Радна заједница заједничких послова
При : 14 -01- 1987
Орг јед. 03
Број 51/2
Прилог
Вредност

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Takači B. Djurdjica

PRIBLIŽNO REŠAVANJE LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA U POLJU OPERATORA MIKUSINSKOG

Doktorska disertacija

NOVI SAD,
1987.

инв. бр. 17.707

Библиотека

SADRŽAJ

VAŽNIJE OZNAKE

$\mathbb{C}$ - *skup kompleksnih brojeva*

C - *prostor funkcija neprekidnih nad svakim intervalom* $(0,\omega),\omega > 0$.

C^{∞} - *prostor beskonačno mnogo puta diferencijabilnih funkcija*

$\mathcal{D}$ - *prostor glatkih funkcija kompaktnog nosača*

$\mathcal{D}'$ - *prostor distribucije*

δ - *Dirakova delta distribucija*

Δ -
Δ_L - } *mere aproksimacije*
Δ_C -

F_o - *potprostor od* M *koji sadrži elemente oblika* f/g *gde je* f *iz* L *i* g *iz* L_o

L - *prostor lokalno integrabilnih funkcija*

L_o - *potprostor od* L *koji sadrži funkcije* f *iz* L *takve da je* $\|f\|_T > 0$ *za svako* $T > 0$

M - *polje operatora Mikusinskog*

N - *skup prirodnih brojeva*

MD - *skup operator distribucija*

R - *skup realnih brojeva*

R^{+} - *skup realnih pozitivnih brojeva*

0. UVOD

U tezi se posmatraju linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima u polju operatora Mikusinskog M oblika.

$$(1)\qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} d_{j,k}s^{k}x^{(j)}(\lambda) = f(\lambda)$$

sa uslovima

$$(2)\qquad x(0) = \varphi_1,\dots,x^{(m)}(0) = \varphi_m$$

gde je $x(\lambda)$ tražena operatorska funkcija, $f(\lambda)$ zadata operatorska funkcija, dok su $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ zadati operatori.

Ako su $d_{j,k} = \alpha_{j,k}$, gde su $\alpha_{j,k}$ kompleksni brojevi za $j = 0,\dots,m$, $k = 0,\dots,n$, jednačina (1) odgovara parcijalnoj diferencijalnoj jednačini sa konstantnim koeficijentima oblika:

$$(3)\qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \alpha_{j,k}\frac{\partial^{j+k}x(\lambda,t)}{\partial\lambda^{j}\partial t^{k}} = f_1(\lambda,t)$$

sa uslovima

$$(4)\qquad \frac{\partial^{j+k}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{j}\partial t^{k}} = \psi_{j,k}(\lambda),\qquad j = 0,\dots,m;\ k = 0,\dots,n-1$$

gde je

$$(5)\qquad f(\lambda) = \{f_1(\lambda,t)\} + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1} s^{k-\nu-1}\alpha_{j,n-k+\nu}\psi_{j,k}(\lambda)$$

Uslovima (2) odgovaraju uslovi

(6) $$\frac{\partial^j x(0,t)}{\partial\lambda^j} = \varphi_j(t), \quad j = 0,\dots,m-1$$

Medjutim, diferencijalna jednačina (1) može da predstavlja i parcijalnu integro-diferencijalno-diferentnu jednačinu za pogodno izabrane operatore $d_{j,k}$.

S obzirom na praktičan značaj pomenutih jednačina (koriste se u tehnici, fizici, hemiji, biologiji, medicini i u drugim oblastima) važno je ne samo utvrditi egzistenciju, jedinstvenost i prirodu rešenja nego i odrediti numerički postupak pomoću koga se konstruiše približno rešenje i odredjuje ocena njegovog odstupanja od tačnog rešenja.

Kao što se vidi, parcijalnoj diferencijalnoj kao i parcijalno diferencijalno-diferentnoj jednačini sa konstantnim koeficijentima odgovara obična diferencijalna jednačina sa koeficijentima u polju M, tako da se tačno i približno rešenje u M dobijaju analogno kao kod običnih diferencijalnih jednačina sa numeričkim koeficijentima. Problematika konstrukcije približnog rešenja započeta je u radu B. Stankovića [21]. Tačno rešenje diferencijalne jednačine (1) pod uslovom da $d_{j,k} = \alpha_{j,k}$ je oblika

(7) $$x(\lambda) = b\exp(\lambda\omega), \text{ gde je } \omega = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}, \alpha > 0, \beta \leq 1$$

rešenje karakteristične jednačine, b operator koji se odredjuje iz uslova (2). Približno rešenje je konstruisano korišćenjem parcijalnih suma reda koji reprezentuje ω. Naime, približno rešenje diferencijalne jednačine (1) je ([21])

(8) $$x_n(\lambda) = b\exp(\lambda\omega_n) \text{ gde } \omega_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta} .$$

Polje operatora Mikusinskog ima veoma bogatu algebarsku strukturu što je pogodno za nalaženje nula karakterističnog polinoma. Odredjivanje brojeva α,β kao i konačan broj koeficijenata reda ω se može vršiti primenom računara ([8], [21]). Ova činjenica je veoma značajna jer pokazuje da se i elementi (približna rešenja diferencijalne jednačine) opšteg prostora kao što je M mogu dobiti primenom računara.

U radovima [8], [21], [22], [23] i [24] je ocenjena greška, sa kojom približno rešenje oblika (8) aproksimira tačno rešenje oblika (7), sa faktorom ℓ^k kao procena izraza

$$|\ell^k(x_n(\lambda) - x(\lambda))|, \quad \text{(apsolutna vrednost operatora),}$$

gde je $k \geq 0$ unapred odredjeno tako da $\ell^k x_n(\lambda)$ kao i $\ell^k x(\lambda)$ predstavljaju neprekidne funkcije.

Niz operatora $x_n(\lambda)$ datih relacijom (8) konvergira ka operatoru $x(\lambda)$ koji je dat relacijom (7) u konvergenciji tipa I. Medjutim, konvergencija tipa I nije topološka, što je svakako predstavljalo problem pri odredjivanju mere aproksimacije u pomenutim radovima. U radu [1] T. Boehme, 1976. godine, definiše topologiju tipa I′ na potprostoru F_0 prostora M koja je topološka. U radu [3], 1983. godine, je data karakterizacija konvergencije tipa I′ preko funkcionele $B_{T,\varepsilon}(x)$ za $x \in F_0$, odnosno preko funkcionele $A(x)$.

U tezi se pokazuje da tačno i približno rešenje diferencijalne jednačine (1) pripada prostoru F_0. Uvodi se funkcionela (nešto drugačije nego u radu [3]) oblika

$$(9) \qquad A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i,1/i}(x)}{e^{ie^{i^2}}(1+B_{i,1/i}(x))} \qquad \text{za } x \in F_0$$

gde je funkcionela $B_{i,1/i}(x)$ za $i = 1,2,\ldots$ definisana u [3]. Korišćenjem tako definisane funkcionele $A(x)$ pokazuje se da niz približnih rešenja $\{x_n(\lambda)\}$, gde je svaki član dat relacijom (8), konvergira ka tačnom rešenju koje je dato relacijom (7), u konvergenciji tipa I′. Na osnovu toga moguće je meru aproksimacije, sa kojom približno rešenje diferencijalne jednačine(1) aproksimira tačno, izraziti preko funkcionele $A(x)$ u prostoru F_0.

Posebno, u tezi, treba naglasiti konstrukciju mere aproksimacije u prostorima lokalno integrabilnih funkcija, L i neprekidnih funkcija, C (po t) sa kojom približno rešenje diferencijalne jednačine (1) aproksimira tačno rešenje, pod uslovom da rešenja predstavljaju funkcije iz L (odnosno C).

Konstrukcijom približnog rešenja nehomogene operatorske jednačine znatno proširujemo klasu posmatranih problema, jer čak i homogenoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini odgovara nehomogena operatorska jednačina, ako su uslovi (4) takvi da je $\varphi_{j,k}(\lambda) \neq 0$ za bar jedno j ili k. U zavisnosti od problema data su dva tipa približnog partikularnog rešenja i procenjena je mera aproksimacije u prostorima F_0, L i C.

U radu [33] data je veza izmedju operatora i distribucija i pokazano je da rešenja diferencijalne jednačine (1) pripadaju i prostoru distribucija, što znači da i približna rešenja konstruisana na prikazan način takodje pripadaju prostoru distribucija. Na osnovu rada [33] moguće je na isti način rešavati i takve probleme kod kojih uslovi u relaciji (4) predstavljaju neke distribucije.

Doktorska disertacija ima četiri glave.

U prvoj glavi se iznose važniji pojmovi iz teorije operatora Mikusinskog M, koji se koriste u teoriji diferencijalnih jednačina. Prikazuju se osnovni rezultati vezani za konstrukciju, egzistenciju i karakter rešenja diferencijalnih jednačina operatora, posebno njihova veza sa distribucijama ([11], [21], [27], [31], [32], [33], [34]). U ovoj glavi prikazuju se i neki rezultati vezani za konvergencije u polju M na osnovu radova [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Za funkcionelu A(x) datu relacijom (9) pokazuje se da karakteriše konvergenciju tipa I′ i u odnosu na nju se uvodi mera aproksimacije.

U prostoru L konstruiše se funkcionela

$$(10) \qquad F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|f\|_i}{e^{ie^{i^2}}(1+\|f\|_i)} \;, \text{ za } f \in L$$

gde je

$$\|f\|_i = \int_0^i |f(t)|dt$$

koja karakteriše konvergenciju u L i u odnosu na koju je definisana mera aproksimacije u L.

Takodje je u prostoru C konstruisana funkcionela

$$(11) \qquad G(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|h|_i}{e^{ie^{i^2}}(1+|h|_i)} \;, \; h \in C \;\text{ i }\; |h|_i = \sup_{t\le i} h(t)$$

koja karakteriše skoro uniformnu konvergenciju u C i u odnosu na koju je konstruisana mera aproksimacije u C, kada je rešenje iz skupa C nad $[0,\infty)$.

U drugoj glavi se posmatra homogena diferencijalna jednačina u polju $\mathcal{M}$. U početku se analizira samo jedno iz skupa linearno nezavisnih rešenja, dato relacijom (7) kao i približno rešenje dato relacijom (8). Korišćenjem procene funkcionele A(x), pokazuje se da niz približnih rešenja konvergira ka tačnom rešenju u konvergenciji tipa I´. Zatim se konstruiše mera aproksimacije u odnosu na A(x), L(f) i G(h) u zavisnosti od prirode rešenja (operator, lokalno integrabilna funkcija, neprekidna funkcija, respektivno).

Dalje se posmatra približno rešenje oblika

$$\sum_{j=1}^{m} b_j exp(\lambda\omega_{j,n}) \quad \text{gde su} \quad \omega_{j,n} = \sum_{i=0}^{n} c_{i,j}\ell^{i\alpha_j-\beta_j}$$

pod pretpostavkom da posmatramo takve diferencijalne jednačine kod kojih su rešenja karakteristične jednačine jednostruka i logaritmi. Konstruiše se mera aproksimacije, ponovo, u prostorima F_0, L i C.

Rezultati u drugoj glavi dobijeni su u saradnji sa prof. dr E. Papom.

U trećoj glavi se posmatraju nehomogene diferencijalne jednačine oblika (1) i konstruiše se približno rešenje oblika

$$x_n(\lambda) = x_{h,n}(\lambda) + x_{p,n}(\lambda) \tag{12}$$

gde je

$$x_{p,n}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} \int_0^{\lambda} exp((\lambda-\kappa)\cdot\omega_{j,n})f(\kappa)d\kappa \tag{13}$$

i

$$A_{j,n} = \frac{I}{P'(\omega_{j,n})}$$

pod pretpostavkom da su sve nule karakterističnog polinoma jednostruke i logaritmi.

U slučaju da su uslovi (2) specijalni, naime kada su

$$x^{(\mu)}(0) = 0 \text{ za } \mu = 0,\dots,m-2 \quad \text{i} \quad x^{(m-1)}(0) = \ell^r, \; r\geq 0$$

partikularno (tačno [11] i) približno rešenje formiraju se kao

$$(14) \qquad x_{p,n}(\lambda) = \frac{I}{\ell^r a_m} \int_0^{\lambda} f(\kappa) x_{h,n}(\lambda-\kappa)d\kappa, \quad a_m = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{m,k} s^k .$$

U oba slučaja se pokazuje da niz operatora $x_{p,n}(\lambda)$ konvergira u konvergenciji tipa I´ ka operatoru koji predstavlja tačno partikularno rešenje diferencijalne jednačine (1), korišćenjem funkcionele $A(x)$, $x \in F_0$. Na osnovu te činjenice dobija se mera aproksimacije sa kojom približno partikularno rešenje aproksimira tačno rešenje.

Ako operatori $x_{p,n}(\lambda)$ definišu funkcije iz L, odnosno iz C tada se mera aproksimacije formira u odnosu na funkcionele $F(f)$ i $G(h)$ respektivno.

Veoma je važno napomenuti da mera aproksimacije formirana za svako od približnih rešenja zavisi samo od n, a ne zavisi od dužine intervala što je bio slučaj u radovima [8], [21], [22], [23], [24].

U prvom delu četvrte glave konstruisano je tačno i približno rešenje jedne podklase posmatranih jednačina na intervalu $[0,T]$ u više koraka. Pod pretpostavkom da rešenje $x(\lambda)$ zajedno sa svojim izvodima, definiše neprekidnu funkciju, mera aproksimacije se može izraziti razlikom izmedju tačnog i približnog rešenja. Na ovaj način formirana mera aproksimacije zavisi od dužine intervala, tako da sa porastom dužine intervala greška se povećava, bilo da se rešenje konstruiše u jednom ili u više koraka (svakako sporije metodom u više koraka), dok je za male vrednosti T ona sasvim prihvatljiva.

U drugom delu četvrte glave se prikazuju primeri koji ilustruju postupke iz glava 2. i 3. U prvom primeru konstruisana je mera aproksimacije u prostorima F_0, L i C, (što je moguće, jer rešenje predstavlja funkciju iz C) kao u glavi 2., kao i mera aproksimacije pomoću razlike i to u više koraka. Uporedjena je ova poslednja mera aproksimacije sa istom, konstruisanom preko G(h) u C.

Od ostalih primera posebno je interesantna jednačina žilavo-elastičnog štapa posmatrana u saradnji sa prof. dr B. Stankovićem.

Prijatna mi je dužnost da se zahvalim akademiku dr Bogoljubu Stankoviću i prof. dr Endre Papu na saradnji iz koje su dobijeni neki rezultati izloženi u tezi kao i na stalnoj i svesrdnoj pomoći koju su mi pružali tokom izrade teze.

Takodje se zahvaljujem prof. dr Dragoslavu Hercegu na korisnim savetima i primedbama.

1. NEKI REZULTATI IZ TEORIJE OPERATORA MIKUSIŃSKOG

U prvoj glavi uvešćemo osnovne pojmove iz teorije operatora Mikusinskog koji su potrebni za dalji rad.

Pored osnovnih operatora i relacija izmedju njih (§ 1.1), u § 1.2 prikazane su operatorske funkcije, njihov izvod i integral na osnovu literature ([11], [17]). Tipovi konvergencije u polju M i problemi oko topologije prikazani su u § 1.3 i pri tome je korišćena literatura [1], [2], [3], [4], [11] i [14]. Posebno je u § 1.4 obradjena konvergencija tipa I' i njena karakterizacija preko funkcionele $B_{T,\varepsilon}(x)$ za $x \in F_0$ kao i prostor F_0 ([3], [5], [6]). Preko funkcionele A(x), definisane relacijom (1.12)(§ 1.4), date su (§ 1.5) definicije mera aproksimacija u prostorima F_0, u L i u C koje će se koristiti u glavi 2., 3. i 4. za procenu približnog rešenja operatorske jednačine.

U § 1.6, § 1.7, § 1.8 i § 1.9 posmatraju se diferencijalne jednačine u polju operatora M, definiše eksponencijalna funkcija, daje egzistencija i jedinstvenost rešenja, a pre svega ekvivalencija sa numeričkim parcijalnim diferencijalnim jednačinama kao i parcijalnim diferencijalno-diferentnim jednačinama ([11], [17], [31]).

Veza izmedju operatora i distribucija prikazuje se u § 1.10 na osnovu rada [33]. Konstruiše se prostor MD i pokazuje da rešenja operatorskih jednačina (kojima odgovaraju parcijalne diferencijalne jednačine i diferencijalno-diferentne jednačine sa uslovima koji mogu biti i distribucije) su u prostoru MD i istovremeno predstavljaju neprekidne operatorske funkcije.

Karakter eksponencijalnog operatora diskutovan je u § 1.11, a osobine funkcije E.M. Wrighta su iznete u § 1.12.

1.1. OSNOVNI POJMOVI I REZULTATI IZ TEORIJE OPERATORA MIKUSIŃSKOG

Neka je L skup lokalno integrabilnih funkcija nad intervalom $[0,\infty)$. Zbir dve funkcije iz L jeste funkcija iz L. Konvolucija dve funkcije $f(t)$ i $g(t)$ iz L definisana na sledeći način ([17]):

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

jeste iz skupa L. Skup L u odnosu na operacije sabiranja i konvolucije čini prsten bez delioca nule, što tvrdi poznata teorema Titchmarsha ([16]).

Polje operatora J. Mikusińskog, koje ćemo obeležavati sa M dobija se proširenjem prstena L. Svaki elemenat polja M, operator, definisan je parom $f,g \in L$, uz relaciju ekvivalencije. Predstavnik klase se obeležava sa f/g, $g \not\equiv 0$. (Razlomak se posmatra u smislu konvolucije.)

Neka su f, g, φ, ψ funkcije iz L. Tada:

- relacija ekvivalencije se označava sa = i definiše na sledeći način

$$\frac{f}{g} = \frac{\varphi}{\psi} \quad \text{ako i samo ako je} \quad f * \psi = g * \varphi$$

- operacije sabiranja i množenja definišu se kao

$$\frac{f}{g} + \frac{\varphi}{\psi} = \frac{f * \psi + g * \varphi}{g * \psi} \quad ; \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{\varphi}{\psi} = \frac{f * \varphi}{g * \varphi}$$

Neutralni elemenat polja operatora M jeste $I = \frac{g}{g}$, gde je $g \in L$ i $g \not\equiv 0$. Podskup od M sa elementima $f \cdot I = \{f(t)\}$, $f \in L$ je algebarski izomorfan sa prstenom L dok je skup $\alpha \cdot I$, $\alpha \in R$ algebarski izomorfan sa poljem R.

Polje operatora Mikusinskog nije algebarski zatvoreno. Pokazano je da ako su x, y i f elementi iz L, tada jednačina $(x/y)^2 = f$ nema rešenja za svako f iz L.

Integralni operator se obeležava sa ℓ i odgovara funkciji {1} koja preslikava R_+ u tačku 1. Ime je dobio zbog

$$\{1\} \cdot \{f(t)\} = \{\int_0^t f(\tau)d\tau\}.$$

Za stepen integralnog operatora važi:

$$\ell^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\},\ n \in N\ ;\quad \ell^\alpha = \left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\}, \alpha > 0$$

$$\ell^\alpha \cdot \ell^\beta = \ell^{\alpha+\beta},\quad \alpha,\beta \in R^+.$$

Inverzni operator operatora ℓ jeste $s = I/\ell$. Ako je funkcija f(t) iz L i ima n-ti izvod u L ($f^{(n)}(t) \in L$) tada važi relacija

$$s^n\{f_n(t)\} = \{f^{(n)}(t)\} + f^{(n-1)}(0)\ I + sf^{(n-2)}(0) + \ldots$$

$$\ldots + s^{(n-1)}f(0)$$

koja se koristi kod diferencijalnih jednačina.

Definicija operatora s dozvoljava da se njegovi stepeni interpretiraju kao stepeni negativnih izložilaca operatora ℓ.

Skup polinoma po operatoru s, tj. skup operatora oblika:

$$P_n(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 I,\ \alpha_i \in \mathbb{C}$$

algebarski je izomorfan prstenu polinoma u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i zato se mogu iz $\mathbb{C}$ na ovaj skup preneti svi rezultati koji se odnose na ovu strukturu. Ako su w_i nule numeričkog polinoma $P_n(t)$ tada je

$$P_n(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - w_i I).$$

Operator $I/(s-\alpha I)^n$ pripada prstenu L, tj.

$$\frac{I}{(s-\alpha I)^n} = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{\alpha t}\right\}.$$

Funkcija $H_\lambda(t)$ definisana je na sledeći način:

$$H_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 \le t < \lambda \\ 1 & \text{za} \quad 0 \le \lambda \le t \end{cases} .$$

Operator $h^\lambda = e^{-\lambda s} = s\{H_\lambda(t)\}$, $\lambda > 0$, zove se operator translacije. Ako je $f(t)$ proizvoljna funkcija iz L, tada je:

$$(1.1) \qquad h^\lambda\{f(t)\} = e^{-\lambda s}\{f(t)\} = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 \le t < \lambda \\ f(t-\lambda) & \text{za} \quad 0 \le \lambda \le t \end{cases} .$$

U skupu L definišemo dve binarne relacije ([11])

$$f \le g \Leftrightarrow f(t) \le g(t), \quad t \in [0,\infty)$$

$$f \le_T g \Leftrightarrow f(t) \le g(t), \quad t \in [0,T]$$

od kojih je prva relacija poretka.

Operator $|f| := \{|f(t)|\}$, $f \in L$, zove se operator apsolutne vrednosti. Za funkcije $f,g \in L$ važi:

a) $|f + g| \le |f| + |g|$

b) $|\alpha f| \le |\alpha| \cdot |f|$ gde je α kompleksan broj

c) $$|f \cdot g| = \{|\int_0^t f(t-u)g(u)du|\} \le \{|f(t)| * |g(t)|\} = |f| \cdot |g|$$

d) Ako za fiksno $f \in L$ postoji $M(T,f) = \sup\limits_{0 \le t \le T} |f(t)|$ tada je $|f| \le_T M(T,f)\ell$.

e) $\ell^p = \left\{\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}\right\} \leq_T \frac{T^{p-1}}{\Gamma(p)}\,\ell,\ p > 1.$

Polje operatora M može se takodje dobiti proširenjem prstena C, koji čine funkcije definisane i neprekidne nad intervalom $[0,\infty)$ u odnosu na operacije sabiranja i konvolucije.

1.2. OPERATORSKE FUNKCIJE

Definicija 1.1. Preslikavanje a jednog podskupa skupa kompleksnih brojeva **C** u polje operatora Mikusinskog naziva se operatorska funkcija.

Definicija 1.2. Funkcija f(t) (realnih ili kompleksnih vrednosti) posmatrana na intervalu $0 \leq t < \infty$ pripada klasi K ako zadovoljava sledeće uslove:

1) Ima najviše konačan broj tačaka prekida na svakom konačnom intervalu;

2) Integral $\int_0^t |f(\tau)|d\tau$ ima konačne vrednosti za svako $t > 0$.

Za operatorsku funkciju $f(\lambda)$ rećićemo da je parametarska ako za svako $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$ ona pripada klasi K, kao funkcija od t.

Operatorska funkcija čije su vrednosti numerički operatori, tj. brojevi, jeste numerička funkcija.

Definicija 1.3. Operatorska funkcija je neprekidna nad zatvorenim i ograničenim intervalom $J = [\alpha,\beta]$ ako postoji takav operator $q \in L$ da je $qa(\lambda) = \{b(\lambda,t)\}$ gde je $b(\lambda,t)$ neprekidna numerička funkcija od dve promenljive (u običnom smislu) nad $D : \alpha \leq \lambda \leq \beta,\ 0 \leq t \leq \infty$.

Neprekidnost funkcije $b(\lambda,t)$ je dovoljan uslov za neprekidnost operatorske funkcije $\{b(\lambda,t)\}$ ali nije i potreban.

Definicija 1.4. Operatorska funkcija ima neprekidan izvod nad skupom $J = [\alpha,\beta]$ ako postoji $q \in L$ takvo da je

$qa(\lambda) = \{b(\lambda,t)\}$, gde $b(\lambda,t)$ ima neprekidan izvod po λ nad D. Tada je $a'(\lambda) = \frac{I}{q}\{b'(\lambda,t)\}$.

Tvrdjenje 1.1. Ako numerička funkcija $a(\lambda,t)$ ima parcijalni izvod $a'(\lambda,t)$ neprekidan nad D, tada odgovarajuća operatorska funkcija a ima izvod $a'(\lambda) = \{a'(\lambda,t)\}$.

Obrnuto ne mora da važi.

Osobine neprekidnog izvoda operatorske funkcije su analogne osobinama izvoda kod numeričkih funkcija. Jedina razlika je sledeća:

Tvrdjenje 1.2. Ako operatorske funkcije $g(\lambda)$ i $a(\lambda) = f(\lambda)/g(\lambda)$ imaju neprekidne izvode nad intervalom $J = [\alpha,\beta]$ tada ga ima i $f(\lambda)$ i važi

$$\left(\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}\right)' = \frac{f'(\lambda)g(\lambda) - f(\lambda)g'(\lambda)}{g^2(\lambda)} .$$

Definicija 1.5. Za operatorsku funkciju $a(\lambda)$ rećićemo da je integrabilna nad intervalom (α,β) ako postoji elemenat $q \in L$ takav da je $qa(\lambda) = f(\lambda)$, gde je $f(\lambda) = \{f(\lambda,t)\}$, $|f(\lambda,t)| \leq g(\lambda)h(t)$, $g(\lambda) \in L_{[\alpha,\beta]}$ i $h(t) \in L$ i integral je

$$\int_a^\beta a(\lambda)d\lambda = \frac{1}{q}\{\int_\alpha^\beta f(\lambda,t)d\lambda\}. \tag{1.3}$$

Ovako definisan integral ima slične osobine kao i integral numeričke funkcije ([11]).

Definicija 1.6. Preslikavanje f jednog podskupa ω skupa $\mathbb{C}^2$ u polje operatora Mikusinskog M naziva se operatorska funkcija od dve promenljive.

Pod parcijalnim izvodom $\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,\kappa)$ podrazumevamo izvod u odnosu na λ $(f(\lambda,\kappa))'$, gde je κ fiksno.

Za integral važi:

Tvrdjenje 1.3. Ako je operatorska funkcija dve promenljive $f(\lambda,\kappa)$ neprekidna na četvorouglu $\alpha \leq \lambda \leq \beta$; $\alpha \leq \kappa \leq \beta$ i ima parcijalni izvod $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(\lambda,\kappa)$ neprekidan u tom četvorouglu, tada za proizvoljno λ_0 ($\alpha \leq \lambda_0 \leq \beta$) važi

$$\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(\lambda,\kappa)d\kappa\right)' = f(\lambda,\lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial\lambda} f(\lambda,\kappa)d\kappa.$$

1.3. KONVERGENCIJA I TOPOLOGIJA U M

U knjizi ([14]) data je sledeća:

Definicija 1.7. Neka je X proizvoljan neprazan skup i neka je $G : X^N \to P(X)$ konvergencija na X, tj. funkcija koja svakom nizu $\{x_n\}$ u X pridružuje jedan podskup $G(x_n)$ skupa X. Ako je $G(x_n) \neq \emptyset$ tada je niz $\{x_n\}$ konvergentan. Ako $x \to G(x_n)$ tada je x granica niza $\{x_n\}$ što pišemo $x_n \to X(G)$ (ili bez oznake G ako je jasno o kojoj je konvergenciji reč). Skup X snabdeven sa konvergencijom G naziva se konvergentni prostor.

Sledeći uslovi su važni za konvergenciju ([14]):

(F) Ako $x_n \to X(G)$ tada i $x_{p_n} \to X(G)$, tj. svaki podniz niza koji konvergira ka x takodje konvergira ka x. Za G kažemo da je nasledna.

(S) Svaki stacionarni (konstantan) niz $x,x,\ldots$ konvergira ka x.

(H) Ako $x_n \to x$ i $x_n \to y$ tada je $x = y$.

(U) Ako svaki podniz niza $\{x_n\}$ ima podniz koji konvergira ka x, tada i niz $\{x_n\}$ konvergira ka x.

Važi fundamentalna (14):

Teorema 1.1. Ako konvergencija zadovoljava uslov H, potreban i dovoljan uslov da bude topološka jeste da zadovoljava i uslove F U S.

Za niz $\{f_n\}$ iz C rećićemo da konvergira *skoro uniformno* ka f iz C ako konvergira uniformno na svakom intervalu

$[0,\omega],\omega \in [0,\infty)$. Ova konvergencija je topološka. Topologija je data familijom seminormi

(1.4) $$|f|_N = \max_{[0,N]} |f(t)|, \quad N \in N \quad \text{(prirodni brojevi)}$$

Prostor L ima topologiju indukovanu familijom seminormi

(1.5) $$\|f\|_T = \int_0^T |f(t)|dt,$$

za koju važi

(1.6) $$\|fg\|_T \le \|f\|_T\|g\|_T \ .$$

Konvergencija u odnosu na familiju seminormi $\|\cdot\|_T$, $T > 0$ se zove konvergencija u L.

U polju operatora Mikusinskog M posmatrano je više tipova konvergencije (I,II,I´,II´,...), ([3]), ([4]).

Za niz operatora $\{x_n\}$ iz M kažemo da konvergira ka operatoru $x \in M$ u *konvergenciji tipa I* ako postoji reprezentacija $x_n = f_n/g$, $x = f/g$, $f_n,f,g \in L$, $g \neq 0$ tako da f_n konvergira ka f u L (ili $f_n,f,g \in C$, $g \neq 0$ tako da f_n konvergira ka f skoro uniformno).

Konvergencija tipa I zadovoljava uslove F, S, H, medjutim ne zadovoljava uslov U, tako da nije topološka ([14]).

Za niz operatora $\{x_n\}$ iz M kažemo da konvergira ka operatoru x iz M u *konvergenciji tipa II* ako postoji reprezentacija $x_n = f_n/g_n$, $x = f/g$, $f_n,f,g_n,g \in L$, $g_n \neq 0$, $g \neq 0$, tako da f_n konvergira ka f u L i g_n konvergira ka g u L (ili f_n,f, $g_n,g \in C$ tako da $f_n \to f$ i $g_n \to g$ skoro uniformno).

U radu [4] pokazana je sledeća

Teorema 1.2. Konvergencija tipa II ne zadovoljava Urisonov, U, uslov - prema tome nije topološka.

1.4. KONVERGENCIJA TIPA I´

U radu [2] data je:

Definicija 1.8. Niz operatora $\{x_n\}$ iz M konvergira u konvergenciji tipa I´ ako svaki podniz od $\{x_n\}$ ima podniz koji konvergira u odnosu na konvergenciju tipa I.

Ovako definisana konvergencija jeste topološka.

Početak nosača ([2]) funkcije $f(t)$ iz C jeste realan broj $\Lambda(f)$, $-\infty \leq \Lambda(f) \leq \infty$ takav da je

$$\Lambda(f) = \mathit{sup}\{x\colon f(t) \equiv 0 \text{ na } (-\infty,x)\}. \tag{1.7}$$

Poznato je da je

$$\Lambda(f\cdot g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) \quad \text{za } f,g \in C$$

i na osnovu teoreme Titchmarsha

$$\Lambda(f/g) = \Lambda(f) - \Lambda(g) \quad \text{za } f,g \in C. \tag{1.8}$$

U radovima [2] i [3] pokazana je

Teorema 1.3. Niz operatora $\{x_n\}$ konvergira u konvergenciji tipa I´ ka operatoru x ako i samo ako se može pisati $x_n = a_n/b_n$, $x = a/b$, $a_n,a,b_n,b \in C$, $b_n \neq 0$, $b \neq 0$, gde $a_n \to a$ i $b_n \to b$ skoro uniformno, a_n ima nosač ograničen sa leve strane (ili $a_n,a,b_n,b \in L$, gde $a_n \to a$ i $b_n \to b$ u L) i $\Lambda(b_n) \to \Lambda(b)$.

Ako niz konvergira u konvergenciji tipa I´ tada konvergira i u konvergenciji tipa II (ka istoj granici). Medjutim, obrnuto ne mora da važi. Niz $\{x_n\} = \{1/g_n\}$, gde je

$$g_n(t) = \begin{cases} 1/n & \text{za } t \in [0,\lambda] \\ 1 & \text{za } t \in (\lambda,\infty) \end{cases}$$

konvergira u konvergenciji tipa II ka operatoru $x = 1/(e^{-\lambda s}\ell)$, ali niz $\{x_n\}$ ne konvergira u konvergenciji tipa I′ jer

$$g_n \overset{L}{\to} g = \begin{cases} 0 & t \in [0,\lambda] \\ 1 & t \in (\lambda,\infty) \end{cases}$$

$\Lambda(g) = \lambda$, $\Lambda(g_n) = 0$, $n = 1,2,\ldots$ i $\Lambda(g_n) \not\to \Lambda(g)$.

Pošto je svaka funkcija iz L istovremeno i operator (u smislu navedenog izomorfizma) možemo posmatrati i operatorsku konvergenciju u L tipa I i I′.

Potprostor od L koji sadrži sve funkcije $f \in L$ takve da je $\|f\|_T > 0$ za svako $T > 0$ označićemo sa L_0.

J. Burzyk je u radu [3] definisao funkcionelu:

$$B_{T,\varepsilon}(f) = \inf\{\|f\cdot g\|_T : g \in L_0, \|g\|_T < 1, \|\ell-\ell g\|_T < \varepsilon\} \tag{1.9}$$

za $f \in L$ i za svako $T,\varepsilon > 0$.

Primetimo da $B_{T,\varepsilon}(\cdot)$ nije seminorma za fiksno $T,\varepsilon > 0$, medjutim, važe relacije:

(1.10)

(i) $B_{T,\varepsilon}(0) = 0$

(ii) $B_{T,\varepsilon}(\lambda f) = |\lambda| B_{T,\varepsilon}(f)$ ako $\lambda \in R$ i $f \in L$ za svako $T,\varepsilon > 0$

(iii) $B_{T,\varepsilon_1+\varepsilon_2}(f_1+f_2) \leq B_{T,\varepsilon_1}(f_1) + B_{T,\varepsilon_2}(f_2)$ ako su f_1 i f_2 iz L i za svako $T,\varepsilon_1,\varepsilon_2 > 0$

(iiii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} B_{T,\varepsilon}(f) = \|f\|_T$ za svako $T,\varepsilon > 0$, $f \in L$.

Za dalji rad potrebna je sledeća

Lema 1.1. Za fiksno $T_1,T_2,\varepsilon > 0$, $T_2 > T_1$ i $f \in L$ važi:

$$B_{T_1,\varepsilon}(f) \leq B_{T_2,\varepsilon}(f).$$

Dokaz: Ako za funkciju $g \in L_0$ važe nejednakosti

$$\|g\|_{T_2} < 1 \text{ i } \|\ell-\ell g\|_{T_2} < \varepsilon \text{ za dato } \varepsilon > 0,$$

tada takodje važi

$$\|g\|_{T_1} < 1 \text{ i } \|\ell-\ell g\|_{T_1} < \varepsilon .$$

Na osnovu relacije (1.9), za svako $\eta > 0$ možemo pisati:

$$\|fg\|_{T_2} < B_{T_2,\varepsilon}(f) + \eta \text{ za f iz L.}$$

Na osnovu prethodne relacije, kao i relacije

$$\|fg\|_{T_2} > \|fg\|_{T_1} \geq B_{T_1,\varepsilon}(f)$$

važi

$$B_{T_1,\varepsilon}(f) \leq B_{T_2,\varepsilon}(f) \text{ za dato } T_1,T_2,\varepsilon > 0,\ T_2 > T_1.$$

Sledeće leme pokazane su u radu [3]:

Lema 1.2. Za datu funkciju $g \in L_0$ i $T,\varepsilon > 0$, postoji funkcija $k \in L_0$ takva da $\|kg\|_T < 1$ i $\|\ell-\ell kg\|_T < \varepsilon$.

Lema 1.3. Ako je niz $\{f_n\}$, $f_n \in L$ $(n = 1,2,\dots)$ konvergentan tipa I (ka 0), tada za dato $T,\varepsilon > 0$ postoji funkcija g takva da je $g \in L_0$, $\|g\|_T < 1$, $\|\ell-\ell g\|_T < \varepsilon$ i niz $\{gf_n\}$ konvergira (ka 0) u L.

Lema 1.4. Niz $\{f_n\}$ iz L konvergira u konvergenciji tipa I´ ka $f \in L$ ako i samo ako $B_{T,\varepsilon}(f_n-f) \to 0$ kada $n \to \infty$ za svako $T,\varepsilon > 0$.

Lema 1.5. Niz $\{x_n\}$ iz skupa operatora Mikusińskog konvergira u konvergenciji tipa I´ ka operatoru x ako i samo ako postoji reprezentacija $x_n = f_n/g$, $x = f/g$, gde su $f_n,f,g \in L$, $g \neq 0$ i važi $B_{T,\varepsilon}(f_n-f) \to 0$ za svako $T,\varepsilon > 0$.

Analogno kao i T. Boehme u radu [2] i J. Burzyk je označio sa F_0 potprostor prostora M koji sadrži operatore f/g gde $f \in L$ i $g \in L$.

Funkcionela $B_{T,\varepsilon}(x)$ za $x \in F_0$ uvodi se sa

$$(1.11) \qquad B_{T,\varepsilon}(x) = \inf \{ \|f\|_T : x = \frac{f}{g}, \|g\|_T < 1, \|\ell - \ell g\|_T < \varepsilon \}$$

analogno kao i za $x \in L$.

Važi takodje i sledeća:

Lema 1.6. Niz $\{x_n\}$ iz F_0 konvergira ka $x \in F_0$ u konvergenciji tipa I′ ako i samo ako $B_{T,\varepsilon}(x_n - x) \to 0$ kada $n \to \infty$ za svako $T, \varepsilon > 0$.

U radu [5] pokazano je:

Tvrdjenje 1.4. Neka je X grupa sa konvergencijom. Ako postoji funkcija $A : X \to R^+$ takva da

(j) $A(x_n) \to 0$ i $A(y_n) \to 0$ povlači $A(x_n - y_n) \to 0$

(jj) $A(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$

tada postoji funkcionela $\|\cdot\|$ u X koja zadovoljava uslove

a) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$

b) $\|-x\| = \|x\|$

c) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

takva da $A(x_n) \to 0$ ako i samo ako $\|x_n\| \to 0$.

Uvedimo funkcionelu

$$(1.12) \qquad A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ie^{i^2}}} \cdot \frac{B_{i,1/i}(x)}{1 + B_{i,1/i}(x)}, \quad x \in F_0$$

Lema 1.7. Ako niz $\{x_n\}$ pripada F_0 i $B_{i,1/i}(x_n) \to 0$ kada $n \to \infty$ za $i = 1,2,\ldots$ tada funkcija $A(x_n) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Dokaz: Red

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ie^{i^2}}} \cdot \frac{B_{i,1/i}(x)}{1 + B_{i,1/i}(x)}$$

konvergira, tako da postoji indeks i_1 takav da je

$$\sum_{i=i_1+1}^{\infty} \frac{1}{e^{ie^{i^2}}} \cdot \frac{B_{i,1/i}(x_n)}{1 + B_{i,1/i}(x_n)} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \quad \text{za svako} \quad \tilde{\varepsilon} > 0.$$

Pod pretpostavkom da $B_{i,1/i}(x_n) \to 0$, tada za svako $\tilde{\varepsilon} > 0$ postoji $n_0(\tilde{\varepsilon})$ tako da je

$$B_{i,1/i}(x_n) < \frac{\tilde{\varepsilon} e^{e}}{2(i_1+1)} \quad \text{za svako } n > n_0 \text{ i } i=1,2,\ldots,i+1.$$

Na osnovu prethodne dve relacije sledi:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{e^{ie^{i^2}}} \cdot \frac{B_{i,1/i}(x_n)}{1 + B_{i,1/i}(x_n)} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \tilde{\varepsilon}$$

za svako $\tilde{\varepsilon} > 0$ što znači da $A(x_n) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Tvrdjenje 1.5. Postoji funkcionela $\|\cdot\|$ u F_0, koja zadovoljava uslove a), b) i c) tvrdjenja 1.4, takva da $A(x_n) \to 0$, gde $A(x)$ dato sa (1.12), ako i samo ako $\|x_n\| \to 0$.

Dokaz: Za dokaz ćemo koristiti tvrdjenje 1.4. Funkcionela $B_{i,1/i}(x)$ preslikava prostor F_0 u R^+.

Na osnovu relacije (1.11) sledi da relacije (1.10) (izuzev (iiii)) za $B_{T,\varepsilon}(x)$ važe i za elemente x iz F_0 tako da je:

$$B_{2i,1/i}(x_n - y_n) \leq B_{2i,1/2i}(x_n) + B_{2i,1/2i}(y_n).$$

Pomoću prethodne relacije i Leme 1.1. dobijamo

$$B_{i,1/i}(x_n - y_n) \leq B_{2i,1/2i}(x_n) + B_{2i,1/2i}(y_i).$$

Funkcija $y = \frac{x}{1+x}$ za $x > 0$ jeste monotono rastuća tako da možemo pisati:

$$(1.13)\quad \frac{B_{i,1/i}(x_n-y_n)}{1+B_{i,1/i}(x_n-y_n)} \le \frac{B_{2i,1/2i}(x_n)+B_{2i,1/2i}(y_n)}{1+B_{2i,1/2i}(x_n)+B_{2i,1/2i}(y_n)} \le$$

$$\le \frac{B_{2i,1/2i}(x_n)}{1+B_{2i,1/2i}(x_n)} + \frac{B_{2i,1/2i}(y_n)}{1+B_{2i,1/2i}(y_n)}$$

Pod pretpostavkom da $A(x_n) \to 0$ kada $n \to \infty$ važi da $B_{i,1/i}(x_n) \to 0$ kada $n \to \infty$ za svako $i = 1,2,\ldots$ pa prema tome i $B_{2i,1/2i}(x_n) \to 0$ kada $n \to \infty$. Na osnovu Leme 1.7. važi

$$(1.14)\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ie^{i^2}}} \cdot \frac{B_{2i,1/2i}(x_n)}{1+B_{2i,1/2i}(x_n)} \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Analogno, iz činjenice da $A(y_n) \to 0$ kada $n \to \infty$ sledi da

$$(1.14')\quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ie^{i^2}}} \cdot \frac{B_{2i,1/2i}(y_n)}{1+B_{2i,1/2i}(y_n)} \to 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Iz relacije (1.13), (1.14) i (1.14') sledi da $A(x_n-y_n) \to 0$ kada $n \to \infty$, što znači da je ispunjen uslov (j) tvrdjenja 1.4. Uslov (jj) tvrdjenja 1.4. sledi iz relacije (1.10)(i), pa prema tome postoji funkcionela $\|\cdot\|$ u F_0, koja zadovoljava uslove a), b) i c) tvrdjenja 1.4., takva da $A(x_n) \to 0$ ako i samo ako $\|x_n\| \to 0$.

Ako $B_{T,\varepsilon}(x_n-x) \to 0$ za svako $T,\varepsilon > 0$ tada i $A(x_n-x) \to 0$ kada $n \to \infty$, pa na osnovu Leme 1.6. konvergencija tipa I' na F_0 ekvivalentna je konvergenciji definisanoj pomoću funkcionele $A(x)$ date relacijom 1.12.

1.5. DEFINICIJE MERA APROKSIMACIJE OPERATORA

Definicija 1.9. Operator $\bar{x} \in F_0$ aproksimira operator $x \in F_0$, u odnosu na funkciju $A(x)$, sa merom aproksimacije $\Delta > 0$, ako je ispunjen uslov $A(x-y) < \Delta$.

Za dato $f \in F$ posmatraćemo funkciju

(1.15) $$F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ie^{i^2}}} \cdot \frac{\|f\|_i}{1 + \|f\|_i}$$

gde je $\|f\|_i$ seminorma definisana sa relacijom (1.5) koja preslikava grupu sa konvergencijom L u R^+. Lako se proverava da su za funkciju F(f) ispunjeni uslovi (j) i (jj) tvrdjenja 1.4. što znači da postoji funkcionela $\|\cdot\|$ u L, koja zadovoljava uslove a), b) i c) tvrdjenja 1.4., takva da $F(f_n) \to 0$ ako i samo ako $\|f_n\| \to 0$.

Ako uvedemo funkcionelu

(1.16) $$\tilde{A}_{\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ie^{i^2}}} \cdot \frac{B_{i,\varepsilon}(x)}{1 + B_{i,\varepsilon}(x)} \quad \text{za } x \in L_0,$$

tada $A(x_n) \to 0$ ako i samo ako $\tilde{A}_{\varepsilon}(x_n) \to 0$ za svako $\varepsilon > 0$.

Red (1.16) uniformno konvergira za svako $x \in F_0$. Na osnovu relacije (1.10) (iiii) važi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{A}_{\varepsilon}(f) = F(f) \quad \text{za} \quad f \in L.$$

Konvergencija definisana sa F(x) povlači konvergenciju definisanu sa A(x) za $x \in L$, medjutim, obrnuto nije tačno. Naime, postoje nizovi $f_n(t)$ takvi da $B_{T,\varepsilon}(f_n(t)) \to 0$ (odnosno $A(f_n) \to 0$) dok $\|f_n(t)\|_T \not\to 0$ (odnosno $F(f) \not\to 0$) kada $n \to \infty$. Na primer, niz $f_n(t) = e^{nt}$ divergira u L, tj. $\|f_n\|_T \to \infty$. Medjutim u polju operatora važi:

$$\{e^{nt}\} = \frac{\ell}{1-n\ell} = \frac{\frac{\ell^2}{n}}{\frac{\ell}{n} - \ell^2} = \frac{\{h_n\}}{\{g_n\}}$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n(t) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(t) = -t, \ \Lambda(g_n) = \Lambda(t) = 0$$

i niz $\frac{\ell}{1-n\ell} \to 0$ kada $n \to \infty$ u konvergenciji tipa I´ pa na osnovu leme 1.6. $B_{T,\varepsilon}(e^{nt}) \to 0$ za svako $T, \varepsilon > 0$.

Sada možemo formulisati sledeću

Definiciju 1.10. Lokalno integrabilna funkcija $\tilde{f}$ aproksimira lokalno integrabilnu funkciju f, u odnosu na funkcionelu F(f) datu sa (1.13), sa merom aproksimacije $\Delta_L > 0$ ako je ispunjen uslov $F(f - \tilde{f}) < \Delta_L$.

Za dato h iz skupa neprekidnih funkcija C možemo posmatrati funkcionelu:

$$(1.17) \qquad G(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|h|_i}{e^{ie^{i^2}}(1 + |h|_i)}$$

gde je $|h|_i$ seminorma data relacijom (1.4). Kako G(h) zadovoljava uslove tvrdjenja 1.4., to postoji funkcionela $\|\cdot\|$ u C takva da $G(x_n) \to 0$ ako i samo ako $\|x_n\| \to 0$ kada $n \to \infty$, $x_n \in C$.

Sada možemo dati sledeću definiciju.

Definicija 1.11. Funkcija $\tilde{h}$ iz C aproksimira funkciju h iz C u odnosu na funkcionelu G(h) sa merom aproksimacije Δ_C ako je ispunjen uslov $G(h - \tilde{h}) < \Delta_C$.

1.6. VEZA NUMERIČKIH PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA U POLJU *M*

U teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina račun operatora Mikusińskog primenjuje se, uglavnom, u slučaju linearnih jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Opšti oblik parcijalne diferencijalne jednačine koju ćemo posmatrati je

$$(1.18) \qquad \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{j,k} \frac{\partial^{j+k} x(\lambda,t)}{\partial \lambda^j \partial t^k} = f_1(\lambda,t)$$

gde je $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, $0 \leq t < \infty$, i $x(\lambda,t) = 0$ za $t < 0$.

S obzirom da je:

$$\frac{\partial^{k+j} x(\lambda,t)}{\partial \lambda^j \partial t^k} = s^k \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda^j} x(\lambda,t) \right\} + \sum_{\nu=0}^{k-1} s^{k-\nu-1} \frac{\partial^{\nu+j} x(\lambda,0)}{\partial t^\nu \partial \lambda^j}$$

diferencijalnoj jednačini (1.18) odgovara jednačina u polju *M*

$$(1.19)\qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{j,k}\, s^{k}\, x^{(j)}(\lambda) = f(\lambda)$$

gde je

$$(1.20)\qquad f(\lambda) = \{f_1(\lambda,t)\} + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1} s^{j-\nu-1}\cdot\alpha_{j,n-\kappa+\nu}\cdot$$

$$\cdot\ \frac{\partial^{j+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{j}\ \partial t^{\nu}}\ \text{i}\ \frac{\partial^{j+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{j}\ \partial t^{\nu}}\ \text{za } j = 0,\dots,m;$$

$\nu = 0,\dots,n-1$ su zadati odgovarajući uslovi.

Ako se ograničimo na klasu funkcija $x(\lambda,t)$ čiji su parcijalni izvodi koji ulaze u parcijalnu diferencijalnu jednačinu (1.18) neprekidne funkcije u oblasti $D : \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$, $0 \le t \le \infty$, tada je svako rešenje operatorske diferencijalne jednačine (1.19) istovremeno i rešenje parcijalne jednačine (1.18) uz uslove

$$g_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{k}\alpha_{j,n-k+\nu}\frac{\partial^{j+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{j}\,\partial t^{\nu}},\quad k = 0,\dots,n-1.$$

Moguće je proširiti klasu posmatranih funkcija koje sa svojim izvodima zadovoljavaju parcijalnu jednačinu tako da one (zajedno sa svojim izvodima) budu neprekidne u domenu D. U tom slučaju uslove po λ i t-osi posmatramo kao jednakosti koje se dobijaju u graničnom prilazu ovim osama.

1.7. EKSPONENCIJALNA OPERATORSKA FUNKCIJA

Definicija 1.12. Za utvrdjeno $\omega \in M$, eksponencijalna operatorska funkcija je ona operatorska funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:

1) Ima neprekidan izvod nad $J = [\alpha,\beta]$.
2) Zadovoljava diferencijalnu jednačinu $x'(\lambda) = \omega x(\lambda)$.
3) $x(0) = I$.

Tvrdjenje 1.6. Potreban i dovoljan uslov da postoji operatorska funkcija koja zadovoljava uslove iz definicije 1.12 jeste da postoji parametarska funkcija koja zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu. Ako takva operatorska funkcija postoji, ona je jedinstvena.

Tvrdjenje 1.7. Eksponencijalna funkcija $e^{\lambda\omega}$ zadovoljava relacije

$$e^{\lambda\omega} \cdot e^{\mu\omega} = e^{(\lambda+\mu)\omega}$$

$$e^{\lambda\omega_1} \cdot e^{\lambda\omega_2} = e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}$$

za λ, μ iz R, a ω , ω_1 i ω_2 su operatori iz M takvi da postoje odgovarajuće eksponencijalne funkcije.

Definicija 1.13. Operator ω za koji postoji eksponencijalna funkcija $e^{\lambda\omega}$ zove se logaritam.

Tvrdjenje 1.8. Ako su operatori ω_1 i ω_2 logaritmi i C_1 i C_2 su proizvoljni realni brojevi, tada je operator $C_1\omega_1 + C_2\omega_2$ takodje logaritam.

Tvrdjenje 1.9. Ako je operator ω_1 logaritam a operator ω_2 to nije, tada za realne brojeve $C_1, C_2 \neq 0$, operator $C_1\omega_1 + C_2\omega_2$ nije logaritam.

1.8. EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST REŠENJA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE OPERATORA

Karakteristična jednačina diferencijalne operatorske jednačine (1.19) je oblika

$$F(\omega) \equiv \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{j,k} \, s^k \omega^j = 0. \tag{1.21}$$

Tvrdjenje 1.10. Karakteristični polinom diferencijalne jednačine u polju M ima uvek m-korena i svi ti koreni se mogu predstaviti u obliku konvergentnog reda oblika ([11])

$$\omega = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta} \tag{1.22}$$

gde su α i β racionalni brojevi $\alpha > 0$.

Tvrdjenje 1.11. Ako je operator ω logaritam i κ-struko rešenje jednačine (1.21), tada svaka od funkcija $e^{\lambda\omega}, \lambda e^{\lambda\omega},\dots,\lambda^{\kappa-1}e^{\lambda\omega}$ zadovoljava jednačinu (1.19).

Tvrdjenje 1.12. Ako je $\beta > 1$ i $c_0 \neq 0$ ili je $\beta = 1$ i c_0 nije realno, tada operator ω definisan redom (1.22) ne definiše eksponencijalnu funkciju $exp(\lambda\omega)$. U suprotnom slučaju ω definiše uvek operatorsku eksponencijalnu funkciju $exp(\lambda\omega)$.

Diferencijalne jednačine operatora mogu se podeliti u tri grupe u zavisnosti od broja logaritama karakterističnih korena. Diferencijalna jednačina je

1) logaritamska ako su svi koreni karakteristične jednačine logaritmi,

2) čista ako nijedan koren nije logaritam,

3) mešovita ako su neki koreni karakteristične jednačine logaritmi,a drugi nisu.

Prema tome, linearna diferencijalna jednačina sa numeričkim koeficijentima je uvek logaritamska i njeno rešenje ima onoliko proizvoljnih konstanti koliki je njen red.

Rešenje diferencijalne jednačine (1.19) je oblika

$$x(\lambda) = x_h(\lambda) + x_p(\lambda), \tag{1.23}$$

gde je rešenje homogenog dela:

$$x_h(\lambda) = \sum_{j=1}^{d(m)} \sum_{i=1}^{\kappa(j)} b_{j,i}\lambda^{i-1}e^{\lambda\omega_j}$$

i $\kappa(j)$ jeste višestrukost korena ω_j, $b_{j,i}$ su operatori, a $d(m)$ je broj različitih korena.

Ako su koreni karakteristične jednačine jednostruki i logaritmi tada je rešenje homogenog dela jednačine (1.19) oblika

$$x_h(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot exp(\lambda\omega_j). \tag{1.24}$$

Približno rešenje homogenog dela kao i ocena greške biće prikazani u glavi 2., dok će se partikularno rešenje analizirati u glavi 3.

U [11] J. Mikusinski je dokazao teoremu o jedinstvenosti rešenja.

Teorema 1.4. Za date operatore $k_0,\dots,k_{m-1}$ i tačku λ_0 u intervalu (λ_1,λ_2) postoji najviše jedna operatorska funkcija $x(\lambda)$ koja zadovoljava jednačinu

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \alpha_{j,k}\, s^k\, x^{(j)}(\lambda) = 0$$

sa uslovima

$$x(\lambda_0) = k_0,\ x'(\lambda_0) = k_1, \dots,\ x^{(m-1)}(\lambda_0) = k_{m-1}.$$

1.9. VEZA NUMERIČKIH PARCIJALNIH-DIFERENCIJALNO-DIFERENTNIH JEDNAČINA I DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA U POLJU OPERATORA *M*

Parcijalna diferencijalno-diferentna jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \alpha_{j,k} \frac{\partial^{j+k} x(\lambda,t)}{\partial\lambda^j \partial t^k} + \tag{1.25}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{d}\sum_{j=0}^{m_\mu}\sum_{k=0}^{n_\mu} \beta^{\mu}_{j,k} \frac{x(\lambda,t-\tau_\mu)}{\partial\lambda^j\ \partial t^k} = \varphi(\lambda,t)$$

gde je $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, $0 \leq t < \infty$, $\tau_\mu > 0$, $\mu = 1,2,\dots,d$, $x(\lambda,t) = 0$, $t < 0$ se u polju operatora Mikusinskog *M* može napisati kao ([32]):

$$(1.26)\qquad \sum_{j=0}^{m} a_j(s)x^{(j)}(\lambda) + \sum_{\mu=1}^{d} e^{-\tau_\mu s} \sum_{j=0}^{m_\mu} b_j^\mu(s)x^{(j)}(\lambda) = f(\lambda)$$

gde je

$$a_j(s) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{j,k} s^k \qquad \text{za } j = 0,1,\ldots,m$$

$$b_j^\mu(s) = \sum_{k=0}^{n_\mu} \beta_{j,k}^\mu s^k \qquad \text{za } j = 0,1,\ldots,m;\ \mu = 1,2,\ldots,d$$

$$(1.27)\qquad f(\lambda) = \{\varphi(\lambda,t)\} + \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{n-\kappa-1} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\kappa} \alpha_{j,n-\kappa+k} \frac{\partial^{j+k}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^j\partial t^k} + \sum_{\mu=1}^{d} e^{-\tau_\mu s} \sum_{\kappa=0}^{n_\mu-1} s^{n_1-\kappa-1} \sum_{j=0}^{m_\mu} \sum_{k=0}^{\kappa} \beta_{j,n_\mu-\kappa+k} \frac{\partial^{j+k}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^j\partial t^k}$$

Karakteristična jednačina jednačine (1.26) je:

$$\sum_{j=0}^{M} [\tilde{a}_j(s) + \sum_{\mu=1}^{d} e^{-\tau_\mu s} \tilde{b}_j(s)]\omega^j = 0$$

gde je

$$M = max\ (m, m_1, \ldots, m_d)$$

$$\tilde{a}_j = a_j \quad \text{za} \quad j \le m \qquad \tilde{a}_j = 0 \quad \text{za} \quad j > m$$

$$\tilde{b}_j^\mu = b_j^\mu \quad \text{za} \quad j \le m_\mu \qquad \tilde{b}_j^\mu = 0 \quad \text{za} \quad j > m_\mu$$

U radu [32] autor je pokazao

Tvrdjenje 1.13. Ako je $m \ge m_\mu$ za $\mu = 1,\ldots,d$ jednačina (1.25) je tada i samo tada

a) logaritamska,

b) mešovita, ili

c) čista

kada i jednačina

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{j,k} \frac{\partial^{j+k} x(\lambda,t)}{\partial\lambda^j \partial t^k} = 0$$

ima tu osobinu.

1.10. VEZA IZMEDJU OPERATORA MIKUSINSKOG I DISTRIBUCIJA

Fundamentalnu ulogu u izgradnji teorije distribucija igra prostor $\mathcal{D}$, snabdeven odgovarajućom topologijom, koji čine funkcije definisane na $\mathcal{R}$, koje imaju sve izvode i kompaktan nosač.

Definicija 1.14. Prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{D}$ naziva se prostor distribucija i obeležava sa $\mathcal{D}'$.

Interesantno je uspostaviti vezu izmedju operatora i distribucija. Postoji više radova u tom pravcu. Mi ćemo se zadržati samo na radu [33], jer je on interesantan sa stanovišta ove teze. J. Wloka je pokazao sledeće

Tvrdjenje 1.14. Skup $\mathcal{D}'_+$ onih distribucija koje imaju nosač ograničen sa leve strane izomorfan je sa jednim potprostorom polja operatora Mikusinskog.

Izomorfizam se konstruiše na sledeći način:

$$D \longleftrightarrow \frac{f}{\varphi} \quad \text{gde je} \quad D * \varphi = f$$

i $D \in \mathcal{D}'_+$, $0 \not\equiv \varphi \in \mathcal{D}$, $f \in C^\infty$ (C^∞ je prostor beskonačno mnogo puta diferencijabilnih funkcija), sa nosačem ograničenim sa leve strane.

Pri uvodjenju pomenutog izomorfizma koristi se poznata činjenica ([26]) da za $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi \not\equiv 0$ i $D \subset \mathcal{D}'_+$ važi $D * \varphi = f$, gde je $f \in C^\infty$ i ima nosač ograničen sa leve strane.

U radu [33] takodje su prikazane sledeće leme.

Lema 1.8. Ako je distribucija D definisana neprekidnom funkcijom tada njoj odgovara, pri ovom izomorfizmu, operator koji predstavlja istu neprekidnu funkciju.

Po definiciji je $\delta_a^{(n)}(\varphi) := (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$. Ako je $a = 0$ piše se samo $\delta^{(n)}$.

Lema 1.9. $\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n$

Lema 1.10. $\delta(t - \lambda) \leftrightarrow e^{-\lambda s}$

Operator oblika f/φ gde je $\varphi \in \mathcal{D}$, a f neprekidna funkcija koja ima nosač na desnoj polupravoj, medjutim nije iz C^∞, nema odgovarajuću distribuciju. Distribucija sa nosačem koji nije ograničen sa leve strane nema odgovarajući operator.

U istom radu [33] autor uvodi pojam operator-distribucije.

Neka je Φ_0 klasa svih neprekidnih funkcija u oblasti $D : (a < t < \infty,\ \lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$. Svaka neprekidna funkcija ima izvod proizvoljnog reda u smislu distribucija tako da se mogu formirati klase $\Phi_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi_0$, $\Phi_2 = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\Phi_0, \ldots$. Elementi klase Φ_k, $k = 1,2,\ldots$ su distribucije čiji su nosači sadržani u D i dobijaju se operacijom parcijalnog distribucionog izvoda reda k po λ funkcije iz Φ_0. Operacije sabiranja i množenja brojem posmatraju se na uobičajeni način, dok se konvolucija izmedju distribucije

$$f \in \Phi = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Phi_i$$

i neprekidne funkcije a(t) uvodi kao:

$$f(t,\lambda) * a(t) := \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}(F(t,\lambda) * a(t))$$

Sabiranje u Φ se definiše kao

$$f_1 + f_2 := \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}(F_1 + F_2) \quad \text{gde su } f_1, f_2 \in \Phi$$

$$F_1, F_2 \in \Phi_0, \quad \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} F_1 = f_1; \; \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} F_2 = f_2.$$

U radu [33] je uveden skup MD čiji su elementi operator-distribucije, razlomci u odnosu na konvoluciju $\frac{f(\lambda,t)}{g(t)}$, gde je $f(\lambda,t)$ distribucija iz Φ a $g(t) \not\equiv 0$ funkcija iz C. Po definiciji je takodje

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{f(\lambda,t)}{a(t)}\right) := \frac{\frac{\partial}{\partial\lambda} f(\lambda,t)}{a(t)}$$

i važi

(a) $$\frac{\partial}{\partial\lambda}(a * f \pm b * g) = a * \frac{\partial f}{\partial\lambda} \pm b * \frac{\partial g}{\partial\lambda}$$

gde su a i b operatori koji ne zavise od λ a f i g operator-distribucije

(b) $$\frac{\partial}{\partial\lambda}(f * \varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} * f + \varphi * \frac{\partial f}{\partial\lambda}$$

gde je f operator distribucija a φ beskonačno diferencijabilna operatorska funkcija.

Diferencijalne jednačine

(1.28) $$\sum_{j=0}^{m} a_j \frac{\partial}{\partial\lambda} x = f,$$

gde su koeficijenti a_i operatori iz M, dok su f i rešenje x operator-distribucije predstavljaju jednačine tipa (1.19) ili (1.26) . Sledeća tvrdjenja pokazana su takodje u radu [33].

Tvrdjenje 1.15. Ako je f neprekidna operatorska funkcija tada je svako rešenje jednačine (1.28) (koje pripada MD) istrovremeno u M.

Tvrdjenje 1.16. Homogena diferencijalna jednačina

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \frac{\partial^i}{\partial\lambda^i} x = 0$$

ima u MD najviše m linearno nezavisnih rešenja, koja sva pripadaju M i koja su beskonačno mnogo puta diferencijabilne po λ.

Tvrdjenje 1.17. Neka je x rešenje jednačine (1.28) koje pripada MD. Tada postoji X u M takvo da je $x = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} X$ i koje zadovoljava jednačinu

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \frac{\partial^i}{\partial\lambda^i} X = F$$

gde je $f = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} F$, F je jedna neprekidna operatorska funkcija. Iz prethodnih tvrdjenja sledi da u MD ne postoje rešenja jednačine (1.28) koja nisu logaritmi u M.

Na osnovu tvrdjenja 1.17. pokazuje se

Tvrdjenje 1.18. Ako su sva rešenja jednačine (1.28) u MD i $f \in$ MD, tada postoji uvek jedno partikularno rešenje x_o posmatrane jednačine i to

$$x_o = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} X_o, \quad f = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} F,$$

(F, X su neprekidne operatorske funkcije),

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \frac{\partial^i}{\partial\lambda^i} X_o = F$$

1.11. KARAKTER EKSPONENCIJALNOG OPERATORA

Eksponencijalni operator $e^{\lambda\omega}$, gde je ω dato relacijom (1.22), se izražava u tezi preko sledećih tipova

(1) $exp(-\mu\ell^{-\alpha})$ za $\alpha > 0$

(2) $e^{-\mu s}$ za $\mu > 0$

(3) $e^{\mu f}$ za $f = \sum_{i=i_o}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}$ za $i_o\alpha-\beta > 0$, $\alpha > 0$.

Operator $exp(-\mu\ell^{-\alpha})$ posmatran je u radovima [9], [21] i [27]:

1) Ako je $0 < \alpha < 1$ i $|arg\mu| < \frac{\pi}{2}(1 - \alpha)$, tada je operator

$$exp(-\mu\ell^{-\alpha}) = \left\{ \begin{array}{ll} t^{-1}\Phi(0,-\alpha;\ \mu t^{-\alpha}), & t > 0 \\ 0 & , t = 0 \end{array} \right\}$$

gde je Φ *funkcija E.M. Wrighta*, iz C.

2) Ako je $0 < \alpha < 1$ i $arg|\mu| = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha)$, tada operator

$$exp(-\mu\ell^{-\alpha}) = s\ell^{\frac{1}{2}}\{t^{-\frac{1}{2}}\Phi(\frac{1}{2},-\alpha;\ -|\mu|\cdot e^{\pm\frac{\pi}{2}(1-\alpha)i}t^{-\alpha})\}$$

za $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$ predstavlja *distribuciju* koja nije funkcija, dok za $\frac{2}{3} < \alpha < 1$ predstavlja *funkciju* koja nije Lebesque-integrabilna na intervalu $[0,T]$, $T > 0$.

3) Ako je $0 < \alpha < 1$ i $\pi \geq |arg\mu| > \frac{\pi}{2}(1 - \alpha)$ tada $exp(-\mu\ell^{-\alpha})$ predstavlja *operator koji nije ni funkcija niti distribucija.*

4)

$exp(-\mu\ell^{-1}) = e^{-\mu s}$, $\mu > 0$ jeste operator translacije

5) Ako je $f \in L$ tada $e^{f} - I \in L$.

a) Ako je $f = \mu\ell^{\alpha}$, $\alpha > 0$, μ kompleksan broj, imamo

$$exp(\mu\ell^{\alpha}) = I + \{t^{-1}\Phi(0,\alpha;\mu t^{\alpha})\} \tag{1.30}$$

gde je Φ funkcija E.M. Wrighta.

Za $\alpha > 0$ operator $exp(\mu\ell^{\alpha}) - I$ *je iz* L.

Za $\alpha \geq 1$ operator $exp(\mu\ell^{\alpha}) - I$ *je iz* C.

1.12. FUNKCIJE E.M. WRIGHTA

U operatorskom računu veoma važnu ulogu imaju već pominjane funkcije E.M. Wrighta ([9], [34]).

$$\Phi(\nu,\rho;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+\rho n)}, \rho > 0 \text{ ili } -1 \le \rho < 0.$$

Osobine ovih funkcija, koje ćemo nadalje koristiti, su sledeće:

(1) $F(t) = t^{-1}\Phi(0,-\sigma;-t^{-\sigma}) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Rez=0} exp(tz - z^{\sigma})dz$$

(2) $F^{(n)}(0) = 0;\ n \in N$

(3) $F^{(k)}(t) = t^{-k-1}\Phi(-k,-\sigma;-t^{-\sigma})$

(4) Neka je $\lambda = e^{\alpha i}$, $0 < \sigma < 1, \beta < 1$, $t \ge 0$ i i $|\alpha| < \frac{\pi}{2}(1 - \sigma)$, tada je:

$$|t^{\beta-1}\Phi(\beta,-\sigma;-\lambda t^{-\sigma})| \le \frac{C}{2\pi\sigma} \Gamma(\frac{1-\beta}{\sigma}) \tag{1.31}$$

gde je

$$C = cos^{\frac{\beta-1}{\sigma}}(\alpha + \frac{\sigma\pi}{2}) + cos^{\frac{\beta-1}{\sigma}}(\alpha - \frac{\sigma\pi}{2}) \tag{1.32}$$

(5) Majoracija funkcije $t^{-1}\Phi(0,-\sigma;-\lambda t^{-\sigma})$ za $0 < \sigma < 1$ u okolini nule je:

(a)

$$t^{-1}\Phi(0,-\sigma;-\lambda t^{-\sigma}) \le (\frac{\sigma\lambda}{t})^{\frac{1}{1-\sigma}} exp\left(-(1-\sigma)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(\frac{\lambda}{t^{\sigma}})^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)$$

pod uslovom da je $\lambda/t^{\sigma} > 2/\sigma^{\sigma}$.

(b)

$$t^{-1}\Phi(0,-\sigma;-\lambda t^{-\sigma}) \le \frac{T^{2n}}{(2n)!} C(2n+1) + \frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!} C(2n+2) \tag{1.33}$$

za svako $n \in N$, $0 \le t \le T$ gde je

$$C(k) = \frac{1}{\sigma\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{\sigma}\right)\left[\cos^{\frac{k}{\sigma}}\left(\alpha - \frac{\sigma\pi}{2}\right) + \cos^{\frac{k}{\sigma}}\left(\alpha + \frac{\sigma\pi}{2}\right)\right] \tag{1.34}$$

2. MERA APROKSIMACIJE ZA PRIBLIŽNA REŠENJA HOMOGENE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE OPERATORA

U prvom delu ove glave posmatraju se homogene diferencijalne jednačine operatora M koje odgovaraju parcijalnim diferencijalnim jednačinama. U § 2.2 daje se oblik približnog rešenja (kao u radu [21]), konstruišu se operatorske funkcije $z_n(\lambda)$ i $z(\lambda)$, za koje se pokaže da pripadaju prostoru F_0. Preko funkcionela $B_{T,\varepsilon}(z_n(\lambda) - z(\lambda))$ i $A(z_n(\lambda) - z(\lambda))$ pokazuje se da niz operatora $x_n(\lambda)$ konvergira ka operatoru $x(\lambda)$ u konvergenciji tipa I' (§ 2.3; § 2.4). U § 2.5 konstruisana je mera aproksimacije Δ sa kojom približno rešenje aproksimira tačno rešenje homogene diferencijalne jednačine operatora. U § 2.7 konstruisana je mera aproksimacija u L, a u § 2.8 u C.

U drugom delu ove glave § 2.9 i § 2.10 posmatra se homogena diferencijalna jednačina operatora koja odgovara parcijalnoj diferencijalno-diferentnoj jednačini. Korišćenjem rezultata iz rada [22] pokazuje se da operatori $\bar{z}_n(\lambda)$ i $\bar{z}(\lambda)$ pripadaju prostoru F_0, pa se preko koeficijenata ograničenja daje mera aproksimacije sa kojom približno rešenje posmatrane jednačine aproksimira tačno.

Rezultati ove glave, izuzev konstrukcije približnog rešenja ([21], [22]) su dobijeni u saradnji sa prof. dr E. Papom.

2.1. HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA OBLIKA (1.18)

Homogena diferencijalna jednačina operatora

$$(2.1)\qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n_j}\alpha_{k,j}s^k x^{(j)}(\lambda) = 0,$$

gde su $\alpha_{j,k}$ numeričke konstante i $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, sa uslovima

$$(2.2)\qquad x^{(j)}(0) = \varphi_j, \quad j = 0,\dots,m.$$

ima jedno rešenje oblika

$$(2.3)\qquad x(\lambda) = b\exp(\lambda\omega)$$

gde je b operator, koji se odredjuje iz uslova (2.2), dok je

$$(2.4)\qquad \omega = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}, \text{ za } \alpha > 0 \text{ i } \beta \leq 1$$

rešenje karakteristične jednačine koju možemo pisati u obliku:

$$s^m \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n_j} \alpha_{j,k}\ell^{m-k}\omega^k = 0.$$

Najmanji stepen r, od operatora ℓ, u prethodnoj jednačini pojavljuje se najmanje dva puta za $j = i$ i $j = k$:

$$r = m - n_i - \beta i = m - n_k - k \leq m - n_j - \beta j$$

Iz prethodne relacije utvrdjuje se faktor β. Koeficijent uz ℓ^r daje prvi koeficijent reda oblika (2.4),c_0. Rešenjem jednačine:

$$\alpha_{i,n_i}c_0^i + \alpha_{k,n_k}c_0^j + \dots = 0.$$

dobija se koeficijent c_0. Odredjivanje drugih koeficijenata c_i, $i = 1,2,\ldots$, u (2.4) prikazano je u radu [21] za $\alpha = 1/q$ i $\beta = p/q$, $p,q \in N$.

Uvodjenjem smena $u = \ell^{1/q}$ i $v = \ell^{p/q}$ karakteristični polinom se može napisati u obliku

$$P(u,v) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{j!k!} P_{u^k v^j}(0,c_0)u^k(v - c_0)^j.$$

Ako se označi sa $Q'(c_0) : = P_v(0,c_0)$, može se pisati

$$v-c_0 = \frac{1}{Q'(c_0)} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k\geq 0}{}' \frac{1}{j!k!} P_{u^k v^j}(0,c_0)(v - c_0)^j u^k$$

gde je u sumi izostavljen indeks (1,0). Na osnovu poslednje relacije i relacije $v - c_0 = \sum_{i\geq 0} a_i u^i$ dobijaju se koeficijenti

$$c_1 = - \frac{1}{Q'(c_0)} P_u(0,c_0)$$

$$c_2 = - \frac{1}{Q'(c_0)} [\tfrac{1}{2}P_{u^2}(0,c_0) + \tfrac{1}{2}P_{v^2}(0,c_0)c_1^2 +$$

$$+ P_{u,v}(0,c_0)\, c_1].$$

2.2. PRIBLIŽNO REŠENJE

U slučaju kada odredimo samo konačan broj koeficijenata c_i, $i = 1,\ldots,n$ (kao i α i β) dobija se jedno približno rešenje jednačine (2.1)

$$x_n(\lambda) = b\, exp(\lambda\omega_n) \tag{2.5}$$

gde je

$$\omega_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta} \tag{2.6}$$

Približno rešenje homogenog dela je

$$x_{h,n}(\lambda) = \sum_{j=1}^{d(m)} \sum_{i=1}^{\kappa(j)} b_{j,i}\lambda^{i-1} e^{\lambda\omega_{j,n}} \tag{2.7}$$

gde je $\kappa(j)$ višestrukost korena ω_j, $b_{j,i}$ su operatori i

(2.8) $$\omega_{j,n} = \sum_{i=0}^{n} c_{i,j}\ell^{i\alpha_j-\beta_j}, \quad \alpha_j > 0, \ \beta_j \leq 1.$$

U cilju procene greške, odnosno odredjivanja mere aproksimacije, posmatraćemo prvo približno rešenje oblika (2.5) jednačine (2.1) sa uslovima (2.2). Pokazaćemo da niz operatora $\{x_n(\lambda)\}$, gde svaki član predstavlja jedno približno rešenje i oblika je (2.5) (λ se uzima kao parametar), konvergira u konvergenciji tipa I´ ka tačnom rešenju $x(\lambda)$ oblika (2.5). Kako je konvergencija tipa I´ ekvivalentna sa konvergencijom definisanom pomoću funkcionele $A(x)$ koja je data relacijom (1.12) na prostoru F_o. Formiraćemo operatore

(2.9) $$z_n(\lambda) = \frac{gx_n(\lambda)}{g},$$

gde je $x_n(\lambda)$ dato relacijom (2.5),

(2.10) $$z(\lambda) = \frac{gx(\lambda)}{g},$$

gde je $x(\lambda)$ dato relacijom (2.3) i operator g predstavlja funkciju iz L_o. Sledeća lema pokazuje da svaki član niza $\{z_n(\lambda)\}$ kao i operator $z(\lambda)$ pripadaju prostoru F_o.

Lema 2.1. Početak nosača operatora $x_n(\lambda)$ i $x(\lambda)$ je veći ili jednak nuli: ($\Lambda(x_n(\lambda)) \geq 0$; $\Lambda(x(\lambda)) \geq 0$).

Dokaz: Na osnovu definicije

$$\ell^{\alpha} = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

sledi da je $\Lambda(\ell^{\alpha}) = 0$ za $\alpha > 0$.

Na osnovu (1.8) dobija se da je $\Lambda(\ell^{\beta}) = 0$ za $\beta \leq 0$ pa i $\Lambda(I) = 0$.

Pošto red

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} c_i \frac{t^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-\beta)}$$

uniformno konvergira na svakom kompaktnom skupu u R, za $i_0\alpha-\beta-1 > 0$ (koeficijenti $|c_i| < M\rho^i$ za $i = i_1, i_1+1,\ldots$, $i_1 \geq i_0$ ([21])) važi

$$\Lambda\left(\sum_{i=i}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}\right) = 0$$

kao i

$$\Lambda\left(exp\left(\lambda \sum_{i=i}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}\right)\right) = 0 \quad \text{za } i\alpha-\beta > 1.$$

Na osnovu (1.29) je

$$\Lambda(exp(-\mu\ell^{-\alpha})) = 0 \text{ za } \mu > 0 \text{ i } 0 < \alpha < 1$$

$$(|arg\mu| < \frac{\pi}{2}(1-\alpha)).$$

Iz definicije $H_\lambda(t)$ sledi $(H_\lambda(t)) > 0$.

Ako je g iz L_0, tada operatori $gx_n(\lambda)$ i $gx(\lambda)$ predstavljaju funkcije iz L, pa prema tome $z_n(\lambda)$, $n = 1,2,\ldots$ i $z(\lambda)$ pripadaju prostoru F_0.

U cilju konstrukcije funkcionele $A(z_n(\lambda) - z(\lambda))$ na osnovu relacije (1.12) posmatraćemo funkcionelu $B_{T,\varepsilon}(z_n(\lambda) - z(\lambda))$ koja se prema (1.11) formira na sledeći način

$$B_{T,\varepsilon}(z_n(\lambda) - z(\lambda)) = inf\{\|\varepsilon_g(\lambda,t)\|_T,\ g \in L_0, \quad \|g\|_T < 1,\ \|\ell - \ell g\|_T < \varepsilon\} \tag{2.11}$$

gde je

$$\frac{g(x_n(\lambda) - x(\lambda))}{g} = : \frac{\{\varepsilon_g(\lambda,t)\}}{g}.$$

Kako nismo u mogućnosti da tačno odredimo veličinu

$B_{T,\varepsilon}(z_n(\lambda) - z(\lambda))$ moramo je proceniti.

2.3. PROCENA FUNKCIONELE $B_{T,\varepsilon}(z_n(\lambda)-z(\lambda))$

Dokazaćemo prvo

Lema 2.2. Za svako $T > 0$ i $k > 0$ postoji operator

$$g_1 = \frac{\ell}{I + k\ell} k \tag{2.21}$$

koji predstavlja funkciju iz L_0 i važe nejednakosti

$$\|g_1\|_T < 1 \qquad i \qquad \|\ell - \ell g_1\|_T < \frac{1}{k}$$

Dokaz: Operator

$$g_1 = \frac{\ell}{I + k\ell} k = \{ke^{-kt}\}$$

predstavlja funkciju iz L_0 jer je

$$\|g_1\|_T = k \int_0^T |e^{-kt}| dt = 1 - e^{-kT} > 0,$$

za svako $T > 0$, $k > 0$ i $0 < \|g_1\|_T < 1$. Dalje je

$$\|\ell - \ell g_1\|_T = \int_0^T |1 - 1 + e^{-kt}| dt = \frac{1 - e^{-kT}}{k} < \frac{1}{k}$$

za svako $T > 0$, $k > 0$.

Na osnovu relacije (2.11) važi

$$B_{T,1/k}(z_n(\lambda) - z(\lambda)) \leq \|\varepsilon_{g_1}(\lambda,t)\|_T , \tag{2.13}$$

za svako $T > 0$, $k > 0$.

U cilju procene izraza $\|\varepsilon_{g_1}(\lambda,t)\|_T$ razlikovaćemo sledeće slučajeve u zavisnosti od β i pod pretpostavkom da je $(n+1)\alpha - \beta > 1$

a) Ako je $\beta = 1$ možemo pisati

$$g_1 b(exp(\lambda\omega_n) - exp(\lambda\omega)) =$$

$$= e^{\lambda cos} \prod_{i=1}^{r} exp(\lambda c_i \ell^{i\alpha-1}) g_1 b exp(\lambda \cdot \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-1})$$

$$\cdot (I - exp(\lambda \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-1}))$$

gde je r izabrano tako da je $r\alpha-1 \leq 0$ i $(r+1)\alpha-1 > 0$. Jasno je da je $r = 0$ za $\alpha > 0$. (Koristi se uobičajena konvencija da je $\prod_{i=1}^{0}(\cdot) = I$); $r = 1$, za $\alpha = 1$ i $r > 1$ za $0 < \alpha < 1$.

Ako je $c_0\lambda < 0$ tada operator $e^{\lambda c_0}$ predstavlja operator translacije i pri proceni se koristi relacija (1.1).

Slučaj kada je $c_0\lambda > 0$ nećemo razmatrati u tezi.

b) Ako je $0 \leq \beta < 1$ tada korišćenjem relacije (1.2) dobijamo:

$$|g_1 b(exp(\lambda\omega_n) - exp(\lambda\omega))| \leq$$

$$\leq |exp(\lambda \sum_{i=0}^{r} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| |bg_1 exp(\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| \cdot$$

$$\cdot |exp(\lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}) - I|$$

gde je r izabrano tako da je $r\alpha-\beta \leq 0$ i $(r+1)\alpha-\beta > 0$. Jasno je da je $r = 0$ za $\alpha \geq 1$ i $r > 0$ za $0 < \alpha < 1$.

c) Ako je $\beta < 0$ tada se može pisati

$$|bg_1(exp(\lambda\omega_n) - exp(\lambda\omega)| \leq$$

$$\leq |bg_1 exp(\lambda \sum_{i=0}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| |exp(\lambda \sum_{i=n+1} c_i \ell^{i\alpha-\beta}) - I| .$$

U slučajevima a) i b) javljaju se operatori tipa $exp(\lambda c_i \ell^{-(\beta-\alpha i)})$ takvi da je $\beta-\alpha i > 0$ za $i = 1,\ldots,r$ (u slučaju b) može biti takodje $i = 0$), koje ćemo posmatrati u tezi samo pod uslovom

$$|arg(-\lambda c_i)| < \frac{\pi}{2}(1 - \alpha)$$

za i = 1,...,r (i i = 0 u slučaju b)). Prema (1.29), tada operatori $exp(\lambda c_i \ell^{-(\beta-\alpha i)})$ predstavljaju funkciju E.M. Wrighta ([35]). Pomoću (1.33) i (1.34) dobija se procena:

$$(2.14) \qquad \int_0^T |t^{-1}\Phi(0,-(\beta-i\alpha); -\lambda c_i t^{-(\beta-\alpha i)}|dt \le$$

$$\le \frac{T^{2n+1}}{(2n)!} C(2n+1) + \frac{T^{2n+2}}{(2n+1)!} C(2n+2) \equiv: \tilde{R}_i(\lambda,T)$$

i = 1,...,r ili i = 0 za svako $n \in N$, $0 \le t \le T$ gde je

$$(2.14') \qquad C(k) = \frac{2}{\pi(\beta-i\alpha)} \Gamma(\frac{k}{\beta-i\alpha})$$

Operator $exp(\lambda c_r \ell^{r\alpha-\beta})$ jeste numerička funkcija za $r\alpha-\beta = 0$. Tada umesto $\tilde{R}_r(\lambda,T)$ imamo

$$\tilde{R}_r(\lambda) : \equiv exp(\lambda\cdot|c_r|).$$

Označimo sa

$$\{R_{r+1,g_1}(\lambda,t)\} : = |g_1 bexp(\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| =$$

$$= | \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (k\ell)^{i+1} bexp(\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| \le$$

$$(2.15) \qquad \le |k\ell bexp(\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| +$$

$$+ |b \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (k\ell)^{i+1} exp(\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta}) .$$

U daljem radu posmatraćemo samo takve probleme kod kojih su uslovi (2.2) takvi da ℓb predstavlja funkciju iz L.

Operator

$$\sum_{i=r+1}^{n} c_i \;{}^{i\alpha-\beta}$$

predstavlja funkciju iz L jer je najmanji eksponent od ℓ $(r+1)\alpha-\beta > 0$. Kako je konvolucija lokalno integrabilnih funkcija ponovo lokalno integrabilna funkcija sledi da operator

$$\Big(\sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta}\Big)^k$$

definiše lokalno integrabilnu funkciju. U izrazu

$$\Big(\sum_{i=r+1}^{n} c_i \;{}^{i\alpha-\beta}\Big)^k$$

najmanji eksponent jeste $((r+1)\alpha-\beta)k$ za $k = 0,1,\ldots$. Uvek postoji takav indeks k_1 da važi $((r+1)\alpha-\beta)k_1 < 1$ i $((r+1)\alpha-\beta)\cdot(k_1+1) \geq 1$ pa se može pisati:

$$|k\ell b\mathit{exp}(\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| \leq$$

$$\leq bk\Big(\ell + \{\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \frac{t^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-\beta)}\}\ell + \ldots +$$

$$+ \Big\{\frac{\lambda^{k_1}}{k_1!}\Big(\sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \frac{t^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-1)}\Big)^{*k_1}\Big\}\ell$$

$$\Big\{\sum_{k=k_1+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\Big(\sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \frac{t^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-\beta)}\Big)^{*k}\Big\}\Big) \equiv$$

$$\equiv : \{|R^1_{r+1,g_1}(\lambda,t)|\}$$

gde je $*k$ za $k = 2,3,\ldots$ i označava k puta primenjenu konvoluciju. U prethodnoj relaciji red

$$\sum_{k=k_1+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\Big(\sum_{i=r+1}^{n} c_i \frac{t^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-\beta)}\Big)^{*k}$$

uniformno konvergira za $t \geq 0$, pa na osnovu relacije (1.6) možemo pisati ($\lambda \ge 0$)

$$\int_0^T |R^1_{r+1,g_1}(\lambda,t)|dt \le$$

$$\le kD_{g_1}(T)\bigg(1 + \lambda \sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \int_0^T \frac{t^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-\beta)}\, dt + \dots +$$

$$+ \frac{k}{k_1!}\bigg(\sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \int_0^T \frac{t^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-\beta)}\, dt\bigg)^{k_1} +$$

(2.16) $$+ \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\bigg(\sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \int_0^T \frac{t^{i\alpha-\beta}}{\Gamma(i\alpha-\beta)}\, dt\bigg)^{k}\bigg) =$$

$$= kDg_1(T)\bigg(1 + \lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \frac{T^{i\alpha-\beta}}{\Gamma(i\alpha-\beta+1)} + \dots +$$

$$+ \frac{\lambda^{k_1}}{k_1!}\bigg(\sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \frac{T^{i\alpha-\beta}}{\Gamma(i\alpha-\beta+1)}\bigg)^{k_1} +$$

$$+ \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\bigg(\sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \frac{T^{i\alpha-\beta}}{\Gamma(i\alpha-\beta+1)}\bigg)^{k} = kD_{g_1}(T)e^{\lambda C(T)}$$

gde je

(2.17) $$D_{g_1}(T) : = \int_0^T |b_{g_1}(t)|dt, \ \{b_{g_1}(t)\} = \ell b$$

i

(2.18) $$C(T) : = \sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \frac{T^{i\alpha-\beta}}{\Gamma(i\alpha-\beta+1)} .$$

Ako označimo sa:

$$\{|R^2_{r+1,g_1}(\lambda,t)|\} : = |b \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (k\ell)^{i+1} exp(\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})|$$

$$\le | \sum_{i=1}^{\infty} (-k)^i \{\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\}| \cdot \{|R^1_{r+1,g_1}(\lambda,t)|\}$$

tada važi sledeća procena:

$$(2.19)\qquad \int_0^T |R^2_{r+1,g_1}(\lambda,t)|dt \le k\int_0^T e^{-kt}dt\; kD_{g_1}(T)e^{\lambda C(T)} =$$

$$= kD_{g_1}(T)\cdot e^{\lambda C(T)},$$

gde su $D_{g_1}(T)$ i $C(T)$ dati sa (2.17) i (2.18).

Na osnovu relacija (2.15), (2.16) i (2.19) važi:

$$\int_0^T |R_{r+1,g_1}(\lambda,t)|dt \le kD_{g_1}(T)\cdot e^{\lambda C(T)} \equiv : \tilde{R}_{r+1,g_1}(\lambda,t).$$

U slučaju c) procena operatora

$$|bg_1 exp(\sum_{i=0}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})|$$

vrši se analogno kao u prethodnom slučaju tako da je $r+1 = 0$.

Pod pretpostavkom da je $(n+1)\alpha-\beta > 1$ operator

$$exp(\lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{(i-p)/q}) - I$$

definiše funkciju iz L. Označimo sa $\{|\varepsilon(\lambda,t)|\}$ izraz

$$|exp(\lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}) - I|$$

koji se pojavljuje u sva tri slučaja a), b) i c). Izvršimo sledeće transformacije:

$$\{|\varepsilon(\lambda,t)|\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}(\sum_{i=n+1}^{\infty} |c_i|\ell^{i\alpha-\beta})^k \le$$

$$\le \ell^{\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}} \cdot \ell^{\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} |c_{n+1+i}|\ell^{i\alpha+1}\cdot\lambda \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\left(\ell^{(n+1)\alpha-\beta-1} \sum_{i=0}^{\infty} |c_{n+1+i}|\ell^{i\alpha+1}\right)^k .$$

Redovi u prethodnoj relaciji konvergiraju uniformno za $t \ge 0$ (jer je $(n+1)\alpha-\beta-1 > 0$) pa na osnovu toga možemo pisati:

(2.20)

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\varepsilon(\lambda,t)|dt \leq & \left(\int_0^T \frac{t^{\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}-1}}{\Gamma\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}}\right)^2 \cdot \\
& \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\int_0^T |c_{n+1+i}|\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\, dt \cdot \lambda \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \\
& \cdot \left(\int_0^T \frac{t^{(n+1)\alpha-\beta-2}}{\Gamma((n+1)\alpha-\beta-1)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}|c_{n+1+i}|\int_0^T \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right)^k \leq \\
\leq & \frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-1}}{\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}+1\right)\right)^2}\sum_{i=0}^{\infty}|c_{n+1+i}|\frac{T^{i\alpha+1}}{\Gamma(i\alpha+2)}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \\
& \cdot \left(\frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-1}}{\Gamma((n+1)\alpha-\beta)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty}|c_{n+1+i}|\frac{T^{i\alpha+1}}{\Gamma(i\alpha+2)}\right)^k \leq \\
\leq & \frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-1}}{\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}+1\right)\right)^2}\lambda\nu(T)\, exp\left(\lambda\cdot\nu(T)\cdot\frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-1}}{\Gamma((n+1)\alpha-\beta)}\right) = \\
= : & \frac{E(\lambda,T)}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

gde se korišćenjem rada [21] i činjenice da je $|a_i| \leq M\rho^i$, $i = 1,2,\ldots,\ M,\rho > 0$ dobija

(2.21)
$$\nu(T) \geq \sum_{i=0}^{\infty}|c_{n+1+i}|\frac{T^{i\alpha+1}}{\Gamma(i\alpha+2)}$$

i uvodi

(2.22)
$$\begin{aligned}
E(\lambda,T) = & \frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-1}}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}+1\right)} \cdot \nu(T)\cdot\lambda \cdot \\
& \cdot exp\left(\lambda\cdot\nu(T)\frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-1}}{(\Gamma(n+1)\alpha-\beta)}\right).
\end{aligned}$$

Korišćenjem prethodnih nejednakosti lako se pokazuje:

Lema 2.3. Ako su operatori $z(\lambda)$ i $z_n(\lambda)$ dati relacijama (2.9) i (2.10) respektivno, tada važi procena:

$$(2.23) \qquad B_{T,1/k}(z_n(\lambda) - z(\lambda)) \leq \|\varepsilon_{g_1}(\lambda,t)\|_T \leq$$

$$\leq k_{g_1}(\lambda,T,\alpha,\beta) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)}$$

gde je

$$(2.23') \quad k_{g_1}(\lambda,T,\alpha,\beta) = \begin{cases} \tilde{R}_o(\lambda,T)\ldots\tilde{R}_{r+1}(\lambda,T)E(\lambda,T) \\ \qquad \text{za } 0 \leq \beta < 1 \text{ i } \alpha > 0 \\ \tilde{R}_1(\lambda,T)\ldots\tilde{R}_r(\lambda,T)\tilde{R}_{r+1,g_1}(\lambda,T+\lambda c_o)E(\lambda,T) \\ \qquad \text{za } \beta = 1 \text{ i } 0 < \alpha \leq 1 \\ \tilde{R}_{1,g_1}(\lambda,T+\lambda c_o)(E(\lambda,T) \\ \qquad \text{za } \beta = 1 \text{ i } \alpha > 1 \\ \tilde{R}_{0,g_1}(\lambda,T)E(\lambda,T) \\ \qquad \text{za } \beta < 0 \text{ i } \alpha > 0 \end{cases}$$

2.4. PROCENA FUNKCIONELE $A(z_n(\lambda) - z(\lambda))$

Na osnovu (1.12) možemo pisati

$$(2.24) \qquad A(z_n(\lambda) - z(\lambda)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i,1/i}(z_n(\lambda) - z(\lambda))}{e^{ie^{i^2}}(1 + B_{i,1/i}(z_n(\lambda))-z(\lambda)))} .$$

Na osnovu činjenice da je funkcija $y = \frac{x}{1+x}$ monotono rastuća za $x > 0$, možemo pisati na osnovu leme 2.3.

$$(2.25) \qquad \frac{B_{T,1/k}(z_n(\lambda) - \dot{z}(\lambda))}{1+B_{T,1/k}(z_n(\lambda)-z(\lambda))} \leq \frac{k_{g_1}(\lambda,T,\alpha,\beta)\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}+1\right)\right)^{-1}}{1+k_{g_1}(\lambda,T,\alpha,\beta)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)}}$$

$$\leq \frac{1}{\left(\Gamma\,\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)} k_{g_1}(\lambda,T,\alpha,\beta)$$

Na osnovu relacija (2.14), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) i (2.22), kao i činjenice da za koeficijente c_i važi nejednakost $|c_i| \leq M\rho^i$ ([21]) postoje konstante k_{1,g_1} i k_{2,g_2} koje zavise od λ,α,β i g_1 i konstanta k_3 koja zavisi od α i β tako da važi:

$$k_{g_1}(\lambda,T,\alpha,\beta) \le k_{1,g_1}\cdot e^{k_{2,g_2}e^{k_3 T}} .$$

Red

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{1,g_1}\cdot e^{k_{2,g_2}e^{k_3 i}}}{e^{ie^{i^2}}}$$

je takodje konvergentan.

Na osnovu relacija (2.23), (2.24) i (2.25) dobijamo

$$A(z_n(\lambda) - z(\lambda)) \le \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k(\lambda,i,\alpha,\beta)}{e^{ie^{i^2}}} \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}+1\right)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{1,g_1}\cdot e^{k_{2,g_2}e^{k_3 i}}}{e^{ie^{i^2}}} .$$

Time smo pokazali da važi

Lema 2.4. Ako su članovi niza $\{z_n(\lambda)\}$, čiji su članovi dati sa (2.9) i $z(\lambda)$ je dato sa (2.10), tada važi

$$(2.26) \qquad A(z_n(\lambda) - z(\lambda)) \le \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)} Q_{g_1}(\lambda,\alpha,\beta)$$

gde je broj $Q_{g_1}(\lambda,\alpha,\beta)$ takav da važi

$$(2.27) \qquad Q_{g_1}(\lambda,\alpha,\beta) : \ge \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{1,g_1} e^{k_{2,g_2}e^{k_3 i}}}{e^{ie^{i^2}}} .$$

Prema tome važi

Teorema 2.1. Niz operatora $\{x_n(\lambda)\}$ čiji su članovi dati relacijom (2.5), kao približna rešenja diferencijalne jednačine (2.1) sa uslovom (2.2) konvergira u konvergenciji tipa I´ ka operatoru $x(\lambda)$ koji je dat relacijom (2.3) kao tačno rešenje iste diferencijalne jednačine.

2.5. MERA APROKSIMACIJE U F_o

Na osnovu definicije 1.9. i teoreme 2.1. možemo reći da približno rešenje diferencijalne jednačine (2.1) sa uslovima (2.2), dato sa (2.5), aproksimira tačno rešenje dato relacijom (2.3) sa merom aproksimacije Δ, u odnosu na A(x), tako da je

$$(2.28) \qquad \Delta = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}+1\right)} Q_{g_1}(\lambda,\alpha,\beta)$$

gde je $Q_{g_1}(\lambda,\alpha,\beta)$ dato sa nejednakosti (2.27).

Relacijom (2.28) dobili smo meru aproksimacije za jedno iz skupa linearno nezavisnih rešenja. Ako su sva rešenja karakteristične jednačine date diferencijalne jednačine jednostruka i logaritmi, tada tačno rešenje ima oblik (1.24), a približno

$$(2.29) \qquad x_{h,n} = \sum_{j=1}^{m} b_j exp(\lambda\omega_{j,n})$$

gde su $\omega_{j,n}$ oblika (2.8). U cilju odredjivanja mere aproksimacije formiraćemo operatore

$$z_{h,n}(\lambda) = \frac{gx_{h,n}(\lambda)}{g},$$

gde je $x_{h,n}(\lambda)$ dato relacijom (2.29)

$$(2.30) \qquad z_h(\lambda) = \frac{gx_h(\lambda)}{g},$$

gde je $x_h(\lambda)$ dato sa (1.24), i operator g predstavlja funkciju iz L_o.

Funkcionelu $B_{T,\varepsilon}(z_{h,n}(\lambda) - z_h(\lambda))$ formiramo na sledeći način

$$B_{T,\varepsilon}(z_{h,n}(\lambda) - z_h(\lambda)) = inf\{\|\varepsilon_{g,h}(\lambda,t)\|_T,$$

$$g \in L_o, \ \|g\|_T < 1, \ \|\ell-\ell g\|_T < \varepsilon\}$$

gde je

$$(2.21)\qquad \{\varepsilon_{g,h}(\lambda,t)\} := g\cdot\sum_{j=1}^{m} b_j(exp(\lambda\omega_j) - exp(\lambda\omega_{j,n})).$$

Ako operator g_1 zadovoljava uslove iz leme 2.2. tada važi:

$$B_{T,1/k}(z_{h,n}(\lambda) - z_h(\lambda)) \leq \|\varepsilon_{g_1,h}(\lambda,t)\|_T .$$

Na osnovu (2.31) važi

$$(2.31')\qquad \|\varepsilon_{g_1,h}(\lambda,t)\|_T \leq \|E_{g_1,1}(\lambda,t)\|_T + \|E_{g_1,2}(\lambda,t)\|_T + \ldots$$

$$\ldots + \|E_{g_1,m}(\lambda,t)\|_T$$

gde su

$$\{E_{g_1,j}(\lambda,t)\} = g_1 b_j(exp(\lambda\omega_j) - exp(\lambda\omega_{j,n})).$$

Svaki od izraza $\|E_{g_1,j}(\lambda,t)\|_T$, za $j = 1,\ldots,m$ procenjen je u paragrafu 2.3, pa na osnovu relacije (2.23) i leme (2.3) možemo dokazati

Lema 2.5. Ako su operatori $z_{h,n}(\lambda)$ i $z_h(\lambda)$ dati relacijom (2.30) tada važi procena

$$B_{T,1/k}(z_{h,n}(\lambda) - z_h(\lambda)) \leq \|\varepsilon_{g_1,h}(\lambda,t)\|_T \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} k_{g_1}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)\cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)}$$

gde je svaki od izraza $k_{g_1}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)$ za $j = 1,\ldots,m$ dati relacijom (2.23´) i postoje konstante $k_{1,g_1,j}$ i $k_{2,g_1,j}$ koje zavise od λ,α_j,β_j i g_1 a konstanta $k_{3,j}$ koja zavisi od α_j i β_j, tako da važe nejednakosti:

$$(2.32)\qquad k_{g_1}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) \leq k_{1,g_1,j}\cdot e^{k_{2,g_1,j}e^{k_{3,j}T}},\qquad j = 1,\ldots,m.$$

Analogno, kao i lema 2.4. pokazuje se i

Lema 2.6. Ako su članovi niza operatora $\{z_{h,n}(\lambda)\}$ kao i operator $z_h(\lambda)$ dati relacijom (2.30), tada važi:

$$A(z_{h,n}(\lambda) - z_h(\lambda)) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)} Q_{g_1}(\lambda,\alpha,\beta)$$

gde su brojevi $Q_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ takvi da važi:

$$(2.32') \qquad Q_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{1,g_1,j}\cdot e^{k_{2,g_1,j}\cdot e^{k_{3,j}i}}}{e^{ie^{i^2}}} .$$

Prema tome važi:

Teorema 2.2. Niz operatora $\{x_{h,n}(\lambda)\}$, čiji su članovi približna rešenja diferencijalne jednačine (2.1) sa uslovima (2.2) dati relacijom (2.29), konvergira u konvergenciji tipa I´ ka operatoru $x_h(\lambda)$, izraženim relacijom (1.24), koji predstavlja tačno rešenje istog problema.

Na osnovu izloženog i definicije 1.8. možemo reći da približno rešenje diferencijalne jednačine (2.1) sa uslovima (2.2), dato sa (2.29), aproksimira tačno rešenje, dato relacijom (1.23), sa merom aproksimacije, u odnosu na A(x), koju ćemo označiti sa Δ^h

$$\Delta^h = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1)}{2} + 1\right)} Q_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$$

gde su $Q_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ dati relacijom (2.33) za j = 1,...,m.

2.6. PROCENE U L

U početku ćemo opet posmatrati samo jedno rešenje oblika (2.3) diferencijalne jednačine (2.1) sa uslovima (2.2) i odgovarajuće približno rešenje u obliku (2.5). Pretpostavićemo da operator $x(\lambda)$ kao i operatori $x_n(\lambda)$ predstavljaju funkcije iz L. Pokazaćemo da niz $\{x_n(\lambda)\}$, gde svaki član predstavlja jedno približno rešenje, konvergira u L ka tačnom rešenju $x(\lambda)$. Kao što je rečeno u glavi 1., konvergencija u L ekvivalentna je sa konvergencijom definisanom pomoću funkcionele $F(f)$ za $f \in L$, koja je data sa (1.15). U cilju procene funkcionele $F(x_n(\lambda) - x(\lambda))$ potrebno je proceniti izraz $\| x_n(\lambda,t) - - x(\lambda,t)\|_T$. U tom cilju moramo ponovo razlikovati tri slučaja u zavisnosti od β: (Pretpostavka $(n+1)\alpha-\beta > 1$ ne umanjuje opštost.)

a) Ako je $\beta = 1$ tada se može pisati:

$$b(exp(\lambda\omega_n) - exp(\lambda\omega)) =$$

$$= e^{\lambda cos} \prod_{i=1}^{r} exp(\lambda c_i \ell^{i\alpha-1}) b \cdot exp(\lambda \cdot \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-1}) \cdot \tag{2.33}$$

$$\cdot (exp(\lambda \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-1}) - I)$$

gde je r izabrano tako da je $(r+1)\alpha-1 > 0$.

b) Ako je $0 \leq \beta < 1$ imamo:

$$|b(exp(\lambda\omega_n) - exp(\lambda\omega))| \leq |exp(\lambda \sum_{i=0}^{r} c_i \ell^{\alpha-\beta})| \cdot$$

$$\cdot |b \cdot exp(\lambda \cdot \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| \cdot | exp(\lambda \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}) - I|.$$

Ako je $\beta < 0$ tada možemo pisati:

$$|b(exp(\lambda\omega_n) - exp(\lambda\omega))| \leq |b\ exp(\lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| \cdot$$

$$\cdot |exp\ (\lambda \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}) - I|.$$

Ako označimo sa

$$\{|R_{r+1}(\lambda,t)|\} := |b\ exp(\lambda \sum_{i=0}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})|$$

tada analogno kao u relaciji (2.16):

$$\int_0^T |R_{r+1}(\lambda,t)|dt \le D(T)\ e^{\lambda C(T)} = \tilde{R}_{r+1}(\lambda,T) \tag{2.34}$$

gde je

$$D(T) : = \int_0^T |b(t)|dt$$

a C(T) je izraženo u (2.18).

Na osnovu procena (2.14), (2.20) i (2.34) dokazuje se sledeća

Lema 2.7. Ako operatori $x(\lambda)$ i $x_n(\lambda)$, dati sa (2.3) i (2.5) respektivno, definišu funkcije iz L, tada važi procena:

$$\|x_n(\lambda) - x(\lambda)\|_T \le k(\lambda,T,\alpha,\beta)\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)}$$

gde je

$$k(\lambda,T,\alpha,\beta) = \begin{cases} R_0(\lambda,T)\ \ldots\ R_{r+1}(\lambda,T)E(\lambda,T) \\ \qquad \text{za } 0 \le \beta < 1 \text{ i } \alpha > 0 \\ R_1(\lambda,T)\ \ldots\ R_r(\lambda,T)R_{r+1}(\lambda,T+\lambda c_0)E(\lambda,T) \\ \qquad \text{za } \beta = 1 \text{ i } \alpha \le 1 \\ R_1(\lambda,T+\lambda c_0)E(\lambda,T) \\ \qquad \text{za } \beta = 1 \text{ i } \alpha > 1 \\ R_0(\lambda,T)E(\lambda,T) \quad \text{za } \beta < 0 \text{ i } \alpha > 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Analogno kao u § 2.4 sledi:

Lema 2.8. Ako članovi niza $\{x_n(\lambda)\}$ dati sa (2.5) kao i operator $x(\lambda)$, koji je dat sa (2.3), predstavljaju funkcije iz L, tada važi procena

$$F(x_n(\lambda) - x(\lambda)) \le \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)}\ Q(\lambda,\alpha,\beta)$$

gde je

$$Q(\lambda,\alpha,\beta) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_1 \cdot e^{k_2 e^{k_3 i}}}{e^{ie^{i^2}}} \tag{2.36}$$

Naime, uvek postoje konstante k_1 i k_2 koje zavise od λ,α,β i konstanta k_3 koja zavisi od α i β takve da važi:

$$k(\lambda,T,\alpha,\beta) < k_1\ e^{k_2 e^{k_3 T}}$$

i važi

Teorema 2.3. Niz $\{x_n(\lambda)\}$, čiji članovi predstavljaju približna rešenja diferencijalne jednačine (2.1) sa uslovima (2.2) i definišu funkciju iz L, konvergira u L ka $x(\lambda)$ iz L, odnosno ka tačnom rešenju pomenute jednačine.

Lema 2.8. i teorema 2.3. su veoma značajne jer kao što je rečeno u § 1.5 iz konvergencije definisane pomoću F(x) sledi konvergencija definisana pomoću A(x), medjutim obrnuto ne mora biti tačno. Ako su tačno i približno rešenje posmatrane jednačine operatori koji predstavljaju funkcije iz L, tada je dovoljno pokazati konvergenciju u L kao i odrediti meru aproksimacije u L.

2.7. MERA APROKSIMACIJE U L

Na osnovu definicije 1.10 i teoreme 2.3. možemo reći da približno rešenje (2.1) sa uslovima (2.2) dato sa (2.5), koje definiše funkciju iz L, aproksimira tačno rešenje oblika (2.3) takodje iz L, sa merom aproksimacije Δ_L u odnosu na F(f)

$$\Delta_L = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)}\ Q(\lambda,\alpha,\beta)$$

gde je $Q(\lambda,\alpha,\beta)$ dato sa (2.36).

Može se pokazati sledeća:

Lema 2.9. Ako članovi niza $\{x_{h,n}(\lambda)\}$ dati sa (2.29) predstavljaju funkcije iz L i operator $x_h(\lambda)$ iz relacije (1.24) takodje predstavlja funkciju iz L, tada važi procena

$$F(x_{h,n}(\lambda) - x_h(\lambda)) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2} + 1\right)} Q(\lambda,\alpha_j,\beta_j),$$

gde je

$$Q(\lambda,\alpha_j,\beta_j) > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{1,j}\cdot e^{k_{2,j}\cdot e^{k_{3,j}i}}}{e^{ie^{i^2}}} \tag{2.37}$$

gde su konstante $k_{1,j}$, $k_{2,j}$ koje zavise od λ, α_j i β_j i konstante $k_{3,j}$ koje zavise od α_j i β_j, takve da važi nejednakost

$$k(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) \leq k_{1,j}\cdot e^{k_{2,j}\cdot e^{k_{3,j}T}}$$

za $k(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)$ odredjeno relacijom (2.35) za $j = 1,\dots,m$.

2.8. PROCENE U SKUPU NEPREKIDNIH FUNKCIJA C

Pod pretpostavkom da su tačno i približno rešenje operatori koji predstavljaju funkcije iz C, pokazaćemo da niz $\{x_n(\lambda)\}$, gde je svaki član dat sa (2.5), konvergira u C ka operatoru $x(\lambda)$, koji je dat relacijom (2.3). Jasno je, da ako su tačno i približno rešenje operatori koji definišu funkcije iz C, tada oni istovremeno definišu i funkcije iz L i pripadaju prostoru F_0. Medjutim, konvergencija u F_0 ne povlači konvergenciju u L, niti konvergencija u L povlači konvergenciju u C. Zato je potrebno ispitati uniformnu konvergenciju niza $\{x_n(\lambda)\}$ (po t, za fiksno λ) ka $x(\lambda)$, koja je ekvivalentna sa konvergencijom definisanom pomoću funkcionele G(h), za $h \in C$, koja je data relacijom (1.17). U cilju procene funkcionele $G(x_n(\lambda) - x(\lambda))$ potrebno je proceniti izraz $|x_n(\lambda,t) - x(\lambda,t)|_T$ (gde je $|h(t)|_T = \sup\limits_{0\leq t\leq T} |h(t)|$). Pri tome ćemo koristiti relacije (1.2), a), b), c), d) i e) i ponovo razlikovati tri slučaja u zavisnosti od β kao u relaciji (2.33). Na osnovu (1.33) važi

$$(2.38)\qquad |exp(\lambda c_i \ell^{-(\beta-\alpha i)})| \leq_T \frac{T^{2n}}{(2n)!} C(2n+1) + \frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!} C(2n+2) \equiv$$

$$\equiv \tilde{R}_i^c(\lambda,T)$$

za iα-β < 0 za i = 0,...,r, za svako n ∈ N, 0 ≤ t ≤ T gde je C(k) dato sa (1.34).

Operator

$$b\,exp(\lambda \cdot \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})$$

gde je (r+1)α-β ≥ 0, sada definiše neprekidnu funkciju. Pod pretpostavkom da je (r+1)α-β > 1 važi

$$|b\,exp(\lambda \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta})| \leq |b| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \Big| \sum_{i=r+1}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta} \Big|^k \leq_T$$

$$\leq_T L_1(T)\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \frac{T^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-\beta)} \right)^k \cdot \ell^k \leq_T$$

$$\leq_T L_1(T) \cdot e^{\lambda C_1(T)t} \ell \equiv : \tilde{R}^c_{r+1}(\lambda,T)\ell$$

gde je

$$|b| \leq_T L_1(T)\cdot\ell$$

i

$$C_1(T) \geq \sum_{i=r+1}^{n} |c_i| \frac{T^{i\alpha-\beta-1}}{\Gamma(i\alpha-\beta)} .$$

Operator

$$exp(\lambda \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}) - I$$

predstavlja funkciju iz C, (zbog pretpostavke da je (n+1)α-β > 1) pa na osnovu nejednakosti $|c_i| \leq M\rho^i$, M,ρ > 0 ([21]) možemo pisati:

$$
\begin{aligned}
&|exp(\lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta}) - I| = |\sum_{k=1} \frac{\lambda^k}{k!}(\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-\beta})^k| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!}\left(\ell^{(n+1)\alpha-\beta-1} \sum_{i=0}^{\infty} c_{n+1+i}\ell^{i\alpha+1}\right)^k \leq \\
(2.40)\quad &\leq_T \frac{\left(T^{\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}} - 1\right)^2}{\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}\right)\right)^2}\ell^3\left(\sum_{i=0}^{\infty} M\rho^i \frac{T^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right)^\lambda \cdot \\
&\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!}\left(\frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-1}}{((n+1)\alpha-\beta)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} M\rho^i \frac{T^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right)^k \cdot \ell^k \leq \\
&\leq \frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-1}}{\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}\right)\right)^2} \nu_1(T) \cdot \\
&\cdot exp\left(|\lambda| \frac{T^{(n+1)\alpha-\beta}}{\Gamma((n+1)\alpha-\beta)} \nu(T)\right)\ell \equiv \frac{E^c(\lambda,T)}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}\right)} \cdot \ell
\end{aligned}
$$

gde je

$$\nu_1(T) \geq \sum_{i=0}^{\infty} M\rho^i \cdot \frac{T^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}$$

i

$$E^c(\lambda,T) = \frac{T^{(n+1)\alpha-\beta-3}}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}\right)} \cdot \nu_1(T)exp\left(|\lambda|\frac{T^{(n+1)\alpha-\beta}}{\Gamma((n+1)\alpha-\beta)}\right)\ell^3$$

Korišćenjem nejednakosti (2.38), (2.39) i (2.40) lako se pokazuje:

Lema 2.10. Ako operatori $x_n(\lambda)$ i $x(\lambda)$ dati sa (2.5) i (2.3) respektivno, predstavljaju neprekidne funkcije tada važi procena:

$$|b(x_n(\lambda,t) - x(\lambda,t))|_T \leq k_c(\lambda,T,\alpha,\beta) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}\right)}$$

gde je $k_c(\lambda,T,\alpha,\beta)$

$$(2.41)\quad k_c(\lambda,T,\alpha,\beta) = \begin{cases} \tilde{R}_o^c(\lambda,T)\ \dots\ \tilde{R}_{r+1}^c(\lambda,T)E^c(\lambda,T)\dfrac{T^{r+4}}{(r+4)!} \\ \qquad \text{za } 0 < \beta < 1 \text{ i } \alpha > 0 \\ \bar{R}_1^c(\lambda,T)\ \dots\ \tilde{R}_r^c R_{s+1}^c(\lambda,T+\lambda co)E^c(\lambda,T)\cdot \\ \quad \cdot\ \dfrac{T^{r+1}}{(r+3)!} \quad \text{za } \beta = 1,\ 0 < \alpha \leq 1 \\ \tilde{R}_1^c(\lambda,T+\lambda co)E^c(\lambda,T)\dfrac{T^3}{3!} \\ \qquad \text{za } \beta = 1 \text{ i } \alpha > 1 \\ \tilde{R}_o^c(\lambda,T)E^c(\lambda,T)\ \dfrac{T^3}{3!};\ \beta < 0 \text{ i } \alpha > 0 \\ Ro(\lambda)\tilde{R}_1^c(\lambda,T)E^c(\lambda,T)\ \dfrac{T^3}{3!};\ \beta = 0,\ \alpha > 0 \end{cases}$$

dok je r odredjeno tako da $r\alpha-\beta < 0$ dok je $(r+1)\alpha-\beta \geq 0$

Analogno kao leme 2.4. i 2.6 pokazuje se i sledeća

Lema 2.11. Ako su članovi niza $\{x_n(\lambda)\}$, dati sa (2.5) i $x(\lambda)$ sa (2.3) i predstavljaju neprekidne funkcije, tada važi:

$$G(x_n(\lambda,t) - x(\lambda,t)) \leq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}\right)} Q_c(\lambda,\alpha,\beta)$$

gde je $\{x_n(\lambda,t)\} = x_n(\lambda)$ i $\{x(\lambda,t)\} = x(\lambda)$ i $Q_c(\lambda,\alpha,\beta)$ zadovoljava nejednakost:

$$(2.42)\qquad Q_c(\lambda,\alpha,\beta) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{1,c}\cdot e^{k_{2,c}\cdot e^{k_{3,c}\cdot i}}}{e^{ie^{i^2}}}$$

i konstante $k_{1,c}$, $k_{2,c}$ zavise od λ,α i β, $k_{3,c}$ zavisi od α i β i

$$k_c(\lambda,T,\alpha,\beta) \leq k_{1,c}\cdot e^{k_{2,c}\cdot e^{k_{3,c}\cdot T}}.$$

Teorema 2.4. Niz neprekidnih funkcija $\{x_n(\lambda,t)\}$,(relacija (2.5)) koje predstavljaju približna rešenja diferencijalne jednačine (2.1) sa uslovima (2.2) konvergira u C ka neprekidnoj funkciji $x(\lambda,t)$ koja je data relacijom (2.3).

Prema tome, možemo reći da je mera aproksimacije Δ_c, u odnosu na $G(h)$, za $h \in C$, sa kojom svako od približnih rešenja, oblika (2.5), aproksimira tačno rešenje (2.3) oblika

$$(2.43) \qquad \Delta_c = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2}\right)} \cdot Q_c(\lambda,\alpha,\beta)$$

gde je $Q_c(\lambda,\alpha,\beta)$ dato relacijom (2.42).

Ako su sva linearno nezavisna rešenja date jednačine neprekidne funkcije, tada su odgovarajuća približna rešenja neprekidne funkcije i može se pokazati:

Lema 2.12. Ako su članovi niza $\{x_{h,n}(\lambda)\}$ dati relacijom (2.29) i $x_h(\lambda)$ dato relacijom (1.24) i predstavljaju neprekidne funkcije, tada važi:

$$G(x_{h,n}(\lambda,t) - x_h(\lambda,t)) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}\right)} Q_c(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$$

gde je $x_{h,n}(\lambda,t) = x_{h,n}(\lambda)$ i $x_h(\lambda,t) = x_h(\lambda)$ i $Q_c(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ se odredjuje analogno kao u relaciji (2.42) za $j = 1,2,\ldots,m$.

Teorema 2.5. Niz operatora $x_{h,n}(\lambda)$, čiji su članovi približna rešenja diferencijalne jednačine (2.1) sa uslovima (2.2) i predstavljaju funkcije iz C, konvergira ka tačnom rešenju u skupu C.

Mera aproksimacije je tada:

$$(2.44) \qquad \Delta_c^h = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}\right)} \cdot Q_c(\lambda,\alpha_j,\beta_j) .$$

2.9. PRIBLIŽNO REŠENJE HOMOGENE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE OBLIKA (1.25)

Posmatraćemo u polju operatora M diferencijalnu jednačinu

$$\sum_{k=0}^{m} \gamma_k(s)\, x^{(k)}(\lambda) = 0 \tag{2.45}$$

gde je

$$\gamma_k(s) = \sum_{\nu=0}^{d_k} a_{k,\nu} s^{\nu}, \quad d_k \leq m, \; k = 0,\dots,n \,, \tag{2.46}$$

$$a_{k,\nu} = \sum_{j=1}^{b_{k,\nu}} \beta_{k,\nu,j}\, e^{-\tau_j^{k,\nu} s} \,. \tag{2.47}$$

$\beta_{k,\nu,j}$ su numeričke konstante i brojevi $\tau_{j+1}^{k,\nu} > \tau_j^{k,\nu} > 0$, $b_{k,\nu} \geq 1$.

Na osnovu relacije (1.1) važi:

$$\ell e^{-\tau_j^{k,\nu} s} = H_{\tau_j^{k,\nu}}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \tau_j^{k,\nu} \\ 1 & t \geq \tau_j^{k,\nu} \end{cases} \tag{2.48}$$

tako da izraz

$$\ell a_{k,\nu} = \ell \cdot \sum_{j=1}^{b_{k,\nu}} \beta_{k,\nu,j}\, e^{-\tau_j^{k,\nu} s} = \sum_{j=1}^{b_{k,\nu}} \beta_{k,\nu,j} \cdot H_{\tau_j^{k,\nu}} \tag{2.49}$$

predstavlja stepenastu funkciju. Označićemo sa A podskup od M čiji su elementi oblika sH, gde je H stepenasta funkcija kao u radu [22]. A je komutativni prsten u odnosu na restrikciju od dve operacije koje su definisane u M. Jedinični element jeste $sH_0(t) = I$.

Za elemente

$$s \cdot \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, H_{\tau_j}(t),$$

broj

$$p = \sum_{j=1}^{q} |\beta_j|$$

se zove koeficijenat ograničenja.

U cilju konstrukcije tačnog i približnog rešenja pomenućemo sledeće leme ([22]):

Lema 2.13. Neka je $\{a_n\}$ niz iz A i $\{p_n\}$ niz odgovarajućih koeficijenata ograničenja. Ako red

$$\sum_{n\geq 0} p_n \cdot \ell^{n\gamma}, \quad \gamma > 0$$

konvergira u M, tada red

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \ell^{n\gamma+1}, \quad \gamma > 0$$

konvergira u M takodje.

Lema 2.14. Ako numerički red

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k z^k$$

konvergira u polju kompleksnih brojeva za $z \neq z_0 \neq 0$, tada red

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k (a\ell^{\gamma})^k,$$

konvergira u M.

Lema 2.15. Ako je

$$a = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \, e^{\tau_i s}$$

i $\tau_1 \neq 0$, tada $exp(\lambda a s^{\gamma})$ postoji za svako $\gamma \in R$ i λ kompleksan broj. Ako je $\tau_1 = 0$, tada je potreban i dovoljan uslov da

$exp(\lambda as^{\gamma})$ postoji, da bude $\gamma < 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ili $\gamma = 1$ i $\lambda\beta_1 \in \mathbb{R}$.

Karakteristična jednačina jednačine (2.45) jeste

$$\sum_{k=0}^{m} a_{k,\nu}\ell^{m-\nu}\omega^{k} = 0 \tag{2.50}$$

sa rešenjem ([22]):

$$\omega = \ell^{-q/p} \cdot \sum_{i\geq 0} a_i \ell^{i/p} \tag{2.51}$$

$p,q \in N$ i $a_i \in A$.

Takodje je dokazana

Lema 2.16. Neka je ω konvergentan red oblika (2.51). Potreban i dovoljan uslov da postoji $exp(\lambda\omega)$ jeste da postoji $exp(\lambda a_i \ell^{(i-q)/p})$ za $i = 0,\ldots,i_0-1$, gde je i_0 najmanji prirodan broj i za koji je $i-q > 0$.

Jedno rešenje jednačine (2.45) je oblika ([22]).

$$x(\lambda) = b\,exp(\lambda\omega) \tag{2.52}$$

gde je ω oblika (2.51) i operator b zavisi od uslova za datu jednačinu.

Približno rešenje jednačine (2.45) jeste

$$\bar{x}_n(\lambda) = b\,exp(\lambda\omega_n) \tag{2.53}$$

gde je

$$\bar{\omega}_n = \ell^{-q/p} \sum_{i=0}^{n} a_i \ell^{i/p}. \tag{2.54}$$

2.10. ODREDJIVANJE MERE APROKSIMACIJE

Analogno, kao relacije (2.9) i (2.10) formiraju se operatori

$$\bar{z}_n(\lambda) = \frac{g\bar{x}_n(\lambda)}{g} \tag{2.55}$$

gde je $\bar{x}_n(\lambda)$ dato sa (2.53), i

$$\bar{z}(\lambda) = \frac{g\bar{x}(\lambda)}{g} \tag{2.56}$$

gde je $\bar{x}(\lambda)$ dato sa (2.52) i $g \in L_o$.

Na osnovu relacije (2.51) možemo pisati

$$\begin{aligned} exp(\lambda\omega) &= exp\left(\lambda \cdot \sum_{i=0}^{i_o-1} a_i \ell^{(i-q)/p}\right) \cdot \\ &\cdot\, exp\left(\lambda \sum_{i=i_o}^{i'-1} a_i \ell^{(i-q)/p}\right) exp\left(\lambda \sum_{i=i'}^{\infty} a_i \ell^{(i-q)/p}\right) \end{aligned} \tag{2.57}$$

gde je i_o najmanji prirodan broj i koji zadovoljava uslov $i-q > 0$; i' je najmanji prirodan broj i koji zadovoljava uslov $i-q \ge p$.

Pretpostavimo da su koeficijenti a_i, $i = 0,\dots,i_o-1$ takvi da važi

$$exp(\lambda \cdot \sum_{i=0}^{i_o-1} a_i \ell^{(i-q)/p}) = I.$$

Drugi faktor u (2.57) se može posmatrati u obliku

$$exp(\lambda \sum_{i=i_o}^{i'-1} a_i \ell^{(i-q)/p}) = \prod_{i=i_o}^{i'-1} exp(\lambda a_i \ell^{(i-q)/p}).$$

Dalje je

$$\begin{aligned} exp(\lambda a_i \ell^{(i-q)/p}) &= \sum_{k=0}^{k_1} \frac{\lambda^k}{k!} (a_i)^k \ell^{(i-q)k/p} + \\ &+ \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (a_i)^{k_1} \ell^{(i-q)k/p} \end{aligned}$$

gde je indeks k_1 odredjen tako da je $(i-q)k/p < 1$ za $k = 0,\dots$ $\dots,k_1$ dok je $(i-q)(k_1+1)/p \ge 1$.

Proizvod elemenata iz A jeste elemenat iz A pa je $(a_i)^k$ oblika sH gde je H stepenasta funkcija.

Treći faktor se može posmatrati kao

$$(2.59) \qquad exp\left(\lambda \cdot \sum_{i=i'}^{\infty} a_i \ell^{(i-q)/p}\right) = I +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\sum_{i=i'}^{\infty} a_i \ell \cdot \ell^{((i-q)/p)-1} \right)^k .$$

Na osnovu (2.58) i (2.59) dokazuje se

Lema 2.17. Ako je operator b oblika $\alpha I + f$, gde je α kompleksan broj i f je funkcija iz L, tada je za $g \in L_o$, $gb\,exp(\lambda\omega)$ operator koji definiše funkciju iz L (po t) pa, prema tome, $\bar{z}_n(\lambda)$ i $\bar{z}(\lambda)$ pripadaju prostoru F_o.

Važi takodje:

Teorema 2.6. Niz operatora $\{\bar{x}_n(\lambda)\}$ čiji su članovi oblika (2.53) konvergira ka operatoru $\bar{x}(\lambda)$ koji je dat relacijom (2.52) u konvergenciji tipa I´.

Približno rešenje $\bar{x}_n(\lambda)$ dato relacijom (2.53) aproksimira tačno rešenje $x(\lambda)$ dato relacijom (2.52) sa merom aproksimacije Δ_d u odnosu na funkcionelu A(x), tako da je

$$\Delta_d = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha-\beta-1}{2} + 1\right)} \bar{Q}_{g_1}(\lambda,\alpha,\beta)$$

gde se $\bar{Q}_{g_1}(\lambda,\alpha,\beta)$ formiraju analogno kao $Q_g(\lambda,\alpha,\beta)$ i u relaciji (2.27), s tim što se umesto koeficijenata a_i iz (2.54) posmatraju odgovarajući koeficijenti ograničenja c_i za koje postoje $M, \rho > 0$ takvi da važi $|c_i| < M\rho^i$.

3. KONSTRUKCIJA PRIBLIŽNOG REŠENJA NEHOMOGENE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE OPERATORA I MERA APROKSIMACIJE

U ovoj glavi posmatraćemo nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$(3.1)\qquad \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{\mu,\nu} \frac{\partial^{\mu+k} x(\lambda,t)}{\partial\lambda^{\mu}\, \partial t^{k}} = f_1(\lambda,t);\ 0 \leq \lambda \leq \lambda_1,\ 0 \leq t \leq \infty$$

sa uslovima

$$(3.2)\qquad \frac{\partial^{\mu+k} x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{\mu}\, \partial t^{k}} = \psi_{\mu,k}(\lambda) \quad \text{za} \quad \mu = 0,\dots,m,\ k = 0,\dots,n-1$$

$$(3.3)\qquad \frac{\partial^{\mu} x(0,t)}{\partial\lambda^{\mu}} = \varphi_{\mu}(t) \quad \text{za} \quad \mu = 0,\dots,m-1$$

pod pretpostavkom da su $f_1(\lambda,t)$, $\psi_{\mu,k}(\lambda)$ i $\varphi_{\mu}(t)$ za $\mu = 0,\dots$ $\dots,m-1$ i $k = 0,\dots,n-1$ neprekidne funkcije po obe promenljive.

U polju operatora Mikusinskog M jednačini (3.1) sa uslovima (3.2) odgovara jednačina

$$(3.4)\qquad \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{\mu,\nu} s^{\nu} x^{(\mu)}(\lambda) = f(\lambda)$$

gde je

$$(3.4')\qquad f(\lambda) = \{f_1(\lambda,t)\} + \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{k-1} s^{n-\nu-1} \alpha_{\mu,n-k+\nu} \psi_{\mu,\nu}(\lambda)$$

sa uslovima:

(3.5) $x^{(\mu)}(0) = \varphi_\mu$ gde je $\varphi_\mu = \{\varphi_\mu(t)\}$.

U prvom delu ove glave (§ 3.1) konstruisaćemo približno rešenje diferencijalne jednačine (3.4) sa specijalnim uslovima, kada su operatori $\varphi_\mu = 0$ za $\mu = 0,\dots,m-2$ i $\varphi_{m-1} =$ $= \ell^r$, $n \geq r \geq 0$. (Problemi tipa I). Formiraju se operatori $y_n(\lambda)$ i $y(\lambda)$, pokazuje da oni pripadaju prostoru F_0 (§ 3.2, § 3.3). Takodje se konstruiše mera aproksimacije u F_0, L i C (§ 3.3, § 3.4, § 3.5).

U drugom delu ove glave (§ 3.6, § 3.7, § 3.8) konstruiše se približno rešenje iste diferencijalne jednačine pod pretpostavkom da su uslovi (3.5) nehomogeni (Problemi tipa II). Posebna pažnja se posvećuje koeficijentima A_j kao i $A_{j,n}$ (§ 3.7, § 3.8). Odredjuje se mera aproksimacije u F_0, L i C (§ 3.9, § 3.10, § 3.11) sa kojom približno rešenje posmatranog problema aproksimira tačno.

3.1. PRIBLIŽNO REŠENJE PROBLEMA TIPA I

Tačno rešenje diferencijalne jednačine (3.4) je oblika

(3.6) $$x(\lambda) = x_h(\lambda) + x_p(\lambda)$$

gde je $x_h(\lambda)$ oblika

(3.7) $$x_h(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} b_j exp(\lambda\omega_j) \quad \text{gde su} \quad \omega_j = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j}\ell^{i\alpha_j-\beta_j}$$

logaritmi i jednostruka rešenja karakteristične jednačine date jednačine. Partikularno rešenje za jednačinu (3.4) sa uslovima

(3.8) $$\begin{aligned} x^{(j)}(0) &= 0 \quad \text{za } j = 0,\dots,m-2, \\ x^{(m-1)}(0) &= \ell^r \quad \text{za } n \geq r \geq 0 \end{aligned}$$

jeste oblika ([11])

$$(3.9)\qquad x_p(\lambda) = \frac{1}{\ell^r a_m}\int_0^\lambda f(\kappa)x_h(\lambda-\kappa)d\kappa$$

gde je

$$(3.10)\qquad a_m = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{m,k}s^k .$$

Integral u relaciji (3.9) posmatra se u polju *M* u smislu definicije 1.5.

Približno rešenje posmatrane jednačine je oblika:

$$(3.11)\qquad x_n(\lambda) = x_{h,n}(\lambda) + x_{p,n}(\lambda)$$

gde je

$$(3.12)\qquad x_{h,n}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} b_j exp(\lambda\omega_{j,n})$$

gde su

$$\omega_{j,n} = \sum_{i=0}^{n} c_{i,j}\ell^{i\alpha_j-\beta_j},\ \alpha_j > 0,\ \beta_j \le 1,\ c_{i,j} \in \mathbb{C}$$

dok je približno partikularno rešenje oblika

$$(3.13)\qquad x_{p,n}(\lambda) = \frac{1}{\ell^r a_m}\int_0^\lambda f(\kappa)\ x_{h,n}(\lambda-\kappa)d\kappa \qquad r \geqslant 0$$

i a_m je operator dat relacijom (3.10).

Formiraćemo operatore

$$(3.14)\qquad y_n(\lambda) = \frac{\dfrac{I}{\ell^r a_m}\displaystyle\int_0^\lambda f(\lambda)g\cdot x_{h,n}(\lambda-\kappa)d\kappa}{g}$$

$$(3.15)\qquad y(\lambda) = \frac{\dfrac{I}{\ell^r a_m}\displaystyle\int_0^\lambda f(\kappa)g\cdot x_h(\lambda-\kappa)d\kappa}{g}$$

gde g pripada L_o.

Pretpostavićemo da su koeficijenti $\alpha_{m,k}$ takvi da su $\alpha_{m,n} \neq 0$ i $\alpha_{m,0} \neq 0$ dok su $\alpha_{m,k} = 0$ za $k = 1,2,\ldots,n-1$. Ova pretpostavka ne umanjuje mnogo opštost, ali se uvodi radi jednostavnije dalje analize. Tako možemo pisati

$$\frac{I}{\ell^r a_m} = \frac{I}{(\alpha_{m,n} s^n + \alpha_{m,0})\ell^r} = \frac{\ell^{n-r}}{\alpha_{m,n} + \alpha_{m,0}\ell^n} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{m,n}} \ell^{n-r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{m,0}}{\alpha_{m,n}} \ell^n\right)^k (-1)^k .$$

Pretpostavićemo prvo da

$$(3.16) \qquad \frac{I}{\ell^r a_m} f(\lambda) = : \{f_2(\lambda,t)\}$$

predstavlja funkciju iz L po t.

I ovde, kao u glavi 2., posmatraćemo takve jednačine kod kojih operatori $gx_{h,n}(\lambda)$ i $gx_h(\lambda)$ za g iz L_0 predstavljaju funkcije iz L, pa na osnovu definicije (1.5) sledi da operatori $y_n(\lambda)$ i $y(\lambda)$, dati relacijama (3.14) i (3.15) respektivno, pripadaju prostoru F_0.

Pokazaćemo da niz operatora $\{y_n(\lambda)\}$, gde je svaki član dat relacijom (3.14), konvergira u konvergenciji tipa I´ ka operatoru $y(\lambda)$ koji je dat relacijom (3.15), korišćenjem funkcionele $A(x)$, $x \in F_0$. U tu svrhu formiraćemo na osnovu relacije (1.11) funkcionelu

$$B_{T,\varepsilon}(y_n(\lambda) - y(\lambda)) =$$

$$= \inf\{\|J_g(\lambda,t)\|_T ;\ g \in L_0 ,\ \|g\|_T < 1,\ \|\ell - \ell g\|_T < \varepsilon\}$$

gde je

$$\frac{\dfrac{1}{\ell^r a_m} \displaystyle\int_0^{\lambda} f(\kappa)\cdot g(x_{h,n}(\lambda-\kappa) - x_h(\lambda-\kappa))d\kappa}{g} = : \frac{\{J_g(\lambda,t)\}}{g}$$

3.2. PROCENA FUNKCIONELE $B_{T,\varepsilon}(y_n(\lambda)-y(\lambda))$

Operator $g = \frac{\ell}{I + k\ell} k$, koji je dat relacijom (2.12) zadovoljava nejednakosti $\|g\|_T < 1$, $\|\ell-\ell g_1\|_T < 1/k$ (lema 2.2.) tako da važi

$$B_{T,\varepsilon}(y_n(\lambda) - y(\lambda)) \leq \|Jg_1(\lambda,t)\|_T$$

Procenićemo sada $\|Jg_1(\lambda,t)\|_T$. Na osnovu definicije (1.5), integrala u polju M, važi:

$$\int_0^{\lambda} \frac{1}{\ell^{r} a_m} f(\kappa)\cdot g_1(x_{h,n}(\lambda-\kappa) - x_h(\lambda-\kappa))d\kappa = \tag{3.17}$$

$$= \{\int_0^{\lambda} f_2(\kappa,t) * \varepsilon_{g_1,h}(\lambda-\kappa,t)d\kappa\}$$

gde je $f_2(\kappa,t)$ funkcija data sa (3.16), dok je $\varepsilon_{g_1,h}(\lambda-\kappa,t)$ funkcija iz L data relacijom (2.31).

Na osnovu relacije (3.17) možemo pisati:

$$\|Jg_1(\lambda,t)\|_T = \int_0^t \left| \int_0^{\lambda} (f_2(\kappa,t) * \varepsilon_{g_1,h}(\lambda-\kappa,t))d\kappa \right| dt \leq \tag{3.18}$$

$$\leq \int_0^{\lambda} \left(\int_0^T |f_2(\kappa,t)|dt\cdot\int_0^T |\varepsilon_{g_1,h}(\lambda-\kappa,t)d\kappa| \right) d\kappa.$$

Označimo sa

$$M(\lambda,T) := \max_{0\leq\kappa\leq\lambda} \int_0^T |f_2(\kappa,t)|dt\ . \tag{3.18´}$$

Na osnovu leme 2.4. važi:

$$\int_0^T \varepsilon_{g_1,h}(\lambda-\kappa,t)dt \leq \sum_{j=1}^{m} k_{g_1}(\lambda-\kappa,T,\alpha_j,\beta_j) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)}$$

$$\sum_{j=1}^{m} k_{g_1}^{M}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)}$$

gde se $k_{g_1}(\lambda-\kappa,T,\alpha_j,\beta_j)$ dobija iz relacije (2.23´), dok je

$$(3.19´) \qquad k^M_{g_1}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) = \max_{0\le\kappa\le\lambda} k_{g_1}(\lambda-\kappa,T,\alpha_j,\beta_j)$$

za $j = 1,\dots,m$.

Na osnovu relacija (3.18), (3.18´), (3.19) i (3.19´) možemo pisati

$$(3.20) \qquad \|Jg(\lambda,t)\|_T \le \lambda M(T,\lambda)\cdot \sum_{j=1}^{m} k^M_{g_1}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)}$$

Primedba: U slučaju kada $x_{h,n}(\lambda)$ i $x_h(\lambda)$, dati relacijama (3.12) i (3.7) respektivno, predstavljaju funkcije iz L, možemo posmatrati takve jednačine kod kojih je

$$g_1\frac{I}{\ell^r a_m} f(\lambda)$$

funkcija iz L. Tada se procena za $\|Jg_1(\lambda,t)\|_T$ vrši analogno, ali preko procena operatora

$$\left|g_1\frac{I}{\ell^r a_m} f(\lambda)\right| \quad \text{i} \quad |x_{h,n}(\lambda) - x_h(\lambda)|.$$

3.3. KONVERGENCIJA U F_0

Korišćenjem prethodnih nejednakosti pokazuje se

Lema 3.1. Ako su članovi niza operatora $\{y_n(\lambda)\}$ kao i operator $y(\lambda)$ dati relacijama (3.14) i (3.15) respektivno, tada važi procena

$$A(y_n(\lambda) - y(\lambda)) \le \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)} Q^P_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$$

gde je

$$(3.21)\qquad Q^{P}_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda M(i,\lambda)\, k^{M}_{g_1}(\lambda,i,\alpha_j,\beta_j)}{e^{ie^{i^2}}}, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Na osnovu leme 3.1. pokazuje se

Teorema 3.1. Niz operatora $\{x_{p,n}(\lambda)\}$ čiji su članovi približna partikularna rešenja diferencijalne jednačine (3.4) sa uslovima (3.8) dati relacijom (3.13), konvergira u konvergenciji tipa I' ka operatoru $x_p(\lambda)$ koji je izražen relacijom (3.9) i predstavlja tačno rešenje date jednačine.

Prema definiciji 1.9. možemo reći da približno partikularno rešenje diferencijalne jednačine (3.4) sa uslovima (3.8) izraženo relacijom (3.13) aproksimira tačno partikularno rešenje dato relacijom (3.9) sa merom aproksimacije Δ_p u odnosu na A(x)

$$(3.22)\qquad \Delta_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)}\, Q^{P}_{g_1}(\lambda,\, \alpha_j,\beta_j)$$

gde su brojevi $Q^{P}_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ dati relacijom (3.21).

Možemo takodje pokazati i sledeću

Teoremu 3.2. Niz operatora $\{x_n(\lambda)\}$ čiji članovi predstavljaju rešenja diferencijalne jednačine (3.4) sa uslovima (3.8) dati relacijom (3.11) konvergira u konvergenciji tipa I' ka operatoru $x(\lambda)$ koji je izražen relacijom (3.6) i predstavlja tačno rešenje posmatranog problema.

Mera aproksimacije, Δ_1, sa kojom približno rešenje $x_n(\lambda)$ (rel. (3.11)) aproksimira tačno rešenje $x(\lambda)$, (rel.(3.6)), u odnosu na funkcionelu A(x) je:

$$(3.23)\qquad \Delta_1 = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)} \left(Q_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j) + Q^{P}_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)\right),$$

gde je $Q_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ broj koji zadovoljava nejednakost (2.32') i $Q^p_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ zadovoljava nejednakost (3.21).

3.4. KONVERGENCIJA U L

Ako tačno i približno rešenje homogenog dela posmatrane jednačine predstavljaju funkcije iz L i pod pretpostavkom da

$$\frac{I}{\ell^r a_m} f(\lambda)$$

takodje predstavlja funkciju iz L,može se pokazati da niz $\{x_n(\lambda)\}$ čiji su članovi dati relacijom (3.11) konvergira u L ka rešenju $x(\lambda)$ koje je dato relacijom (3.6) korišćenjem funkcionele $F(f)$ za $f \in L$. U tu svrhu izvršićemo procenu

$$\|x_n(\lambda) - x(\lambda)\|_T \leq \|x_{h,n}(\lambda) - x_h(\lambda)\|_T + $$

$$+ \|x_{p,n}(\lambda) - x_p(\lambda)\|_T .$$

Korišćenjem leme 2.7. dobija se:

$$\|x_{h,n}(\lambda) - x_h(\lambda)\|_T \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2} + 1\right)} k(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)$$

gde je $k(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)$ dato relacijom (2.35).

Dalje je:

$$\|x_{p,n}(\lambda) - x_p(\lambda)\|_T = \int_0^T \left| \int_0^\lambda f_2(\lambda,t) * (x_{h,n}(\lambda-\kappa,t) - \right.$$

$$\left. - x_h(\lambda-\kappa,t))d\kappa \right| dt$$

gde je $f_2(\kappa,t)$ dato sa (3.16).

$$\{x_{h,n}(\lambda-\kappa,t)\} = x_{h,n}(\lambda-\kappa) \quad \text{i} \quad \{x_h(\lambda-\kappa,t)\} = x_h(\lambda-\kappa)$$

pa možemo pisati:

$$\|x_{p,n}(\lambda) - x_p(\lambda)\|_T \leqslant \int_0^\lambda \left(\int_0^T |f_2(\kappa,t)|dt \cdot \int_0^T |x_{h,n}(\lambda-\kappa,t) - \right.$$

$$\left. - x_h(\lambda-\kappa,t)|dt \right) d\kappa$$

$$\leq \lambda\ M(T,\lambda)\cdot \sum_{j=1}^{m} k^M(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)\cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2} + 1\right)}$$

gde je $M(T,\lambda)$ dato relacijom (3.18´) i

$$k^M(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) = \max_{0\leq\kappa\leq\lambda} k(\lambda-\kappa,T,\alpha_j,\beta_j).$$

Na osnovu prethodnih nejednakosti lako se pokazuje:

Lema 3.2. Ako su $x_n(\lambda)$ i $x(\lambda)$ dati relacijama (3.11) i (3.6) respektivno, tada važi sledeća procena:

$$\|x_n(\lambda) - x(\lambda)\|_T \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2} + 1\right)} \cdot$$

$$\cdot\ (k(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) + \lambda M(T,\lambda)k^M(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)).$$

Korišćenjem prethodne leme pokazuje se

Teorema 3.3. Niz operatora $\{x_n(\lambda)\}$ čiji su članovi približna rešenja diferencijalne jednačine (3.4) sa uslovima (3.8) dati relacijom (3.11), a definišu funkciju iz L, konvergira u L ka operatoru $x(\lambda)$ koji je dat relacijom (3.16) i predstavlja tačno rešenje posmatrane diferencijalne jednačine.

Mera aproksimacije $\Delta_{L,1}$ sa kojom približno rešenje diferencijalne jednačine (3.4) sa uslovima (3.8) $x_n(\lambda)$, aproksimira tačno rešenje u L, u odnosu na funkcionelu $F(f)$ jeste:

$$\Delta_{L,1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2} + 1\right)}(Q(\lambda,\alpha_j,\beta_j) + Q^P(\lambda,\alpha_j,\beta_j)) \tag{3.24}$$

gde je $Q(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ konstanta data relacijom (2.37), dok je

$$Q^P(\lambda,\alpha_j,\beta_j) > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M(i,\lambda)\, k^M(\lambda,i,\alpha_j,\beta_j)}{e^{ie^{i^2}}} \tag{3.24´}$$

3.5. KONVERGENCIJA U SKUPU NEPREKIDNIH FUNKCIJA C

Ako su tačno i približno rešenje homogenog dela funkcije iz C (po t) i pod pretpostavkom da je $f_2(\lambda,t)$ neprekidna funkcija po obe promenljive, pokazaćemo da niz $\{x_n(\lambda)\}$ čiji su članovi dati relacijom (3.11) konvergira u C, ka $x(\lambda)$, koje je dato relacijom (3.6), koristeći pri tome funkcionelu $G(h)$ za $h \in C$. U tu svrhu prvo ćemo izvršiti sledeću procenu (na osnovu relacije (1.2))

$$|x_n(\lambda) - x(\lambda)| \le |x_{h,n}(\lambda) - x_h(\lambda)|_T +$$
$$+ |x_{p,n}(\lambda) - x_p(\lambda)|.$$

Na osnovu leme 2.10. dobija se

$$|x_{h,n}(\lambda,t) - x_h(\lambda,t)|_T \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2} + 1\right)} k_c(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)$$

gde su $k_c(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)$ dati relacijom (2.41), i $|\cdot|_T$ je norma u C definisana sa (1.4).

Kako je $f_2(\lambda,t)$ neprekidna funkcija po obe promenljive, to postoji

$$m(\lambda,T) := \max_{\substack{0\le\kappa<\lambda \\ 0\le t\le T}} |f(\kappa,t)|$$

$$|x_{p,n}(\lambda) - x_p(\lambda)| \le$$
$$\le \int_0^{\lambda} \{|f_2(\kappa,t)|\}x_{h,n}(\lambda-\kappa) - x_h(\lambda-\kappa)|d\kappa.$$

Iz prethodne nejednakosti sledi:

$$|x_{p,n}(\lambda,t) - x_p(\lambda,t)|_T \leq$$

$$\leq \lambda m(\lambda,T) \sum_{j=1}^{m} k_c^m(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}\right)}$$

gde je $k_c^m(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)$

$$k_c^m(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) = \max_{0\leq\kappa\leq\lambda} k_c(\lambda-\kappa,T,\alpha_j,\beta_j).$$

Analogno kao teorema 3.3. pokazuje se

Teorema 3.4. Niz $\{x_n(\lambda)\}$, čiji su članovi približna rešenja diferencijalne jednačine (3.4) sa uslovima (3.8), dati relacijom (3.11), i definišu funkciju iz C (po t) konvergira u C ka $x(\lambda)$ datim sa (3.6).

Mera aproksimacije $\Delta_{C,1}$ sa kojom približno rešenje $x_n(\lambda)$ aproksimira tačno rešenje u C u odnosu na funkcionelu G(h) jeste:

$$(3.25) \qquad \Delta_{C,1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}\right)} Q_c(\lambda,\alpha_j,\beta_j) + Q_c(\lambda,\alpha_j,\beta_j))$$

gde je $Q_c(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ konstanta data relacijom (2.42), dok je

$$(3.25') \qquad Q\,(\lambda,\alpha_j,\beta_j) > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m(\lambda,i)\, k_c^m(\lambda,i,\alpha_j,\beta_j)}{e^{ie^{i^2}}}$$

3.6. REŠENJE PROBLEMA TIPA II

U drugom delu ove glave posmatraćemo diferencijalnu jednačinu (3.4) sa uslovima (3.5), gde su operatori $\varphi_j \neq 0$. Rešenje jednačine je oblika:

$$(3.26) \qquad x(\lambda) = x_h(\lambda) + \tilde{x}_p(\lambda)$$

gde je $x_h(\lambda)$ dato relacijom (3.7).

U knjizi [11] je pokazano da se karakteristični polinom posmatrane diferencijalne jednačine može rastaviti na linearne faktore

$$P(\omega) = a_m \prod_{j=1}^{m} (\omega - \omega_j), \quad a_m = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{m,\nu} s^{\nu}$$

i ω_j su rešenja karakteristične jednačine.

Ako karakteristični polinom $P(\omega)$ zapišemo kao

$$P(\omega) = a_m P_1(\omega)$$

tada, pod pretpostavkom da su nule karakterističnog polinoma ω_j, $j = 1,\dots,m$, jednostruke i logaritmi, postoje konstantni operatori $\bar{A}_j$, $j = 1,\dots,m$, takvi da važi:

$$(3.27) \qquad \frac{I}{P(\omega)} = \frac{I}{a_m}\,\frac{I}{P_1(\omega)} = \frac{I}{a_m}\left(\frac{\bar{A}_1}{\omega-\omega_1} + \frac{\bar{A}_2}{\omega-\omega_2} + \dots + \frac{\bar{A}_m}{\omega-\omega_m}\right)$$

Svaki od koeficijenata $\bar{A}_j$, $j = 1,\dots,m$, se može napisati kao

$$\bar{A}_j = \frac{I}{P_1'(\omega_j)}$$

Pokazaćemo da je prethodna jednakost tačna za $j = 1$. Za ostale faktore pokazuje se isto.

Iz relacije (3.27) sledi:

$$\frac{I}{P_1(\omega)} = \frac{A_1}{\omega-\omega_1} + \frac{R(\omega)}{P_1'(\omega_1)} = \frac{A_1 P_1'(\omega) + R(\omega)(\omega-\omega_1)}{P_1(\omega)}$$

odnosno

$$I = A_1 P_1'(\omega_1).$$

Partikularno rešenje posmatrane jednačine je oblika

$$(3.28) \qquad \tilde{x}_p(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} A_j \int_0^{\lambda} exp((\lambda-\kappa)\omega_j)\cdot f(\kappa)d\kappa$$

gde je

(3.29) $$A_j = \frac{\bar{A}j}{a_m} = \frac{I}{a_m} \frac{I}{P'(\omega_j)} = \frac{I}{P'(\omega_j)}$$

3.7. KOEFICIJENTI A_j

U ovom delu analiziraćemo koeficijente A_j, j = 1,... ...,m. Posmatraćemo polinom

$$P'(\omega_j) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \mu\alpha_{\mu,k} s^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j} \ell^{i\alpha_j-\beta_j}\right)^{\mu-1} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \mu\alpha_{j,k} s^{k+\beta(\mu-1)} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j} \ell^{i\alpha}\right)^{\mu-1} .$$

Pretpostavimo da postoji samo jedan par brojeva μ_1 i ν_1 takvih da su $1 \leq \mu_1 \leq m$, $0 \leq \nu_1 \leq n$ i

(3.30) $$\max_{\substack{0 \leq \mu \leq m \\ 0 \leq \nu \leq n}} (k + \beta_j(\mu-1)) = \nu_1 + \beta_j(\mu_1-1).$$

Posle uvodjenja oznake $\bar{W}_j$ kao $\bar{W}_j = \ell^{\beta}\omega_j$

$$P'(\omega_j) = \mu s^{\nu +\beta_j(\mu -1)} \alpha_{\mu_1,\nu_1} \cdot$$

$$\cdot \left(\bar{W}_j^{\mu_1-1} + \sum_{\mu=1}^{m}{}^{*} \sum_{k=0}^{n}{}^{*} \frac{\mu\alpha_{\mu,k}}{\mu_1,\alpha_{\mu_1,\nu_1}} \ell^{\nu_1-k+\beta_j(\mu_1-\mu)} \cdot \bar{W}_j^{\mu-1}\right),$$

gde zvezdice iznad suma označavaju da je izostavljen par indeksa μ_1 i ν_1 zajedno.

Lema 3.3. Izraz $\bar{W}_j^{\mu-1}$ za $\mu = 2,\ldots,m$, $c_{0,j} \neq 0$, j = 1,...,m i $\alpha_j > 0$ možemo pisati

(3.31) $$\bar{W}_j^{\mu-1} = c_\mu I + \ell^{\alpha_j} W_j,$$

gde su c_μ numeričke konstante i $\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu}$ predstavlja funkciju iz L.

Dokaz: Zaista, $\bar{W}_j$ se može pisati kao

$$\bar{W}_j = c_o I + \ell^{\alpha_j} W', \quad c_{1,j} \neq 0, \ \alpha_j > 0$$

gde $\ell^{\alpha_j} W'$ definiše funkciju iz L. Iz relacije

$$\bar{W}_j^{\mu-1} = c_{o,j}^{\mu-1} I + \mu c_o^{\mu-2} \ell^{\alpha_j} W' + \ldots + (\ell^{\alpha_j} W')^{\mu-1} =$$

$$= c_\mu I + \ell^{\alpha_j} W_{j,\mu}, \quad \alpha_j > 0$$

dobijamo tvrdjenje leme 3.3.

Lema 3.4. Operator L_j, gde je

$$L_j : = \sum_{\mu=1}^{m}{}^{*} \sum_{k=0}^{n}{}^{*} \frac{\mu \alpha_{\mu,k}}{\mu_1 \alpha_{\mu_1,\nu_1}} \cdot \ell^{\nu_1 - k + \beta_j(\mu_1 - \mu)} \bar{W}_j^{\mu-1}, \quad j = 1,\ldots,m \tag{3.32}$$

jeste funkcija iz L.

Dokaz: Iz relacije (3.30) sledi da je

$$\min_{k,\mu}(\nu_1 - k + \beta_j(\mu_1 - \mu)) = b > 0$$

(jer je $\mu \neq \mu_1$ i $k \neq \nu_1$ istovremeno), dok se $\bar{W}_j^{\mu-1}$ može napisati u obliku (3.31), pa prema tome L_j je iz L.

Korišćenjem relacija (3.31) i (3.32) $P'(\omega_j)$ se može transformisati kao:

$$P'(\omega_j) = \mu_1 \alpha_{\mu_1,\nu_1} s^{\nu_1 + \beta_j(\mu_1 - 1)} (c_{\mu_1} I + \ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1} + L_j)$$

pa prema tome koeficijenti A_j se mogu napisati u obliku:

$$A_j = \frac{I}{P'(\omega_j)} = \frac{\ell^{\nu_1 + \beta_j(\mu_1 - 1)}}{\mu_1 \alpha_{\mu_1,\nu_1} c_{\mu_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c_{\mu_1}^k} (\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1} + L_j)^k =$$

$$= \frac{\ell^{\nu_1 + \beta_j(\mu_1 - 1)}}{\mu_1 \alpha_{\mu_1,\nu_1} c_{\mu_1}} \Bigg(I + \frac{-1}{c_{\mu_1}} (\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1} + L_j) + \ldots + \frac{(-1)^{k_1}}{c_{\mu_1}^k} (\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1} + L_j)^{k_1} + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c_{\mu_1}^k} (\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1} + L_j)^k \Bigg)$$

gde je k_1 odredjeno tako da $\min(\alpha_j, b)(k_1+1) > 1$, tako da red

$$\sum_{k=k_1+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c_{\mu_1}^k}(\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1} + L_j)^k$$

konvergira uniformno za svako $t \geq 0$.

Ako pretpostavimo da postoji više od jednog para brojeva $\mu_{1,i}$, $\nu_{1,i}$, $i = 1,\ldots,r$, $r < m$, takvih da je

$$\max_{\substack{1\leq k\leq n \\ 1\leq \mu\leq m}} (k + \beta_j(\mu-1)) = \nu_{1,1}+\beta_j(\mu_{1,1}-1) =$$

$$= \nu_{1,2}+ \beta_j(\mu_{1,2} -1) = \ldots = \nu_{1,r} + \beta_j(\mu_{1,r}-1)$$

tada se konstrukcija koeficijenata A_j izvodi, u principu, isto, ali tehnički mnogo komplikovanije. Zato ćemo dalje raditi pod pretpostavkom da postoji samo jedan par brojeva μ_1 i ν_1 sa pomenutim osobinama.

3.8. PRIBLIŽNO PARTIKULARNO REŠENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE TIPA II

Približno rešenje homogenog dela $x_{h,n}$ dato je relacijom (3.12), a približno partikularno rešenje, pod uslovom da su svi koreni karakteristične jednačine logaritmi, formira se kao

$$\tilde{x}_{p,n}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} A_{j,n} \int_0^{\lambda} exp((\lambda-\kappa)\omega_{j,n})f(\kappa)d\kappa \tag{3.34}$$

gde je

$$A_{j,n} = \frac{\ell^{\nu_1+\beta_j(\mu_1-1)}}{\mu_1\alpha_{\mu_1,\nu_1}\, c_{\mu_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c_{\mu_1}^k} (\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1,n} + L_{j,n})^k, \tag{3.35}$$

$$\alpha > 0$$

i

$$L_{j,n} = \sum_{\mu=1}^{m_*} \sum_{k=0}^{n_*} \frac{\mu_1\alpha_{\mu,k}}{\mu_1\alpha_{\mu_1,\nu_1}} \ell^{\nu_1-k+\beta_j(\mu_1-\mu)}(c_\mu I+W_{j,\mu,n})^{\mu-1} \tag{3.36}$$

$$(3.37) \qquad W_{j,\mu,n} = \sum_{r=1}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{r} c_{o,j}^{\mu-1-r} \Big(\sum_{i=1}^{n} c_{i,j} \ell^{\alpha,i} \Big)^{r}$$

Pokazaćemo da niz operatora $\{\tilde{x}_{p,n}(\lambda)\}$ čiji je svaki član dat relacijom (3.34) konvergira u konvergenciji tipa I´ ka operatoru $x_p(\lambda)$ koji je dat relacijom (3.28). U tu svrhu formirajmo operatore

$$\tilde{y}_n(\lambda) = \frac{\int_0^{\lambda} \Big(\sum_{j=1}^{m} A_{j,n} f(\kappa) g \, \mathit{exp}((\lambda-\kappa)\omega_{j,n}) \Big) d\kappa}{g}$$

$$\tilde{y}(\lambda) = \frac{\int_0^{\lambda} \sum_{j=1}^{m} A_j \, f(\kappa) \, g \, \mathit{exp}((\lambda-\kappa)\omega_j) \, d\kappa}{g}$$

gde je g iz Lo. U daljem radu posmatraćemo samo slučajeve kada

$$\sum_{j=1}^{m} A_{j,n} \, f(\kappa) g \mathit{exp}((\lambda-\kappa)\omega_{j,n}) d\kappa$$

definiše neprekidnu funkciju po obe promenljive. U tom slučaju $\tilde{y}_n(\lambda)$ i $\tilde{y}(\lambda)$ predstavljaju operatore iz Fo. U cilju procene funkcionele $A(\tilde{y}_n(\lambda) - \tilde{y}(\lambda))$ posmatraćemo funkcionelu

$$B_{T,\varepsilon}(\tilde{y}_n(\lambda) - \tilde{y}(\lambda)) =$$

$$= \mathit{inf}\{\|J_g(\lambda,t)\|_T, \ g \in Lo, \ \|g\|_T < 1, \ \|\ell - \ell g\|_T < \varepsilon\}$$

gde je

$$\frac{\int_0^{\lambda} f(\kappa) g \sum_{j=1}^{m} (A_{j,n} \mathit{exp}((\lambda-\kappa)\omega_{j,n}) - A_j \mathit{exp}((\lambda-\kappa)\omega_j))}{g} =: \frac{\{J_g(\lambda,t)\}}{g}$$

3.9. PROCENA ZA $B_{T,\varepsilon}(\tilde{y}_n(\lambda) - \tilde{y}(\lambda))$

Korišćenjem operatora $g_1 = \frac{\ell}{I+k\ell}\cdot k$, koji je dat relacijom (2.12) i zadovoljava nejednakosti $\|g_1\|_T < 1$, $\|\ell-\ell g_1\|_T < 1/k$, za svako $T > 0$ i $k > 0$ i na osnovu relacije (1.11) važi

$$B_{T,\varepsilon}(\tilde{y}_n(\lambda) - \tilde{y}(\lambda)) \le \|J_{g_1}(\lambda,t)\|_T .$$

Procenićemo sada $\|J_{g_1}(\lambda,t)\|_T$. U tu svrhu potrebno je izvršiti sledeće transformacije

$$J_{g_1}(\kappa,t)d\kappa = \int_0^\lambda \sum_{j=1}^m f(\kappa)g_1(A_{j,n}exp((\lambda-\kappa)\omega_{j,n}) - A_j exp((\lambda-\kappa)\omega_j)))d\kappa =$$

$$= \int_0^\lambda \sum_{j=1}^m f(\kappa)(g_1 A_{j,n}(exp((\lambda-\kappa)\omega_{j,n}) - exp((\lambda-\kappa)\omega_j))) +$$

$$+ \int_0^\lambda \sum_{j=1}^m f(\kappa)\, g_1(A_{j,n} - A_j)exp(\lambda-\kappa)\omega_j))d\kappa .$$

Označimo sa

$$\{J^1_{g_1}(\lambda,t)\} := \int_0^\lambda \sum_{j=1}^m f(\kappa)(g_1 A_{j,n}(exp(\lambda-\kappa)\omega_{j,n} - exp((\lambda-\kappa)\omega_j)))d\kappa$$

(3.39) i

$$\{J^2_{g_1}(\lambda,t)\} := \int_0^\lambda \sum_{j=1}^m f(\kappa)(g_1(A_{j,n} - A_j)exp((\lambda-\kappa)\omega_j))d\kappa$$

Pod pretpostavkom da $f_{2,j}(\kappa,t)$, (gde je $f(\kappa)A_{j,n} = :\{f_{2,j}(\kappa,t)\}$) predstavlja funkcije iz L po t i neprekidnu po κ, postoji

$$\tilde{A}_j(\lambda,T) = \max_{0\le\kappa\le\lambda} \int_0^T |f_{2,j}(\kappa,t)|dt \tag{3.40}$$

tako da važi procena

$$(3.41)\qquad \int_0^T |J^1_{g_1}(\lambda,t)|dt \leq \lambda \sum_{j=1}^{m} \tilde{A}_j(\lambda,T)k^M_{g_1}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)}$$

gde je $k^M_{g_1}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j)$ dato relacijom (3.19').

Posmatraćemo sada razliku

$$|A_{j,n} - A_j| \leq \frac{\ell^{\nu_1+\beta_j(\mu_1-1)}}{\mu_1|\alpha_{\mu_1,\nu_1}||c_{\mu_1}|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{|c^k_{\mu_1}|}\cdot$$

$$\cdot |(\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu,n} + L_{j,n})^k - (\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1} - L_j)^k| \leq$$

$$\leq \frac{\ell^{\nu_1+\beta_j(\mu_1-1)}}{\mu_1|\alpha_{\mu_1,\nu_1}||c_{\mu_1}|}\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{|c_{\mu_1}|^k} (|\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1,n} - W_{j,\mu_1})| +$$

$$+ \ |L_{j,n} - L_j|)(\sum_{i=0}^{k-1} |\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1,n} + L_{j,n}|^i \cdot$$

$$\cdot |\ell^{\alpha_j} W_{j,\mu_1} + L_j|^{k-1-i} .$$

Ako označimo sa

$$\{v_j(t)\} = W_{j,\mu_1,n} - W_{j,\mu_1}$$

tada je:

$$\{v_j(t)\} = \sum_{r=1}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{r} c_{o,j}^{\mu-1-r} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} c_{i,j}\ell^{i\alpha_j}\right)\cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{r-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,j}\ell^{i\alpha_j}\right)^i \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\ell^{i\alpha_j}\right)^{r-1-i} .$$

Iz relacija

$$(3.43)\qquad \int_0^T \Big|\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,j}\,\frac{t^{i\alpha_j-1}}{\Gamma(i\alpha_j)}\Big|dt \le M \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i\,\frac{T^{i\alpha_j}}{\Gamma(i\alpha_j+1)} \le v_{1,j}(T)$$

$$(3.44)\qquad \int_0^T \Big|\sum_{i=r}^{\infty} c_{i,j}\,\frac{t^{i\alpha_j-1-\beta}}{\Gamma(i\alpha_j-\beta)}\Big|dt \le v_{2,j}(T)$$

sledi

$$\int_0^T |v_j(t)|dt \le M\rho_j^{n+1} \sum_{r=1}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{r} |c_0|^{\mu-1-r} \cdot r \,\cdot$$

$$\cdot\ \frac{T^{(n+1)\alpha_j}}{\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j}{2}+1\right)\right)^2}\, v_{1,j}^r(T) =: \tilde{v}_j(t)\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha_j+1\right)}.$$

Ako označimo sa

$$\{b_{\varepsilon,j}(t)\} = L_{j,n} - L_j\,,$$

tada je

$$\{b_{\varepsilon,j}(t)\} = \sum_{\mu=1}^{m_*} \sum_{k=0}^{n_*} \frac{\mu\alpha_{\mu,k}}{\mu_1\alpha_{\mu_1,\nu_1}} \cdot \ell^{\nu_1-k+\beta_j(\mu_1-\mu)} \,\cdot$$

$$\cdot \sum_{r=0}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{r} c_{0,j}^{\mu-1-r} \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\ell^{i\alpha_j}\right)^r - \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\,\ell^{i\alpha_j}\right)^r\right).$$

Na osnovu relacija (3.43) i (3.44) sledi

$$\int_0^T |b_{\varepsilon,j}(t)|dt \le \sum_{\mu=1}^{m_*} \sum_{k=0}^{n_*} \frac{\mu|\alpha_{\mu,k}|}{\mu\,|\alpha_{\mu_1,\nu_1}|}\, \frac{T^{\nu_1-k+\beta j(\mu_1-\mu)}}{\Gamma(\nu_1-k+\beta(\mu_1-\mu)+1)}\,\cdot$$

$$(3.45)\qquad \cdot\, M\rho^{n+1} \sum_{r=1}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{r} |c_{0,j}|^{\mu-1-r}\, \frac{T^{(n+1)\alpha_j}}{\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j}{2}+1\right)\right)^2}\, v_1^r(T) \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j}{2}+1\right)}\, \tilde{b}_j(T)$$

Ako označimo sa

$$\int_0^T |W_{j,\mu_1,n}(t) + L_{j,n}(t)|dt \equiv u_{j,n}(T)$$

gde su $\{W_{j,\mu_1,n}(t)\} = W_{j,\mu_1,n}$, a $\{L_{j,n}(t)\} = L_{j,n}$

kao i

$$\int_0^T |W_{j,\mu_1}(t) + L_j(t)|dt \equiv u_j(T)$$

gde su $\{W_{j,\mu_1}(t)\} = W_{j,\mu_1}$, a $\{L_j(t)\} = L_j$.

Na osnovu (3.42) imamo

$$\|f(\kappa)(A_{j,n} - A_j)\|_T \leq \tilde{F}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|c_{\mu_1}|^k}(\tilde{v}_j(T) + \tilde{b}_j(T)) \cdot$$

$$(3.46) \qquad \cdot \sum_{i=0}^{k-1} u_j^i(T)(u_{j,n}(T)^{k-1-i} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j}{2} + 1\right)} \leq$$

$$\leq \overset{\approx}{F}_{j,\varepsilon}(T) \frac{1}{\left(\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j}{2} +1\right)\right)}$$

gde je

$$\tilde{F}(t) = \max_{0<\kappa<\lambda} \int_0^T |f_3(\kappa,t)|dt$$

i funkcija

$$f_3(\kappa,t) = f(\kappa) \frac{\ell^{\nu_1+ \beta(\mu_1-1)}}{\mu_1|\alpha_{\mu_1,\nu_1}||c_{\mu_1}|}$$

je lokalno integralna po t i neprekidna po λ.

Označimo sa

$$\{R_j(\lambda-\kappa,t)\} = g_1 exp((\lambda-\kappa)\omega_j).$$

Kako je

$$g_1 exp(\lambda-\kappa,\omega_j) = \prod_{i=0}^{k} exp((\lambda-\kappa)\ell^{i\alpha_j-\beta_j})k \sum_{i=0}^{\infty}(-k)^i\ell^{i+1} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\kappa)^r}{r!}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} c_{i,j}\ell^{i\alpha_j-\beta_j}\right)^r\right)$$

gde je k odredjeno tako da je $(k+1)\alpha_j-\beta_j > 0$. (Ako je $\beta_j < 0$ tada je $k = -1$ i uzima se $\prod_{0}^{-1}(\cdot) = I$). Pretpostavimo da su α_j i β_j takvi da je

$$\prod_{i=0}^{k} exp((\lambda-\kappa)\ell^{i\alpha_j-\beta_j}) = I + \{\bar{R}_j(\lambda-\kappa,t)\}$$

gde je $\bar{R}_j(\lambda-\kappa,t)$ neprekidna funkcija i postoji

$$\max_{0\le\kappa\le\lambda}\int_0^T|\bar{R}_j(\lambda-\kappa,t)|dt = R_j^M(\lambda,T).$$

Može se pokazati da je

$$\int_0^T|R_j(\lambda-\kappa,t)|dt \le (1 + R_j^M(\lambda,T)\cdot k\cdot(2 - e^{-kT}))e^{\lambda v_{2,j}(T)} \equiv \tag{3.47}$$

$$\equiv S_{g_1}(\lambda,T).$$

Na osnovu relacija (3.39), (3.46) i (3.47) imamo

$$\int_0^T|J_{g_1}^2(\lambda,t)\,dt \le \lambda\sum_{j=1}^{m}\tilde{\tilde{F}}_{j,\varepsilon}(T)\cdot S_{g_1}(\lambda,T)\cdot \tag{3.48}$$

$$\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j}{2}+1\right)}.$$

Na ovaj način smo pokazali

Lemu 3.5. Ako su operatori $\tilde{y}_n(\lambda)$ i $\tilde{y}(\lambda)$ dati relacijom (3.38), tada važi sledeća procena:

$$B_{T,1/k}(\tilde{y}_n(\lambda) - \tilde{y}(\lambda)) \leq \lambda \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j}{2} + 1\right)} \tilde{\tilde{F}}_{j,\varepsilon}(T) \cdot$$

$$\cdot\, S_{g_1}(\lambda,T) + \tilde{A}_j(\lambda,T) k^M_{g_1}(\lambda,T,\alpha_j,\beta_j) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-\beta_j-1}{2}+1\right)}$$

gde su $\tilde{F}_{j,\varepsilon}(T)$, $\tilde{S}_{g_1}(\lambda,T)$, $\tilde{A}_j(\lambda,T)$ dati relacijama (3.46), (3.47) i (3.40), respektivno.

Korišćenjem prethodne leme pokazuje se

Lema 3.6. Ako su operatori $\tilde{y}_n(\lambda)$ i $\tilde{y}(\lambda)$ dati relacijom (3.38), tada važi sledeća procena

$$A(\tilde{y}_n(\lambda) - \tilde{y}(\lambda)) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-2}{2} +1\right)} \tilde{Q}^P_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$$

gde je

$$(3.49) \qquad \tilde{Q}^P_g(\lambda,\alpha_j,\beta_j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\tilde{F}}_{j,\varepsilon}(i) S_{g_1}(\lambda,i) + \tilde{A}_j(\lambda,i) k^M_{g_1}(\lambda,i,\alpha_j,\beta}{e^{ie^{i^2}}}$$

Iz leme 3.6. sledi

Teorema 3.5. Niz operatora $\{\tilde{x}_{p,n}(\lambda)\}$ čiji članovi predstavljaju približna rešenja diferencijalne jednačine (3.4) sa uslovima (3.5), konvergira u konvergenciji tipa I', ka operatoru $\tilde{x}_p(\lambda)$, koji je dat relacijom (3.28).

Mera aproksimacije sa kojom približno rešenje $x_n(\lambda) = x_{h,n}(\lambda) + \tilde{x}_{p,n}(\lambda)$ aproksimira tačno rešenje oblika (3.26) jeste

$$(3.50) \qquad \Delta_2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-2}{2} + 1\right)} (\tilde{Q}^P_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j) + \tilde{Q}_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j))$$

gde su $\tilde{Q}^P_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ i $\tilde{Q}_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ dati relacijama (3.49) i i (2.32´), respektivno.

3.10. APROKSIMACIJA U L

Pod pretpostavkom da tačno i približno rešenje predstavljaju funkcije iz L možemo pokazati da niz približnih rešenja konvergira ka tačnom rešenju u L koristeći pri tom funkcionelu F(f) za f iz L.

Ako označimo sa

$$I(\lambda,T) = \| J(\lambda,t)\|_T$$

gde je

$$\{J(\lambda,t)\} = \int_0^{\lambda} f(\kappa) \sum_{j=1}^{m} (A_{j,n} exp((\lambda-\kappa)\omega_{j,n}) -$$

$$- A_j exp((\lambda-\kappa)\omega_j))d\kappa .$$

Na osnovu izloženog može se odrediti $I_j(\lambda,T)$ tako da važi nejednakost

$$I(\lambda,T) \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-2}{2}\right)} \cdot I_j(\lambda,T),$$

kao i pokazati

Teorema 3.6. Niz operatora $\{\tilde{x}_{p,n}(\lambda)\}$ čiji članovi predstavljaju približna rešenja diferencijalne jednačine (3.4) sa delovima (3.5) i definišu funkcije integrabilne po t, konvergira u L ka operatoru $\tilde{x}_p(\lambda)$ koji takodje definiše funkciju iz L i predstavlja tačno rešenje posmatrane jednačine.

Mera aproksimacije $\Delta_{L,2}$ sa kojom približno rešenje aproksimira tačno rešenje u L je

$$(3.51) \qquad \Delta_{L,2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-2}{2} + 1\right)} (Q(\lambda,\alpha_j,\beta_j) + \tilde{Q}(\lambda,\alpha_j,\beta_j))$$

gde je $Q(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ dato relacijom (2.33), a

$$\tilde{Q}(\lambda,\alpha_j,\beta_j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_j(\lambda,i)}{e^{ie^{i^2}}}$$

3.11. APROKSIMACIJA U C

Analogno kao prethodne teoreme, pokazuje se

Teorema 3.7. Niz operatora $\{x_n(\lambda)\}$, čiji članovi predstavljaju približna rešenja diferencijalne jednačine (3.4) sa uslovima (3.5) i definišu neprekidnu funkciju, konvergira u C, ka tačnom rešenju koje je takodje iz C.

Mera aproksimacije $\Delta_{C,2}$ sa kojom približno rešenje aproksimira tačno rešenje je

$$\Delta_{C,2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)\alpha_j-2}{2}\right)} (Q_C(\lambda,\alpha_j,\beta_j + \tilde{Q}_C(\lambda,\alpha_j,\beta_j)) \tag{3.52}$$

gde se $Q_c(\lambda,\alpha_j,\beta_j)$ dobija iz relacije (2.42) i

$$\tilde{Q}_C(\lambda,\alpha_j,\beta_j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_{j,C}(\lambda,i)}{e^{ie^{i^2}}}$$

gde je

$$I_{j,C}(\lambda,i) = |J_C(\lambda,t)|_T$$

a

$$\{J_C(\lambda,t)\} = \int_0^{\lambda} f(\kappa) \sum_{j=1}^{m} A_{j,n} exp((\lambda-\kappa)\omega_{j,n}) -$$

$$- A_j exp(\lambda-\kappa)\omega_j)d\kappa.$$

4. REALIZACIJA REZULTATA II I III GLAVE NA POSEBNIM SLUČAJEVIMA

U prvom delu ove glave konstruiše se tačno i približno rešenje jedne potklase posmatranih parcijalnih diferencijalnih jednačina nešto jednostavnijeg oblika čija su rešenja, kao i svi izvodi koji ulaze u datu jednačinu, neprekidne funkcije. Kao meru aproksimacije posmatraćemo maksimum razlike izmedju tačnog i približnog rešenja na posmatranom intervalu. Očigledno je da se sa povećanjem dužine intervala povećava mera aproksimacije. Zato će ovde biti konstruisano tačno i približno rešenje na intervalu [0,T] u više koraka sa ocenom greške.

Na jednom primeru ćemo uporediti ovako dobijenu grešku na intervalu [0,T] pri različitim koracima sa merom aproksimacije konstruisanom u glavi 2. za rešenja iz C.

U ovoj glavi se na primerima parcijalnih diferencijalnih jednačina ilustruju najvažniji rezultati dobijeni u 2. i 3. glavi. Interesantna je jednačina žilavo-elastičnog štapa posmatrana u saradnji sa prof. dr B. Stankovićem.

4.1. KONSTRUKCIJA PRIBLIŽNOG REŠENJA U DVA KORAKA

Posmatraćemo parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{1} \alpha_{j,k} \frac{\partial^{j+k} x(\lambda,t)}{\partial\lambda^j \; \partial t^k} = 0 \tag{4.1}$$

sa sledećim uslovima

$$\frac{\partial^j x(\lambda,0)}{\partial\lambda^j} = 0, \quad j = 0,\dots,m, \quad 0 \le \lambda \le \lambda_0 \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^j x(0,t)}{\partial\lambda^j} &= 0, \quad t > 0,\ j = 0,\dots,m-2,\\ \frac{\partial^{m-1} x(0,t)}{\partial\lambda^{m-1}} &= 1, \quad t > 0\,.\end{aligned} \tag{4.3}$$

U polju operatora Mikusinskog jednačina

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{1} \alpha_{\mu,\nu}\, s^k x^{(j)}(\lambda) = 0 \tag{4.4}$$

sa uslovima $x^{(j)}(0) = 0$, $j = 1,\dots,m-2$, $x^{(m-1)}(0) = \ell$, odgovara jednačini (4.1) sa uslovima (4.2) i (4.3).

Pretpostavićemo da tačno rešenje $x_h(\lambda)$ i približno rešenje $x_{h,n}(\lambda)$ na intervalu $[0,T_1]$, dati relacijama (3.7) i (3.12 predstavljaju funkcije iz C.

Sada ćemo izvršiti konstrukciju tačnog i približnog rešenja diferencijalne jednačine (4.4) sa uslovima (4.2) i (4.3) na intervalu $[T_1,T]$, $0 < T_1 < T$.

Posle smene promenljivih $t = \tau + T_1$, jednačina (4.1) postaje:

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{1} \alpha_{j,k} \frac{\partial^{j+k} x(\lambda,\tau+T_1)}{\partial\lambda^j\, \partial t^k} = 0 \tag{4.5}$$

Ako označimo sa $x(\lambda,\tau+T_1) = y(\lambda,\tau)$ i znajući da je

$$e^{-T_1 s}\{y(\lambda,\tau)\} = \left\{\begin{matrix} y(\lambda,\tau-T_1), & \tau \ge T_1 \\ 0, & \tau < T_1 \end{matrix}\right\} \equiv X(\lambda,\tau) \tag{4.6}$$

dobijamo

$$\{y(\lambda,\tau)\} = \{x(\lambda,\tau+T_1)\} = e^{T_1 s}\{X(\lambda,\tau)\} = e^{T_1 s}X(\lambda) \tag{4.7}$$

kao i

$$\left\{\frac{\partial x(\lambda,\tau+T_1)}{\partial\tau}\right\} = s\{x(\lambda,\tau+T_1)\} - x(\lambda,T_1)I =$$

$$= e^{T_1 s} sX(\lambda) - x(\lambda,T_1)I$$

Jednačini (4.5) odgovara u polju M jednačina

$$e^{T_1 s} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{1} \alpha_{j,k} s^k X^{(j)}(\lambda) = F_1(\lambda) \tag{4.8}$$

gde je

$$F_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_{j,1} \left. \frac{\partial^j x_h(\lambda,t)}{\partial\lambda^j} \right|_{t=T_1} \tag{4.9}$$

sa uslovima:

$$\begin{aligned} X(0) = X'(0) = \dots = X^{(m-2)}(0) = 0 \\ X^{(m-1)}(0) = \ell. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Jednačinu (4.8) sa uslovima (4.10) analizirali smo u prvom delu treće glave.

Partikularno rešenje je oblika

$$X_p(\lambda) = e^{-T_1 s} \int_0^{\lambda} F(\kappa) X_h(\lambda-\kappa) d\kappa \tag{4.11}$$

dok je rešenje jednačine (4.8) sa uslovima (4.10)

$$X(\lambda) = X_h(\lambda) + X_p(\lambda) \tag{4.12}$$

i $X_h(\lambda)$ je rešenje homogenog dela posmatrane jednačine. U stvari $X_h(\lambda)$ ima isti oblik kao i rešenje jednačine (4.4) i obeležavaćemo ga sa $x_h(\lambda)$. Posmatraćemo samo takve diferencijalne jednačine kod kojih $X_p(\lambda)$, oblika (4.11), definiše neprekidnu funkciju.

Rešenje jednačine (4.1) $x(\lambda,t)$ posmatramo kao

$$x(\lambda,t) = \begin{cases} x(\lambda,t) & \text{za } t \in [0,T_1] \text{ gde } \{x(\lambda,t)\} = x_h(\lambda) \\ X(\lambda,\tau) & \text{za } t \in [T_1,T_2) \text{ gde je } t = \tau + T_1 \\ & \qquad \text{i } \{X(\lambda,\tau)\} = X(\lambda). \end{cases}$$

Ako na intervalu $[0,T_1]$ umesto tačnog rešenja oblika (3.7) posmatramo približno rešenje $x_{h,n}(\lambda)$ koje je dato relacijom (3.12) umesto jednačine oblika (4.8) imamo jednačinu

$$e^{T_1 s} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{1} \alpha_{j,k} \, s^k \, \bar{X}^{(\mu)}(\lambda) = \tilde{F}_1(\lambda) \tag{4.13}$$

gde je

$$\bar{F}_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_{\mu,1} \left. \frac{\partial^j x_{h,n}(\lambda,t)}{\partial \lambda^j} \right|_{t=T} \tag{4.13´}$$

$$\{x_{n,h}(\lambda,t)\} = x_{h,n}(\lambda).$$

Rešenje jednačine (4.13) sa uslovima (4.10) ima oblik

$$\bar{X}(\lambda) = \bar{X}_h(\lambda) + e^{-T_1 s} \int_0^{\lambda} \tilde{F}(\kappa) \, \bar{X}_h(\lambda-\kappa) d\kappa \tag{4.14}$$

gde je

$$\tilde{F}(\kappa) = \frac{\tilde{F}_1(\kappa)}{\ell(\alpha_{m,0} + \alpha_{m,1} s)}$$

i $\bar{X}_h(\lambda)$ je rešenje homogenog dela jednačine (4.13). Približno rešenje jednačine (4.13) sa uslovima (4.10) je oblika

$$\tilde{X}(\lambda) = x_{h,n}(\lambda) + e^{-T_1 s} \int_0^{\lambda} \tilde{F}(\kappa) x_{h,n}(\lambda-\kappa) d\kappa \tag{4.15}$$

gde je $x_{h,n}(\lambda)$ približno rešenje homogenog dela jednačine (4.13) koje ima isti oblik (relacija (3.12)) kao i približno rešenje jednačine (4.4).

Može se primetiti da se jednačine (4.8) i (4.13) razlikuju samo u nehomogenom delu. Može se pokazati:

Lema 4.1. Partikularno rešenje $X_p(\lambda)$ dato relacijom (4.11) neprekidno zavisi od $F(\lambda)$.

Ova lema omogućuje da se približno rešenje $\tilde{X}(\lambda,\tau)$, gde $\{\tilde{X}(\lambda,\tau)\} = \tilde{X}(\lambda)$ dok je $\tilde{X}(\lambda)$ dato relacijom (4.25), koristi kao približno rešenje diferencijalne jednačine (4.1) na intervalu $[T_1, T]$.

4.2. KONSTRUKCIJA PRIBLIŽNOG REŠENJA U VIŠE KORAKA

Podelimo interval $[0,T]$ na k jednakih podintervala $[0,T_1]$, $[T_1, T_2]$, ... , $[T_{k-1},T]$, dužine $h = T/k$. Na intervalu $[0,T_1]$ tačno rešenje je oblika (3.7) a približno je oblika (3.12). Na podintervalu $[T_1,T_2]$ tačno rešenje je oblika (4.12), dok je približno rešenje oblika (4.15). Ponavljajući postupak konstrukcije rešenja na intervalu $[T_1,T_2]$, na ostale podintervale dobija se tačno rešenje na intervalu $[T_{k-1},T]$ koje ćemo ovde označiti sa $\overset{\kappa}{x}(\lambda)$

$$\overset{\kappa}{x}(\lambda) = x_h(\lambda) + \frac{e^{-(k-1)hs}}{\ell(\alpha_{m,0} + \alpha_{m,1}s)} \int_0^\lambda F_{k-1}(\kappa)x_h(\lambda-\kappa) \tag{4.16}$$

gde je

$$F_{k-1}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j,1} \frac{\partial^j \overset{\kappa-1}{x}(\lambda,t)}{\partial\lambda^j}\bigg|_{t=T_{k-1}} \tag{4.17}$$

gde je $\overset{\kappa-1}{x}(\lambda,t)$ rešenje na intervalu $[T_{k-2},T_{k-1}]$.

Približno rešenje ćemo označiti sa

$$\overset{\kappa}{x}_n(\lambda) = x_{hn}(\lambda) + \frac{e^{-(k-1)hs}}{\ell(\alpha_{m,0} + \alpha_{m,1}s)} \int_0^\lambda \tilde{F}_{k-1}(\kappa)x_{h,n}(\lambda-\kappa)d\kappa \tag{4.18}$$

gde je $x_{h,n}(\lambda)$ dato relacijom (3.12), dok je

$$\tilde{F}_{k-1}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j,1} \frac{\partial^j \overset{\kappa-1}{x}_{n-1}(\lambda,t)}{\partial\lambda^j}\bigg|_{t=T_{k-1}} \tag{4.19}$$

gde je $\overset{\kappa-1}{x}_n(\lambda,t)$ približno rešenje na intervalu $[T_{k-2},T_{k-1}]$

Tvrdjenje 4.1. Faktori $F_i(\lambda)$ za $i = 1,\ldots,k-1$ se mogu pisati

$$F_i(\lambda) = A_{i,0}F_1(\lambda) + A_{i,1} \int_0^\lambda F_1(\lambda)F_1(\lambda-\kappa)d\kappa +$$

$$+ A_{i,2} \int_0^\lambda \left(\int_0^\kappa F_1(t_1)F_1(\kappa-t_1)dt_1\right)F_1(\lambda-\kappa)d\kappa + \tag{4.20}$$

$$+ A_{i,3}\int_0^\lambda\Big(\int_0^\kappa\Big(\int_0^{t_1} F_1(t_2)F_1(t_1-t_2)dt_2\Big)F_1(\kappa-t_1)dt_1F_1(\lambda-\kappa)d\kappa$$

$$+ \dots + A_{i,i-1}\underbrace{\int_0^\lambda\Big(\int_0^\kappa\Big(\dots\Big)F_1(\lambda-\kappa)d\kappa}_{(i-1)\text{-}integrala}$$

gde je $F_1(\lambda)$ oblika (4.9), dok se koeficijenti $A_{i,j}$ $j = 0,1,\dots,i-1$ mogu dobiti iz

$$A_{2,0} = 1 + \alpha_{m,1}/Q$$

$$A_{2,1} = 1/Q$$

$$A_{i,i-1} = 1/Q^{i-1}$$

$$A_{i,0} = 1 + \alpha_{m,1}/Q + \alpha^2_{m,1}/Q^2 + \dots + \alpha^{i-1}_{m,1}/Q^{i-1}$$

$$A_{i,j} = (A_{i-j,j-1} + \alpha_{m,1,j})/Q$$

gde je $Q = \ell(\alpha_{m,0} + \alpha_{m,1}s)$.

Dokaz: Krenućemo od rešenja jednačine na podintervalu $[T_{i-1},T_i]$, $i = 2,\dots,k$

$$\overset{i}{x}(\lambda) = x_h(\lambda) + \frac{e^{-(i-1)hs}}{Q}\int_0^\lambda F_{i-1}(\kappa)x_h(\lambda-\kappa)d\kappa$$

sa izvodima

$$\overset{i}{x}{}'(\lambda) = x_h'(\lambda) + \frac{e^{-(i-1)hs}}{Q}\Big(x(0)F_{i-1}(\lambda) + \int_0^\lambda F_{i-1}(\kappa)x_h'(\lambda-\kappa)d\kappa\Big)$$

$$\overset{i}{x}{}''(\lambda) = x''(\lambda) + \frac{e^{-(i-1)hs}}{Q}\Big(x'(0)F_{i-1}(\lambda) + \int_0^\lambda F_{i-1}(\kappa)x_h''(\lambda-\kappa)d\kappa\Big)$$

. . . .

. . . .

$$\overset{i}{x}^{(m)}(\lambda) = x_h^{(m)}(\lambda) + \frac{e^{-(k-1)hs}}{Q}(x^{(m-1)}(0)F_{i-1}(\lambda) + \int_0^\lambda F_{i-1}(\kappa)x_h^{(m)}(\lambda-\kappa)d\kappa).$$

U poslednjoj relaciji koristi se činjenica da je $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x^{(m-2)}(0) = 0$. Množenjem svake vrste sa odgovarajućim koeficijentima $\alpha_{j,1}$ respektivno za $j = 0,\dots,m$ dobijamo:

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_{j,1}\overset{i}{x}_h^{(j)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_{j,1}x_h^{(j)}(\lambda) + \frac{\alpha_{m,1}}{Q} H_{i-1}F_{i-1}(\lambda) +$$
$$+ \frac{e^{-(n-1)hs}}{Q}\int_0^\lambda F_{i-1}(\kappa)\left(\sum_{j=0}^{m} \alpha_{j,1}\, x_h^{(j)}(\lambda-\kappa)d\kappa\right).$$

Iz prethodne relacije sledi:

$$F_i(\lambda) = F_1(\lambda) + \frac{\alpha_{m,1}}{Q}F_{i-1}(\lambda) + \frac{1}{Q}\int_0^\lambda F_{i-1}(\kappa)F_1(\lambda-\kappa)d\kappa.$$

Matematičkom indukcijom pokazuje se relacija (4.21).

Tvrdjenje 4.2. Faktori $\tilde{F}_i(\lambda)$ se mogu napisati kao

$$\tilde{F}_i(\lambda) = A_{i,0}\tilde{F}(\lambda) + A_{i,1}\int_0^\lambda \tilde{F}_1(\lambda)\tilde{F}_1(\lambda-\kappa)d\kappa +$$

$$(4.22)\qquad + A_{i,2}\int_0^\lambda\left(\int_0^\kappa \tilde{F}_1(t_1)\tilde{F}_1(\kappa-t\ )dt_1\right)\tilde{F}_1(\lambda-\kappa)d\kappa +$$

$$+ A_{i,3}\int_0^\lambda(\int_0^\kappa(\int_0^{t_1} \tilde{F}_1(t_2)\tilde{F}_1(t_1-t_2)dt_2)\tilde{F}_1(\kappa-t_1)dt_1)\cdot$$

$$\cdot\ \tilde{F}_1(\lambda-\kappa)d\kappa + \dots + A_{i,i-1}\underbrace{\int_0^\lambda(\int_0^\kappa}_{(i-1)\text{-integrala}}(\dots)\tilde{F}_1(\lambda-\kappa)d\kappa$$

gde je $\tilde{F}_1(\lambda)$ dato relacijom (4.13') a koeficijenti $A_{i,j}$

$j = 0,\ldots,i-1$ su oblika (4.21).

Po pretpostavci, radimo sa takvim jednačinama čija su tačna rešenja zajedno sa svim izvodima koji ulaze u jednačinu neprekidne funkcije, što se može reći i za približna rešenja. Prema tome, možemo proceniti razliku $|\overset{\kappa}{x}(\lambda) - \overset{\kappa}{x}_n(\lambda)|$.

4.3. PROCENA $|F_i(\lambda) - \tilde{F}_i(\lambda)|$

Ako je ω_j dato relacijom (1.21), uvedimo oznake

$$\omega_j^{k+\mu} = \{v_{j,k+\mu}(t)\}, \quad V_{j,k+\mu}(T) = v_{j,k+\mu}(t)|_{t=T}$$

$$W_k(T) = \sum_{j=1}^{m} b_j\Big(\sum_{\mu=0}^{m} \alpha_{\mu,1} V_{j,k+\mu}(T)\Big). \tag{4.23}$$

Na osnovu (4.9) i (4.23) možemo pisati

$$F_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} W_k(T) \tag{4.24}$$

i analogno

$$\tilde{F}_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \tilde{W}_k(T) \tag{4.25}$$

gde je

$$\begin{gathered}\tilde{W}_k(T) = \sum_{j=0}^{m} b_j\Big(\sum_{=0}^{m} \alpha_{\mu,1} \tilde{V}_{j,k+\mu}(T)\Big),\\ \tilde{V}_{j,k+\mu}(T) = \tilde{v}_{j,k+\mu}(t)|_{t=T}, \quad \{\tilde{v}_{j,k+\mu}(t)\} = \tilde{\omega}_j^{k+\mu},\end{gathered} \tag{4.26}$$

gde je

$$\tilde{\omega}_j = \sum_{i=0}^{n} c_i \ell^{i\alpha-\beta}.$$

U cilju tražene procene mogu se pokazati sledeće leme:

Lema 4.2. Ako je $F_1(\lambda)$ operator dat relacijom (4.9) tada važi:

$$(4.27)\qquad \int_0^\lambda F_1(\kappa)F_1(\lambda-\kappa)d\kappa = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i+k+1}}{(i+k+1)!}W_i(T)W_j(T)$$

$$\equiv : B_1(\lambda)$$

gde su $W_i(T)$ i $W_j(T)$ za $i,j = 0,1,\ldots$ oblika (4.23).

Lema 4.3. Ako je $F_1(\lambda)$ operator dat relacijom (4.9) važi:

$$\int_0^\lambda \Big(\int_0^{t_1} \Big(\int_0^{t_2} \Big(\ldots \int_0^{t_{i-2}} F_1(t_{i-1})F_1(t_{i-2} - t_{i-1})dt_{i-1} \cdots$$

$$(4.28)\qquad \cdots F_1(t_{i-3} - t_{i-2})dt_{i-2}\Big) \ldots F_1(\lambda-t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{j_i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j_1+j_2+\ldots+j_i+i}}{(j_1+j_2+\ldots+j_i+i)!}W_{j,1}(T)W_{j,2}(T)\ldots$$

$$\ldots W_{j,i}(T) \equiv : B_{i-1}(\lambda)$$

gde su $W_{j,1}(T), \ldots, W_{j,i}(T)$ za j ,...,j,i = 0,1 oblika (4.23)

Na osnovu (4.27) i (4.28) možemo pisati

$$(4.29)\qquad F_i(\lambda) = A_{i,0}F_1(\lambda) + A_{i,1}B_1(\lambda) + A_{i,2}B_2(\lambda) + \ldots + A_{i,i-1}B_{i-1}(\lambda)$$

i analogno

$$\tilde{F}_i(\lambda) = A_{i,0}\tilde{F}_1(\lambda) + A_{i,1}\tilde{B}_1(\lambda) + \ldots + A_{i,i-1}\tilde{B}_{i-1}(\lambda)$$

gde su veličine $\tilde{B}_1(\lambda), \tilde{B}_2(\lambda),\ldots,\tilde{B}_{i-1}$ dobijene iz relacije (4.28) kada se umesto $F_1(\lambda)$ posmatra $\tilde{F}_1(\lambda)$.

Označimo sa $Q_{j_i}(T)$ sledeće procene

$$|W_k(T) - \tilde{W}_k(T)| \le Q_{j_1}(T) ,$$

$$(4.30) \qquad |W_{j_1}(T)W_{j_2}(T) - \tilde{W}_{i_1}(T)W_{i_2}(T)| \le Q_j (T)\cdot \ell ,$$

$$|W_{j_1}(T)\ldots W_{j_i}(T) - W_{j_1}(T)\ldots \tilde{W}_{j,i}(T)| \le Q_{j,i}(T) .$$

Na osnovu izloženog dokazuje se

Tvrdjenje 4.3. Ako je $F_{k-1}(\lambda)$ dato relacijom (4.17) a $\tilde{F}_{k-1}(\lambda)$ relacijom (4.19), tada važi procena $(\lambda > 0)$

$$|\ell(\tilde{F}_{k-1}(\lambda) - \tilde{F}_{k-1}))| \le_T |A_{k-1,0}\ell| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} Q_{j_1}(T) +$$

$$(4.31) \qquad + |A_{k-1,1}\ell| \cdot \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j_1+j_2+1}}{(j_1+j_2+1)!} Q_{j_2}(T) + \ldots +$$

$$+ |A_{k-1,k-2}\ell| \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \ldots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j_1+j_2+\ldots+j_k+i}}{(i_1+i_2+\ldots+i_k+i)!} Q_{j_{k-1}}(T) \equiv R_{\varepsilon,k-1}(T)\ell .$$

4.4. OCENA GREŠKE

Sada smo u mogućnosti da dokažemo

Tvrdjenje 4.4. Ako je $\overset{\kappa}{x}(\lambda)$ tačno rešenje dato relacijom (4.16) a $\overset{\kappa}{x}_n(\lambda)$ dato relacijom (4.18) približno rešenje jednačine (4.4), tada se njihova razlika može proceniti kao:

$$(4.32) \qquad |\overset{\kappa}{x}(\lambda) - \overset{\kappa}{x}_n(\lambda)| \le_T x_\varepsilon(\lambda)\ell + \lambda(\tilde{\tilde{R}}_{\varepsilon,k-1}(\lambda) + \tilde{\tilde{F}}_n(\lambda)\tilde{x})$$

gde je

$$|x_h(\lambda)-x_{h,n}(\lambda)| \le_{T_1} x_\varepsilon(\lambda)\ell , \qquad \tilde{\tilde{F}}_n(\lambda) = \max_{0\le\kappa\le\lambda} \tilde{F}(\kappa) ,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_\varepsilon(\lambda) = \max_{0\le\kappa\le\lambda} x_\varepsilon(\lambda-\kappa), \qquad \tilde{\tilde{R}}_{\varepsilon,k-1}(\lambda) = \max_{0\le\kappa\le\lambda} R_{\varepsilon,k}(\kappa)$$

$$|x_h(\lambda-\kappa)| \le_{T_1} \tilde{x}(\lambda-\kappa)\ell$$

$$\tilde{\tilde{x}}(\lambda) = \max_{0\le\kappa\le\lambda} \tilde{x}(\lambda-\kappa)$$

Dokaz: Na osnovu (4.16) i (4.18) možemo pisati

$$|\overset{\kappa}{x}(\lambda) - \overset{\kappa}{x}_n(\lambda)| \le_T |x_h(\lambda) - x_{h,n}(\lambda)|$$

$$+ \int_0^\lambda |e^{-s(k-1)h}(F_{k-1}(\kappa) - \tilde{F}_{k-1}(\kappa))x_h(\lambda-\kappa)|d\kappa$$

$$+ \int_0^\lambda |e^{-s(k-1)h}\tilde{F}_n(\kappa)(x_h(\lambda-\kappa) - x_{h,n}(\lambda-\kappa)|d\kappa$$

$$\le_T x_\varepsilon(\lambda)\ell + \lambda\ell(\tilde{\tilde{R}}_{\varepsilon,k-1}(\lambda)\tilde{\tilde{x}}(\lambda) + F_n(\lambda)\tilde{\tilde{x}}_\varepsilon)$$

Primer 1.

Parcijalna diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 x(\lambda,t)}{\partial\lambda\cdot\partial t} - \frac{\partial x(\lambda,t)}{\partial t} = x(\lambda,t) \text{ za } 0 \le \lambda \le \lambda_0 \quad , \; t \ge 0 \tag{4.33}$$

sa uslovima

$$\frac{\partial x(\lambda,0)}{\partial\lambda} = 0, \quad \lambda>0, \; x(0,t) = 1, \; t > 0 \tag{4.34}$$

odgovara u polju operatora Mikusińskog jednačini

$$(s - 1)x'(\lambda) - x(\lambda) = 0 \tag{4.35}$$

sa uslovom:

$$x(0) = \ell. \tag{4.36}$$

Rešenje jednačine (4.35), sa uslovom (4.36), ima oblik:

$$x(\lambda) = \ell \cdot exp(\lambda\omega) \tag{4.37}$$

gde je
$$\omega = \sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+1} .$$

Približno rešenje jednačine (4.35) je oblika:

$$x_n(\lambda) = exp(\lambda\omega_n) \tag{4.38}$$

gde je

$$\omega_n = \sum_{i=0}^{n} \ell^{i+1} .$$

Kako su tačno i približno rešenje iz L, odnosno iz C, to ćemo meru aproksimacije tražiti u odnosu na funkcionelu F(f). Na osnovu leme 2.7. imamo procenu

$$\|x(\lambda) - x_n(\lambda)\|_T \leq k(\lambda,T,1,-1) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)}{2} + 1\right)} \tag{4.39}$$

gde je

$$k(\lambda,T,1,-1) = \frac{T^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)} \cdot e^{T+\lambda\left(e^{T} + e^{T}\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}\right)}$$

Na osnovu leme 2.8. mera aproksimacije je za $\lambda = 1$

$$\Delta_L = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)} Q(1,1,-1) \tag{4.40}$$

gde je

$$Q(1,1,-1) \geq \frac{e^{2e^2}}{e^e} + \frac{e}{e - 1} \tag{4.40´}$$

Tačno i približno rešenje diferencijalne jednačine (4.35) su neprekidne funkcije, takodje, pa meru aproksimacije možemo dati u odnosu na funkcionelu G(h). Na osnovu leme 2.10., za posmatrani primer, imamo:

$$|x(\lambda,t) - x_n(\lambda,t)|_T \le k_c(\lambda,T,1,-1)\,\frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\,\frac{1}{3!}$$

gde je

$$k_c(\lambda,T,1,-1) = \frac{T^{n+2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\, e^{\lambda T e^{T}} + T + \lambda e^{T}\cdot T.$$

Koristeći lemu 2.11. dobijamo meru aproksimacije, za $\lambda = 1$, kao

$$(4.41) \qquad \Delta_C = \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\cdot Q(1,1,-1)$$

gde je

$$(4.41') \qquad Q(1,1,-1) \ge 4\cdot 5\left(\frac{e^{2e^2}}{e^{e}} + \frac{e}{e-1}\right).$$

Mera aproksimacije, formirana preko razlike izmedju tačnog i približnog rešenja, za posmatrani slučaj je

$$(4.42) \qquad |x(\lambda,t) - x_n(\lambda,T)| \le_T \frac{T^{n+2}}{(n+1)!}\, e^{T+Te^{T}} + e^{T}\cdot\frac{T^{n+2}}{(n+1)!}\,.$$

U tabeli 1. prikazane su mere aproksimacije Δ_L i Δ_C u zavisnosti od $n = 2k+1$, koje važe za svako $T > 0$.

U tabeli 2. data je ocena greške kao procena razlike izmedju tačnog i približnog rešenja u zavisnosti od $n = 2k+1$ za $T = 0,1;\ 0,2$ i $0,5$.

U tabeli 3. data je ocena greške kao procena razlike izmedju tačnog i približnog rešenja u zavisnosti od $n = 2k+1$ za $T = 1,2,3$.

U tabeli 4. izražena je ocena greške preko procene razlike izmedju tačnog i približnog rešenja koji su dobijeni u dva koraka, u zavisnosti od $n = 2k+1$ i $T = 0,4;\ 0,8$ i 1.

Tabela 1.

k	Δ_L	Δ_C
8	0.476166376569E+00	0.857099477823E+02
9	0.476166376569E-01	0.952332753137E+01
10	0.432878524153E-02	0.952332753137E+00
11	0.360732103461E-03	0.865757048306E-01
12	0.277486233432E-04	0.721464206922E-02
13	0.198204452451E-05	0.554972466863E-03
14	0.132136301634E-06	0.396408904902E-04
15	0.825851885213E-08	0.264272603268E-05
16	0.485795226596E-09	0.165170377043E-06
17	0.269886236998E-10	0.971590453192E-08
18	0.142045387894E-11	0.539772473995E-09
19	0.710226939468E-13	0.284090775787E-10
20	0.338203304508E-14	0.142045387894E-11
21	0.153728774777E-15	0.676406609017E-13
22	0.668385977289E-17	0.307457549553E-14
23	0.278494157204E-18	0.133677195458E-15
24	0.111397662882E-19	0.556988314408E-17
25	0.428452549544E-21	0.222795325763E-18

Tabela 2.

T k	0,1	0,2	0,5
4	0.102859680092E-07	0.831663425742E-06	0.489659888217E-03
5	0.171432798601E-09	0.277220967348E-07	0.407969615635E-04
6	0.244903997964E-11	0.792059890000E-09	0.291402027521E-05
7	0.306129997454E-13	0.198014972380E-10	0.182126049018E-06
8	0.340144441616E-15	0.440033271950E-12	0.101181130711E-07
9	0.340144441616E-17	0.880066543899E-14	0.505905651424E-09
10	0.309222219651E-19	0.160012098891E-15	0.229957114235E-10
11	0.257685183042E-21	0.266686831484E-17	0.958154642637E-12
12	0.198219371571E-23	0.410287433053E-19	0.368521016399E-13
13	0.141585265408E-25	0.586124904362E-21	0.131614648714E-14
14	0.943901769386E-28	0.781499872482E-23	0.438715495713E-16
15	0.589938605866E-30	0.976874840603E-25	0.137098592410E-17
16	0.347022709333E-32	0.114926451836E-26	0.403231154148E-19
17	0.192790394074E-34	0.127696057595E-28	0.112008653930E-20
18	0.101468628460E-36	0.134416902732E-30	0.294759615605E-22

Tabela 3.

k \ n	1	k \ n	2	k \ n	3
5	0.574296825269E-01	12	0.509084190710E+02	37	0.229723521658E+02
6	0.817773394182E-02	13	0.727251010503E+01	38	0.176710401276E+01
7	0.102173444800E-02	14	0.969665679981E+00	39	0.132532800957E+00
8	0.113519246723E-03	15	0.121208170723E+00	40	0.969752202122E-02
9	0.113518481405E-04	16	0.142597842085E-01	41	0.692680144373E-03
10	0.103198549182E-05	17	0.158442045995E-02	42	0.483265217005E-04
11	0.859967356168E-07	18	0.166781100957E-03	43	0.329499011594E-05
12	0.661529116664E-08	19	0.166781100947E-04	44	0.219668007729E-06
13	0.472520797425E-09	20	0.158839143758E-05	45	0.143260439823E-07
14	0.315013864941E-10	21	0.144399221598E-06	46	0.914428339299E-09
15	0.196883665588E-11	22	0.125564540520E-07	47	0.571517712062E-10
16	0.115813920934E-12	23	0.104637117100E-08		
17	0.643410671855E-14	24	0.837096936802E-10		
18	0.338637195713E-15	25	0.643920720617E-11		
19	0.169318597857E-16	26	0.476978311568E-12		
20	0.806279037413E-18	27	0.340698793977E-13		
21	0.366490471551E-19	28	0.234964685502E-14		
22	0.159343583283E-20	29	0.156643123668E-15		
23	0.663932013680E-22	30	0.101060079786E-16		
24	0.265572805472E-23	31	0.631625498660E-18		
25	0.102143386720E-24	32	0.382803332521E-19		
26	0.378308839704E-26				

Tabela 4.

k \ T	0,4	0,8	1
1	2	3	4
4	0.804894586925E-05	0.983034773055E-03	0.650375724987E-02
5	0.268297350905E-06	0.655278653451E-04	0.541766503129E-03
6	0.766563778881E-08	0.374441948584E-05	0.386983217039E-04
7	0.191640944141E-09	0.187220888037E-06	0.241851431184E-05
8	0.425868764725E-11	0.832092816439E-08	0.134361885944E-06
9	0.851737529448E-13	0.332837126231E-09	0.671809424057E-08
10	0.154861368991E-14	0.121031682261E-10	0.305367919897E-09
11	0.258102281651E-16	0.403438940869E-12	0.127236633288E-10
12	0.397080433309E-18	0.124135058729E-13	0.489371666491E-12
13	0.567257761870E-20	0.354671596368E-15	0.174775595175E-13

Nastavak tabele 4.

1	2	3	4
14	0.756343682493E-22	0.945790923649E-17	0.582585317251E-15
15	0.945429603117E-24	0.236447730912E-18	0.182057911641E-16
16	0.111227012131E-25	0.556347602146E-20	0.535464446003E-18
17	0.123585569035E-27	0.123632800477E-21	0.148740123890E-19
18	0.130090072668E-29	0.260279579952E-23	0.391421378657E-21
19	0.130090072668E-31	0.520559159903E-25	0.978553446643E-23

T / k	2
4	0.437458113760E+02
5	0.715462815618E+01
6	0.101878754922E+01
7	0.127288359053E+00
8	0.141423034768E-01
9	0.141422081330E-02
10	0.128565440930E-03
11	0.107137860754E-04
12	0.824137386098E-06
13	0.588669561260E-07
14	0.392446374162E-08
15	0.245278983851E-09
16	0.144281755206E-10
17	0.801565306702E-12
18	0.421876477212E-13
19	0.210938238606E-14

U tabeli 5. je izražena ocena greške preko procene razlike izmedju tačnog i približnog rešenja, koja su dobijena u pet koraka, u zavisnosti od n = 2k+1 i T = 0,5, 1, 2.

Tabela 5.

T n	0,5	1	2
4	0.347935408216E-06	0.520418458443E-04	0.625094260444E-01
5	0.579892294511E-08	0.173472273302E-05	0.416679995959E-02
6	0.828417562333E-10	0.495635014303E-07	0.238100949575E-03
7	0.103552195289E-11	0.123908753201E-08	0.119050419939E-04
8	0.115057994766E-13	0.275352784870E-10	0.529112965248E-06
9	0.115057994766E-15	0.550705569740E-12	0.211645185880E-07
10	0.104598177060E-17	0.100128285407E-13	0.769618857715E-09
11	0.871651475500E-20	0.166880475679E-15	0.256539619238E-10
12	0.670501135000E-22	0.256739193352E-17	0.789352674578E-12
13	0.478929382143E-24	0.366770276217E-19	0.225529335594E-13
14	0.319286254762E-26	0.489027034956E-21	0.601411561583E-15
15	0.199553909226E-28	0.611283793695E-23	0.150352890396E-16
16	0.117384652486E-30	0.719157404347E-25	0.353771506814E-18
17	0.652136958255E-33	0.799063782608E-27	0.786158904030E-20

U tabeli 6. biće izražena ocena greške preko procene razlike izmedju tačnog i približnog rešenja, koja su dobijena u deset koraka, u zavisnosti od n = 2k+1 i T = 0,8; 2 i 4.

Tabela 6.

T n	0,8	2	4
4	0.342329115307E-06	0.125893728791E-02	0.153494957791E+03
5	0.570546807175E-08	0.524551950391E-04	0.127862131589E+02
6	0.815066866160E-10	0.187339903629E-05	0.913270597041E+00
7	0.101883358268E-11	0.585437190022E-07	0.570792755557E-01
8	0.113203731409E-13	0.162621441596E-08	0.317107038583E-02
9	0.113203731409E-15	0.406553603985E-10	0.158553517955E-03
10	0.102912483099E-17	0.923985463601E-12	0.720697808580E-05
11	0.857604025823E-20	0.192496971584E-13	0.300290753569E-06
12	0.559695404479E-22	0.370186483815E-15	0.115496443680E-07
13	0.471211003199E-24	0.661047292526E-17	0.412487298859E-09
14	0.314140668800E-26	0.110174548754E-18	0.137495766286E-10
15	0.196337918000E-28	0.172147732429E-20	0.429674269644E-12
16	0.115492892941E-30	0.253158430042E-22	0.126374785190E-13
17	0.641627183006E-33	0.351608930614E-24	0.351041069971E-15
18	0.337698517371E-35	0.462643329755E-26	0.923792289397E-17
19	0.142707100105E-37	0.578304162194E-28	0.230948072349E-18

Primer 2.

Jednačina žilavo elastičnog štapa

U radu [10] je analizirana jednačina

$$(4.43)\qquad \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) + \int_0^t \partial_t^2 u(t-\tau,x)G(\tau)d\tau = 0$$

sa uslovima

$$(4.44)\qquad a)\quad u(0,x) = 0 \qquad b)\quad \partial_t u(0,x) = \delta(x)$$

gde je

$$(4.44')\qquad \{G(t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \ell^{i\alpha} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{t^{i\alpha-1}}{G(i\alpha)} \right\},\ a_1 > 0,\ 0<\alpha<1,$$

gde je $\delta(x)$ distribucija.

Rešenje jednačine (4.43) sa uslovom (4.44)(a), koje je je neprekidna funkcija za $t \geq 0$, $x \neq 0$, ima osu simetrije $x = 0$, je

$$(4.45)\qquad u(x) = \frac{1}{2}\ell\cdot exp(-|x| \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ell^{i\alpha-1}),\quad c_0 = 1$$

a koeficijenti c_i se mogu dobiti na sledeći način:

$$(4.46)\qquad \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} a_1 \\ c_2 &= \frac{1}{2}(a_2 - \frac{a_1}{2})^2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_i &= \frac{1}{2}(a_i - \sum_{j=1}^{n-1} c_{i-1},c_j). \end{aligned}$$

Rešenje oblika (4.45) zadovoljava uslov (4.44)(b) takodje, ako je $i_1\alpha-1 > 0$, gde je i_1 indeks koeficijenta c_i takav da je $i_1 > 1$, $c_i = 0$ za $1 < i < i_1$ i $c_{i_1} \neq 0$.

Ovaj rezultat je uopštenje rezultata iz rada [10] gde je posmatran problem (4.43) sa uslovima (4.44) za

$$G(t) = 2\lambda \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda^2 \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + R(t), \ \lambda > 0, \ 0 < \alpha <$$

gde je ili $R(t) \equiv 0$ ili $R'(0) = R'(0) = 0$ i $R''(t)$ je „dovoljno malo" za $t \in [0,T]$, $R(t) \in C^{\infty}$.

Približno rešenje jednačine (4.43) sa uslovima (4.44), kada je $G(t)$ oblika (4.44´) je

$$u_n(x) = \frac{1}{2}\ell exp(-|x| \sum_{i=0}^{k-1} c_i \ell^{i\alpha-1}).$$

U cilju odredjivanja mere aproksimacije mogu se pokazati sledeće leme:

Lema 4.4. Ako za koeficijente a_i važe sledeće nejednakosti

$$r^{-i}(-1)^{i-1}\binom{r}{i} \le (-1)^{i-1}a_i \le (-1)^{i-1}\, s^{-i}\binom{s}{i}, \ i = 1,2,\ldots$$

za dva realna broja r,s takva da je $0 < s < r < 1$. Tada za koeficijente c_i, koji su dati relacijom (4.46), važi:

$$r^{-i}(-1)^{i-1}\binom{r/2}{i} \le (-1)^{i-1}c_i \le (-1)^{i-1}\binom{s/2}{i}\, s^{-i}$$

Lema 4.5. Pretpostavimo da za koeficijente a_i iz (4.44´) važe sledeće nejednakosti

$$|a_i| \le b_i, \ i = 1,2,\ldots, \ b_i \ge 0$$

kao i da postoje brojevi $r > 0$ takvi da za svako z, $|z| \le r$ sledeći uslovi su zadovoljeni:

a) red $\sum_{k=1}^{\infty} b_i\, z^i = k(z)$ konvergira;

b) $\tilde{G}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, z^i \neq -1$

tada $c_i \leq Mr^i$, $M = (1 + k(r))^{\frac{1}{2}}$.

Lema 4.6. Ako koeficijenti zadovoljavaju uslove $|a_i| \leq c\,\gamma^i$ za $i \geq 1$ i ako postoji $r > 0$ takvo da je $\gamma < 1/r$ i $c < (1 - \gamma r)/\gamma r$, $|c_i| \leq \sqrt{2}/r^i$.

Korišćenjem leme 2.7. dobijamo: $(\beta = 1)$

$$\|u(x) - u_n(x)\|_T \leq k(|\lambda|,T,\alpha,1)\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{(n+1)}{4} + 1\right)}$$

gde je za $c = 1$, $\alpha = 1/2$

$$k(|x|,T,\tfrac{1}{2},1) = \tilde{R}_1(|x|,T)\cdot\tilde{R}_2(\lambda)\cdot\tilde{R}_3(|x|,T+\lambda)\cdot E(\lambda,T) \leq$$

$$\leq 7!\ 4e^{e^{2T}} \quad \text{za} \quad |x| = 1$$

pa na osnovu leme 2.8.

$$F(u(x) - u_n(x)) \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{4} + 1)}\,Q(1,\tfrac{1}{2},1)$$

gde je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{7!\ 4e^{e^{2i}}}{e^{ie^{i^2}}} \leq 7!\ 4\left(\frac{e^e}{e^e} + \frac{1}{e-1}\right) \equiv Q(1,\tfrac{1}{2},1).$$

U tabeli 7. prikazuje se mera aproksimacije Δ_L u zavisnosti od $n = 4k+3$.

Tabela 7.

k \ Δ_L	Δ_L
10	0,899312973022E+01
11	0,817557275295E+00
12	0,681297704577E-01
13	0,524075143039E-02
14	0,374339375412E-03
15	0,249559579970E-04
16	0,155974737481E-05
17	0,917498468311E-07
18	0,509721376218E-08
19	0,268274402693E-09
20	0,134137197877E-10
21	0,638748548411E-12
22	0,290340261598E-13
23	0,126234897728E-14
24	0,525978740534E-16
25	0,210391486287E-17
26	0,809198029154E-19
27	0,299702964785E-20
28	0,107036774941E-21
29	0,369092319221E-23
30	0,123030771430E-24
31	0,396873456226E-26

Primer 3.

Diferencijalna jednačina

$$(s+1)x'(\lambda) - x(\lambda) = 0$$

sa uslovom

$$x(0) = I$$

ima tačno rešenje

$$x(\lambda) = exp(\lambda\omega)$$

gde je

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \ell^{i+1}$$

dok je približno rešenje oblika

$$x_n(\lambda) = exp(\lambda\omega_n)$$

gde je

$$\omega_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \ell^{i+1}$$

Mera aproksimacije je:

$$A(x_n(\lambda) - x(\lambda)) \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2} + 1)} Q_{g_1}(\lambda,1,-1)$$

za

$$g_1 = \{k\ e^{-kt}\}$$

i

$$\sum \frac{e^{2e^{2i}}}{e^{ie^{i^2}}} \leq \left(\frac{e^{3e^2}}{e^{e}} + \frac{e}{1-e}\right) \equiv Q_g\ (\lambda,1,-1)\ .$$

Primer 4.

Posmatraćemo linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu ([11])

$$\text{(4.47)}\qquad \frac{\partial^4 x(\lambda,t)}{\partial\lambda^2\partial t^2} - 2\frac{\partial^3 x(\lambda,t)}{\partial\lambda^2\partial t} + \frac{\partial^2 x(\lambda,t)}{\partial\lambda^2} - x(\lambda,t) = 4e^{\lambda}$$

sa uslovima:

$$\frac{\partial^2 x(\lambda,0)}{\partial\lambda^2} = e^{\lambda},\quad \frac{\partial^3 x(\lambda,0)}{\partial\lambda\partial t} - 2\frac{\partial^2 x(\lambda,0)}{\partial\lambda^2} = \lambda,\ \lambda > 0,$$

$$\text{(4.48)}\qquad x(0,t) = 1 + 2t,\quad \frac{\partial x(0,t)}{\partial\lambda} = 2t^2,\quad t > 0$$

$$x(0,t) = 1 + 2t,\quad \frac{\partial x(0,t)}{\partial\lambda} = 2t^2,\quad t > 0.$$

U polju operatora M jednačini (4.47) odgovara jednačina:

$$\text{(4.49)}\qquad (s-1)\ x''(\lambda) - x(\lambda) = (s-4\ell)e^{\lambda} + \lambda$$

sa uslovima

$$\text{(4.50)}\qquad x(0) = \ell + 2\ell^2,\quad x'(0) = 2\ell^2.$$

Karakteristična jednačina jednačine (4.49) je

$$P(\omega) = (s-1)^2\omega^2 - I = 0$$

sa uslovima

$$\omega_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+1}\ ,\quad \omega_2 = -\sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+1}\ ,$$

sa aproksimacijom

$$+ A_{2,n} \int_{0}^{\lambda} ((s-4\ell)e^{\kappa} + \kappa)exp((\lambda-\kappa) \cdot \sum_{i=0}^{n} \ell^{i+1})d\kappa,$$

gde su

$$A_{1,n} = \frac{\ell}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \ell^{k}(-1)^{k} \cdot \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(-1)^{k-p}(-\ell + \ell^{2} +$$

$$+ (1 - 2\ell + \ell^{2}) \sum_{i=0}^{n} \ell^{i})^{p}$$

$$A_{2,n} = - \frac{\ell}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \ell^{k}(-1)^{k} \cdot \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(-1)^{k-p}(- \ell + \ell^{2} +$$

$$+ (1 - 2\ell + \ell^{2}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \ell^{i})^{p}.$$

Na osnovu relacije (3.50) mera aproksimacije sa kojom približno rešenje diferencijalne jednačine (4.49) oblika (4.53) aproksimira tačno rešenje oblika (4.52) je (za $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta = -1$)

$$\Delta_2 = 2 \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} (Q_{g_1}(\lambda,1,-1) + \tilde{Q}^{P}_{g_1}(\lambda,1,-1))$$

gde je $Q_{g_1}(\lambda,1,-1)$ na osnovu (2.32´) oblika

$$Q_{g_1}(\lambda,\alpha_j,\beta_j) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8e^{2e^{2i}}}{e^{ie^{i^2}}}$$

dok je na osnovu (3.49)

$$\tilde{Q}^{P}_{g}(\ ,1,-1) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(5e+1)e^{2e^{i}}}{e^{ie^{i^2}}}$$

odnosno, dobijamo

$$\Delta_2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{(n-1)}{2} +1)} (5e+9) \left(\frac{e^{2e^2}}{e^{e}} + \frac{e}{e-1}\right)$$

pa možemo formirati tabelu u zavisnosti od $n = 4k+1$, (tabela 8).

$$\omega_{1,n} = \sum_{i=0}^{n} \ell^{i+1} \qquad \omega_{2,n} = - \sum_{i=0}^{n} \ell^{i+1}$$

Kako je

$$P'(\omega) = 2(s-1)^2\omega$$

$$P'(\omega_1) = 2(s^2 - 2s + 1) \sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+1}, \quad \mu_1 = 2, \ \nu_1 = 2 \quad \beta = -1.$$

Koeficijenti A_1 i A_2 su

$$(4.51') \qquad A_1 = \frac{\ell}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-2\ell + \ell^2 + (s-2+\ell)\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+2})(-1)^k =$$

$$= \frac{\ell}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \ell^k(-1)^k \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(-1)^{k-p}(-\ell+\ell^2+ (1-2\ell+\ell^2) \sum_{i=1}^{\infty}\ell^i)^p$$

$$(4.51'') \qquad A_2 = -\frac{\ell}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \ell^k(-1)^k \cdot \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(-1)^{k-p}(-\ell+\ell^2+(1-2\ell+\ell^2) \sum_{i=1}^{\infty}\ell^i)^p$$

Rešenje jednačine (4.49) jeste ($c_1 = \frac{3}{2}\ell$, $c_2 = 2\ell^2 - \frac{\ell}{2}$)

$$x(\lambda) = \frac{3\ell}{2}\, exp(\lambda\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+1}) + (2\ell^2 - \frac{\ell}{2}) exp(-\lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+1}) +$$

$$+ A_1 \int_0^{\lambda} (s-4\ )e^{\kappa} + \kappa) exp((\lambda-\kappa)\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+1}) d\kappa +$$

$$+ A_2 \int_0^{\lambda} ((s - 4\ell)e^{\kappa} + \kappa) exp((\lambda-\kappa) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \ell^{i+1}) d\kappa$$

gde su A_1 i A_2 dati relacijama (4.51') i (4.51'') respektivno.

Približno rešenje jednačine (4.49) jeste

$$(4.53) \qquad x_n(\lambda) = \frac{3\ell}{2}\, exp(\lambda \sum_{i=0}^{n} \ell^{i+1}) + (2\ell^2 - \frac{\ell}{2}) exp(-\lambda \sum_{i=0}^{n} \ell^{i+1}) +$$

$$+ A_{1,n} \int_0^{\lambda} (s-4\ell)e^{\kappa} + \kappa) exp((\lambda-\kappa) \sum_{i=0}^{n} \ell^{i+1}) d\kappa +$$

Tabela 8.

k	Δ_2
11	0,195587381721E+00
12	0,162989478558E-01
13	0,125376519281E-02
14	0,895546545507E-04
15	0,597031021243E-05
16	0,373144388277E-06
17	0,219496705256E-07
18	0,121942611564E-08
19	0,641803207801E-10
20	0,320901595227E-11
21	0,152810286668E-12
22	0,694592215979E-14
23	0,301996627152E-15
24	0,125831930737E-16
25	0,503327718812E-18
26	0,193587582916E-19
27	0,716991057186E-21
28	0,256068241471E-22
29	0,882993902104E-24
30	0,294331306864E-25
31	0,949455825488E-27
32	0,296704945465E-28

5. LITERATURA

[1] Boehme, T.: *On Mikusinski operators, Studia Math. T. 33 (1969), 127 - 140.*

[2] Boehme, T.: *The Mikusinski operators as a topological space, Amer. J. Math., 98 (1976), 55 - 66.*

[3] Burzyk, J.: *On convergence in the Mikusinski operational calculus, Stud. Math., 75 (1983), 313 - 333.*

[4] Burzyk, J.: *On the type II convergence in the Mikusinski operational calculus, Stud. Math., T. 77 (1983), 17 - 27.*

[5] Burzyk, J., J. Mikusiński, P.: *On normabilу of semigroups, Bull. Acad. Polon. Sci. Math., Astronom., Phys., 1-2 (1980), 33 - 35.*

[6] Foias, C.: *Approximation des opērateurs de J. Mikusinski par des fonctions continues, Studia Math. (21) (1961), 73 - 74.*

[7] Doetsch, G.: *Handboch der Laplace Transformation, Band I, Band III, Verlag Birk. Basel (1950)*

[8] Herceg, D., Stanković, B.: *Approximate Solution of the Operational Differential Equation II, Publ. de l' Inst. Math. N.S., t. 22(36)(1977), 77 - 86.*

[9] Gajić, Lj., Stanković, B.: *Neke osobine funkcija E.M. Wrighta, Publ. Inst. Math. Bgd, (20),(1976), 91 - 98.*

[10] Локшин, А.А., Рок, В.Е.: Автомодельные решения волновних уравнений с запаздиваньошим временом, Успехи математичесних наук, Т. 33, ЗЫП 6, (204)(198), 221 - - 222.

[11] Mikusinski, J.: *Operational calculus, Pergamon Press, Warsawa, (1959).*

[12] Mikusinski, J.: *Sur les functions ēxponentielles du calcul opēratoire, Stud. Math., 12, (1951), 208 - 224.*

[13] Mikusinski, J.: *Sur les notions de distributions et d'operateur, Bull. Ac. Polonaise de Sciences VI, No. 12, (1958), 737-741.*

[14] Pap, E.: *Funkcionalna analiza, Novi Sad (1982), Institut za matematiku PMF, Novi Sad.*

[15] Pap, E.: *Parcijalne diferencijalne jednacine, Beograd (1986).*

[16] Pap, E., Takači, Dj.: *Estimations for the solutions of operator linear differential equations (u pripremi).*

[17] Stanković, B.: *Operatori J. Mikusinskog,,Novi Sad, (1962).*

[18] Stanković, B.: *O jednoj klasi operatora, Zbornik radova PMF, N.S.,V5 (1975), 9 - 19.*

[19] Stanković, B.: *Majoracija koeficijenata Tejlorovog reda kanonickog elementa algebarske funkcije, Zbornik radova PMF, V.6 (1976), 15 - 18.*

[20] Stanković, B.: *On the function of E.M. Wright, Publ. Inst. Math 10 (1970), 113 - 124.*

[21] Stanković, B.: *Approximate solution of the operator linear differential equation I, Publ. de l'Inst. Math. N.S., T.21 (35),(1977), 185 - 196.*

[22] Stanković, B.: *Linear differential equation with coefficients in a ring of Mikusinski operators, Commentationes Mathematicae special issue in Honnour of prof. W. Orlicz, (1978), 283 - 292.*

[23] Stanković, B.: *Linear differential equation with coefficients in a field I, Publ. de l'Inst. Mat. Beograd, t. 25(39), (1979), 197 - 209.*

[24] Stanković, B.: *Equation of oscillation of a viscoelastic bar, Zb. rad. PMF, Novi Sad, knj. 10, (1980), 1 - -12.*

[25] Stanković, B., Takači,Dj.: *Equation of oscillation of a viscoelastic bar II, Zb. rad. PMF, N. Sad, knj. 11, (1981), 1 - 9.*

[26] Schwartz, L.: *Theorie des Distributions, Vol. I, II, Herman, Paris (1957), (1959).*

[27] Takači, A.: *O jednoj klasi operatora, Mat. vesnik, (1979).*

[28] Takači, Dj.:*The approximate solution of a differential equation in many steps, Zb. radova PMF, N.S., knj. 13, (1983).*

[29] Takači, Dj.: The Approximate Solution of a Class of Differential Equation, Zb. radova PMF, N. Sad, 15, 1, (1985).

[30] Takači, Dj.: On the form of the approximate solution of a partial differential equation, Zb. radova PMF, Novi Sad (u stampi).

[31] Wloka, J.: Uber die Anwendung der Oparatorenchnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten koeffizienten, J. reine angew. Math., 202, (1959), 107 - 128.

[32] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart, (1982).

[33] Wloka, J.: Distributionen und Operatoren, Math. Annalen 140, (1960), 227 - 244.

[34] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen, Teubner Stuttgart, (1982).

[35] Wright, E.M.: The generalized Bessel function of order grater then one, Quart J. Math. Oxford series 2 (1940) 36 - 48.