да је

$$d([\alpha], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} = 0.$$

Сада, претпоставимо да је $d([\alpha], [\beta]) = 0$ тј. $\inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} = 0$, тада $D_{=0}(\alpha, \beta) \in T^*$. Како је T^* максимално непротивречан из услова (3в), при конструкцији скупа T^*, налазимо да $\alpha \leftrightarrow \beta \in T^*$, тј. $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)$. Из $\mathrm{Con}_C(T) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ налазимо да за сваки свет $w \in W$, $w \models \alpha$ акко $w \models \beta$. Дакле, $[\alpha] = [\beta]$.

Остатак доказа је аналоган доказу теореме 3.1.4. $\square$

3.3 Исказна логика L_{FAM}

У поглављу 1.4 дефинисана је функција растојања (метрика) која дели неке особине са условним вероватноћама. У овом поглављу биће разматрана рестрикција логике L_M у којој нису дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула, а модели су метрички простори са метриком која има сличне особине као и коначно адитивна вероватноћа. За даља истраживања занимљиво би било да се испита повезаност, односно неке дубље везе, логике L_{FAM} и одговарајућих вероватносних логика [27], [28], [35], [59], [60], [63] и [65].

3.3.1 Синтакса и семантика

Нека је $\mathbb{Q}_0^+ \cap [0, 1]$ скуп свих рационалних бројева из интервала $[0, 1]$. Језик $\mathcal{L}_{FAM}$ је пребројиво проширење класичног исказног језика које се састоји од пребројивог скупа исказних слова $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$, класичних везника $\neg$ и $\wedge$ и листе бинарних метричких оператора $D_{\geqslant s}$ за сваки $s \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0, 1]$. Скупове For_C и For као и њихове елементе дефинишемо и означавамо као код логике L_{PM}, а разлика је у томе што узимамо у обзир само основне метричке формуле облика $D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$, $s \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0, 1]$.

Приметимо да није дозвољено мешање класичних исказних и метричких формула, нити је дозвољена итерација метричких оператора. На пример, $D_{\geqslant 0.4}(\alpha, \beta) \wedge \neg D_{\geqslant 0.1}(\alpha \wedge \gamma, \neg\beta)$ је формула логике L_{FAM}, док $D_{\geqslant 0.4}(\alpha, \beta) \wedge \neg\alpha$ и $D_{\geqslant 0.7}(\alpha, D_{\geqslant 0.1}(\gamma, \beta))$ то нису.

Остале исказне везнике $\vee$, $\to$ и $\leftrightarrow$ уводимо на уобичајен начин, $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, $\alpha \to \beta =_{def} \neg\alpha \vee \beta$ и $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$, а за сваки $s \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0, 1]$ уводимо нове метричке операторе:

- $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) =_{def} D_{\geqslant 1-s}(\alpha, \neg\beta)$,
- $D_{>s}(\alpha, \beta) =_{def} \neg D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$,
- $D_{<s}(\alpha, \beta) =_{def} \neg D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$,
- $D_{=s}(\alpha, \beta) =_{def} D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \wedge D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ и
- $D_{\neq s}(\alpha, \beta) =_{def} \neg D_{=s}(\alpha, \beta)$.

Семантика логике L_{FAM} се у основи заснива на метрици $D : \mathrm{For}_C \times \mathrm{For}_C \to [0,1]$, при чему за свако $\alpha \in \mathrm{For}_C$ функција $D(\alpha, \cdot) : \mathrm{For}_C \to [0,1]$ има својство коначно-адитивне вероватноће, тј. важе особине:

(1) $\alpha \leftrightarrow \beta$ је таутологија акко $D(\alpha, \beta) = 0$;

(2) $D(\alpha, \beta) \leqslant D(\alpha, \gamma) + D(\gamma, \beta)$;

(3) $D(\alpha, \beta) = D(\beta, \alpha)$;

(4) $D(\alpha, \neg\alpha) = 1$;

(5) $D(\alpha, \beta) = 1 - D(\alpha, \neg\beta)$;

(6) $D(\alpha, \beta \vee \gamma) \leqslant D(\alpha, \beta) + D(\alpha, \gamma)$;

(7) $D(\alpha, \beta \vee \gamma) = D(\alpha, \beta) + D(\alpha, \gamma)$ ако је $D(\alpha, \beta \wedge \gamma) = 0$.

Слично као и код логика L_M и L_{PM}, семантика се заснива на метрици са поменутим особинама дефинисаној на Линденбаумовој алгебри класичне исказне теорије.

ДЕФИНИЦИЈА 3.3.1. *L_{FAM}-модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$, где је:*

- *W непразан скуп објеката које називамо световима и $v : W \times P \to \{0,1\}$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује једну двовредносну валуацију исказних слова; свака валуација $v(w, \cdot)$ се на уобичајени начин проширује на све класичне формуле;*
- *$d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0,1]$ метрика са специјалним особинама, које се односе на својства коначне-адитивности.*

Другим речима, d задовољава следеће услове:

$(D1)$ $[\alpha] = [\beta]$ ако и само ако $d([\alpha], [\beta]) = 0$;

$(D2)$ $d([\alpha], [\beta]) \leqslant d([\alpha], [\gamma]) + d([\gamma], [\beta])$;

$(D3)$ $d([\alpha],[\beta]) = d([\beta],[\alpha])$;

$(D4)$ $d([\alpha],[\beta]) = 1 - d([\alpha],[\neg\beta])$;

$(D5)$ $d([\alpha],[\beta] \cup [\gamma]) \leqslant d([\alpha],[\beta]) + d([\alpha],[\gamma])$;

$(D6)$ $d([\alpha],[\beta] \cup [\gamma]) = d([\alpha],[\beta]) + d([\alpha],[\gamma])$, за све формуле α, β и γ такве да је $d([\alpha],[\beta] \cap [\gamma]) = 0$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.3.2. *Релација задовољења испуњава следеће услове за сваки L_{FAM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$:*

- *ако $\alpha \in \mathrm{For}_C$, $\mathbf{M} \models \alpha$ акко за сваки свет $w \in W$, $v(w,\alpha) = 1$,*
- *ако $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$, $\mathbf{M} \models D_{\geqslant s}(\alpha,\beta)$ акко $d([\alpha],[\beta]) \geqslant s$,*
- *ако $A \in \mathrm{For}_M$, $\mathbf{M} \models \neg A$ акко $\mathbf{M} \not\models A$,*
- *ако $A, B \in \mathrm{For}_M$, $\mathbf{M} \models A \wedge B$ акко $\mathbf{M} \models A$ и $\mathbf{M} \models B$.*

Задовољивост формуле, као и скупа формула дефинишемо уобичајено.

3.3.2 Аксиоматизација

Аксиоматски систем $Ax(L_{FAM})$ за логику L_{FAM} садржи следеће схеме аксиома:

$(A1)$ све For_C-инстанце класичних исказних таутологија,

$(A2)$ све For_M-инстанце класичних исказних таутологија,

(A3) $D_{\geqslant 0}(\alpha,\beta)$,

(A4) $D_{=1}(\alpha,\neg\alpha)$,

(A5) $D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \rightarrow D_{<r}(\alpha,\beta)$, $r > s$,

(A6) $D_{<s}(\alpha,\beta) \rightarrow D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$,

(A7) $D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \wedge D_{\leqslant r}(\beta,\gamma) \rightarrow D_{\leqslant \min\{1,s+r\}}(\alpha,\gamma)$,

(A8) $D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \rightarrow D_{\leqslant s}(\beta,\alpha)$,

(A9) $D_{\geqslant r}(\alpha,\beta) \wedge D_{\geqslant s}(\alpha,\gamma) \wedge D_{\leqslant 0}(\alpha,\beta\wedge\gamma) \rightarrow D_{\geqslant \min\{1,r+s\}}(\alpha,\beta\vee\gamma)$,

(A10) $D_{\leqslant r}(\alpha,\beta) \wedge D_{<s}(\alpha,\gamma) \rightarrow D_{<r+s}(\alpha,\beta\vee\gamma)$, $r + s \leqslant 1$;

и следећа правила извођења:

$(R1)$ из Φ и $\Phi \rightarrow \Psi$ закључујемо Ψ,

$(R2)$ из $\alpha \leftrightarrow \beta$ закључујемо $D_{=0}(\alpha, \beta)$,

$(R3)$ из $A \rightarrow D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)$, за сваки природан број k, закључујемо $A \rightarrow D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$.

Наведене аксиоме и правила извођења обезбеђују жељене особине функција растојања. Аксиоме које су нове у односу на аксиоматски систем $Ax(L_M)$ описују особине $(D4)$, $(D5)$ и $(D6)$, а разлика је и у томе што аксиоматски систем $Ax(L_{FAM})$ има једно бесконачно правило извођења, правило $(R3)$.

3.3.3 Сагласност и потпуност

Следећи идеје претходних поглавља, није тешко доказати сагласност и потпуност аксиоматског система $Ax(L_{FAM})$.

Теорема 3.3.1. (Теорема дедукције) Ако је T скуп формула, Φ формула и $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$, тада $T \vdash \Phi \rightarrow \Psi$, где су и Φ и Ψ или обе класичне исказне формуле или обе метричке формуле.

Теорема 3.3.2. (Теорема сагласности) Аксиоматски систем $Ax(L_{FAM})$ је сагласан у односу на L_{FAM}-моделе.

Доказ. Сагласност аксиоматског система $Ax(L_{FAM})$ се добија на основу сагласности класичне исказне логике и особина метрике која задовољава особине $(D1) - (D6)$. Наиме, показаћемо да је свака инстанца аксиома ваљана формула, тј. да аксиоме важе у сваком L_{FAM}-моделу као и да правила извођења чувају ваљаност.

Једноставно закључујемо да за сваку инстанцу класичне исказне таутологије α и сваки L_{FAM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$, $\mathbf{M} \models \alpha$. Размотримо само аксиоме које су нове у односу на аксиоматски систем $Ax(L_{PM})$.

• Аксиома $(A4)$: Нека је $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$ произвољни L_{FAM}-модел. Како је d метрика која задовољава особину $(D4)$, лако налазимо да је $d([\alpha], [\neg\alpha]) = 1$, јер је $d([\neg\alpha], [\neg\alpha]) = 0$. Дакле, $\mathbf{M} \models D_{=1}(\alpha, \neg\alpha)$.

• Аксиома $(A7)$: Претпоставимо супротно, тј. нека $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \wedge D_{\leqslant r}(\beta, \gamma)$ и $\mathbf{M} \not\models D_{\leqslant \min\{1, s+r\}}(\alpha, \gamma)$, за неки L_{FAM}-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$. Тада $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, $\mathbf{M} \models D_{\leqslant r}(\beta, \gamma)$ и $\mathbf{M} \models D_{>\min\{1, s+r\}}(\alpha, \gamma)$, односно имамо да је $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s$, $d([\beta], [\gamma]) \leqslant r$ и $d([\alpha], [\gamma]) > \min\{1, s+r\}$. Прво, претпоставимо да је $r+s<1$, а како је d метрика, на основу неједнакости троугла имамо да је $d([\alpha],[\gamma]) \leqslant d([\alpha],[\beta]) + d([\beta],[\gamma]) \leqslant s+r$, што је контрадикција. Ако је $r+s \geqslant 1$ тада је $d([\alpha],[\gamma]) > 1$, што је немогуће. Дакле, $\mathbf{M} \models D_{\leqslant \min\{1,s+r\}}(\alpha,\gamma)$.

• Аксиома $(A9)$: Нека $\mathbf{M} \models D_{\geqslant r}(\alpha,\beta) \wedge D_{\geqslant s}(\alpha,\gamma) \wedge D_{\leqslant 0}(\alpha,\beta \wedge \gamma)$, за произвољни L_{FAM}-модел $\mathbf{M} = \langle W,v,d\rangle$. Тада је $d([\alpha],[\beta]) \geqslant r$, $d([\alpha],[\gamma]) \geqslant s$ и $d([\alpha],[\beta \wedge \gamma]) \leqslant 0$, односно $d([\alpha],[\beta \wedge \gamma]) = 0$ и нека је $r+s \leqslant 1$. Тада имамо да је $d([\alpha],[\beta \vee \gamma]) = d([\alpha],[\beta]) + d([\alpha],[\gamma]) \geqslant r+s$, односно $d([\alpha],[\beta \vee \gamma]) \geqslant r+s = \min\{1,r+s\}$, јер смо претпоставили да је $r+s \leqslant 1$. Сада, ако је $r+s>1$, тада имамо да је $d([\alpha],[\beta \vee \gamma]) > 1$, што је немогуће.

• Аксиома $(A10)$: Претпоставимо супротно, тј. нека $\mathbf{M} \models D_{\leqslant r}(\alpha,\beta) \wedge D_{<s}(\alpha,\gamma)$ и $\mathbf{M} \not\models D_{<r+s}(\alpha,\beta \vee \gamma)$, за неки L_{FAM}-модел $\mathbf{M} = \langle W,v,d\rangle$, где је $r+s \leqslant 1$. Тада $\mathbf{M} \models D_{\leqslant r}(\alpha,\beta)$, $\mathbf{M} \models D_{<s}(\alpha,\gamma)$ и $\mathbf{M} \models D_{\geqslant r+s}(\alpha,\beta \vee \gamma)$, односно имамо да је $d([\alpha],[\beta]) \leqslant r$, $d([\alpha],[\gamma]) < s$ и $d([\alpha],[\beta \vee \gamma]) \geqslant r+s$, где је $r+s \leqslant 1$. Како је d метрика која задовољава особину $(D5)$ имамо да је $d([\alpha],[\beta \vee \gamma]) \leqslant d([\alpha],[\beta]) + d([\alpha],[\gamma]) < r+s$, што је контрадикција са $d([\alpha],[\beta \vee \gamma]) \geqslant r+s$.

Размотримо сада правила извођења:

• Правило $(R1)$: Ово правило чува ваљаност из истог разлога као и у класичној исказној логици.

• Правило $(R2)$: Претпоставимо да је формула $\alpha \leftrightarrow \beta$ таутологија. Тада $[\alpha] = [\beta]$ важи у сваком L_{FAM}-моделу. Дакле, $D_{=0}(\alpha,\beta)$ важи у сваком L_{FAM}-моделу.

• Правило $(R3)$: Нека је $\mathbf{M} = \langle W,v,d\rangle$ произвољан L_{FAM}-модел и $\mathbf{M} \models A \to D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha,\beta)$, за сваки природан број k. Прво, ако $\mathbf{M} \models \neg A$, онда $\mathbf{M} \models A \to D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$. Сада, ако $\mathbf{M} \models A$, онда на основу претпоставке $\mathbf{M} \models D_{<s+\frac{1}{k}}(\alpha,\beta)$ за сваки природан број k. Тада је $d([\alpha],[\beta]) < s + \frac{1}{k}$ за сваки природан број k. Према Архимедовој аксиоми, $d([\alpha],[\beta]) \leqslant s$, одакле следи $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$, а самим тим и $\mathbf{M} \models A \to D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$. □

Теорема 3.3.3. Сваки непротивречан скуп формула T се може проширити до максимално непротивречног скупа формула.

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула и нека је $A_0, A_1, A_2, \ldots$ једно набрајање свих формула из For_M. Дефинишимо низ скупова T_i, $i = 0,1,2,\ldots$ на следећи начин:

(1) $T_0 = T \cup \mathrm{Con}_C(T) \cup \{D_{=0}(\alpha,\beta) : \alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)\}$, где је $\mathrm{Con}_C(T)$ скуп свих класичних последица од T ($\mathrm{Con}_C(T) \subset \mathrm{For}_C$);

За свако $i \geqslant 0$,

(2) ако је $T_i \cup \{A_i\}$ непротивречан скуп, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{A_i\}$;

(3) иначе, ако је $T_i \cup \{A_i\}$ противречан, онда:

   (а) ако је A_i облика $B \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i, B \to D_{\geqslant s+\frac{1}{k}}(\alpha, \beta)\}$, где је k природан број изабран тако да је скуп T_{i+1} непротивречан;

   (б) ако је A_i облика $D_{=0}(\alpha, \beta)$, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i, \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)\}$;

   (в) иначе, $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i\}$.

Нека је $T^* = \cup_{i=0}^{\infty} T_i$. Остатак доказа је сличан доказу теореме 3.1.3. $\square$

Следећом лемом описана су својства максимално непротивречних скупова која су нам потребна у доказу теореме потпуности. Својства $(1) - (6)$ су иста као и код леме 3.1.2, па њихове доказе изостављамо, а за својство (7) доказ наводимо.

Лема 3.3.1. Нека је T^* максимално непротивречан скуп формула дефинисан у доказу теореме 3.3.3. Нека су A и B или обе класичне или обе метричке формуле и нека су α и β класичне формуле. Тада важи:

(1) $A \in T^*$ ако и само ако $\neg A \notin T^*$.

(2) Ако је $T^* \vdash A$, онда је $A \in T^*$, тј. T^* је дедуктивно затворен скуп.

(3) $A \in T^*$ и $B \in T^*$ ако и само ако $A \wedge B \in T^*$.

(4) Ако је $A \in T^*$ и $A \to B \in T^*$, онда је $B \in T^*$.

(5) Све теореме припадају скупу T^*.

(6) $\inf\{s \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0,1] \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant r$ ако и само ако $D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*$, за сваки $r \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0,1]$.

(7) $\inf\{s \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0,1] \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} = \sup\{s \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0,1] \mid D_{\geqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\}$.

Доказ. (7) Нека је $s = \inf\{s \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0,1] \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\}$ и $t = \sup\{s \in \mathbb{Q}_0^+ \cap [0,1] \mid D_{\geqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\}$.

Прво, претпоставимо да је $s < t$. Тада за све $r' \in [0, t) \cap \mathbb{Q}_0^+$ и све $s' \in (s, 1] \cap \mathbb{Q}_0^+$ важи $D_{\geqslant r'}(\alpha, \beta) \in T^*$ и $D_{\leqslant s'}(\alpha, \beta) \in T^*$. Како је $s < r$ имамо да постоји $p \in (s, t) \cap \mathbb{Q}_0^+$ и притом важи $D_{\geqslant p}(\alpha, \beta) \in T^*$ и $D_{\leqslant p}(\alpha, \beta) \in T^*$, јер $p \in [0, t) \cap \mathbb{Q}_0^+$ и $p \in (s, 1] \cap \mathbb{Q}_0^+$. Уочимо рационалан број $p - q \in (s, p) \cap \mathbb{Q}_0^+$, тада важи да $D_{\leqslant p-q}(\alpha, \beta) \in T^*$, јер $p - q \in (s, 1] \cap \mathbb{Q}_0^+$. Из $D_{\geqslant p}(\alpha, \beta) \in T^*$

на основу дефиниције оператора имамо да $D_{\leqslant 1-p}(\alpha, \neg\beta) \in T^*$, а на основу аксиоме $(A8)$ добијамо да $D_{\leqslant 1-p}(\neg\beta, \alpha) \in T^*$. Из $D_{\leqslant p-q}(\alpha, \beta) \in T^*$ и $D_{\leqslant 1-p}(\neg\beta, \alpha) \in T^*$ на основу аксиоме $(A7)$ добијамо да $D_{\leqslant 1-p+p-q}(\neg\beta, \beta) \in T^*$, тј. $D_{\leqslant 1-q}(\neg\beta, \beta) \in T^*$, што је немогуће.

Сада, претпоставимо да је $s > t$. Тада за све $r' \in [0, t) \cap \mathbb{Q}_0^+$ и све $s' \in (s, 1] \cap \mathbb{Q}_0^+$ важи $D_{\geqslant r'}(\alpha, \beta) \in T^*$ и $D_{\leqslant s'}(\alpha, \beta) \in T^*$. Уочимо рационалан број $p \in [t, s] \cap \mathbb{Q}_0^+$. Тада $\neg D_{\geqslant p}(\alpha, \beta) \in T^*$ и $\neg D_{\leqslant p}(\alpha, \beta) \in T^*$. Из $\neg D_{\geqslant p}(\alpha, \beta) \in T^*$ добијамо да $D_{<p}(\alpha, \beta) \in T^*$, па на основу аксиоме $(A6)$ добијамо да $D_{\leqslant p}(\alpha, \beta) \in T^*$, што је контрадикција са $\neg D_{\leqslant p}(\alpha, \beta) \in T^*$.

Дакле, имамо да је $s = t$. $\square$

Теорема 3.3.4. (Теорема потпуности) Сваки непротивречан скуп формула T има L_{FAM}-модел.

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула и T^* његово максимално непротивречно проширење описано у теореми 3.3.3. Узимајући скуп T^*, дефинишемо тројку $\mathbf{M} = \langle W, v, d \rangle$, где је:

- W скуп свих класичних исказних интерпретација (валуација исказних слова) које задовољавају $\mathrm{Con}_C(T)$;
- $v : W \times P \to \{0, 1\}$ пресликавање тако да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in P$, $v(w, p) = 1$ акко $w \models p$,
- Нека је $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ дато са $d([\alpha], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\}$.

Присетимо се да је $[\alpha] = \{w \in W : w \models \alpha\}$ и $\mathcal{F} = \{[\alpha] : \alpha \in \mathrm{For}_C\}$.

Тврђење 1. $\mathbf{M}$ је L_{FAM}-модел.

Доказ тврђења 1. $(D4)$ Докажимо да је $d([\alpha], [\beta]) = 1 - d([\alpha], [\neg\beta])$. Нека је $d([\alpha], [\beta]) = r$ и прво претпоставимо да је $r = 1$. На основу особине (7) леме 3.3.1, имамо да је $1 = \sup\{s : D_{\geqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\}$. На основу особине (6) леме 3.3.1 имамо да је $D_{\geqslant 1}(\alpha, \beta) = D_{\leqslant 0}(\alpha, \neg\beta) = \neg D_{>0}(\alpha, \neg\beta)$ и $\neg D_{>0}(\alpha, \neg\beta) \in T^*$. Ако за неко $s > 0$, $D_{\geqslant s}(\alpha, \neg\beta) \in T^*$, на основу аксиоме $(A6)$ мора бити $D_{>0}(\alpha, \neg\beta) \in T^*$, што је контрадикција. То нам даје да важи $d([\alpha], [\neg\beta]) = 0$.

Сада, претпоставимо да је $\sup\{s : D_{\geqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} = r < 1$. Тада за сваки рационалан број $r' \in (r, 1]$, како је $\neg D_{\geqslant r'}(\alpha, \beta) = D_{<r'}(\alpha, \beta)$ имамо да $D_{<r'}(\alpha, \beta) \in T^*$. На основу аксиоме $(A6)$, $D_{\leqslant r'}(\alpha, \beta)$ и $D_{\geqslant 1-r'}(\alpha, \neg\beta)$ припадају скупу T^*. Са друге стране, ако постоји рационалан број $r'' \in [0, r)$ такав да $D_{\geqslant 1-r''}(\alpha, \neg\beta) \in T^*$, тада $\neg D_{>r''}(\alpha, \beta) \in T^*$, што је контрадикција. Дакле, $\sup\{s : D_{\geqslant s}(\alpha, \neg\beta) \in T^*\} = 1 - \sup\{s : D_{\geqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\}$, тј. $d([\alpha], [\neg\beta]) = 1 - d([\alpha], [\beta])$.

$(D5)$ Докажимо да је $d([\alpha],[\beta]\cup[\gamma])\leqslant d([\alpha],[\beta])+d([\alpha],[\gamma])$. Нека је

$$d([\alpha],[\beta])=\inf\{s:D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)\in T^*\}=s_1$$

и

$$d([\alpha],[\gamma])=\inf\{s:D_{\leqslant s}(\alpha,\gamma)\in T^*\}=s_2.$$

Примењујући леме 3.3.1, за све рационалне бројеве $r\geqslant s_1$ и $t>s_2$, $D_{\leqslant r}(\alpha,\beta)\in T^*$ и $D_{<t}(\alpha,\gamma)\in T^*$. Аксиома $(A10)$ и дедуктивна затвореност скупа T^* имплицирају да $D_{<r+t}(\alpha,\beta\vee\gamma)\in T^*$, тј.

$$d([\alpha],[\beta\vee\gamma])=\inf\{s:D_{\leqslant s}(\alpha,\beta\vee\gamma)\in T^*\}\leqslant r+t,$$

за све рационалне бројеве $r\geqslant s_1$ и $t>s_2$.
Дакле, $d([\alpha],[\beta]\cup[\gamma])\leqslant s_1+s_2=d([\alpha],[\beta])+d([\alpha],[\gamma])$.

$(D6)$ Доказимо да је $d([\alpha],[\beta]\cup[\gamma])=d([\alpha],[\beta])+d([\alpha],[\gamma])$, за све формуле α,β и γ такве да је $d([\alpha],[\beta]\cap[\gamma])=0$. Нека је $d([\alpha],[\beta]\cap[\gamma])=0$, $d([\alpha],[\beta])=r$ и $d([\alpha],[\gamma])=s$. Нека је $r>0$ и $s>0$. На основу добро познатих особина супремума, за сваки рационалан број $r'\in[0,r)$ и сваки рационалан број $s'\in[0,s)$, имамо да је $D_{\geqslant r'}(\alpha,\beta),D_{\geqslant s'}(\alpha,\gamma)\in T^*$. Према аксиоми $(A9)$ следи да $D_{\geqslant r'+s'}(\alpha,\beta\vee\gamma)\in T^*$. Дакле, $r+s\leqslant\sup\{t:D_{\geqslant t}(\alpha,\beta\vee\gamma)\in T^*\}$.

Ако је $r+s=1$ тада тврђење очигледно важи, па претпоставимо да је $r+s<1$. Ако је $r+s<t_0=\sup\{t:D_{\geqslant t}(\alpha,\beta\vee\gamma)\in T^*\}$, онда је за сваки рационалан број $t'\in(r+s,t_0)$, $D_{\geqslant t'}(\alpha,\beta\vee\gamma)\in T^*$. Изаберимо рационалне бројеве $r''>r$ и $s''>s$ такве да $\neg D_{\geqslant r''}(\alpha,\beta)\in T^*$, односно $D_{<r''}(\alpha,\beta)\in T^*$, $\neg D_{\geqslant s''}(\alpha,\gamma)\in T^*$, односно $D_{<s''}(\alpha,\gamma)\in T^*$ и $r''+s''=t'\leqslant 1$. Према аксиоми $(A6)$, $D_{\leqslant r''}(\alpha,\beta)\in T^*$. Према аксиоми $(A10)$ имамо да је $D_{<r''+s''}(\alpha,\beta\vee\gamma),\neg D_{\geqslant r''+s''}(\alpha,\beta\vee\gamma),\neg D_{\geqslant t'}(\alpha,\beta\vee\gamma)\in T^*$, што је контрадикција. Дакле, $d([\alpha],[\beta]\cup[\gamma])=d([\alpha],[\beta])+d([\alpha],[\gamma])$. Коначно, претпоставимо да је $r=0$ или $s=0$. У том случају се може резоновати као и пре, имајући у виду да је $r'=0$ или $s'=0$.
Дакле, $\mathbf{M}$ је L_{FAM}-модел.

Тврђење 2. За сваку формулу Φ, $\mathbf{M}\models\Phi$ акко $\Phi\in T^*$.

Доказ наведеног тврђења је сличан доказу тврђења 1. теореме 3.1.2, па га из тог разлога изостављамо. $\square$

На сличан начин, као у одељку 3.2.1. можемо показати да теорема компактности не важи, па стога не постоји коначна аксиоматизација за коју важи сагласност и јака потпуност.

3.4 Исказне логике $L_{\widetilde{PM}}$ и $L_{\widetilde{M}}$

У овом поглављу анализираћемо логике $L_{\widetilde{PM}}$ и $L_{\widetilde{M}}$ у којима су дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула. На тај начин логике $L_{\widetilde{PM}}$ и $L_{\widetilde{M}}$ представљају одговарајуће екстензије логика L_{PM} и L_M.

3.4.1 Синтакса и семантика

Језици $\mathcal{L}_{\widetilde{PM}}$ и $\mathcal{L}_{\widetilde{M}}$ логика $L_{\widetilde{PM}}$ и $L_{\widetilde{M}}$ су исти као и језици $\mathcal{L}_{PM}$ и $\mathcal{L}_M$ логика L_{PM} и L_M, с тим што су при грађењу скупова формула $\mathrm{For}_{\widetilde{PM}}$ и $\mathrm{For}_{\widetilde{M}}$ дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула. Како су језици $L_{\widetilde{PM}}$ и $L_{\widetilde{M}}$ исти, ради једноставнијег записивања користићемо ознаку $L_{\widetilde{M}}$, осим у случајевима када је неопходно истаћи разлику.

Скуп формула $\mathrm{For}_{\widetilde{M}}$ је најмањи скуп који садржи исказна слова и затворен је за следећа правила: ако су α и β формуле, тада су и $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$ и $D_{\geqslant s}(\alpha,\beta)$ формуле за свако $s \in \mathbb{Q}_0^+$. Примери формула логике $L_{\widetilde{M}}$ су $D_{\leqslant 3.6}(\alpha,\beta) \wedge \alpha$ и $D_{\geqslant 0.7}(\neg\beta, D_{\leqslant 0.1}(\gamma,\beta))$. Остале исказне везнике $\vee$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ уводимо на уобичајен начин, $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, $\alpha \rightarrow \beta =_{def} \neg\alpha \vee \beta$ и $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, а за сваки ненегативан рационалан број s уводимо нове метричке операторе:

- $D_{>s}(\alpha,\beta) =_{def} \neg D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$,
- $D_{<s}(\alpha,\beta) =_{def} \neg D_{\geqslant s}(\alpha,\beta)$,
- $D_{=s}(\alpha,\beta) =_{def} D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \wedge D_{\geqslant s}(\alpha,\beta)$ и
- $D_{\neq s}(\alpha,\beta) =_{def} \neg D_{=s}(\alpha,\beta)$.

Дефиниција 3.4.1. *$L_{\widetilde{M}}$-модел ($L_{\widetilde{PM}}$-модел) је структура $\mathbf{M} = \langle W, v, Met\rangle$ ($\mathbf{M} = \langle W, v, PMet\rangle$), где је:*

- *W непразан скуп објеката које називамо световима,*
- *$v : W \times P \rightarrow \{0,1\}$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује једну двовредносну валуацију исказних слова,*
- *Met ($PMet$) пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује један метрички (псеудометрички) простор $\langle W(w), d(w)\rangle$ тако да:*

– $W(w)$ *је подскуп скупа свих светова* W,

– $d(w) : \mathcal{F}(w) \times \mathcal{F}(w) \to [0, +\infty)$ *је метрика (псеудометрика), где је* $\mathcal{F}(w)$ *алгебра подскупова* $[\alpha]_w \subseteq W(w)$, *за свако* α.

Дефиниција 3.4.2. *За сваки* $L_{\widetilde{M}}$*-модел* $\mathbf{M}$, *релација задовољења испуњава следеће услове:*

- *ако је* φ *исказно слово,* $\mathbf{M}, w \models \varphi$ *акко* $v(w, \varphi) = 1$,
- *ако* $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_{\widetilde{M}}$, $\mathbf{M}, w \models D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$ *акко*

$$d(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \alpha\}, \{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \beta\}) \leqslant s,$$

- *ако* $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_{\widetilde{M}}$, $\mathbf{M}, w \models D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$ *акко*

$$d(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \alpha\}, \{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \beta\}) \geqslant s,$$

- *ако* $\alpha \in \mathrm{For}_{\widetilde{M}}$, $\mathbf{M}, w \models \neg\alpha$ *акко* $\mathbf{M}, w \not\models \alpha$,
- *ако* $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_{\widetilde{M}}$, $\mathbf{M}, w \models \alpha \wedge \beta$ *акко* $\mathbf{M}, w \models \alpha$ *и* $\mathbf{M}, w \models \beta$.

Формула φ *је задовољива у* $L_{\widetilde{M}}$*-моделу* $\mathbf{M}$ *ако постоји свет* w *такав да* $\mathbf{M}, w \models \varphi$. *Формула* φ *је ваљана ако за сваки* $L_{\widetilde{M}}$*-модел* $\mathbf{M}$ *и сваки његов свет* w, $\mathbf{M}, w \models \varphi$.

У даљем излагању бавићемо се само мерљивим моделима, односно моделима у којима су сви скупови светова дефинабилни формулама мерљиви. За модел $\mathbf{M}$ рећи ћемо да је мерљив ако је за сваки свет w тог модела и сваку формулу α испуњено $[\alpha]_w = \{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \alpha\} \in \mathcal{F}(w)$.

3.4.2 Аксиоматизација

Аксиоматски систем $Ax(L_{\widetilde{M}})$ за логику $L_{\widetilde{M}}$ је сличан аксиоматском систему $Ax(L_M)$, а разлика је минимална и огледа се у томе што у овом аксиоматском систему не морамо водити рачуна да ли су формуле класичне или метричке, тј. уместо аксиома

$(A1)$ све For_C-инстанце класичних исказних таутологија,

$(A2)$ све For_M-инстанце класичних исказних таутологија,

система $Ax(L_M)$ узимамо аксиому

$(A1')$ све $\mathrm{For}_{\widetilde{M}}$-инстанце класичних исказних таутологија.

Правила извођења су слична као и правила извођења логике L_M, с тим што се наведене напомене за прве две аксиоме односе и на прво правило извођења. Појмови теореме и доказа у оквиру ове логике дефинишу се исто као у L_M, а једна од разлика је да се правило извођења

2. из $\alpha \leftrightarrow \beta$ закључујемо $D_{=0}(\alpha, \beta)$,

може применити само на теореме.

Скуп формула T је непротивречан (конзистентан) ако постоји бар једна формула из $\mathrm{For}_{\widetilde{M}}$ која није доказива из T; у супротном скуп формула T је противречан (неконзистентан) скуп. Непротивречан скуп формула T је максимално непротивречан ако за сваку формулу α, или $\alpha \in T$ или $\neg\alpha \in T$.

3.4.3 Сагласност и потпуност

Теореме дедукције и сагласности аксиоматског система $Ax(L_{\widetilde{M}})$ у односу на $L_{\widetilde{M}}$-модел доказују се на сличан начин као и поменуте теореме аксиоматског система $Ax(L_M)$. Такође, на сличан начин може се показати да се сваки непротивречан скуп $L_{\widetilde{M}}$-формула може проширити до максимално непротивречног скупа. Затим, на сличан начин као у одељку 3.1.3. користимо идеју да од максимално непротивречних проширења неког непротивречног скупа формула T изградимо модел $\mathbf{M} = \langle W, v, Met\rangle$ у коме важе све формуле скупа T.
Нека је структура $\mathbf{M} = \langle W, v, Met\rangle$ дефинисана на следећи начин:

- W је скуп свих максимално непротивречних проширења теорије T;
- $v : W \times P \to \{0,1\}$ је пресликавање тако да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in P$, $v(w,p) = 1$ акко $p \in w$;
- За свако $w \in W$, $Met(w) = \langle W(w), d(w)\rangle$ је метрички простор, где је:
  - $W(w) = W$
  - $\mathcal{F}(w)$ алгебра подскупова облика $[\alpha]_w = \{w' \in W : \mathbf{M}, w' \models \alpha\}$, за сваку формулу α и
  - нека је $d(w) : \mathcal{F}(w) \times \mathcal{F}(w) \to [0, +\infty)$ дато са $d(w)([\alpha], [\beta]) = \inf\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in w\}$.

Да би структура $\mathbf{M} = \langle W, v, Met\rangle$ била $L_{\widetilde{M}}$-модел потребно је показати да за сваки $w \in W$ важе особине:

- $d(w)([\alpha],[\beta]) \geqslant 0$;
- $[\alpha]=[\beta]$ акко $d(w)([\alpha],[\beta])=0$;
- $d(w)([\alpha],[\beta]) \leqslant d(w)([\alpha],[\gamma])+d(w)([\gamma],[\beta])$;
- $d(w)([\alpha],[\beta])=d(w)([\beta],[\alpha])$,

за све формуле α, β и γ. Доказ се спроводи аналогно као код теорема 3.1.4 и 3.2.4.
Идукцијом по сложености формуле може се показати да

Теорема 3.4.1. (Теорема потпуности) Сваки непротивречан скуп $L_{\widetilde{M}}$-формула T има $L_{\widetilde{M}}$-модел.

важи, док компактност очигледно не важи. У следећим поглављима биће описане логике $L_M^{FR(n)}$ и $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$ које су рестрикције логика L_M и $L_{\widetilde{M}}$, тако да из њихове јаке потпуности следи компактност.

3.5 Исказна логика $L_M^{FR(n)}$

Претходно посматране логике, било да се ради о логикама у којима су дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула или не, имале су заједничку карактеристику у смислу бесконачне аксиоматизације. Наравно, ни за једну претходно посматрану логику са бинарним метрички операторима не важи теорема компактности. У овом поглављу разматраћемо рестрикцију логике L_M у којој су дозвољена само растојања са коначним унапред фиксираним рангом, што за последицу има важење теореме компактности и могућност навођења коначне аксиоматизације за коју важи јака потпуност. Слична идеја реализована је при разматрању вероватносних логика у којој су дозвољене само вероватноће са коначним унапред фиксираним рангом [59], [60] и [62].

3.5.1 Синтакса и семантика

Нека је $n>0$ природан број и нека је $\mathrm{Range} \subseteq [0,n]$ коначан скуп такав да $\{0,n\} \subseteq \mathrm{Range}$, на пример скуп Range може бити скуп $\{0,1,2,\ldots,n-1,n\}$. Језик $\mathcal{L}_M^{FR(n)}$ логике $L_M^{FR(n)}$ је проширење класичног исказног језика које се састоји од пребројивог скупа исказних слова $P=\{p_1,p_2,\ldots\}$, класичних везника $\neg$ и $\wedge$ и две листе бинарних метричких оператора $D_{\leqslant s}$ и $D_{\geqslant s}$ за сваки

$s \in \mathrm{Range}$. Ако је $s \in [0, n)$, означимо са $s^+ = \min\{r \in \mathrm{Range} : s < r\}$, а ако је $s \in (0, n]$, означимо са $s^- = \max\{r \in \mathrm{Range} : s > r\}$. На даље ћемо користити дефиниције које су дате у одељку 3.1.1. уз једино ограничење да је кодомен растојања у моделима управо скуп Range, односно да се у дефиницији модела $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$ захтева да за растојање d важи $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathrm{Range}$. Приметимо да није дозвољено мешање класичних исказних и метричких формула, нити је дозвољена итерација метричких оператора. На пример, $D_{\leqslant 4}(\alpha, \beta) \wedge \neg D_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \gamma, \neg\beta)$ је формула логике $\mathcal{L}_M^{FR(n)}$, док $D_{\leqslant 4}(\alpha, \beta) \wedge \neg\alpha$ и $D_{\geqslant 7}(\alpha, D_{\leqslant 1}(\gamma, \beta))$ то нису. За сваки избор природног броја n добијамо различите логике, тако да се у овом поглављу анализира цела једна класа логика.

3.5.2 Аксиоматизација

Аксиоматски систем $Ax(L_M^{FR(n)})$ за логику $L_M^{FR(n)}$ садржи следеће схеме аксиома:

$(A1)$ све For_C-инстанце класичних исказних таутологија,

$(A2)$ све For_M-инстанце класичних исказних таутологија,

$(A3)$ $D_{\geqslant 0}(\alpha, \beta)$,

$(A4)$ $D_{\leqslant n}(\alpha, \beta)$,

$(A5)$ $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \to D_{<r}(\alpha, \beta), r > s$,

$(A6)$ $D_{\geqslant s}(\alpha, \beta) \to D_{>r}(\alpha, \beta), r < s$,

$(A7)$ $D_{<s}(\alpha, \beta) \to D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$,

$(A8)$ $D_{>s}(\alpha, \beta) \to D_{\geqslant s}(\alpha, \beta)$,

$(A9)$ $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \wedge D_{\leqslant r}(\beta, \gamma) \to D_{\leqslant \min\{n, s+r\}}(\alpha, \gamma)$,

$(A10)$ $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \to D_{\leqslant s}(\beta, \alpha)$,

$(A11)$ $D_{<s}(\alpha, \beta) \to D_{\leqslant s^-}(\alpha, \beta)$,

$(A12)$ $D_{>s}(\alpha, \beta) \to D_{\geqslant s^+}(\alpha, \beta)$;

и следећа правила извођења:

$(R1)$ из Φ и $\Phi \to \Psi$ закључујемо Ψ,

$(R2)$ из $\alpha \leftrightarrow \beta$ закључујемо $D_{=0}(\alpha, \beta)$.

Аксиоматски систем $Ax(L_M^{FR(n)})$ садржи све аксиоме као и аксиоматски систем $Ax(L_M)$, као и правила извођења $(R1)$ и $(R2)$ и још 5 нових аксиома. Нове аксиоме су уведене да опишу ограничену метрику и због одсуства бесконачних правила извођења. Приметимо да је посматрани аксиоматски систем $Ax(L_M^{FR(n)})$ коначан, а низови формула у доказима могу бити само коначни.

Дефиниција 3.5.1. *Формула Φ је доказива (синтаксна последица) из скупа формула T (у ознаци $T \vdash \Phi$) ако постоји коначан низ формула $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi$ такав да је свака формула Φ_i аксиома или припада скупу T или се може добити из претходних формула низа применом неког од правила извођења.*

Формула Φ је теорема ($\vdash \Phi$) ако је доказива из празног скупа формула, а доказ за Φ је одговарајући низ формула.

Скуп формула T је непротивречан (конзистентан) ако постоји бар једна формула из For_C и бар једна формула из For_M која није доказива из T; у супротном скуп формула T је противречан (неконзистентан) скуп.

Непротивречан скуп формула T је максимално непротивречан ако за сваку формулу $A \in \mathrm{For}_M$, или $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Скуп формула T је дедуктивно затворен ако за сваку формулу $\Phi \in \mathrm{For}$ важи: ако $T \vdash \Phi$, тада $\Phi \in T$.

Следећом лемом се показује да нове аксиоме гарантују да је кодомен растојања управо скуп Range.

Лема 3.5.1. Нека су $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$ и $r \in \mathrm{Range}$. Тада:

(1) $\vdash D_{>r}(\alpha, \beta) \leftrightarrow D_{\geqslant r^+}(\alpha, \beta)$,

(2) $\vdash D_{\leqslant r^-}(\alpha, \beta) \leftrightarrow D_{<r}(\alpha, \beta)$,

(3) $\vdash \bigvee_{s \in \mathrm{Range}} D_{=s}(\alpha, \beta)$,

(4) $\vdash \veebar_{s \in \mathrm{Range}} D_{=s}(\alpha, \beta)$.

Доказ. Тврђења (1) и (2) следе из аксиома $(A5)$, $(A6)$, $(A11)$ и $(A12)$.

(3) На основу једнакости $\neg D_{<0}(\alpha, \beta) = D_{\geqslant 0}(\alpha, \beta)$ добијамо да је

$$\vdash (D_{\leqslant 0}(\alpha, \beta) \vee \neg D_{\leqslant 0}(\alpha, \beta)) \wedge \neg D_{<0}(\alpha, \beta),$$

односно важи да

$$\vdash (D_{\leqslant 0}(\alpha, \beta) \wedge \neg D_{<0}(\alpha, \beta)) \vee (\neg D_{\leqslant 0}(\alpha, \beta) \wedge \neg D_{<0}(\alpha, \beta)),$$

а на основу једнакости $D_{\leqslant 0}(\alpha,\beta)\wedge\neg D_{<0}(\alpha,\beta)=D_{=0}(\alpha,\beta)$ и $\vdash D_{>0}(\alpha,\beta)\rightarrow D_{\geqslant 0}(\alpha,\beta)$ следи да $\vdash D_{=0}(\alpha,\beta)\vee D_{>0}(\alpha,\beta)$.
На основу чињенице да је

$$\vdash D_{>0}(\alpha,\beta)\leftrightarrow((D_{\leqslant 0^+}(\alpha,\beta)\vee\neg D_{\leqslant 0^+}(\alpha,\beta))\wedge D_{>0}(\alpha,\beta))$$

и

$$\vdash (D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)\rightarrow D_{\leqslant s^+}(\alpha,\beta))\leftrightarrow(D_{>s^+}(\alpha,\beta)\rightarrow D_{>s}(\alpha,\beta))$$

добијамо да

$$\vdash D_{>0}(\alpha,\beta)\leftrightarrow((D_{\leqslant 0^+}(\alpha,\beta)\wedge\neg D_{<0^+}(\alpha,\beta))\vee(D_{>0^+}(\alpha,\beta)\wedge D_{>0}(\alpha,\beta))),$$

тј. $\vdash D_{>0}(\alpha,\beta)\leftrightarrow(D_{=0^+}(\alpha,\beta)\vee D_{>0^+}(\alpha,\beta))$, па је $\vdash D_{=0}(\alpha,\beta)\vee D_{=0^+}(\alpha,\beta)\vee D_{>0^+}(\alpha,\beta)$. Аналогним поступком, лако се добија да је

$$\vdash\left(\bigvee_{s\in\mathrm{Range}} D_{=s}(\alpha,\beta)\right)\vee D_{>n}(\alpha,\beta).$$

На крају, како је $\vdash\neg D_{>n}(\alpha,\beta)$ имамо да $\vdash\bigvee_{s\in\mathrm{Range}} D_{=s}(\alpha,\beta)$.

(4) На основу једнакости $D_{=r}(\alpha,\beta)=D_{\leqslant r}(\alpha,\beta)\wedge\neg D_{<r}(\alpha,\beta)$ и аксиома $(A5)$ и $(A6)$ лако добијамо да $\vdash D_{=r}(\alpha,\beta)\rightarrow\neg D_{=s}(\alpha,\beta)$, за $r\neq s$ па је $\vdash \veebar_{s\in\mathrm{Range}} D_{=s}(\alpha,\beta)$. □

3.5.3 Сагласност и потпуност

Докази теорема сагласности и дедукције се у извесној мери разликују од доказа поменутих теорема аксиоматског система $Ax(L_M)$. Следећи њихове идеје није тешко извести доказе теорема за аксиоматски систем $Ax(L_M^{FR(n)})$.

Теорема 3.5.1. (Теорема сагласности) Аксиоматски систем $Ax(L_M^{FR(n)})$ је сагласан у односу на $L_M^{FR(n)}$-моделе.

Доказ. Сагласност аксиоматског система $Ax(L_M^{FR(n)})$ се добија на основу сагласности класичне исказне логике и особина ограничене метрике. Размотримо само аксиоме које су нове у односу на аксиоматске системе претходно разматраних логика.

• Аксиома $(A9)$: Нека $\mathbf{M}\models D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)\wedge D_{\leqslant r}(\beta,\gamma)$, за произвољни $L_M^{FR(n)}$-модел $\mathbf{M}=\langle W,v,d\rangle$. Тада, $\mathbf{M}\models D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$ и $\mathbf{M}\models D_{\leqslant r}(\beta,\gamma)$, односно $d([\alpha],[\beta])\leqslant s$ и $d([\beta],[\gamma])\leqslant r$. Како је d метрика, на основу неједнакости троугла имамо да је $d([\alpha],[\gamma])\leqslant d([\alpha],[\beta])+d([\beta],[\gamma])\leqslant s+r$, а како је d метрика чији је кодомен скуп Range, тада можемо закључити да је $d([\alpha],[\gamma]) \leqslant \min\{s+r,n\}$, тј. $\mathbf{M} \models D_{\leqslant \min\{s+r,n\}}(\alpha,\gamma)$.

• Аксиома $(A10)$: Нека $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\alpha,\beta)$, за произвољни $L_M^{FR(n)}$-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$. Тада је $d([\alpha],[\beta]) \leqslant s$, а како је d метрика, на основу особине симетричности имамо да је $d([\beta],[\alpha]) \leqslant s$, тј. $\mathbf{M} \models D_{\leqslant s}(\beta,\alpha)$.

• Аксиома $(A11)$: Претпоставимо супротно, тј. постоји $L_M^{FR(n)}$-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$ у коме не важи $D_{<s}(\alpha,\beta) \to D_{\leqslant s^-}(\alpha,\beta)$. Тада $\mathbf{M} \models D_{<s}(\alpha,\beta)$ и $\mathbf{M} \not\models D_{\leqslant s^-}(\alpha,\beta)$, тј. $\mathbf{M} \models D_{>s^-}(\alpha,\beta)$. Тада за $\alpha,\beta \in \mathrm{For}_C$ имамо да је $d([\alpha],[\beta]) < s$ и $d([\alpha],[\beta]) > s^-$. Нека је $d([\alpha],[\beta]) = t$, где је $t \in \mathrm{Range}$, па је $s^- < t < s$. Како је $s^- = \max\{r \in \mathrm{Range} : r < s\}$, а $t \in \{r \in \mathrm{Range} : r < s\}$ добијамо да је $s^- \geqslant t$, што је контрадикција. Дакле, формула $D_{<s}(\alpha,\beta) \to D_{\leqslant s^-}(\alpha,\beta)$ јесте ваљана.

• Аксиома $(A12)$: Претпоставимо супротно, тј. постоји $L_M^{FR(n)}$-модел $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$ у коме не важи $D_{>s}(\alpha,\beta) \to D_{\geqslant s^+}(\alpha,\beta)$. Тада $\mathbf{M} \models D_{>s}(\alpha,\beta)$ и $\mathbf{M} \not\models D_{\geqslant s^+}(\alpha,\beta)$, тј. $\mathbf{M} \models D_{<s^+}(\alpha,\beta)$. Тада за $\alpha,\beta \in \mathrm{For}_C$ имамо да је $d([\alpha],[\beta]) > s$ и $d([\alpha],[\beta]) < s^+$. Нека је $d([\alpha],[\beta]) = t$, где је $t \in \mathrm{Range}$, па је $s^+ > t > s$. Како је $s^+ = \min\{r \in \mathrm{Range} : r > s\}$, а $t \in \{r \in \mathrm{Range} : r > s\}$ добијамо да је $s^+ \leqslant t$, што је контрадикција. Дакле, формула $D_{>s}(\alpha,\beta) \to D_{\geqslant s^+}(\alpha,\beta)$ јесте ваљана.

Размотримо сада правила извођења:

• Правило $(R1)$: Ово правило чува ваљаност из истог разлога као и у класичној исказној логици.

• Правило $(R2)$: Претпоставимо да је формула $\alpha \leftrightarrow \beta$ таутологија. Тада $[\alpha] = [\beta]$ важи у сваком $L_M^{FR(n)}$-моделу. Дакле, $D_{=0}(\alpha,\beta)$ важи у $L_M^{FR(n)}$-моделу. □

Теорема 3.5.2. (Теорема дедукције) Ако је T скуп формула, Φ формула и $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$, тада $T \vdash \Phi \to \Psi$, где су и Φ и Ψ или обе класичне исказне формуле или обе метричке формуле.

Доказ. Доказ изводимо коришћењем трансфинитне индукције по дужини доказа за Ψ из скупа $T \cup \{\Phi\}$. Ако је дужина доказа 1, имамо следећа три случаја:

(1) Ψ је аксиома. На основу аксиома $(A1)$ и $(A2)$ имамо да је $\vdash \Psi \to (\Phi \to \Psi)$, а како је $\vdash \Psi$, следи да је $\vdash \Phi \to \Psi$. Дакле, $T \vdash \Phi \to \Psi$.

(2) $\Psi \in T$. Слично као и у претходном случају, имамо да $T \vdash \Psi$ и $T \vdash \Psi \to (\Phi \to \Psi)$, па је $T \vdash \Phi \to \Psi$.

(3) $\Psi = \Phi$. На основу аксиома $(A1)$ и $(A2)$ имамо да је $\vdash \Phi \to \Psi$. Дакле, $T \vdash \Phi \to \Psi$.

Претпоставимо да $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ и да теорема важи за све формуле доказиве из $T \cup \{\Phi\}$, а чија је дужина доказа мања од дужине доказа формуле Ψ из $T \cup \{\Phi\}$. Ако је Ψ аксиома или $\Psi \in T$ или $\Psi = \Phi$, показује се да $T \vdash \Phi \to \Psi$, слично као и у случајевима $(1) - (3)$. Размотримо случајеве када је Ψ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом неког од правила извођења.

Ако је Ψ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила $(R1)$ на формуле Θ и $\Theta \to \Psi$, тада према индуктивној претпоставци имамо да $T \vdash \Phi \to \Theta$ и $T \vdash \Phi \to (\Theta \to \Psi)$. На основу аксиома $(A1)$ и $(A2)$ имамо да је

$$\vdash (\Phi \to (\Theta \to \Psi)) \to ((\Phi \to \Theta) \to (\Phi \to \Psi)),$$

па двоструком применом правила извођења $(R1)$ добија се да $T \vdash \Phi \to \Psi$.

Претпоставимо да је $\Psi = D_{=0}(\alpha, \beta)$ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила $(R2)$ и да $\Phi \in \mathrm{For}_M$. Тада:

$T \cup \{\Phi\} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

Како $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{For}_C$ и $\Phi \in \mathrm{For}_M$, Φ не утиче на доказ за $\alpha \leftrightarrow \beta$ из $T \cup \{\Phi\}$, па имамо:

$T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$

$T \vdash D_{=0}(\alpha, \beta)$, на основу правила извођења $(R2)$

$T \vdash D_{=0}(\alpha, \beta) \to (\Phi \to D_{=0}(\alpha, \beta))$, на основу аксиоме $(A2)$, јер је формула $p \to (q \to p)$ таутологија,

$T \vdash \Phi \to D_{=0}(\alpha, \beta)$, на основу правила извођења $(R1)$

$T \vdash \Phi \to \Psi$. □

Као што је познато, један од битнијих корака до доказа теореме потпуности јесте конструкција максимално непротивречног скупа, који је проширење неког непротивречног скупа.

Теорема 3.5.3. Сваки непротивречан скуп формула T се може проширити до максимално непротивречног скупа формула.

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула и нека је $A_0, A_1, A_2, \ldots$ једно набрајање свих формула из For_M. Дефинишимо низ скупова T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ на следећи начин:

(1) $T_0 = T \cup \mathrm{Con}_C(T) \cup \{D_{=0}(\alpha, \beta) : \alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)\}$, где је $\mathrm{Con}_C(T)$ скуп свих класичних последица од T ($\mathrm{Con}_C(T) \subset \mathrm{For}_C$);

За свако $i \geqslant 0$,

(2) ако је $T_i \cup \{A_i\}$ непротивречан скуп, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{A_i\}$;

(3) иначе, ако је $T_i \cup \{A_i\}$ противречан, онда:

(а) ако је A_i облика $D_{=0}(\alpha, \beta)$, тада $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i, \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)\}$;

(б) иначе, $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i\}$.

Нека је $T^* = \cup_{i=0}^{\infty} T_i$.

Тврђење 1. T_i је непротивречан скуп формула за свако $i \geqslant 0$.

Доказ шрвђења 1. Скупови добијени у корацима (1) и (2) су очигледно непротивречни.

Размотимо корак (3а).

Претпоставимо да је $T_i \cup \{\neg A_i, \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)\} \vdash \perp$, тј. $T_i \cup \{\neg A_i\} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Како $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{For}_C$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ припада Con_C, па је стога $D_{=0}(\alpha, \beta) \in T_0$, што је контрадикција са непротивречношћу скупа T_i.

Остатак доказа је аналоган доказу теореме 3.1.3. □

У следећој леми садржана су нека очигледна својства максимално непротивречних скупова која су нам потребна при доказивању теореме потпуности.

Лема 3.5.2. Нека је T^* максимално непротивречан скуп формула дефинисан у доказу теореме 3.5.3. Нека су A и B или обе класичне или обе метричке формуле и нека су α и β класичне формуле. Тада важи:

(1) $A \in T^*$ ако и само ако $\neg A \notin T^*$.

(2) Ако је $T^* \vdash A$, онда је $A \in T^*$, тј. T^* је дедуктивно затворен скуп.

(3) $A \in T^*$ и $B \in T^*$ ако и само ако $A \wedge B \in T^*$.

(4) Ако је $A \in T^*$ и $A \to B \in T^*$, онда је $B \in T^*$.

(5) Све теореме припадају скупу T^*.

(6) $\min\{s \in \mathrm{Range} \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant r$ ако и само ако $D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*$, за сваки $r \in \mathrm{Range}$.

(7) $\min\{s \in \mathrm{Range} \mid D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} < r$ ако и само ако $D_{<r}(\alpha, \beta) \in T^*$, за сваки $r \in \mathrm{Range}$.

Доказ. Тврђења $(1) - (5)$ се доказују на исти начин као у леми 3.1.2.
(6) Доказ је тривијалан користећи аксиому $(A5)$ и тврђење (2) ове леме.
(7) Аналогно трвђењу (6). □

Пошто је скуп Range коначан, у канонском моделу метрику можемо дефинисати користећи минимуме скупова.

Теорема 3.5.4. (Теорема потпуности) Сваки непротивречан скуп формула T има $L_M^{FR(n)}$-модел.

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула и T^* његово максимално непротивречно проширење описано у теореми 3.5.3. Узимајући скуп T^*, дефинишемо тројку $\mathbf{M} = \langle W, v, d\rangle$, где је:

- W скуп свих класичних исказних интерпретација (валуација исказних слова) које задовољавају $\mathrm{Con}_C(T)$;
- $v : W \times P \to \{0,1\}$ је пресликавање тако да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in P$, $v(w,p) = 1$ акко $w \models p$;
- Нека је $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathrm{Range}$ дато са $d([\alpha],[\beta]) = \min\{s : D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \in T^*\}$.

Присетимо се да је $[\alpha] = \{w \in W : w \models \alpha\}$ и $\mathcal{F} = \{[\alpha] : \alpha \in \mathrm{For}_C\}$.

Тврђење 1. $\mathbf{M}$ је $L_M^{FR(n)}$-модел.

Доказ тврђења 1. Проверимо да ли модел $\mathbf{M}$ задовољава услов ненегативности и услове $(D1)$, $(D2)$ и $(D3)$.

За све формуле $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_C$,

$$d([\alpha],[\beta]) = \min\{s \in \mathrm{Range} : D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \in T^*\} \geqslant 0,$$

јер је формула $D_{\geqslant 0}(\alpha,\beta)$ аксиома и $D_{\geqslant 0}(\alpha,\beta) \in T^*$ на основу услова (2) леме 3.5.2. Дакле, d испуњава услов ненегативности.

$(D1)$ Претпоставимо да је $[\alpha] = [\beta]$. Тада, за сваки свет $w \in W$, $w \models \alpha$ акко $w \models \beta$, те стога $\mathrm{Con}_C(T) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, на основу теореме потпуности класичне исказне логике. Отуда, $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)$ и $D_{=0}(\alpha,\beta) \in T_0 \subseteq T^*$, па закључујемо да је

$$d([\alpha],[\beta]) = \min\{s \in \mathrm{Range} : D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \in T^*\} = 0.$$

Сада, претпоставимо да је $d([\alpha],[\beta]) = 0$, тј. $\min\{s : D_{\leqslant s}(\alpha,\beta) \in T^*\} = 0$, тада $D_{=0}(\alpha,\beta) \in T^*$. Како је T^* максимално непротивречан, тада $\alpha \leftrightarrow \beta \in T^*$, тј. $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathrm{Con}_C(T)$. Из $\mathrm{Con}_C(T) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ налазимо да за сваки свет $w \in W$, $w \models \alpha$ акко $w \models \beta$. Дакле, $[\alpha] = [\beta]$.

$(D2)$ Нека је

$$d([\alpha],[\gamma]) = \min\{s \in \mathrm{Range} : D_{\leqslant s}(\alpha,\gamma) \in T^*\} = s_1$$

и

$$d([\gamma],[\beta]) = \min\{s \in \mathrm{Range} : D_{\leqslant s}(\gamma,\beta) \in T^*\} = s_2.$$

Нека је $s_1 + s_2 \leqslant n$. Примењујући услов (6) леме 3.5.2, за све $r \geqslant s_1$ и $t \geqslant s_2$, $r, t \in \text{Range}$, $D_{\leqslant r}(\alpha, \gamma) \in T^*$ и $D_{\leqslant t}(\gamma, \beta) \in T^*$. Аксиома $(A6)$ и услов (2) леме 3.5.2 имплицирају да $D_{\leqslant \min\{n, r+t\}}(\alpha, \beta) \in T^*$, тј.

$$d([\alpha], [\beta]) = \min\{s \in \text{Range} : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant \min\{n, r+t\},$$

за све $r, t \in \text{Range}$ и $r \geqslant s_1$, $t \geqslant s_2$.
Дакле, $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s_1 + s_2 = d([\alpha], [\gamma]) + d([\gamma], [\beta])$.
Нека је $s_1 + s_2 > n$. Примењујући услов (6) леме 3.5.2, за све $r \geqslant s_1$ и $t \geqslant s_2$, $r, t \in \text{Range}$, $D_{\leqslant r}(\alpha, \gamma) \in T^*$ и $D_{\leqslant t}(\gamma, \beta) \in T^*$. Аксиома $(A6)$ и услов (2) леме 3.5.2 имплицирају да $D_{\leqslant n}(\alpha, \beta) \in T^*$, тј.

$$d([\alpha], [\beta]) = \min\{s \in \text{Range} : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant r + t,$$

за све $r, t \in \text{Range}$ и $r \geqslant s_1$, $t \geqslant s_2$.
Дакле, и у овом случају важи $d([\alpha], [\beta]) \leqslant s_1 + s_2 = d([\alpha], [\gamma]) + d([\gamma], [\beta])$.

$(D3)$ Ако је $d([\alpha], [\beta]) = \min\{s \in \text{Range} : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} = s_0$, тада за произвољан број $r \geqslant s_0$, $r \in \text{Range}$, $D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*$, па дакле, $D_{\leqslant r}(\beta, \alpha) \in T^*$, на основу аксиоме $(A10)$, па следи да је $d([\beta], [\alpha]) = \min\{s \in \text{Range} : D_{\leqslant s}(\beta, \alpha) \in T^*\} \leqslant s_0$. Ако би постојао $t < s_0$, $t \in \text{Range}$, такав да $D_{\leqslant t}(\beta, \alpha) \in T^*$, имали бисмо $D_{\leqslant t}(\alpha, \beta) \in T^*$, што је контрадикција. Дакле, услов симетричности $d([\beta], [\alpha]) = s_0 = d([\alpha], [\beta])$ важи.

Тврђење 2. За сваку формулу Φ, $\mathbf{M} \models \Phi$ акко $\Phi \in T^*$.

Доказ тврђења 2. За свако $\alpha \in \text{For}_C$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \models \alpha \text{ акко } & w \models \alpha, \text{ за свако } w \in W \\
\text{акко } & \text{Con}_C(T) \vdash \alpha, \text{ на основу дефиниције скупа } W \\
\text{акко } & \alpha \in T_0 \\
\text{акко } & \alpha \in T^*.
\end{aligned}$$

За све $\alpha, \beta \in \text{For}_C$ и $r \in \text{Range}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \models D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \text{ акко } & d([\alpha], [\beta]) \leqslant r \\
\text{акко } & \min\{s \in: D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} \leqslant r, \text{ на основу дефиниције за } d \\
\text{акко } & D_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*, \text{ из услова (6) леме 3.5.2;} \\
\mathbf{M} \models D_{\geqslant r}(\alpha, \beta) \text{ акко } & d([\alpha], [\beta]) \geqslant r \\
\text{акко } & \text{не важи } d([\alpha], [\beta]) < r \\
\text{акко } & \text{не важи } \min\{s \in \text{Range} : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in T^*\} < r \\
\text{акко } & D_{<r}(\alpha, \beta) \notin T^*, \text{ из услова (7) леме 3.5.2} \\
\text{акко } & D_{\geqslant r}(\alpha, \beta) \in T^*.
\end{aligned}$$

За све $A, B \in \mathrm{For}_M$:

$$\mathbf{M} \models A \wedge B \text{ акко } \mathbf{M} \models A \text{ и } \mathbf{M} \models B$$
$$\text{акко } A \in T^* \text{ и } B \in T^*, \text{ на основу индуктивне претпоставке}$$
$$\text{акко } A \wedge B \in T^*, \text{ из услова (3) леме 3.5.2;}$$

$$\mathbf{M} \models \neg A \text{ акко } \mathbf{M} \not\models A$$
$$\text{акко } A \notin T^*, \text{ на основу индуктивне претпоставке}$$
$$\text{акко } \neg A \in T^*, \text{ из услова (1) леме 3.5.2.}$$

□

Коначно, на основу теореме јаке потпуности следи теорема компактности која у случајевима претходно анализираних логика није важила.

3.5.4 Компактност

Нека је $L_M^{FR(n)}$-модел и нека је T скуп формула.

Теорема 3.5.5. (Теорема компактности) Ако је сваки коначан подскуп од T $L_M^{FR(n)}$-задовољив онда је и скуп T $L_M^{FR(n)}$-задовољив.

Доказ. Нека T није $L_M^{FR(n)}$-задовољив, онда $T \vdash \bot$. Пошто је аксиоматски систем коначан, постоји коначан подскуп T' од T такав да је $T' \vdash \bot$. Супротно претпоставци, тај скуп не би био непротивречан, па ни задовољив. □

3.6 Исказна логика $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$

Исказна логика $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$ представља екстензију исказне логике $L_M^{FR(n)}$, јер су при грађењу формула дозвољене итерације метричких оператора и мешање исказних и метричких формула. Језик $\mathcal{L}_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$ логике $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$ је исти као и језик $\mathcal{L}_M^{FR(n)}$ логике $L_M^{FR(n)}$, а начин на који формирамо формуле је исти као и код логике $L_{\widetilde{M}}$. Формулације дефиниција, основних тврђења, као и њихових доказа, добијамо на сличан начин као у поглављу 3.4. Појмове који се разликују неопходно је дефинисати, као што је на пример $L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$-модел.

Дефиниција 3.6.1. *$L_{\widetilde{M}}^{FR(n)}$-модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, v, Met \rangle$, где је:*

- W *непразан скуп објеката које називамо световима,*

- $v : W \times P \to \{0, 1\}$ *пресликавање које сваком свету* $w \in W$ *додељује једну двовредносну валуацију исказних слова,*

- Met *пресликавање које сваком свету* $w \in W$ *придружује један ограничени метрички простор* $\langle W(w), d(w) \rangle$ *тако да:*

  – $W(w)$ *је подскуп скупа свих светова* W*,*

  – $d(w) : \mathcal{F}(w) \times \mathcal{F}(w) \to \mathrm{Range}$ *је ограничена метрика, где је* $\mathcal{F}(w)$ *алгебра подскупова* $[\alpha]_w \subseteq W(w)$*, за свако* α*.*

Аксиоматски систем $Ax(L_{\widetilde{M}}^{FR(n)})$ је сличан аксиоматском систему $Ax(L_M^{FR(n)})$, а разлика се огледа у томе што у овом аксиоматском систему не морамо водити рачуна да ли су формуле класичне или метричке. Као и код аксиоматског система $Ax(L_M^{FR(n)})$ и овде важи сагласност и јака потпуност, где у доказу такође користимо идеју да од максимално непротивречних проширења неког непротивречног скупа формула T изградимо модел $\mathbf{M} = \langle W, v, Met \rangle$ у коме важе све формуле скупа T. Модел $\mathbf{M} = \langle W, v, Met \rangle$ дефинишемо на следећи начин:

- W је скуп свих максимално непротивречних проширења теорије T;

- $v : W \times P \to \{0, 1\}$ је пресликавање тако да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in P$, $v(w, p) = 1$ акко $p \in w$;

- За свако $w \in W$, $Met(w) = \langle W(w), d(w) \rangle$ је метрички простор, где је:

  – $W(w) = W$

  – $\mathcal{F}(w)$ алгебра подскупова облика $[\alpha]_w = \{w' \in W : \mathbf{M}, w' \models \alpha\}$, за сваку формулу α и

  – нека је $d(w) : \mathcal{F}(w) \times \mathcal{F}(w) \to \mathrm{Range}$ дато са $d(w)([\alpha], [\beta]) = \min\{s : D_{\leqslant s}(\alpha, \beta) \in w\}$.

Аналогном аргументацијом као и код логике $Ax(L_M^{FR(n)})$ можемо закључити да важи теорема компактности.

Закључак

На почетку двадесетог века француски математичар Морис Фреше дефинисао је растојање на произвољном скупу са елементима који нису тачке у простору, тј. увео је растојање у ширем контексту од просторног, а не као што је до тада растојање посматрано и дефинисано. На основу такве дефиниције апстрактни метрички простори могу бити простори са растојањима између различитих типова објеката, као на пример тачке, скупови, функције, оператори, формуле итд. На тај начин, дефинисањем метричких простора описане су особине функције растојања и на тај начин заснована аксиоматика метричких простора која је на неки начин обележила математику двадесетог века, а појмови као што су непрекидност и конвергенција са Еуклидских простора се преносе на произвољне скупове.

У овом раду разматрана су укрштања две теорије, са једне стране математичке логике, а са друге стране метрике (функције растојања), са циљем да добијемо богатији формални систем који је подеснији за резоновање код многих реалних проблема. У првој глави дефинисани су појмови растојања (метрике) и наведени општепознати простори са растојањима у смислу Фрешеове дефиниције на произвољним скуповима чији елементи нису обавезно просторне тачке. Поред поменутих простора са растојањима наведени су и примери растојања дефинисани на скуповима исказних формула, а показано је да су поменута растојања уствари метрике. Посматрање метрика на скупу исказних формула је нов приступ који захтева и даља проучавања. Друга глава рада представља приказ логика са растојањима које у свом језику садрже унарне метричке операторе, које су уведене у радовима [40], [41], [42], [43] и [44], а важно је напоменути да су растојање у овој глави посматрана у просторном смислу. У трећој глави приказано је неколико исказних логика са бинарним метричким операторима, од којих свака логика представља потпуну и сагласну екстензију класичне исказне логике. Посматране исказне логике са бинарним метричким операторима су и међусобно у односу екстензија или рестрикција. Проучавајући и развијајући формалне системе у трећој глави јавиле су се идеје о новим, до сада не развијеним формализацијама.

Један од циљева будећег истраживања је и проучавање и развијање формалног логичког система који представља екстензију логике L_M, а чији језик садржи и симбол D^*, који за класичне исказне формуле α и β образује такозвани примитивни тежински терм $D^*(\alpha, \beta)$. Увођењем тежинских формула обика $a_1D^*(\alpha_1, \beta_1) + a_2D^*(\alpha_2, \beta_2) + \cdots + a_nD^*(\alpha_n, \beta_n) \geqslant s$ и $a_1D^*(\alpha_1, \beta_1) + a_2D^*(\alpha_2, \beta_2) + \cdots + a_nD^*(\alpha_n, \beta_n) \leqslant s$, $s \in \mathbb{Q}$, дајемо нову изражајну моћ исказној метричкој логици, где су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ класичне исказне формуле, а коефицијенти $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geqslant 1$, произвољни рационални бројеви.

Наведена екстензија исказне логике са метричким операторима није једина коју треба развијати, наиме потреба је и развијати логички систем за резоновање о растојањима за које имамо информацију да су приближно једнака некој вредности. Слично, као и код вероватносних логика тако и код логика са метричким операторима поред две листе бинарних оператора $D_{\leqslant s}$ и $D_{\geqslant s}$, разматрали би и увођење листе бинарних оператора облика $D_{\approx a}$, где би формула $D_{\approx a}(\alpha, \beta)$ имала значење „растојање између формула α и β је приближно једнако a".

Функција растојања, као што је општепознато, пару елемената простора са растојањем (метричког простора) додељује јединствени ненегативан број уз одговарајуће услове. Међутим, чињеница да том пару елемената метричког простора додељујемо јединствен број углавном не одговара реалности, већ представља једну вешту идеализацију. Тако на пример, резултат при мерењу удаљености две тачке у Еуклидском простору представља средњу вредност неколико узастопних мерења растојања, па се за овакав начин налажења растојања две тачке каже да је статистичке природе. На неки начин потребно је уопштити појам метричког простора и саме метрике, а прво уопштење дао је Карл Менгер. Менгер је 1942. године дефинисао вероватносне метричке просторе, док 1951. дефинише вероватносне метричке просторе на нов начин како би отклонио неке недостатке прве дате дефиниције. Главна идеја и мотив за увођењем вероватносних метричких простора је да се растојање посматра као вероватноћа да је растојање између две тачке ограничено неком вредношћу (бројем), израженим параметром t. Уместо фиксираног одређеног броја који за сваке две тачке метричког простора одређује њихово растојање, код вероватносних метричких простора тачкама се додељује одговарајућа функција расподеле, па можемо констатовати да на овај начин су први пут дефинисани простори са недетерминистичким растојањем.

Да бисмо дефинисали вероватносни метрички простор потребно је да знамо које услове је потребно да задовољава нека функција да би била функција расподеле.

Дефиниција. *Функцију* $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ *називамо функцијом расподеле ако испуњава следеће услове:*

(1) *из* $t_1 \leqslant t_2$ *следи да је* $f(t_1) \leqslant f(t_2)$, *за све* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

(2) $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$,

(3) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$,

(4) $\lim\limits_{x\to t^-} f(x) = f(t)$.

Као и што је очекивано назив функција расподеле потиче из теорије вероватноће, јер су особине $(1) - (4)$ карактеристичне за функцију расподеле случајних промењљивих. Фамилију функција расподеле претходно дефинисаних означимо са $\mathcal{S}$.

Дефиниција. *Вероватносни метрички простор је пар* $(X, \mathcal{F})$, *где је* X *непразан скуп, а* $\mathcal{F} : X \times X \to \mathcal{S}$ *пресликавање које уређеном пару* (x, y) *придружује функцију расподеле, у ознаци* $F_{x,y}$ *која има следеће особине:*

(V_1) $F_{x,y}(t) = 1$, *за све* $t > 0$ *ако и само ако* $x = y$,

(V_2) $F_{x,y}(0) = 0$,

(V_3) $F_{x,y}(t) = F_{y,x}(t)$,

(V_4) *из* $F_{x,y}(t_1) = 1$ *и* $F_{y,z}(t_2) = 1$ *следи да је* $F_{x,z}(t_1 + t_2) = 1$, *за све* $x, y, z \in X$ *и све* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Вредност $F_{x,y}(t)$ можемо интерпретирати као вероватноћа да је растојање између тачака x и y мања је од вредности t. Наведена интерпретација је у складу са непрекидношћу слева функције расподеле. Због (V_2) и особина $(1), (2)$ и (4) следи да је за свако $t \leqslant 0$ испуњено услов $F_{x,y}(t) = 0$, а једноставно налазимо да је услов (V_1) еквивалентан услову: $x = y$ ако и само ако је $F_{x,y} = H$, где је H функција дефинисана са

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Сваки метрички простор (X, d) можемо посматрати као један вероватносни метрички простор, јер можемо за произвољне тачке x и y скупа X дефинисати функцију расподеле са $F_{x,y}(t) = H(t - d(x, y))$.

Услов (V_4) је минимална генерализација неједнакости троугла која важи у метричким просторима и може се интерпретирати: ако је извесно да је растојање између тачака x и y мање од t_1 и ако је извесно да је растојање између тачака y и z мање од t_2, тада је извесно да је растојање између тачака x и z мање од $t_1 + t_2$. Наведени услов може бити ојачан у смислу генерализације неједнакости троугла.

Дефиниција. *Функција $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ која испуњава услове:*

$(T1)$ $T(a,1) = a$ *и* $T(0,0) = 0$,

$(T2)$ $T(a,b) = T(b,a)$,

$(T3)$ $T(c,d) \geqslant T(a,b)$ *за све* $c \geqslant a$ *и* $d \geqslant b$,

$(T4)$ $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$,

за све $a,b,c,d \in [0,1]$ *назива се* t*-норма.*

Дефиниција. *Уређена тројка $(X, \mathcal{F}, T)$, где је $(X, \mathcal{F})$ вероватносни простор, а T t-норма која испуњава Менгерову неједнакост:*

$$F_{x,y}(t_1 + t_2) \geqslant T(F_{x,z}(t_1), F_{z,y}(t_2)),$$

за све $x, y, z \in X$ и све $t_1, t_2 \geqslant 0$, назива се вероватносни Менгеров простор.

Пошто смо лако закључили да је сваки метрички простор један вероватносни метрички простор, сада није тешко закључити да је сваки метрички простор и Менгеров простор.

Пример. Сваки метрички простор је вероватносни Менгеров простор. Нека је (X, d) метрички простор и $T(a,b) = \min\{a,b\}$ непрекидна t-норма. Ако дефинишимо функцију расподеле $F_{x,y}(t) = H(t - d(x,y))$ за све вредности $x, y \in X$ и свако $t > 0$, тројка $(X, \mathcal{F}, T)$ биће један вероватносни Менгеров простор индукован метриком d.

Основне дефиниције, примери и тврђења везана за вероватносне метричке просторе могу се видети у раду [3], а циљ будућег истраживања јесте и формализација растојања дефинисаних на претходно описан начин.

Истраживања треба да буду усмерена и на развијању логике првог реда, тј. њеног проширења. Пратећи идеје вероватносних логика првог реда један од начина на који добијамо екстензију логике првог реда јесте и разматрање квантификатора облика $(Dx \geqslant s)$ и $(Dx \leqslant s)$ за $s \in \mathbb{Q}_0^+$, односно разматрањем формула облика $(Dx \geqslant s)(\alpha, \beta)$ и $(Dx \leqslant s)(\alpha, \beta)$ за свако $s \in \mathbb{Q}_0^+$, где је x променљива. Семантика би се заснивала на моделима метричких простора (X, d), где је d растојање између скупова. У моделу $\mathbf{M}$ важи формула $(Dx \geqslant s)(\alpha, \beta)$ у ознаци

$\mathbf{M}, v \models (Dx \geqslant s)(\alpha, \beta)$ акко

$$d(\{a \in X \mid \mathbf{M}, v(x := a) \models \alpha\}, \{a \in X \mid \mathbf{M}, v(x := a) \models \beta\}) \geqslant s,$$

а у моделу $\mathbf{M}$ важи формула $(Dx \leqslant s)(\alpha, \beta)$ у ознаци
$\mathbf{M}, v \models (Dx \leqslant s)(\alpha, \beta)$ акко

$$d(\{a \in X \mid \mathbf{M}, v(x := a) \models \alpha\}, \{a \in X \mid \mathbf{M}, v(x := a) \models \beta\}) \leqslant s.$$

Литература

[1] R. Alur, T. A. Henzinger, *Logics and models of real time: A survey*, In: J.W. de Bakker, C. Huizing, W.P. de Roever, G. Rozenberg (Eds.), Real-Time: Theory in Practice: REX Workshop Mook, The Netherlands, June 3-7, 1991 Proceedings, Springer Berlin Heidelberg (1992) 74–106.

[2] S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1968.

[3] N. Babačev, *Fiksne tačke preslikavanja na prostorima sa nedeterminističkim rastojanjem*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 2012.

[4] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal logic*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[5] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model theory*, Studies in logic and the foundation of mathematics 73, North-Holland, 1977.

[6] V. Ćurić, *Distance functions and their use in adaptive mathematical morphology*, Ph.D. Thesis, Uppsala University, Faculty of Science and Technology, 2014.

[7] M. de Rijke, *The Modal Logic of Inequality*, Journal of Symbolic Logic 57 (1990) 566–584.

[8] M. M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

[9] D. Doder, *Primene infinitarnih logika u verovatnosno-temporalnom rezonovanju i teoriji modela*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 2011.

[10] D. Doder, J. Grant, Z. Ognjanović, *Probabilistic logics for objects located in space and time*, Journal of Logic and Computation 23(3) (2013) 487–515.

[11] D. Doder, Z. Ognjanović, *Probabilistic Logics with Independence and Confirmation*, Studia Logica 105(5) (2017) 943–969.

[12] H. Du, N. Alechina, *Qualitative Spatial Logics for Buffered Geometries*, Journal of Artificial Intelligence Research 56 (2016) 693–745.

[13] H. Du, N. Alechina, K. Stock, M. Jackson, *The Logic of NEAR and FAR*, Spatial Information Theory - 11th International Conference, COSIT 2013, Scarborough, UK (2013) 475–494.

[14] R. Djordjević, N. Ikodinović, N. Stojanović, *A propositional metric logic with fixed finite ranges*, (na recenziji).

[15] R. Djordjević, M. Rašković, Z. Ognjanović, *Completeness Theorem for Propositional Probabilistic Models whose Measures have only Finite Ranges*, Archive for Mathematical Logic 43 (2004) 557–563.

[16] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical logic*, second ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.

[17] H. B. Enderton, *A mathematical introduction to logic*, second ed., Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, 2001.

[18] O. Fujita, *Metrics based on average distance between sets*, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 30(1) (2013) 1–19.

[19] G. Gargov, S. Passy, T. Tinchev, *Modal Environment for Boolean Speculations*, In D. Scordev, editor, *Mathematical Logic*, Plenum Press, New York, 1988.

[20] N. Glišović, M. Rašković, *Optimization for classifying the patients using the logic measures for missing data*, Scientific publications of the State University of Novi Pazar 9(1) (2017) 91–101.

[21] V. Goranko, *Completeness and Incompleteness in the Bimodal Base* $\mathcal{L}(-R, R)$, In P. Petkov, editor, *Mathematical Logic*, Plenum Press, New York (1990) 311–326.

[22] V. Goranko, S. Passy, *Using the Universal Modality*, Journal of Logic and Computation 2 (1992) 203–233.

[23] D. N. Hoover, *Probability logic*, Annals of mathematical logic 14 (1978) 287–313.

[24] G. E. Hughes, M. J. Cresswell, *Modal logic*, Methuen, 1968.

[25] G. E. Hughes, M. J. Cresswell, *A companion to modal logic*, Methuen, 1984.

[26] Н. Икодиновић, *Неке вероватносне и тополошке логике*, Докторска дисертација, Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет, 2005.

[27] N. Ikodinović, Z. Ognjanović, *A logic with coherent conditional probabilities*, Lecture Notes in Computer Science 3571 (Subseries: Lecture Notes in Artificial Intelligence) (2005) 726–736.

[28] N. Ikodinović, Z. Ognjanović, A. Perović, M. Rašković, *Hierarchies of probabilistic logics*, Int. J. Approx. Reason. 55(9) (2014) 1830–1842.

[29] N. Ikodinović, Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković, *First-order probabilistic logics and their applications*, in: Zbornik radova, subseries Logic in computer science, Matematički institut 18(26) (2015) 37–78.

[30] N. Ikodinović, M. Rašković, Z. Marković, Z. Ognjanović, *Measure Logic*, Lecture Notes in Computer Science 4724 (LNCS/LNAI) (2007) 128–138.

[31] N. Ikodinović, M. Rašković, Z. Marković, Z. Ognjanović, *Logics with Generalized Measure Operators*, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing 20(5-6) (2013) 527–555.

[32] А. Илић-Степић, *О формализацији p-адске, квалитативне и условне вероватноће*, Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Математички факултет, 2013.

[33] A. Ilić-Stepić, Z. Ognjanović, *Complex valued probability logics*, Publications de l'Institut Mathematique 95 (109) (2014) 73–86.

[34] A. Ilić-Stepić, Z. Ognjanović, N. Ikodinović, *Conditional p-adic probability logic*, International Journal of Approximate Reasoning 55(9) (2014) 1843–1865.

[35] A. Ilić-Stepić, Z. Ognjanović, N. Ikodinović, A. Perović, *A p-adic probability logic*, Mathematical Logic Quarterly 58(4-5) (2012) 263–280.

[36] R. Jansana, *Some Logics Related to von Wrights Logic of Place*, Notre Dame J. Formal Logic 35(1) (1994) 88–98.

[37] H. Kamp, *Tense Logic and the Theory of Linear Order*, Ph.D. Thesis, University of California, Los Angeles, 1968.

[38] H. J. Keisler, *Probability quantifiers*, In Model-Theoretic Logics, Chapiter XIV, J. Barwise, S. Feferman, eds. Springer (1985) 507–556.

[39] H. J. Keisler, *Model theory for infinitary logic: logic with countable conjunctions and finite quantifiers*, Studies in logic and foundation of mathematics 62, North-Holland, 1971.

[40] O. Kutz, *ε-connestions and logics of distance*, Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, University of Liverpool, 2004.

[41] O. Kutz, *Notes on Logics of Metric Spaces*, Studia Logica 85(1) (2007) 75–104.

[42] O. Kutz, H. Sturm, N.-Y. Suzuki, F. Wolter, M. Zakharyaschev, *Axiomatizing distance logics*, Journal of Applied Non-Classical Logic 12(3-4) (2002) 425–440.

[43] O. Kutz, H. Sturm, N.-Y. Suzuki, F. Wolter, M. Zakharyaschev, *Logics of metric spaces*, ACM Transactions on Computational Logic 4(2) (2003) 260–294.

[44] O. Kutz, N.-Y. Suzuki, F. Wolter, M. Zakharyaschev, *Semi-qualitative Reasoning about Distances: A Preliminary Report*, In Logics in Artificial Intelligence. Proceedings of JELIA 2000, Malaga, Spain, Berlin, Springer (2000) 37–56.

[45] S. A. Kripke, *A completness theorem in modal logic*, The Journal of Symbolic Logic 24 (1959) 1–15.

[46] S. LEE, *Reasoning about Uncertainty in Metric Spaces*, Proceedings of the 22nd Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, UAI (2006) 289–297.

[47] O. LEMON, I. PRATT, *On the incompleteness of modal logics of space: Advancing complete modal logics of place*, In Advances in Modal Logic, M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing, M. Zakharyaschev, eds. CSLI (1998) 115–132.

[48] M. LI, X. CHEN, B. MA, P. VITANYI, *The similarity metric*, IEEE Transactions on Information Theory 50(12) (2004) 3250–3264.

[49] Ж. МИЈАЈЛОВИЋ, Д. АРАНЂЕЛОВИЋ, М. РАШКОВИЋ, Р. ЂОРЂЕВИЋ, *Нестандардна анализа*, Увиверзитет у Београду, Математички факултет, Београд, 2014.

[50] M. MILOŠEVIĆ, Z. OGNJANOVIĆ, *A first–order conditional probability logic with iterations*, Publications de l'Institut Mathematique 93 (107) (2013) 19–27.

[51] A. MONTANARI, *Metric and layered temporal logic for time granularity*, Ph.D. Thesis, Interfacultary Research Institutes, Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), Amsterdam, 1996.

[52] LJ. NEDOVIĆ, *Neki tipovi rastojanja i fazi mera sa primenom u obradi slika*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, FTN, 2016.

[53] Z. OGNJANOVIĆ, *Neke verovatnosne logike i njihove primene u računarstvu*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Kragujevcu, Prirodno-matematički fakultet, 1999.

[54] Z. OGNJANOVIĆ, N. IKODINOVIĆ, *A logic with higher order conditional probabilities*, Publications de l'Institut Mathematique 82 (96) (2007) 141–154.

[55] Z. OGNJANOVIĆ, N. KRDŽAVAC, *Uvod u teorijsko računarstvo*, FON, Beograd, 2004.

[56] Z. OGNJANOVIĆ, Z. MARKOVIĆ, M. RAŠKOVIĆ, *Completeness theorem for a Logic with imprecise and conditional probabilities*, Publications de l'Institut Mathematique 78 (92) (2005) 35–49.

[57] Z. OGNJANOVIĆ, M. RAŠKOVIĆ, *A logic with higher order probabilities*, Publications de l'Institut Mathematique 60 (74) (1996) 1–4.

[58] Z. Ognjanović, M. Rašković, *Some probability logics with new types of probability operators*, Journal of Logic and Computation 9(2) (1999) 181–195.

[59] Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković, *Probability logics*, in Zbornik radova, subseries Logic in computer science, Mathematical institute 12 (20) (2009) 35–111.

[60] Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković, *Probability Logics, Probability-Based Formalization of Uncertain Reasoning*, Springer International Publishing, 2016.

[61] M. Rašković, *Completeness theorem for biprobability models*, The Journal of Symbolic Logic 51 (3) (1986) 586–590.

[62] M. Rašković, *Classical logic with some probability operators*, Publications de l'Institut Mathematique 53 (67) (1993) 1–3.

[63] M. Rašković, R. Djordjević, *Probability Quantifiers and Operators*, VESTA, Beograd, 1996.

[64] M. Rašković, R. Djordjević, N. Stojanović, *Completeness theorem for probability models with finitely many valued measure*, (na recenziji).

[65] M. Rašković, Z. Marković, Z. Ognjanović, *A logic with approximate conditional probabilities that can model default reasoning*, Int. J. Approx. Reason. 49 (1) (2008) 52–66.

[66] M. Rašković, Z. Ognjanović, Z. Marković, *A Logic with Conditional Probabilities*, 9th European conference JELIA'04 Logics in Artificial Intelligence, Lecture notes in artificial intelligence 3229 (LNCS/LNAI), Springer-Verlag (2004) 226–238.

[67] N. Rescher, J. Garson, *Topological logic*, Journal of Symbolic Logic 33 (4) (1969) 537–548.

[68] W. Rucklidge, *Efficient Visual Recognition Using the Hausdorff Distance*, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[69] V. Ristić, R. Djordjević, N. Ikodinović, *Biprobability logic with conditional expectation*, Math. Logic Quarterly 49 (2011), 400–408.

[70] H. Sahlqvist, *Completeness and Correspondence in the First and Second Order Semantics for Modal Logic*, Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 82 (1975), 110–143.

[71] N. Savić, D. Doder, Z. Ognjanović, *Logics with lower and upper probability operators*, International Journal of Approximate Reasoning 88 (2017) 148–168.

[72] K. Segerberg, *A note on the logic of elsewhere*, Theoria 46(2-3) (1980) 183–187.

[73] N. Stojanović, N. Ikodinović, R. Djordjević, *A propositional logic with binary metric operators*, Journal of Applied Logics - IFCoLog Journal of Logics and their Applications 5(8) (2018) 1605–1622.

[74] R. Turner, *Logics for artificial intelligence*, John Willey and Sons, 1984.

[75] A. Vikent'ev, *Distances and degrees of uncertainty in many-valued propositions of experts and application of these concepts in problems of pattern recognition and clustering*, Pattern Recognition and Image Analysis 24 (4) (2014) 489–501.

[76] A. Vikent'ev, M. Avilov, *New Model Distances and Uncertainty Measures for Multivalued Logic*, In: C. Dichev, G. Agre (eds) Artificial Intelligence: Methodology, Systems, and Applications, AIMSA 2016, Lecture Notes in Computer Science, Springer 9883 (2016) 89–98.

[77] G. Von Wright, *A modal logic of place*, In The Philosophy of Nicholas Rescher, E. Sosa, Ed. D. Reidel, Dordrecht (1979) 65–73.

[78] F. Wolter, M. Zakharyaschev, *Spatio-temporal representation and reasoning based on RCC-8*, In Proceedings of the 7th Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2000), Breckenridge, USA, Montreal, Canada, Morgan Kaufman (2000) 3–14.

A propositional logic with binary metric operators

Nenad Stojanović
Faculty of Science, University of Kragujevac, Serbia
nenad.s@kg.ac.rs

Nebojša Ikodinović
Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia
ikodinovic@matf.bg.ac.rs

Radosav Djordjević
Faculty of Science, University of Kragujevac, Serbia
rdjodjevic@kg.ac.rs

Abstract

The aim of this paper is to combine distance functions and Boolean propositions by developing a formalism suitable for speaking about distances between Boolean formulas. We introduce and investigate a formal language that is an extension of classical propositional language obtained by adding new binary (modal-like) operators of the form $D_{\leqslant s}$ and $D_{\geqslant s}$, $s \in \mathbb{Q}_0^+$. Our language allows making formulas such as $D_{\leqslant s}(\alpha, \beta)$ with the intended meaning 'distance between formulas α and β is less than or equal to s'. The semantics of the proposed language consists of possible worlds with a distance function defined between sets of worlds. Our main concern is a complete axiomatization that is sound and strongly complete with respect to the given semantics.

Keywords: metric operators, soundness, completeness

We thank the anonymous reviewers for their careful reading of our manuscript and their many insightful comments and suggestions.

The work presented here was partially supported by the Serbian Ministry of Education and Science (projects 174026)

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Ненад Стојановић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Логике са метричким операторима

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 24.1.2019. године,

Стојановић Ненад

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Ненад Стојановић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Логике са метричким операторима

која је одбрањена на Природно-математичком факултету

Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

$\boxed{6)}$ Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 24.1.2019. године,

Стојановић Ненад

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/