The SNU Journal of Education Research
September 2018, Vol. 27, No.3, pp. 159-183.

수학 영재들의 반박 활동에 의한 창의성의 발현 : Peirce 의 기호학에 의한 특이점 학습사례의 연구

서민주 서울대학교 대학원
이경화 서울대학교 교육종합연구원

Emergence of Creativity in Mathematically Gifted Students' Rebuttal Argumentation: A Case study of Learning Outlier by Peircean Perspective

Seo, Min-ju*
Graduate School,
Seoul National University

Lee, Kyeong-Hwa
The center for Educational Resea
Seoul National University

ARTICLE INFO
Article history:
Received Aug 20 2018
Revised Sep 25 2018
Accepted Sep 25 2018

Keywords:
Mathematically gifted education,
Statistical argumentation,
Mathematical creation,
Rebuttal, Semiotics

주제어:
수학 영재교육, 통계적 논증활동, 수학적 창조, 반박, 기호학

ABSTRACT

Creativity education is one of the key themes of mathematically gifted education. However, there have been lack of researches on what learning experiences should be provided to foster creativity of mathematically gifted students, how to prepare and provide opportunities for mathematical creativity and analyze its effects. In this study, we have included rebuttal activities in the statistical argumentation and examined whether this played a positive role in the emergence of creativity. For this purpose, we analyzed mathematical creativity emerged by the rebuttal activity in terms of sign, interpretant and object. The results showed that rebuttal provides opportunities for emergence of creativity in the statistical argumentation of the gifted students.

국문초록

수학 영재교육에 있어서 창의성 교육은 핵심적인 주제 중의 하나이다. 그러나 수학영재들의 창의성 신장을 위해 어떤 학습 경험을 제공해야 하는지, 수학적 창의성 발현의 기회를 어떻게 준비하여 제공하고 그 효과의 분석을 어떻게 해야 하는지에 대한 구체적인 논의는 부족한 실정이다. 본 연구에서는 수학 영재들의 통계적 논증활동에 반박 활동을 포함시키고, 이것이 창의성 발현에 긍정적인 역할을 하는지를 살펴보았다. 이를 위해, 반박 활동에 의한 수학적 창의성의 발현 양상을 기호, 해석체, 대상체의 세 측면에서 살펴보았다. 연구결과, 반박은 수학 영재들의 통계적 논증활동에서 창의성 발현의 기회를 제공하는 것으로 나타났다.

* Corresponding author, ann3916@snu.ac.kr

I. 서론

Feldhusen(2001)은 창의적 사고가 발현되는 과정에서 내용 영역의 지식이 중요함을 강조하였다. Feldhusen에 따르면 컴퓨터가 제대로 기능하기 위해서 데이터나 정보가 입력되어야 하는 것과 마찬가지로 인간의 사고도 창의적 사고라는 특정한 기능을 위해서 재료가 되는 내용 지식을 필요로 한다. 모든 창의적, 생산적 사고에서 새로운 아이디어와 지식이 창조되기 위해서는 내면화되고 구조화된 학습자의 내용 지식이 선행되어야 한다(이종희, 김기연, 2007). 견고한 내용지식은 서로 다른 개념과 정보들 사이에서 새로운 연결을 창조하는 데 필수적이기 때문에 내용 지식은 창의적인 사고를 위한 기본 자원이라고 볼 수 있다(Feldhusen & Westby, 2003).

창의성이 내용 지식을 바탕으로 발현된다는 점은 내용 영역의 학습과 창의성에 대한 교육이 분리될 수 없다는 점을 시사한다. 그러나 창의성 교육을 실현하고자 할 때 많은 교사들은 창의성 교육과 내용 영역의 학습을 선택의 문제로 여긴다(Beghetto, 2016). 교사들은 창의성을 위한 교육과정이 별도로 마련되어야 한다고 생각하기 때문에, 창의성을 위한 교육을 선택하면 내용 영역의 학습을 희생해야 하는 것으로 여긴다(Beghetto, 2013). 그러나 앞서 설명했듯이 창의성은 적절한 내용 지식의 바탕 위에서 발현되는 것이기 때문에 창의성 교육은 내용 영역과 함께 다루어져야 한다. 최근 창의성 교육에 대한 여러 연구들은 내용 학습의 일상적 과정, 습관, 경험 속에서 창의성을 발전시킬 수 있음을 밝히고 있으며 특히 Beghetto는 창의적인 잠재력이 드러나는 '짧고 놀라운 미시적인 순간들'을 통해 학습자의 창의성을 촉진시킬 수 있다고 주장한다. 본 연구에서는 내용 영역의 학습과 창의성 교육이 별도의 분리된 과정이 아니라는 관점을 바탕으로 학습자의 창의성이 드러날 수 있는 '짧고 놀라운 미시적인 순간'들에 주목하고자 한다.

창의성의 발현을 위해서는 바탕이 되는 내용 지식이 중요하지만 우리나라의 수학 영재교육은 내용 지식의 축적과 지나친 선행학습에 의존하고 있다(최영기 & 도종훈, 2004). 지식의 축적만을 강조하여 수학적 성취를 높이는 것에 몰두하면 오히려 학생들의 발산적인 사고를 제한하고 내용 지식에 대한 고착화를 유발할 수 있다(Haylock, 1987; 김판수, 2008). 창의적 능력의 발현과 창의적 산출은 수학영재 교육의 주요 목표이지만(이종희, 김기연, 2007) 이를 위해서는 수학의 내용 지식을 어떤 방식으로 제시하고 어떻게 학습하도록 할 것인지에 대해 깊이 고민할 필요가 있다. 이종희, 김기연(2007)은 수학영재 학생들의 창의성 신장을 위해 구체

적으로 어떤 학습 경험을 제공해야 하는가에 대한 이론이나 연구 결과가 부족하다는 현실을 지적한 바 있다.

한편 최근 통계교육 연구자들은 자료를 바탕으로 유용한 논증을 조직하는 통계적 논증활동에 주목하고 있다. 학생들은 통계적 논증활동에 참여하면서 형식적인 지식의 습득보다는 통계적인 추론을 하고 통계의 핵심 개념들을 발전시킬 수 있으며 비판적으로 사고하는 기회를 가질 수 있다(강현영, 2011; Ben-zvi, 2006). 특히 반박은 '반대의견에 대한 근거와 추론을 동반하는 논증'으로서 내용 지식을 비판적으로 검토하여 오류와 오개념, 부적절한 추론을 인식하고 수학적 대상과 관계를 새로운 관점에서 바라보도록 한다. 반대의견이 반박을 통해 명시적으로 다루어지면 학습자의 창의적인 과정이 촉진될 수 있다(Chiu, 2008). 그러나 통계적 논증활동에 대한 기존의 연구들은 주로 논증의 구조를 평가하거나 정당화의 측면에서만 통계적 논증활동의 가치를 강조해왔다(서민주, 2018). 학습자가 상대방의 주장에 대해 반박하는 것이 논증의 동인이나 학습의 시작점으로 활용될 뿐(예를 들어, 강현영, 2011; Strike & Posner, 1992; Steffe, 1990) 반박이 사고의 기회나 학습의 도구로서 활용되지 못했다. 통계적 논증활동에서 반박을 제시하도록 하는 것은 수학 영재들이 내용 지식을 비판적으로 검토하고 사고의 고착화에서 벗어나며, 창의적인 사고를 할 수 있도록 도움을 줄 것이다.

본 연구에서는 수학 영재들의 내용 영역의 학습에서 창의성 발현을 촉진시킬 수 있는 '반박활동'의 기회를 제공하고 그 효과를 파악하고자 한다. 특히, 통계적 논증을 반박하는 과정에서 학습자가 수학적 지식을 창조하는 구체적인 과정과 결과를 기호학적 관점에 입각하여 기술하는데 목표를 둔다. 이로부터 수학 영재교육은 물론이고 통계교육에 있어 창의성 발현을 위한 학습기회 제공에 대한 시사점을 도출할 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. 반박의 의미와 수학적 창조에서의 역할

'반대'란 진술이나 질문의 형태로 나타날 수 있는 논증에 대한 개인의 반응이지만 그 자체로 논증은 아니다. 반박이 만들어지기 이전에 논증에 대한 반응으로서 반대가 나타날 수 있는 반면, '반박(Rebuttal)'은 반대를 표현하는 단순한 진술이 아닌 하나의 논증(argument)이다. 반박은 이전 논증에 대해 직접적으로 반대하는 논증이며, 이전 논증이 의심스럽거나 받아들일 수 없음을 주장하는 논증이다. 이전 주장에 반대하기 위해 진술을 제시하는 것은 전제로부터

그 주장이 옹호될 수 없다는 결론에 이르는 추론과정을 포함해야 한다(Walton, 2009). 이와 같은 논의에 근거하여 본고에서는 반박을 '반대하는 근거와 추론을 동반하는 논증'으로 개념화 한다.

최근 심리학의 영역에서 창의성에 대한 연구들은 타인과의 상호작용과 의사소통이 창조자의 창의적인 과정을 이끌어내는데 중요한 요인이 됨을 강조하고 있다. 창의적인 과정은 절대 혼자 완성될 수 없고 청중, 즉 타자의 존재를 필요로 한다. 청중은 창조자의 외재화 과정과 창의적 산물의 사회화, 새로운 창조의 내재화를 돕는다(Glavenau, 2014). 창조자와 청중은 자아와 타자로서 "일정한 정도 이상의 사회적인 상호작용"(Nistad & Paulus, 2003, p.326)을 통해 창의적인 과정을 수행한다. 수학적 창조 역시 타인과의 공유와 승인, 의사소통의 측면을 고려해야 한다. 반박은 타인과의 공유와 승인, 의사소통의 한 형태이며, 새로운 수학적 대상이나 대상들 사이의 새로운 관계를 추측하는 것의 연장선상에 있는 논증 활동이다. 자신의 사고에 포함된 오류를 인식하거나 부적절한 추론을 의식하는 것은 사고의 고착 때문에 쉽지 않다(Haylock, 1987; 김판수, 2008). 그러나 타인의 사고를 통해 창조자는 귀납, 가추, 내러티브 심지어 연역에 기초한 추론에 따라 오류와 오개념, 부적절한 추론을 분별하고, 수학적 대상과 관계를 새로운 관점에서 바라보고 추측함으로써 오류를 인식하고 개선시킬 수 있다(Lin, 2005). 수학적 창조는 반드시 새로운 것을 처음부터 생성하는 것으로만 가능한 것이 아니라 기존의 사고체계와 추론방식을 해체하고 오류와 불완전한 추론을 극복하는 방식을 따르기도 한다. 기존의 관점과 다른 관점을 제시하고 그에 따라 동일한 대상과 관계를 다르게 볼 수 있도록 하는 것이 반박이며, 이를 통해 수학적 창조를 지속하거나 새롭게 확장하도록 할 수 있다(Lin, 2005).

창의성을 수학자의 전유물이라 여길 때 수학적 창의성은 제한된 의미를 가지게 되고 오해를 낳는다(Sriraman, 2005). 그러나 창의적인 과정이 과학과 수학의 통찰에서, 그리고 일상적인 삶 속에서 일어나는 하나의 사건이 될 때, 우리는 학교 현장에서 특히, 수학교실에서 일상적으로 나타날 수 있는 작은 창의성을 생각할 수 있다. 학교수학에서 창의성의 주체는 학습자이며 교육을 통해 신장하고자 하는 것은 공적인 창의성[1]이 아니라 수학 학습에서 다루는 수학문제의 창의적인 해결과 새로운 이해의 창조, 그리고 이를 표현하는 능력에서 발휘되는 학습자 수준의 창의성이다(이종희, 김기연, 2007). 반박은 학습자 수준의 창의성이 발현되도록 하고 잠재력을 가지도록 하는 데 기여할 수 있다. 추상적이고 형식적인 수학을 기계적으로 학습하는

1) Margaret Boden(1992, 1996)은 이미 존재하고 있는 것이라도 개인이 이를 알지 못하고 있다가 새로운 것으로 창조한 경우 이를 심리적인 P-창의성(psychological creativity, P-creativity)이라 하였으며 역사적으로 최초의 것을 새롭게 창조한 경우 이를 역사적으로 창의적인 H-창의성(historically creative, H-creativity)이라 명명하였다(Robert, 1999, 재인용). 전경원(2004)은 이를 사적 수준의 창의성과 공적 수준의 창의성으로 구분한다.

것이 아니라, 타자와의 상호작용에 의하여 내면화 하고 개인화 하며, 배경화 하는 기회를 제공하기 때문이다. 이 과정에서 자신의 관점과 경험을 타인의 관점과 경험에 반영하거나 반대의 입장으로 제시하여 새롭고 유용한 수학적 창조[2)]를 이룰 수 있다.

B. 통계영역에서의 창조에 대한 기호학적 분석

통계영역에서의 창조는 분포와 변이성 등 핵심적인 개념을 비형식적으로 표현하는 것과 관련되어 있다. 예를 들어, Cobb(2002)은 학생들이 특정한 분포를 '언덕(hills)'이라는 비형식적 언어에 의하여 표현하고 그 의미를 기반으로 추론하는 과정을 제시하였다. 이러한 일련의 의미화 과정은 기호학적 분석에 의하여 잘 포착되고 논의될 수 있다. 이들은 학생들이 통계적 문제 상황에서 비형식적인 언어와 추론에 의하여 기표에 포함되어 있는 기의를 포착하고 표현하면서 '의미작용의 연쇄'를 구축한다고 보았다. 하나의 기표가 하나의 기의로 완전하게 포착되지 않고 지속적으로 '미끌어져' 새로운 기호를 형성하는 것으로 통계영역에서의 창조 과정을 기호학적으로 설명할 수 있다.

그러나 Bakker(2007)은 Lacan에 의지한 Cobb의 이론이 서로 다른 그래프를 비교하는 맥락에 맞지 않으며, 비선형적이고 역동적인 기호의 작용을 설명하는 데 충분하지 않다고 지적했다. 그는 Peirce가 제시한 기호의 삼원적 모델(기호, 대상체, 해석체)이 학습자가 수학적 기호와 상징을 사용하는 동적인 과정을 설명하기에 적합하다고 주장했다. 이러한 논의의 연장선에서 Bakker와 Hoffmann(2005)은 통계적 개념의 창조 과정을 기호학적으로 기술하고 분석하기 위하여 Peirce의 삼원적 모델에 기초하여 세 요소 사이의 상호작용 분석틀을 도입하였다. 그들은 이 틀에 근거하여 학생들이 통계적 맥락에서 의사소통하기 위하여 기호를 창조하고, 그 기호를 기반으로 의사소통한 것을 바탕으로 다시 새로운 기호와 해석체를 창조하는 일련의 과정을 풍부하고도 깊이 있는 논의의 대상으로 발전시켰다. 통계영역에서의 창조 과정을 기호학적 관점에서 분석하는 것의 장점은, 여러 기호들이 복잡한 상호작용을 통하여 변화하고 발전됨으로써 의미화 또는 개념화가 진행되는 수학 학습의 속성을 세부적이고 심층적으로 드러낼 수 있다는 것이다(Bakker & Hoffmann, 2005). 앞서 언급한 바와 같이, 반박은 최초의 기호(혹은 해석체, 대상체) 창시자가 자신의 사고에 고착되어 발견하지 못하는 오류나 새로운 의미를 근거와 추론에 의하여 반대하는 논증을 뜻한다. 통계적 개념의 창조가 Bakker(2007)가 지적한 바와 같이 선형적으로 일어나지 않는다는 것을 감안하면, 이 과정에서 반박 활동의 역할은 적지 않을 것이다. 무엇보다 통계영역의 고유한 특성을 살려서 의사소통 중심의 수업을

2) '수학적 창조'는 학습자의 창의성이 발현되는 창의적인 과정과 창의적인 산출의 의미에 초점을 둔 용어이다. 본 연구는 Peirce의 기호학적인 관점을 따르고 있으므로 창의성이 발현되는 과정으로서 '수학적 창조'란 기호, 표현체, 해석체를 생성하는 창의적인 과정과 산출을 의미한다.

설계하여 진행할 수 있고, 매 단계마다 생성되는 기호체계를 평가하고 분석하여 개선하고 발전시키는 데 기여할 것으로 기대한다. 이에 본 연구에서도 통계적 지식의 창조과정을 분석하고 반박이 하는 역할과 의의를 기술하고자 한다.

Ⅲ. 연구방법

A. 사례연구

본 연구의 목적은 수학 영재학생들이 통계적 개념과 표현을 창조할 때 반박이 하는 역할과 의의를 파악하는 것인데, 이는 수학적 창조가 이루어지는 미시적 순간들을 포착하여 사고와 행동의 표면과 이면에 담긴 세부적인 언어와 표현을 심층적으로 분석함으로써 달성할 수 있을 것으로 생각한다. 이를 위해 사례연구 방법을 따르고자 한다. 사례연구는 단일한 사례가 가지는 독특성과 복잡성을 밝히는 연구이며 중요한 상황에 주목하여 사례가 전개되는 방식을 이해하는 것을 목적으로 한다. 각각의 사례는 다른 사례들에 비해 독특하면서도 공통적이며 한 개의 사례가 다른 사례들에 대해 일반화되기 어렵다. 그러나 이 사례 내에서 나타났던 반응들은 다른 사례들에서 반복해서 나타날 수 있다. 따라서 사례연구의 목적은 일반화가 아니라 특정한 일반화라고 할 수 있다(Robert, 2000). 이 일반화는 하나의 대표로서 다른 것에 대한 일반화라기보다 하나의 사례에 대한 특수화(particularization)이다. 사례 연구를 통해 배우는 것은 이 사례가 다른 것들과 어떻게 다른지를 이해하는 것이 아니라 이 사례 자체에서 배우는 것이다. 특정한 하나의 사례를 관찰하는 것을 통해 우리가 전형적이라고 생각하는 상황에서 보지 못하는 것들을 볼 수 있도록 한다. 따라서 사례 연구방법을 따를 때 학습자 개인사이의 상호작용과 학습자의 언어, 사고과정을 심도 있게 분석할 수 있다(Gibbs, 2007). 특히, 담화 분석은 학습자가 통계적 논증활동에서 나타나는 언어적 상호작용과 그 과정에서 수반되는 지식의 창조과정을 깊이 살펴볼 수 있도록 한다. 담화 분석을 통해 학습자가 대화를 통해 기호를 사용하고 의미를 주고받으며 새로운 지식을 창조하는 과정을 분석할 수 있다.

B. 연구 대상 및 수업진행 과정

본 연구는 수학 영재들의 통계적 논증활동을 반박하는 과정에서 수학적 창조의 과

정을 기호 해석체, 대상체의 세 측면에서 분석하는 것을 목적으로 한다. 연구 대상은 서울시 소재 대학부설 영재교육원에 소속된 중학교 2학년 학생들이며 전체 19명의 학생들을 4-5명씩 하나의 그룹으로 구성하여 소집단 토론과 교실 전체 토론을 수행하였다. 참여자들은 11주간 63시간의 영재교육원 프로그램을 이수했지만 통계학과 관련된 프로그램은 이수하지 않았다. 본 연구에서는 토론에 적극적으로 참여하고 반박을 활발하게 제시한 9명(P1부터 P9)의 사례를 중심으로 자료를 분석하였다.

개인 활동에서 학생들은 Tinkerplots[3)]의 주요 기능을 숙지하고 Tinkerplots의 사용에 익숙해지는 시간을 가졌다. 학생들이 직접 Tinkerplots에 자료를 입력하여 자신만의 도표나 그래프를 구성할 수 있도록 Tinkerplots의 사용에 능숙해지는 것이 필요하다. 이후 조별 토론에서는 발표자가 자신의 주장과 근거를 제시하면 다른 학생들이 자신의 생각과 다른 부분에 대해서 반박을 제시하도록 하였다. 또한 전체 토론에서는 조별 토론에서 탐색한 근거들을 이용하여 발표조의 의견에 대해 나머지 조가 반박을 제시하도록 하였다. 이러한 형식의 토론은 자신의 관점과 다른 타인의 관점을 비판적으로 고찰하고 명시적으로 반박을 제시하도록 함으로써 타인의 관점과 자신의 관점을 적극적으로 탐색하도록 한다. 자신의 사고에 포함된 오류를 스스로 인식하는 것은 사고의 고착 때문에 쉽지 않지만(Haylock, 1987; 김판수, 2008) 타인의 사고를 비판적으로 검토함으로써 추론과정에 내포된 오류와 오개념을 분별하고 수학적 대상과 관계를 새로운 관점에서 바라볼 수 있도록 한다(Lin, 2005).

〈Table 1〉 Activity

교시	시간	활동	자료 수집
1교시	30분	개인 활동	개인별 활동지 Tinkerplots 그래프
2교시	90분	조별 토론	조별 활동지 조별 토론 담화 Tinkerplots 그래프
3교시	90분	전체 토론	전체 토론 담화 Tinkerplots 그래프

C. 과제

3) Tinkerplots는 미국에서 개발된 교육용 소프트웨어로서 초등학교 4학년부터 대학생까지 이용할 수 있으며, 탐색적인 자료 분석이 가능한 동적인 소프트웨어이다. 학습자는 소프트웨어에 통계 자료를 직접 입력하여 자료를 도표나 그래프를 표현할 수 있다. 또한 그래프를 조작하거나 변형하면서 자료를 탐색할 수 있으며, 다변량 자료를 분석할 수 있다.

본 연구에서는 Ciancetta(2007:103)의 과제를 변형하여 논증활동을 수행하였다. 학생들은 두 자료집합 중 실제로 어떤 배터리가 더 '좋은 배터리'인지 선택하고 자신의 선택을 정당화하도록 하였다. 현재 교육과정상에서 다루어지는 개념으로서 중학교 학생들이 자료집합을 비교할 때 쉽게 접근할 수 있는 개념은 평균, 중앙값과 같은 중심값과 퍼짐이다. 과제 1에서는 A와 B가 평균이 동일하기 때문에 퍼짐을 이용하여 비교하면 '좋은 배터리'를 판단할 수 있다. 그러나 과제 2와 3에서는 평균과 퍼짐만으로는 A와 B중 어떤 것이 더 '좋은 배터리'인지 판단하기 어렵다. 왜냐하면 A는 평균이 크고, B는 퍼짐이 작은 분포이기 때문이다. 평균과 퍼짐에 쉽게 접근할 수 있는 학생들은 과제 2와 3을 해결하면서 기존에 가지고 있던 개념에 한계를 느끼게 되고 이것은 학생들로 하여금 평균과 퍼짐 외에 분포의 다른 요소들을 탐색하도록 한다. 또한 분포에 대한 여러 가지 해석은 학생들이 A와 B를 선택한 근거들을 다양한 측면에서 제시할 수 있도록 하여 타인의 의견을 통해 자신의 관점에서는 인식하지 못했던 측면을 탐색하도록 한다. 타인의 사고를 통해 오류와 오개념, 부적절한 추론을 인식하는 것은 수학적 대상과 관계를 새로운 관점에서 추측하도록 한다. 또한 학생들은 반박을 제시하는 형식의 토론에 참여함으로써 이러한 추측을 명시적으로 표현하고 동일한 대상과 관계를 기존의 관점과 다른 관점에서 다루게 된다.

자료집단을 비교하는 과제는 그래프나 통계적 요약으로부터 단순히 정보를 읽고 이해하는 것보다 학습자가 자료비교 요소를 이끌어내는 과정에서 바탕이 되는 풍부한 개념적 근거들을 이끌어내고 이를 기호로서 표현하도록 한다(Pfannkuch, Regan, Wild, & Horton, 2010). Frischemeier와 Biehler(2018)은 학습자가 접근할 수 있는 자료비교 요소를 중심값(center), 퍼짐(spread), 이동(shift)으로 범주화하고 여기에 Tinkerplots를 사용하여 자료를 비교할 때 사용할 수 있는 왜도(skewness), p-기초비교(특정값을 기준으로 상대빈도비교)와 q-기초비교(분위수 비교)와 같은 요소들을 추가하였다. Frischemeier와 Biehler(2018)가 제시한 이러한 6가지의 자료비교 요소는 〈Table 2〉에 제시하였다. 이를 바탕으로 본 과제에서도 학생들은 중심값, 퍼짐, 이동, 왜도, 상대빈도, 분위수 등과 같은 개념들을 사용하여 분포를 비교할 것이라 기대할 수 있다. 또한 '좋은 배터리'를 선택하고 자신의 선택을 정당화하기 위해 이러한 요소들을 사용하여 자신의 주장을 뒷받침할 수 있다.

〈Table 2〉 Adequare elements when comparing groups with Tinkerplots (Frischemeier & Biehler, 2018)

집단 비교 요소	설명
중심	수치적 자료의 분포들을 중심값(평균이나 중앙값)으로 비교
퍼짐	수치적 자료의 분포들을 퍼짐의 정도(예를 들어, 4분위 범위, 표준 편차)로 비교
왜도	수치적 자료의 분포들을 왜도(예를 들어, 오른쪽으로 기울어짐 이나 대칭적인 왼쪽으로 기울어짐)로 비교
이동	수치적 자료의 분포들을 자료값 다수의 이동으로 비교
p-기초비교	p-기초로 비교(특정값을 기준으로 분포의 상대빈도 비교)
q-기초비교	q-기초로 비교(자료집단의 분위수 비교)

〈Table 3〉 Task(Ciancetta, 2007:103를 변형함).

〔과제1〕 시민단체는 핸드폰 A와 핸드폰 B의 배터리 지속시간을 측정하여 다음과 같은 결과를 발표했다. 배터리 지속시간은 완전히 충전된 상태에서 다시 방전될 때까지의 시간을 의미한다. 다음 자료를 이용하여 Tinkerplots에 자신의 그래프를 그려보라. 두 핸드폰의 배터리 지속시간이 다음과 같을 때 어떤 핸드폰을 선택할 것인가? 자신의 선택에 대해 타당한 근거를 들어 설명하라.

<핸드폰 A> (22개의 자료)
5 6 6 6 6 6.5 7 7.5
8 8 8 8 8.5 8.5 9 9
9.5 9.5 9.5 9.5 10 11

<핸드폰 B> (22개의 자료)
7 7 7 7.5 7.5 7.5 7.5
7.5 7.5 8 8 8 8 8.5 8.5
8.5 8.5 8.5 8.5 9 9 9

〔과제2〕 핸드폰 A의 제조사는 한 연구기관에 핸드폰 A와 핸드폰 B의 배터리 지속시간을 분석해달라고 의뢰했다. 이 연구기관은 두 핸드폰의 배터리 지속시간을 측정하여 다음과 같은 결과를 발표했다. 다음 자료를 이용하여 Tinkerplots에 자신의 그래프를 그려보라. 여러분은 어떤 핸드폰을 선택할 것인가? 자신의 선택에 대해 타당한 근거를 들어 설명하라.

<핸드폰 A> (36개의 자료)
4 5 5 5 5 6 6.5 6.5
6.5 7 7 7 7 7 7.5 8 8
8 8 8.5 9 9 9 9.5 10 10 10
10 10.5 11 11 12 12 12.5 12.5
14 14

<핸드폰 B> (19개의 자료)
4 5 6 6 7 7 7.5 7.5
7.5 7.5 8 8.5 8.5 8.5 9
10 10 12 12.5

〔과제3〕 위의 두 자료를 모두 종합하여 볼 때 어떤 핸드폰을 선택하는 것이 합리적이겠는가? 자신의 선택에 대해 타당한 근거를 들어 설명하라.

D. 자료수집과 분석방법

토론을 진행하기 전 학생들은 개인별로 과제를 해결하고 자신의 생각을 활동지에 정리하였다. 자신의 주장을 뒷받침하는 근거는 Tinkerplots를 이용하여 도표나 그래프로 표현하거나 문장으로 서술하도록 하였다. 조별 토론과 전체 토론에서는 학생들의 담화를 녹음하고 Tinkerplots 화면을 녹화하였으며 조별 활동지를 분석의 보조도구로서 사용하였다. 조별 토론과 전체 토론에서도 발표자는 자신의 주장을 제시하고 그래프나 도표를 이용해 근거를 뒷받침하며, 다른 학생들은 발표자가 제시한 주장이나 그래프, 도표에 대한 해석이 자신의 관점과 다른 부분을 반박하게 된다. 연구자는 조별토론과 전체토론에서 학생들이 반박이 있는 토론에 참여하면서 개인 활동에서는 나타나지 않았던 새로운 수학적 지식을 창조하는지 확인하고 이를 기호학적으로 분석하였다.

Bakker와 Hoffmann(2005)은 통계적 지식이 거의 없었던 학생들이 분포개념을 창조하는 과정을 Peirce의 기호체계를 바탕으로 한 상호작용 분석틀을 이용하여 확인하였다. 그들은 학생들이 자료에서 주목하고 있는 부분이나 사고하고 말하고 있는 수학적 대상을 '대상체'로 보았다. 또한 학생들이 수학적 대상을 표현하기 위해 활동지에 스케치한 그림이나 컴퓨터 소프트웨어로 표현한 표상, 그리고 수학적 대상을 설명하기 위해 사용한 용어를 '기호'로 보았다. 이러한 '기호'를 해석하여 학생들이 기호체계 내에서 구성한 자신만의 의미는 '해석체'로 볼 수 있다. 본 연구에서도 Bakker와 Hoffmann(2005)의 분석틀을 이용하여 통계적 논증을 반박하는 과정에서 나타나는 학생들의 수학적 창조를 '기호'와 '해석체', '대상체'의 관점에서 분석하였다.

〈Table 4〉 Analytic framework (Bakker & Hoffmann, 2005)

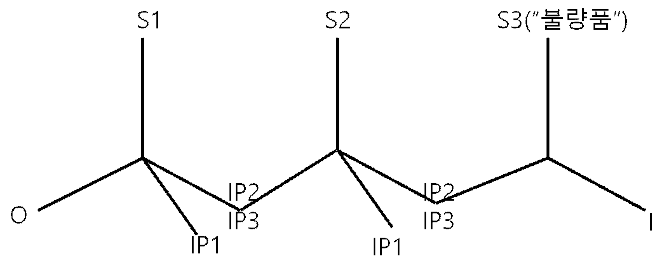
Peirce의 기호체계	분석 대상
기호(S)	학생들이 활동지에 그린 표상(도표, 그래프, 스케치 등) Tinkerplots으로 구성한 표상(도표, 그래프 등) 학생들이 사용한 용어(형식적인 용어와 비형식적인 용어를 포함)
대상체(O)	학생들이 사고하고 말하고 있는 수학적 대상 자료나 그래프와 같은 표상에서 학생들이 주목하고 있는 부분
해석체(I)	학생들이 표상(기호)을 해석하는 과정에서 구성하는 의미

Ⅳ. 연구결과

본 연구에서는 통계적 논증을 반박하는 과정에서 나타나는 학생들의 수학적 창조의 과정을 기호학적으로 분석하고자 한다. 이를 위해 선행연구의 관점에 따라 학생들의 수학적 창조를 기호(S)와 해석체(I), 대상체(O)가 생성되는 과정으로 구분하여 제시하였다.

A. 특이점 개념의 기호 생성

P1은 조별토론에서 평균이 더 큰 A 배터리가 좋은 배터리라고 판단했다. 라인 12에서 알 수 있듯이 P1은 분포의 형태에 주목하여 대칭축이 되는 8.4와 8을 중심값으로 생각하고 있으며 이를 기준으로 A 배터리를 좋은 배터리로 판단하고 있음을 알 수 있다. P1의 주장을 P2와 P3가 반박하는 과정에서 새로운 기호 S2와 S3('불량품')가 생성되는 과정을 설명하고자 한다. 이 과정을 도식화하면 아래의 그림 1과 같다.



〔Figure 1〕 The creation of new signs.

먼저, 기호 S1에서 S2가 생성되는 과정을 살펴보자. P1은 기호 S1에서 분포의 대칭적인 형태와 대칭축으로 보이는 평균에 주목하여 해석체를 제시하고 있다. 즉, A의 평균이 B의 평균보다 크기 때문에 A 배터리를 좋은 배터리라고 판단하고 있음을 알 수 있다(라인 11, 12). 그러나 P2는 배터리 지속시간을 평균이 아닌 다른 기준으로 판단해야 한다고 생각하고 있다. 초기에는 명시적으로 표현하지 못했지만 '비슷한 시간을 사용하니까(라인 14, 84, 87)'의 담화를 통해 P2는 자료의 퍼짐에 주목하고 있음을 알 수 있다. 기호 S1에서 분포의 대칭적인 형태와 평균에 주목하고 있는 P1과 기호 S1에서 중심근처에 모여 있는 자료의 분포들에 주목하고 있는 P2는 자신들이 주목하고 있는 부분에서 서로 다른 해석체(IP1, IP2)를 제시했다.

P2가 P1의 의견을 반박하는 과정에서 두 학생은 같은 기호에서 서로 다른 부분에 주목하여 분포를 해석하고 있음을 알 수 있었다.

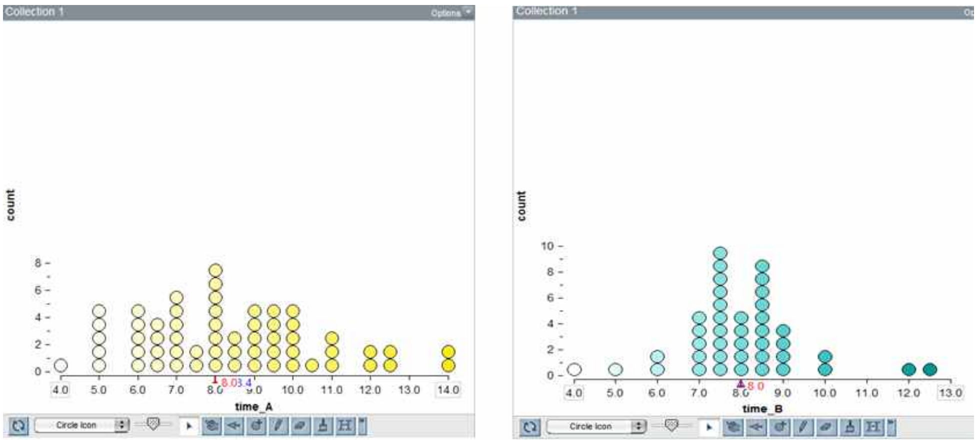
〈조별토론〉

11 P1 결론은 A가 더 좋게 나오네, 그지?

12 P1 왜냐하면 (A는) 8.4를 기준으로 했을 때 대칭으로 나오고 얘는(B는) 8을 기준으로 했을 때 대칭으로 나오잖아.

13 P2 얘가 (A는) 더 좋긴 한데 이게 4분의 1로 쓰레기가 나와, 근데 얘는 19분의 1의 확률로 쓰레기가 나오잖아

14 P2 평균은 이게 더 높긴 한데 휴대폰(배터리) 사용시간은 평균보다는....그러니까 항상 비슷한 시간을 사용하니까...

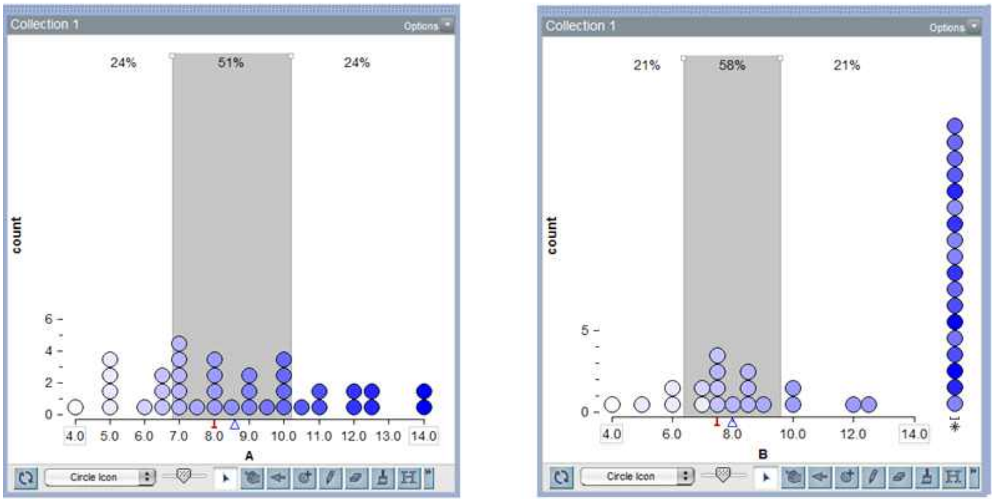


〔Figure 2〕 Student's first graph (S1)

초기에 P2는 기호 S1을 보고 있었기 때문에 그래프의 대략적인 개형에 주목하여 '항상 비슷한 사용시간(배터리 지속시간)'을 가진 B 배터리가 좋은 배터리(IP2)라고 해석했을 것이다(라인 14). P1의 의견에 대한 P2의 반박 즉, 해석체(IP2)가 제시되자 학생들은 자료의 안정성과 분포의 퍼짐에 대해 주목하게 되었고 이후의 담화에서는(라인 84-122) 논의의 방향이 자료의 중심값(평균, 중앙값)과 대칭성에서 자료의 퍼짐과 안정성으로 이동하였다. P2가 '4시간이나 14시간 지속되는 배터리 보다는 꾸준히 7시간 유지되는' 배터리가 좋은 배터리라고 해석한 것이나 P3가 이와 함께 '11시간이나 14시간의 지속시간이 실용적이지 않다'는 의견을 제시하자 학생들은 S1에서 평균을 포함한 중심구간에 주목하여 기호 S1을 기호 S2로 변형하였다.

<조별토론>

84	P2	아 맞아..그..주관적인 의견이긴 한데..휴대폰 쓸 때 어떤 날은 14시간 쓰고 어떤 날은 4시간 밖에 못 쓰는 것보다 차라리 꾸준히 매일 7시간 쓰는 게 낫지 않아?
85	P1	매일 7시간 좀 많다.
86	P3	너 매일 7시간 써?
87	P2	아니 배터리가 가는 게(지속되는 게) 어떤 날은 4시간 있다가 꺼지고 어떤 날은 14시간 있다가 꺼지는 것보다 꾸준히 7시간 가는 게 낫지 않아?
88	P3	난 4분 인줄 알았어
89	P1	어차피 잘 때 충전해야지
90	P3	이거 핸드폰이 12시간 간다고 12시간을 쓰지는 않아...적당히 쓰지
117	P2	날마다 사용할 수 있는 사용시간이 불안정한 거니까 안 좋다
119	P3	여기 유리한 점이 있어. 11시간 14시간 나왔잖아(A). 실제 인간이 그렇게 많이 쓰지는 않아
120	P1	너무 추상적이라니까
121	P4	그냥 효율성이니까
122	P2	그렇게 많이 쓰는 사람 없어



〔Figure 3〕 Student's second graph (S2)

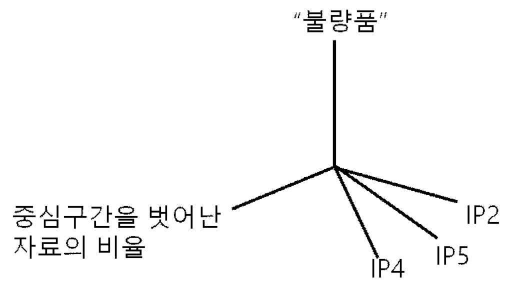
이제 기호 S2가 '불량품'이라는 또 다른 기호인 S3를 이끌어내는 과정을 살펴보자. P2는 기호 S2에서 평균을 포함한 중심구간 바깥쪽(그림 3에서 흰색구간)에 주목하고 있었고 이 구간의 자료가 판단에 영향을 미치지 않는다고 생각했기 때문에 이것을 '쓰레기'라고 표현했다(라인13). 이와 함께 P2가 자신들의 논의를 바탕으로 A가 비효율적인 것을 어떻게 설명하느냐고 묻자 P3가 "평균이 얘가(A) 더 높은데 얘는(A) 가운데가 51%이고, 얘는(B) 58%니까"라고

대답한다. 학생들은 편차나 분산에 대한 형식적인 지식이 없었기 때문에 자료의 퍼짐을 수치화하여 비교하기 위한 비형식적인 전략을 개발해야 했다. 그 결과 P2와 P3는 자료의 퍼짐을 중심구간에 포함된 자료의 비율로 구했다. 학생들은 이를 통해 중심구간의 비율이 클수록 '자료의 안정성'이 크다고 해석하였고 이것은 자연스럽게 안정성이 크지 않은, 즉 중심에서 먼 곳에 위치하는 자료들이 불안정하다는 인식을 불러일으켰다. '일반 사람들의 실제 핸드폰 사용하는 시간'(라인 119)이라는 맥락은 '쓰레기'라는 표현과 함께 학생들이 중심구간 외에 분포하는 자료를 '불량품'으로 보게 되는 배경을 제공한다. 결국 학생들은 중심구간 밖의 자료값들을 '불량품'(S3)이라는 용어로 설명하게 되었고 이것은 새로운 기호가 되어 공유되었다 .

초기에 형성한 기호 S1에서 서로 다른 부분에 주목했던 P1과 P2, P3는 하나의 기호에서 서로 다른 해석체 IP1, IP2, IP3를 생성하였다. 기호 S1에서 중심구간 외의 부분에 주목했던 P2, P3의 해석은 중심에만 주목하고 있었던 학생들이 자신들이 제시한 기호 S1의 한계를 인식하도록 하였고 기호의 다른 부분을 고려하여 기호 S2로 수정하고 S3로 발전시키도록 하였다. 반박을 통해 학생들은 기호의 다른 부분으로 주의를 이동하였으며 기존의 기호에서 주목하지 않았던 부분을 인식하여 기존의 기호를 수정, 보완하였고 이것은 새로운 기호가 되었다.

B. 특이점 개념의 해석체 생성

중심구간을 벗어난 자료의 비율이라는 수학적 대상을 '불량품'이라는 기호로 표현하면서 학생들이 새로운 해석체(IP2, IP4, IP5)를 이끌어내는 과정을 살펴보자. 이 과정은 그림 4와 같이 도식화할 수 있다.



〔Figure 4〕 The creation of new interpretants

중심구간을 벗어난 자료의 비율을 '불량품'이라는 기호로 표현하면서 P2와 P4는 대상체와 기호 사이의 관계를 정당화하면서 IP2와 IP4를 제시하였고, P5는 이 관계가 타당하지 않다고 반박하면서 IP5를 제시하였다. 기호 S2에서 중심구간외의 자료를

‘불량품’이라고 표현했기 때문에 학생들은 중심구간을 벗어난 자료의 비율을 자연스럽게 ‘불량품 생산 확률’로 연결 지을 수 있었다. 학생들은 기호 S2에서 이러한 ‘불량품이 생산될 확률’을 구하여 두 자료를 비교하였고, A의 불량품 생산 확률이 B 보다 크기 때문에 B가 더 좋은 배터리라고 판단하였다. 이것은 P2와 P4는 대상체와 기호 사이의 관계를 정당화하는 과정에서 새로운 해석체 IP2와 IP4를 제시한 것이다. 담화 35에서 P4의 설명을 통해 새로운 해석체 IP2, IP4의 의미를 구체적으로 파악할 수 있다.

〈전체토론〉

35 P4 10에서 뺀 값을 (이용해서 구간을 구한 다음) 불량품 생산할 확률로 높았습니다. 이렇게 따졌을 때 A는 51%, B는 58%가 나오므로 A의 불량품 생산 확률은 50%에 가깝고 B는 42%밖에 안되므로 이때의 값도 B가 더 낫다고 할 수 있습니다. 따라서 저희는 두 번째 자료를 이용해서도 B를 선택할 것입니다.

이제 또 다른 새로운 해석체 IP5가 생성되는 과정을 살펴보자. 라인 35에서 학생 P4가 “불량품”이라고 제시한 표현은 하나의 기호가 되어 공적인 장에 제시되었고 이에 대한 다른 학생들의 반박이 이어졌다. P2와 P4는 “불량품”이라는 자신들의 기호를 정당화하였고 P5는 이를 반박하면서 새로운 해석체 IP5를 생성하였다. P5는 중심구간 밖에 분포하는 자료가 중심구간에 분포하는 자료와 차이가 크지 않기 때문에 “불량품”이라고 정의하는 것이 타당하지 않다고 반박하였다(라인 38, 45, 49, 54). 이와 함께 P5가 평균의 차이를 고려해야 한다고 지적하였고 P4는 이에 대해 ‘오차의 차이’와 ‘상업적인 문제’라는 새로운 맥락을 추가하여 해석체 IP4의 의미를 풍부하게 하였다(라인 39, 40).

〈전체 토론〉

38 P5 평균을 기준으로 대칭 하신 거 같은데 너무 평균값을 무시하는 것 아닐까요?

39 P4 정확히 계산했을 때 4에서 14까지 분포되어 있는 걸 알 수 있는데 오차의 차이는 50%와 21%로 30%나 차이가 나기 때문에 0.4의 차이로 A가 낫다고 판단하기보다 오차가 훨씬 더 적은 B가 더 낫다고 판단하였습니다.

40 P4 또한 A를 만약 더 많이 생산하여 시장에 내놓는다면 불량품이 발생하였을 때 4와 5와 6의 분포가 B보다 훨씬 많은 것을 알 수 있는데 이처럼 소비자가 구매했을 때 불량품들이 많아진다면 재고가 많이 들어올 것이므로 상업적인 문제로 선택할 수 없다고 봅니다.

41	P2	그리고 또 휴대폰은 손전등하고는 다르게 거의 매일 사용하는 제품이여서 어느 날에만 오래 쓸 수 있는 것보다 날마다 거의 비슷하게 오래 쓸 수 있는 게 더 좋다고 생각했습니다.
…		
45	P5	A같은 경우는 4에서 14시간이고 B는 7에서 9시간에 분포되어 있는데 그 차이가 불량품이라고 할 만큼 큰 차이일까요?
…		
49	P5	네 1시간, 2시간의 차이가 불량품을 규정될 만한 큰 차이일까요? 차라리 평균 0.4만큼 증가시키는 게 큰 차이이지 않을까요?
51	P5	오차 범위가 평균 근처의 1이면 너무 작은 범위 아닌가요?
52	P4	분포도 보고, 나머지 부분을 제외한 것이기 때문에 그렇게 생각하지 않습니다.
53	P4	그리고 만약 1/3이 아니더라도 1/2로 늘이더라도 A가 더 클 것이라고 생각합니다.
54	P5	끝에 있는 부분을 불량품이라고 할 필요가 있을까 의문점이 듭니다. 여기 보시면 A의 그래프에서 중앙에 20이 있는데... 그것이 그렇게 큰 차이일까...
56	P2	사용자들은 일반적으로 보통 사용하는 시간보다 적게 사용할 수 있다고 한다면 불량품이라 생각하지 않을 까요?

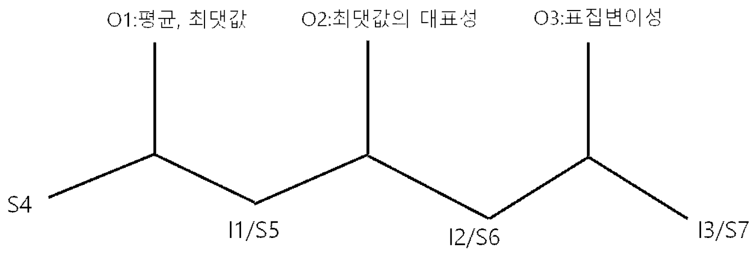
그러나 P2와 P4는 P5의 반박을 받으면서 중심구간 외의 자료들을 '불량품'이라고 해석하여 제거한 것이 타당하지 않음을 인식하였다. '불량품'을 '특이점'으로서 고려하기에는 '불량품'에 속하는 자료가 전체에서 차지하는 비율이 비교적 크기 때문이다. P2와 P4는 '불량품'이라 규정한 자료 값들을 제거하지 않고 이를 모두 고려하여 분포를 비교해야 한다고 자신들의 해석체를 수정하였다.

수학적 대상체를 특정한 기호로 표현하면서 학생들은 대상체와 기호 사이의 관계에 대해 추론하게 된다. 그 관계가 타당하다고 생각하는 학생들의 정당화 과정과 그 관계가 타당하지 않다고 생각하는 학생들의 반박과정에서 서로 다른 해석체가 생성될 수 있다. 수학적 대상이 분명하지 않은 경우도 있지만 반박을 통해 수학적 대상을 기호와의 관계 속에서 고려하고 연결의 타당성을 비판적으로 고려하면서 대상체와 기호 사이의 추론에서 부적절한 추론과 오류를 인식하게 된다. 이것은 기호와 대상체 사이에서 나타날 수 있는 해석체의 의미를 풍부하게 하여 새로운 해석체가 생성될 수 있는 바탕을 마련한다. 반박은 기호와 대상 사이를 바라보는 기존의 관점을 해체하고 이를 다르게 바라볼 수 있도록 하여 새로운 해석체를 생성할 수 있도록 한다.

C. 특이점 개념과 최댓값에 관계된 대상체의 생성

앞서 제시된 담화에서 '불량품'(S3)이라는 기호는 다른 기호 S1과 S2에서 생성되었다는 점을 설명하였다. 또한 '불량품'이라는 기호는 '불량품이 생산될 확률'이라는 새로운 해석체와 '오차', '상업적인 문제'라는 새로운 맥락을 불러일으켰다. 이 절에서는 '불량품'과 관계된 새로운 수학적 대상의 생성을 설명하고자 한다. 처음에 학생들은 분포의 특징을 '중심에서 먼 곳에 위치하는 자료의 분포가 많다'거나 자료가 '많이 퍼져있다'는 술부를 이용하여 설명했다. 그러나 이러한 표현은 '불량품 생산 확률'이라는 명사로 변하였는데 이것은 Bakker(2007)가 설명한 본질적 추상화의 예라고 볼 수 있다. Bakker는 술부를 사용해서 자료와 그래프의 특징을 묘사하다가 새로운 언어 즉, 명사로 대체하는 것을 단순한 언어적인 차원에서의 변화가 아니라 새로운 수학적 대상을 생성하는 창의적인 과정이라고 보았다. 즉, 분포의 형태나 대다수의 자료의 위치 등과 같은 분포를 설명하던 서술적인 표현은 '불량품 생산 확률'과 같은 기호로 대체되면서 사고의 대상이 되는 새로운 수학적 대상체로 생성되었다.

다음은 학생들이 대상체(O1)을 비판적으로 고려하면서 대상체에 대한 해석을 반박하고 이를 통해 새로운 대상체(O2, O3)를 생성하는 과정을 살펴보자. 이 과정을 도식화하면 그림 5와 같이 나타난다.

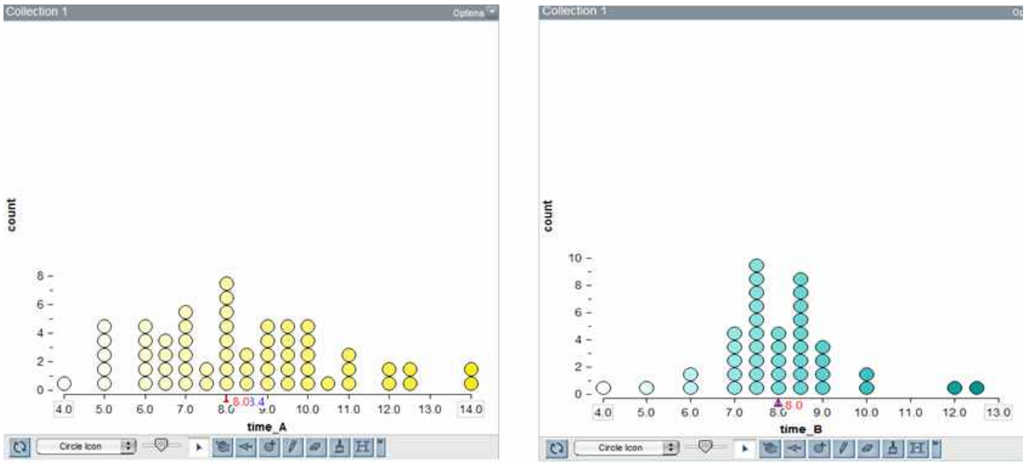


〔Figure 5〕 The creation of new objects

P6가 주목하고 있는 그래프는 그림 6과 같으며 이것을 기호 S4라고 하자. P6와 P8, P9는 A 배터리가 좋은 배터리라고 주장하였으며 그 이유를 다음과 같이 설명하였다.

<전체토론>

2 P9 ...(중략)...A 평균시간은 8.6 시간이고 B의 평균시간은 8시간이어서 A가 더 오래 지속된다는 것을 알 수 있습니다. A의 최대 지속시간이 B의 최대 지속시간보다 높기 때문에 A를 살 것입니다.
마지막에 A를 전체적으로 봤을 때 A의 평균시간은 8.4시간, B의 평균시간은 8시간입니다. A의 최대 지속시간이 B의 최대 지속시간보다 1시간 많기 때문에 A가 더 효율적임을 알 수 있습니다.



〔Figure 6〕 Student's graph (S4)

P6, P8, P9는 두 자료의 분포에서 평균과 최댓값에 주목하고 있고 평균이 크면서 최댓값이 큰 자료를 좋은 자료라고 해석하고 있다. 따라서 P9가 사고하고 있고 말하고 있는 대상체는 두 분포의 평균과 최댓값(O1)이라고 할 수 있다.

먼저 O1에 대한 논의에서 새로운 대상체 O2가 생성되는 과정을 살펴보자. 두 자료의 최솟값이 같은 상황에서 최댓값이 큰 자료를 좋은 자료라고 해석한 것은 P9가 '자료의 퍼짐'과 같은 수학적 대상에 대해 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다. 특히 P6, P8, P9는 자료의 개수가 다른 두 자료 집합을 합하여 하나의 그래프(S4)로 나타내고 최댓값을 선택하여 비교하였으므로 비례추론에 대한 인식이 없는 상태이다. 이에 대하여 P7은 자료의 개수가 다른 두 자료를 하나의 그래프로 표현하고 이를 최댓값으로 비교한 것에 대해 의심을 제기하였다(라인 8). 이 주제는 논의의 중심이 되었으며 다른 학생들이 평균과 최댓값(O1)이라는 대상체를 자료의 크기와 관련지어 다른 측면으로 볼 수 있도록 하였다.

8 P7 질문 1에서 나온 그래프에서는 A랑 B가 자료 개수가 같은데 질문 2에서 나온 그래프는 A랑 B랑 변량? 변량의 개수가 다른데 이건 어떻게 할 거예요?
10 P6 어차피 개수가 달라도 평균이나 그런 건 다 나타낼 수 있으니까

P6는 자료의 개수가 다른 두 자료를 하나의 그래프로 나타내고 최댓값을 비교한 것을 오류라고 인식하지 못하고 있다(라인 10). '개수가 달라도 평균은 나타낼 수 있다'는 표현에서 평균에만 주목하고 있을 뿐 최댓값에 대해서는 비판적으로 고려하지 않음을 알 수 있다(라인 12). 이에 대해 P1은 자료의 최댓값을 비교한 것을 다시 반박하기 위해 '자료의 개수가 많은 경우'를 가정하여 설명하고 있다. 즉 자료의 개수가 많아지면 표본의 분포가 달라지므로 최댓값이 변할 수 있고 이것이 비교기준으로 적절하지 못함을 지적하는 것이다(라인 13). P1이 자료를 '표본'으로 인식하고 표본의 최댓값의 변화에 대해 설명하고 있는 것인지는 확실하게 드러나지 않지만 자료의 개수가 많아질 경우 최댓값은 달라질 수 있음을 설명하면서 최댓값이 자료전체의 속성을 대표하는 '대표값'이 아님을 분명히 하고 있다. 이러한 표현은 이후에 라인 29에서 확률적 해석과 함께 명료해진다. 따라서 P1은 표본의 크기가 커질 경우를 상상하면서 '최댓값의 대표성'이라는 새로운 대상체(O2)를 생성하였다.

〈전체 토론〉

11 P1 평균은 그래도 자료 개수가 많으면 높은데 있을 가능성이 많아지지 않나요? 자료 개수가 다르니까
12 P6 자료 개수가 많다고 해도 그게...더 높아진다는 보장이...
13 P1 같은 확률이라고 해도...만약 2개가 있는데 자료 개수가 A가 있고 B가 있는데 A가 자료 개수가 2배 많으면 높은데 등장할 확률이라는 것이 높아지잖아요. 똑같은 데서도 다른 결과가 나올 수 있잖아요(O2)
14 P8 높은데 등장할 확률도 증가하고 낮은데 등장할 확률도 증가하니까 변량이 많으니까 어차피 증가하니까 상쇄 되서 원래 평균이나 최대 최소나 비슷하게 나와요
15 P1 평균 말고 최댓값이

이제 새로운 대상체 O3가 생성되는 과정을 살펴보자. P1이 '자료의 크기'가 변하는 경우를 사례로 들어 설명했으나 P6, P8는 오류가 있던 기존의 입장을 고수하였다(라인 12, 14). 이에 대한 반박을 제기하는 과정에서 P3는 '자료의 크기가 작을 경우'에 대하여 생각하게 되었고 이것은 '표집 변이성'이라는 새로운 대상체(O3)를 이끌어내는 바탕이 되었다. 라인 18과 20에서 살펴볼 수 있듯이 '자료(표본)의 크기가 작

을 경우 원래의 데이터(모집단)와는 다르게 편향될 가능성이 있다'이라는 해석체는 P3가 기호 S4의 분포를 표본으로서 인식하고 있는 것이며 표본의 개수가 작아질 경우 실제 값(모집단)과는 달라질 수 있음을 설명하고 있으므로 이것은 '표집 변이성'이라는 새로운 대상체(O3)를 생성하였을 보여준다.

〈전체 토론〉

18, 20 P3 자료의 개수가 적으면 그 자료의 데이터가 좀 원래와는 다르게 편향될 가능성이 좀 있지 않나요? 자료의 개수가 적으면...
(중략)...
아니 전체적으로 얘기 하는 게 지금 위에서 자료의 개수는 별로 그렇게 상관이 없다고, 상쇄 되서 상관없다 그렇게 말씀하시는 거죠? 근데 여기서 자료의 개수가 만약 적어진다면 자료의 데이터가 원래의 데이터와는 다르게 편향 되서 나올 가능성이 높지 않나요?(O3)
생략...

29 P1 최대 최소가 중요하다고 애기 하신 것 같은데, 예를 들어서 1%의 확률로 100시간을 사용할 수 있다면 그게 더 효율적 인 게 되어 버리잖아요. 최대하고 최소보다는 다른 걸 고려해야 좋지 않을 까요?(O2)

30 P8 너무 극단적으로 생각 하시는 것 같은데...평균은 기본적으로 주고 사이드로 최댓값이나 최솟값을 ...일단 평균은 중점으로 두고 있는 거라 생각하는데요.(IP8의 수정)

P8는 라인 30에서 평균과 최댓값을 기준으로 삼은 것에 대해 평균이 자료 전체의 속성을 나타내는 대푯값이며 최댓값은 보조적으로 참고했다고 자신이 제시했던 기존의 해석체를 수정하였고 초기에 사고의 대상이었던 대상체 O1의 다른 측면을 발견하였다. 토론이 끝난 후 P6와 P8은 크기가 다른 두 자료를 합하여 최댓값으로 비교할 수 없음을 깨달았고 이를 설문지에 기록하였다. 이를 통해 P6와 P8이 처음 고려했던 대상체는 다른 학생들이 이를 반박하는 과정에서 또 다른 대상체와 연결되었고 이것은 초기의 대상체를 다르게 볼 수 있도록 하여 자신들의 해석체를 수정하도록 하였다.

〈Table 5〉 The student P8's responses on questionnaire

근거가 부족했던 것 같다. 평균과 최댓값만을 비교한 것은 부족하다고 느꼈다.
변량의 개수가 다르다는 조건에서 최댓값을 비교했던 것은 조금 타당하지 못했던 것 같다.

〈Table 6〉 The student P6's responses on questionnaire.

전체적으로 봤을 때 괜찮았지만 조금 단순히 생각한 것 같다. 다른 조들은 디바이더나 %사용했지만 우리 조는 단순히 평균만 고려했다. 또한 최댓값 최솟값도 (신중하게) 고려했어야 했다.

기호 S4에서 O1과 같은 대상체를 고려하여 학생들이 어떤 해석체를 제시할 때 해석체가 가진 오류가 드러나면서 다른 학생들이 이를 반박할 수 있다. O1의 의미에 대한 다른 학생들의 반박은 O1의 의미를 수정하고 O1이 가진 다른 측면을 발견하도록 하였다. 이 과정에서 학생들은 O1이 가진 한계와 오류를 수정하고 반박의 근거를 찾기 위해 특정한 기호에서 떠올린 어떤 대상체를 다른 대상체와 연결짓고 이것은 새로운 대상체를 생성하도록 촉진한다.

V. 요약 및 결론

본 연구에서는 수학 영재들의 통계적 논증활동에서 반박 활동이 수학적 창의성의 발현에 긍정적인 역할을 할 것이라 기대하고, 이를 확인하기 위해 수학적 창조의 과정을 기호학적으로 분석하였다. 또한 이 과정에서 반박의 역할과 의의를 고찰하였다. 본 연구에서는 통계적 논증을 학생들이 반박하는 과정에서 학생들이 기호, 해석체, 대상체를 새롭게 생성하는 수학적 창조의 과정을 확인할 수 있었다.

Peirce의 기호학에 따른 기호학적 분석을 통해 수학적 창조의 과정을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 학생들은 반박을 통해 같은 기호에서 다른 부분으로 주의를 이동하고 기존의 기호에서 주목하지 않았던 부분을 인식하여 기존의 기호를 수정, 보완하였다. 새로운 기호의 생성은 기존의 기호가 가진 의미를 탐색하고 한계를 인식하여 이를 수정하는 과정에서 발생하였다. 둘째, 대상체에서 해석체를 이끌어내고 이를 반박하는 과정에서 학생들은 수학적 대상을 기호와의 관계 속에서 명료화하고 연결의 타당성을 비판적으로 고려하였다. 이것은 대상체에서 이끌어 내는 해석체의 의미를 풍부하게 하여 새로운 해석체의 생성을 이끌어낸다. 셋째, 대상체에서 이끌어 낼 수 있는 해석체에 대한 반박은 대상체가 가진 다른 측면을 발견하도록 하였다. 이 과정에서 학생들은 반박의 근거를 찾기 위해 기호가 지칭하고 있는 대상체를 다른 대상체와 연결지어 의미를 생성하고 이것은 새로운 대상체의 생성을 이끌어낸다.

이와 같은 결과로부터 다음과 같은 결론을 도출하였다.

첫째, 학생들이 특정한 기호를 이용해서 대상체를 표현할 때 기호가 지칭하고 있는 대상체

는 모호한 경우가 많은데 이것은 학생들로 하여금 대상체와 기호 사이의 관계를 적극적으로 사고하도록 자극하였다. 기호에서 이끌어낸 어떤 해석체를 반박하기 위해서는 기호가 지칭하고 있는 대상체를 명료하게 할 필요가 있었다. 대상체 자체가 모호하거나 대상체와 기호 사이의 관계가 모호한 경우 학생들은 기존에 제시된 해석체를 반박하면서 대상체를 여러 측면에서 탐색한다. 이 과정에서 새로운 해석체와 기호를 생성하기도 하고 새로운 대상체를 연결시키기도 한다. 대상체의 모호성은 대상체를 반박하는 과정을 어렵게 만들 수도 있지만 대상체의 탐색을 여러 관점으로 확장시킬 수도 있다. 기호 체계 내에서 대상체를 명료화하고 적극적으로 탐색하는 과정을 통해 기호와 해석체, 대상체의 생성과정이 촉진될 수 있다.

둘째, 기호에서 나타나는 최종적인 해석체는 기호에서 이끌어 낼 수 있는 여러 해석체 뿐만 아니라 여러 수학적 대상체의 지원을 통해 창조될 수 있다. Bakker(2007)는 기호가 매개가 되어 나타나는 해석체가 하나의 기호에 대한 반응이 아니라 여러 기호에 대한 반응으로 나타날 수 있음을 설명한 바 있다. 그러나 본 연구에서는 기호에 대한 최종적인 해석체가 기호에 대한 다양한 해석뿐만 아니라 기호에 새롭게 연결시킨 여러 대상체의 지원을 통해 발전될 수 있음을 확인하였다. 또한 이것은 Bakker(2007)가 언급했듯이 추론의 도구로서 학생들이 수학적 대상을 필요로 하는 상황을 유도하는 것과도 같다. 그는 학생들에게 자신의 주장을 정당화하는 도표를 그리도록 함으로써 학생들이 스스로 수학적 대상에 대한 필요를 느끼고 기호의 표상적인 작용과 인식론적인 작용 사이의 이동을 촉진할 수 있다고 주장하였다. 본 연구에서는 학생들이 자신의 주장을 정당화할 뿐만 아니라 다른 이의 주장을 반박하는 과정에서 새로운 수학적 대상을 필요로 하고 새로운 대상체를 생성함을 확인할 수 있었다. 대상체를 생성하는 동적인 과정을 기호학적으로 분석함으로써 반박하는 과정에서 연결되는 여러 대상체는 어떤 기호에 대한 최종 해석체의 생성을 지원하고 이것은 학생들이 수학적 대상을 필요로 하는 상황을 유발하여 기존에 고려하지 않았던 새로운 대상체를 이끌어내도록 한다.

셋째, 학생들은 반박하는 과정에서 기호나 해석체, 대상체만을 고려하는 것이 아니라 이들 사이의 관계에 대해서 사고하게 된다. 학생들은 반박하는 과정에서 수학적 대상체(중심구간을 벗어난 자료값)와 기호(불량품)사이의 관계의 타당성을 고려하였다. 즉 대상체가 어떤 기호로 표현되면 반박을 통해 학생들은 대상체가 기호로 제대로 표현되고 있는지, 기호에서 이끌어낸 해석체가 타당한지와 같이 이들 사이 관계에 대한 타당성을 비판적으로 검토하게 된다. 이러한 반박은 대상체로부터 다른 기호를 이끌어내도록 하고 기호와 대상체의 관계로부터 기존의 해석체를 수정하도록 하였다. Bakker와 Hoffmann(2005)에서 교사는 선그래프의 '형태'에 주목하여 '둔턱'이라는 새로운 기호를 소개하였다. '둔턱'은 이후에 단순한 시각적 특징이 아닌 수학적 대상으로서, 그리고 추론의 수단으로 기능하였다. 이것은 도표나 그래프와 같은 기호가 기호학적 공간에서 단순히 의사소통의 도구가 아니라 사고, 이해, 추론의 수단으로 기능함을 보여준다. 이러한 상황에서 교사는 자신의 의도에 따라 일련의 기호를 이용해 학생들이 특정한

해석체에 접근하도록 안내할 수 있지만, 이 과정에서 학생들은 기호, 대상체, 해석체 사이의 관계에 대해 적극적으로 탐색하기 어렵다. 반박의 과정은 학생들이 기호와 대상체, 해석체 자체를 탐색하도록 할 뿐만 아니라 이들 사이의 관계가 타당한지 고려하도록 하여 개념을 깊이 탐색하고 새로운 수학적 창조를 이끌어 내도록 한다.

기존의 통계적 논증활동에서는 상대방의 논증에 대한 반박이 학습의 시작점이나 논증활동의 동인이 될 뿐 사고의 도구로서 활용되지 못했다. 그러나 학생들은 통계적 논증을 반박하는 과정에서 기호와 대상체, 해석체에 대하여 깊이 사고하고 이들 사이의 관계에 대해 추론할 뿐만 아니라 새로운 수학적 창조를 이끌어낼 수 있다. 수학적 대상을 기호로 나타내고 기호가 표현하고 있는 대상체가 무엇인지, 대상체가 기호와 타당하게 연결이 되는지, 그리고 해석체가 타당하게 도출되고 있는지를 비판적으로 사고하면서 통계적 개념을 더욱 깊이 이해할 수 있다. 현재의 교육이 반대보다는 합의, 협력에 높은 가치를 두면서 학생들은 자신의 해석과 다른 해석이 제시될 때 이를 타당하게 반박하지 못하고, 반박을 비판적 사고의 기회나 창의성 발현의 기회로 활용하지 못한다. 반박은 통계적 개념을 깊이 이해할 수 있도록 하는 내용 영역의 학습 기회를 창출하면서 동시에 비판적인 사고를 통해 새로운 수학적 지식을 창조하는 기회로서 잠재력을 가지고 있음을 확인할 수 있었다.

참고문헌

강현영・송은영・조진우・이경화 (2011). 통계적 논증활동을 강조한 통계수업의 효과에 대한 사례 연구. **수학교육학연구,** 21(4), 399-42.

[Kang, H. Y., Song, E. Y., Cho, J. W., & Lee, K. H. (2011). A Case Study on Effect of Statistics Class focusing on Statistical Argumentation. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 21*(4), 399-422.

김선희・이종희 (2003). 통계 자료의 정리와 표현에서 중학생들의 기호화와 해석화 과정 분석. *수학교육학연구, 13*(4), 463-483.

[Kim, S. H., & Lee, J. H. (2003). Analysis on the process in which middle school students represented and interpreted statistical data. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 13*(4), 463-483.

김판수 (2008). 창의성 이론을 통해 본 수학 창의성. **영재교육연구,** 18(3), 465-496.

[Kim, P. S. (2008). Mathematical creativity in the view of general creativity theory. *Journal of Gifted/Talented Education, 18(*3), 465-496.]

서민주(2018). 논증활동에서 나타나는 통계적 추론의 수준 상승에 대한 분석 - 반박(Rebuttal)을 중심으로. 석사학위논문. 서울대학교 대학원.

[Seo, M. J. (2018). *An analysis on the students' development of statistical inferential reasoning in argumentation activity -Focusing on the role of rebuttal-* (Unpublished master's thesis). Seoul National University, Seoul, Korea.]

이종희・김기연 (2007). 창의적 생산력 신장의 교육목표 이해를 위한 수학영재의 수학적 창의성 개념 탐색. **수학교육, 46**(4), 445-464.

[Lee, C. H., & Kim, K. Y. (2007). A study on the concept of mathematical creativity in the mathematically gifted aspect. *The Mathematical Education, 46*(4), 445-464.]

전경원 (2000). **동・서양의 하모니를 위한 창의학.** 서울:학문사.

[Chon, K. W. (2000). Creativity for Eastern and Western Harmony. Seoul, South Korea: Hakmunsa Co.]

최영기・도종훈 (2004). 수학영재학생들의 인지적, 정의적, 창의적 특성 분석, **학교수학6**(4), 361-372.

[Choi, Y. G., & Do, J. H. (2004). Intellectual, Emotional, and Creative Characteristics of Mathematically Gifted Students. *School Mathematics,* 6(4) 361-372]

Bakker, A. (2007). Diagrammatic reasoning and hypostatic abstraction in statistics education. *Semiotica, 164,* 9-29.

Bakker, A. & Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic Reasoning as the Basis for Developing Concepts: A Semiotic Analysis of Students' Learning about Statistical Distribution, *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 333-358.

Beghetto, R. A. (2013). Nurturing creativity in the micro-moments of the classroom. Creatively Gifted Students are not like Other Gifted Students: Research, Theory, and Practice, 3-16.

Beghetto, R. A. (2016). Learning as a creative act. To appear in T. Kettler (EDs.), *Modern curriculum for gifted and advanced Learners.* New York: Routledge.

Ben-zvi, D. (2006). Scaffolding students informal inference and argumentation. In A. Rossman and B. Chance (Eds.), *Proceedings of the seventh International conference on Teaching Statistics* (ICOTS-7). Salvador, Bahia, Brazil.

Chiu, M. M. (2008). Effects of argumentation on group micro-creativity: statistical discourse analyses of algebra students' collaborative problem solving. *Contemporary Educational Psychology, 33,* 382–402.

Ciancetta, M. A. (2007). Statistics Students Reasoning when Comparing Distributions of Data (Unpublished doctoral dissertation). Portland State University, Portland.

Cobb, P. (2002). Modeling, symbolizing, and tool use in statistical data anaysis, in K.P.E. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers and L. Verschaffel (eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education,* Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 171–196.

Feldhusen, J. F. (2001). Multiple options as a model for teaching the creatively talented child. In Lynch, M. D. & Harris, C. R.(Eds). *Fostering Creativity In Children,* K-8, 3-14. Allyn & Bacon.

Feldhusen, J. F. & Westby, E. L. (2003). Creative and affective behavior: Cognition, personality and motivation. In J. Houtz (Ed.), The educational psychology of creativity (pp. 95 –105). Cresskill, NJ: Hampton Press.

Frischemeier, D. & Biehler, R. (2018). Preservice teachers comparing groups with tinkerplots-An exploratory laboratory study. *Statistics Education Research Journal, 17*(1), 35-60.

Gibbs, G. R. (2007). *Analysing qualitative data.* London: Sage.

Glavenau, V. P. (2014). Creativity as a sociocultural act. *The journal of creative behavior, 49*(3), 165-180.

Haylock, D. W. (1987). Mathematical creativity in schoolchildren. *The Journal of Creative Behavior, 21*(1), 48-59.

Lin, F. L. (2005). Modeling students' learning on mathematical proof and refutation. In: H. Chick & J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1, (pp 3–18) Melbourne, Australia.

Pfannkuch, M. Regan, M., Wild, C., & Horton, N. (2010). Telling Data Stories: Essential Dialogues for

Comparative Reasoning. *Journal of Statistics Education, 18(1),*
Robert, E. S. (2000). 질적 사례 연구. (홍용희, 노경주, 심종희 역), 서울: 창지사. (영어 원작은 1995 년 출판)
Steffe, L. P. (1990). Inconsistencies and cognitive conflict: A constructivist's view', Focus on Learning Problems in Mathematics, 12(3&4), 99-109.
Strike, K. & Posner, G. (1992). A revisionist theory of conceptual change. In Duschl et al, *Philosophy of Science, Cognitive Psychology, and Educational Theory and Practice.* State University of New York Press, Albany, NY, 147-176.
Sriraman, B. (2005). Are mathematical giftedness and mathematical creativity synonyms? A theoretical analysis of constructs. Journal of Secondary Gifted Education, 17(1), 20-36.
Walton, D. (2009). Objections, rebuttals and refutations. Paper presented at the 8th Conference of the Ontario Society for the Study of Argumentation 'Argument Cultures,' University of Windsor, Canada, June 3-6.

서민주 (ann3916@snu.ac.kr)
서울대학교 수학교육과 박사과정에 재학 중임.

이경화 (khmath@snu.ac.kr)
서울대학교 수학교육과에 재직 중이며, 동 대학 수학교육센터 센터장임. 수학적 창의성 교육이 주요 연구주제임.