

JOSE LUIS VITAL DE BRITO

**RESPOSTA SÍSMICA DE EDIFÍCIOS E DE ESTRATOS DE SOLO  
NÃO-LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS**

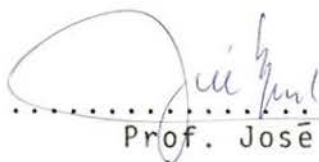
Tese apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "MESTRE EM CIÊNCIAS".

Porto Alegre  
Estado do Rio Grande do Sul - Brasil  
Maio/1979

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de "MESTRE EM CIÊNCIAS" e aprovada na sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil.



.....  
Prof. Jorge Daniel Riera  
Orientador



.....  
Prof. José S. Gomes Franco  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

À Sulita

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Jorge D.Riera, orientador deste trabalho, pela colaboração e incentivo recebidos durante sua realização.

Ao professor José S.Gomes Franco, coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, pelo incentivo dado a este trabalho.

Ao engenheiro Enrique Emilio Galindez, pela cessão dos dados do modelo do edifício, constituintes de seu trabalho de tese e utilizados na seção 5.4 deste trabalho.

A CAPES, CNPq e CNEN pela concessão de bolsa de estudos.

Ao Luiz Krein, pelo trabalho de datilografia dos manuscritos, à Helena Cabral de Mello Borges, pela realização dos desenhos ilustrativos, e à Juliana Zart Bonilha, pela preparação das referências bibliográficas.

A todos os professores, colegas, amigos e funcionários que, de forma direta ou indireta, participaram da realização deste trabalho.

## SINOPSE

Partindo do fato de que em um grande número de sistemas hiperbólicos a solução pode ser obtida de uma maneira simples através do método das características, o presente trabalho concentra-se na sua aplicação a problemas de propagação vertical de ondas de corte em estratos de solo e em edifícios.

Inicialmente, apresentam-se as equações de Ramberg-Osgood, utilizadas na representação do comportamento físico não-linear dos solos e de edifícios de concreto armado. Após serem estabelecidos os fundamentos matemáticos do método das características, passa-se a sua aplicação a um modelo unidimensional representativo do comportamento de mantos flexíveis de solo excitados dinamicamente pela propagação vertical de ondas de corte.

Discute-se a aplicabilidade de modelos baseados na hipótese de propagação vertical de ondas de corte em depósitos flexíveis de solo, em relação ao problema de determinação de espectros de resposta sísmica válidos para a superfície do estrato. Mostra-se que o modelo não é confiável se o módulo de corte do solo e a espessura total do estrato excedem valores limites dados.

Empregando um modelo simplificado, se realizou um estudo para o caso de uma área densamente edificada assentada sobre um depósito de 21,5 m de espessura de solo granular. Os efeitos da interação solo-estrutura foram perceptíveis para uma altura média dos edifícios de 9 m e significativos para uma altura média de 18 m.

Finalmente, através da aplicação do método das características a um modelo contínuo, representativo do comportamento de edifícios convencionais de concreto armado, chega-se à obtenção da resposta de um edifício submetido a uma excitação sísmica. A partir da aplicação do modelo formulam-se, então, conclusões sobre sua utilização.

## SYNOPSIS

Considering the fact that the solution of many systems of hyperbolic equations may be obtained in a simple manner by the method of characteristics, this work concentrates on the application of the method to problems of vertical propagation of shear stress waves in soil stratum and in buildings.

The equations of Ramberg-Osgood used in the representation of the physical nonlinear behaviour of soils and of reinforced concrete buildings, are presented first. After establishing the mathematical foundations of the method of characteristics it is applied to a one-dimensional model representing the behaviour of flexible layers of soil dynamically excited by the vertical propagation of shear stress waves.

The range of applicability of models based on the hypothesis of vertical shear wave propagation through soft soil deposits is discussed in connection with the determination of surface seismic response spectra. It is shown that the model is not reliable if the soil stiffness or the overall thickness of the deposits exceed given limiting values. By means of a simplified model, case studies were conducted for a densely, uniformly built area located on top of a 21,5 m thick sand layer. Soil-structure interaction effects became perceptible for three and significant for six-story high buildings.

Finally by the application of the method of characteristics to a continuous model, representing the behaviour of conventional reinforced concrete buildings, the response of a building submitted to a seismic excitation is obtained. Conclusions on the practical application of the model used on the tests are drawn.

O Capítulo 3 deste trabalho já foi parcial e brevemente apresentado no artigo:

BRITO, J.L.V. & RIERA, J.D. On the determination of surface seismic response spectra for soft soil sites. In: ANAIS DA CONFERÊNCIA SOBRE ANÁLISE, PROJETO E CONSTRUÇÃO DE ESTRUTURAS DE CENTRAIS NUCLEARES, Porto Alegre, 1978. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1978, vol 3, p.1029-46.

## SUMÁRIO

	pág.
CAPÍTULO 1	
1. INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2	
2. EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.....	4
2.1 - <u>Modelo de Ramberg-Osgood</u> .....	5
CAPÍTULO 3	
3. MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.....	18
3.1 - <u>Antecedentes</u> .....	18
3.2 - <u>Fundamentos teóricos</u> .....	19
3.3 - <u>Programa de computação</u> .....	45
3.4 - <u>Aplicabilidade do modelo</u> .....	51
3.5 - <u>Estudo de casos</u> .....	54
3.6 - <u>Influência do solo: conclusões e recomendações</u> ....	61
CAPÍTULO 4	
4. CONSIDERAÇÕES SOBRE A INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA.....	77
4.1 - <u>Introdução ao problema</u> .....	77
4.2 - <u>Aplicação do método das características a um modelo simples</u> .....	80
4.3 - <u>Estudo de casos</u> .....	82
4.4 - <u>Conclusões e recomendações</u> .....	84
CAPÍTULO 5	
5. APLICAÇÃO A EDIFÍCIOS DE CONCRETO ARMADO ATÉ A RUPTURA..	89
5.1 - <u>Introdução: considerações sobre alguns métodos disponíveis</u> .....	89
5.2 - <u>Fundamentos</u> .....	91
5.3 - <u>Programa de computação</u> .....	96
5.4 - <u>Exemplos de aplicação</u> .....	97
5.5 - <u>Conclusões e recomendações</u> .....	104



## CAPÍTULO 6

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS..... 109

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 111

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Os problemas de propagação de ondas em sistemas contínuos são descritos por equações diferenciais parciais parabólicas ou hiperbólicas. No caso de sistemas parabólicos uma solução satisfatória pode ser obtida pelo método das diferenças finitas. Entretanto, a utilização desse método em sistemas hiperbólicos é bastante delicada, havendo casos em que a solução pode se deteriorar inclusive quando se emprega uma malha refinada.

Por outro lado, a solução de um grande número de sistemas hiperbólicos pode ser obtida de uma maneira simples e eficaz através do método das características. Por exemplo, vários problemas de hidrodinâmica foram resolvidos por Streeter e Wylie<sup>34</sup> utilizando esse método, e Newmark e Rosenblueth<sup>22</sup> descreveram o seu emprego em problemas de propagação unidimensional de ondas em solos e em reservatórios.

A utilização do método das características na obtenção da resposta de problemas de propagação de ondas sísmicas em solos possui várias vantagens, entre as quais destacariam-se as seguintes: a) a versatilidade do método, ou seja, a flexibilidade que ele possui de resolver diferentes problemas de propagação mediante modificações simples do procedimento básico; b) a facilidade de programação; c) o baixo custo de computação; d) a possibilidade de se considerar o solo como um meio elástico, viscoelástico ou não-linear.

Neste trabalho o método das características é aplicado a problemas de propagação vertical de ondas de corte em (a) estratos de solo e (b) em edifícios, através de um modelo simplificado do sistema de pórticos constituintes do mesmo. O trabalho foi dividido em quatro capítulos, os quais são comentados a seguir.

No Capítulo 2 são apresentadas as equações propostas por Ramberg-Osgood<sup>28</sup>(1943). Essas expressões são suficientemente gerais e podem ser utilizadas para aproximar de uma maneira relativamente simples e precisa as relações constitutivas de modelos unidimensionais que estejam compreendidas entre os limites linear e elastoplástico ideal, inclusive para carregamentos reversíveis. As equações de Ramberg-Osgood são utilizadas, neste trabalho, para representar o comportamento não-linear dos solos e de edifícios de concreto armado.

O terceiro capítulo apresenta inicialmente os fundamentos matemáticos do método das características, passando em seguida a sua aplicação a um modelo unidimensional representativo do comportamento de mantos flexíveis de solo excitados dinamicamente pela propagação vertical de ondas de corte. O procedimento obtido da aplicação do método das características é automatizado, sendo utilizado posteriormente em um estudo de casos, do qual são tiradas conclusões com respeito à influência de camadas de solo na obtenção da resposta sísmica. Discute-se também, neste capítulo, a aplicabilidade do modelo unidimensional utilizado.

No quarto capítulo é proposto um modelo simples baseado no método das características com o objetivo de se avaliar a influência que uma grande concentração de edificações exerce na resposta sísmica de estratos flexíveis de solo. O modelo proposto é, também, utilizado em um estudo de casos, do qual são obtidas, posteriormente, conclusões a respeito da influência das edificações na resposta sísmica.

Através da utilização de um modelo contínuo baseado no método das características é obtida, no quinto capítulo, a resposta de um edifício excitado dinamicamente pela propagação vertical de ondas de corte. O procedimento obtido do emprego desse modelo é sistematizado em um programa de computação, no qual é incluída a possibilidade de se considerar o comportamento de edifícios como linear, viscoelástico ou não-linear. São apresentados, a seguir, alguns exemplos de aplicação, através dos quais são formuladas conclusões a respeito da utilização do modelo.

Cabe ainda comentar que os programas foram escritos na linguagem ALGOL para serem utilizados no sistema Burroughs B6700 do Centro de Processamento de Dados da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

## CAPÍTULO 2

## EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

A determinação da resposta de um estrato de solo excitado pela propagação vertical de ondas de corte pode ser encarada como um problema unidimensional. Partindo dessa hipótese tem-se que a propagação da onda no estrato depende das condições de contorno, da relação entre tensão e deformação das diversas camadas de solo e das propriedades físicas e geométricas dessas camadas.

As relações entre tensão e deformação de corte para os solos são não-lineares e do tipo suave\*, logo, para que a determinação da resposta de um sistema unidimensional sujeito a tensões e deformações de corte seja satisfatória, essas relações deverão ser aproximadas por expressões analíticas que levem em conta o comportamento não-linear dos solos.

Hardin e Drnevich<sup>11</sup> demonstraram que as curvas tensão-deformação dos solos podem ser representadas de maneira razoável por uma hipérbole, sendo essas equações entretanto não facilmente adaptáveis para representar carregamentos reversíveis.

As equações propostas por Ramberg-Osgood<sup>28</sup> (1943), pelo contrário, são expressões suficientemente gerais e podem ser utilizadas satisfatoriamente para aproximar relações constitutivas do tipo suave variando entre os limites linear e elasto-plástico, inclusive para carregamentos reversíveis.

Essas relações têm sido utilizadas por diversos autores na resolução de problemas estruturais e de solos. Wilson<sup>39</sup> (1960) a utilizou para aproximar a curva entre momento e curvatura de perfis de aço, na análise estática de pórticos com comportamento não-linear. Jennings<sup>16</sup> (1964) e Berg<sup>2</sup> (1965) a consi-

---

\* "strain-softening" na literatura de língua inglesa.

deraram na relação entre força e deflexão de uma estrutura sujeita a excitação dinâmica. Streeter, Wylie e Richart<sup>35</sup>(1974) aproximaram as curvas de tensão-deformação de corte de um estrato de solo pelas equações acima referidas, na determinação da resposta a uma excitação dinâmica.

Visto que parte deste trabalho propõe verificar a influência de mantos flexíveis de solo na obtenção da resposta sísmica, e que as expressões de Ramberg-Osgood aproximam de maneira relativamente simples e precisa o comportamento não-linear e histerético dos solos em modelos unidimensionais, discute-se a seguir essas expressões, primeiro numa forma geral e em seguida em relação ao caso de solos.

### 2.1 - Modelo de Ramberg-Osgood

O modelo de Ramberg-Osgood é definido basicamente por duas equações, uma para a curva-esqueleto do modelo e outra para os ramos de descarga e recarga.

Chama-se de curva-esqueleto a relação força-deflexão\* obtida aumentando-se a partir de zero o valor absoluto da carga que atua na estrutura.

A equação de Ramberg-Osgood para a curva-esqueleto é uma curva geral do tipo suave, simétrica com relação à origem, considerada linear para pequenas deflexões, e definida como:

$$\frac{X}{X_y} = \frac{P}{P_y} + \alpha \left(\frac{P}{P_y}\right)^R \quad (2.1)$$

onde X representa o deslocamento da estrutura,  $X_y$  um deslocamento característico, P uma força restitutiva,  $P_y$  uma força característica,  $\alpha$  uma constante positiva e R um número inteiro e ímpar.

A fig. 2.1 apresenta vários exemplos de curvas-es-

---

\* As relações são apresentadas genericamente em termos de força-deflexão podendo no entanto representar outras relações constitutivas, tais como tensão-deformação ou momento-curvatura.

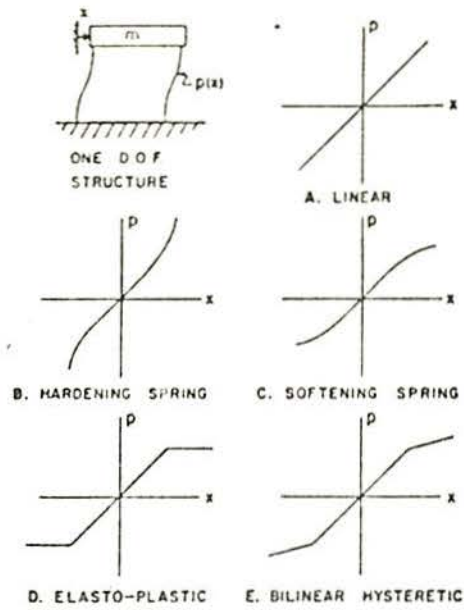


Fig. 2.1 - Curvas-esqueletos de vários tipos (Ref.16)

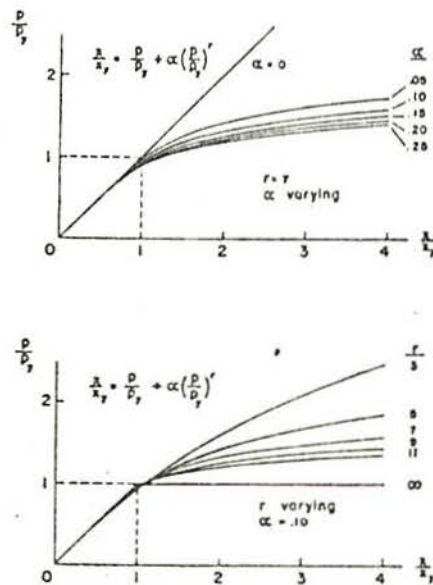


Fig. 2.2 - Variação das curvas-esqueletos com  $\alpha$  e  $R$  (Ref.16)

queletos, sendo que todas elas, com exceção da curva B, pertencem à mesma classificação da eq. (2.1).

Muitas vezes é necessário, ao aproximar uma curva-esqueleto genérica, escolher como valores de R números reais e que portanto não pertencem ao conjunto definido acima. Neste caso utiliza-se uma expressão mais geral definida como

$$\frac{X}{X_y} = \frac{P}{P_y} \left( 1 + \alpha \left| \frac{P}{P_y} \right|^{R-1} \right) \quad (2.2)$$

As curvas-esqueletos descritas pela eq.(2.1) ou (2.2) podem variar entre os limites correspondentes a um material linear e elastoplástico ideal através dos parâmetros  $\alpha$  e R, como se observa na fig. 2.2 – em vista da simetria apenas a parte positiva é desenhada.

Através da fig. 2.2 e da eq. (2.1) ou (2.2), com prova-se que o limite elástico é obtido quando  $\alpha = 0$ , e que para  $\alpha \neq 0$  alcança-se o elastoplástico à medida que R tende ao infinito.

O problema de se aproximar uma curva suave pela equação de Ramberg-Osgood consiste na escolha de valores apropriados dos parâmetros  $\alpha$  e R. Ramberg-Osgood sugerem um procedimento simples para aproximar curvas obtidas através de ensaios estáticos que é indicado a seguir.

Em um sistema cartesiano constrói-se um gráfico logarítmico da variação d – diferença entre o deslocamento medido e o deslocamento elástico linear – contra a força aplicada. Para a curva dada pela eq. (2.1) a variação d é expressa por:

$$d = \frac{X}{X_y} - \frac{P}{P_y} = \alpha \left( \frac{P}{P_y} \right)^R$$

ou

$$\log d = \log \alpha + R \log (P/P_y)$$

ou seja, o gráfico logarítmico pode ser representado por uma



reta. A fig. 2.3 mostra a curva a ser aproximada e um par ordenado  $(d_i, P_i/P_y)$ , genérico, que será utilizado na construção do gráfico acima referido e indicado na fig. 2.4. Através dessa figura verifica-se que os parâmetros  $\alpha$  e  $R$  são, respectivamente, o intercepto e a inclinação da reta que melhor aproxima os pontos desse gráfico logarítmico.

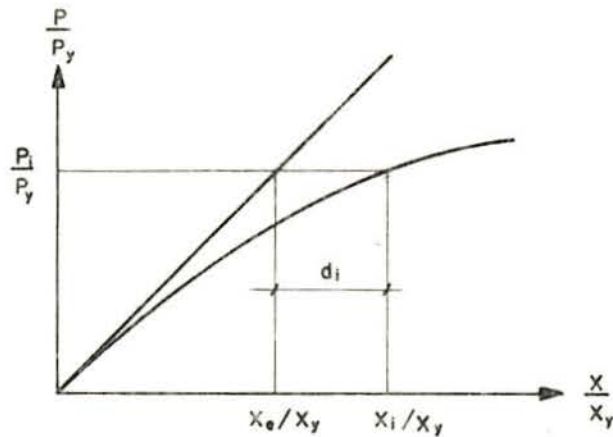


Fig. 2.3 - Curva a ser aproximada pela eq. (2.1)

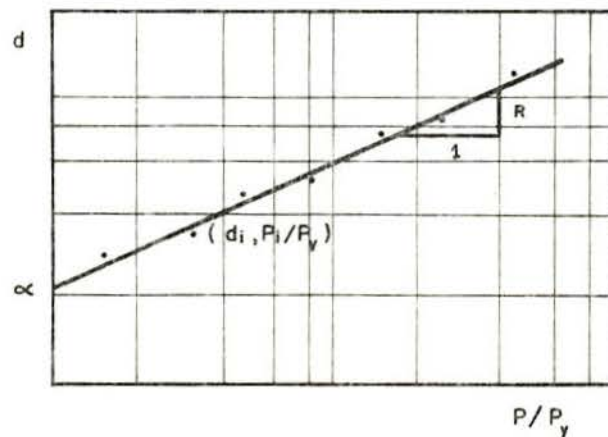


Fig. 2.4 - Obtenção dos parâmetros  $\alpha$  e  $R$

Pode-se interpretar  $\alpha$  como um parâmetro que ajusta a posição da curva ao longo do eixo da deflexão, e  $R$  o expoente que controla a curvatura (ver fig. 2.2). Assim, para cada

valor de  $\alpha$ , a família de curvas obtidas variando o expoente  $R$  irá passar pelos pontos  $P = 0, X = 0$  e  $P = P_y, X = X_y (1 + \alpha)$ .

Quando uma estrutura é carregada fora do limite elástico e então descarregada, a relação entre força e deflexão não mais obedece ao comportamento de uma curva-esqueleto. A curva associada a um carregamento cíclico reversível dá-se o nome de laço de histerese, sendo sua área igual à energia dissipada nesse ciclo.

A fig. 2.5 mostra vários exemplos de laços de histerese bem como suas respectivas curvas-esqueletos.

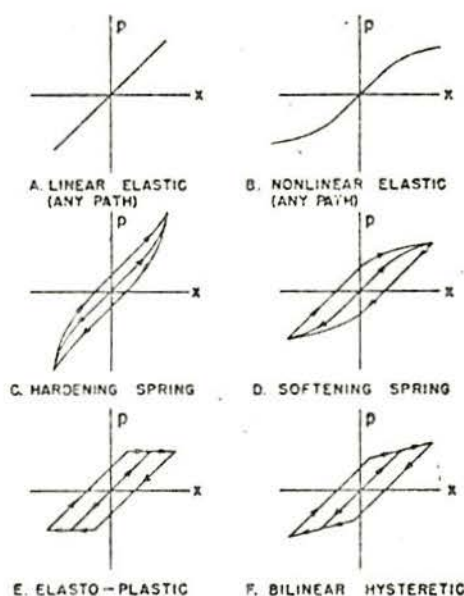


Fig. 2.5 - Laços de histerese de vários tipos (Ref.16)

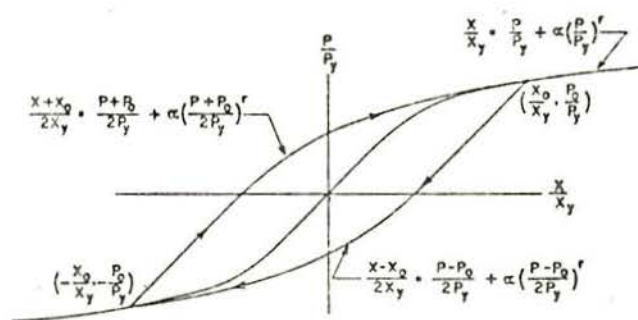


Fig. 2.6 - Modelo histerético de Ramberg-Osgood (Ref.16)

As equações de Ramberg-Osgood para os ramos do laço histerético são dadas por:

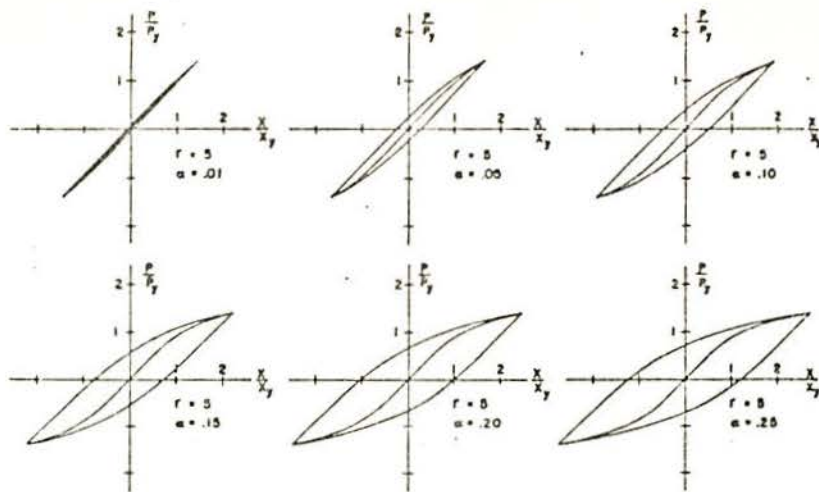


Fig. 2.7 - Laços de histerese para  $R$  constante e  $\alpha$  variável (Ref. 16)

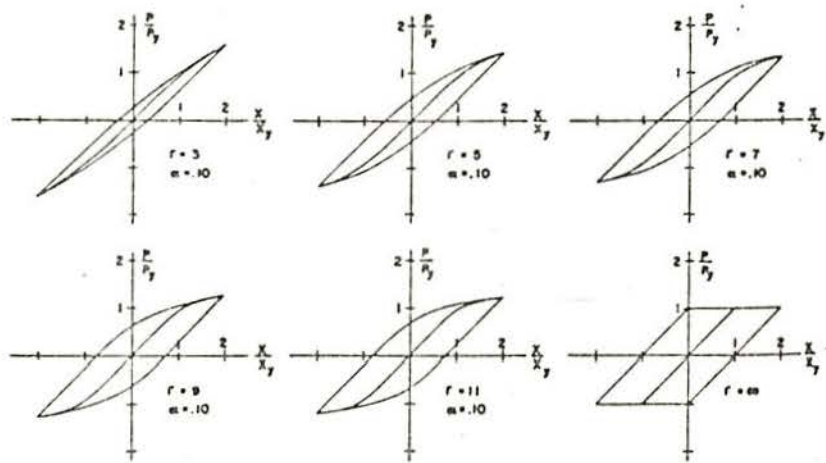


Fig. 2.8 - Laços de histerese para  $\alpha$  constante e  $R$  variável (Ref. 16)

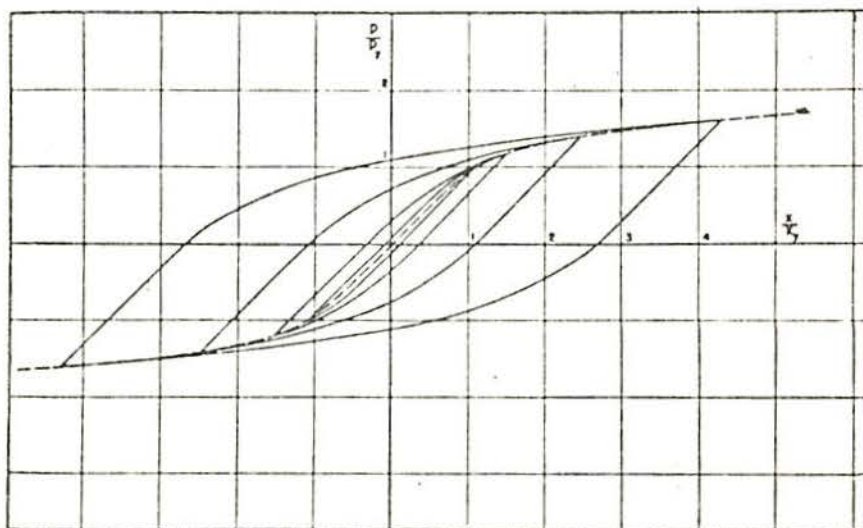


Fig. 2.9 - Variação do laço de histerese com a amplitude,  $R=7$ ,  $\alpha=0,10$  (Ref. 16)

$$\frac{X - X_i}{2X_y} = \frac{P - P_i}{2P_y} + \alpha \left( \frac{P - P_i}{2P_y} \right)^R \quad (2.3)$$

para  $R$  inteiro e ímpar, e como

$$\frac{X - X_i}{2X_y} = \frac{P - P_i}{2P_y} \left( 1 + \alpha \left| \frac{P - P_i}{2P_y} \right|^{R-1} \right) \quad (2.4)$$

para  $R$  real, onde o par ordenado  $(X_i, P_i)$  representa o último ponto a partir do qual a direção do carregamento é reversa. Os ramos de descarga e recarga são obtidos dependendo do sinal, positivo ou negativo, do par ordenado.

Um laço de histerese genérico obtido com a eq. (2.3) ou (2.4) e sua curva-esqueleto (eq. (2.1) ou (2.2)) são apresentados pela fig. 2.6. As figs. 2.7 e 2.8 mostram a variação do laço de histerese e sua curva-esqueleto com os parâmetros  $\alpha$  e  $R$ . Na fig. 2.7 a forma do laço de histerese é função do parâmetro  $\alpha$  sendo  $R$  constante, enquanto que na fig. 2.8 temos o contrário. A fig. 2.9 mostra que para uma dada estrutura a forma do laço de histerese bem como sua área dependem da amplitude da deflexão.

Seria interessante, uma vez que as equações já foram apresentadas, observar algumas propriedades do laço de histerese.

a) Os pontos-limites do laço de histerese,  $(X_i, P_i)$  e  $(-X_i, -P_i)$ , se encontram sobre a curva-esqueleto. Fazendo o par  $(X_i, P_i)$  igual a  $(X_0, P_0)$ , verifica-se através da eq. (2.3) que o ponto-limite superior do ramo de descarga satisfaz identicamente (2.3), enquanto que o inferior só satisfaz se o ponto estiver sobre a curva-esqueleto. Se for considerado o ramo de descarga, chega-se à conclusão que o ponto superior deverá também estar sobre a curva-esqueleto como afirmado no início.

b) A inclinação inicial dos ramos de descarga e recarga é paralela à parte inicial linear da curva-esqueleto. Isso pode ser verificado obtendo-se a derivada de  $P$  em relação a  $X$  próxima ao ponto inicial dos ramos.

c) Os ramos ascendentes e descendentes do laço de histerese são nos seus pontos finais tangentes à curva-esqueleto. Isso pode ser verificado através das derivadas de P em relação a X nesses pontos, e através da propriedade a.

d) O laço de histerese, da mesma forma que a curva-esqueleto, apresenta como limites uma linha reta e o laço elastoplástico. À medida que  $\alpha \rightarrow 0$  o laço de histerese tende a se tornar uma linha reta (ver fig. 2.7). Quando  $\alpha \neq 0$  e  $R \rightarrow \infty$  teremos o limite elastoplástico (ver fig. 2.8).

Como já foi enfatizado no início deste capítulo, o modelo de Ramberg-Osgood será utilizado para representar as relações entre tensão e deformação de corte em solos, logo, torna-se conveniente modificar a notação das equações apresentadas para uma outra empregada mais frequentemente nesse caso, bem como definir algumas propriedades adicionais do modelo, de particular interesse no estudo de solos.

Serão utilizadas para representar as relações constitutivas de corte em solos apenas as expressões mais gerais de Ramberg-Osgood, ou seja, aquelas que consideram o expoente R como um número real. Sendo assim, obtêm-se:

$$\frac{\gamma}{\gamma_y} = \frac{\tau}{\tau_y} \left( 1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-1} \right) \quad (2.5)$$

para a curva-esqueleto, onde  $\tau$  = tensão de corte,  $\gamma$  = deformação de corte,  $\tau_y$  = tensão de corte característica,  $\gamma_y$  = deformação de corte característica; e

$$\frac{\gamma - \gamma_i}{\gamma_y} = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_y} \left( 1 + \alpha \left| \frac{\tau - \tau_i}{2\tau_y} \right|^{R-1} \right) \quad (2.6)$$

para os ramos de descarga e recarga, onde  $(\gamma_i, \tau_i)$  representa o último ponto a partir do qual a direção da tensão é reversa.

A tensão característica de corte,  $\tau_y$ , pode ser considerada uma fração da tensão máxima de corte do solo, ou seja,  $\tau_y = C_1 \tau_{\max}$ , onde  $0 < C_1 \leq 1$ . Da mesma maneira considera-se  $\gamma_y = C_1 \gamma_r$ , onde  $\gamma_r = \tau_{\max} / G_0$ ; sendo  $G_0$  o módulo de cor-

te para pequenas deformações, ou módulo de corte tangente na origem (ver fig. 2.10).

Substitui-se agora essas relações nas eqs. (2.5) e (2.6) obtendo-se:

$$\gamma = \frac{\tau}{G_0} \left( 1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-1} \right) \quad (2.7)$$

para a curva-esqueleto, e

$$\gamma - \gamma_i = \frac{\tau - \tau_i}{G_0} \left( 1 + \alpha \left| \frac{\tau - \tau_i}{2\tau_y} \right|^{R-1} \right) \quad (2.8)$$

para os ramos de descarga e recarga. As eqs. (2.7) e (2.8) são as formas das equações de Ramberg-Osgood habitualmente empregadas para representar as relações entre tensão e deformação de corte dos solos.

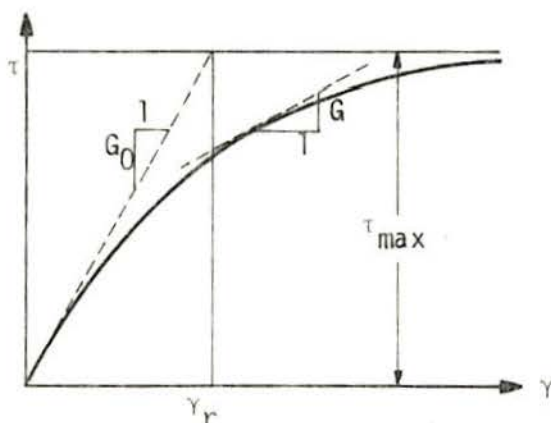


Fig. 2.10 - Definição do módulo de corte tangente

Quando um elemento de solo é submetido a tensões de corte alternantes entre dois extremos, ele descreverá laços de histerese que serão fechados, análogos ao de uma estrutura que apresenta escoamento plástico, se observadas as duas condições de existência descritas por Dobry<sup>6</sup>:

1) Que a tensão total de corte seja apenas uma fração da resistência de corte do solo.

2) Que esse elemento de solo já tenha experimenta-

do um número suficiente de ciclos com um carregamento de mesma magnitude ou maior.

Sendo as duas condições satisfeitas, os laços de histerese serão fechados e não se terá deformações de corte acumulativas, assim sendo, podemos definir cada laço de histerese por dois parâmetros: a) a inclinação da linha que passa pelos seus pontos extremos, ou seja, o módulo de corte equivalente ou secante,  $G_s$  e b) a razão de amortecimento,  $D = A_L/4A_T$ , sendo  $A_L$  a área do laço de histerese e  $A_T$  a área do triângulo indicado na fig. 2.11.

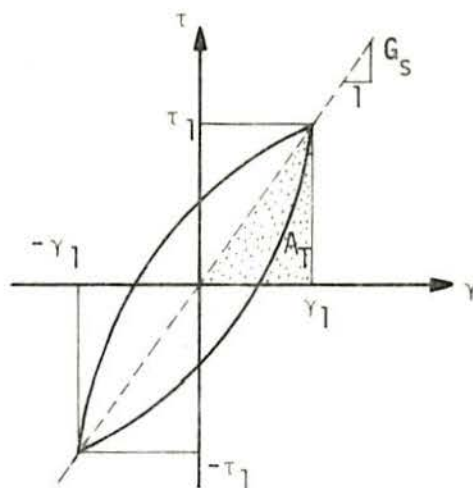


Fig. 2.11 - Definição do módulo de corte secante e do amortecimento

Através do modelo de Ramberg-Osgood é possível obter expressões analíticas para esses dois parâmetros; sendo

$$G_s = \frac{\tau_1}{\gamma_1} = \frac{G_0}{1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-1}} \quad (2.9)$$

obtido pela eq. (2.7) e

$$D = \frac{2}{\pi} \left( \frac{R-1}{R+1} \right) \left( 1 - \frac{G_s}{G_0} \right) \quad (2.10)$$

obtido em função da eq. (2.9).

Uma vez que no Capítulo 3 será utilizada, na determinação da resposta de um estrato de solo excitado dinamicamente, uma análise não-linear, é indispensável que em cada passo do algoritmo empregado se determine o módulo de corte em função da nova deformação calculada. Neste caso é prático utilizar o módulo de corte tangente,  $G$ , definido em cada ponto da curva tensão-deformação como sendo a derivada da tensão em relação à deformação, ou seja,  $G = \partial\tau/\partial\gamma$  (ver fig. 10).

Para o modelo de Ramberg-Osgood é fácil obter uma expressão para  $G$ . Se derivarmos a eq. (2.7) implicitamente em relação a  $\gamma$  teremos:

$$1 = \frac{1}{G_0} \left\{ \frac{\partial\tau}{\partial\gamma} + \alpha \frac{\partial\tau}{\partial\gamma} \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-1} + \alpha (R-1) \frac{\tau}{\tau_y} \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-2} \frac{\partial\tau}{\partial\gamma} \right\}$$

Se o sinal de  $\tau/\tau_y$  for negativo, o da sua derivada em relação a  $\tau$  também o será, logo, é possível colocar a expressão acima em uma forma mais compacta igual a

$$1 = \frac{1}{G_0} \left\{ \frac{\partial\tau}{\partial\gamma} + \alpha \frac{\partial\tau}{\partial\gamma} \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-1} + \alpha (R-1) \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-1} \frac{\partial\tau}{\partial\gamma} \right\}$$

que após ser multiplicada em ambos os lados por  $G_0$  e os termos comuns agrupados resulta:

$$G_0 = \left\{ 1 + \alpha R \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-1} \right\} \frac{\partial\tau}{\partial\gamma}$$

mas  $G = \partial\tau/\partial\gamma$ , logo,

$$G = \frac{G_0}{1 + \alpha R \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{R-1}} \quad (2.11)$$

para a curva-esqueleto. De modo análogo obtêm-se:



$$G = \frac{G_0}{1 + \alpha R \left| \frac{\tau - \tau_j}{2\tau_y} \right|^{R-1}} \quad (2.12)$$

para os ramos de descarga e recarga.

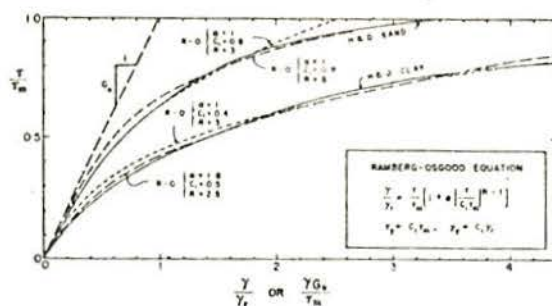


Fig. 2.12 - Comparação das curvas de Ramberg-Osgood (R-0) com as de H-D (Ref. 29)

É importante verificar agora como as expressões de Ramberg-Osgood (R-0) podem ser ajustadas para representar as curvas de tensão-deformação obtidas através das propriedades dos solos ou de experimentos.

A fig. 2.12 mostra as curvas de Hardin-Drnevich (H-D) para areias e argilas saturadas com  $N = 1.000$ , sendo  $N$  o número de repetições do ciclo de tensão, em linha cheia, e as de R-0 apresentadas por Richart (1975), duas para cada uma das curvas de H-D, em linhas pontilhadas. Para a curva de H-D representativa das areias, o parâmetro  $C_1$  foi escolhido como 0,8 (i.e.  $\tau_y = 0,8 \tau_{\max}$ ). Deste modo, para  $\alpha = 1$ , a família de curvas de R-0 passa pelos pontos  $\tau/\tau_{\max} = 0$ ,  $\gamma/\gamma_r = 0$ , e  $\tau/\tau_{\max} = 0,8$ ,  $\gamma/\gamma_r = 0,8 (1 + \alpha) = 1,6$ . Na figura estão representadas as curvas para  $R = 3$  e  $R = 5$ . A curva para  $R = 3$  praticamente coincide com a de H-D para valores menores que  $\gamma/\gamma_r \cong 2,0$ , sendo que a curva R-0 para  $R = 5$  aproxima bem a de H-D para valores acima de  $\gamma/\gamma_r = 1,6$ .

No caso de argilas o mesmo exame pode ser feito, sendo que uma boa aproximação é conseguida usando  $C_1 = 0,5$ ,  $\alpha = 1,8$  e  $R = 2,5$ . Está representada, também, na figura a curva de R-0 de parâmetros  $C_1 = 0,4$ ,  $\alpha = 1,0$  e  $R = 3$ .

Concluindo, as equações de Ramberg-Osgood são suficientemente gerais e podem ser utilizadas satisfatoriamente para aproximar relações constitutivas, quer no caso de estruturas, quer no caso de solos.

Em um grande número de estruturas o modelo de R-O é mais realístico que o elastoplástico ou o bilinear porque a partida da linearidade é contínua e suave, mais de acordo com o comportamento da maioria dos materiais.

Em contrapartida, em virtude da deflexão ser dada em função da força nas equações de R-O, não é possível obter u ma expressão explícita da força em função da deflexão, o que pode causar inconvenientes na apresentação e interpretação dos resultados.

## CAPÍTULO 3

### MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Este capítulo examina o método das características e sua aplicação a um estrato de solo submetido a excitação sísmica. Apresenta-se o fluxograma de um programa de computação, resultado da aplicação do método descrito a um modelo unidimensional, cuja aplicabilidade é posteriormente discutida. Em seguida, efetua-se um estudo de casos, a partir do qual encaminham-se conclusões com respeito à influência do estrato de solo na determinação da resposta sísmica.

#### 3.1 - Antecedentes

O método das características tem sido amplamente utilizado na resolução de problemas de hidrodinâmica e aerodinâmica, sendo que até a metade deste século era empregada principalmente sua forma gráfica.

J. Massau<sup>19</sup>(1900) descreveu as vantagens do uso deste método através de um tratamento gráfico, ou seja, descreveu a integração gráfica de equações a derivadas parciais. Westergaard<sup>37</sup>(1933) propôs sua utilização gráfica na determinação das tensões de corte horizontais desenvolvidas em edifícios, idealizados como vigas de corte com distintos segmentos ao longo da sua altura, através de movimentos horizontais da sua base. O método é útil para alguns edifícios desde que o movimento do solo seja suficientemente simples.

Newmark e Rosenblueth<sup>22</sup>(1971) descreveram o método das características aplicado à propagação unidimensional de ondas em solos e em reservatórios.

A aplicação da forma analítica do método das características a problemas de hidrodinâmica foi proposta por Streeter

e Wylie<sup>34</sup>(1967), e desde então esse procedimento tem sido bastante empregado. Por outro lado, coube a Streeter, Wylie e Richart<sup>35</sup>(1974) a utilização da forma analítica do método das características a problemas de propagação de ondas em solos, inclusive para relações tensão-deformação não-lineares. Esse método pode ser utilizado na obtenção da resposta de vários problemas de propagação de ondas em solos através de modificações relativamente simples do procedimento básico.

Entre os problemas de propagação de ondas em solos que podem ser resolvidos pelo método das características — a baixo custo de computação e através de modificações simples do procedimento básico —, podemos citar: a) propagação unidimensional de ondas de corte em um estrato horizontal não saturado; b) propagação unidimensional de ondas de corte em um estrato horizontal saturado; c) propagação unidimensional de ondas de compressão em um estrato horizontal. Poder-se-ia, ainda, resolver pelo método das características problemas de propagação bidimensional de ondas em um estrato de solo horizontal, sendo entretanto nesse caso as relações entre tensão e deformação admitidas lineares — não se tem ainda uma relação explícita entre tensão e deformação aplicável a estados bidimensionais.

Esse trabalho se preocupa com o caso a) indicado acima, sendo que a propagação da onda de corte se dá no sentido vertical — como já foi referido no Capítulo 2. Passa-se, então, à descrição do método propriamente dito.

### 3.2 - Fundamentos teóricos

Nesta seção examina-se o método das características para sistemas de equações diferenciais hiperbólicas lineares e quase-lineares, de primeira ordem e com duas variáveis independentes. Aplica-se, então, o procedimento obtido a um sistema de equações diferenciais representativo da propagação unidimensional de ondas de corte em mantos flexíveis de solo sob excitação sísmica.

Um sistema de equações diferenciais parciais de

primeira ordem, com  $p$  variáveis independentes  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , para  $n$  funções  $u^1, u^2, \dots, u^n$  procuradas, pode ser escrito na forma:

$$F_i(\vec{x}, \vec{u}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_p}) = 0 \quad (3.2.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

onde  $\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ , e  $\vec{u}^T = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ . É solução do sistema (3.2.1) todo vetor de funções  $\vec{u} = \phi(\vec{x})$ , sempre diferenciável em relação a todas as variáveis de  $\vec{x}$ , e que satisfaça o sistema de equações diferenciais identicamente. Chama-se (3.2.1) de "sistema definido", se  $m = n$ , de "sistema super definido", se  $m > n$ , e de "sistema subdefinido" se  $m < n$ .

Discutem-se aqui somente os "sistemas definidos", limitando-se ainda o desenvolvimento a sistemas lineares e quase-lineares. No caso de  $m = n$  pode-se representar o sistema de equações diferenciais na forma:

$$L[\vec{u}] \equiv \sum_{v=1}^p \underline{A}_v \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_v} - \vec{b} = 0 \quad (3.2.2)$$

onde  $\underline{A}_v$  são matrizes  $n \times n$  e  $\vec{b}$  é um vetor de  $n$  componentes. Chama-se (3.2.2) de:

a) Sistema linear, se os elementos de  $\underline{A}_v$  forem funções de  $\vec{x}$ , e se  $\vec{b}$  tiver a forma  $\underline{A}(\vec{x}) \vec{u} + \vec{c}(\vec{x})$ ;

b) Sistema semilinear, se os elementos das matrizes  $\underline{A}_v$  e as componentes de  $\vec{b}$  forem funções de  $\vec{x}$ , sendo que no mínimo uma componente de  $\vec{b}$  dependa não-linearmente de no mínimo uma das grandezas  $u^1, \dots, u^n$ ;

c) Sistema quase-linear, se os elementos  $a_{ij}^{(v)}$  das matrizes  $\underline{A}_v$  e as componentes do vetor  $\vec{b}$  forem funções de  $\vec{x}$  e  $\vec{u}$ .

Neste ponto abre-se um parêntesis para a apresentação do conceito de diferenciação "interna ou interior" de uma função  $n$ -dimensional em uma superfície  $(n-1)$ -dimensional.

No domínio,  $n$ -dimensional, das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  considera-se uma função  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  com derivadas contínuas. Em um ponto  $P$ , pertencente a esse espaço  $n$ -dimensional, com coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , os números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  representam um vetor  $\vec{a}$ , sendo que

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$$

Através do ponto  $P$ , constrói-se uma linha reta cujos pontos são dados em termos de um parâmetro  $s$  pelas expressões

$$x_1 + a_1 s, x_2 + a_2 s, \dots, x_n + a_n s$$

Deste modo

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

é definido como sendo a derivada da função  $u$  em relação a  $s$ , ou como a derivada de  $u$  na "direção" dada pelo vetor  $\vec{a}$ . De uma maneira geral a expressão

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

representa, em cada ponto, uma diferenciação na direção do vetor  $\vec{a}$ . Se as quantidades  $a_i$  são funções de posição,  $a_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , continuamente diferenciáveis, as direções definidas por  $a_i$  em cada ponto do espaço formam um campo de direções cujas trajetórias são unicamente definidas pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Admite-se, agora, a existência de uma superfície  $(n-1)$ -dimensional  $B: \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  em cuja vizinhança as derivadas da função  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  são contínuas, e que em um ponto

P pertencente a B

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 \neq 0$$

sendo ainda  $\vec{a} \neq 0$  um vetor arbitrário. Considera-se, então, a derivada de u em B na direção dada por  $\vec{a}$  como sendo

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (3.2.3)$$

Se é válida a igualdade

$$a_i = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

o vetor  $\vec{a}$  terá a mesma direção do gradiente de B no ponto P, sendo a eq. (3.2.3) chamada de derivada na "direção normal". Se por outro lado o vetor  $\vec{a}$  é tangente a B no ponto P, e deste modo perpendicular a normal, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2.4)$$

e que  $\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$  é chamada de derivada "tangencial" ou derivada "interna" em B. Utilizando-se as eqs. (3.2.3) e (3.2.4) verifica-se, por exemplo, que as expressões

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

para cada par de índices  $i \neq k$  representam derivadas internas a superfície B.

No caso bidimensional — de interesse neste trabalho, com  $x_1 = z$ ,  $x_2 = t$ ,  $u = u(z, t)$ ,  $B: \phi(z, t) = 0$  —, tem-se que a expressão

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.2.5)$$

é uma derivada interna de  $u$  na curva  $\phi(z,t) = 0$ .

O conceito de derivada interna, aqui apresentado, será utilizado no desenvolvimento do método das características descrito a seguir.

No caso de 2 variáveis independentes,  $p = 2$ ,  $x_1 = z$ ,  $x_2 = t$ , o sistema (3.2.2) toma a forma:

$$L[\vec{u}] \equiv \underline{A}_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \underline{A}_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{b} = 0 \quad (3.2.6)$$

sendo que uma solução qualquer  $\vec{u}(z,t)$ , de (3.2.6), deverá ser substituída em  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  e  $\vec{b}$  no caso de sistemas quase-lineares. Além disso, admite-se que pelo menos uma das matrizes, por exemplo  $\underline{A}_1$ , não seja singular em um determinado ponto  $(z_0, t_0)$ . Assim sendo a eq. (3.2.6) poderá ser escrita como

$$L[\vec{u}] \equiv \underline{I} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \underline{A}_1^{-1} \vec{b} = 0 \quad (3.2.7)$$

Considera-se agora uma curva  $B: \phi(z,t) = 0$  com  $(\partial \phi / \partial z)^2 + (\partial \phi / \partial t)^2 \neq 0$  — e.g.  $\partial \phi / \partial t \neq 0$  — na qual se conhece o valor inicial do vetor  $\vec{u}(z,t)$ . Procura-se então determinar em  $B$  as primeiras derivadas  $\partial \vec{u} / \partial z$  e  $\partial \vec{u} / \partial t$  de modo que  $L[\vec{u}] = 0$  seja satisfeito na sua vizinhança.

Imagina-se que em  $B$  a derivada interna

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

é conhecida. Conseqüentemente, pode-se determinar, com  $\lambda = -(\partial \phi / \partial z) / (\partial \phi / \partial t)$ , a relação entre  $\partial \vec{u} / \partial z$  e  $\partial \vec{u} / \partial t$  como

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \dots$$



onde os pontos significam quantidades conhecidas em B. Substituindo-se essa relação na eq. (3.2.7) resulta

$$L[\vec{u}] \equiv (\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2 - \lambda \underline{I}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \dots = 0$$

Deste modo, uma condição necessária e suficiente para que todas as primeiras derivadas tenham solução única ao longo de B é

$$Q = |\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2 - \lambda \underline{I}| \neq 0$$

com Q denominado determinante característico da eq. (3.2.7). Se  $Q \neq 0$  ao longo das curvas  $\phi = \text{constante}$ , então essas curvas são chamadas de curvas livres. Se, ao contrário,  $\lambda(z, t)$  é a solução real da equação algébrica  $Q = 0$  de ordem n em  $\lambda$ , então as curvas B, definidas pelas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dt}{dz} = \lambda, \text{ ou } Q(z, t, \frac{dt}{dz}) = 0$$

são chamadas de curvas características.

Classifica-se agora o sistema (3.2.6) ou (3.2.7) como:

a) hiperbólico, se  $Q(\lambda) = 0$  tiver exatamente n raízes reais;

b) parabólico, se  $Q(\lambda) = 0$  tiver k,  $1 \leq k \leq n-1$ , raízes reais;

c) elíptico, se  $Q(\lambda) = 0$  não tiver raízes reais.

No caso de sistemas hiperbólicos, de interesse aqui, a matriz  $\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2$  possui n valores próprios reais e diferentes, logo, existirão também n autovetores linearmente independentes sendo, portanto, a matriz  $\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2$  diagonalizável. Seja  $\underline{A}^{-1}$  uma matriz nxn cujas colunas sejam os autovetores de  $\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2$ . Deste modo assegura-se a relação

$$\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2 \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{C}$$

sendo  $\underline{C}$  uma matriz diagonal formada pelos autovalores  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Pōs multiplicando a expressōo acima por  $\underline{A}$ , tem-se

$$\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2 = \underline{A}^{-1} \underline{C} \underline{A} \quad (3.2.8)$$

Com (3.2.8), e admitindo que  $\underline{A} \underline{A}_1^{-1} \vec{b} = \vec{d}$ , a eq. (3.2.7) pode ser escrita na forma normal

$$\underline{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \underline{C} \underline{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{d} = 0 \quad (3.2.9)$$

com  $\underline{A} = (a_{ij})$ ;  $\underline{C} = (\delta_{ij} \lambda_i)$ ;  $\vec{d}^T = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $\delta_{ij}$  = delta de Kronecker. A forma normal em notaçōo matricial se rā:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \frac{\partial u^j}{\partial z} + \lambda_i \frac{\partial u^j}{\partial t} \right) - d_i = 0 \quad (3.2.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Se a matriz  $\underline{A}_2$  nāo for singular pode-se, entāo, es crever o sistema (3.2.7) na forma normal correspondente:

$$\underline{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underline{C} \underline{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} - \vec{d} = 0 \quad (3.2.11)$$

Como foi verificado, sistemas hiperbōlicos sempre poderāo ser substituídos por outros, normalizados, nos quais cada equaçōo contenha diferenciaçōo em apenas uma direçōo característica.

No caso de sistemas lineares ou semi-lineares, sendo  $\underline{A}$  sempre diferenciāvel, o sistema (3.2.6) ou (3.2.7) poderā ser escrito em uma forma normal ainda mais simplificada, se o vetor  $\vec{u}$  ē substituído por  $\vec{w}$  sendo  $\vec{w} = \underline{A} \vec{u}$ . Introduzindo no sistema (3.2.9) as expressōes

$$\underline{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} - \frac{\partial \underline{A}}{\partial z} \vec{u}, \quad \underline{C} \underline{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \underline{C} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \underline{C} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \vec{u}$$

e considerando

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} + \underline{C} \frac{\partial A}{\partial t}\right) \vec{u} = \vec{g} - \vec{d}$$

obtêm-se a forma normal

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial z} + \underline{C} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{g} = 0 \quad (3.2.12)$$

O sistema (3.2.12) poderá ser escrito em uma forma extendida como:

$$\frac{\partial w^i}{\partial z} + \lambda_i \frac{\partial w^i}{\partial t} - g_i = 0 \quad (3.2.13)$$

Deve-se, ainda, observar que os sistemas hiperbólicos podem ser caracterizados de uma maneira mais geral do que através da classificação dada acima, como segue: sempre que a matriz  $\underline{A}_1^{-1} \underline{A}_2$  possuir  $n$  valores próprios reais não necessariamente diferentes e exatamente  $n$  autovetores linearmente independentes o sistema será hiperbólico. Nesse caso também é possível atingir a forma normal (3.2.9) ou (3.2.11).

Uma vez determinadas as propriedades dos sistemas hiperbólicos passa-se, agora, ao exame do problema do valor inicial, de significado especial, pelo fato de que a solução de qualquer sistema de equações diferenciais hiperbólicas com duas variáveis independentes parte dele.

Seja um sistema de equações diferenciais hiperbólicas de primeira ordem, com duas variáveis independentes, dado pela forma normal (3.2.10)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\frac{\partial u^j}{\partial z} + \lambda_i \frac{\partial u^j}{\partial t}\right) - d_i = 0 \quad (3.2.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

com  $u^i(z, \phi(z)) = f_i(z)$ ,  $\alpha \leq z \leq \beta$ , onde  $k:t = \phi(z)$  não é uma curva característica. Conseqüentemente, pelo fato da curva  $k$  não ser tangenciada por nenhuma característica, tem-se que  $|a_{ij}| \neq 0$ .

Examinando as eqs. (3.2.14) vê-se que as expressões entre parêntesis são as derivadas totais da incógnita  $u^j$

em relação a  $z$ , ou seja

$$\frac{du^j}{dz} = \frac{\partial u^j}{\partial z} + \lambda_i \frac{\partial u^j}{\partial t} \quad (3.2.15)$$

em apenas uma direção característica  $\lambda_i = dt/dz$  — como já foi enfatizado anteriormente. Logo, é possível substituir as derivadas totais  $du^j/dz$  por quocientes de diferenças finitas, fato que discute-se a seguir.

Considera-se primeiramente a eq. (3.2.14) como semilinear, e com  $n = 2$ . Faz-se, então, a divisão da parcela da curva  $k$  em um número finito de curvas parciais  $N$ , sendo os pontos divisórios dessas curvas parciais chamados de  $P_v$ ,  $v=0,1,\dots,N$ , e a distância máxima entre dois pontos divisórios  $h$ . Determinam-se, agora, as características  $t = \psi_1^{(v)}(z)$ ,  $t = \psi_2^{(v)}(z)$ , que passam pelos pontos  $P_v$ ,  $v=0,1,\dots,N$ , por integração direta das duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dt}{dz} = \lambda_1(z,t), \quad \frac{dt}{dz} = \lambda_2(z,t) \quad (3.2.16)$$

Se isso não for possível de maneira satisfatória, a solução das eqs. (3.2.16) se dará através de métodos numéricos (Runge-Kutta, por exemplo).

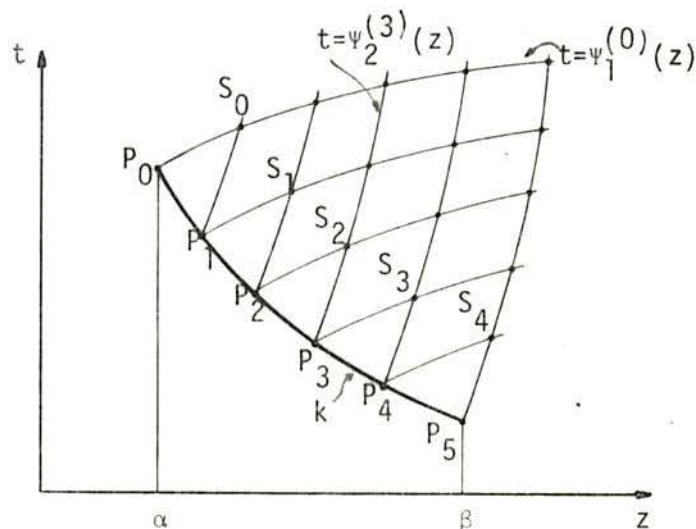


Fig. 3.2.1 - Rede de características para sistemas semilineares

As características assim calculadas formam uma rede que tem

forma semelhante  $\bar{\alpha}$  representada na fig. 3.2.1. A região na qual se procura a solução  $\bar{u}$  é limitada pelas características externas que passam pelos pontos  $P_0$  e  $P_n$ , sendo a solução nessa região  $\bar{u}$  única (veja teorema 1)\* e dependente exclusivamente dos valores iniciais em  $u^j$  em  $k$ .

Seja, agora,  $S_v$  o ponto de intersecção das duas características  $t = \psi_1^{(v)}(z)$  e  $t = \psi_2^{(v)}(z)$ . Substitui-se, então, as derivadas totais da eq. (3.2.14) por quocientes de diferenças finitas, resultando

$$\sum_{j=1}^2 a_{1j}(S_v) \frac{u^j(S_v) - u^j(P_v)}{z(S_v) - z(P_v)} - d_1(S_v) = 0 \quad (3.2.17)$$

$$\sum_{j=1}^2 a_{2j}(S_v) \frac{u^j(S_v) - u^j(P_{v+1})}{z(S_v) - z(P_{v+1})} - d_2(S_v) = 0$$

Os valores  $u^j(P_v)$  e  $u^j(P_{v+1})$  sobre  $k$  são conhecidos, sendo a eq. (3.2.17) um sistema de equações lineares não-homogêneo. Desse modo é possível determinar todos os valores de  $u^j(S_v)$ ,  $v = 0, 1, \dots, N-1$ . Como esses valores podem ser utilizados como novos valores iniciais, o cálculo poderá ser levado adiante até que todos os pontos da região limitada pelas características externas sejam determinados.

Discute-se, agora, o problema do valor inicial em sistemas quase-lineares gerais dados pelas eqs. (3.2.14). Neste caso a rede característica não é inicialmente conhecida, pois ela também depende da solução  $u^j$ , devendo por isso ser substituída por uma aproximação.

Nos pontos  $P_v$  e  $P_{v+1}$  da curva  $k$  os valores das direções características  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são conhecidos, existindo uma direção entre as direções  $\lambda_i(P_v)$  que forma o menor ângulo com a curva  $k$  (medido no sentido anti-horário). Correspondentemente, há uma direção entre as direções  $\lambda_i(P_{v+1})$  que forma o maior ângulo com  $k$  (vide fig. 3.2.2.). Seja  $S_v$  o

\* A unicidade da solução também é dada pelo fato de que em  $k$   $|a_{ij}| \neq 0$ .

ponto de intersecção das retas definidas por essas duas direções extremas  $\lambda_n (P_v)$  e  $\lambda_1 (P_{v+1})$ . Essa numeração das direções características é possível, se é feita uma reenumeração das equações do sistema (3.2.14).

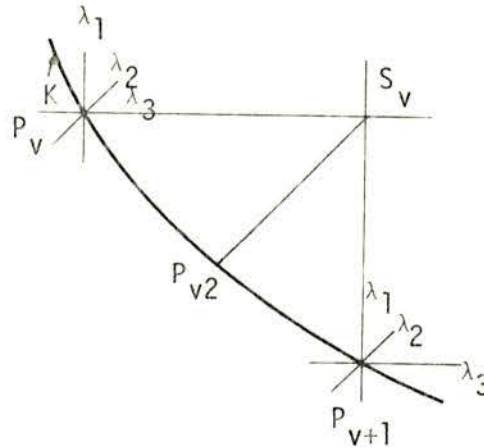


Fig. 3.2.2 - Cálculo de características para sistemas quase-lineares ( $n=3$ )

Substitui-se, então, as características restantes que passem por  $S_v$ , pelas retas com direção  $1/2 (\lambda_j (P_v) + \lambda_j (P_{v+1}))$ ,  $j = 2, 3, \dots, n-1$ , que também passem por  $S_v$ , e cortem a parcela de curva  $k$  nos pontos  $P_{vj}$ ,  $j = 2, 3, \dots, n-1$ .

Fazendo:

$$P_v = P_{v1}, P_{v+1} = P_{vn}$$

$$a_{ij} (P_{v1}) = a_{ij} (z (P_{v1}), t(P_{v1}), u^1 (P_{v1}), \dots, u^n (P_{v1}))$$

e ainda com a definição correspondente de  $d_i (P_{v1})$ , substitui-se a eq. (3.2.14) pelo sistema de equações correspondentes de diferenças finitas, resultando:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (P_{v1}) \frac{u^j (S_v) - u^j (P_{vi})}{z (S_v) - z (P_{vi})} - d_i (P_{v1}) = 0 \quad (3.2.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Sendo os valores  $u^j (P_{vi})$  sobre  $k$  conhecidos, a eq. (3.2.18) representa também um sistema de equações lineares não-homogêneo para as incógnitas  $u^j (S_v)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , as quais po-

derão ser calculadas diretamente, e de maneira única, porque  $|a_{ij}(P_{v1})| \neq 0$ .

Neste método se determina primeiramente todos os pontos  $S_v$ , pela intersecção das retas de coeficiente angular conhecidos, e logo após as aproximações  $u^j(S_v)$ ,  $v=0, 1, \dots, N-1$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ , através do sistema de equações (3.2.18). Da mesma forma que no caso anterior, esses valores podem ser vistos como novos valores iniciais, e o cálculo de características poderá ser levado adiante.

Seria interessante verificar, agora, em que condições um problema de valores iniciais terá solução única. Para isso reproduzem-se abaixo três teoremas<sup>5</sup> através dos quais pode-se deduzir — para uma grande maioria de casos —, que sistemas (3.2.14) terão solução única. Para facilidade de visualização admite-se  $n = 2$ .

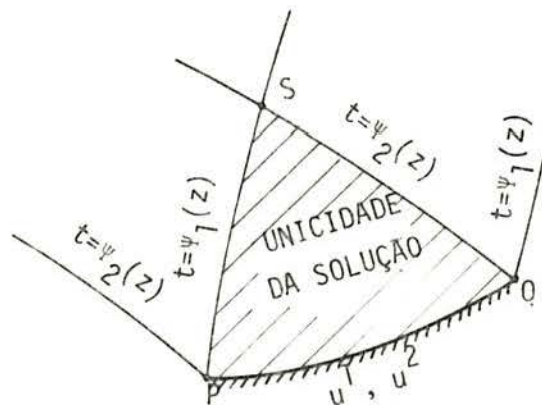


Fig. 3.2.3 - Teorema 1

a) No primeiro caso mostrado pela fig. 3.2.3, PQ é uma curva não-característica de curvatura contínua, na qual os valores de  $u^1$  e  $u^2$  são conhecidos, sendo  $u^1$  e  $u^2$  funções continuamente diferenciáveis em PQ. A solução da eq. (3.2.14) será, então, única na região PQS, contornada pela curva AB e pelas características  $t = \psi_1(z)$  e  $t = \psi_2(z)$  que passam por P e Q, respectivamente.

b) No segundo caso, fig. 3.2.4, PE e PF são duas curvas características que passam por P. Tem-se, então, unicidade da solução na região PESF, aonde ES e FS são característi

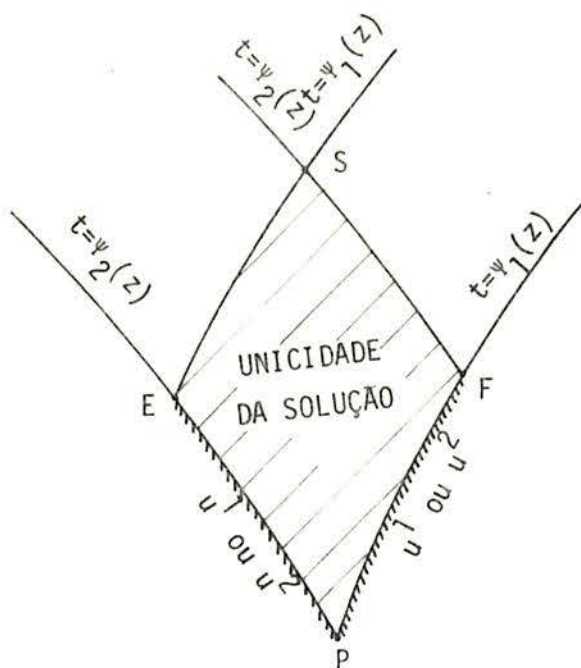


Fig. 3.2.4 - Teorema 2

cas, quando  $u^1$  e  $u^2$  são conhecidos em P, sendo ainda os valores de  $u^1$  ou  $u^2$ , continuamente diferenciáveis, predeterminados ao longo dos arcos PE e PF.

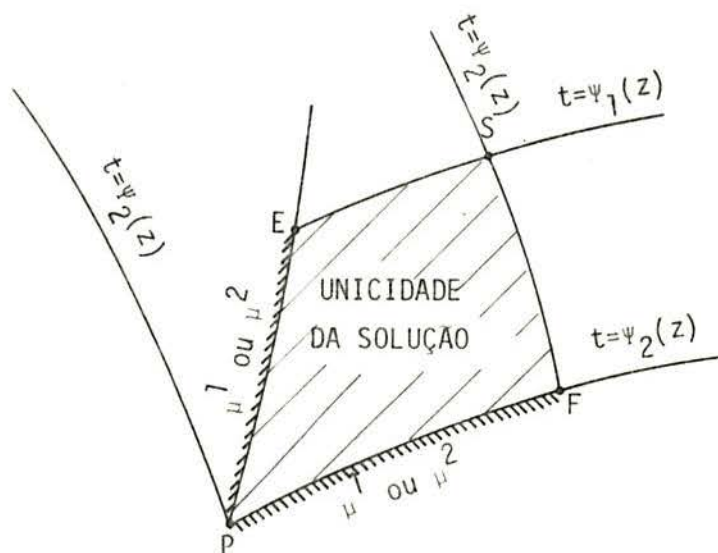


Fig. 3.2.5 - Teorema 3

c) No terceiro caso, fig. 3.2.5, PE é uma curva



não-característica de curvatura constante. A solução é única na região PESF, onde ES e FS são características, quando  $u^1$  e  $u^2$  são conhecidos em P, sendo ainda os valores de  $u^1$  ou  $u^2$ , continuamente diferenciáveis, predeterminados ao longo dos arcos PE e PF.

A convergência do método das características é pouco conhecida, sendo uma das razões para isso a irregularidade das grades características utilizadas. Entretanto, sua convergência pode ser verificada no caso de duas variáveis independentes.

Quando a determinação das curvas características não for o objeto do interesse, pode-se determinar a solução de sistemas hiperbólicos através do chamado "método de diferenças em grades retangulares".

Passa-se, então, ao exame desse método utilizando para isso a forma normal (3.2.11). O problema de valor inicial poderá deste modo ser escrito, após algumas transformações convenientes das variáveis independentes, como:

$$F[\vec{u}] \equiv \underline{A}(z, t, \vec{u}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underline{C}(z, t, \vec{u}) \underline{A}(z, t, \vec{u}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{B}(z, t, \vec{u}) \quad (3.2.19)$$

$$\vec{u}(z, 0) = \vec{F}(z), \quad \alpha \leq z \leq \beta$$

Seja  $\underline{B} = (B_{ij})$  uma matriz  $m \times n$ ,  $m, n \geq 1$ , qualquer — podendo  $\underline{B}$  ser um vetor linha ou coluna. Define-se, então, a norma de  $\underline{B}$  como

$$\|\underline{B}\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |B_{ij}| \quad (3.2.20)$$

Além disso, seja P uma quantidade de pontos quaisquer, e  $\underline{B}(p)$  uma função matricial referente a ela —  $p \in P$ . Coloca-se, então

$$\|\underline{B}\|_{\infty}^P = \sup_{p \in P} \|\underline{B}(p)\|_{\infty} \quad (3.2.21)$$

Define-se, ainda, uma região em forma de trapézio

$$G(\tau, \delta) = \{(z, t) \mid \alpha + \tau t \leq z \leq \beta - \tau t; 0 \leq t \leq \delta; \tau, \delta > 0\}$$

e finalmente uma região de  $n+2$  dimensões –  $(u^1, u^2, \dots, u^n, z, t)$ :

$$G_\Omega(\tau, \delta) = \{(z, t, \vec{v}) / (z, t) \in G(\tau, \delta), \|\vec{v} - \vec{f}_0\|_\infty \leq \Omega\}$$

onde foi colocado  $\vec{f}_0 = \vec{f}(\frac{\alpha + \beta}{2})$ ,  $\vec{v}$  representa o vetor solução.

Supõe-se, sobre o problema de valor inicial (3.2.19), que:

a) Em  $G_\Omega(\tau_0, \delta_0)$  os elementos de  $\underline{A}$ ,  $\underline{C}$  e as componentes de  $\vec{b}$  são sempre  $p$  vezes diferenciáveis,  $p \geq 2$ , em relação a todas as  $n + 2$  variáveis –  $z, t, u^1, u^2, \dots, u^n$ . Além disso, tem-se que  $|\underline{A}| \geq a > 0$ , e  $\|\underline{C}\|_\infty^{G_\Omega(\tau_0, \delta_0)} \leq \tau_1$ .

b) No percurso inicial as componentes de  $\vec{f}(z)$  são sempre  $p$  vezes diferenciáveis.

Tem-se, então, em uma região  $G = G(\tau_1, \delta_1)$ ,  $\delta_1 \leq \delta_0$ , a solução direta  $\vec{u}(z, t)$  do problema de valor inicial (3.2.19), sempre  $p$  vezes diferenciável.

A região, em forma de trapézio, na qual será apresentada a solução será preenchida com uma grade retangular de malhas  $\Delta t = h$ ,  $\Delta z = h/\eta$ , com  $\eta$  constante, sendo a quantidade de pontos na grade chamada de  $G_h$  (fig. 3.2.6).

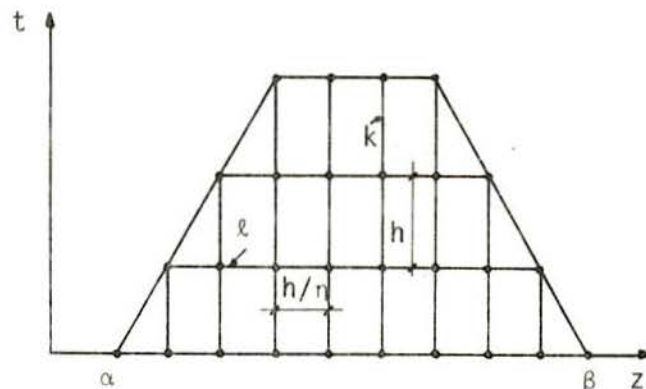


Fig. 3.2.6 - Grades retangulares

Seja  $S_h(\ell h)$  a quantidade de pontos sobre as retas  $t = \ell h$ .

As aproximações de diferenças mais simples, para o problema de valor inicial (3.2.19), poderão ser escritas na forma:

$$\begin{aligned}
 h F_h [\vec{u}_{k,\ell}] &\equiv \underline{A}(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell}) \vec{u}_{k,\ell+1} - \\
 - \sum_{\mu=-r}^{p-r} \underline{S}_\mu(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell}) \underline{A}(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell}) \vec{u}_{k+\mu,\ell} &= \quad (3.2.22) \\
 &= h \vec{b}(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell}), \quad p > 0
 \end{aligned}$$

Onde  $z_k = \alpha + kh/\eta$ ,  $t_\ell = \ell h$ ,  $k, \ell = 0, 1, \dots$ ,  $\vec{u}_{k,\ell}$  é o vetor de aproximação procurado para a solução no ponto  $(z_k, t_\ell)$  da grade, e as  $\underline{S}_\mu$ ,  $\mu = -r, -r+1, \dots, p-r$  são matrizes diagonais.

Deseja-se que o sistema de equações de diferenças (3.2.22) seja aproximado na grade  $G_h$  ao sistema de equações diferenciais (3.2.19), sendo válida para cada solução  $\vec{u}(z, t)$  de (3.2.19), no mínimo duas vezes diferenciável, a condição de consistência

$$\begin{aligned}
 F_h [\vec{u}(z, t)] &= \vec{b}(z, t, \vec{u}(z, t)) + O(h) \quad (3.2.23) \\
 &h \rightarrow 0, (z, t) \in G_h
 \end{aligned}$$

Para isso, como pode ser visto, é suficiente que:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sum_{\mu=-r}^{p-r} \underline{S}_\mu(z, t, \vec{u}) &= \underline{I} \text{ (matriz identidade)} \\
 \text{b) } \sum_{\mu=-r}^{p-r} \mu \underline{S}_\mu(z, t, \vec{u}) &= -\eta \underline{c}(z, t, \vec{u})
 \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Como as condições (3.2.24) são válidas unicamente para as matrizes diagonais  $\underline{S}_\mu$ , será fácil elaborar uma aproximação de diferenças (3.2.22). Supõe-se que os valores  $\vec{u}_{k,0}$  sejam dados no percurso inicial, como  $\vec{u}_{k,0} = \vec{u}(z_k, 0) + \vec{\epsilon}(z_k, 0)$ , com norma suficientemente pequena de  $\|\vec{\epsilon}(z_k, 0)\|_\infty \leq \epsilon$ .

Além disso, para cada  $h$ ,  $0 \leq h \leq h_0$ , existirá uma grade parcial  $B_h \subset G_h$  onde, para todo par  $(z_k, t_\ell) \in B_h$ , será assegurada a inequação  $\|\vec{u}_{k,\ell} - \vec{f}_0\|_\infty < \Omega$ , sendo, portanto,  $|\underline{A}(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell})| \neq 0$ . Logo, é possível a solução direta da eq. (3.2.22) para os valores  $u_{k,\ell+1}$ ,  $\ell = 0, 1, \dots$ , ficando, assim, apresentado o método de diferenças em grades retangulares para a solução numérica do problema de valor inicial (3.2.19).

No caso de cálculos convergentes pode-se verificar a existência de  $B_h$ . Mais exatamente existirá, então, uma região constante  $B \subset G$ , sendo  $B_h = B \cap G_h$  válida para todos os  $h$ ,  $0 < h \leq h_0$ . No cálculo prático, porém, a determinação de  $B$  será muito complexa. Via de regra, no entanto, o cálculo poderá ser levado adiante enquanto  $|\underline{A}(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell})|$  não for muito pequeno.

Apresenta-se, agora, dois métodos simples, mas satisfatoriamente provados de forma explícita, para as aproximações de diferenças dadas por (3.2.22).

Seja a matriz diagonal  $\underline{C}$  escrita como a soma de duas matrizes  $\underline{C}^+$  e  $\underline{C}^-$ :

$$\underline{C}(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell}) = \underline{C}^+(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell}) + \underline{C}^-(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell})$$

Onde  $\underline{C}^+$  contém apenas os elementos positivos de  $\underline{C}$  e  $\underline{C}^-$  apenas os elementos negativos. Colocando-se, então,

$$\underline{S}_{-1} = \eta \underline{C}^+, \quad \underline{S}_0 = \underline{I} - \eta \underline{C}^+ + \eta \underline{C}^-, \quad \underline{S}_1 = -\eta \underline{C}^-, \quad \underline{S}_\mu \equiv 0$$

$\mu \neq -1, 0, 1$

determina-se que:

$$\sum_{\mu=-1}^1 \underline{S}_\mu = \underline{I}, \quad \sum_{\mu=-1}^1 \mu \underline{S}_\mu = -\eta \underline{C}^+ - \eta \underline{C}^- = -\eta \underline{C}$$

Sendo, portanto, as condições de consistência (3.2.24) satisfeitas. Se for escrito resumidamente  $\underline{A}_{k,\ell}$  em vez de  $\underline{A}(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell})$ , definindo correspondentemente  $\underline{C}_{k,\ell}^+$ ,  $\underline{C}_{k,\ell}^-$ ,  $\vec{b}_{k,\ell}$ , o sistema (3.2.22), em forma já resolvida, será:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{k,\ell+1} &= \eta \underline{A}_{k,\ell}^{-1} \underline{C}_{k,\ell}^+ \underline{A}_{k,\ell} \vec{u}_{k-1,\ell} + \\ &+ \{ \underline{I} - \eta \underline{A}_{k,\ell}^{-1} (\underline{C}_{k,\ell}^+ - \underline{C}_{k,\ell}^-) \underline{A}_{k,\ell} \} \vec{u}_{k,\ell} - \\ &- \eta \underline{A}_{k,\ell}^{-1} \underline{C}_{k,\ell}^- \underline{A}_{k,\ell} \vec{u}_{k+1,\ell} + h \underline{A}_{k,\ell}^{-1} \vec{b}_{k,\ell} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Pode-se, também, chegar às eqs. (3.2.25) substituindo diretamente  $\partial \vec{u} / \partial t$  e  $\partial \vec{u} / \partial z$  por quocientes de diferenças correspondentes. Em notação não-matricial o sistema (3.2.19) tem a forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \frac{\partial u^j}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u^j}{\partial z} \right) = b_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Nas equações acima substitui-se:

$$\frac{\partial u^j(z_k, t_\ell)}{\partial t} \text{ por } \frac{u_{k,\ell+1}^j - u_{k,\ell}^j}{h}$$

e

$$\frac{\partial u^j(z_k, t_\ell)}{\partial z} \text{ por } \begin{cases} \frac{u_{k,\ell}^j - u_{k-1,\ell}^j}{h/\eta} & \text{se } \lambda_i(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell}) > 0 \\ \frac{u_{k+1,\ell}^j - u_{k,\ell}^j}{h/\eta} & \text{se } \lambda_i(z_k, t_\ell, \vec{u}_{k,\ell}) \leq 0 \end{cases}$$

resultando, então, o sistema (3.2.25).

Determina-se o segundo método para as aproximações de diferenças em grades retangulares fazendo:

$$\underline{S}_{-1} = \frac{1}{2} (\underline{I} + \eta \underline{C}); \quad \underline{S}_1 = \frac{1}{2} (\underline{I} - \eta \underline{C}); \quad \underline{S}_\mu \equiv 0 \quad \mu \neq -1, 1$$

Como pode-se ver, as condições de consistência (3.2.24) estão, também, satisfeitas neste caso. As equações diferenciais (3.2.22) serão, então:

$$\vec{u}_{k,\ell+1} = \frac{1}{2} \{ \underline{I} + \eta \underline{A}_{k,\ell}^{-1} \underline{C}_{k,\ell} \underline{A}_{k,\ell} \} \vec{u}_{k-1,\ell} +$$

$$(3.2.26)$$

$$+ \frac{1}{2} \{ \underline{I} - \eta \underline{A}_{k,\ell}^{-1} \underline{C}_{k,\ell} \underline{A}_{k,\ell} \} \vec{u}_{k+1,\ell} + h \underline{A}_{k,\ell}^{-1} \vec{b}_{k,\ell}$$

Pode-se chegar, também, a essas equações substituindo-se dire-

tamente as derivadas por quocientes de diferenças correspondentes, como segue:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(z_k, t_\ell) \text{ por } \frac{\vec{u}_{k, \ell+1} - \frac{1}{2}(\vec{u}_{k+1, \ell} + \vec{u}_{k-1, \ell})}{h}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}(z_k, t_\ell) \text{ por } \frac{\vec{u}_{k+1, \ell} - \vec{u}_{k-1, \ell}}{2h/\eta}$$

Se todas as matrizes diagonais  $S_\mu$ ,  $\mu = -r, \dots, p-r$ , s $\tilde{o}$  possu $\tilde{i}$ rem elementos positivos, ent $\tilde{a}$ o (3.2.22)  $\tilde{e}$  chamado de "aproxima $\tilde{c}$ o de diferen $\tilde{c}$ as do tipo positivo". Pode-se verificar que sempre se conseguir $\tilde{a}$  c $\tilde{a}$ lculos convergentes por essas aproxima $\tilde{c}$ oes de diferen $\tilde{c}$ as. Mais exatamente vale o princ $\tilde{i}$ pio\*: se a aproxima $\tilde{c}$ o de diferen $\tilde{c}$ as (3.2.22) for do tipo positivo, e se as condi $\tilde{c}$ oes de consist $\tilde{e}$ ncia (3.2.24) s $\tilde{a}$ o satisfeitas, ent $\tilde{a}$ o, e xistir $\tilde{a}$  uma regi $\tilde{a}$ o constante DCG na qual  $\tilde{e}$  v $\tilde{a}$ lida, para todos os pares  $(z_k, t_\ell) \in D$  e para todos os  $h$ ,  $0 < h \leq h_0$ , a inequa $\tilde{c}$ o

$$\|\vec{u}_{k, \ell} - \vec{u}(z_k, t_\ell)\|_\infty \leq kh$$

onde  $k$   $\tilde{e}$  uma constante independente de  $h$ .

Verifica-se da $\tilde{i}$  que quando  $h \rightarrow 0$  a converg $\tilde{e}$ ncia  $\tilde{e}$  assegurada.

A regi $\tilde{a}$ o  $D$  definida no princ $\tilde{i}$ pio acima pode, em alguns casos, ser muito pequena. No entanto, se os elementos de  $A$ ,  $C$  e os componentes de  $\vec{b}$  e  $\vec{f}$  do problema de valor inicial (3.2.22) forem sempre diferenci $\tilde{a}$ veis, no m $\tilde{i}$ nimo tr $\tilde{e}$ s vezes, em rela $\tilde{c}$ o a todas as vari $\tilde{a}$ veis, pode-se verificar que  $D$  s $\tilde{o}$   $\tilde{e}$  minimamente menor que a regi $\tilde{a}$ o  $B$  referida acima.

As aproxima $\tilde{c}$ oes (3.2.25) e (3.2.26) ser $\tilde{a}$ o do tipo positivo para  $\eta \|\underline{C}\|_\infty \leq 1$ . Como se tinha suposto que  $\|\underline{C}\|_\infty^{G_\Omega(\tau_0, \delta_0)} \leq \tau_1$ , v $\tilde{e}$ -se que essas aproxima $\tilde{c}$ oes ser $\tilde{a}$ o seguramente convergentes para:

\* Para a prova do princ $\tilde{i}$ pio veja ref. 31.

$$\eta = \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq \frac{1}{\tau_1} \quad (3.2.27)$$

Muitas vezes é conveniente não manter a relação  $\eta = \Delta t/\Delta z$  constante por todo o cálculo, mas sim escolhê-la de acordo com cada camada de grade. Além disso, só é possível estimar, a priori, o máximo valor de  $\|C\|_\infty$  sobre toda a grade em casos raros. Já é suficiente para a convergência — por exemplo do método dado por (3.2.25) ou (3.2.26) — se o método for do tipo positivo em cada passo de cálculo. Por isso é suficiente para o cálculo dos valores sobre a linha  $t = (\ell+1)h$ ,  $\ell = 0, 1, \dots$ , escolher a razão  $\eta$  de modo que:

$$\max_k \{ \eta \|C_{k,\ell}\|_\infty \} \leq 1$$

Obtêm-se, então, uma grade retangular com espaços de malhas variáveis na direção  $t$ .

Para todos os cálculos (3.2.22) do tipo positivo que satisfaçam (3.2.24) será válida a relação (3.2.23). Então, cada solução duas vezes sempre diferenciável de (3.2.19) satisfaz a equação de diferenças (3.2.22) com um erro da ordem de  $h$ .

Uma vez apresentados alguns procedimentos do método das características\* para a solução de equações diferenciais hiperbólicas de primeira ordem com duas variáveis independentes passa-se, agora, a sua aplicação em um sistema de duas equações diferenciais quase-lineares, representativo do comportamento de mantos flexíveis de solo excitados dinamicamente pela propagação vertical de ondas de corte.

Neste caso o problema poderá ser considerado unidimensional, sendo que as tensões de corte no estrato de solo são mantidas através de movimentos horizontais impostos na base do estrato.

Na fig. 3.2.7 está representada a deformação no plano  $x, z$ , que sofre um elemento de solo quando excitado por ondas de corte definidas acima. Na direção  $z$  os deslocamentos

---

\* Para um estudo mais completo consultar refs. 4, 5, 31.

w são considerados nulos, de modo que sō teremos deslocamentos  $u$  na direçāo  $x$ . Entāo a deformaçāo de corte  $\gamma$  ē igual a  $\partial u / \partial z$  e a velocidade  $v$  ē dada por  $\partial u / \partial t$ .

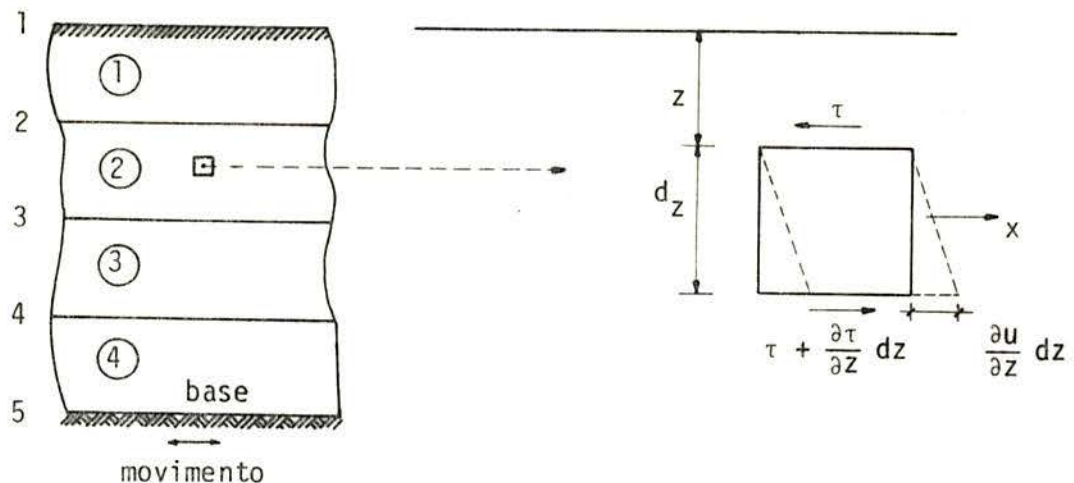


Fig. 3.2.7 - Modelo unidimensional de propagação de ondas de corte

Sob essas condições a equaçāo de equilībrio serā:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial z} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (3.2.28)$$

onde  $\rho$  ē a densidade de massa do solo.

A relaçāo dināmica entre tensāo e deformaçāo para um material viscoelāstico pode ser expressa por<sup>17</sup>

$$\tau = G \gamma + \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} = G \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \quad (3.2.29)$$

na qual  $\mu$  ē o coeficiente de viscosidade. Derivando a expressāo (3.2.29) em relaçāo ao tempo pode-se colocā-la em termos da velocidade  $v$  como

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} = G \frac{\partial v}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \quad (3.2.30)$$

onde o mōdulo de corte tangente  $G$ , para deformaçōes estāticas e baixa freqūēncia ē definido como  $\partial \tau / \partial \gamma$ , sendo obtido, para o



modelo de Ramberg-Osgood, pelas eqs. (2.11) ou (2.12).

O segundo termo da eq. (3.2.29) contém o termo viscoelástico,  $\mu$ , que na maioria dos casos é pequeno e pode ser desprezado. Se no entanto deseja-se considerar o solo como um modelo viscoelástico, esse termo poderá ser representado por uma aproximação em diferenças finitas como

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} = \mu \left\{ \frac{(\frac{\partial v}{\partial z})_t - (\frac{\partial v}{\partial z})_{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\} \quad (3.2.31)$$

onde se omitiu o sub-índice  $t$  do primeiro termo. Substituindo (3.2.31) em (3.2.30) obtêm-se:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \left( G + \frac{\mu}{\Delta t} \right) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\mu}{\Delta t} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{t-\Delta t} = 0 \quad (3.2.32)$$

Tem-se, então, um sistema de 2 equações diferenciais (3.2.28) e (3.2.32), no qual aplica-se, agora, o método das características.

Colocando as equações acima na forma (3.2.6) resulta:

$$\underline{A}_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \underline{A}_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{b} = 0$$

na qual

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(G + \frac{\mu}{\Delta t}) \end{bmatrix} \quad \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\rho \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{Bmatrix} \tau \\ v \end{Bmatrix}$$

Como  $|\underline{A}_2| \neq 0$ , o sistema acima poderá ser colocado na forma normal (3.2.11), se ele for hiperbólico. Procura-se, então, os valores próprios de  $\underline{A}_2^{-1} \underline{A}_1$ , sendo esses valores determinados pela equação algébrica em  $\lambda$ ,

$$Q(\lambda) = |\underline{A}_2^{-1} \underline{A}_1 - \lambda \underline{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -(G + \frac{\mu}{\Delta t}) \\ -1/\rho & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \left( \frac{G}{\rho} + \frac{\mu}{\rho \Delta t} \right) = 0$$

como

$$\lambda = \frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{G}{\rho} + \frac{\mu}{\rho \Delta t}} = \pm v_s \quad (3.2.33)$$

onde  $v_s$  representa a velocidade de propagação da onda de corte no solo. O fato de  $\lambda$  possuir dois valores reais distintos indica o caráter hiperbólico das eqs. (3.2.28) e (3.2.32), sendo, assim, possível a forma normal (3.2.11) reescrita abaixo:

$$\underline{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underline{C} \underline{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} - \vec{d} = 0$$

na qual  $\vec{d} = \underline{A} \underline{A}_2^{-1} \vec{b}$ , e  $\underline{A}^{-1}$  é formada pelos autovetores de  $\underline{A}_2^{-1} \underline{A}_1$ . Conseqüentemente tem-se que:

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ \frac{1}{2\rho v_s} & \frac{1}{2\rho v_s} \end{bmatrix}; \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho v_s \\ 1 & \rho v_s \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$-\vec{d} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\Delta t} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{t-\Delta t} \\ \frac{\mu}{\Delta t} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{t-\Delta t} \end{bmatrix}$$

O sistema de equações diferenciais acima poderá ser resolvido de forma satisfatória, e mais cômoda, se o mesmo for aproximado a um sistema de equações de diferenças em uma grade retangular. Considera-se, portanto, a fig. 3.2.8.

Aplica-se, então, ao sistema de equações na forma normal (3.2.11) o método do tipo positivo descrito por (3.2.26), mas obtido de uma maneira diferente, vista a seguir. O sistema (3.2.11) posto na sua forma estendida será escrito como

$$\left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) - \rho v_s \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{\Delta t} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{t-\Delta t} = 0 \quad (3.2.34)$$

$$\left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) + \rho v_s \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{\Delta t} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{t-\Delta t} = 0 \quad (3.2.35)$$

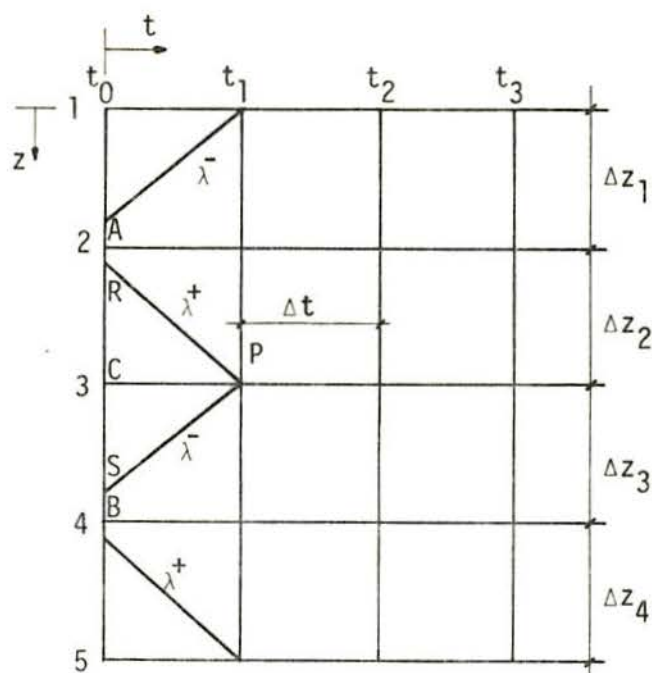


Fig. 3.2.8 - Grade retangular para quatro camadas de solo

onde as expressões entre parêntesis são as derivadas totais em apenas uma direção característica, ou seja, tem-se que, na eq. (3.2.34) por exemplo:

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial z}\right) = \frac{d\tau}{dt}, \text{ e } \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{dv}{dt}$$

na direção característica  $\frac{dz}{dt} = \lambda_1$ . Logo, as eqs. (3.2.34) e (3.2.35) são transformadas em quatro equações diferenciais ordinárias escritas abaixo como:

$$(\lambda^+); \frac{d\tau}{dt} - \rho v_s \frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{\Delta t} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{t-\Delta t} = 0 \quad (3.2.36)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_s \quad (3.2.37)$$

$$(\lambda^-); \frac{d\tau}{dt} + \rho v_s \frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{\Delta t} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{t-\Delta t} = 0 \quad (3.2.38)$$

$$\frac{dz}{dt} = -v_s \quad (3.2.39)$$

A eq. (3.2.36) é válida apenas quando a eq. (3.2.37) é satisfeita, o mesmo acontecendo com as eqs. (3.2.38) e (3.2.39).

A solução para as equações  $\lambda^+$  e  $\lambda^-$  pode ser obtida após elas terem sido aproximadas por diferenças finitas. Escolhendo um intervalo de tempo  $\Delta t$  conveniente, e observando a fig. 3.2.8, as aproximações em diferenças finitas se reduzem a

$$(\lambda^+) \tau_P - \tau_R - \rho v_S (v_P - v_R) + \frac{\mu}{2\Delta z} (v_B - v_A) = 0 \quad (3.2.40)$$

e

$$(\lambda^-) \tau_P - \tau_S + \rho v_S (v_P - v_S) + \frac{\mu}{2\Delta z} (v_B - v_A) = 0 \quad (3.2.41)$$

sendo os valores das variáveis nos pontos R, S, determinados por interpolação linear, como será visto adiante.

A convergência do método se dará se a eq. (3.2.27) for satisfeita, ou seja, se  $\Delta t/\Delta z \leq 1/\tau_1$ . Sendo no caso  $\tau_1 = v_{s_{\max}}$ , a condição de convergência se reduz a  $\Delta z \geq v_{s_{\max}} \Delta t$ . Como para os solos a relação entre tensão e deformação de corte é do tipo suave — podendo ser representada pelas eqs. (2.7) e (2.8) —, tem-se que a máxima velocidade de propagação da onda de corte,  $v_{s_{\max}}$ , se dará no início do movimento quando  $G = G_0$ . Assim sendo, após a escolha de um intervalo de tempo adequado, a divisão do estrato de solo em camadas será dada por

$$(\Delta z)_i \geq \left( \sqrt{\frac{(G_0)_i}{\rho_i} + \frac{\mu_i}{\rho_i \Delta t}} \right) \Delta t \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.42)$$

onde N representa o número de camadas. Essa condição assegura que os pontos R e S (por exemplo) das linhas características que passam por P (vide fig. 3.2.8) estão localizados dentro do intervalo de A a B.

Embora  $G_0$  varie com a altura, ele é considerado constante dentro de cada camada i, sendo usado o valor de  $G_0$  no meio da camada. Geralmente, uma ou mais camadas,  $\Delta z$ , ocorrem em um dado estrato, e para estratos com diferentes valores de  $G_0$ ,  $\rho$  e  $\mu$  as camadas irão variar de acordo com a eq. (3.2.42).

A solução pode ser acompanhada pelo diagrama da fig. 3.2.8. As tensões de corte e as velocidades no instante inicial  $t = 0$  são admitidas conhecidas e através desses valores pode-se determinar as tensões e velocidades no instante  $t = \Delta t$ , pelas eqs. (3.2.40) e (3.2.41) — a solução neste caso será única (veja teorema 1). Se a solução é desejada, por exemplo, no ponto  $P$  (ver fig. 3.2.8), deve-se calcular  $G$ , na camada  $\Delta z_2$ , através das eqs. (2.11) ou (2.12) se houver descarga, baseado no valor médio da tensão de corte,  $0,5(\tau_A + \tau_C)$ . Então,  $(v_s)_2$  é determinado pela eq. (3.2.33). De maneira análoga determina-se a velocidade  $(v_s)_3$  para a camada  $\Delta z_3$ . Após os valores de  $v_s$  terem sido determinados para as duas camadas, calculam-se os valores de  $v_R$ ,  $v_S$ ,  $\tau_R$ ,  $\tau_S$  pelas fórmulas de interpolação linear dadas abaixo:

$$v_R = v_C - \frac{\Delta t}{\Delta z_2} (v_s)_2 (v_C - v_A) \quad (3.2.43)$$

$$\tau_R = \tau_C - \frac{\Delta t}{\Delta z_2} (v_s)_2 (\tau_C - \tau_A) \quad (3.2.44)$$

$$v_S = v_C - \frac{\Delta t}{\Delta z_3} (v_s)_3 (v_C - v_B) \quad (3.2.45)$$

$$\tau_S = \tau_C - \frac{\Delta t}{\Delta z_3} (v_s)_3 (\tau_C - \tau_B) \quad (3.2.46)$$

Introduzindo esses valores nas eqs. (3.2.40) e (3.2.41) determina-se a solução para  $\tau_P$  e  $v_P$ .

Na superfície do solo  $\tau_P$  é zero e a velocidade  $v_P$  é obtida pela eq. (3.2.41) após  $(v_s)_1$ ,  $\tau_S$  e  $v_S$  terem sido determinados.

Na base do estrato a velocidade  $v_P$  é igual à velocidade da excitação, sendo  $\tau_P$  obtido pela eq. (3.2.40) após terem sido determinados  $(v_s)_n$ ,  $\tau_R$  e  $v_R$ .

O procedimento descrito acima foi programado na linguagem ALGOL, sendo seu diagrama de blocos dado a seguir.

### 3.3 - Programa de computação

Descreve-se, aqui, o funcionamento geral do programa INFLUSOLO\*, composto de um programa principal e de três procedures, utilizado para determinar quantitativamente a influência de mantos flexíveis no espectro de resposta sísmica.

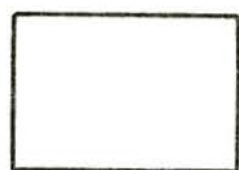
O programa principal, além de comandar as procedures ESPECTRO e CARACTERISTICA, tem ainda a função de: a) ler e imprimir as variáveis globais — como, por exemplo, intervalo de tempo, duração da excitação, número de camadas de solo, etc., utilizando-as no dimensionamento dos arranjos globais; b) ler e calcular a excitação dependendo da variável inteira EXC. As procedures ESPECTRO e CARACTERISTICA são executadas após os itens a) e b) terem sido determinados. A chamada da procedure ESPECTRO é ainda função do número de espectros a determinar, sendo que cada espectro depende de uma razão de amortecimento. O procedimento resumido acima pode ser observado pelo diagrama de blocos da fig. 3.3.2, sendo a convenção dos blocos diagramas dada pela fig. 3.3.1.

A procedure ESPECTRO determina o espectro de resposta sísmica com base em um dado registro de acelerações, calculando numericamente a integral de convolução para vários períodos naturais e para cada razão de amortecimento dada pelo programa principal — a procedure ESPECTRO é executada uma vez para cada razão de amortecimento (veja fig. 3.3.2). Os espectros de deslocamentos relativos, velocidade e pseudovelocidade relativa, aceleração absoluta e pseudo-aceleração absoluta calculados são listados para períodos naturais variando de 0,0125 segundos a 2,0 segundos. O programa também imprime, se for do interesse, as respectivas histórias do movimento para um dado período natural e razão de amortecimento durante toda a duração da excitação. A fig. 3.3.3 mostra o diagrama de blocos da procedure apresentada acima.

A procedure CARACTERISTICA é uma aplicação do método das características para calcular o comportamento unidimensional de estratos de solo excitados dinamicamente pela propa-

---

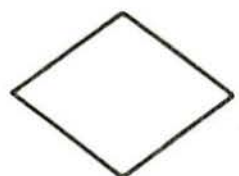
\* Para maiores detalhes, consultar o programa INFLUSOLO<sup>15</sup>.



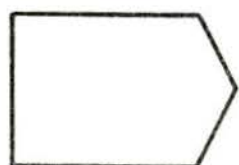
Indica a execução de um comando



Indica entrada ou saída de informação



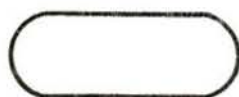
Indica um teste de decisão a ser realizado



Indica uma iteração



Indica chamada de procedures



Indica início ou fim



Indica comando case

Fig. 3.3.1 - Convenção dos blocos diagrama

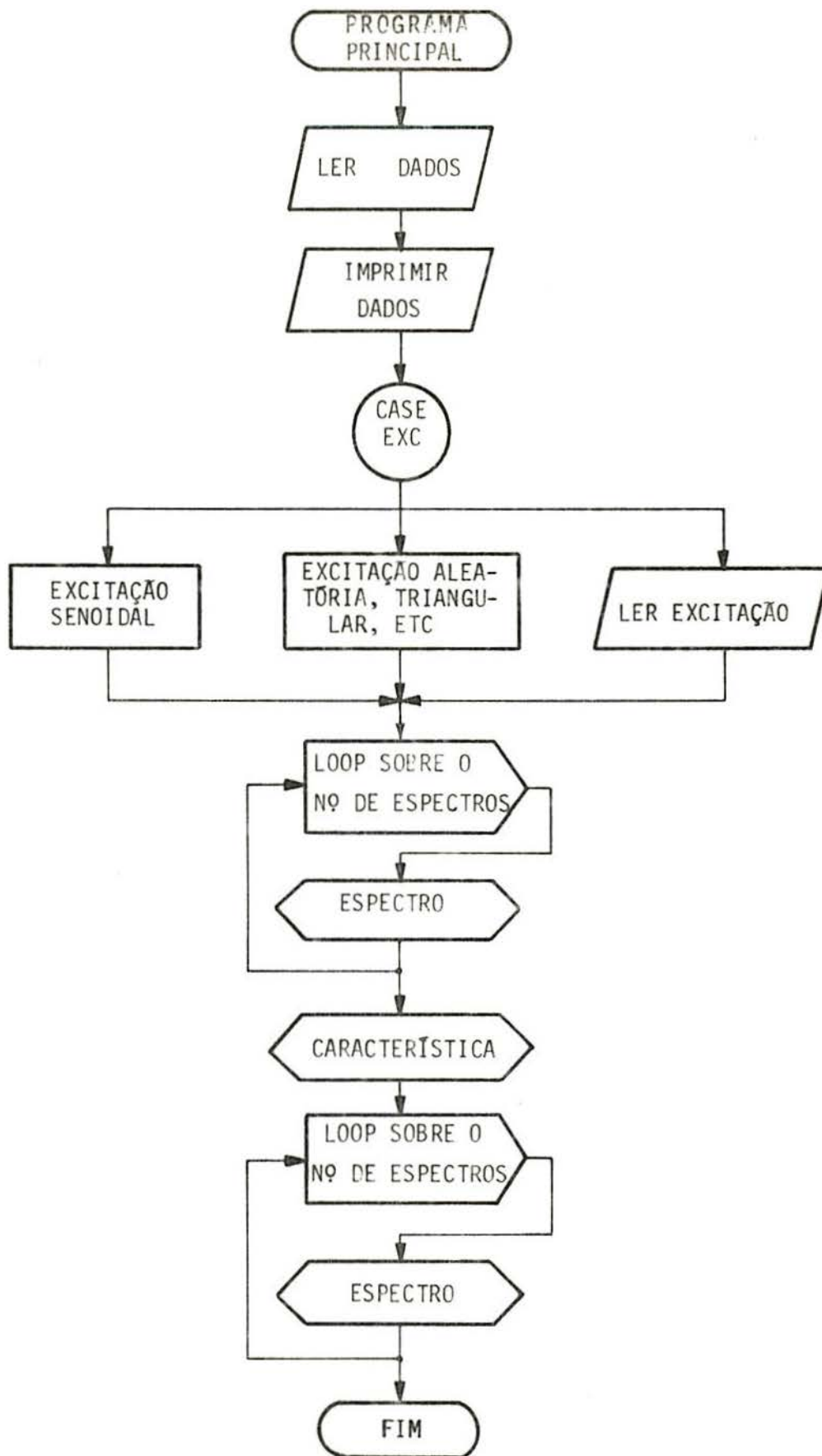


Figura 3.3.2 - Diagrama de blocos do programa principal



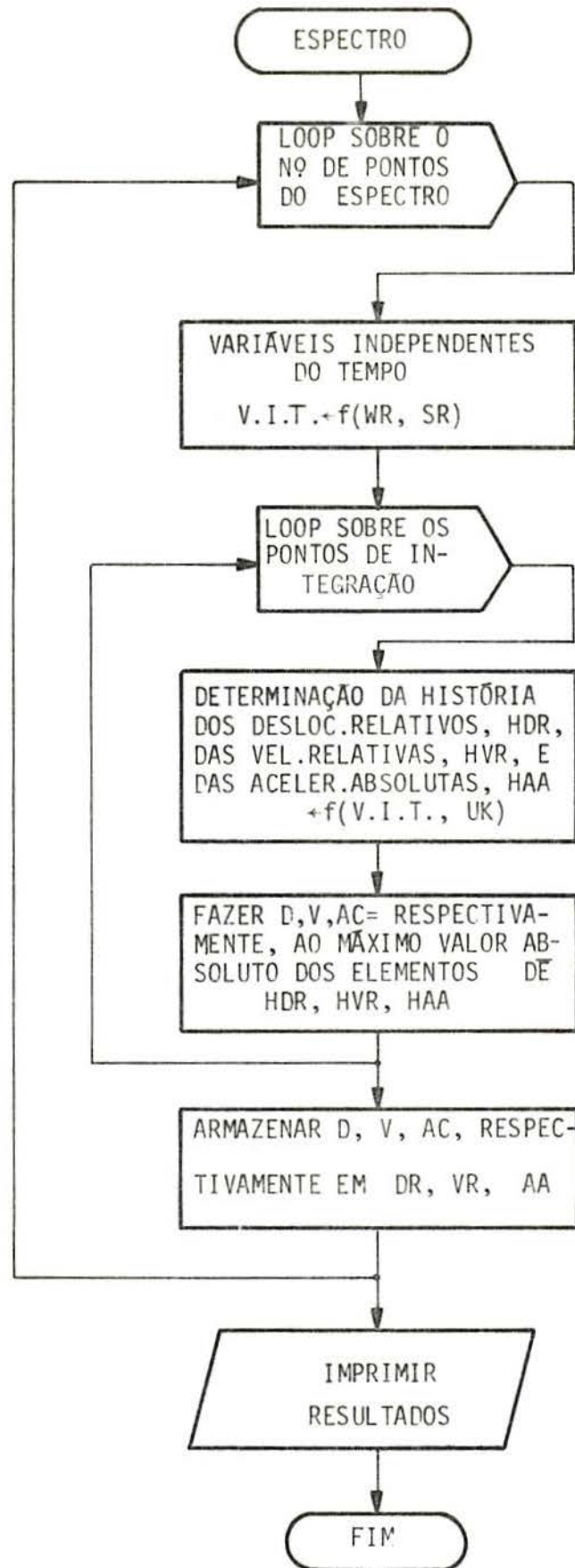
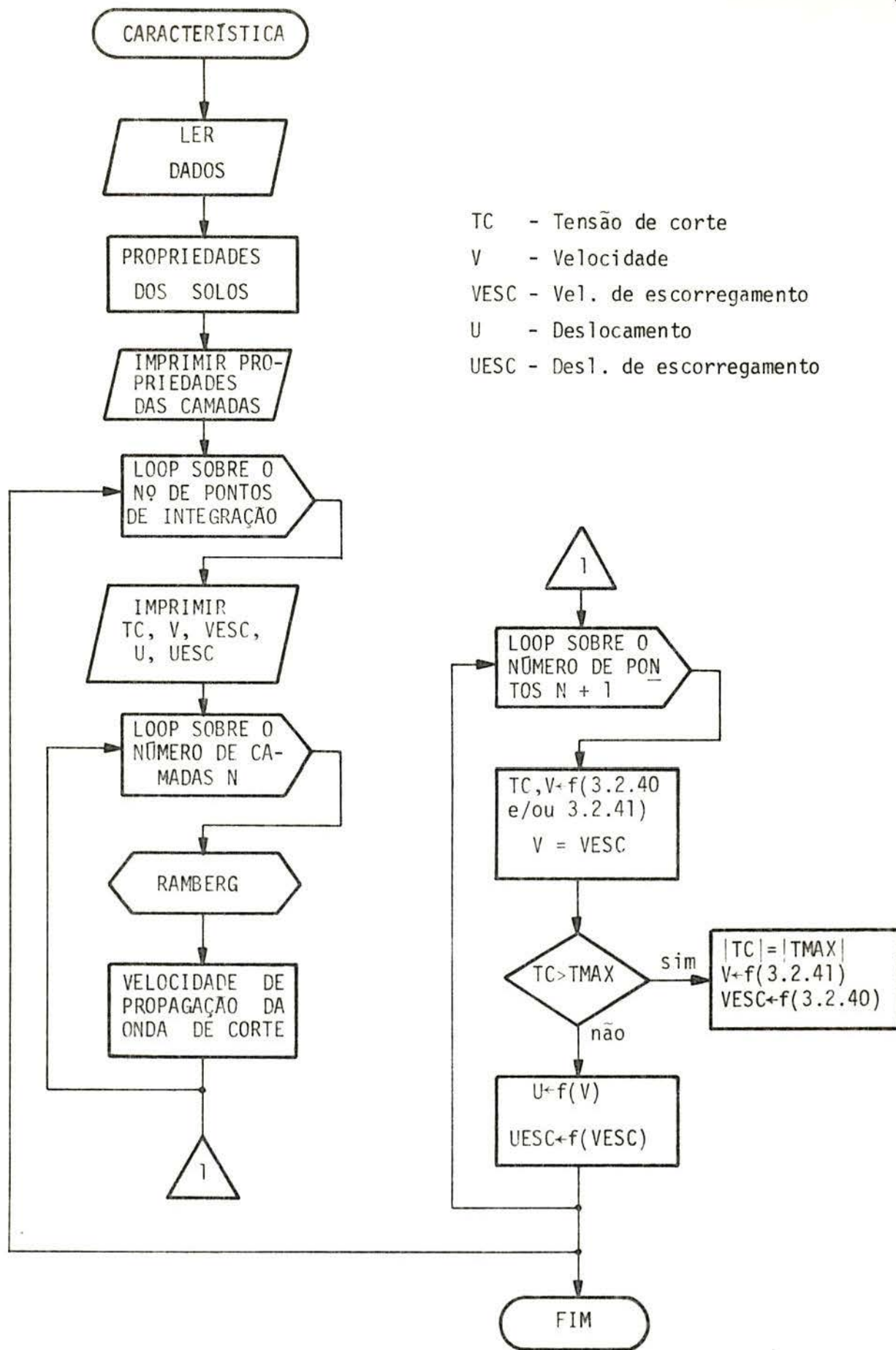


Fig. 3.3.3 - Diagrama de blocos da procedure ESPECTRO



TC - Tensão de corte  
 V - Velocidade  
 VESC - Vel. de escorregamento  
 U - Deslocamento  
 UESC - Desl. de escorregamento

Fig. 3.3.4 - Diagrama de blocos da procedure CARACTERISTICA

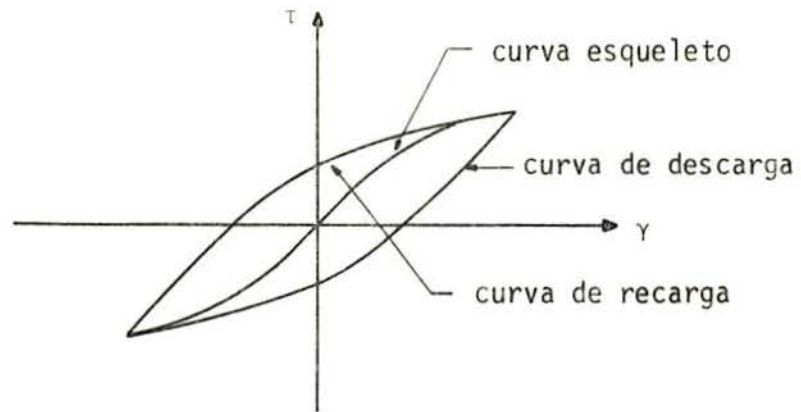


Fig. 3.3.5 - Laço de histerese genérico

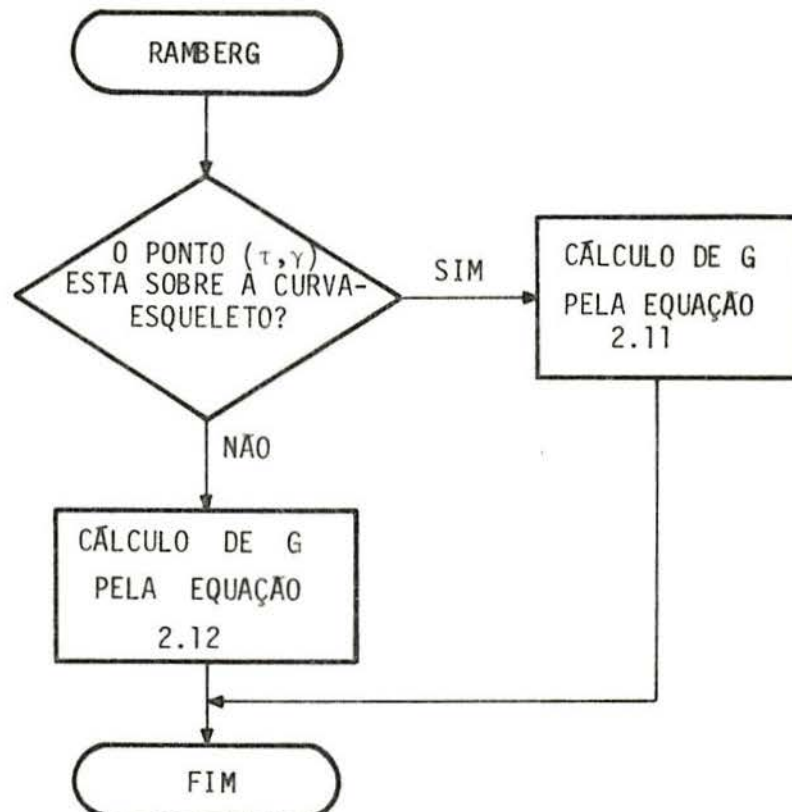


Fig. 3.3.6 - Diagrama de blocos da procedure RAMBERG

gação vertical de ondas de corte. Após a leitura e impressão das propriedades das camadas de solo, como, por exemplo, densidade, viscosidade, altura das camadas, etc., a procedure CARACTERISTICA determina a velocidade e a tensão de corte nas  $N + 1$  interfaces entre camadas contíguas através das eqs. (3.2.40) e/ou (3.2.41). Os valores da aceleração e deslocamento nesses pontos são determinados, respectivamente, pela derivação e integração numérica da velocidade. O comportamento do solo é levado em conta na procedure RAMBERG, a qual é comandada pela CARACTERISTICA. No caso da tensão de corte em qualquer um desses  $N + 1$  pontos ultrapassar, respectivamente, a tensão máxima de corte nesses pontos, escorregamentos plásticos podem ser considerados. O diagrama de blocos da fig. 3.3.4 ilustra o resumo do procedimento aqui apresentado.

A procedure RAMBERG calcula o valor do módulo de corte,  $G$ , através das eqs. (2.11) ou (2.12), se o ponto  $(\gamma, \tau)$  em consideração estiver, respectivamente, sobre a curva-esqueleto ou sobre as curvas de descarga ou recarga — ver fig. 3.3.5. A fig. 3.3.6 mostra o macrodiagrama de blocos da procedure RAMBERG.

### 3.4 - Aplicabilidade do modelo

Nesta seção é discutida a aplicabilidade em análise sísmica de modelos unidimensionais baseados na propagação vertical de ondas de corte.

Segundo Dobry 'et al', é usualmente pequeno o ângulo,  $\phi_1$  (ver fig. 3.4.1), que a onda de corte incidente forma com a normal à interface solo-rocha, devido às propriedades de refração das camadas da crosta terrestre. Mesmo sendo  $\phi_1$  grande, o ângulo de propagação  $\phi_2$  no estrato de solo será pequeno, na maioria dos casos, dada a menor velocidade de propagação da onda neste. Este fato pode ser visualizado pela fig. 3.4.1 e comprovado pela equação de Snell dada abaixo.

$$\frac{\text{sen } \phi_1}{v_{\text{rocha}}} = \frac{\text{sen } \phi_2}{v_{\text{solo}}} \quad (3.4.1)$$

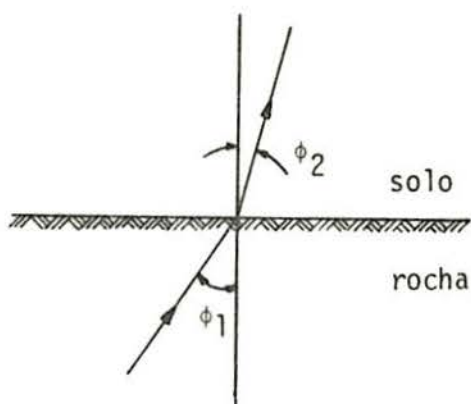


Fig. 3.4.1 - Refração da onda na interface solo-rocha

O fato da propagação da onda de corte não se dar no sentido vertical acarreta um aumento na frequência natural do estrato, fazendo os picos do espectro de resposta se deslocarem na direção das altas frequências. Sendo, entretanto, o ângulo de propagação  $\phi_2$  pequeno, esse efeito é desprezível para propósitos práticos. O ângulo  $\phi_2$  poderá ser grande caso não haja uma interface solo-rocha real.

Por outro lado, conforme Trifunac<sup>36</sup>, há cada vez mais evidência que a maioria da energia em terremotos destrutivos é transmitida por ondas de superfície. Esse fato foi utilizado em argumentação contra modelos que levam em conta a influência do solo através da propagação vertical de ondas de corte. Entretanto, se o estrato é relativamente fino e a hipótese que ele não influencia o movimento da rocha é sustentável, então não interessa por quais mecanismos são transmitidas as ondas sísmicas na rocha, desde que se satisfaça uma importante restrição.

Considerando, por exemplo, que a propagação de ondas na rocha se dá através de ondas superficiais (ver fig. 3.4.2), tem-se que a inclinação da frente de ondas é dada por:

$$\beta = \text{sen}^{-1} (v_{\text{solo}}/v_{\text{rocha}}) \quad (3.4.2)$$

sendo que  $\beta$  deverá ser pequeno para que a suposição de propagação vertical da onda seja válida. Dado que não se conhece nenhum estudo paramétrico que conduza a um critério para a escolha de um valor admissível de  $\beta$ , considera-se, intuitivamente, que o ângulo  $\beta$  deverá ser da ordem de  $10^0$  para que os erros introduzidos sejam desprezíveis. Neste caso tem-se que:

$$v_{\text{solo}} < 0.17 v_{\text{rocha}} \quad (3.4.3)$$

ou

$$G_{\text{solo}} < 0.025 G_{\text{rocha}} \quad (3.4.4)$$

Se as inequações (3.4.3) ou (3.4.4) são satisfeitas, o ângulo de propagação  $\phi_2$  – supondo a propagação na rocha através de ondas de corte – também será pequeno, o que pode ser comprovado pela eq. (3.4.1). Logo, admitindo que o módulo de corte  $G_{\text{rocha}}$  para a rocha seja da ordem de  $200.000 \text{ kgf/cm}^2$  tem-se, de acordo com a eq. (3.4.4), que quando  $G_{\text{solo}} > 5.000 \text{ kgf/cm}^2$  os resultados obtidos da aplicação do método podem ser duvidosos.

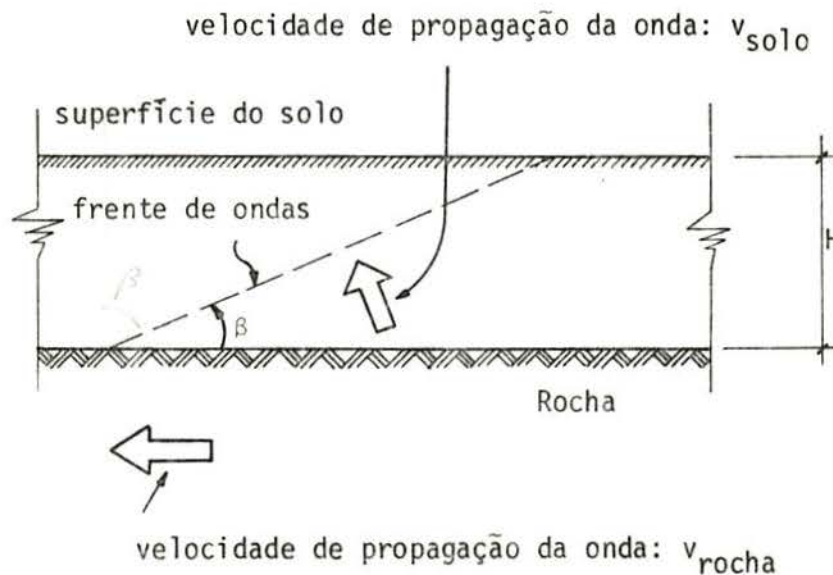


Fig. 3.4.2 - Representação esquemática da frente de ondas no solo

Hã, alãem disso, outra restrição que deveria ser observada, ou seja, a altura  $H$  do estrato nã deve ultrapassar u ma fração do comprimento mãdio da onda sãsmica na rocha. Po-de-se dizer que a altura total do estrato para levar em conta essa restrição, bem como a hipãtese de que sua presenãa nã influencia o movimento da rocha, nã deverã exceder cerca de 50m.

A discussão acima concorda com o comentãrio de Seed 'et al'<sup>33</sup>, segundo o qual "recentes estudos realizados na universidade da Califãrnia, em Berkeley, parecem indicar que a amplificação da resposta em estratos de solo devido a ondas superficiais ã realmente similar ãquelas obtidas atravãs da propagação vertical de ondas de corte, especialmente em casos onde uma interface solo-rocha bem definida existe a pouca profundidade, aproximadamente a 60 m da superfãcie".

As restriçães aqui apresentadas deveriam ser obedecidas em qualquer modelo unidimensional que se baseie na propagão vertical de ondas de corte, entretanto, nem sempre isso acontece nos estudos de casos apresentados na literatura.

### 3.5 - Estudo de casos

Apresentam-se, aqui, alguns exemplos de aplicação do programa de computação apresentado na seãção 3.3. A relevãncia de vãrios fatores, tais como distãncia epicentral, magnitude do sismo, forma do movimento na rocha, tipo de solo, amortecimento, possibilidade de escorregamento, bem como um exemplo da convergãncia do mãtodo, são discutidos nesta apresentação. A partir dos resultados obtidos são tiradas conclusães com respeito ã influãncia das camadas de solo na determinação da resposta sãsmica.

A fig. 3.5.1 mostra as propriedades de um perfil hipotãtico de 21,5 m para dois tipos de solo, utilizado no estudo de casos acima referido. A divisão desse estrato em camadas, tambãem indicadas na figura, foi feita obedecendo a eq. (3.2.42). A resposta na superfãcie desse perfil foi determinada para os seguintes movimentos da base:

a) acelerograma de Puerto Hueneme de 18 de marão de

1957, componente EW (ver fig. 3.5.2), considerado representativo de movimentos de magnitude moderada, hipocentro próximo à superfície e de pequena distância epicentral<sup>22</sup>;

b) acelerograma de Taft de 21 de julho de 1952, comoponente N21E (ver fig. 3.5.4), representativo, por outro lado, de movimentos de grande magnitude,  $M = 7,5$ , e distância epicentral moderada,  $D = 40$  km.

A sensibilidade do espectro de resposta na superfície com relação à forma exata do movimento da rocha foi verificada através da utilização de dois pulsos triangulares de período semelhante ao registro de Puerto Hueneme (ver fig. 3.5.3).

Foram considerados, além disso, movimentos amplificados da base com o intuito de se avaliar a influência de efeitos não-lineares. Tais movimentos, bem como os já anteriormente descritos, são indicados na Tabela 3.5.1. As propriedades dos dois tipos de solo, relativas ao emprego das equações de Ramberg-Osgood, acham-se representadas na Tabela 3.5.2.

Designação	Descrição
Puerto Hueneme	Puerto Hueneme, 18 de março de 1957, componente EW
Puerto Hueneme am <u>p</u> lificado	Idem, acelerações amplificadas 5 ve <u>z</u> es
Pulsos triangulares	Pulsos triangulares, fig. 3.5.3
Pulsos triangulares am <u>p</u> lificados	Acelerações amplificadas 4 vezes
Taft	Kern County Calif <u>ó</u> rnia, 21 de julho de 1952, componente N21E

TABELA 3.5.1 - Características do movimento da base

Mediante o emprego do estrato de solo da fig. 3.5.1a e do acelerograma de Puerto Hueneme, determinaram-se os espectros na superfície para diferentes intervalos de tempo e, conseqüentemente, diferentes números de camadas de solo, a fim de se verificar a convergência do método.

As figs. 3.5.6a-c mostram esses espectros juntament



te com os respectivos intervalos de tempo, número de camadas  $N$  e tempo de processamento gasto. Como se pode observar, os espectros são praticamente iguais sendo mais significativa a diferença em correspondência aos picos máximos.

Designação	Características
Areia	$C_1 = 0,8, \quad \alpha = 1, \quad R = 5$ $\tau_y = C_1 \tau_{\max}$ $\tau_{\max} = \gamma_s z \operatorname{tg} 30^\circ$
Argila	$C_1 = 0,4, \quad \alpha = 1, \quad R = 3$ $\tau_y = C_1 \tau_{\max}$ $\tau_{\max} = C + \gamma_s z \operatorname{tg} 12^\circ$ $C = 1 \text{ kgf/cm}^2$

Tabela 3.5.2 - Propriedades do solo

A fig. 3.5.5 mostra a variação da aceleração máxima do espectro com o intervalo de tempo  $\Delta t$ . Visto que a variação dos espectros com o intervalo de tempo  $\Delta t$  — dentro do intervalo de variação apresentado — é pequena para propósitos práticos, e levando-se em conta a economia de tempo de processamento adotou-se o intervalo de tempo  $\Delta t = 0,01 \text{ seg.}^*$  em todos os exemplos apresentados daqui em diante.

O acelerograma de Taft apresentado na fig. 3.5.4 é o resultado da aplicação de um procedimento de correção standard, EERL, ao acelerograma registrado pelo sismógrafo. Nesse procedimento a velocidade  $v_0$ , o deslocamento  $d_0$  e a aceleração  $a_0$  no início do movimento são estimados através de um critério empírico. No entanto, segundo Pecknold e Riddell<sup>2,6</sup> podem aparecer, para baixas frequências, certas distorções ou anomalias, quando acelerogramas com condições iniciais não nulas são usa-

\* A divisão das camadas da fig. 3.5.1 foi feita utilizando-se esse intervalo de tempo.

dos na determinação da resposta sísmica, sendo esses efeitos merecedores de maior atenção em problemas não-lineares. Os autores acima referidos sugerem, então, um procedimento para eliminar essas anomalias que consiste em prefixar um pequeno pulso de acelerações ao acelerograma, permanecendo o seu restante inalterado. Esse pulso inicia de zero e alcança os valores estimados  $a_0$ ,  $v_0$ ,  $d_0$  no seu final.

As figs. 3.5.12 e 3.5.13 mostram os espectros na superfície para o acelerograma de Taft, respectivamente sem e com um pulso de 2,5 seg prefixado. Contrariamente ao que se esperava, houve diferença entre os espectros somente na faixa de altas frequências — período  $< 0,08$  seg — região esta muito instável. As possíveis distorções que ocorreriam a baixas frequências caem, por outro lado, fora da faixa de frequências de interesse. Entretanto, visto que a utilização de acelerogramas sem condições iniciais é mais real, o procedimento acima referido foi utilizado no acelerograma de Taft na determinação dos espectros de aceleração.

Partindo do módulo de corte inicial e assumindo o comportamento das camadas de solo como vigas de corte, Idriss e Bolton Seed<sup>14</sup> determinaram a seguinte expressão para o cálculo das frequências dos primeiros modos de vibração:

$$\omega_n = \frac{\beta_n}{1,2} \sqrt{\frac{G_0}{\rho H^2}} \quad (3.5.1)$$

na qual:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1,7510 \\ \beta_2 &= 4,8785 \\ \beta_3 &= 8,0166 \\ \beta_4 &= 11,1570 \end{aligned}$$

A eq. (3.5.1) somente é aplicável no caso de solos granulares, ou seja, solos nos quais o módulo de corte inicial varia com a profundidade de acordo com a seguinte equação:

$$G = G_0 \left( \frac{H-z}{H} \right)^{1/3} \quad (3.5.2)$$

onde  $G_0$  é o módulo de corte inicial na interface solo-rocha,  $G$  o módulo de corte inicial em camadas superiores,  $H$  a altura do estrato e  $z$  é a distância à base (interface solo-rocha).

Mediante o emprego da eq. (3.5.1), uma vez satisfeita a eq. (3.5.2), foram calculados os seguintes períodos dos três primeiros modos de vibração dos estratos da fig. 3.5.1:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,270 \text{ s} \\ T_2 &= 0,097 \text{ s} \\ T_3 &= 0,059 \text{ s} \end{aligned}$$

São apresentados nas figs. 3.5.7 a 3.5.22 os espectros de acelerações na rocha e na superfície para os inputs indicados na tabela 3.5.1 e figs. 3.5.2-4 e para os dois estratos de solo da fig. 3.5.1.

Em todos os casos nos quais o pico máximo da aceleração na rocha é menor que  $2 \text{ m/s}^2$ , há a existência de distintos picos no espectro de resposta na superfície — principalmente para os movimentos da rocha de curta duração — em correspondência aos três primeiros períodos naturais. No entanto, como se pode observar, a forma dos espectros na superfície para os movimentos de curta duração dados é diferente da forma dos espectros para a aceleração de Taft, nos quais a amplificação tende a se concentrar em torno do primeiro período natural. Por outro lado, os espectros na superfície para as acelerações de Puerto Hueneme e Pulsos Triangulares possuem a mesma forma. Porém, os fatores de amplificação — definidos como a razão entre as ordenadas dos espectros de resposta na superfície e na rocha — resultam diferentes nesses dois casos. A Tabela 3.5.3 mostra esses fatores de amplificação e os períodos correspondentes a cada pico.

As figs. 3.5.13 e 3.5.15 mostram os espectros de aceleração na superfície para o acelerograma de Taft e, respectivamente, para os estratos de areia e argila. Verifica-se, através dessas figuras, e também da Tabela 3.5.3, que o pico do espectro na superfície para o estrato de argila correspondente ao primeiro período natural está ligeiramente deslocado para a direita e foi substancialmente reduzido. Isto era esperado uma vez que estratos mais flexíveis de solo são inaptos para trans

mitir grandes picos de aceleração à superfície, devido ao fato deles experimentarem importantes deformações suprimindo deste modo o desenvolvimento de movimentos de grande intensidade.

	$T_1$	$F_a$	$T_2$	$F_a$	$T_3$	$F_a$
Puerto Hueneme Areia $\mu = 0$	0,27	10,1	0,10	5,5	0,05	4,0
Pulso Triangular Areia $\mu = 0$	0,28	6,5	0,10	2,6	0,05	1,9
Puerto Hueneme Argila $\mu = 0$	0,28	4,7	0,10	2,6	0,05	3,0
Taft Areia $\mu = 0$	0,28	7,8	0,10	4,3	0,06	3,6
Taft Argila $\mu = 0$	0,36	3,9	0,12	3,4	0,08	3,8

Tabela 3.5.3

É oportuno comentar agora que o amortecimento histerético não parece ser adequado para levar em conta o comportamento observado na faixa das altas frequências. Isto coincide com os resultados discutidos por Huang 'et al'<sup>13</sup>, em recente trabalho, que mencionaram que a adição de uma quantidade de amortecimento viscoso é necessário ao modelo. As figs. 3.5.8, 3.5.10, 3.5.14 e 3.5.16 mostram os espectros na superfície com amortecimento viscoso, isto é, com  $\mu \neq 0$  na eq. (3.2.29). O valor de  $\mu$  foi calculado para se obter uma razão de amortecimento igual a 1% do amortecimento crítico em uma camada de solo homogêneo equivalente – com a mesma altura total e propriedades do perfil da fig. 3.5.1 – vibrando no primeiro modo. A relação entre viscosidade,  $\mu$ , e a razão de amortecimento,  $\zeta$ , é dada pela seguinte expressão:

$$\mu = \frac{2G\zeta}{\omega_1} \quad (3.5.3)$$

onde  $\omega_1$  corresponde à frequência do primeiro modo de vibração. Como pode ser visto nas figuras indicadas acima, há uma consi-

derável redução dos picos dos espectros para períodos menores que 0,2 seg, conforme indica a maioria dos registros obtidos sobre estratos flexíveis.

No caso de movimento amplificado da rocha, a forma do espectro na superfície se assemelha mais com a do espectro na rocha, sendo os fatores de amplificação consideravelmente menores. Os picos que aparecem para períodos correspondentes aos três períodos naturais calculados anteriormente são pouco acentuados observando-se uma tendência da amplificação se concentrar em torno de um único período. Isto coincide com a afirmação de Faccioli e Ramirez<sup>8</sup>, segundo a qual "uma forma sistemática da resposta não-linear de estratos flexíveis de solo consiste na redução do pico amplificado e da correspondente frequência com o aumento da intensidade da excitação, sendo que a resposta amplificada tende a se concentrar em um único 'modo' de vibração".

Convém observar ainda que os espectros de resposta na superfície para movimentos amplificados na rocha obtidos com a adição de amortecimento viscoso também estão mais de acordo com o comportamento observado de mantos flexíveis de solo.

São apresentadas nas figs. 3.5.23 e 3.5.24 curvas médias dos espectros do fator de amplificação, juntamente com a indicação das respectivas componentes. A utilização de curvas desse tipo é importante no caso de grandes áreas a serem construídas — como por exemplo uma central nuclear — em que as propriedades e a profundidade do perfil geológico variem de um ponto a outro. Nesses casos a determinação de uma primeira estimativa do espectro de resposta na superfície seria obtida multiplicando-se, respectivamente, as ordenadas do espectro na rocha pelas ordenadas do espectro do fator de amplificação médio.

A forma das curvas médias referidas acima será mais suave — semelhantes às obtidas por James H. Gates<sup>9</sup> — quanto maior for o número de componentes, ou seja, quanto maior for a variação do perfil e das propriedades do solo na área em questão.

A permissão de escorregamento entre camadas não modificou o espectro de resposta na superfície de uma maneira sig

nificativa em qualquer dos casos considerados. Entretanto, assumindo-se a existência de uma lâmina de argila mole ( $\tau_{\max} = 0,5 \text{ kgf/cm}^2$ ) entre as camadas de solo nº 4 & 5 (ver fig. 3.5.1a), obtêm-se o espectro de resposta na superfície apresentado na fig. 3.5.25.

O efeito da presença dessa camada no espectro na superfície mostra a importância de uma boa determinação das propriedades do solo do estrato, o que nem sempre é uma tarefa fácil, principalmente em solos muito heterogêneos. Além disso, sempre que haja estratos moles entre camadas mais rígidas é recomendável a utilização de métodos com a capacidade de permitir escorregamento entre camadas.

Finalmente, seria interessante comentar que no caso de estratos flexíveis de solo, para os quais a amplificação da resposta é grande, deve-se evitar a construção de edificações com períodos naturais próximos ao período predominante de vibração do estrato. A razão deste cuidado está em prevenir possíveis danos à estrutura causados pelos efeitos de interação da resposta, ou seja, o desenvolvimento de uma condição de pseudo-ressonância.

### 3.6 - Influência do solo: conclusões e recomendações

A aplicação do método das características para a determinação de espectros de resposta sísmica na superfície de estratos flexíveis de solo foi descrita no decorrer deste capítulo. A aplicabilidade em análise sísmica de modelos unidimensionais baseados na propagação vertical de ondas de corte foi discutida na seção 3.4 e algumas restrições foram sugeridas. Na seção 3.5 analisou-se através de um estudo de casos a influência de camadas de solo no espectro de resposta sísmica na superfície, para terremotos de magnitude moderada e de grande magnitude. As conclusões mais significantes obtidas das seções anteriores são as seguintes:

a) para picos de aceleração máxima na rocha menor que  $2 \text{ m/s}^2$ , contrário ao que era esperado para movimentos de curta duração, amplificações significantes do espectro na rocha aparecem em correspondência aos três primeiros períodos na

turais de vibração do solo;

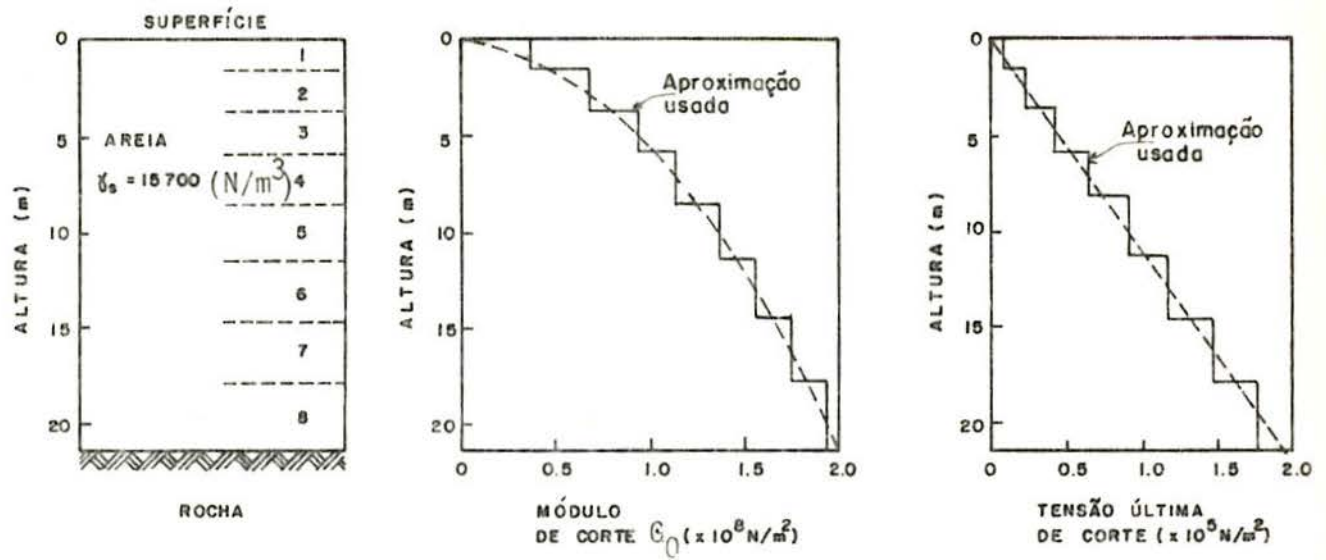
b) para grandes amplitudes de aceleração máxima na rocha, o pico do espectro na superfície não mais coincide com o período fundamental das camadas de solo, as amplificações são muito menores e tendem a se concentrar em torno de um único período. A forma do espectro na superfície assemelha-se à do espectro na rocha;

c) na presença de camadas moles entre material mais duro, uma análise capaz de considerar escorregamento é da maior importância;

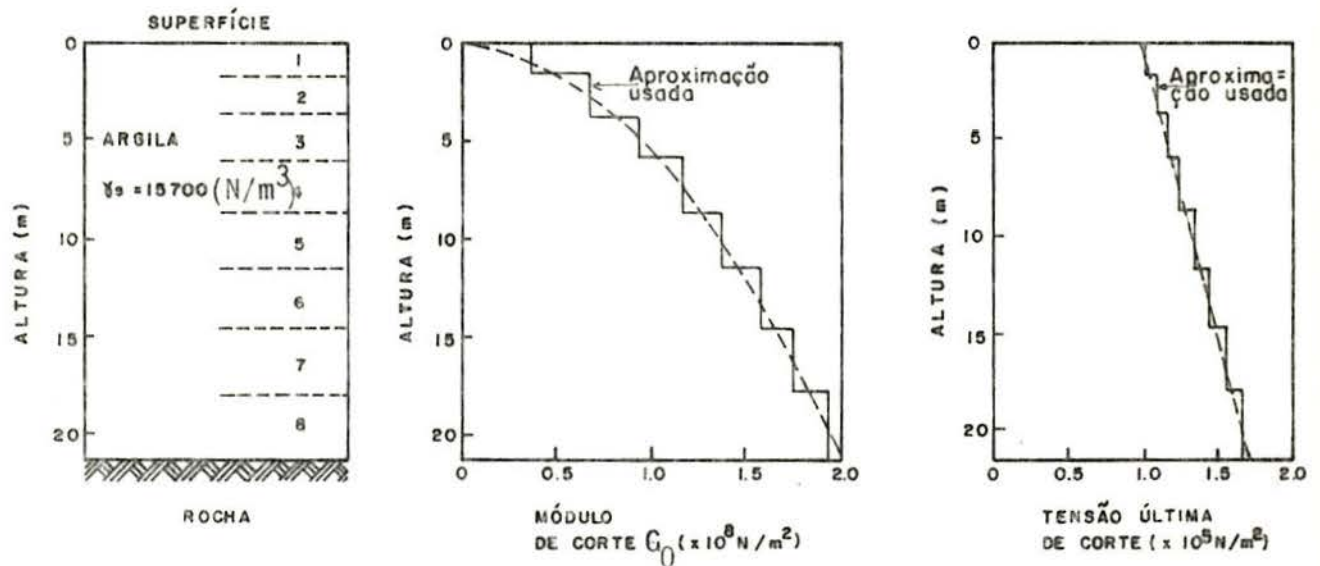
d) é necessária uma pesquisa adicional no que diz respeito ao comportamento não-linear em solos e à natureza do amortecimento;

e) esta pesquisa deveria ser estendida a modelos bi e tridimensionais, desde que no caso de movimentos de grande amplitude a coexistência de tensões devidas a outros tipos de onda — por exemplo, aquelas responsáveis por movimento vertical — podem invalidar completamente as relações entre tensão e deformação não-lineares aqui consideradas;

f) são necessários estudos no âmbito da aplicabilidade de modelos baseados na propagação vertical de ondas de corte. Seus resultados ajudariam a esclarecer o quadro em estudos de interação solo-estrutura, nos quais o efeito da propagação da onda na rocha é raramente explicado de forma satisfatória.



(a) AREIA



(b) ARGILA

Fig. 3.5.1 - Perfil de solo e variação, com a altura, do módulo de corte inicial e da tensão última de corte assumidos no estudo de casos



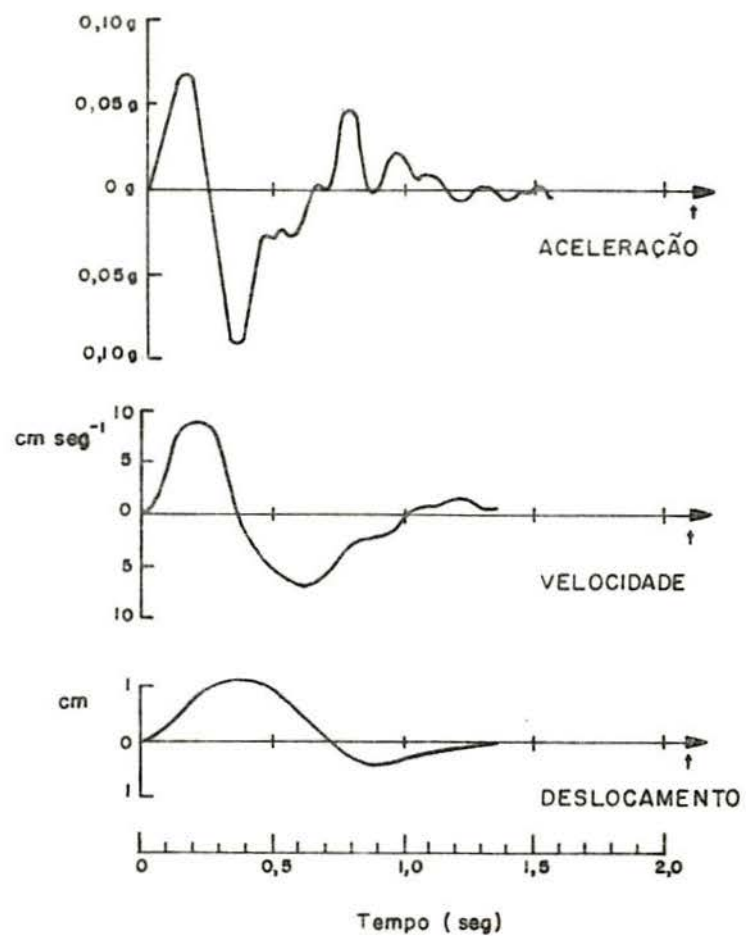


Fig. 3.5.2 - Acelerograma de Puerto Hueneme de 18 de março de 1957, componente EW

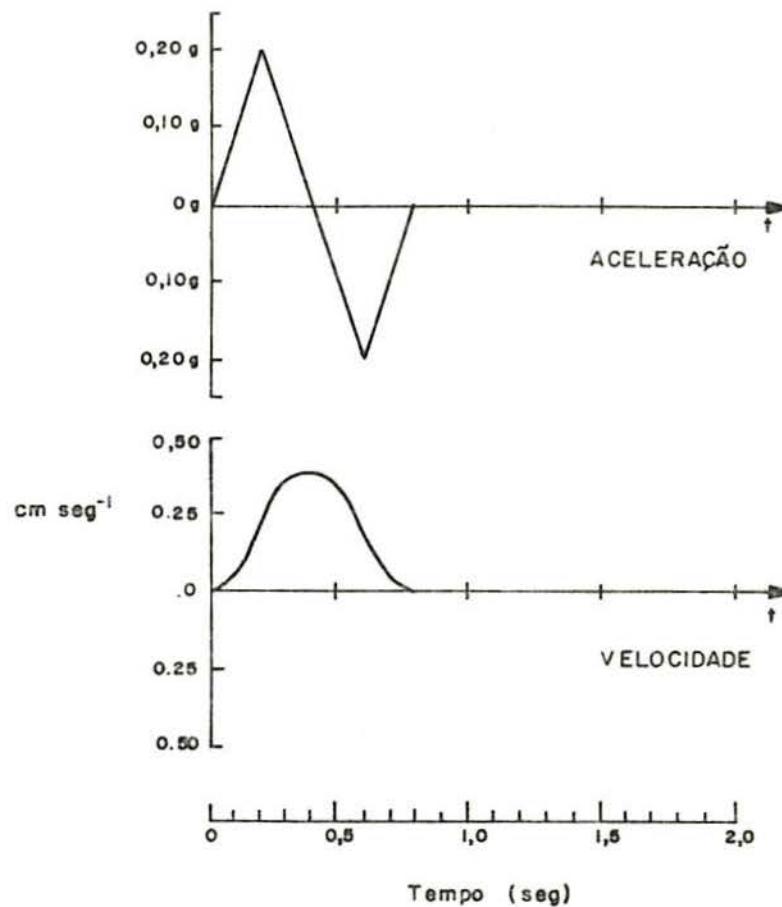


Fig. 3.5.3 - Pulsos triangulares

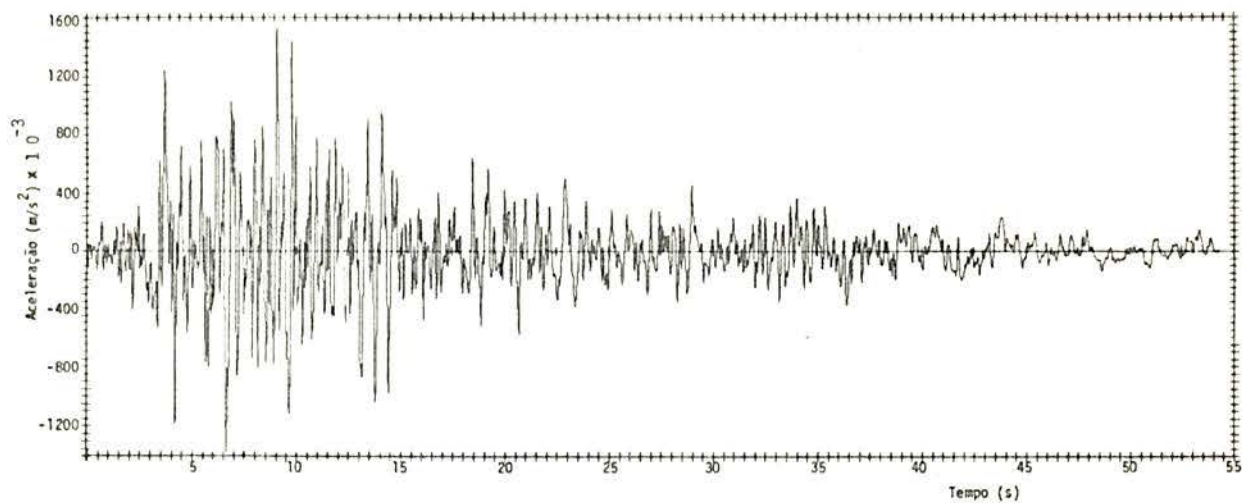


Fig. 3.5.4 - Acelerograma de Taft de  
21 de julho de 1952,  
componente N21E

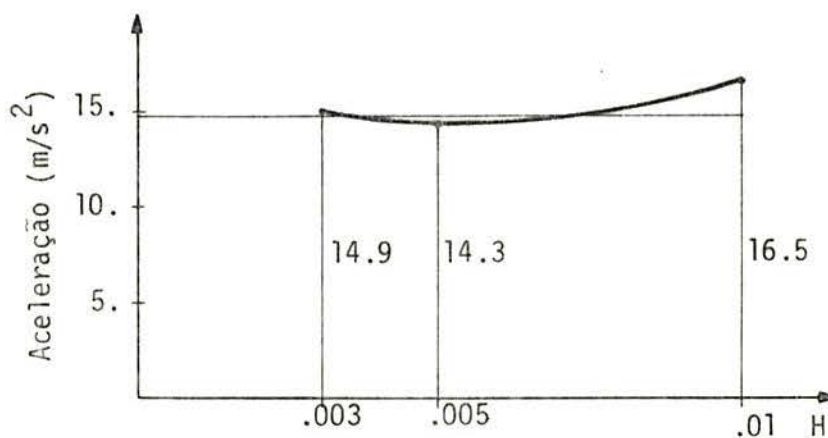
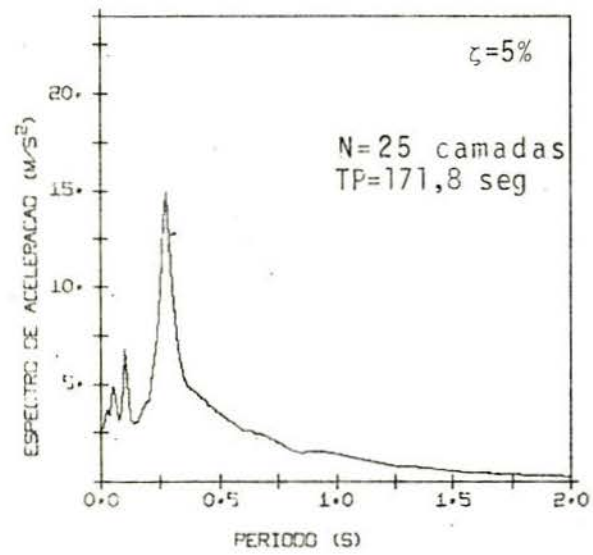
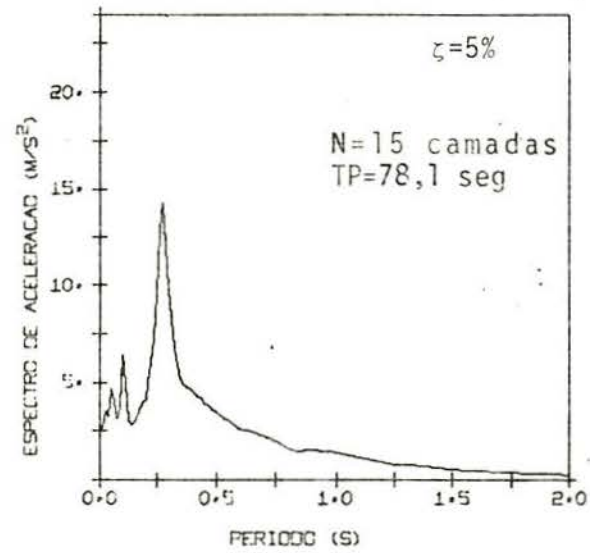


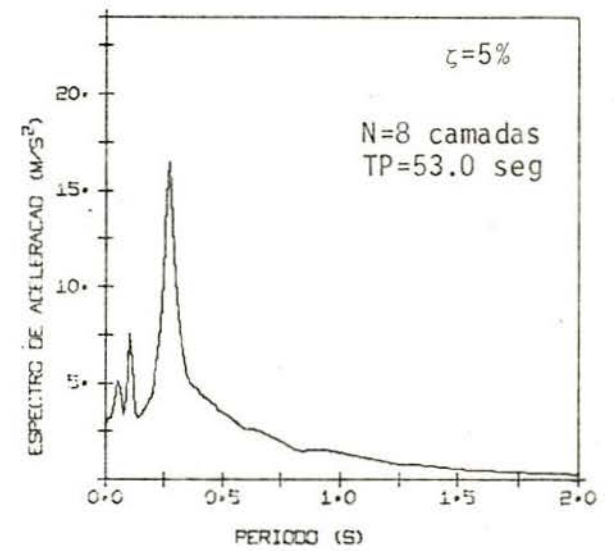
Fig. 3.5.5 - Variação da aceleração máxima  
do espectro com o intervalo de tempo  $\Delta t$



(a)  $\Delta t = 0,003$



(b)  $\Delta t = 0,005$



(c)  $\Delta t = 0,01$

Fig. 3.5.6 - Variação do espectro de aceleração com o intervalo de tempo  $\Delta t$

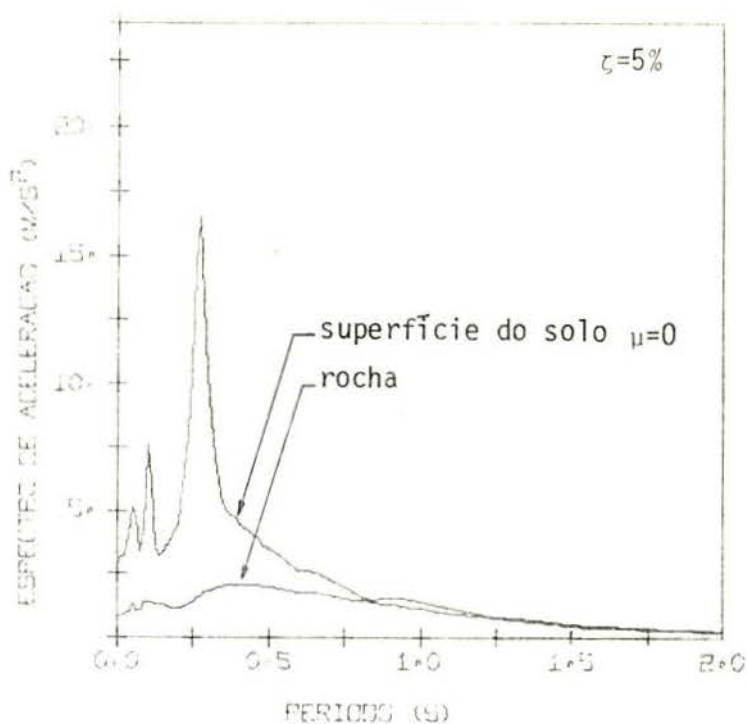


Fig. 3.5.7 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Puerto Hueneme, areia, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

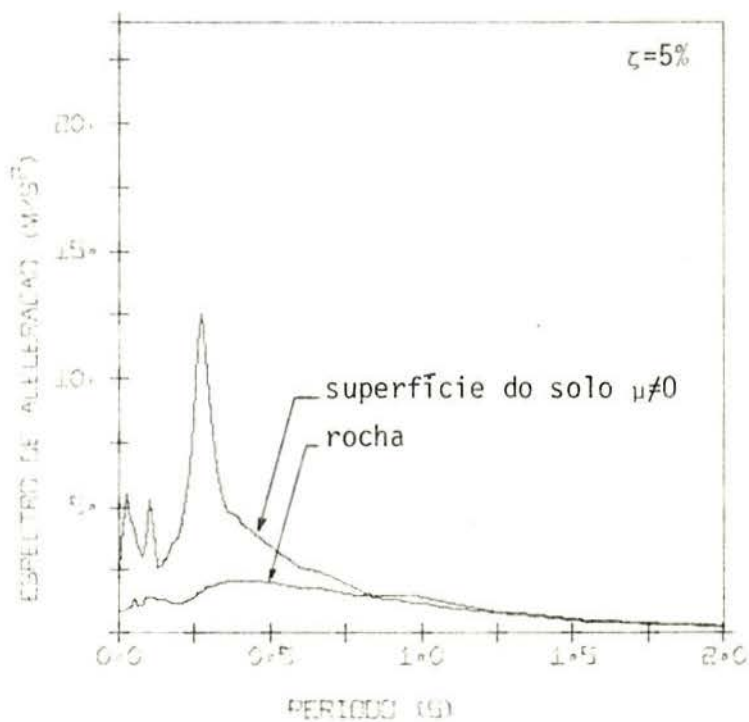


Fig. 3.5.8 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Puerto Hueneme, areia, escorregamento não permitido, amortecimento viscoso de 1%

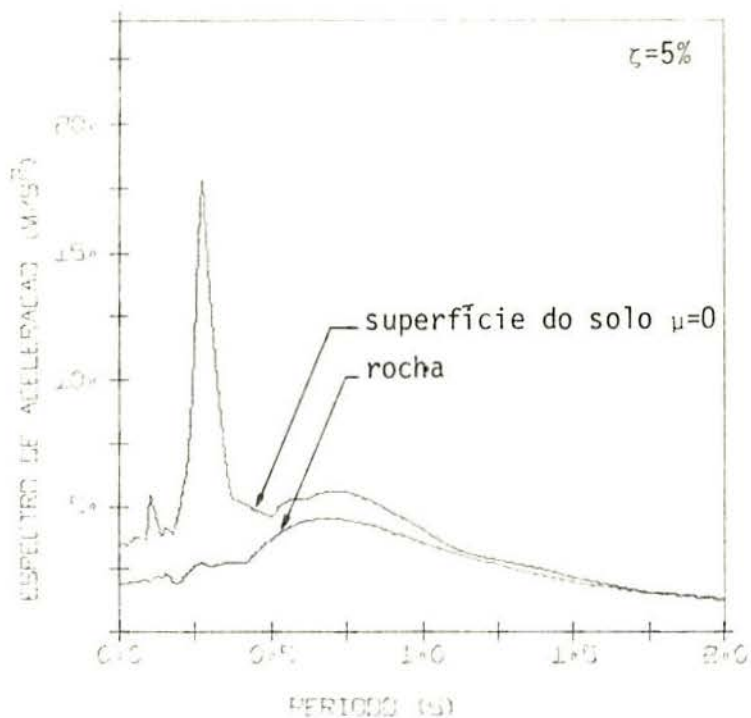


Fig. 3.5.9 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Pulsos triangulares. Areia, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

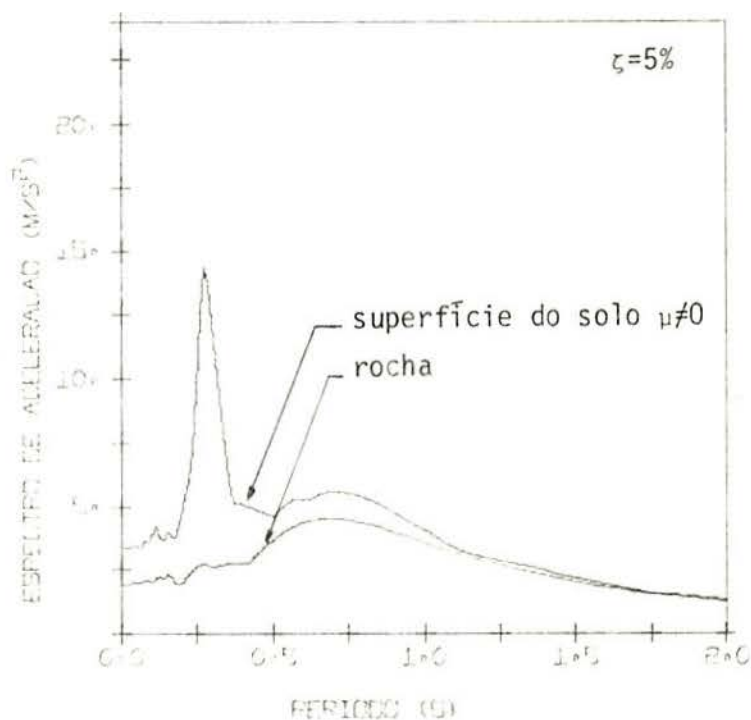


Fig. 3.5.10 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Pulsos triangulares. Areia, escorregamento não permitido, amortecimento viscoso de 1%

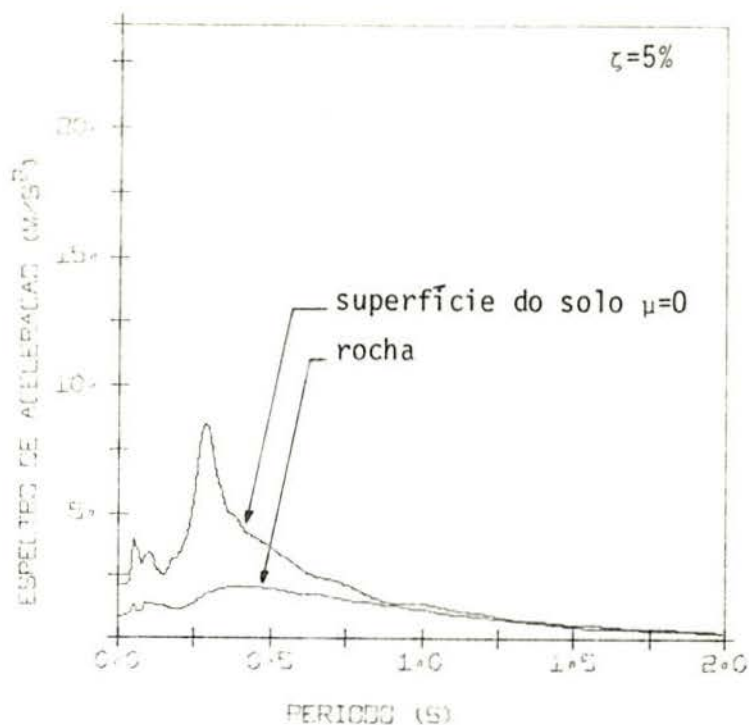


Fig. 3.5.11 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Puerto Hueneme. Argila, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

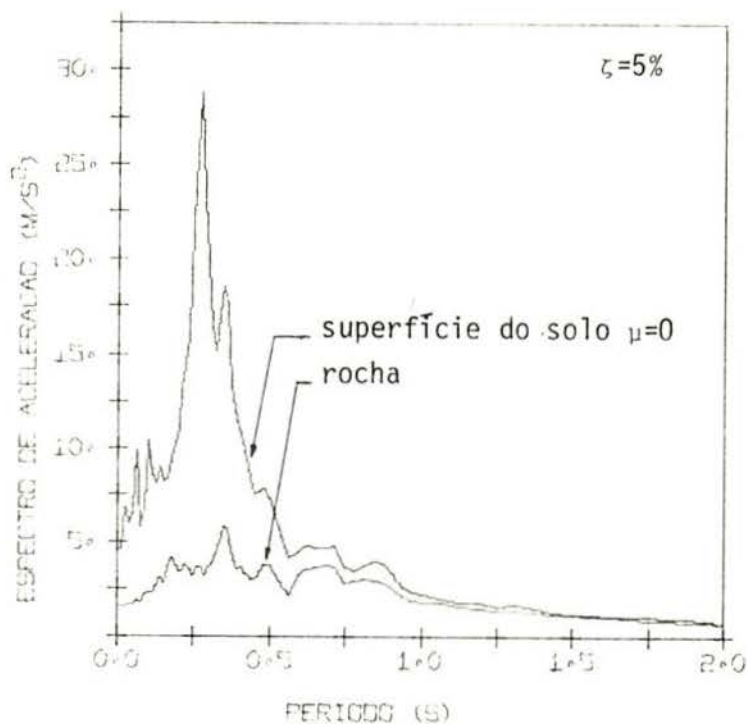


Fig. 3.5.12 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Taft com C.I.  $\neq 0$ . Areia, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

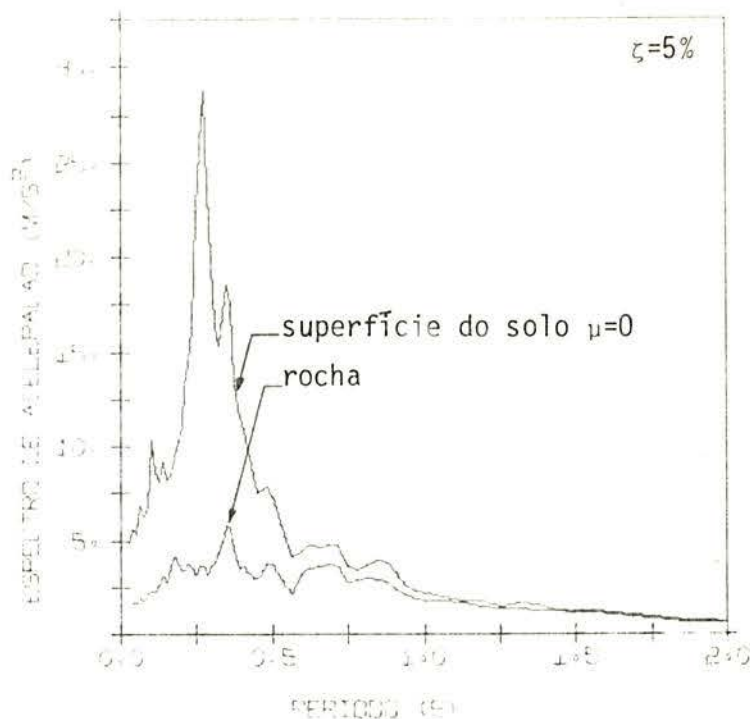


Fig. 3.5.13 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Taft com C.I = 0. Areia, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

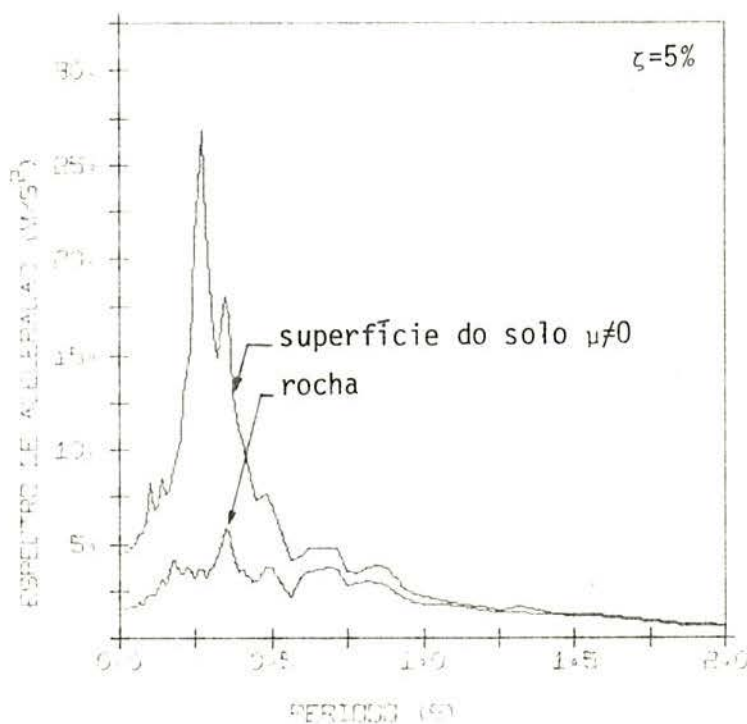


Fig. 3.5.14 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Taft com C.I. = 0. Areia, escorregamento não permitido, amortecimento viscoso de 1%

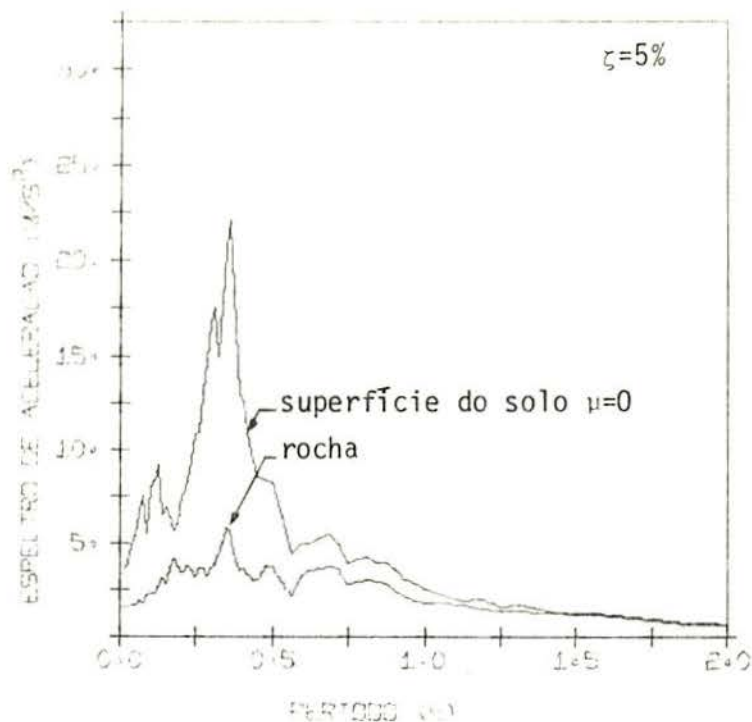


Fig. 3.5.15 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Taft com C.I. = 0. Argila, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

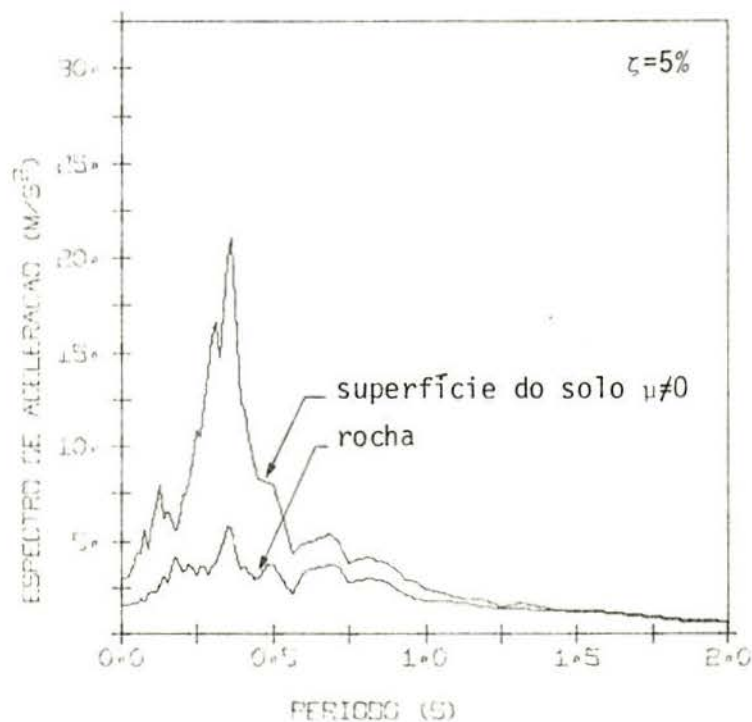


Fig. 3.5.16 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Taft com C.I. = 0. Argila, escorregamento não permitido, amortecimento viscoso de 1%



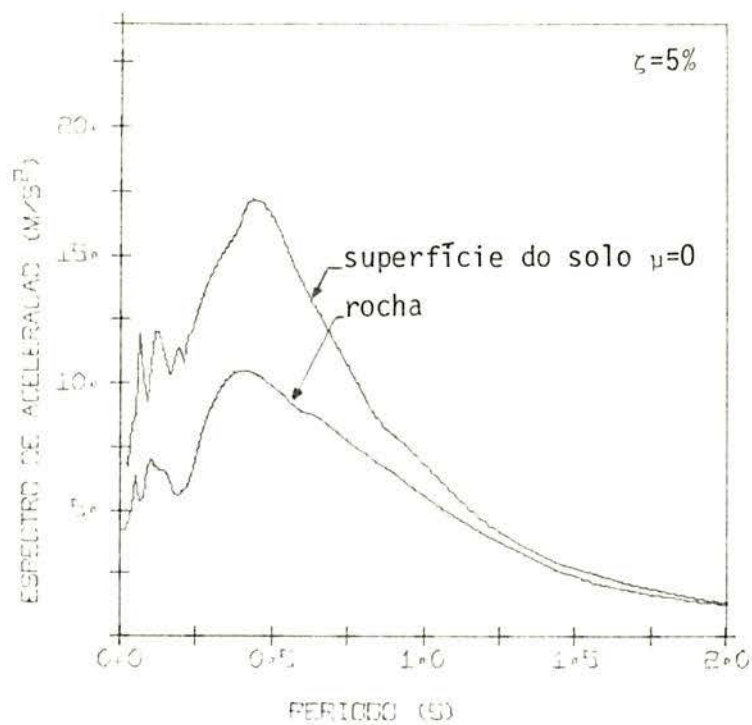


Fig. 3.5.17 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Puerto Hueneme amplificado. Areia, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

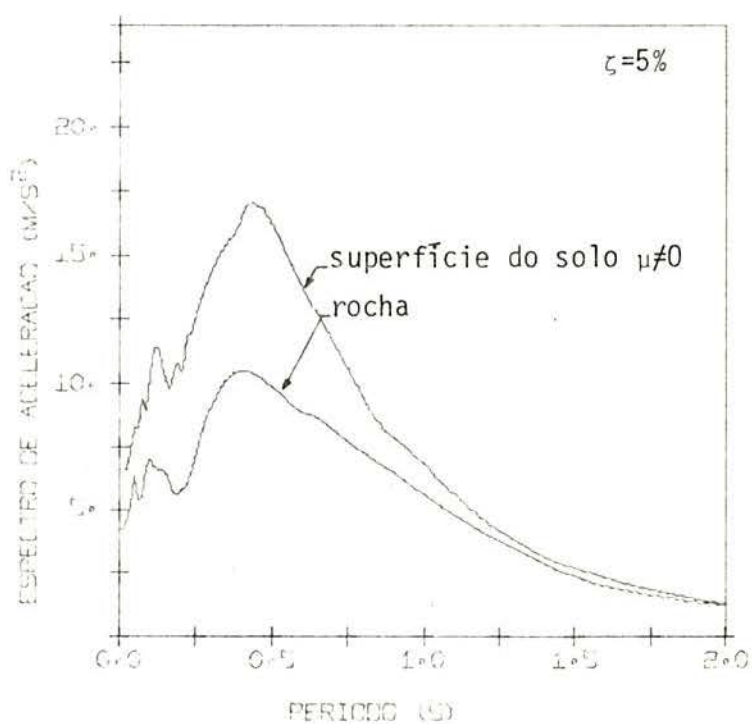


Fig. 3.5.18 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Puerto Hueneme amplificado. Areia, escorregamento não permitido, amortecimento viscoso de 1%

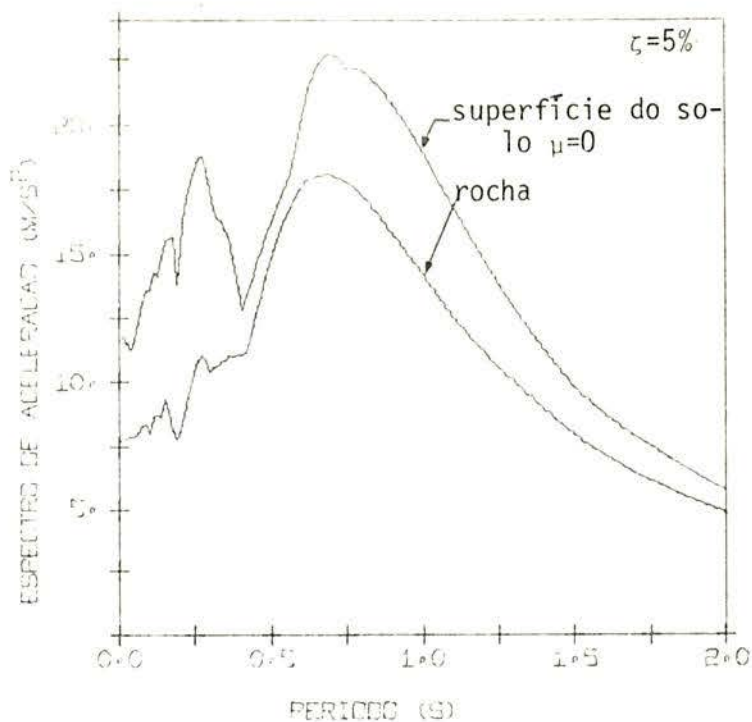


Fig. 3.5.19 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Pulsos triangulares amplificados. Areia, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

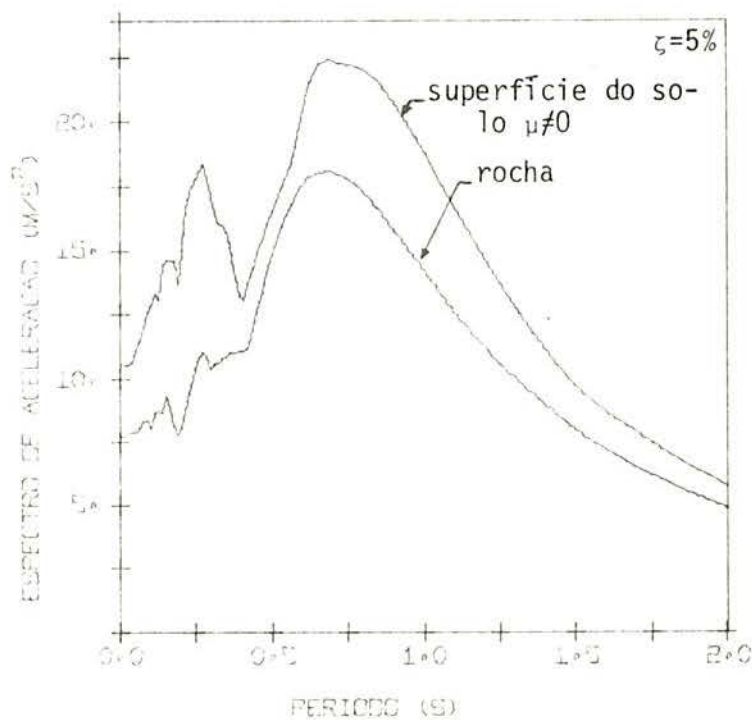


Fig. 3.5.20 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Pulsos triangulares amplificados. Areia, escorregamento não permitido, amortecimento viscoso de 1%

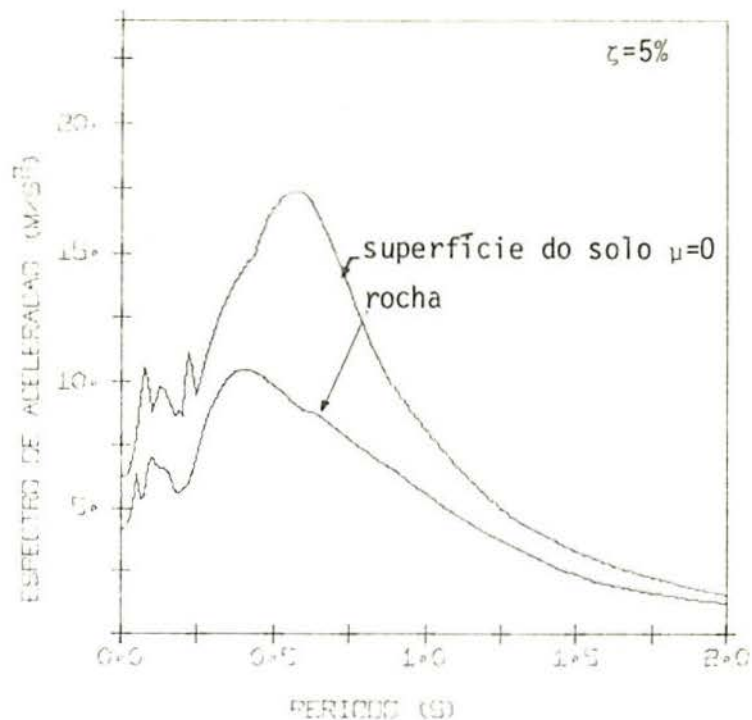


Fig. 3.5.21 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Puerto Hueneme amplificado. Argila, escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

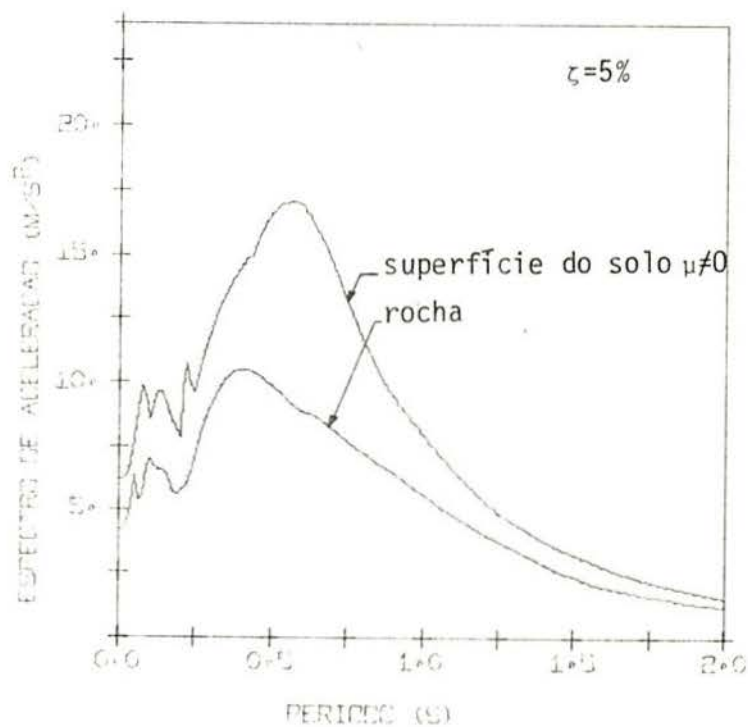


Fig. 3.5.22 - Espectros de acelerações na rocha e na superfície do solo. Input de Puerto Hueneme amplificado. Argila, escorregamento não permitido, amortecimento viscoso de 1%

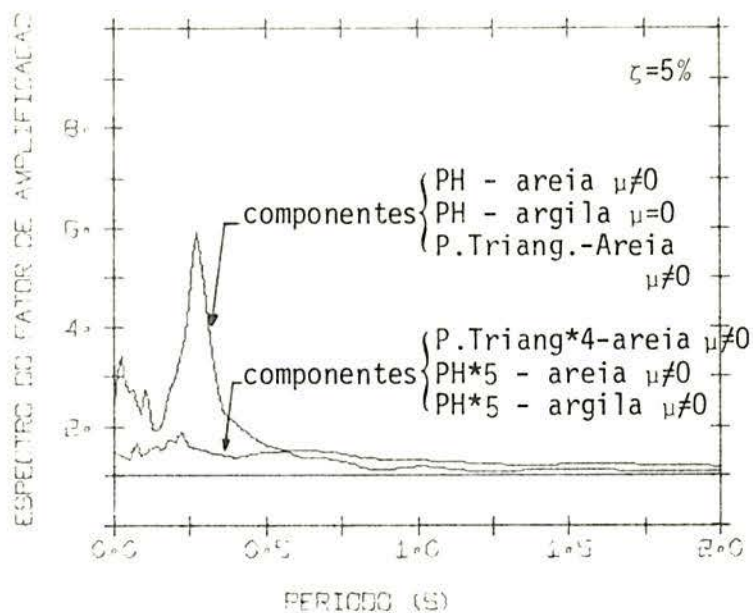


Fig. 3.5.23 - Curvas médias dos espectros do fator de amplificação para os inputs de Puerto Hueneme e pulsos triangulares

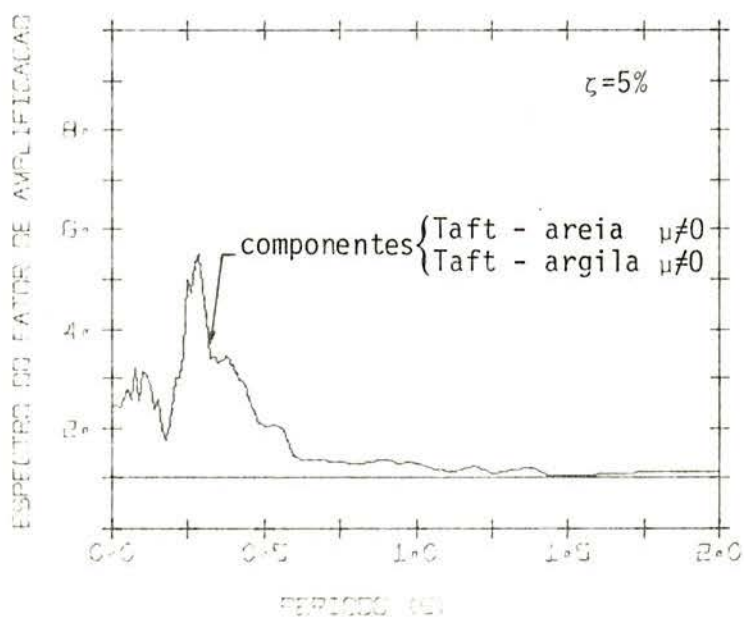


Fig. 3.5.24 - Curva média dos espectros do fator de amplificação para o input de Taft

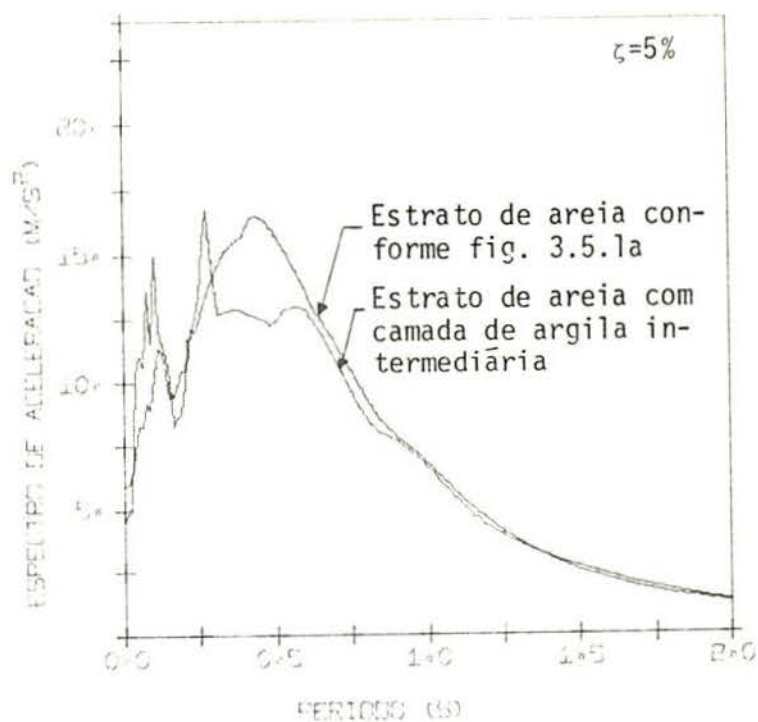


Fig. 3.5.25 - Espectros de acelerações na superfície.  
 Input de Puerto Hueneme amplificado. Escorregamento e amortecimento viscoso de 1% incluídos. Estrato de areia conforme Fig. 3.5.1a e estrato de areia com uma lâmina de argila mole entre as camadas 4 & 5

## CAPÍTULO 4

## CONSIDERAÇÕES SOBRE A INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

Discute-se brevemente na seção 4.1, parcialmente baseada na referência 38, o problema da interação solo-estrutura. Propõe-se, então, o emprego de um modelo simples baseado no método das características com o intuito de se verificar a influência de uma grande concentração de edificações no espectro de resposta sísmica. A determinação quantitativa dessa influência é obtida através de um estudo de casos e do modelo proposto para, em seguida, serem encaminhadas conclusões com respeito ao efeito em estudo.

4.1 - Introdução ao problema

A interação solo-estrutura é caracterizada pela diferença existente entre o movimento  $u_1$  da fundação da estrutura e o movimento  $u_0$  da superfície do solo em um ponto suficientemente distante da estrutura (ver fig. 4.1.1). A flexibilidade do solo é responsável pela existência desse fenômeno, logo, é de se esperar que uma estrutura — sujeita a uma mesma excitação — tenha resposta dinâmica diferente quando apoiada em rocha firme e quando apoiada em estratos flexíveis de solo. O movimento relativo que caracteriza a interação solo-estrutura pode possuir componentes em ambas as direções, vertical e horizontal, podendo também conter giro em relação a qualquer um dos eixos horizontais e em relação ao eixo vertical.

O fenômeno da interação solo-estrutura caracterizado acima recebeu considerável atenção nesses últimos dez anos, existindo uma grande quantidade de publicações sobre esse tema. Os primeiros trabalhos nessa área utilizavam diferentes modelos aproximados, nos quais a flexibilidade do solo era simulada através de molas colocadas sob a fundação e dispostas no sentido dos movimentos permitidos. Em alguns modelos era

adicionada uma massa extra para representar a contribuição do solo na inércia da fundação.

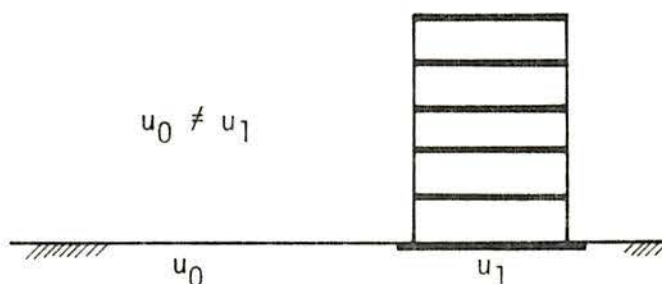


Fig. 4.1.1 - Representação esquemática da interação solo-estrutura

Os modelos discretos referidos acima eram geralmente utilizados para estudar casos particulares de interação solo-estrutura. Um dos primeiros trabalhos realizados com o objetivo de obter conclusões gerais sobre o fenômeno da interação solo-estrutura é devido a Parmelee<sup>25</sup> (1967). Nesse trabalho a estrutura foi substituída por um sistema de um grau de liberdade fixo a uma base cilíndrica representando a fundação, enquanto o solo foi considerado um semi-espaço elástico homogêneo, sendo utilizadas as funções de Bycroft<sup>3</sup> para representar a sua flexibilidade.

Essas funções relacionam forças e momentos que atuam na fundação da estrutura com os movimentos relativos entre a fundação e o solo em um ponto suficientemente distante da estrutura. As funções de Bycroft foram então utilizadas, juntamente com as equações de movimento da estrutura, para analisar o comportamento do sistema solo-estrutura.

As funções de admitância complexa da fundação — tanto as de Bycroft como as desenvolvidas mais tarde — são dependentes da frequência da excitação, impedindo assim que a análise do modelo seja realizada no domínio do tempo. Em virtude dessa dificuldade, para propósitos práticos as funções de admitância complexa da fundação são substituídas por molas, amorte

cedores e massas equivalentes, sendo os resultados obtidos dessa aproximação satisfatórios para a maioria dos casos — conforme mostram os trabalhos de Nieto 'et al'<sup>23</sup> (1965), Lysmer e Richart<sup>18</sup> (1966), Hall<sup>10</sup> (1967), Perelman 'et al'<sup>27</sup> (1968), Sarrazin 'et al'<sup>30</sup> (1970).

A substituição das funções de admitância complexa, conforme comentado acima, é bastante utilizada em problemas de interação solo-estrutura pois, através dela, é possível analisar diferentes modelos no domínio do tempo empregando métodos tais como o de superposição modal e de integração passo a passo.

Com o desenvolvimento da técnica dos elementos finitos e o aparecimento de programas baseados em elementos bi e tridimensionais é possível atualmente analisar problemas mais complexos de interação solo-estrutura. Nos programas de elementos finitos o input é estimado na rocha ou em um ponto na superfície livre, sendo a análise do sistema solo-estrutura efetuada diretamente. Desta maneira o efeito na resposta sísmica que o movimento de uma estrutura tem sobre a outra, bem como o de estruturas embutidas no solo, pode ser determinado de maneira satisfatória.

Os métodos de análise comentados acima investigam o fenômeno da interação solo-estrutura sob um determinado ponto de vista, ou seja, dado o movimento em um ponto na superfície livre — ou na rocha — determina-se a resposta da estrutura levando em conta o efeito da interação.

Por outro lado, a determinação da influência que uma grande concentração de edificações — assentadas sobre estratos flexíveis de solo — possa ter sobre o espectro de resposta sísmica na superfície tem sido pouco estudada até hoje. Este problema é relevante em estudos de microrregionalização onde uma boa estimativa do movimento na superfície é da maior importância. É, portanto, objetivo do presente capítulo verificar o efeito da interação solo-estrutura sob esse ponto de vista bem como mostrar a utilização do método das características como uma possível ferramenta de análise desse tipo de problema.



#### 4.2 - Aplicação do método das características a um modelo simples

Com o objetivo de se verificar a influência que as edificações possam ter no espectro de resposta sísmica na superfície de um estrato flexível de solo, é apresentado nesta seção um enfoque simples baseado no método das características. As hipóteses assumidas anteriormente quanto ao comportamento de um estrato flexível de solo excitado dinamicamente pela propagação vertical de ondas de corte continuam válidas neste capítulo.

Na fig. 4.2.1 estão representados: a) o problema real a ser examinado, ou seja, a determinação do movimento na superfície do estrato de solo devido a uma excitação na rocha; e b) o modelo proposto.

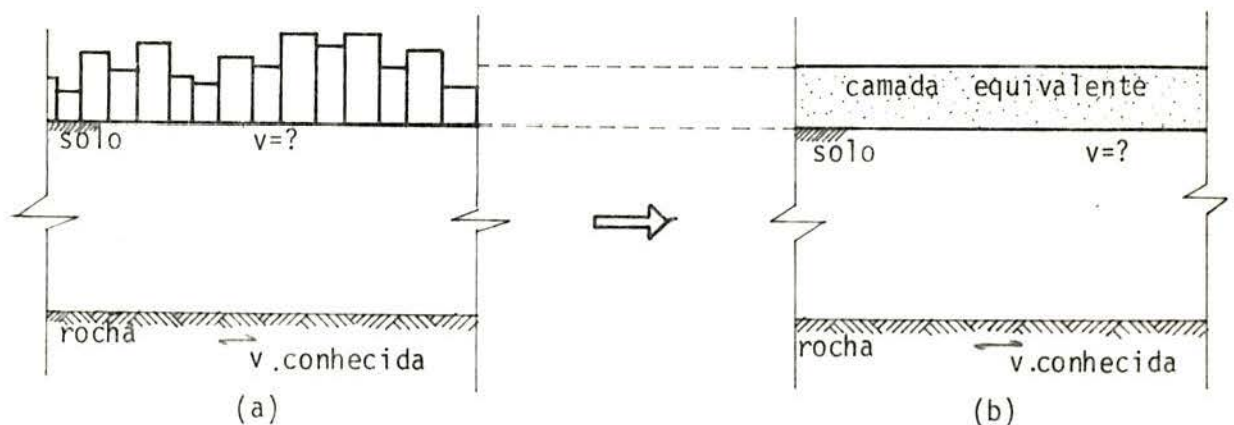


Fig. 4.2.1 - Representação esquemática:

- a) do problema real;
- e b) do modelo proposto

Mediante o emprego do método das características e do modelo proposto é então possível determinar o movimento na superfície do solo levando em conta a presença das edificações.

As propriedades da camada equivalente são determinadas a partir das propriedades de um edifício representativo da média das edificações. Na fig. 4.2.2 está representado o edifício acima definido.

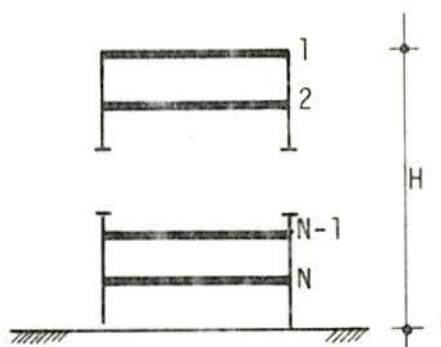


Fig. 4.2.2 - Edifício representativo da média das edificações

A densidade da camada equivalente,  $\rho_{eq}$ , é dada pela expressão:

$$\rho_{eq} = \frac{q N}{H g} \quad (4.2.1)$$

onde  $q$  é a carga do pavimento por  $m^2$ ,  $H$  é a altura total do edifício e  $g$  a aceleração da gravidade.

Admitindo-se que o meio é elástico, isotrópico e linear, tem-se que a velocidade de propagação da onda de corte vem dada por<sup>14</sup>:

$$v_s = \sqrt{\frac{G_{eq}}{\rho_{eq}}} \quad (4.2.2)$$

sendo o período fundamental da camada igual a:

$$T_1 = \frac{4H}{v_s} \quad (4.2.3)$$

No caso de edifícios convencionais de concreto armado, uma boa aproximação do período natural de vibração é conseguida através da expressão empírica dada abaixo:

$$T_1 = 0,05 + 0,012 H \quad (4.2.4)$$

sendo  $H$  dado em metros e o período em segundos.

Substituindo a eq. (4.2.3) na eq. (4.2.2) obtêm-se a seguinte expressão para  $G_{eq}$ :

$$G_{eq} = \frac{16 \rho_{eq} H^2}{T_1^2} \quad (4.2.5)$$

onde  $T_1$  é determinado pela eq. (4.2.4).

Uma vez determinados  $\rho_{eq}$  e  $G_{eq}$  a obtenção do movimento na superfície do solo passa a depender unicamente da utilização do programa de computação apresentado na seção 3.3.

O modelo acima apresentado, embora reproduza a situação real de uma maneira aproximada, é útil para efetuar uma primeira avaliação da influência das edificações na resposta sísmica, e como tal deve ser visto.

A utilização do modelo proposto e a avaliação da influência na resposta sísmica serão, agora, mostradas através de um estudo de casos.

#### 4.3 - Estudo de casos

A fig. 4.3.1 mostra as propriedades de dois perfis de solos — compostos do estrato de areia da fig. 3.5.1a mais as camadas equivalentes — utilizados no estudo de casos desta seção. A altura das camadas equivalentes dos perfis a e b correspondem à altura de edifícios de 3 e 6 pavimentos, respectivamente, sendo a carga do pavimento,  $q$ , de  $1,2 \text{ t/m}^2$ . A divisão dos perfis em camadas — indicadas na figura — obedeceu à expressão 3.2.42, sendo o intervalo de tempo  $\Delta t = 0,01 \text{ seg.}$  para o perfil a e  $\Delta t = 0,0095 \text{ seg.}$  para o perfil b.

As propriedades do solo, relativas ao emprego das equações de Ramberg-Osgood, estão representadas na Tabela 4.3.1.

As tensões últimas nas camadas equivalentes, indicadas na figura 4.3.1, foram calculadas para um valor da deformação plástica,  $\gamma_p$ , de 0,5%.

As respostas dos perfis da fig. 4.3.1 foram determinadas para as excitações da base dadas pelos acelerogramas

de Puerto Hueneme e Taft apresentados na seção 3.5.

Designação	Característica
Camada Equivalente	Linear $\tau_{\max} = G_{\text{eq}} \gamma_p$
Areia	$C_1 = 0,8, \alpha = 1,0, R = 5$ $\tau_y = C_1 \tau_{\max}$ $\tau_{\max} = \{\gamma_s z + (\gamma_{\text{eq}} - \gamma_s) H\} \text{tg } 30^\circ$

Tabela 4.3.1 - Propriedades do solo

Os espectros de acelerações na superfície do estrato de areia para o input de Puerto Hueneme e para os dois perfis da fig. 4.3.1 são apresentados nas figs. 4.3.2 e 4.3.3. A fim de se avaliar a influência das edificações na resposta a cham-se, também, representados nessas figuras os espectros de acelerações para o estrato de areia da fig. 3.5.1a. Da mesma maneira tem-se nas figs. 4.3.4 e 4.3.5 os espectros de acelerações para o input de Taft.

No que diz respeito à resposta para o registro de Puerto Hueneme nota-se que a presença das edificações tende a suavizar os espectros de acelerações. Para o perfil a a forma do espectro ainda se assemelha à do espectro sem a presença das edificações. Entretanto, os picos que anteriormente apareciam em correspondência ao segundo e terceiro períodos naturais são pouco acentuados, sendo observados, ainda, um ligeiro deslocamento para a direita e um decréscimo do seu pico máximo. Já para o perfil b verifica-se que as formas dos espectros não mais se assemelham, os picos correspondentes ao segundo e terceiro períodos naturais não mais existem, havendo praticamente um patamar para períodos menores que 0,25 s. O espectro, nesse caso, foi substancialmente suavizado, sendo que os maiores fatores de amplificação se concentram em torno de um único período.

Por outro lado, para o registro de Taft os espec-

tros de acelerações não sofreram a influência da presença das edificações de uma maneira tão drástica quanto os do caso anterior. O espectro de aceleração para o perfil a possui a mesma forma que o espectro obtido sem a presença das edificações. Além disso, verifica-se que esse espectro não foi suavizado mas sim deslocado ligeiramente para a direita — excetuando-se, é claro, as diferenças observadas nos picos secundários. Para o perfil b verifica-se que não há mais semelhança entre as formas dos espectros. Entretanto, nesse caso pode ser novamente observada a influência das edificações na moderação do espectro de aceleração.

Embora seja outro o fenômeno é interessante reproduzir o comentário de Whitman<sup>38</sup> a respeito da tendência das fundações, que possuam dimensões maiores ou iguais ao comprimento de onda horizontal do input, de suavizar a resposta sísmica: "A fundação serve para suavizar o input e, conseqüentemente, o seu movimento tende a ser menor que o movimento do solo". Como se observa, as conseqüências da presença de fundações extensas são análogas às da presença de edificações.

É oportuno comentar que a influência das edificações na moderação da resposta sísmica foi superestimada pelos exemplos apresentados em virtude do modelo de análise considerar que entre as edificações não existe espaço vazio, o que resulta em valores de densidade equivalente provavelmente maiores que os reais. Não obstante — como já foi dito anteriormente — esses resultados servem como uma primeira avaliação da influência das edificações na resposta sísmica.

Finalizando, visto que para edificações a partir de três pavimentos já se observa uma influência das mesmas no espectro correspondente à superfície do solo, estudos de microrregionalização para áreas com alta densidade de edificações não devem ser feitos sem levar em conta o seu efeito.

#### 4.4 - Conclusões e recomendações

Foi discutido no decorrer deste capítulo o problema da interação solo-estrutura. Propôs-se, por outro lado, um

modelo simples baseado no método das características, com o qual se verificou a influência das edificações no espectro de resposta sísmica através de um estudo de casos. Obtiveram-se, deste modo, as seguintes conclusões mais significativas:

a) há uma tendência das edificações de suavizar o espectro de resposta sísmica em mantos flexíveis de solo, principalmente para movimentos na base de curta duração;

b) estudos de microrregionalização para áreas com alta densidade de edificações devem levar em conta a influência das mesmas na obtenção do espectro na superfície do solo;

c) são necessárias novas pesquisas em relação ao comportamento de mantos flexíveis de solo sob a influência de edificações;

d) a título de recomendação, seria interessante realizar um estudo paramétrico que correlacionasse a altura das edificações com a velocidade de propagação da onda no solo, com o objetivo de se determinar limites de aplicabilidade do modelo da seção 4.2 fora dos quais a influência das edificações seria desprezível.

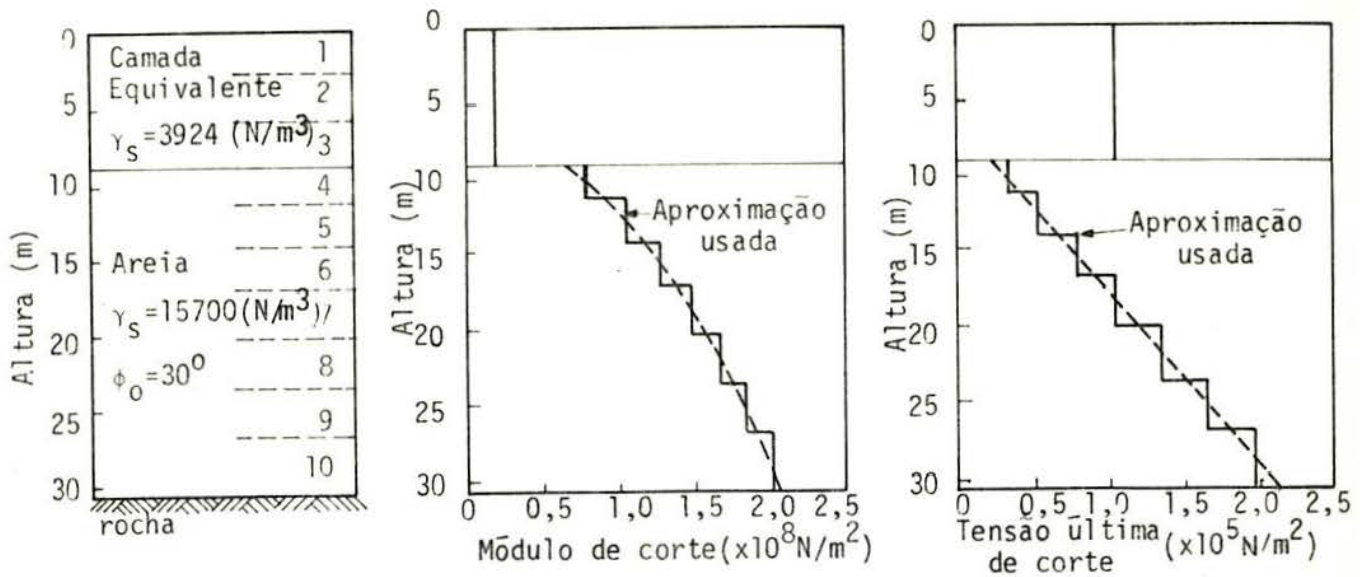
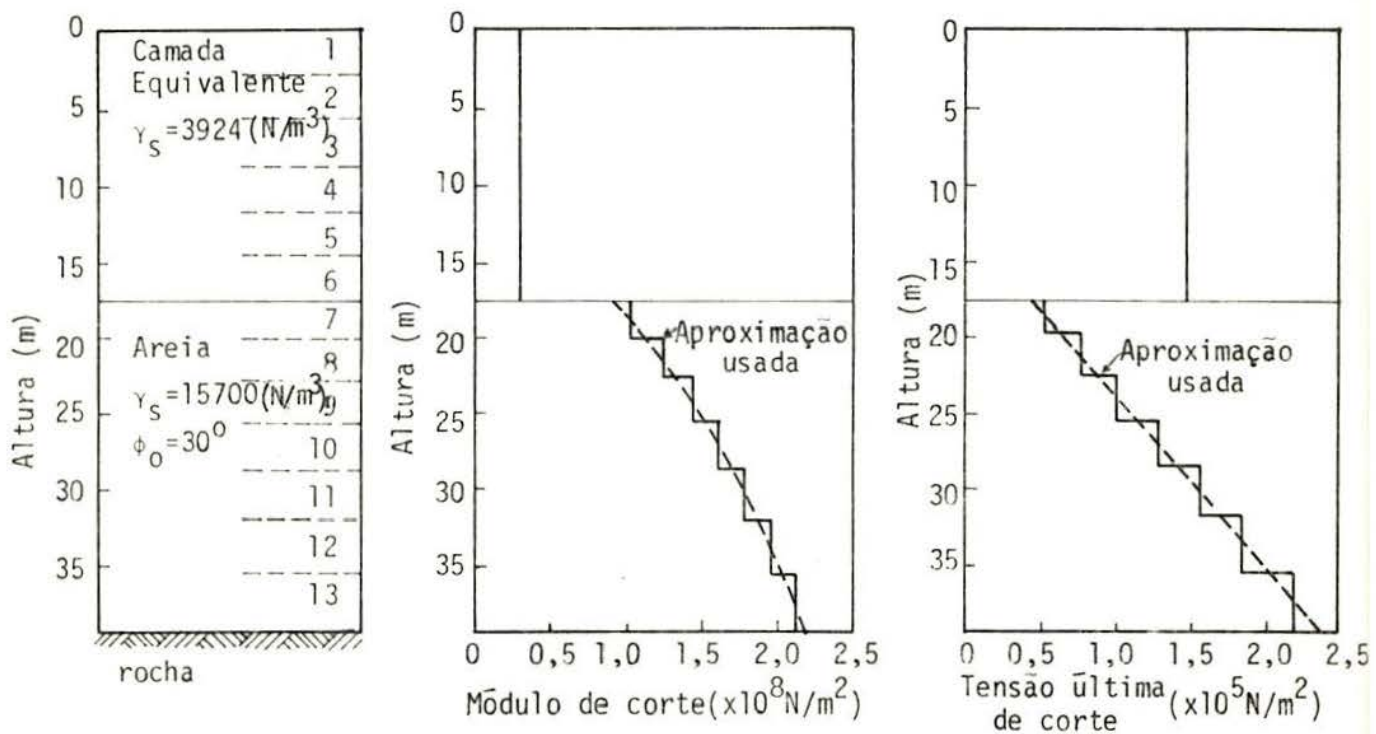
(a) perfil a(b) perfil b

Fig. 4.3.1 - Perfis de solo e variação, com a altura, do módulo de corte inicial e da tensão última de corte assumidos no estudo de casos

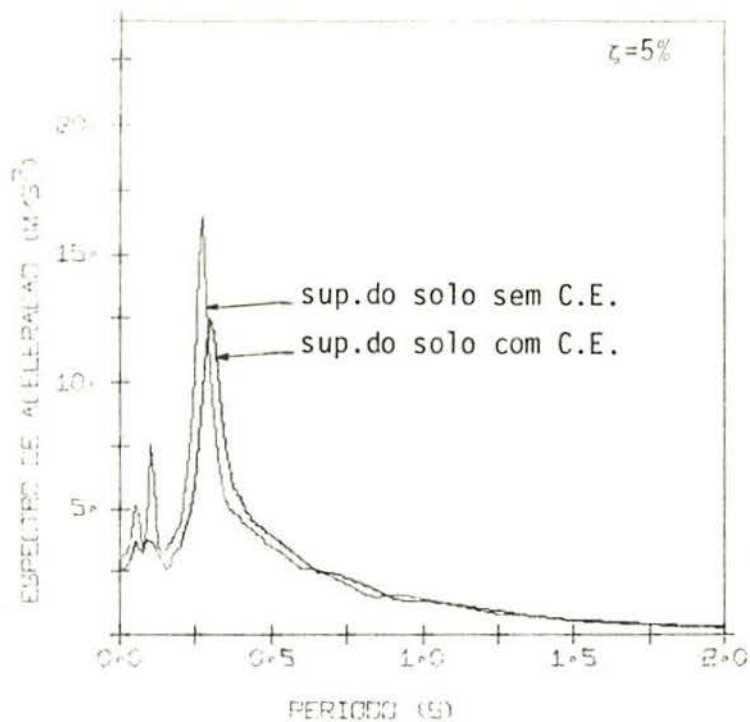


Fig. 4.3.2 - Espectros de acelerações na superfície do solo do perfil a, sem e com influência da camada equivalente (C.E.). Input de Puerto Hueneme. Escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

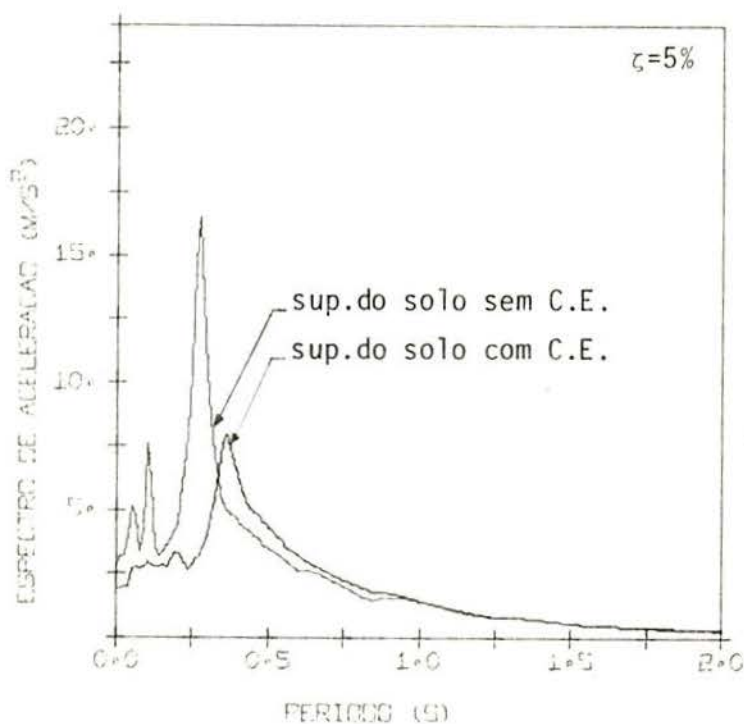


Fig. 4.3.3 - Espectros de acelerações na superfície do solo do perfil b, sem e com influência da camada da equivalente (C.E.). Input de Puerto Hueneme. Escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso.



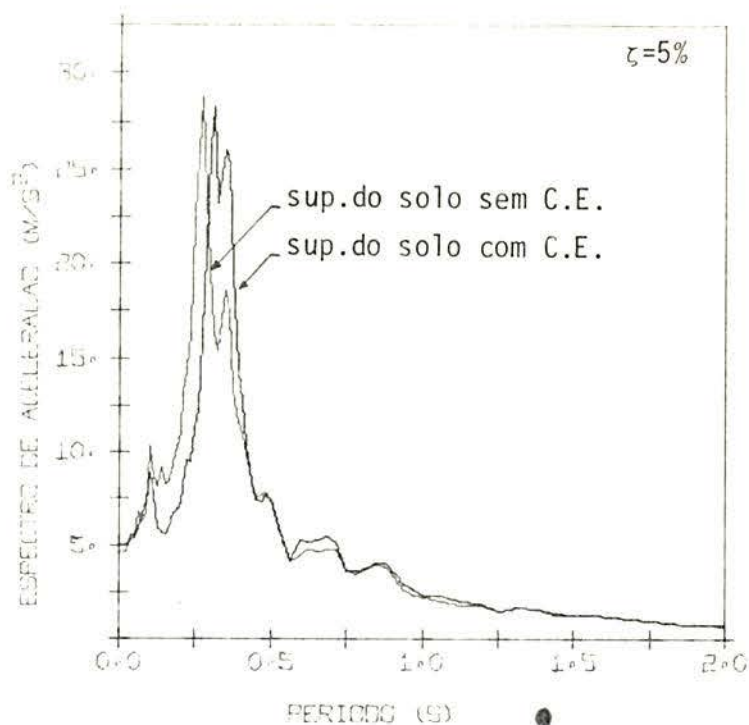


Fig. 4.3.4 - Espectros de acelerações na superfície do solo do perfil a, sem e com influência da camada equivalente (C.E.). Input de Taft com C.I.= 0. Escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso

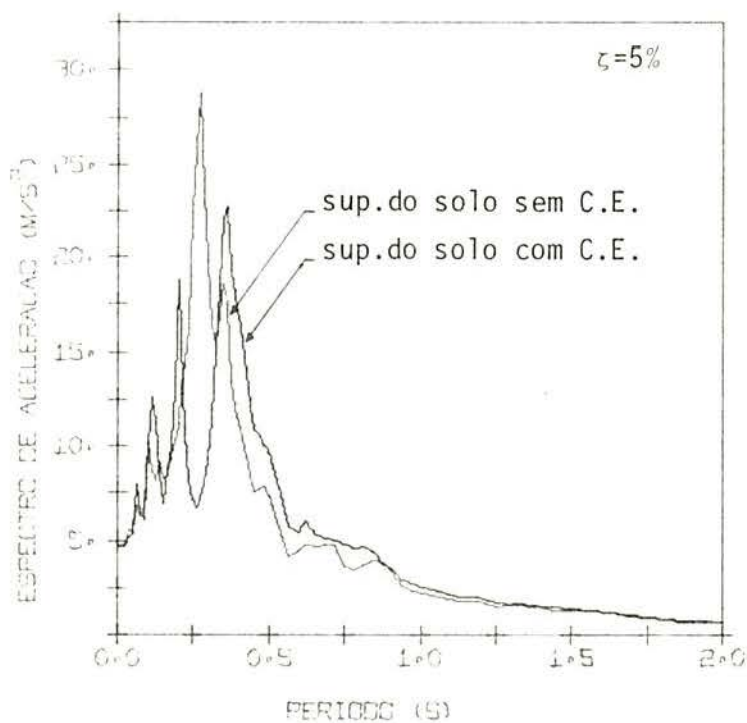


Fig. 4.3.5 - Espectros de acelerações na superfície do solo do perfil b, sem e com influência da camada equivalente (C.E.). Input de Taft com C.I.= 0. Escorregamento não permitido, sem amortecimento viscoso.

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÃO A EDIFÍCIOS DE CONCRETO ARMADO ATÉ A RUPTURA

Descrevem-se brevemente neste capítulo alguns programas de computação utilizados atualmente na análise de estruturas sujeitas a carregamentos estáticos e dinâmicos. Apresenta-se a seguir um modelo contínuo baseado no método das características a fim de se determinar a resposta de edifícios excitados dinamicamente pela propagação vertical de ondas de corte. Mediante o emprego desse modelo é desenvolvido um programa de computação empregado na análise de alguns exemplos de aplicação a partir dos quais são formuladas conclusões a respeito da utilização do modelo em estudo.

#### 5.1 - Introdução: considerações sobre alguns métodos disponíveis

Existem atualmente vários programas de computação disponíveis para a análise de sistemas estruturais. Muitos desses programas são bastante gerais, podendo ser utilizados para realizar uma análise linear ou não-linear para regimes de carregamento estático e dinâmico. Entretanto, a utilização de programas orientados gerais não é sempre vantajosa, havendo casos em que seu emprego pode se tornar difícil ou pouco eficiente. Uma discussão detalhada dessas dificuldades é encontrada na referência 4].

Por outro lado, sistemas estruturais particulares podem ser satisfatoriamente resolvidos mediante o emprego de programas de computação específicos, lineares ou não-lineares.

Não se tem por objetivo nesta seção fazer um levantamento dos métodos existentes para a análise de sistemas estruturais, mas simplesmente apresentar alguns deles com o intuito de fornecer uma visualização geral dos mais recentemente utilizados na análise de edifícios.

O programa TABS<sup>41</sup> permite efetuar a análise linear de edifícios de concreto armado. Esse programa realiza uma análise tridimensional de estruturas de pórticos e paredes sujeitas a carregamentos estático e dinâmico. O edifício é idealizado por um sistema de pórticos planos independentes e paredes de corte interconectados em cada pavimento por uma laje horizontal que é perfeitamente rígida em seu plano. A altura dos pavimentos em cada pórtico precisa ser a mesma e este é considerado para resistir esforços apenas em seu próprio plano. Os pórticos podem ser compostos de colunas, vigas, paredes e painéis (elementos divisórios). Para as colunas e paredes são consideradas deformações por flexão, por corte e axiais. As vigas podem ser não-prismáticas, sendo incluídas as deformações por flexão e por corte. Nos painéis são admitidas somente deformações por corte.

O programa permite analisar edifícios não-simétricos que possuam pórticos e paredes de corte colocados arbitrariamente em planta. Três tipos de carregamentos estáticos verticais e dois tipos de carregamentos estáticos horizontais independentes podem ser considerados. O carregamento estático pode ser combinado com o input dinâmico que é especificado como um acelerograma ou como um espectro de aceleração na base do edifício. Como resultado obtêm-se os modos e as frequências naturais de vibração tridimensionais do edifício, bem como as respostas devido aos carregamentos estático e dinâmico.

Quando a hipótese de que as lajes são perfeitamente rígidas no seu plano não é aceitável, o custo da análise aumenta consideravelmente pois deve-se recorrer a programas gerais tais como SAP<sup>40</sup>, NASTRAN<sup>20</sup> ou ASKA<sup>32</sup>. No entanto, estes casos são muito pouco frequentes.

O programa SAKE<sup>24</sup> pode ser utilizado para a análise não-linear de estruturas de concreto armado sujeitas a um carregamento sísmico. SAKE<sup>24</sup> é um programa de computação específico para estruturas compostas de pórticos planos de concreto armado com comportamento inelástico, sujeitas a uma intensa excitação sísmica em uma direção horizontal. A estrutura de concreto armado pode ser constituída de mais de um pórtico plano com um número arbitrário de pavimentos e vãos. A altura dos

pavimentos é considerada a mesma em qualquer dos pórticos constituintes da estrutura. As deformações axiais das colunas e das vigas não são consideradas. A resposta da estrutura é obtida em termos de deslocamentos e das acelerações máximas dos pavimentos, bem como em termos dos momentos e das rotações máximas nos extremos dos elementos dos pórticos.

Para uma análise tridimensional não-linear pode ser utilizado o programa ANSR-I<sup>21</sup>. Nesse programa a estrutura é idealizada como um conjunto de elementos finitos distintos conectados nos nós e sujeita a carregamento estático e/ou dinâmico.

Embora existam programas de análise tais como TABS<sup>41</sup>, SAP<sup>40</sup> e ANSR-I<sup>21</sup>, referidos acima, ressalte-se que uma análise tridimensional, embora bastante precisa, é requerida apenas para um número limitado de edifícios, não justificando portanto o gasto excessivo em tempo de computação decorrente da sua aplicação em edifícios convencionais.

Por outro lado, modelos mais simplificados (por exemplo, SAKE<sup>24</sup>) que permitam a determinação, de uma maneira satisfatória e a menor custo de computação, do comportamento de edifícios convencionais de concreto armado sujeitos a uma excitação sísmica apresentam muitas vantagens. Entre elas estaria a realização de estudos paramétricos com um custo razoável, o que em geral não é possível com programas gerais.

Levando em conta essa consideração é que se desenvolve neste capítulo um modelo contínuo unidimensional baseado no método das características, com o objetivo de se determinar a resposta de edifícios convencionais excitados dinamicamente pela propagação vertical de ondas de corte. Paralelamente, a exemplo do capítulo anterior, pretende-se mostrar a utilização do método das características a esse tipo de problema.

## 5.2 - Fundamentos

Com o objetivo de se determinar a resposta sísmica de edifícios convencionais de concreto armado, apresenta-se nesta seção um modelo contínuo baseado no método das características que permite considerar o comportamento de edifícios como li

near, viscoelástico ou não-linear. As hipóteses assumidas neste capítulo quanto à performance de estruturas de concreto armado são as seguintes:

a) considera-se a estrutura de concreto armado composta de um conjunto de pórticos planos regulares, sendo a análise limitada à direção paralela a esses pórticos planos;

b) os pórticos planos são considerados engastados na fundação e esta é apoiada em um meio perfeitamente rígido;

c) somente são consideradas deformações devidas à flexão, tanto para as vigas como para as colunas;

d) os nós da estrutura, ou seja, os pontos de intersecção entre vigas e colunas, são considerados perfeitamente rígidos;

e) assume-se que os pontos de inflexão das vigas e colunas ocorram respectivamente na metade do vão e na metade da altura destas.

O efeito das deformações axiais das colunas geralmente passam a ser importantes para edifícios que possuam a razão entre a sua altura e largura maior que aproximadamente quatro. Para valores menores que esse a hipótese c), acima, pode ser considerada satisfatória. Nesse caso os pórticos planos comportam-se essencialmente como componentes de corte, sendo sua rigidez dependente da rigidez dos elementos (vigas e colunas), da forma do pórtico e da rigidez dos nós.

Com base nas hipóteses d) e e) – as mesmas de que parte Heidebrecht<sup>12</sup> para chegar às expressões 5.2.1 e 5.2.2 – pode-se determinar a rigidez de corte de cada andar como sendo a força lateral atuante no meio do andar requerida para se obter uma deformação de corte,  $\gamma$ , unitária sobre a altura,  $h$ , do andar. A fig. 5.2.1 mostra um segmento de um andar típico de um pórtico, no qual são válidas as hipóteses d) e e). Nessa figura  $G_t$  é o módulo de corte total do andar e  $A$  a área transversal do edifício.

A fig. 5.2.2 mostra o sistema uma vez hiperestático, na sua posição deformada, para uma coluna interna da fig. 5.2.1. A relação entre força e deflexão para essa coluna é da

da por:

$$P = \frac{12 E I_h}{h^3} \frac{\Delta}{\left\{ 1 + \frac{2 I_h}{h \left( \frac{I_{b1}}{b_1} + \frac{I_{b2}}{b_2} \right)} \right\}} \quad (5.2.1)$$

na qual  $P$  = força lateral;  $E$  = módulo de elasticidade;  $h$  = altura do andar;  $b_1, b_2$  = comprimento dos vãos das vigas adjacentes;  $I_{b1}, I_{b2}$  = momento de inércia das vigas correspondentes;  $I_h$  = momento de inércia da coluna;  $\Delta$  = deslocamento lateral da coluna de altura  $h$ . A eq. 5.2.1 também é aplicável às colunas externas se o momento de inércia de uma das vigas adjacentes é considerado nulo.

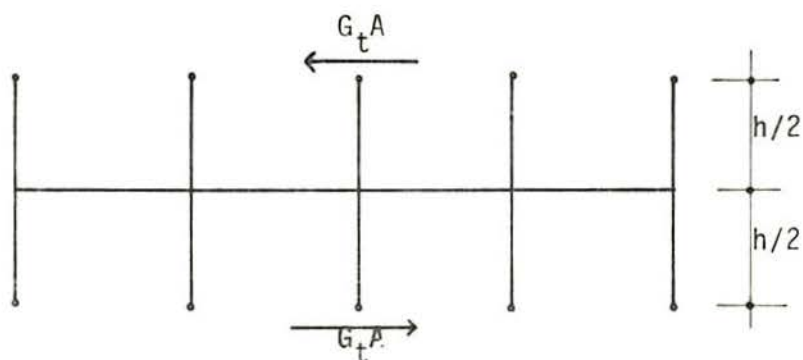


Fig. 5.2.1 - Segmento de um andar típico de um pórtico

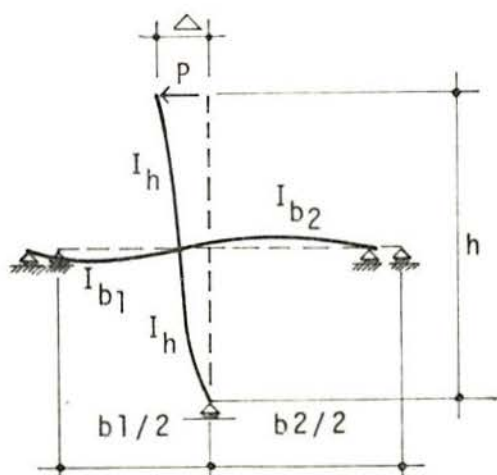


Fig. 5.2.2 - Deformação horizontal de uma coluna do pórtico

Fazendo  $\Delta/h = 1$  na eq. 5.2.1 obtêm-se a rigidez de corte de cada coluna como:

$$GA = \frac{12 E I_h}{h^2} \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{I_h}{h \left( \frac{I_{b1}}{b_1} + \frac{I_{b2}}{b_2} \right)} \right\}} \quad (5.2.2)$$

sendo a rigidez de corte total do andar,  $G_t A$ , a soma aritmética da rigidez  $GA$  de cada coluna do andar.

Uma vez determinado o módulo de corte total,  $G_t$ , em cada andar, é possível determinar a resposta sísmica do edifício de concreto armado através de um modelo contínuo baseado no método das características. Considera-se para isso a fig. 5.2.3 onde estão representados a) o problema real a ser examinado, ou seja, a determinação da resposta sísmica do edifício de concreto armado devido a uma excitação na base; e b) o modelo contínuo.

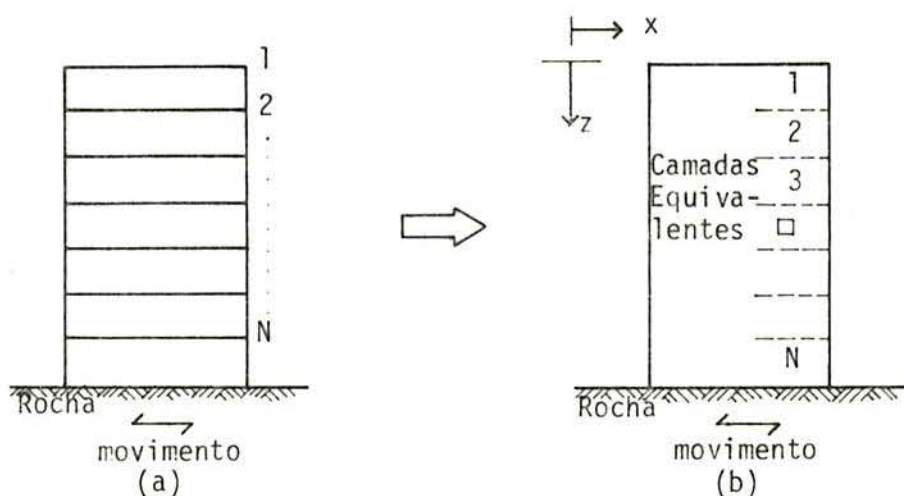


Fig. 5.2.3 - Representação esquemática:  
a) do problema real; e b) do modelo contínuo.

O módulo de corte equivalente,  $G_{eq}$ , de cada camada do modelo contínuo é igual ao módulo de corte total,  $G_t$ , de cada andar do edifício de concreto armado, sendo a densidade de cada camada dada pela seguinte expressão:

$$\rho_{eq_i} = \frac{q_i}{h g} \quad (5.2.3)$$

onde  $q_i$  é a carga total do pavimento  $i$  do edifício por metro quadrado,  $h$  a altura do andar e  $g$  a aceleração da gravidade.

Na fig. 5.2.4 está representada a deformação no plano  $x, z$ , que sofre um elemento do modelo quando excitado pela propagação vertical de ondas de corte. Na direção  $z$  os deslocamentos  $w$  são nulos pois não foram consideradas deformações axiais nas colunas do edifício, de modo que o elemento experimenta somente deslocamento  $u$  na direção  $x$ . Desta maneira, a deformação de corte  $\gamma$  é dada por  $\partial u / \partial z$ , sendo a velocidade do elemento dada por  $\partial u / \partial t$ .

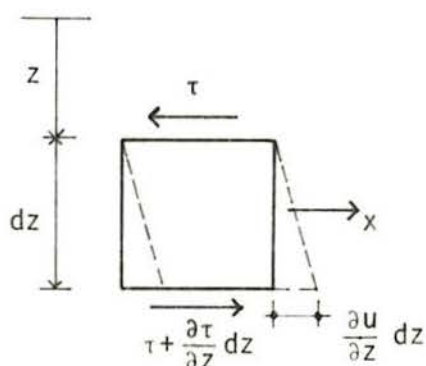


Fig. 5.2.4 - Deformação característica de um elemento do modelo contínuo

Nessas condições a equação de movimento será:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} - \rho_{eq_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial z} - \rho_{eq_i} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (5.2.4)$$

Considerando-se o material do modelo como viscoelástico, a relação dinâmica entre tensão e deformação pode ser expressa por

$$\tau = G_{eq_i} \gamma + \mu_i \frac{\partial \gamma}{\partial t} = G_{eq_i} \frac{\partial u}{\partial z} + \mu_i \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \quad (5.2.5)$$



sendo  $\mu_i$  o coeficiente de viscosidade da camada  $i$ .

Derivando a eq. (5.2.5) em relação ao tempo pode-se colocá-la em termos da velocidade  $v$  como:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = G_{eq,i} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \mu_i \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} = G_{eq,i} \frac{\partial v}{\partial z} + \mu_i \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \quad (5.2.6)$$

As eqs. (5.2.4) e (5.2.6) são similares às eqs. (3.2.28) e (3.2.30) da seção 3.2, portanto, a obtenção da solução neste caso se dará da mesma forma que no Capítulo 3.

Por sua vez o comportamento não-linear de edifícios pode ser levado em conta nesse modelo através das equações de Ramberg-Osgood, utilizadas para aproximar o comportamento do esforço cortante total dos andares com o deslocamento lateral  $\Delta$ .

Concluindo, o modelo contínuo aqui apresentado possui a vantagem de ser de fácil utilização na análise sísmica de edifícios convencionais de concreto armado, inclusive em casos de comportamento não-linear, sendo a resposta sísmica obtida de uma maneira satisfatória e a baixo custo de computação. Por outro lado, em virtude do modelo efetuar a análise do edifício como um todo, o comportamento específico dos elementos (vigas e colunas) torna-se difícil de ser determinado.

O procedimento obtido da aplicação do modelo acima apresentado foi automatizado em um programa de computação sendo seu diagrama de blocos dado a seguir.

### 5.3 - Programa de computação

Apresenta-se, nesta seção, uma descrição do funcionamento geral do programa AUECAR — apresentado na ref. 1 —, composto de um programa principal e de quatro procedures, utilizado na obtenção da resposta de edifícios convencionais de concreto armado excitados dinamicamente por um movimento unidirecional da base.

O programa principal possui as funções de comandar as procedures ESPECTRO, RIGIDEZ e CARACTERISTICA, sendo ainda responsável por: a) ler e imprimir as variáveis globais — como, por exemplo, intervalo de tempo, duração da excitação, nū-

mero de camadas do modelo contínuo, etc. —, utilizando-as no dimensionamento dos arranjos globais; b) ler e calcular a excitação dependendo da variável inteira EXC. As procedures ESPECTRO, RIGIDEZ e CARACTERISTICA são executadas após os itens a) e b) terem sido determinados. A procedure ESPECTRO somente é executada se a variável inteira CE for igual a 1, sendo ainda sua chamada função do número de espectros a determinar — por sua vez cada espectro depende de uma razão de amortecimento. O procedimento resumido acima pode ser observado pelo diagrama de blocos da fig. 5.3.1, sendo a convenção dos blocos diagramas a mesma da fig. 3.3.1.

A procedure RIGIDEZ é uma aplicação do procedimento apresentado por Heidebrecht<sup>12</sup>(1973) para determinar a rigidez de corte total dos andares de um edifício convencional. Após a leitura e impressão das propriedades do edifício, como por exemplo, número de colunas, número de vigas, módulo de elasticidade, área e momento de inércia dos elementos (vigas e colunas), etc., a procedure RIGIDEZ determina a rigidez de corte de cada coluna através da eq. (5.2.2), calculando posteriormente a rigidez de corte total,  $G_t A$ , de cada andar do edifício, através da soma aritmética da rigidez GA de cada coluna do andar. O diagrama de blocos da fig. 5.3.2 ilustra o resumo do procedimento aqui apresentado.

As procedures ESPECTRO e RAMBERG são idênticas às apresentadas na seção 3.3; já a procedure CARACTERISTICA, apesar de apresentar neste programa mudanças no que diz respeito à leitura dos dados e no fato de não considerar escorregamento plástico entre camadas, é basicamente a mesma. Os diagramas de blocos das procedures acima referidas podem ser vistos na seção 3.3.

#### 5.4 - Exemplos de aplicação

Nesta seção apresenta-se a aplicação do modelo contínuo descrito na seção anterior a um edifício sujeito a uma excitação sísmica.

Embora considere-se de maior interesse e importância a sua aplicação a edifícios com comportamento não-linear, de

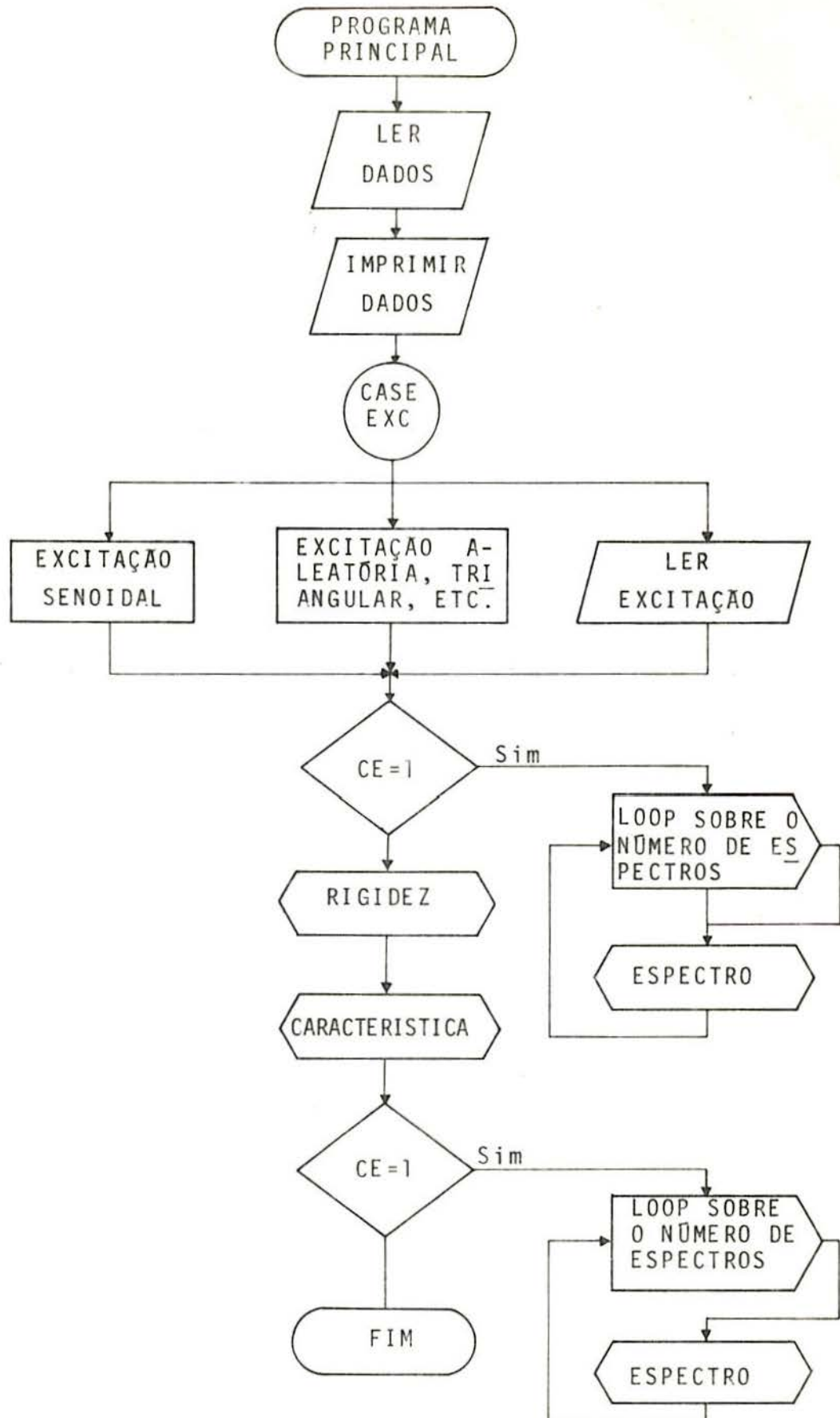


Fig. 5.3.1 - Diagrama de blocos do programa principal

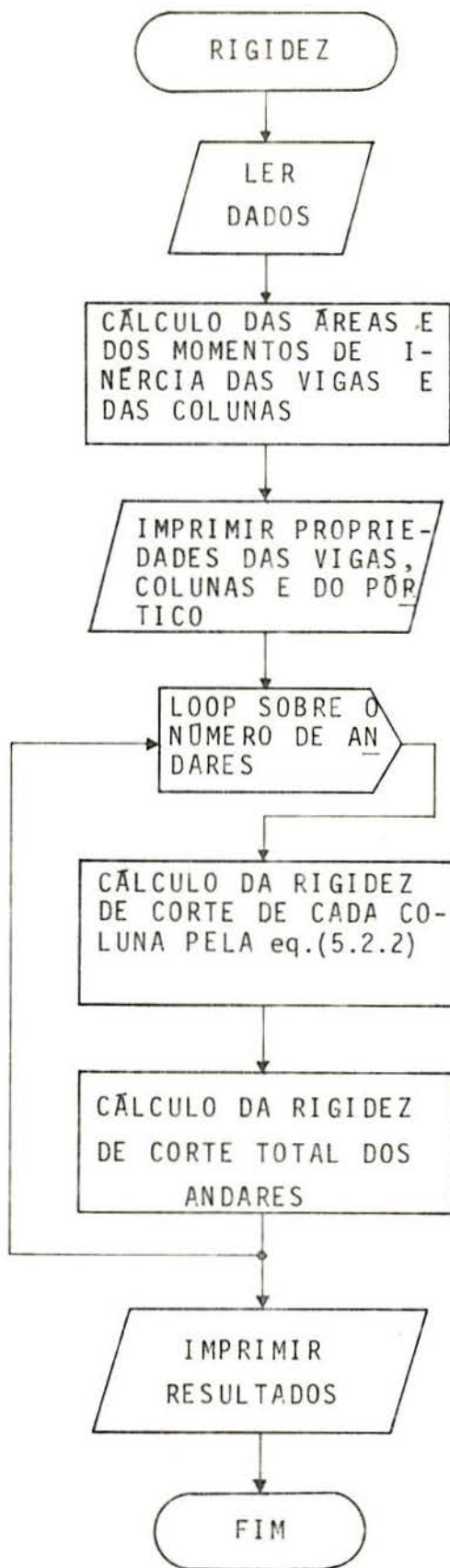


Fig. 5.3.2 - Diagrama de blocos da procedure RIGIDEZ

vido ao objetivo mais geral deste capítulo — ou seja, mostrar a utilização do método das características na obtenção da resposta sísmica de edifícios —, apresentam-se exemplos somente para edifícios com comportamento linear.

A fig. 5.4.1 mostra as dimensões de um pórtico plano, típico do edifício de concreto armado da fig. 5.4.2, utilizado no estudo de casos desta seção. São também apresentadas nessa figura as cargas dos pavimentos do edifício por metro quadrado, sendo as dimensões dos elementos (vigas e colunas) dadas na Tabela 5.4.1, abaixo.

elementos	tipo de seção	dimensões (cm)
V <sub>1</sub> -V <sub>48</sub>	retangular	20x37,5
V <sub>49</sub> -V <sub>51</sub>	"	25x40
C <sub>1</sub> -C <sub>20</sub>	"	30x30
C <sub>21</sub> -C <sub>36</sub>	"	40x40
C <sub>37</sub> -C <sub>52</sub>	"	50x50
C <sub>53</sub> -C <sub>68</sub>	"	60x60

Tabela 5.4.1 - Dimensões dos elementos

A determinação das camadas equivalentes do modelo contínuo obedeceu à eq. (3.2.42), sendo obtidas, dessa maneira, duas camadas equivalentes por andar para o intervalo do tempo  $\Delta t = 0,01$  seg.

As respostas do edifício da fig. 5.4.2 foram determinadas para a excitação da base dada pelo acelerograma de Puerto Hueneme apresentado na seção 3.5.

Para efeito de comparação, a resposta foi também determinada através do espectro de resposta, sendo as cinco primeiras frequências e os cinco primeiros modos de vibração naturais obtidos através da utilização do sistema LORANEDINA. Na Tabela 5.4.2 são apresentadas as três primeiras frequências naturais utilizadas, sendo os três primeiros modos de vibração dados abaixo.

nº da freq.	f(hz)	$\omega$ (rd/s)	$T$ (s)
1	0,505	3,171	1,981
2	1,372	8,620	0,729
3	2,427	15,252	0,412

Tabela 5.4.2 - Frequências e períodos naturais de vibração

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,985 \\ 0,950 \\ 0,901 \\ 0,841 \\ 0,771 \\ 0,715 \\ 0,653 \\ 0,583 \\ 0,511 \\ 0,442 \\ 0,370 \\ 0,295 \\ 0,219 \\ 0,149 \\ 0,085 \\ 0,032 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,894 \\ 0,651 \\ 0,338 \\ -0,004 \\ -0,342 \\ -0,557 \\ -0,736 \\ -0,863 \\ -0,926 \\ -0,922 \\ -0,868 \\ -0,759 \\ -0,604 \\ -0,430 \\ -0,253 \\ -0,099 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -0,750 \\ -0,520 \\ -0,049 \\ 0,458 \\ 0,845 \\ 1,000 \\ 0,916 \\ 0,671 \\ 0,301 \\ -0,116 \\ -0,450 \\ -0,697 \\ -0,814 \\ -0,775 \\ -0,616 \\ -0,393 \\ -0,154 \end{bmatrix}$$

A obtenção do vetor de deslocamento relativo,  $\vec{d}_i$ , correspondente ao modo de vibração  $i$  se dá como:

$$\vec{d}_i = C_i S_d(\omega_i) \vec{x}_i \quad (5.4.1)$$

onde  $S_d(\omega_i)$  é a ordenada do espectro de deslocamentos para a frequência  $\omega_i$  e  $C_i$  é o coeficiente de participação do modo  $i$  dado por:

$$C_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} m_j}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2 m_j} \quad (5.4.2)$$

sendo  $m_j$  a massa do pavimento  $j$  e  $N$  o número de pavimentos.

Uma vez determinados os vetores de deslocamentos relativos,  $\vec{d}_i$ , o deslocamento relativo máximo de cada pavimento foi obtido para uma razão de amortecimento,  $\zeta$ , de 0 e 1% através das duas expressões seguintes:

$$a) d_{j\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^N d_{ij}^2} \quad (5.4.3)$$

$$b) d_{j\max} = \sum_{i=1}^N |d_{ij}|$$

As figs. 5.4.4 e 5.4.5 apresentam as respostas obtidas através do espectro resposta acima indicado e pelo modelo contínuo - programa AUECAR. Na fig. 5.4.4 a resposta pelo programa AUECAR foi determinada para  $\mu = 0$ , ou seja, não foi considerado amortecimento, sendo que na resposta da fig. 5.4.5 o valor de  $\mu$  foi calculado para se obter uma razão de amortecimento igual a 1% do amortecimento crítico -  $\zeta = 0,01$ .

Como se observa através dessas figuras, os deslocamentos relativos máximos obtidos pelo modelo contínuo se comportam razoavelmente bem para os dois casos considerados. Para  $\mu \neq 0$  e apenas entre as coordenadas\* 5 e 7 é que a resposta obtida pelo programa AUECAR sai fora da faixa determinada pelas respostas espectrais (5.4.3a-b). Na Tabela 5.4.3 são apresentados os deslocamentos relativos máximos de algumas coordenadas da fig. 5.4.5, para o modelo contínuo e para o método espectral, bem como a razão entre essas respostas.

Através da última coluna da Tabela 5.4.3 -c/d, ou seja, razão entre a resposta espectral média e a resposta contínua - pode-se verificar que as respostas obtidas através do espectro de resposta e pelo programa AUECAR estão em boa concordância.

Cabe comentar que a resposta obtida pelo programa AUECAR para  $\mu \neq 0$  foi, provavelmente, sobreamortecida, em virtude do coeficiente de viscosidade  $\mu$  ser calculado com base na

\* A indicação das coordenadas é apresentada na fig. 5.4.1.

frequência do primeiro modo de vibração — ver eq. (3.5.3). Em geral — conforme Huan 'et al'<sup>13</sup> — considera-se que a viscosidade  $\mu$  varia com a frequência da excitação. Entretanto, a procedure CARACTERISTICA admite somente um coeficiente de viscosidade  $\mu$  em cada camada, que é usualmente calculado com base na primeira frequência natural  $\omega_1$ . Por outro lado, o edifício utilizado no exemplo estudado é extremamente flexível, estando o seu período natural de vibração ( $T_1 = 1,98$  seg) praticamente fora da faixa de frequência observada no terremoto considerado. Portanto, é de se esperar que a resposta para  $\mu \neq 0$  seja sobreamortecida conforme dito acima.

coordenadas	eq. (5.4.3a) (a)	eq. (5.4.3b) (b)	(a+b)/2 (c)	Programa AUECAR $\mu \neq 0$ (d)	a/d	c/d
1	0,0372	0,0508	0,0440	0,0456	0,816	0,965
3	0,0328	0,0418	0,0373	0,0403	0,814	0,925
6	0,0273	0,0350	0,0292	0,0263	1,033	1,110
9	0,0233	0,0329	0,0281	0,0251	0,931	1,122
12	0,0175	0,0271	0,0223	0,0202	0,866	1,103
15	0,0081	0,0133	0,0107	0,0111	0,730	0,963
17	0,0018	0,0031	0,0025	0,0040	0,459	0,614

Tabela 5.4.3 - Comparação entre as respostas espectrais e as do modelo contínuo para  $\mu \neq 0$

A fig. 5.4.3 apresenta a variação do esforço cortante,  $Q$ , na base do edifício com o tempo, obtida pelo programa AUECAR. Está indicado também nessa figura o cortante máximo, o qual está de acordo com o valor esperado.

Nas figs. 5.4.6 e 5.4.7 são apresentados os espectros de acelerações no último pavimento do edifício — coordenada 1 — para os dois casos considerados. A fim de se avaliar a amplificação dos espectros estão, também, representadas nessas figuras o espectro de acelerações na base do edifício.

Os fatores de amplificação para essas duas figuras



não diferem significativamente, sendo os maiores fatores obtidos para períodos próximos ao período natural de vibração do edifício.

A utilização desses espectros é proveitosa no caso da existência de estruturas secundárias no topo do edifício, tais como, antena, caixa d'água, etc., onde uma boa avaliação da aceleração máxima é importante.

#### 5.5 - Conclusões e recomendações

A aplicação do método das características a um modelo contínuo representativo do comportamento de edifícios de concreto armado foi o tema central da discussão ao longo deste capítulo. Através de um programa de computação baseado nesse modelo foram, então, obtidas as respostas de um edifício sujeito a uma excitação sísmica. As conclusões mais significativas obtidas desses exemplos bem como das seções anteriores foram as seguintes:

a) para edifícios com comportamento linear a resposta obtida através da aplicação do modelo contínuo é satisfatória e está em boa concordância com a obtida através do espectro de resposta;

b) seria interessante obter uma estimativa do erro cometido devido a utilização da expressão de Heidebrecht. Essa estimativa poderia ser obtida mediante o uso de modelos mais elaborados para a obtenção da rigidez das colunas;

c) são necessários estudos complementares sobre o modelo contínuo empregado, principalmente no que diz respeito a sua aplicação a edifícios com comportamento não-linear.

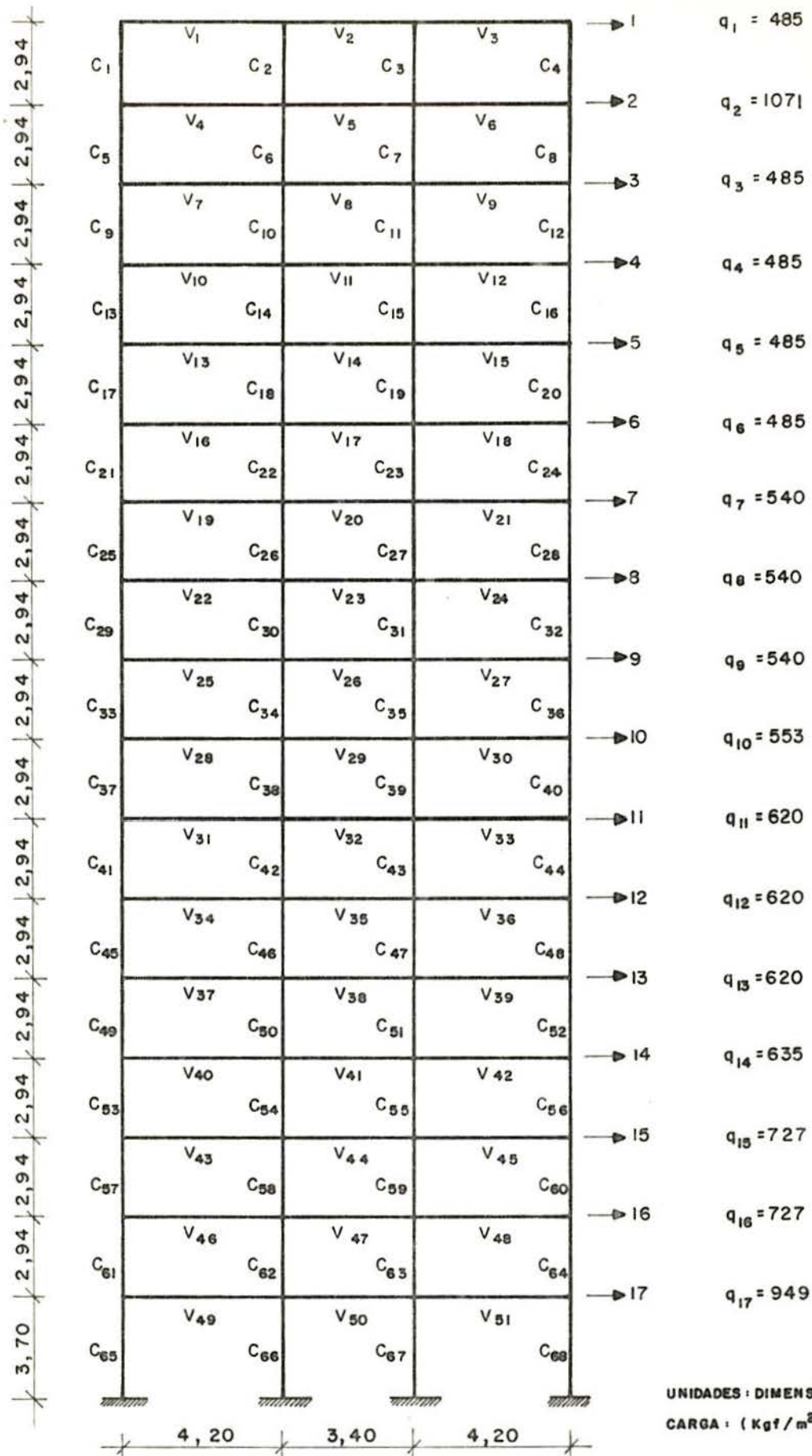


Fig. 5.4.1 - Representação esquemática de um pórtico plano do edifício da fig. 5.4.2

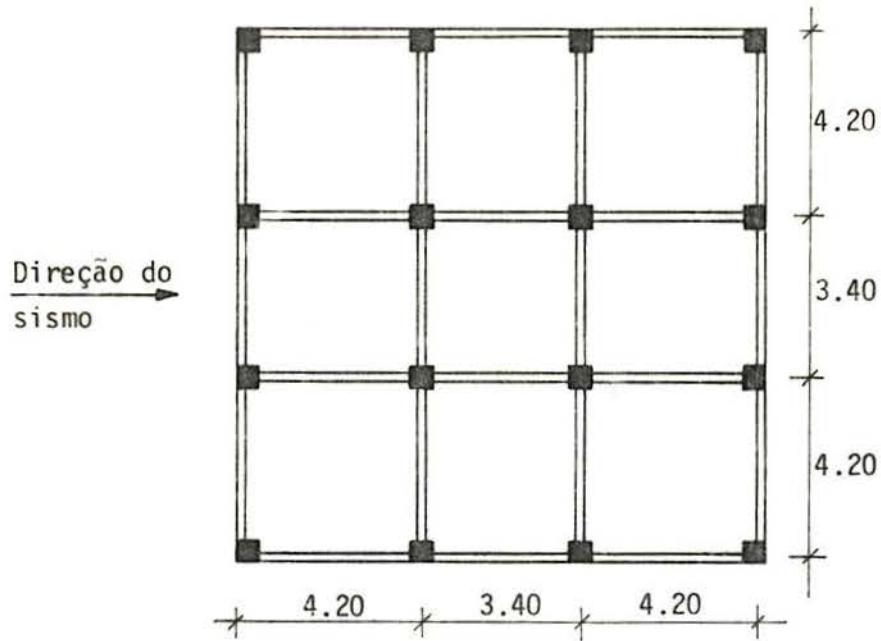


Fig. 5.4.2 - Pavimento tipo do edifício utilizado

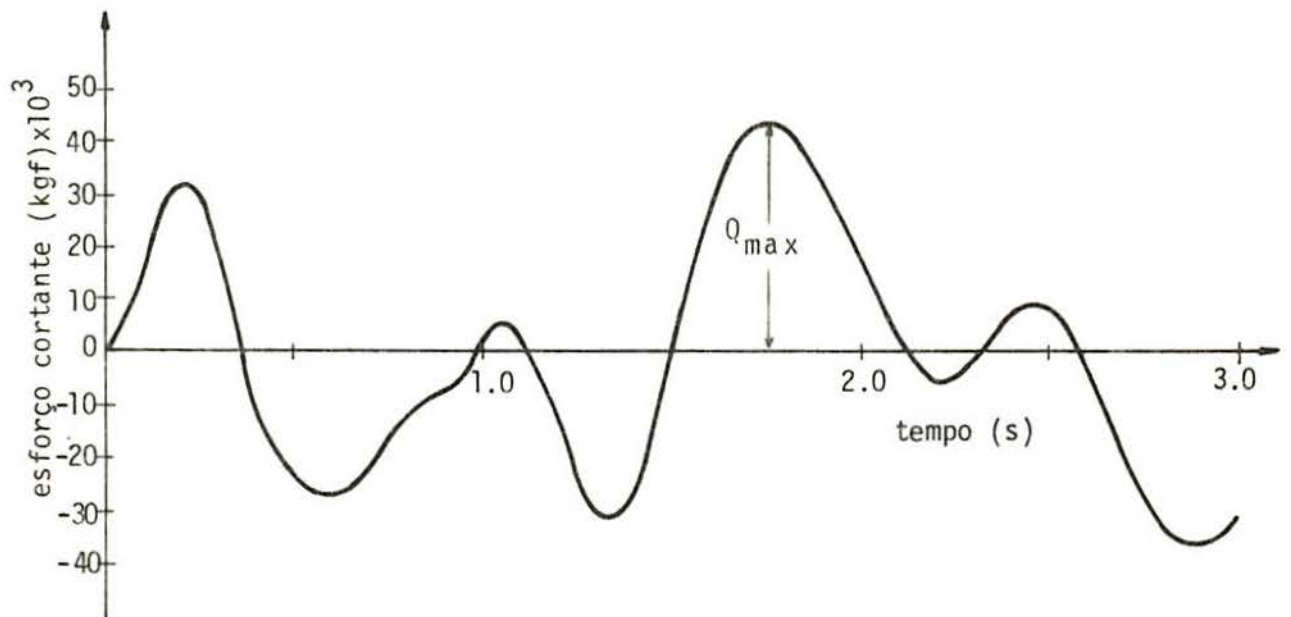


Fig. 5.4.3 - Variação do esforço cortante com o tempo

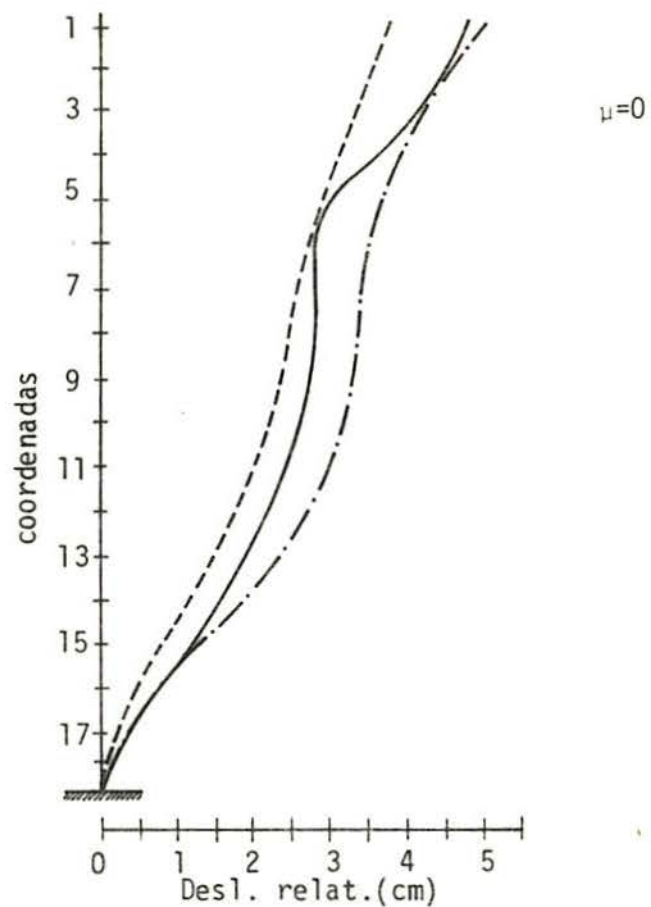


Fig. 5.4.4 - Comparação entre os deslocamentos relativos máximos obtidos através do espectro de resposta e do programa AUECAR.  
Sem amortecimento viscoso.

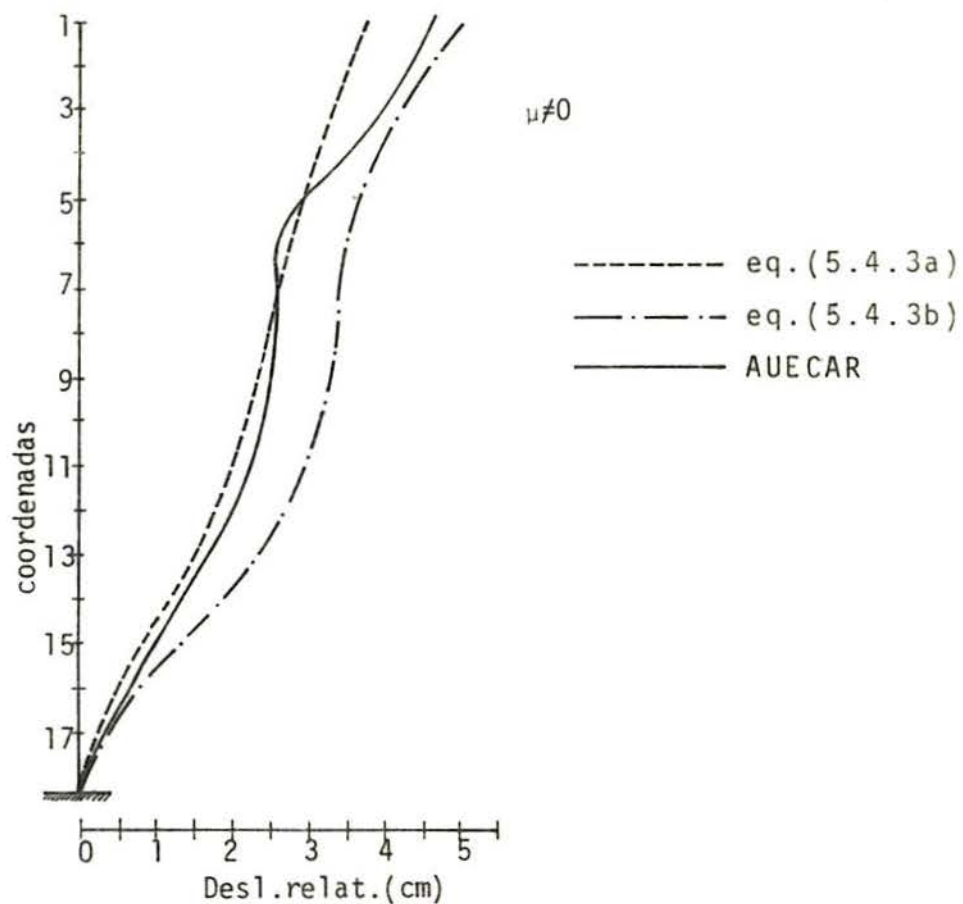


Fig. 5.4.5 - Comparação entre os deslocamentos relativos máximos obtidos através do espectro de resposta e do programa AUECAR.  
Amortecimento viscoso de 1%.

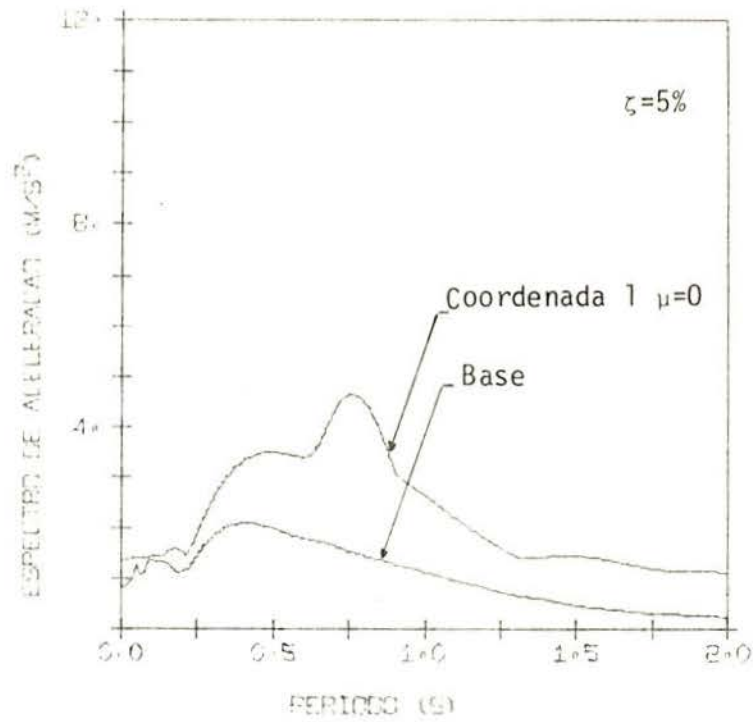


Fig. 5.4.6 - Espectros de acelerações na base e no topo do edifício. Input de Puerto Hueneme, sem amortecimento viscoso

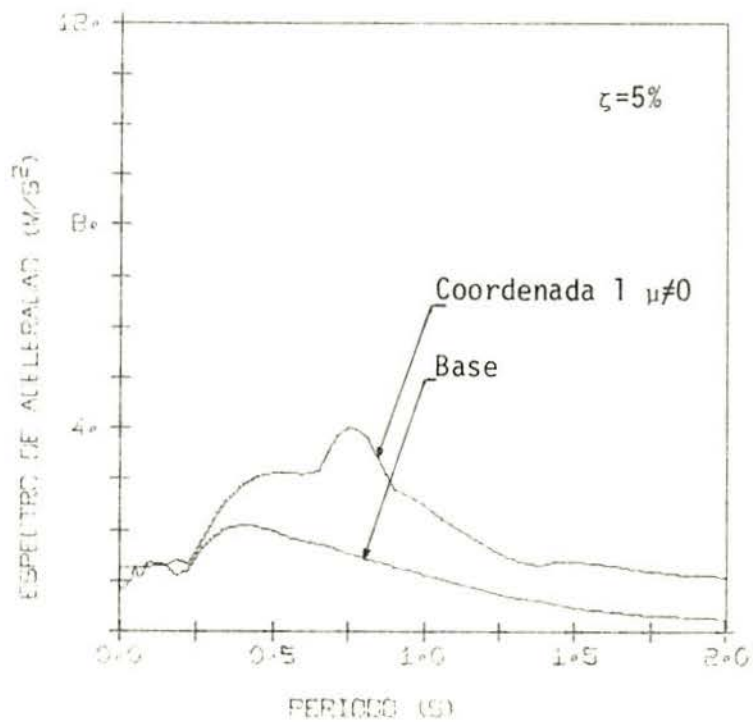


Fig. 5.4.7 - Espectros de acelerações na base e no topo do edifício. Input de Puerto Hueneme, amortecimento viscoso de 1%.

## CAPÍTULO 6

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Visto que no decorrer deste trabalho foram sendo obtidas conclusões e recomendações referentes aos assuntos em estudo, no que se segue pretende-se tão-somente fazer um resumo do caminho percorrido e algumas sugestões no âmbito dos problemas tratados.

Foram discutidas no Capítulo 2 as equações de Ramberg-Osgood, inicialmente de uma maneira geral, e em seguida em uma forma mais adequada a sua aplicação a estratos de solo. O procedimento de Ramberg-Osgood foi programado na sub-rotina RAMBERG, estando esta presente nos programas INFLUSOLO e AUECAR — embora não tenha sido apresentado no Capítulo 5 nenhum exemplo não-linear. A utilização do modelo de Ramberg-Osgood possui a vantagem de ser bastante versátil, requerendo para representar o comportamento de diferentes problemas unidimensionais mudanças mínimas na sub-rotina programada.

Particular atenção foi concedida à apresentação do método das características, cuja aplicação a sistemas não-lineares se deu ao longo de todo o trabalho, sendo, desta maneira, considerada como o seu objetivo geral. A utilização deste método em sistemas hiperbólicos, como já foi vista, é bastante flexível podendo ser resolvidos através dele diferentes problemas de propagação de ondas sísmicas em solos — citados na seção 3.1 —, bem como o de propagação de ondas sísmicas em edifícios — visto no decorrer do Capítulo 5. A facilidade de programação, o baixo custo de computação e a possibilidade de se considerar estruturas com diferentes tipos de comportamento sem implicar em uma maior demanda do tempo de processamento, são outras vantagens que tornam atrativo o uso do método.

A aplicação do método das características a estratos flexíveis de solo teve início no Capítulo 3 com a resolução de vários exemplos, nos quais se considerou o comportamento histerético do solo. A importância de se permitir escorregamento plástico entre camadas foi, também, ilustrada através de um exemplo.

No Capítulo seguinte foi estudada a influência que uma grande concentração de edificações exerce na resposta sísmica de estratos de solo. Embora o modelo utilizado seja simples, os resultados obtidos da sua aplicação dão uma primeira avaliação da influência das edificações, bem como mostram a flexibilidade do método empregado.

A representação de edifícios convencionais de concreto armado através de um modelo contínuo — Capítulo 5 — constitui um dos problemas bastante interessantes da aplicação do método das características, principalmente no que diz respeito ao comportamento não-linear.

Como sugestão à aplicação do método das características a estratos de solos, poderia ser desenvolvida uma sub-rotina que determinasse automaticamente, através de um processo iterativo, o intervalo de tempo  $\Delta t$ , bem como a divisão do estrato em camadas.

Quanto a sua aplicação na obtenção da resposta sísmica de edifícios, poderiam ser desenvolvidas sub-rotinas baseadas em modelos mais elaborados que o utilizado por Heidebrecht, para a obtenção da rigidez das colunas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AUECAR. Manual do usuário. Informe de laboratório do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul
2. BERG, G.V. A study of the earthquake response of inelastic systems. Proceedings, Structural Engineering Association of California, Oct. 1965.
3. BYCROFT, G.N. Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum. Philosophical Transactions, Royal Society of London, 248(948): 327-68, Jan. 1956.
4. COURANT, R. & HILBERT, D. Methods of mathematical physics. New York, Interscience, 1966. v.2.
5. CRANDALL, S.H. Engineering analysis: a survey of numerical procedures. New York, McGraw-Hill, 1956.
6. DOBRY, R. Damping in soils: its hysteretic nature and the linear approximation. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering, 1970. 82p.
7. DOBRY, R.; WHITMAN, R.V.; ROESSET, J.M. Soil properties and the one-dimensional theory of earthquake amplification. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering, 1971. 347p.
8. FACCIOLI, E. & RAMIREZ, J. Earthquake response of non-linear hysteretic soil systems. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Sussex, 4(3):261-76, Jan/Mar. 1976.
9. GATES, J.H. California's seismic design criteria for bridges. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 102(12): 2301-13, Dec. 1976.
10. HALL Jr., J.R. Coupled rocking and sliding oscillations of rigid circulation footings. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON WAVE PROPAGATION AND DYNAMIC PROPERTIES OF EARTH



- MATERIALS, University of New Mexico, 1967. p.139-48.
11. HARDIN, B.O. & DRNEVICH, V.P. Shear modulus and damping in soils: design equations and curves. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, New York, ASCE, 98(7): 667-92, July 1972.
  12. HEIDEBRECHT, A.C. & SMITH, B.S. Aproximate analysis of tall wall-frame structures. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 99(2):199-221, Feb. 1973.
  13. HUANG, W.; GRUPTA, D.C.; AGRAWAL, P.K. Application of method of characteristics in seismic analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL MECHANICS IN REACTOR TECHNOLOGY, 4., San Francisco, Aug. 1977. Transactions. Brussels, Commission of the European Communities, 1977. v.k(a),div.k1/12.
  14. IDRIS, I.M. & SEED, H.B. Seismic response of horizontal soil layers. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, New York, ASCE, 94(4):1003-31, July 1968.
  15. INFLUSOLO. Manual do usuário. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
  16. JENNINGS, P.C. Periodic response of a general yielding structure. Journal of the Engineering Mechanics Division. New York, ASCE, 90(2):131-66, Apr. 1964.
  17. KOLSKY, H. Stress waves in solids. New York, Dover, 1963.
  18. LYSMER, J. & RICHART Jr., F.E. Dynamic response of footings to vertical loadings. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, New York, ASCE, 92(1):65-91, Jan. 1966.
  19. MASSAU, J. Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. Gent, 1900.
  20. McCORMICK, C.W. The NASTRAN user's manual. Washington, NASA, Scientific and Technical Information Office, 1972.
  21. MONDKAR, D.P. & POWELL, G.H. ANSR-I: general purpose program for analysis of nonlinear structural response. Berkeley, Calif., Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, Dec. 1975. 107p.

22. NEWMARK, N.M. & ROSENBLUETH, E. Fundamentals of earthquake engineering. Englewood-Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1971.
23. NIETO, J.A.; ROSENBLUETH, E.; RASCON, O.A. Modelo matemático para representar la interacción dinámica del suelo y cimentación. In: CONGRESO NACIONAL DE INGENIERIA SISMICA, 1., Guadalajara, México, 1965.
24. OTANI, Shunsuke. SAKE - a computer program for inelastic response of r/c frames to earthquakes. Urbana, University of Illinois, Nov. 1974. 145p.
25. PARMELEE, R.A. Building - foundation interaction effects. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 93(2):131-52, Apr. 1967.
26. PECKNOLD, D.A. & RIDDELL, R. Effect of initial base motion of response spectra. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 104(2):485-91, Apr. 1978.
27. PERELMAN, D.S.; PARMELEE, R.A.; LEE, S.L. Seismic response of single-story interaction systems. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 94(11):2597-2608, Nov. 1968.
28. RAMBERG, W. & OSGOOD, W.T. Description of stress-strain curves by three parameters. Washington, National Advisory Committee for Aeronautics, 1943.
29. RICHART Jr., F.E. Some effects of dynamic soil properties on soil-structure interaction. Journal of the Geotechnical Engineering Division, New York, ASCE, 101(12):1197-240, Dec. 1975.
30. SARRAZIN, M.A.; ROESSET, J.M.; WHITMAN, R.V. Soil-structure interaction in earthquake resistant design. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering, 1970.
31. SAUER, R. & SZABŐ, I. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. Berlin, Springer, 1969. v.2, pt.2.
32. SCHREM, E. A short description of ASKA. Prepared for International short course on Finite Element Linear and Nonlinear Analysis: Methods and General Programs, Milano, June 1975. University

of Stuttgart. Institut für Statik und Dynamik der Luft, 1975. 30p.

33. SEED, H.B.; LYSMER, L.; HWANG, R. Soil-structure interaction analysis for seismic response. (Closure). Journal of the Geotechnical Engineering Division, New York, ASCE, 103(4): 341-6, Apr. 1977.
34. STREETER, V.L. & WYLIE, E.B. Hydraulic transients. New York, New York, McGraw-Hill, 1967.
35. STREETER, V.L.; WYLIE, E.B.; RICHART Jr., F.E. Soil motion computations by characteristics method. Journal of the Geotechnical Engineering Division, New York, ASCE, 100(3): 247-63, Mar. 1974.
36. TRIFUNAC, M.D. Response envelope spectrum and interpretation of string earthquake ground motion. Bulletin of the Seismological Society of America, Palo Alto, 61(2):343-56, 1971.
37. WESTERGAARD, H.M. Earthquake-shock transmission in tall building. Engineering News Record, Hightstown, 111:654-6, 1933.
38. WHITMAN, R.V. Analysis of soil-structure interaction: a state-of-the-art review. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering, Apr. 1972.
39. WILSON, E.L. Discussion — ANG, A.H.S. Analysis of frames with nonlinear behavior. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 88(6):97-9, Dec. 1960.
40. WILSON, E.L. Solid SAP - a static analysis program for three dimensional solid structures. University of California, Structural Engineering Laboratory, Mar. 1970.
41. WILSON, E.L.; HOLLINGS, J.P.; DOVEY, H.H. Three dimensional analysis of building systems - TABS. Berkeley, Calif., Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, December 1972.