



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사학위논문

무격자 기법 기반의 공력-구조 연계
해석을 위한 무격자 기법 구조 해석
프로그램 개발

Development of Meshless Structural
Dynamic Solver for Meshless Fluid-
Structure Interaction Analysis

2018 년 8 월

서울대학교 대학원

기계항공공학부

이 상 우

무격자 기법 기반의 공력-구조 연계
해석을 위한 무격자 기법 구조 해석
프로그램 개발

Development of Meshless Structural
Dynamic Solver for Meshless Fluid-
Structure Interaction Analysis

지도교수 김 규 홍

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함

2018 년 8 월

서울대학교 대학원

기계항공공학부

이 상 우

이상우의 공학석사 학위논문을 인준함

2018 년 8 월

위 원 장 _____

부위원장 _____

위 원 _____

국문 초록

본 연구에서는 무격자 기법을 이용하여 구조해석 프로그램을 개발 하였다. 무격자 기법은 격자나 요소의 정보 없이 질점의 연결 정보만으로 도메인을 해석하는 방법이다. 질점의 연결정보만을 가지고 해석을 수행하기 때문에 복잡한 형상에 대해서 격자를 생성하는 것 보다 비교적 자유롭고 손쉽게 질점을 생성할 수 있다. 또한, 움직이는 물체를 해석 할 때 격자계 시스템의 경우 격자를 재생성하는 많은 시간이 소요되지만, 질점 정보만을 사용하게 되면 격자의 재생성 없이 움직이는 물체에 대해서 해석을 수행 할 수 있다. 구조 지배 방정식으로는 Cauchy's Momentum Equation 을 사용 하였으며, constitutive equation 으로 Hook's Law 를 사용 하였고, strain-displacement 식으로 Green-Langrange tensor 를 사용 하였다. 간단한 구조 문제를 해석하고 이론 식과 비교 하여 검증을 수행하였다. 본 연구를 통해 개발된 무격자 구조 해석 프로그램은 연구실의 유동해석 코드와 결합하여 복잡한 형상, 대변형 등이 일어나는 공력-구조 연계가 필요한 문제들을 수월하게 해석 할 것으로 기대 된다.

주요어 : 무격자 기법, 구조해석

학 번 : 2016 - 29537

목차

1. 서론	1
1.1 연구배경.....	1
1.2 공력-구조 연계 해석	2
2. 무격자 해석 기법	4
2.1 Element Free Galerkin Method.....	5
2.2 MLS Approximants	5
2.3 Weight Function.....	10
2.5 Discretization of the governing equation.....	14
2.6 Gauss-quadrature.....	18
3. 수치해석 결과.....	19
3.1 1D Bar Problem	19
3.2 2D Beam Problem.....	23
4. 결론 및 향후 계획	27
참고 문헌	28

그림 목차

그림 1 전투기 앞전에서 발생하는 와류	2
그림 2 공력-구조 연계 해석의 일반적 방법	3
그림 3 격자의 비틀림과 재생성 실패 예시	4
그림 4 Tree data structure.....	7
그림 5 전체 도메인에 일정한 Weight Function	11
그림 6 노드 4번, 5번에만 일정한 Weight Function.....	12
그림 7 노드 4번, 5번에 대해 smooth 한 Weight Function.....	12
그림 8 일반적으로 사용되는 weight function	13
그림 9 1D Bar Problem	19
그림 10 1D Bar Problem 11 nodes	20
그림 11 1D Bar Problem 31 nodes	21
그림 12 1D Bar Problem 51 nodes.....	21
그림 13 1D Bar Problem 101 nodes.....	22
그림 14 2D Beam Problem.....	23
그림 15 2D Beam 에서 생성된 요소	24
그림 16 움직인 2D beam 의 요소	24
그림 17 σ_{xx} Contour over beam.....	25

그림 18 움직인 2D beam 의 요소	26
그림 19 σ_{xx} <i>Contour over beam</i>	26

표 목차

표 1 Gauss Quadrature 계수	18
표 2 1D Bar Problem 의 해석 개요 표.....	19
표 3 1D Bar Problem Grid convergence.....	20
표 4 2D Beam Problem 해석 개요	23
표 5 2D Beam Problem 해석 개요	25

1. 서론

1.1 연구배경

최근 개발되는 고성능 전투기나, 민항기의 경우 탄성을 가진 구조물이 큰 비율을 차지하며[1], 공력과 구조의 상호작용으로 인해 발생하는 공력탄성학적 영향이 두드러지게 나타난다. 이러한 공력탄성학의 영향으로 날개가 심하게 진동하거나, 대 변형을 일으켜 비행체의 파손을 일으킨다. 공력탄성학의 영향으로 비행체에 파손을 유발하지 않더라도 날개에서 발생하는 진동이 비행체 내부로 전해져 전자장비나 탑재체 등의 주요 장비에 악영향을 끼칠 수 있다. 또한, 날개의 진동 현상으로 공력 특성이 변하여 고기동이 필요한 전투기와 안정성이 필요한 민항기의 공력 특성을 설계 목표보다 크게 저하 될 수 있다.

삼각익을 가지는 전투기의 경우 고 받음각으로 비행시 그림 1 과 같이 앞전에서 와류가 발생한다. 앞전에서 발생한 와류가 날개 위를 흐르지 못하고 박리가 일어나는데 이를 와류 붕괴 현상이라 한다. 이런 와류 붕괴 현상으로 날개 위에 극심한 비정상 유동이 흐르게 되고, 비정상 유동으로 인해 비행체의 날개가 심하게 흔들리는 현상이 발생한다[2]. 심하게 흔들리는 날개가 다시 날개 위의 비정상 유동을 더욱 심화 시켜 고기동이 필요한

전투기의 안정성을 저하시키는 문제를 발생시킨다. 이와 같이 복잡한 물리적 현상을 정확히 예측하기 위해서는 구조와 공력의 정확한 연계 해석이 필요하며, 항공 분야 외에도 가스 터빈, 에어백, 다리 설계, 혈관 해석 등의 다양한 분야에서 유동-구조 연계 해석은 필수 적으로 연구가 필요하다.



그림 1 전투기 앞전에서 발생하는 와류

1.2 공력-구조 연계 해석

공력-구조 연계 해석에 있어서 해석 방법에 따라 loose coupling 과 strong coupling 으로 나누어 진다. 전자의 경우 유동해석과 구조해석을 각각의 다른 코드로 시간 전진만 맞춰 해석을 하는 방법이고, 후자는 하나의 지배 방정식

시스템으로 해석하는 것을 말한다. 본 논문에서는 loose coupling 을 목적으로 프로그램을 개발 하여, loose coupling 방법을 기본으로 두고 설명 한다.

일반적으로 공력과 구조를 연계하여 해석할 때 그림 2 와 같이 유동은 유한체적법(FVM, Finite Volume Method) 구조는 유한요소법(FEM, Fintie Element Method)를 사용하여 해석을 수행한다.

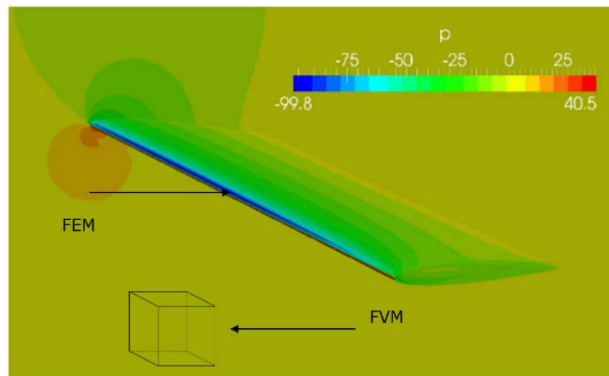


그림 2 공력-구조 연계 해석의 일반적 방법

유동에서 계산된 압력과 전단 응력을 구조물의 외력으로 넣어주고 외력으로 인한 구조의 변형을 계산한다. 구조의 변형의 다시 유동의 흐름에 영향을 주게 되고 이를 계속 반복해 가며 계산을 수행한다. 구조의 변형이 일어나기 때문에 변형이 일어나면 격자가 비틀리게 되어, 격자를 재생성해야 하는 문제가 발생한다. 그림 3 과 같이 기존의 방법으로 격자를 재생성에 있어서 어려움이 발생한다. 또한 과도한 변형 발생시 격자가 꼬이는 현상이 등이 발생하여

negative volume 과 같은 문제들이 발생한다. 하지만 무격자 기법의 경우 격자 대신 질점의 연결정보만을 요구하기 때문에 격자의 재구성 없이 강건하게 유동 및 구조 해석을 수행 할 수 있다.

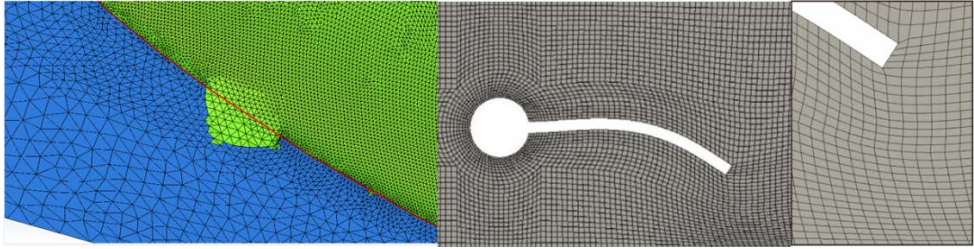


그림 3 격자의 비틀림과 재구성 실패 예시

2. 무격자 해석 기법

2.1 Element Free Galerkin Method

Element Free Galerkin Method 은 Belytschko[3]에 의해서 처음 개발되었다. 구조를 해석하는 일반적인 FEM 방법과는 달리 요소에서 정해진 노드에서 지배방정식을 푸는 것이 아니라, 연결된 connectivity 들 간의 weight function 과 shape function 을 구하여 해석하는 방법이다. MLS (moving least square) 방법을 통해 shape function 의 근사 함수를 구하여 해석을 수행한다. 때문에 점들이 정렬 돼있지 않고, 불규칙하게 분포하여도 범위 내에서 connectivity 가 연결된 점들이 있으면 해석이 가능하다. 일반적인 FEM 방법에서는 요소 별로 beam element, plate element, shell element 과 같이 요소가 나뉘는 반면 무격자 기법은 요소의 구분없이 사용이 가능하다[5].

2.2 MLS Approximants

구간 $0 \leq x \leq 1$ 를 11 개로 노드 균일하게 나누어 보자. 각 노드에서 $u(x)$ 의 근사값을 $u(x)^h$ 라고 하면 근사값은 다음과 같이 구할 수 있다[4].

$$u(x)^h = \sum_j^m p_j(x)a_j(x) \equiv p^T(x)a(x) \quad (1)$$

m 은 단항식의 개수 이고 $a(x)$ 는 x 의 함수로 계수로 이루어진 벡터이다.

$p^T(x)$ 는 기저함수 함수로 이루어진 벡터이며 다음과 같이 주어진다.

$$a^T(x) = \{a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)\} \quad (2)$$

$$p^T(x) = \{1, x, x^2, \dots, x^m\} \quad (3)$$

예를 들어 1 차원에서 식 (1)의 일차식과 이차식은 다음과 같이 주어진다.

$$u(x)^h = a_0(x) + a_1(x)x \quad (\text{linear basis}) \quad (4)$$

$$u(x)^h = a_0(x) + a_1(x)x + a_2(x)x^2 \quad (\text{quadratic basis}) \quad (5)$$

2 차원 혹은 3 차원 공간에서 $p^T(x)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$p^T(x, y) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m\} \quad (6)$$

$$p^T(x, y, z) = \{1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, \dots, x^m, y^m, z^m\} \quad (7)$$

식 (1)에서 $a(x)$ 의 값을 구하기 위해서 Moving Least Square approximation[5]을 사용한다. 주변 노드들의 값으로부터 근사 함수를 구한다. 그림 4 와 같이 노들 값과 u_i 과 근사된 함수 값의 $u(x_i)^h$ 차이의 제곱이 최소가 되도록 하계끔 $a(x)$ 의 값을 구하여 근사 함수 $u(x)^h$ 를 구한다. Weight function 을 도입하여 식을

나타내면 다음과 같다.

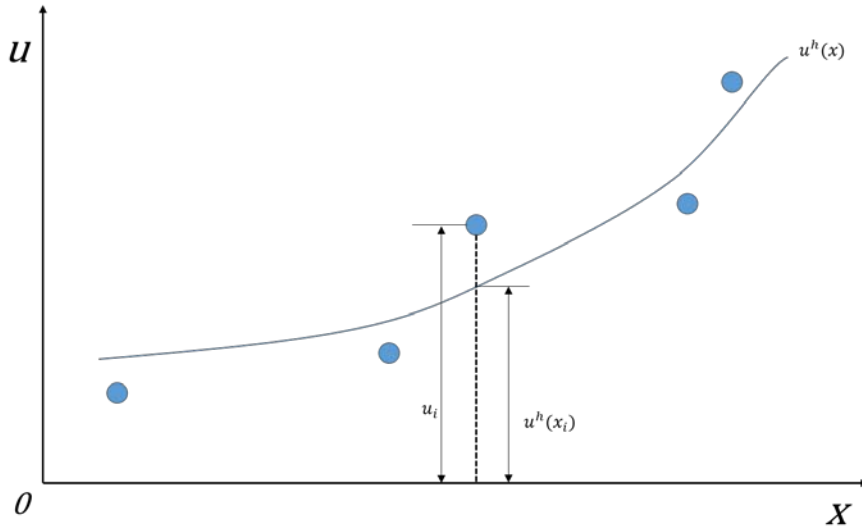


그림 4 Tree data structure

$$J = \sum_{i=1}^n w(x - x_i) [u^h(x) - u(x_i)]^2 \quad (8)$$

$$= \sum_{i=1}^n w(x - x_i) [p^T(x)a(x) - u(x_i)]^2 \quad (9)$$

n 은 연결된 connectivity 의 점 개수이며 $w(x - x_i)$ 는 weight function,
 $u(x_i)$ 는 노드에서의 값이다.

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad (10)$$

위의 조건을 만족하게 되면 선형방정식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A(x)a(x) = B(x)u \quad (10)$$

$A(x)$ 는 모멘트 행렬이라 부르고 다음과 같이 정리 된다.

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w(x - x_i)p(x_i)p^T(x_i) \quad (10)$$

1 차원에서 일차식으로 예측한다고 하면 $A(x)$ 와 $B(x)$ 는 다음과 같이 된다[4].

$$\begin{aligned} A(x) = & w(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_1^2 \end{bmatrix} + w(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \\ & + \dots + w(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n \\ x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B(x) = & w(x - x_1)p(x_1), w(x - x_2)p(x_2), \dots \\ & , w(x - x_n)p(x_n) \\ = & w(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix}, w(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \dots \\ & , w(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (13)$$

식 (10)을 $a(x)$ 에 대해 정리하여 식 (1)에 대입하면

$$u(x)^h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{ji} u_i = p^T A^{-1} B_i u_i \quad (14)$$

근사 함수 $u(x)^h$ 는 위와 같이 주어진다.

식 (14)에서 φ 을 shape function 으로 정의한다.

$$\varphi = \sum_{j=0}^m p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{ji} = p^T A^{-1} B_i \quad (15)$$

따라서 MLS 를 통해 구한 근사 함수는 shape function φ 를 통해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u(x)^h = \sum_{i=1}^n \varphi(x) u_i \quad (16)$$

다음은 구한 근사 함수 (16)의 미분 값을 구한다. 식 (15)에서

$$\varphi(x) = \gamma(x)B(x) \quad (17)$$

$$\text{where } \gamma(x) = p^T A^{-1}$$

Shape function 의 각 미분값은 다음과 같이 주어진다[5].

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} B + \gamma \frac{\partial B}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial x \partial y} B + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \gamma \frac{\partial B}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y \partial z} &= \frac{\partial \gamma}{\partial x \partial y \partial z} B + \frac{\partial \gamma}{\partial x \partial y} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z \partial y} \\
&+ \frac{\partial \gamma}{\partial y \partial z} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x \partial y} \\
&+ \gamma \frac{\partial B}{\partial x \partial y \partial z}
\end{aligned} \tag{20}$$

일반적인 FEM 방법의 경우 요소마다 shape function 을 구하기 때문에 $u(x)^h$ 와 u_i 가 일치하지만, MLS 방법을 통해 구한 shape function 은 근사 함수이므로 $u(x)^h \neq u_i$ 을 만족하지 못한다. 따라서 essential boundary condition 적용 시 기존 방법보다 추가로 작업을 해줘야 한다. 본 연구에서는 essential boundary condition 적용 시 Langrange multiplier 를 이용한다.

2.3 Weight Function

본 연구에서 weight function $w_i(x) = w(x - x_i)$ 는 매우 중요한 역할을 한다. $w_i(x)$ 을 구성할 때 양수이면서, $a(x)$ 가 유일할 수 있도록 구성해야한다. x 와 x_i 의 차이가 작으면 $w_i(x)$ 은 큰 값을 가져야 되고, x 와 x_i 의 차이가 크면 $w_i(x)$ 을 작게 가져가야 한다. 따라서 $w_i(d)$ 는 $d = (x - x_i)$ 의 함수로 이루어 진다[6].

임의 노드 n 개 대해서 $w_i(x)$ 의 값에 따른 근사 함수 $u(x)^h$ 를

그리면 매우 다른 결과가 나오는 것을 볼 수 있다[5]. 그림 5 의 경우 모든 노드에서 $w_i(x)$ 을 1로 주었을 때 근사 된 $u(x)^h$ 함수이다. 그림 6은 4번 5번 노드만 $w_i(x)$ 을 1로주고 나머지는 0을 주었을 때 근사 된 $u(x)^h$ 함수이다. 일반적인 FEM 방법에서 linear finite element approximation을 했을 때와 같은 결과가 나온다. 그림 7은 MLS 방법으로 4번, 5번 노드에 대해서 smooth 한 $w_i(x)$ 을 도입했을 때 나타나는 결과다. 임의의 점에 대해서 가장 근사하게 나타나는 것을 볼 수 있다.

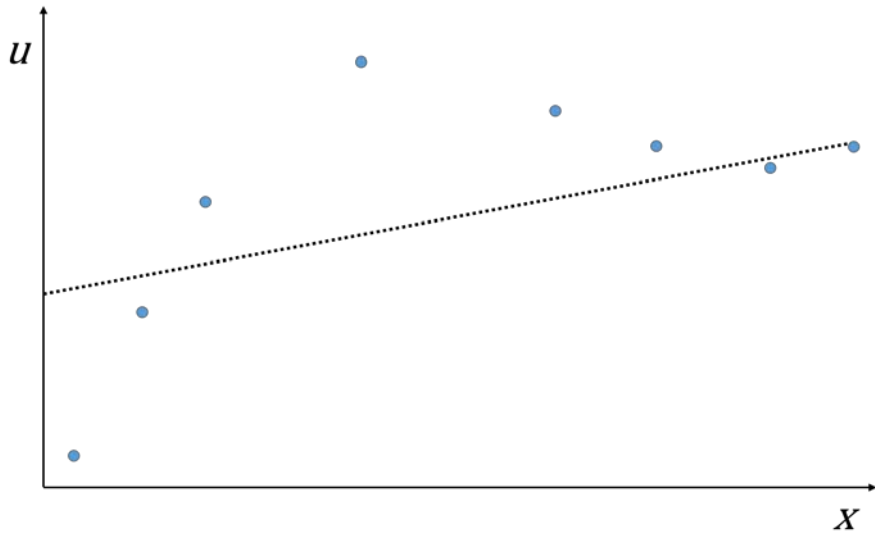


그림 5 전체 도메인에 일정한 Weight Function

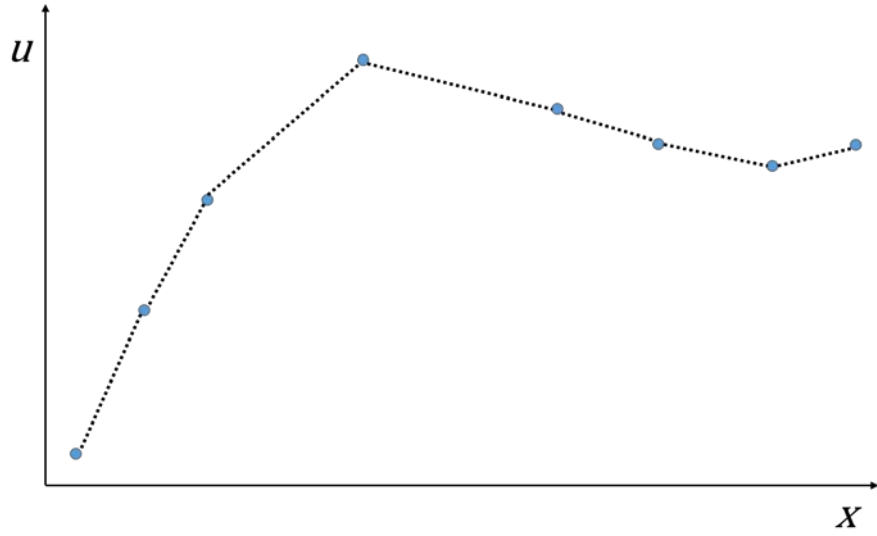


그림 6 노드 4 번, 5 번에만 일정한 Weight Function

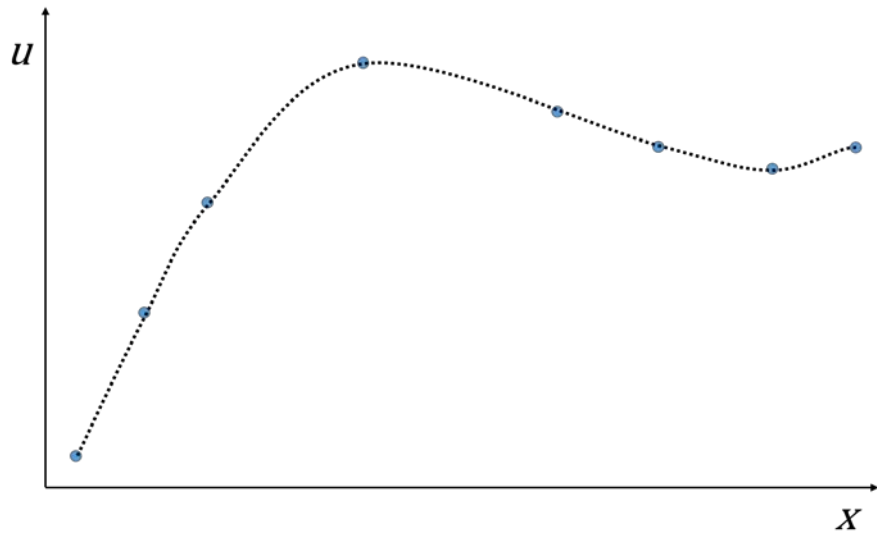


그림 7 노드 4 번, 5 번에 대해 smooth 한 Weight Function

$d_i = |x - x_i|$ 라 하고 d_{mi} 을 각 노드가 영향력을 끼치는 범위로 정의한다. 통상적으로 $d_{mi} = 2.0 \sim 3.0$ 로 주고 있으며, domain of

influence 의 범위에 따라 weight function 을 다르게 주어 각 노드의 가중치를 결정한다. Normalized radius 를 다음과 같이 정의한다.

$$r = d_i/d_{mi} \quad (21)$$

본 연구에서는 cubic spline 을 통해 weight function $w(x - x_i) \equiv w(r)$ 을 구한다. 그림 8 에서 일반적으로 쓰이는 weight function 들을 확인 할 수 있다.

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{for } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{for } \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (22)$$

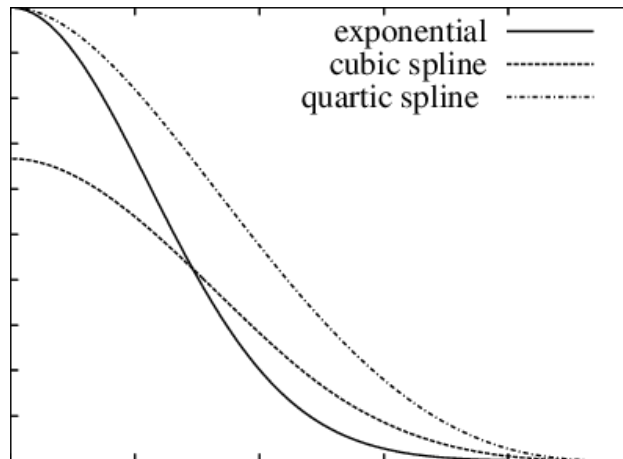


그림 8 일반적으로 사용되는 weight function

Weight function 의 미분 값은 다음과 같이 주어진다. 전체 영역에서 연속이고 미분 가능한 함수이므로 미분 값을 chain rule 을 통해 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{dw(r)}{dr} \frac{dr}{dx} = \begin{cases} -8r + 12r^2 \text{sign}(x - x_i) & \text{for } r \leq \frac{1}{2} \\ -4 + 8r - 4r^2 \text{sign}(x - x_i) & \text{for } \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (22)$$

2.5 Discretization of the governing equation

Chaucy's Momentum equation 은 다음과 같이 주어 진다. Ω 는 계산 되는 domain, Γ_t 는 traction boundary 로 외력이 주어지는 경계, Γ_u 는 essential boundary condition 으로 변위가 주어지는 경계이다 [7].

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \text{ in } \Omega \quad (23)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \text{ in } \Gamma_t \quad (24)$$

$$u = \bar{u} \text{ in } \Gamma_u \quad (25)$$

σ 는 stress tensor, bar 가 취해진 것은 prescribed boundary, n 은 unit

normal vector 이다. 결국 풀어야하는 값은 $\nabla \cdot \sigma$ 이다. $\nabla \cdot \sigma$ 통해 displacement field 와 stress 가 계산된다. 식을 풀어서 쓰면 다음과 같이 쓴다.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b = 0 \quad (28)$$

등방성 물체 조건으로 Hook's Law 에 의한 Stress-strain 관계식[8] 을 적용하였다. E 는 Young's Modulus 이고 ν 는 passion ratio 로 이는 구조의 물성치에서 주어진다. 본 연구에서는 단일 재질의 해석을 수행 하였기 때문에 모두 상수로 주어진다.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{zz}] \quad (29)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [\nu\epsilon_{xx} + (1 - \nu)\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{zz}] \quad (30)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [\nu\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy} + (1 - \nu)\epsilon_{zz}] \quad (31)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (32)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \quad (33)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} \quad (34)$$

Strain 은 Green-Langrange tensor 를 통해 strain-displacement 관계식을 나타낸다[9].

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_x}{\partial x} \\ \frac{\partial d_y}{\partial y} \\ \frac{\partial d_z}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_x}{\partial y} + \frac{\partial d_y}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_y}{\partial z} + \frac{\partial d_z}{\partial y} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_x}{\partial z} + \frac{\partial d_z}{\partial x} \right] \end{bmatrix} \quad (35)$$

식 (23), (24), (25)을 weak form 으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta(\nabla_s V^T) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta V^T \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta V^T \cdot \bar{t} d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma_u} \delta^T \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta V^T \cdot \lambda d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

δV 는 test function 이고, λ 는 Lagrange multiplier 로 앞서서 얘기한 essential boundary condition 을 위해 사용한다. Lagrange multiplier λ 는 다음과 같이 주어진다[10].

$$\lambda(x) = N_i(s)\lambda_i \quad x \in \Gamma_u \quad (36)$$

$$\delta\lambda(x) = N_i(s)\delta\lambda_i \quad x \in \Gamma_u \quad (37)$$

$N_i(s)$ 은 Lagrange interpolant 이고, s 는 경계의 길이이다. 식 (35)를 static problem 으로 가정하면 식은 다음과 같이 간소화 된다.

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (38)$$

식 (35)의 각항은 다음과 같다.

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega \quad (39)$$

$$G_{iK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_i N_K d\Gamma \quad (40)$$

$$f_i = \int_{\Gamma_t} \Phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_i b d\Omega \quad (41)$$

$$q_K = - \int_{\Gamma_u} N_K \bar{u} d\Gamma \quad (42)$$

$$\text{where, } B_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{i,y} \\ \Phi_{i,y} & \Phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$N_K = \begin{bmatrix} N_K & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix} \quad (44)$$

이산화 된 식 (38)을 적분은 Gauss Quadrature 를 통해 적분을 수행 하였다.

2.6 Gauss-quadrature

4 point Gauss-quadrature 를 사용하여 적분을 수행하였고, 적분을 위한 계수는 아래 표와 같다.

Weighting Factor	Function Arguments
C1 = 0.3478548	$x_1 = -0.861136312$
C2 = 0.6521452	$x_2 = -0.339981044$
C3 = 0.6521452	$x_3 = 0.339981044$
C4 = 0.3478548	$x_4 = 0.861136312$

표 1 Gauss Quadrature 계수

3. 수치해석 결과

3.1 1D Bar Problem

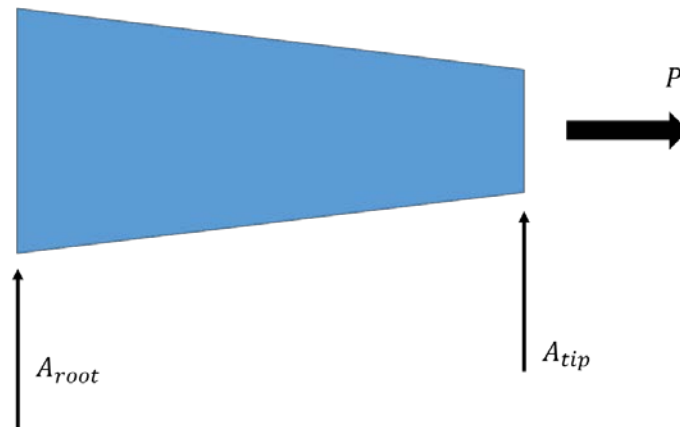


그림 9 1D Bar Problem

해석 개요	
Length	1
Young's Modulus	200e9
Density	1
P	1000
A_{tip}/A_{root}	0.5

표 2 1D Bar Problem의 해석 개요 표

오차는 다음과 같이 구하였다.

$$error = \frac{\sum(U_{exact} - U_{num})/U_{exact}}{\text{number of nodes}}$$

다음 표는 노드 개수에 따른 오차이다. 노드 개수가 많아지면
 많아 질수록 오차가 줄어들어 드는 것을 확인 할 수 있다.

Number of Nodes	% error
11	8.14
31	3.58
51	2.39
101	1.38

표 3 1D Bar Problem Grid convergence

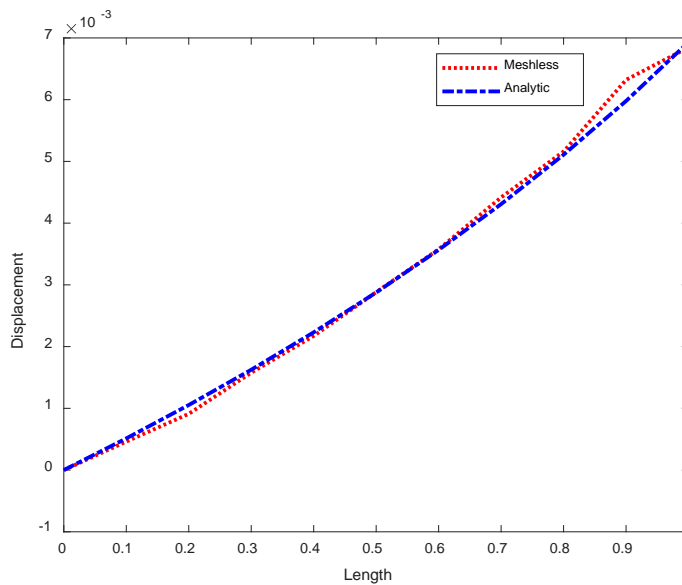


그림 10 1D Bar Problem 11 nodes

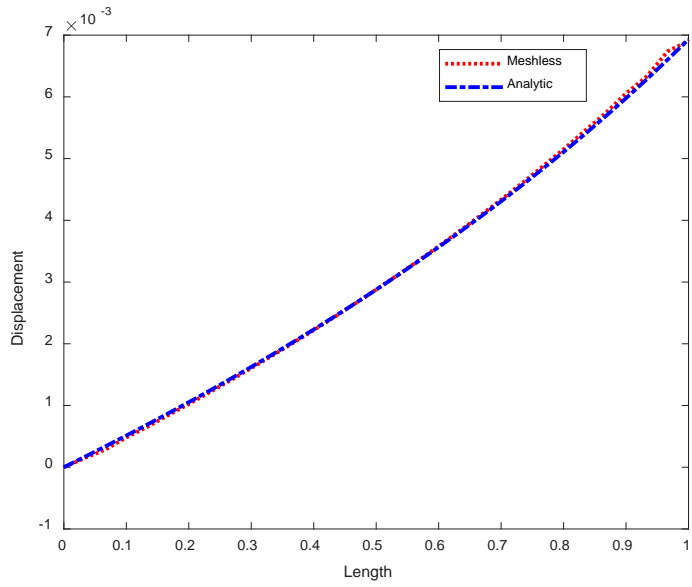


그림 11 1D Bar Problem 31 nodes

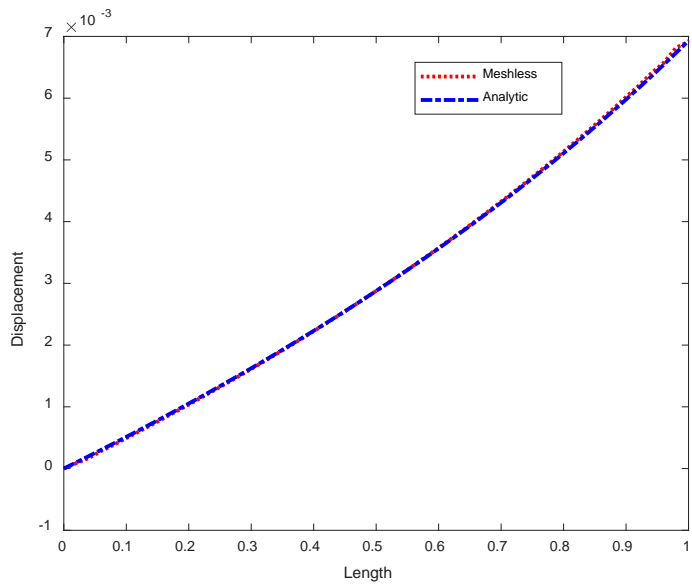


그림 12 1D Bar Problem 51 nodes

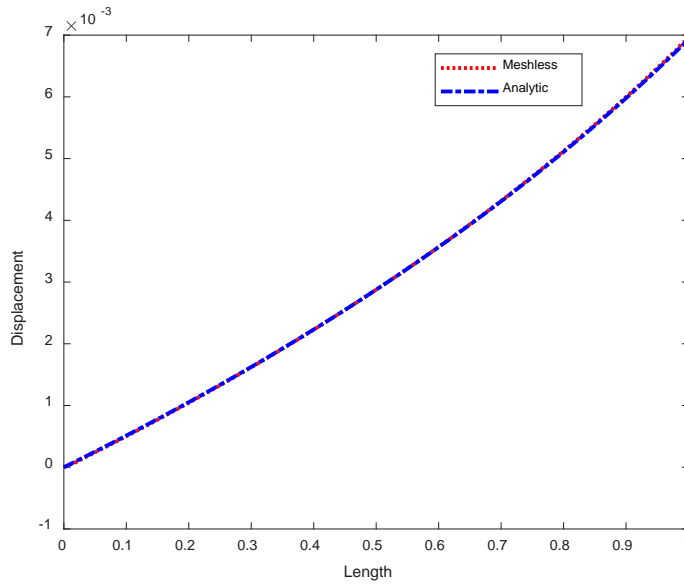


그림 13 1D Bar Problem 101 nodes

그림 9 부터 그림 13 을 살펴보면 격자의 수에 따라 exact solution 과 일치 하는 것을 볼 수 있다. Free end 에서 에러가 가장 크게 나오는데 앞서 얘기한 바와 같이 MLS approximation 을 통해 구했기 때문에 $u(x)^h \neq u_i$ 이다. 따라서 boundary condition 부분에서 에러가 발생한다.

3.2 2D Beam Problem



그림 14 2D Beam Problem

해석 개요	
Length	48
Height	12
Young's Modulus	30e6
Poisson ratio	0.3
Density	1
P	1000

표 4 2D Beam Problem 해석 개요

x 방향으로 15 개, y 방향으로 9 개의 노드를 생성하여 해석한 결과

이다.

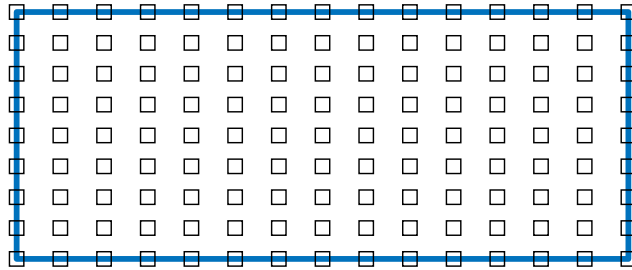


그림 15 2D Beam 에서 생성된 요소

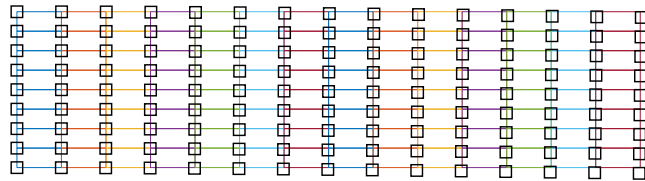


그림 16 움직인 2D beam 의 요소

원래 위치와 비교하였을 때 요소가 움직인 것을 확인 할 수 있다.

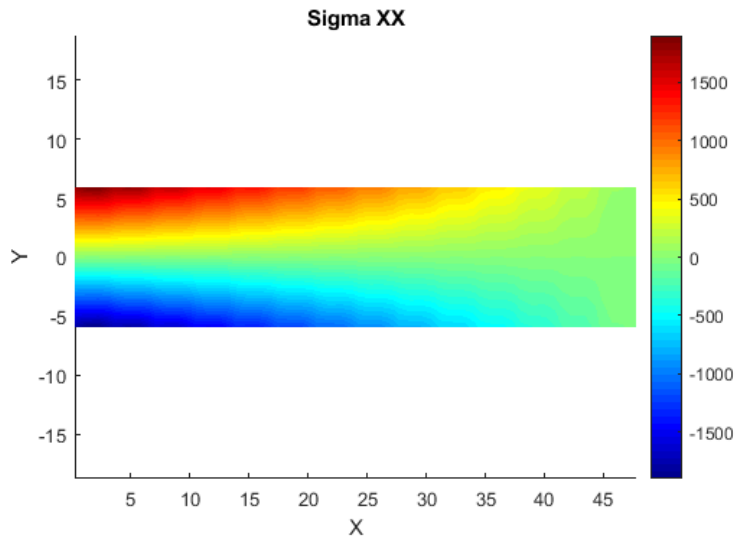


그림 17 σ_{xx} Contour over beam

해석 개요	
Length	48
Height	12
Young's Modulus	30e6
Poisson ratio	0.3
Density	1
P	5000

표 5 2D Beam Problem 해석 개요

Deflection 을 좀더 크게 보기 위해서 힘을 5 배로 증가 시켜 해석을 수
행 하였다.

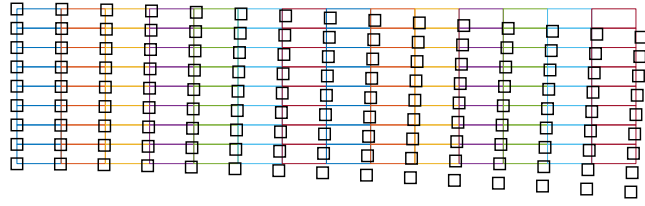


그림 18 움직인 2D beam 의 요소

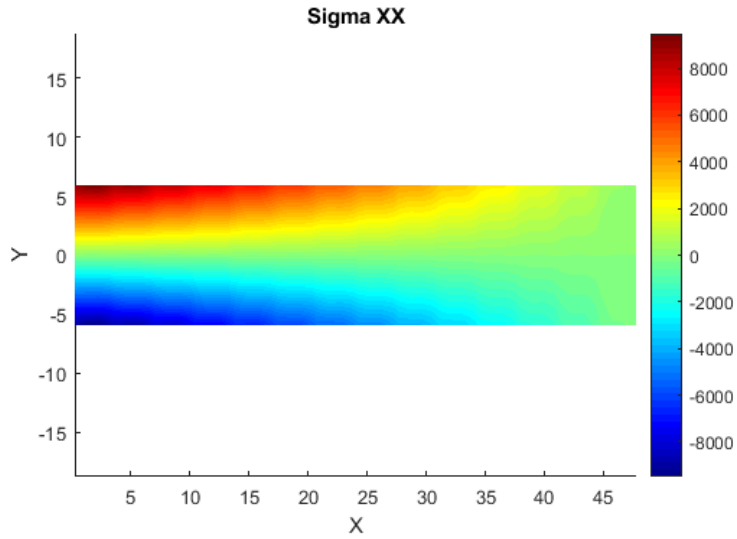


그림 19 σ_{xx} Contour over beam

4. 결론 및 향후 계획

본 연구에서는 요소를 사용하지 않고 오로지 질점의 연결정보로만 해석을 수행하는 구조해석 프로그램을 개발하였다. 본 연구에서 개발한 프로그램으로 1D bar, 2D Beam 해석을 수행하여 이론 식과 비교하여 검증을 수행하였다. Moving Least Square approximation 을 통해 연결된 connectivity 의 shape function 을 구하였고, cubic spline weight function 을 사용해 domain 의 근사 함수를 구하였다. Galerkin Method 를 사용하여 구조 지배방정식을 수치적으로 해석하였다.

향후 계획으로는 Huh가 개발한 무격자 유동 해석 코드와 결합하여, 공력-구조 연계 해석을 할 수 있도록 할 것이며, 더욱 다양한 형상에 대해 구조해석 코드의 검증을 수행할 것이다.

참 고 문 헌

[1] J. Slotnick., A. Khodadoust.: CFD Vision 2030 Study: A Path to Revolutionary Computational Aerosciences. Hampton, Virginia 23681-2199, November 22, 2013

[2] R.E. Gordnier., M.R. Visbal.(2004) Computation of the aeroelastic response of a flexible delta wing at high angles of attack, doi:10.1016/j.jfluidstructs.2004.04.008

[3] T. BELYTSCHKO. "ELEMENT-FREE GALERKIN METHODS." INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, 37,229-256 (1994)

[4] J. Dolbow and T. Belytschko. " An Introduction to Programming the Meshless Element FreeGalerkin Method." Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 5, 3, 207-241 (1998)

[5] G. R. Liu. "Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method." CRC Press LLC(2003)

[6] Youping Chen, James Lee, Azim Eskandarian. "Meshless Methods in Solid Mechanics." Library of Congress Control Number: 2005937127

[7] E. ONATEM, C. ERVERA , O.C. ZIENKIEWICZ. "A FINITE VOLUME FORMAT FOR STRUCTURALMECHANICS." International

Center for Numerical Methods in Engineering, Univ. Politcnica de Cataluiia,
08034 Barcelona, Spain

[8] G.T. Mase, Continuum mechanics for engineers Second Edition. (1999)

[9] X.Lv, "A maxtrix-free implicit unstructured multigrid finite volume
method for simulating structural dynamics and fluid – structure interaction"
(2007)

[10] T. S. Breusch and A. R. Pagan. "The Lagrange Multiplier Test and its
Applications to Model Specification in Econometrics." Vol. 47, No. 1,
Econometrics Issue (Jan., 1980), pp. 239-253