Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

PARTICELLE E STRINGHE RELATIVISTICHE

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Sara Dalmonte

Anno Accademico 2019/2020

Abstract

Il seguente elaborato tratta la teoria delle stringhe nella sua formulazione più semplice e antica. Nate per altri scopi, all'inizio degli anni '80 la comunità scientifica tornò ad interessarsi alle stringhe perchè potenzialmente adatte per formulare una teoria di gravità quantistica. Come loro modo di vibrazione infatti emerge naturalmente il mediatore dell'interazione gravitazionale, detto gravitone. Si propone così una possibile via per conciliare il mondo macroscopico della relatività generale di Einstein con quello microscopico della meccanica quantistica. Questa potente teoria ha però alcuni punti deboli tra cui la mancanza di verificabilità sperimentale, con la tecnologia odierna e la predizione di particelle superluminali come il tachione.
Di seguito verrà trattata la dinamica libera relativistica di particelle puntiformi e stringhe. Inoltre si mostrerà, nell'ultimo capitolo, come dai campi elettromagnetici e gravitazionali sia possibile ottenere rispettivamente gli stati di fotone e di gravitone. In particolare, per quest'ultima particella, si svilupperà l'identificazione con lo stato vibrazionale della stringa chiusa, quantizzata nel gauge cono-luce.

Indice

Introduzione

Il seguente elaborato di tesi propone di trattare la teoria di stringa bosonica. Come suggerito dal nome, la quantizzazione degli spettri energetici di tali stringhe, non individua stati fermionici ma si limita a particelle bosoniche. L'utilizzo del nome "particelle" non è casuale: per capire quale relazione intercorre tra gli oggetti fisici stringa e particella è necessario approfondire come è avvenuta la nascita di tale teoria. La teoria delle stringhe nacque alla fine degli anni '60 e venne sviluppata con l'obiettivo di risolvere un apparente enigma che travolgeva la fisica delle particelle. Sperimentalmente si scoprì che, a differenza dei leptoni, gli adroni erano soggetti ad un fenomeno peculiare: il loro momento angolare era in relazione lineare con il quadrato della loro energia. Per ogni adrone conosciuto si poteva ottenere attraverso rilevazioni sperimentali una retta, meglio conosciuta come *traiettoria di Regge* (in onore del fisico italiano Tullio Regge), che presentava tutti i suoi stati eccitati. Iniziò così la ricerca di una teoria che riuscisse a spiegare questo fatto empirico e si ipotizzò che, contrariamente ai leptoni, gli adroni non fossero particelle elementari. Fra tutte le teorie che concorsero alla spiegazione di ciò, primeggiò la Cromodinamica Quantistica, capace di descrivere le interazioni forti interne agli adroni. Questo segnò la fine della teoria, che proponeva di interpretare l'andamento dei dati attraverso stringhe vibranti unidimensionali (non scomponibili in particelle subatomiche), i cui modi di vibrazione corrispondevano a stati quantomeccanici descriventi una particella. Ecco spiegata la stretta relazione tra stringa ad una dimensione e particella puntiforme, priva di dimensioni.
All'inizio degli anni '80 si rivalutò la, oramai abbandonata, teoria delle stringhe perché potenzialmente in grado di realizzare l'unificazione di tutte le interazioni. Le interazioni fondamentali ad oggi note sono quattro: interazione elettromagnetica, interazione debole, interazione forte ed interazione gravitazionale; le prime tre sono correttamente descritte a qualsiasi scala energetica da teorie quantistiche di campo rinormalizzabili, ottenute dalla sintesi della relatività ristretta e della meccanica quantistica, poichè le interazioni tra particelle avvengono quasi sempre a velocità prossime a quelle della luce e in spazi di taglia subatomica. Tutte le teorie di campo quantizzato sono accorpate nel *Modello Standard*, una teoria di gauge ottenuta dal prodotto diretto dei seguenti gruppi: $U(1)_{\mathrm{Y}} \otimes SU(2)_{\mathrm{L}} \otimes SU(3)_{\mathrm{C}}$. Ad ogni generatore della simmetria sono associate particelle bosoniche prive di massa (ad eccezione del caso debole in cui i mediatori hanno massa

generata dal meccanismo di Higgs), di spin unitario, che svolgono la funzione di mediare le interazioni tra particelle di materia. L'interazione elettromagnetica, rappresentata dal gruppo $U(1)_{\mathrm{Y}}$, é mediata dal fotone, quella debole - $SU(2)_{\mathrm{L}}$ - da tre bosoni noti come W_{+}, W_{-} e Z_0 ed infine quella forte - $SU(3)_{\mathrm{C}}$ - da otto gluoni $g_1, ..., g_8$, distinti per carica di colore. Tutti i bosoni qui elencati sono stati osservati sperimentalmente. Potrebbe così sembrare risolta tutta la fenomenologia della fisica delle particelle elementari, ma il quadro non è completo: non esiste teoria di campo quantizzato, descrivente l'interazione gravitazionale, che sia rinormalizzabile. Questo significa che il tentativo di inquadrare la gravitazione in una teoria quantizzata fallisce a causa dell'insorgere di osservabili divergenti che rendono la teoria priva di senso. L'incorporazione della forza di gravità nel Modello Standard prevedrebbe l'esistenza di un bosone messaggero privo di massa, di spin 2, chiamato *gravitone*, mai osservato sperimentalmente. Tutto ciò può essere giustificato dal fatto che la forza gravitazionale è compiutamente descritta dalla relatività generale, una teoria di campo classica, incompatibile con i principi della meccanica quantistica. Sembrerebbe così che i fenomeni naturali che la fisica si propone di comprendere e descrivere appartengano a due regimi distinti e inconciliabili: il mondo del microscopico e quello del macroscopico. Ebbene, in teoria quantistica delle stringhe il gravitone emerge naturalmente come modo di vibrazione della stringa elementare e, se questa teoria dovesse riuscire a descrivere consistentemente l'interazione gravitazionale e a mostrare che ogni particella ad oggi nota scaturisce come modo di vibrazione di una stringa, allora la teoria quantizzata di campo gravitazionale sarebbe già naturalmente formulata e potrebbe essere inserita nel quadro di tutte le teorie quantistiche ad oggi note, rendendo così possibile l'unificazione di tutte le quattro interazioni. La teoria delle stringhe non si propone come un'alternativa al Modello Standard ma di questo è una possibile estensione: riproduce infatti le note teorie quantistiche dei campi nel limite in cui la lunghezza della stringa $\ell_S \to 0$, ovvero quando la sua unica dimensione tende a degenerare nella puntiformità. La teoria prevede che ℓ_S sia dell'ordine della lunghezza di Planck ovvero 10^{-35} m, inaccessibile con la tecnologia odierna, che permette di sondare la materia fino a scale di circa 10^{-18} m. In questo modo, in ogni esperimento, le stringhe non sono distinguibili dalle particelle puntiformi. Questo rappresenta uno dei maggiori limiti della teoria delle stringhe che ad oggi, e sicuramente ancora per molti anni futuri, non permette di ottenere risultati verificabili sperimentalmente. Inoltre la stringa bosonica presenta un ulteriore problema: predice in uno dei suoi modi di vibrazione il cosiddetto *tachione*, particella superluminale e di massa immaginaria. Si conclude così che la teoria delle stringhe è ancora in piena fase di sviluppo e che, ad oggi, si pone l'obiettivo di conciliare la meccanica quantistica con la relatività generale classica, proponendosi inoltre come una possibile teoria di unificazione di tutte le forze conosciute.

Capitolo 1

Particella puntiforme relativistica

1.1 Spazio di Minkowski e trasformazioni di Lorentz

Lo spazio di Minkowski, denotato con $\mathcal{M}^4$, è un modello introdotto dal matematico Hermann Minkowski al fine di rappresentare gli eventi relativistici nei casi in cui l'interazione gravitazionale risulta essere debole. Questo spazio infatti viene anche detto *spaziotempo piatto* e si limita perciò a valere solo per la relatività ristretta.
Nella fisica classica si rappresentano gli eventi in uno spazio Euclideo tridimensionale comprendente le tre coordinate spaziali. Il tempo non viene incluso in quanto considerato assoluto. Con la nascita della relatività ristretta cadde non solo la concezione di tempo assoluto ma anche quella di spazio assoluto, per cui ci si ricondusse allo spazio quadridimensionale minkowskiano con sistemi di riferimento comprendenti sia le tre coordinate spaziali, sia quella temporale. Per maggiori dettagli è possibile consultare [1]. Lo spazio $\mathcal{M}^4$ è caratterizzato da una metrica costante chiamata *Metrica di Minkowski*, ovvero da una matrice η con componenti $\eta_{\mu\nu}$ definita come $\eta = diag(-,+,+,+)$. Ogni punto di questo spazio rappresenta un evento relativistico, ovvero un fenomeno contraddistinto da un preciso istante temporale ed una terna unica di coordinate spaziali, identificato da un quadrivettore del tipo:

$$x^\mu = (ct, \overrightarrow{x}) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right), \tag{1.1}$$

dove nella prima coordinata, l'istante temporale è moltiplicato per la velocità della luce c così che tutte le quattro coordinate abbiano la dimensione di una lunghezza. Il percorso tracciato da una particella è rappresentato nello spaziotempo come una curva formata da un susseguirsi continuo di punti (eventi), detta *linea di mondo*. Anche una particella statica traccia una propria linea di mondo, in quanto il tempo fluisce indefinitamente. In questo ambito le trasformazioni di Galileo risultano superate e subentrano quelle più complesse di Lorentz, in grado di produrre perfettamente, nel limite di bassa velocità, le trasformazioni classiche già note. Anche le trasformazioni di Lorentz sono infatti relazioni lineari tra due sistemi di riferimento inerziali. Considerando un sistema S ed uno S' che si sta muovendo lungo la direzione positiva dell'asse x, con velocità costante v ed assumendo che gli assi coordinati di entrambi i sistemi di riferimento siano paralleli e che le due origini coincidano all'istante $t = t' = 0$, allora le trasformazioni di Lorentz sono:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove il fattore relativistico o di Lorentz γ è dato da

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.3}$$

É evidente che le coordinate y e z, ortogonali alla velocità relativa tra i due sistemi di riferimento inerziali, non subiscono modifiche.
Le trasformazioni di Lorentz lasciano invariate alcune quantità, dette *scalari*, che risultano quindi indipendenti dal sistema di riferimento scelto. Un esempio di scalare nello spazio di Minkowski é rappresentato dall'intervallo infinitesimo

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.4a}$$
$$= -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \tag{1.4b}$$

che é possibile interpretare come il quadrato della distanza tra l'evento di coordinate x^μ e l'origine del sistema di riferimento scelto $x_0^\mu = (0,0,0,0)$ (la scelta dell'origine é arbitraria, non ha alcun significato fisico). I segni sopra riportati indicano la differenza fondamentale tra coordinate spaziali e temporali. L'accordo sul valore dell'intervallo è sinteticamente espresso come:

$$ds^2 = ds'^2. \tag{1.5}$$

Questa uguaglianza indica che tutti gli osservatori lorentziani concordano sul valore dello scalare indipendentemente dal sistema di riferimento scelto. A differenza del caso classico, la quantità Lorentz invariante ds^2 non è definita positiva ma può assumere qualsiasi valore. Quando questa assume valori negativi si dice che l'intervallo che connette i due eventi è *tipo tempo*, ovvero che la distanza che separa i due eventi è percorribile a velocità minori di c, a differenza di intervalli *tipo spazio*, $ds^2 > 0$, che implicherebbero velocità superluminali. Eventi connessi dalla linea di mondo di un fotone si dicono invece separati da un intervallo *tipo luce*. In questo caso si ha che $ds^2 = 0$, ciò significa che la separazione spaziale tra i due eventi coincide esattamente con la distanza che la luce dovrà percorrere nell'intervallo temporale che li separa. Questa distinzione non è solo nozionistica ma alla sua base vi è un concetto profondo: eventi separati da intervalli tipo tempo sono causalmente connessi in quanto tutte le velocità inferiori a c sono lecite, a differenza di quelli separati da intervalli tipo spazio che diventano così inaccessibili.

1.2 Azione per una particella relativistica libera

Con particella libera si intende un oggetto puntiforme, non soggetto a forze, libero di muoversi nello spazio ad esso circostante. É possibile descrivere il suo moto attraverso l'azione S, una grandezza fisica che ne caratterizza lo stato e l'evoluzione nel tempo, avente la stessa dimensione della costante di Planck ridotta $\hbar$:

$$[S] = \frac{ML^2}{T}. \tag{1.6}$$

L'azione, un funzionale avente come variabili funzioni descriventi la linea di mondo della particella e restituente un valore reale, è ottenibile come integrale temporale della lagrangiana L del sistema stesso. Per ulteriori approfondimenti si veda [2]. Dalle conoscenze della meccanica classica é immediato ottenere l'azione S_c, per una particella non relativistica libera, esattamente come l'integrale nel tempo della sua energia cinetica:

$$S_c = \int L_c \, dt = \int \frac{1}{2} m v^2 \, dt. \tag{1.7}$$

Purtroppo questa espressione non è generalizzabile al caso relativistico, nemmeno nella condizione più semplice di particella libera in moto con velocitá uniforme. Ciò è spiegabile con il fatto che la (1.7) permette alla particella di assumere qualsiasi valore di velocità, comprese quelle superluminali, non consistenti dal punto di vista fisico. Affinchè l'azione relativistica sia definita correttamente si richiede che essa sia indipendente da eventuali trasformazioni di Lorentz. Il fatto che l'azione venga definita come scalare comporta che le equazioni del moto che ne discendono siano anch'esse Lorentz invarianti. Immaginando una particella, la cui traiettoria spaziotemporale inizi nell'origine e termini in $(ct_f, \overrightarrow{x_f})$, esistono diverse linee di mondo che permettono di connettere i due punti iniziale e finale e l'obiettivo è di ottenere il medesimo valore di azione per ognuna di esse. Affinchè questo sia vero, si definisce l'azione come proporzionale al tempo proprio infinitesimo $d\tau$, invariante relativistico in quanto:

$$d\tau = \gamma^{-1} dt = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}}. \tag{1.8}$$

É evidente da questa defizione che il tempo proprio è definito solo se la velocità della particella è al massimo uguale a c (caso limite per una particella priva di massa), in quanto per velocità superluminali τ assume valori non reali. Il segno negativo interno all'ultima radice dell'equazione (1.8) è giustificato dal fatto che ds è un vettore di tipo tempo e, come sopra detto, ciò indica che i due eventi di cui ne rappresenta la distanza sono causalmente connessi. Dato che il tempo proprio ha le dimensioni di un tempo, per ottenere le dimensioni dell'azione è necessario aggiungere un fattore moltiplicativo avente le dimensioni di un'energia. Quest'ultimo fattore deve essere uno scalare per preservare l'invarianza dell'azione, perciò si può scegliere la massa a riposo della particella m e la velocitá della luce c, ottenendo il fattore complessivo mc^2 che rappresenta appunto l'energia di riposo della particella. Queste considerazioni portano alla definizione di azione di una particella relativistica libera come:

$$S_r = -mc \int ds = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{1.9}$$

dove nella seconda uguaglianza si è fatto uso della definizione di ds ricavata tramite la (1.4b). Gli estremi di integrazione rappresentano gli istanti temporali rispettivamente del punto spaziotemporale iniziale e finale della linea di mondo.
É ora immediato ricavare la Lagrangiana relativistica per una particella libera che eguaglia esattamente il prodotto, cambiato di segno, tra l'energia di riposo e l'inverso del fattore relativistico:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{1.10}$$

Questa Lagrangiana cessa di essere reale per velocità superluminali perciò, come anticipato a inizio paragrafo, la limitazione sulla velocità massima risulta essere soddisfatta. Analizzando il limite non relativistico della Lagrangiana è possibile svilupparne la radice quadrata assumendo $v \ll c$ e, arrestando lo sviluppo al primo ordine, si ottiene:

$$L \simeq -mc^2 (1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) = -mc^2 + \frac{1}{2} m v^2, \tag{1.11}$$

perfettamente coincidente con la lagrangiana classica, a meno di un fattore costante $(-mc^2)$, che non influisce sulle equazioni del moto. Risulta così evidente che la dinamica relativistica, nel limite di basse velocità, si riduce perfettamente a quella classica. É possibile ottenere il momento della particella relativistica come derivata della Lagrangiana rispetto alla velocità, usando la (1.10) si trova:

$$\overrightarrow{p} = \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{v}} = \gamma m \overrightarrow{v}. \tag{1.12}$$

Infine si definisce l'Hamiltoniana nel caso relativistico come:

$$H = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{v} - L = \gamma m c^2. \tag{1.13}$$

In conclusione è stato possibile discendere tutte le quantità fisiche rilevanti per la particella relativistica, derivandole semplicemente dall'azione S_r che garantisce l'invarianza lorentziana di tutta la fisica che descrive.

1.3 Invarianza per riparametrizzazione

L'invarianza per riparametrizzazione riflette un'importante proprietà dell'azione di una particella relativistica. Per risolvere l'integrale in (1.9) può essere utile parametrizzare la linea di mondo con un parametro arbitrario, ad esempio ξ. É possibile dimostrare che il valore dell'azione non dipende dalla scelta di tale parametro. La parametrizzazione è un'operazione lecita in quanto la definizione di azione non fa riferimento a parametri ed è così possibile pensare di suddividere l'intera linea di mondo in intervalli consecutivi e sommare il valore della loro rispettiva integrazione. L'unica richiesta necessaria sul parametro ξ è che questo sia strettamente crescente, dal punto iniziale della linea di mondo x_i^μ, a quello finale x_f^μ, così che il parametro scelto assuma valori ordinati nell'intervallo $[\xi_i, \xi_f]$. In questo modo si descrive il moto della particella attraverso il parametro arbitrario e le coordinate x^μ diventano funzioni del parametro stesso: $x^\mu = x^\mu(\xi)$. Si richiede quindi che valgano le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} x_i^\mu = x^\mu(\xi_i) \\ x_f^\mu = x^\mu(\xi_f) \end{cases} \tag{1.14}$$

Diviene così possibile esplicitare la dipendenza dal parametro e ridefinire la (1.4a) come:

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi} \frac{dx^\nu}{d\xi} (d\xi)^2. \tag{1.15}$$

Considerando che per ogni moto, la cui velocità non eccede quella della luce, vale l'uguaglianza $ds^2 = (ds)^2$, allora l'azione (1.9) assume la forma:

$$S_r = -mc \int_{\xi_i}^{\xi_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi} \frac{dx^\nu}{d\xi}}\, d\xi. \tag{1.16}$$

Questa è la forma esplicita che l'azione assume quando la linea di mondo viene parametrizzata da ξ. Facendo ciò si fissa un particolare osservatore lorentziano che, in virtù della parametrizzazione con ξ, giungerà ad un particolare valore di S_r. Se si facesse un cambiamento di parametro $\xi \to \xi^*$, il nuovo osservatore giungerebbe al medesimo valore di S_r del primo. Ecco allora spiegata la proprietà di invarianza per riparametrizzazione. Per verificarla è sufficiente effettuare un cambiamento di parametro, ad esempio da $\xi \to \xi^*$. Per la regola della catena vale

$$\frac{dx^\mu}{d\xi} = \frac{dx^\mu}{d\xi^*}\frac{d\xi^*}{d\xi}, \tag{1.17}$$

che permette così di esprimere l'azione come:

$$S_r = -mc\int_{\xi_i}^{\xi_f}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi^*}\frac{dx^\nu}{d\xi^*}}\frac{d\xi^*}{d\xi}d\xi = -mc\int_{\xi_i^*}^{\xi_f^*}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi^*}\frac{dx^\nu}{d\xi^*}}d\xi^*. \tag{1.18}$$

É evidente che questa espressione assume esattamente la medesima forma della (1.16), provando così la proprietà discussa.

1.4 Equazioni del moto

Per ottenere le equazioni del moto di una particella relativistica è necessario calcolare la variazione δS dell'azione (1.9), nel caso in cui la sua linea di mondo subisca una piccola variazione $\delta x^\mu(\xi)$, dove ξ rappresenta semplicemente il parametro arbitrario scelto per parametrizzare il cammino spaziotemporale. La variazione dell'azione è semplicemente data da:

$$\delta S = -mc\int \delta(ds), \tag{1.19}$$

con ds ottenibile dalla derivazione della (1.15) che porta a:

$$2ds\delta(ds) = -2\eta_{\mu\nu}\delta(\frac{dx^\mu}{d\xi})\frac{dx^\nu}{d\xi}(d\xi)^2. \tag{1.20}$$

Il fattore 2 è dovuto semplicemente alla simmetria dell'espressione di partenza. Poichè la variazione della velocità è uguale alla derivata temporale della variazione spaziale, è possibile semplificare l'ultima uguaglianza come segue:

$$\delta(ds) = -\eta_{\mu\nu}\frac{d(\delta x^\mu)}{d\xi}\frac{dx^\nu}{ds}d\xi = -\frac{d(\delta x^\mu)}{d\xi}\frac{dx_\mu}{ds}d\xi, \tag{1.21}$$

dove si è fatto uso della metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ per abbassare l'indice al quadrivettore dx^ν. Ora è quindi possibile esplicitare la variazione dell'azione. Assumendo, come già fatto, di parametrizzare la linea di mondo con ξ ed indicando come punti iniziale e finale rispettivamente ξ_i e ξ_f si ha:

$$\delta S = mc\int_{\xi_i}^{\xi_f}\frac{d(\delta x^\mu)}{d\xi}\frac{dx_\mu}{ds}d\xi. \tag{1.22}$$

Nell'espressione sopra riportata di δS è possibile riconoscere che

$$mc\frac{dx_\mu}{ds} = mu_\mu = p_\mu, \tag{1.23}$$

con u_μ e p_μ dette rispettivamente quadrivelocità e quadrimomento e definite nel seguente modo:

$$u^\mu(s) \equiv \frac{dx^\mu(s)}{ds} = (c\gamma, \overrightarrow{v}\gamma) \tag{1.24}$$

$$p^\mu(s) = mu^\mu(s) = (mc\gamma, m\overrightarrow{v}\gamma) = \left(\frac{E}{c}, \overrightarrow{p}\right). \tag{1.25}$$

Esprimendo la (1.22) in funzione del quadrimomento si ottiene:

$$\delta S = \int_{\xi_i}^{\xi_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\xi} p_\mu d\xi. \tag{1.26}$$

Per ottenere un'equazione del moto è necessario ricondursi al caso in cui δx^μ moltiplica un oggetto, sotto il segno di integrale, che possa essere annullato. Poichè in (1.26) compare ancora una derivazione agente su δx^μ è possibile manipolare l'espressione, giungendo alla seguente forma:

$$\delta S = \int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi \frac{d}{d\xi}(\delta x^\mu p_\mu) - \int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi \delta x^\mu(\xi) \frac{dp_\mu}{d\xi}. \tag{1.27}$$

Il primo termine si annulla, in quanto le coordinate agli estremi sono state fissate, mentre il secondo si deve annullare per un $\delta x^\mu(\xi)$ arbitrario. Si ottiene allora così l'equazione del moto cercata:

$$\frac{dp_\mu}{d\xi} = 0. \tag{1.28}$$

Ne consegue che il quadrimomento p_μ (o p^μ) di una particella puntiforme relativistica è conservato lungo la sua linea di mondo. Questa proprietà di conservazione è indipendente dalla parametrizzazione scelta. Parametrizzando la linea di mondo della particella con il tempo proprio τ si ottiene ugualmente

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}, \tag{1.29}$$

dove, nella seconda uguaglianza, si è fatto uso della definizione del quadrimomento espresso in funzione di τ. La (1.29) è un'ulteriore versione di equazione del moto che esprime la costanza del cambiamento di x^μ lungo una linea di mondo, suddivisa in intervalli uguali di tempo proprio. L'equazione del moto espressa in questa forma è quindi valida solo per

τ, e non per altri parametri in generale, in quanto la suddivisione in intervalli disuguali non è compatibile con la variazione costante del quadrivettore.
Si è così mostrato come ottenere l'equazione del moto partendo dall'azione relativistica per una particella puntiforme. La (1.29) (o (1.28)) è Lorentz invariante così come l'azione da cui è stata ottenuta. Per verificare ciò si considerino due sistemi di riferimento inerziali S e S' e le rispettive trasformazioni di Lorentz descritte in (1.2). Utilizzando il formalismo tensoriale si ha che il quadrivettore x^μ si trasforma nel seguente modo: $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$, con $L^\mu{}_\nu$ elementi della matrice della trasformazione di Lorentz definita come:

$$L = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poichè ds^2, essendo uno scalare, assume lo stesso valore in ogni sistema di riferimento, allora l'equazione del moto in S' assume la forma:

$$0 = \frac{d^2 x'^\mu}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}(L^\mu{}_\nu x^\nu) = L^\mu{}_\nu \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} \tag{1.30}$$

Grazie alla proprietà di invertibilità della matrice L è quindi verificata l'invarianza lorentziana delle equazioni del moto.

1.5 Coordinate cono-luce

Il sistema di coordinate cono-luce è particolarmente utile nello studio della teoria delle stringhe, in quanto permette di ottenere con naturalezza la quantizzazione delle stringhe relativistiche.
Si definiscono due coordinate cono-luce x^+, x^- come due combinazioni lineari, indipendenti, della coordinata temporale e di una coordinata spaziale a scelta, generalmente si usa x^1, come:

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1). \tag{1.31}$$

Le coordinate x^2, x^3 non giocano alcun ruolo in questa definizione. Nel sistema delle coordinate cono-luce, (x^0, x^1) è sostituito da (x^+, x^-) ma anche x^2, x^3 sono tenute in considerazione, così che il set completo delle coordinate diventa: (x^+, x^-, x^2, x^3). In particolare x^+, x^- sono dette coordinate cono-luce, perchè gli assi coordinati associati corrispondono esattamente alle linee di mondo di fasci di luce, emessi nell'origine lungo l'asse x^1. Come mostrato in Figura 1.1, per un fascio di luce emesso nella direzione positiva di x^1 si ha: $x^1 = ct = x^0$ e $x^- = 0$. La linea $x^- = 0$ è per definizione l'asse x^+.

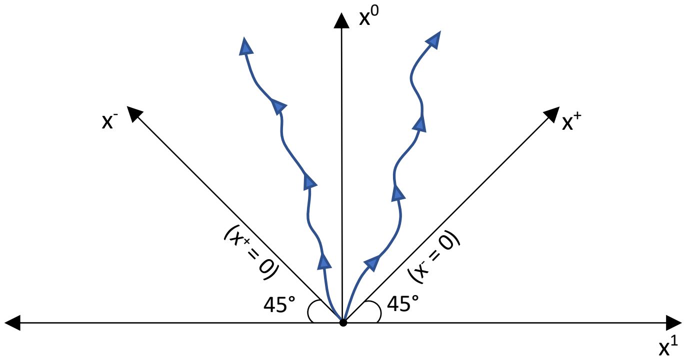

Figura 1.1: Si riporta un diagramma dello spaziotempo con x^0 e x^1 rappresentati come assi ortogonali. Si mostrano inoltre gli assi cono-luce $x^{\pm} = 0$. Le curve in azzurro corrispondono ad alcune possibili linee di mondo di particelle fisiche relativistiche.

Similmente, per un fascio di luce emesso nella direzione negativa dell'asse x^1, si ha $x^1 = -ct = -x^0$ e $x^+ = 0$, corrispondente all'asse x^-. Gli assi $x^{\pm}$ sono orientati a 45° rispetto a x^0, x^1. Nessuna delle due coordinate x^+, x^- può essere interpretata come coordinata temporale in modo standard. La proprietà più familiare del tempo è che questo fluisce incessantemente per ogni moto fisico di una particella. L'aggettivo fisico, associato alla parola moto, non è casuale: due esempi di moto fisico sono rappresentati in Figura 1.1 come curve che permangono all'interno del cono-luce, con una pendenza sempre superiore ai 45°. Infatti, se così non fosse, rappresenterebbero moti a velocità superluminali, non interpretabili fisicamente in modo corretto. Si nota che, per entrambe le linee di mondo rappresentate, le coordinate x^+, x^- aumentano nella direzione delle frecce. In accordo con quanto già visto, la coordinata x^+ resta costante per un raggio di luce emesso lungo la direzione negativa di x^1, mentre x^- resta costante per un raggio di luce nella direzione di x^1 positiva. Si assume quindi, per convenzione, che x^+ sia *coordinata temporale cono-luce*, mentre x^- sia *coordinata spaziale cono-luce*. Considerando i differenziali di (1.31), si trova:

$$2dx^+dx^- = (dx^0 + dx^1)(dx^0 - dx^1) = (dx^0)^2 - (dx^1)^2. \tag{1.32}$$

Ne consegue che l'intervallo infinitesimo invariante definito in (1.4b) può essere espresso in termini di coordinate cono-luce nella seguente forma:

$$-ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{1.33}$$

In questa definizione è evidente la simmetria di x^+, x^-. Per rappresentare quest'ultima equazione in funzione di indici è necessario mantenerne quattro distinti, indicati come: $+, -, 2, 3$. In analogia con la (1.4a) è possibile scrivere in questo sistema di coordinate:

$$-ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.34}$$

dove si è introdotta la *metrica cono-luce* $\hat{\eta}$ che, così come la metrica di Minkowski, è simmetrica sotto lo scambio degli indici. Espandendo questa equazione e comparandola con la (1.33) si trova:

$$\hat{\eta}_{+-} = \hat{\eta}_{-+} = -1, \quad \hat{\eta}_{++} = \hat{\eta}_{--} = 0. \tag{1.35}$$

Allora nel sottospazio $(+, -)$ gli elementi diagonali di $\hat{\eta}$ si annullano a differenza di quelli non appartenenti alla diagonale. Inoltre si trova che la metrica cono-luce non accoppia il sottospazio $(+, -)$ con quello $(2, 3)$: $\hat{\eta}_{+j} = \hat{\eta}_{-j} = 0$ con $j = 2, 3$. La rappresentazione matriciale della metrica considerata è quindi:

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le componenti cono-luce di un quadrivettore arbitrario a^μ sono definite, in accordo con la (1.31), come

$$a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 + a^1), \quad a^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 - a^1). \tag{1.36}$$

Il prodotto scalare tra quadrivettori arbitrari a^μ e b^μ, che nel caso generale relativistico Minkowskiano corrisponde a

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3, \tag{1.37}$$

è esprimibile attraverso le componenti cono-luce come:

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = \hat{\eta}_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = -a^- b^+ - a^+ b^- + a^2 b^2 + a^3 b^3. \tag{1.38}$$

Dalle due espressioni sopra riportate è immediato concludere che:

$$-a^- b^+ - a^+ b^- = -a^0 b^0 + a^1 b^1. \tag{1.39}$$

É possibile introdurre gli indici cono-luce bassi: considerando l'espressione $a \cdot b = a_\mu b^\mu$ ed espandendo la somma su μ attraverso gli indici cono-luce, si ottiene

$$a \cdot b = a_+ b^+ + a_- b^- + a_2 b^2 + a_3 b^3. \tag{1.40}$$

Dalla (1.38) si trova che:

$$a_+ = -a^-, \quad a_- = -a^+. \tag{1.41}$$

1.6 Momento ed energia cono-luce

Il quadrimomento è già stato definito in (1.25). Le sue componenti in coordinate cono-luce, in accordo con la (1.36), sono:

$$p^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^1) = -p_-, \quad p^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^1) = -p_+. \tag{1.42}$$

La prima domanda che sorge è a quale componente far corrispondere l'energia cono-luce e la risposta più logica potrebbe ricadere su p^+. Infatti, in ogni sistema di riferimento lorentziano, il tempo e l'energia corrispondono alla prima coordinata del quadrivettore corrispondente. In accordo con la definizione del tempo cono-luce sarebbe quindi naturale scegliere per l'energia cono-luce la coordinata p^+. Questo ragionamento non è però corretto in quanto le coordinate cono-luce si trasformano diversamente rispetto a quelle lorentziane. Entrambe $p^\pm$ sono buone candidate per l'energia, in quanto sempre positive per particelle fisiche però, ricordando la relazione valida in relatività ristretta che connette la massa a riposo m di una particella e la sua energia relativistica E,

$$\frac{E^2}{c^2} - \overrightarrow{p}\,\overrightarrow{p} = m^2c^2, \tag{1.43}$$

si trova, con $m \neq 0$:

$$p^0 = \frac{E}{c} = \sqrt{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} + m^2c^2} > |\overrightarrow{p}| \geq |p^1|. \tag{1.44}$$

Si ha come conseguenza che $p^0 \pm p^1 > 0$ e quindi $p^\pm > 0$. Perciò, nonostante entrambe le componenti siano candidate plausibili per l'energia, la scelta fisicamente motivata ricade su $-p_+ = p^-$. Per giustificare ciò è necessario notare che l'energia ed il tempo sono variabili coniugate. In accordo con la meccanica quantistica infatti, l'operatore Hamiltoniano misura l'energia e genera l'evoluzione temporale. Considerando il prodotto relativistico di p_μ e x^μ in coordinate standard,

$$p \cdot x = p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3, \tag{1.45}$$

che si traduce in coordinate cono-luce come

$$p \cdot x = p_+x^+ + p_-x^- + p_2x^2 + p_3x^3. \tag{1.46}$$

Nella (1.45) si ha che $p_0 = -E/c$ appare in coppia con x^0. In analogia a ciò si può pensare che $p_+ = -E_{cl}/c$ sia in coppia con x^+, similmente per le componenti con indice -. Poichè $-p_+ = p^-$ è conveniente usare p^- come energia cono-luce, al fine di eliminare il segno negativo nella seguente equazione:

$$p^- = \frac{E_{cl}}{c}. \tag{1.47}$$

Se si considera una particella in moto a velocità elevata nella direzione positiva dell'asse x^1, poichè p^1 è molto grande, l'equzione (1.44) dà:

$$p^0 = \sqrt{(p^1)^2 + m^2c^2} \simeq p^1 + \frac{m^2c^2}{2p^1}. \tag{1.48}$$

L'energia cono-luce della particella diviene quindi:

$$p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^1) \simeq \frac{m^2c^2}{2\sqrt{2}p^1}. \tag{1.49}$$

Si nota così che sia la velocità che l'energia, in coordinate cono-luce, descrescono al crescere di p^1.

Capitolo 2

Stringa bosonica relativistica

2.1 Funzionale d'area per superfici spaziotemporali

Si è visto che, per una particella puntiforme relativistica, è possibile rappresentare la sua storia attraverso una *linea di mondo* dello spaziotempo. Nel caso di una stringa relativistica, dotata di una certa lunghezza, per rappresentare il trascorso storico si ricorre invece all'uso di una *superficie di mondo* bidimensionale dello spaziotempo. Per riferirsi a questa superficie si utilizzano due parametri indicati solitamente con: τ e σ, dove il primo è relazionato al tempo, mentre il secondo alla posizione lungo la stringa. Le coordinate spaziotemporali diventano $x^\mu = (x^0, x^1, ..., x^d)$ e la superficie di mondo è descritta dalle immagini delle funzioni mappa $X^\mu(\tau, \sigma)$ che proiettano, nello spaziotempo, una regione dei parametri. Fissato un punto (τ, σ) nello spazio dei parametri, la sua immagine in un punto con coordinate spaziotemporali è

$$(X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), ..., X^d(\tau, \sigma)), \tag{2.1}$$

con X^μ dette *coordinate della stringa*.
Poichè è previsto che le stringhe aperte possano formarne di chiuse, congiungendo i propri estremi, da qui in avanti verranno trattate solo stringhe aperte, dotate cioè di due capi distinti. Le linee di mondo dei punti estremi della stringa avranno il parametro σ costante e saranno parametrizzabili unicamente da τ dato che, essendo correlato al tempo, fluisce costantemente. Per questi due punti allora è valida la condizione:

$$\frac{\partial X^0}{\partial \tau}|_{estremo} \neq 0. \tag{2.2}$$

É lecito assumere che la (2.2) sia valida per valori di σ diversi dai due estremi.
Per trovare l'elemento d'area nella superificie di mondo, partendo dallo spazio dei parametri, è necessario tenere conto che, l'immagine nello spaziotempo bidimensionale di un rettangolo infinitesimo di lati $d\tau$ e $d\sigma$ non diventa necessariamente un rettangolo ma,

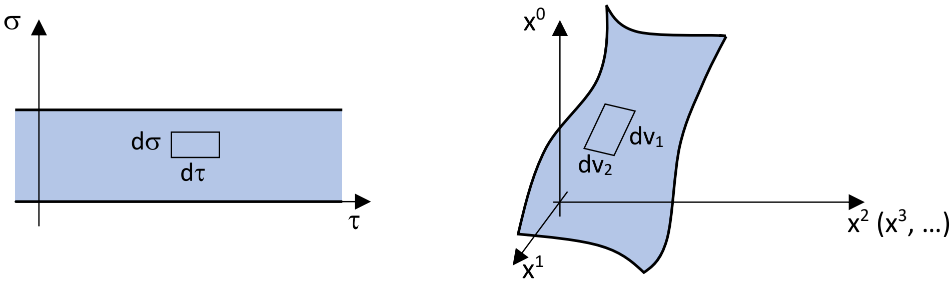

Figura 2.1: Si riportano sulla sinistra lo spazio dei parametri (τ, σ) con un piccolo rettangolo selezionato di lati $d\tau$ e $d\sigma$, sulla destra la superficie di mondo corrispondente. É inoltre evidenziato il quadrilatero, immagine del rettangolo, i cui lati sono i vettori dv_1^μ e dv_2^μ, entrambi tangenti alla superficie spaziotempo bidimensionale.

più in generale, può assumere la forma di un quadrilatero, così come illustrato in Figura 2.1. É possibile definire i lati del quadrilatero dv_1^μ e dv_2^μ come segue:

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma, \tag{2.3}$$

dove il rapporto $\partial X^\mu / \partial \tau$ rappresenta la variazione delle coordinate della stringa rispetto al parametro τ. Moltiplicando questo rateo di variazione per la lunghezza $d\tau$ si ottiene dv_1^μ, che rappresenta esattamente il lato dell'immagine nello spaziotempo cercato. Similmente avviene per il parametro σ. A questo punto, per calcolare l'area nella superficie bidimensionale, è sufficiente usare la formula valida per un parallelogramma

$$dA = |d\overrightarrow{v}_1|\, |d\overrightarrow{v}_2|\, |\sin\theta| = \sqrt{|d\overrightarrow{v}_1|^2\, |d\overrightarrow{v}_2|^2 - |d\overrightarrow{v}_1|^2\, |d\overrightarrow{v}_2|^2 \cos^2\theta}, \tag{2.4}$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori $d\overrightarrow{v}_1^\mu$ e $d\overrightarrow{v}_2^\mu$. In termini di prodotto scalare, l'ultima equazione diviene:

$$dA = \sqrt{(dv_1 \cdot dv_1)(dv_2 \cdot dv_2) - (dv_1 \cdot dv_2)^2} \tag{2.5}$$

dove, inserendo le definizioni (2.3), si trova:

$$dA = d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2}. \tag{2.6}$$

L'equazione (2.5), grazie all'utilizzo corretto del prodotto scalare relativistico, garantisce che l'elemento d'area dA sia Lorentz invariante ma, alcune considerazioni fisiche sulle stringhe fanno sì che l'argomento sotto radice sia negativo. Questo induce un cambiamento di segno, affinchè l'integrale esista, che non modifica però la proprietà di scalare di dA. Si ottiene così che l'area propria corrisponde alla (2.6) cambiata di segno, espressa con la notazione del prodotto scalare relativistico, diviene:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \tag{2.7}$$

Per chiarire il motivo che porta a cambiare il segno nell'equazione (2.5), è necessario analizzare alcue proprietà della superficie di mondo di una stringa. Considerando un punto, appartenente alla superficie di mondo e un insieme di vettori tangenti alla superficie in quel determinato punto, si ha che l'insieme di tutti i vettori genera uno spazio lineare. Questo è dotato di una base bidimensionale costituita da un vettore *tipo tempo* e da un vettore *tipo spazio*. Ciò implica che in ogni punto della stringa ci sono direzioni tangenti sia di tipo tempo che di tipo spazio. Immaginando una stringa che viaggia alla velocità della luce c, si trova che in ogni suo punto i vettori tangenti alla superficie sono esclusivamente di tipo spazio. Infatti, immaginando di fissare un sistema di riferimento solidale con la stringa, si ha che gli eventi dei diversi punti sono simultanei ma spazialmente separati. É quindi necessario capire se l'esistenza di soli vettori tipo spazio sia sufficiente per la descrizione di un moto fisicamente accettabile. La risposta è negativa. Per apprezzare la necessità di un vettore tipo tempo si consideri la linea di mondo di una particella puntiforme. Il vettore tangente alla linea è sempre tipo tempo e ciò fa sì che, ad ogni punto della linea di mondo, sia possibile associare un osservatore di Lorentz istantaneo, per il quale la particella è momentaneamente a riposo. Un vettore tipo spazio tangente alla linea sarebbe in questo contesto privo di senso fisico in quanto descriverebbe il moto della particella a velocità superluminali. Tornando alle stringhe la situazione è più delicata: non esiste la possibilità di descrivere il moto individuale di ogni punto della stringa. Il motivo di ciò si trova nella definizione di questo oggetto: una stringa è definita come un'entità elementare dotata di una singola dimensione (a differenza della particella puntiforme, priva di dimensioni), non costituita da elementi più piccoli e, per questo motivo, non suddivisibile in alcun modo. La stringa sarebbe così l'entità più piccola e fondamentale dell'intero Universo. L'unica eccezione è rappresentata dai punti estremi delle stringhe aperte, per i quali è possibile definire il moto. L'esistenza di un solo vettore tipo tempo tangente ad essi ne implica per continuità molti altri. Così che risulta possibile definire diversi osservatori lorentziani istantanei che vedono il punto a riposo. In questo modo se si analizza la posizione dei punti che costituiscono la stringa a due istanti temporali separati, continua ad essere impossibile definire il moto di ogni singolo punto, ma è possibile individuare per un dato punto nell'istante temporale finale, alcuni punti nella stringa iniziale che potrebbero averlo raggiunto, con una velocità al massimo pari a c. Così, l'esistenza di entrambe le direzioni tangenti tipo tempo e tipo spazio per ogni punto regolare della superficie di mondo diviene il criterio per la definizione di un moto fisicamente accettabile. Ciò garantisce anche che l'equazione (2.7) definisca correttamente il funzionale d'area.

Esiste un'ulteriore via per determinare l'area della superficie di mondo. Questa può essere infatti ottenuta usando la nuova metrica $g_{ij}(\tau, \sigma)$, indotta dall'immersione nell'usuale *spazio di Minkowski*. Sia $\sigma^i \equiv (\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$, allora per l'area della superficie di mondo si ha:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^j} d\sigma^i d\sigma^j \equiv g_{ij} d\sigma^i d\sigma^j. \tag{2.8}$$

La metrica indotta risulta quindi essere definita come:

$$g_{ij}(\sigma) = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^j}. \tag{2.9}$$

2.2 Azione di Nambu-Goto

L'azione per una stringa relativistica, così come nel caso di una particella puntiforme relativistica, si definisce proporzionale all'area propria della superficie di universo definita in (2.7). É evidente che la dimensione di $A = [L^2]$, in quanto le unità di misura di τ e σ si elidono. Come già anticipato, i due parametri non sono stati scelti in modo casuale ma sono rispettivamente correlati al tempo e allo spazio. Si assumerà quindi che $\tau = [T] \in [\tau_i, \tau_f]$ e $\sigma = [L] \in [0, \sigma^1]$. Per ottenere le corrette dimensioni dell'azione ML^2/T è quindi necessario aggiungere anche in questo caso un fattore del tipo M/T. Due fisici giapponesi, Y. Nambu e T. Goto, assunsero quale fattore moltiplicativo il rapporto tra la tensione della stringa T_0 e la velocità della luce c. L'azione della stringa relativistica, chiamata per l'appunto *azione di Nambu-Goto* è esprimibile come:

$$S_{NB} = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \tag{2.10}$$

dove si è introdotta la notazione:

$$\dot{X}^\mu \equiv \partial_\tau X, \quad X^{\mu'} \equiv \partial_\sigma X. \tag{2.11}$$

L'estremo superiore σ_1 dell'integrale sul parametro σ è assunto come un valore costante e positivo.

Con l'ausilio della metrica $g_{ij}(\tau, \sigma)$, introdotta precedentemente, è possibile esprimere l'azione (2.10) nel seguente modo più compatto:

$$S_{NB} = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-det g_{ij}}. \tag{2.12}$$

2.3 Invarianza per riparametrizzazione

L'invarianza per riparametrizzazione di un elemento d'area esprime la proprietà di indipendenza della superficie dai parametri scelti. Ciò significa che sarà possibile scegliere liberamente i parametri più convenienti senza che la fisica sottostante venga modificata. Poichè, come visto sopra, il principio di azione più semplice che si può assumere è quello che richiede la minimizzazione della superficie di mondo, si avrà: $S \sim \int dA$, con dA elemento d'area infinitesimo della superficie spaziotemporale. Ne consegue quindi che, l'invarianza per riparametrizzazione dell'elemento d'area, assicura anche quella dell'azione per la stringa relativistica. Considerando l'equazione (2.6) è lecito domandarsi se sia o meno invariante per riparametrizzazione. Al primo sguardo la risposta sembrerebbe affermativa infatti, riparametrizzando la superficie con $\tilde{\tau}(\tau)$ e $\tilde{\sigma}(\sigma)$, tutte le derivate introdotte, a seguito dell'uso della regola della catena, si cancellerebbero in modo appropriato e sarebbe così naturale riottenere la forma iniziale, scritta con le nuove variabili. La riparametrizzazione appena fatta non è però valida in generale, fallisce quando le coordinate τ e σ si mescolano. Supponendo quindi di riparametrizzare con $\tilde{\tau}(\tau, \sigma)$ e $\tilde{\sigma}(\tau, \sigma)$, si giunge finalmente alla conclusione di invarianza, ma attraverso calcoli più laboriosi e meno intuitivi. Per rendere allora questa proprietà più evidente è utile riscrivere il funzionale d'area. Generalizzando le variabili di integrazione τ e σ rispettivamente ai parametri ξ^1 ($\tilde{\xi^1}(\xi^1, \xi^2)$) e ξ^2 ($\tilde{\xi^2}(\xi^1, \xi^2)$) si trova, per il teorema del cambio di variabili, la seguente espressione:

$$d\xi^1 d\xi^2 = \left| det\left(\frac{d\xi^i}{d\tilde{\xi^j}}\right)\right| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = |detM| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2, \tag{2.13}$$

dove $M = [M_{ij}]$ è la matrice jacobiana della trasfromazione delle coordinate, i cui elementi sono definiti come $M_{ij} = \partial\xi^i/\partial\tilde{\xi}^j$.
Similmente,

$$d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = \left| det\left(\frac{d\tilde{\xi}^i}{d\xi^j}\right)\right| d\xi^1 d\xi^2 = |det\tilde{M}| d\xi^1 d\xi^2, \tag{2.14}$$

dove $\tilde{M} = [\tilde{M}_{ij}]$ è definita come $\tilde{M}_{ij} = \partial\tilde{\xi}^i/\partial\xi^j$. Dalla combinazione delle ultime due equazioni segue che

$$|detM||det\tilde{M}| = 1. \tag{2.15}$$

Si consideri un elemento d'area S della superficie spaziotemporale descritto dalle immagini delle funzioni $\overrightarrow{x}(\xi^1, \xi^2)$. Sia $d\overrightarrow{x}$ un vettore tangente alla superficie in qualche suo punto, il suo modulo quadro è esprimibile come:

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = d\overrightarrow{x} \cdot d\overrightarrow{x}. \tag{2.16}$$

Poichè il vettore $d\overrightarrow{x}$ può essere espresso in termini di derivate parziali e differenziali nel seguente modo:

$$d\overrightarrow{x} = \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i, \tag{2.17}$$

dove gli indici ripetuti i sono sommati su tutti i loro possibili valori ($i = 1, 2$), allora la (2.16) può essere riscritta come

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i\right) \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^j} d\xi^j\right) = \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \tag{2.18a}$$

$$= g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j \tag{2.18b}$$

dove si è introdotto

$$g_{ij}(\xi) \equiv \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^j}. \tag{2.19}$$

La matrice g_{ij} non è altro che la metrica indotta su S, infatti l'equazione (2.18b) assume, a meno di un segno, la medesima forma della (1.4a), dove compare la metrica di Minkowski. Si era già fatto riferimento a g_{ij} nelle equazioni (2.8), (2.9) e (2.12), nel caso particolare dei parametri τ e σ. In questo contesto diviene però evidente come quest'ultima sia effettivamente una metrica di S in quanto, attraverso le coordinate ξ^i, è possibile esprimere le distanze su tale superficie mediante l'equazione (2.18b). In analogia con lo spazio di Minkowski $\mathcal{M}^4$, il nuovo spaziotempo diviene uno spazio a $(d-1)$ dimensioni spaziali più una temporale e viene indicato con $\mathcal{M}^d$.
In questo caso per parametrizzare la superficie S si hanno solo i parametri ξ^1 e ξ^2, perciò la matrice è completamente definita da:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}.$$

É possibile notare che il determinante di g_{ij} corrisponde esattamente al radicando dell'equazione (2.6) espressa nel caso particolare dei parametri τ e σ, scelti in modo opportuno. Sia $g \equiv det(g_{ij})$ è quindi possibile scrivere

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}, \tag{2.20}$$

come già anticipato in (2.12). Questa equazione esprime elegantemente l'elemento d'area della superficie S in funzione della metrica indotta su S stessa. In questo modo è possibile comprendere l'invarianza per riparametrizzazione dell'elemento d'area, in termini delle proprietà di trasformazione della metrica g_{ij}. In particolare, il modulo quadro ds^2 è una proprietà geometrica del vettore $d\vec{x}$ e per questo motivo non deve dipendere dalla parametrizzazione scelta. Considerando per l'appunto un altro set di parametri $\tilde{\xi}$ e la rispettiva metrica indotta $\tilde{g}(\tilde{\xi})$, deve allora essere valida l'uguaglianza:

$$g_{ij}(\xi)d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi})d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q. \tag{2.21}$$

Facendo uso della regola della catena è possibile esprimere i differenziali $d\tilde{\xi}$ in termini dei $d\xi$,

$$g_{ij}(\xi)d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi})\frac{\partial\tilde{\xi}^p}{\partial\xi^i}\frac{\partial\tilde{\xi}^q}{\partial\xi^j}d\xi^i d\xi^j. \tag{2.22}$$

Data la generalità dell'equzione sopra riportata, è possibile definire la relazione tra la metrica in coordinate ξ e $\tilde{\xi}$:

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi})\frac{\partial\tilde{\xi}^p}{\partial\xi^i}\frac{\partial\tilde{\xi}^q}{\partial\xi^j}. \tag{2.23}$$

Questa relazione può essere riscritta, facendo uso della jacobiana $\tilde{M}$ (precedentemente definita), nel seguente modo:

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq}\tilde{M}_{pi}\tilde{M}_{qj} = (\tilde{M}^T)_{ip}\tilde{g}_{pq}\tilde{M}_{qj}. \tag{2.24}$$

L'espressione a destra dell'equazione, in notazione matriciale, corrisponde al prodotto di tre matrici. Considerando il determinante di tali matrici ed assumendo, come sopra, che $g \equiv det(g_{ij})$ (stessa cosa per $\tilde{\xi}$), si ottiene:

$$g = (det\tilde{M}^T)\tilde{g}(det\tilde{M}) = \tilde{g}(det\tilde{M})^2, \tag{2.25}$$

la cui radice quadrata risulta essere:

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}}|det\tilde{M}|. \tag{2.26}$$

É quindi ora possibile apprezzare l'invarianza per riparametrizzazione della (2.20). Facendo uso delle (2.13), (2.15), (2.26) si ha :

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2\sqrt{g} = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2|detM|\sqrt{\tilde{g}}|det\tilde{M}| = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2\sqrt{\tilde{g}}, \tag{2.27}$$

che dimostra la proprietà cercata per il funzionale d'area. Come già anticipato, questa proprietà si riflette sull'azione della stringa relativistica. La metrica indotta g_{ij} definita in (2.9), facendo uso della notazione (2.11), può essere espressa in forma matriciale come:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X}\cdot X' \\ \dot{X}\cdot X' & (X')^2 \end{bmatrix}.$$

In questo modo è possibile ricondursi alla forma (2.12) che esprime, in modo esplicito, l'invarianza per riparametrizzazione dell'azione della stringa. L'azione di Nambu-Goto, espressa in questa forma, è inoltre adatta ad essere generalizzata alla descrizione della dinamica di un oggetto, avente più dimensioni di una stringa. Si vedrà ad esempio che, in prima approssimazione, un'azione di questo tipo sarà utile alla descrizione della dinamica delle D-brane.

2.4 Equazioni del moto e condizioni al contorno

Applicando il principio di Hamilton è possibile ricavare le equazioni del moto per una stringa relativistica. Sia $\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'})$ la densità di Lagrangiana, l'azione di Nambu-Goto è esprimibile come suo integrale doppio nel seguente modo:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}), \tag{2.28}$$

con $\mathcal{L}$ definita come

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) = -\frac{T_0}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}, \tag{2.29}$$

in accordo con la (2.10). Imponendo che la variazione dell'azione sia nulla, è possibile scrivere:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}}\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma}\right], \tag{2.30}$$

dove si è fatto uso di

$$\delta \dot{X}^\mu = \delta\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau}, \tag{2.31a}$$

$$\delta X^{\mu'} = \delta\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma}. \tag{2.31b}$$

Introducendo una notazione compatta per $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{X}^\mu$ e $\partial\mathcal{L}/\partial X^{\mu'}$ si ha:

$$\mathcal{P}^\tau_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}, \tag{2.32a}$$

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}. \tag{2.32b}$$

In questo modo la variazione dell'azione è esprimibile come segue:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^\mu \mathcal{P}^\tau_\mu) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta X^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} \right) \right]. \tag{2.33}$$

Il primo termine nella parentesi quadra rappresenta una derivata totale rispetto a τ e fornisce contributi proporzionali a $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$ e $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$. Lo scorrere del valore di questo parametro implica, per le assunzioni fatte, lo scorrere del tempo. É possibile pensare di fissare gli stati iniziale e finale della stringa, imponendo così che i contributi diventino nulli: $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = 0$. Assumendo solo variazioni che soddisfano la condizione appena discussa, la (2.33) diviene:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu]_0^{\sigma^1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} \right). \tag{2.34}$$

Il secondo termine dell'integrale deve annullarsi per una variazione del moto arbitraria δX^μ. Ciò implica che

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0. \tag{2.35}$$

Quest'ultima equazione rappresenta esattamente l'equazione del moto per una stringa relativistica, aperta o chiusa. Ricordando le definizioni (2.32), è immediato riconoscere come questa equazione sia complessa. Una possibile semplificazione risiede nella proprietà di invarianza per riparametrizzazione dell'azione di Nambu-Goto che, con scelte opportune, permette di rendere i calcoli più semplici.
Il primo termine della (2.34) ha a che fare con gli estremi della stringa e può annullarsi in due modi distinti. Sia σ^* la coordinata di un estremo della stringa, in modo che questo possa assumere due soli possibili valori: 0 o σ^1, se non si impongono condizioni sulla variazione $\delta X^\mu(\tau, \sigma^*)$ delle coordinate agli estremi, allora il punto è libero di fare tutto il necessario affinchè la variazione dell'azione sia nulla. In questo caso infatti si parla di *estremi liberi* e la condizione che questi soddisfano è espressa come:

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau, \sigma^*) = 0. \tag{2.36}$$

Diverso è il caso in cui si impone che il punto estremo della stringa rimanga fisso durante il moto. In questo modo si giunge alla *condizione al contorno di Dirichlet*, espressa come segue:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma^*) = 0. \tag{2.37}$$

In generale, le condizioni sui due punti estremi della stringa non devono essere necessariamente uguali, il principio di Hamilton infatti si limita a richiedere che la variazione dell'azione deve annullarsi, al primo ordine, per ogni traiettoria diversa da quella effettivamente seguita dal sistema.

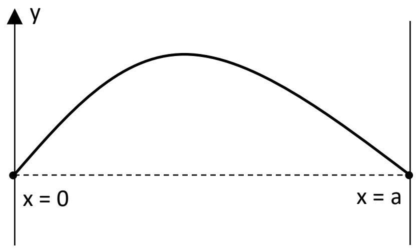

Figura 2.2: Si riporta una stringa classica soggetta alle condizioni al contorno di Dirichlet nei due punti estremi.

Analizzando il caso della condizione di Dirichlet è naturale ricondursi alla sua controparte classica, già compresa. Nel caso non relativistico questa condizione al contorno emerge nei sistemi in cui gli estremi della stringa sono attaccati a qualche altro oggetto fisico, come mostrato in Figura 2.2. In questa situazione gli estremi della stringa sono forzati a stare su una linea uno-dimensionale ed il loro moto orizzontale è proibito. In modo analogo, gli oggetti a cui gli estremi delle stringhe aperte sono attaccati, sono caratterizzati da una loro dimensionalità, corrispondente esattamente al numero di dimensioni spaziali. Questi sono chiamati *D-brane*, dove la lettera *D* sta per Dirichlet. L'oggetto rappresentato in Figura 2.2, che vincola orizzontalmente gli estremi della stringa aperta nei punti $x = 0$ e $x = a$, è uno-dimensionale e per questo viene indicato con D1-brana. In generale una *Dp-brana* è un oggetto con p dimensioni spaziali. Poichè gli estremi della stringa devono essere vincolati alla Dp-brana, è necessario fissare un set di condizioni al contorno di Dirichlet. Considerando per esempio una *D2-brana* piatta, in uno spazio tridimensionale, è sufficiente fissare la condizione $x^3 = 0$ che implica lo svilupparsi della brana sul piano (x^1, x^2). Questa situazione è mostrata in Figura 2.3. La condizione al contorno di Dirichlet si applica quindi alla coordinata della stringa X^3, che dovrà necessariamente annullarsi nei punti estremi. Le coordinate X^1, X^2, al contrario, soddisfano la condizione al contorno di estremi liberi, in quanto il loro moto non è vincolato lungo alcuna direzione della brana.
Le D-brane non sono oggetti introdotti ad hoc ma emergono naturalmente dalla teoria sia nel campo classico, che in quello relativistico. Non necessitano di un'estensione spaziale infinita e non sono necessariamente iperpiani, sono contraddistinte da una densità energetica calcolabile, da una massa e da altre prorietà fisiche rilevanti. Quando le estremità di una stringa aperta soddisfano la condizione al contorno di estremi liberi, lungo ogni direzione spaziale, si ha una *D-brana a spazio pieno.*

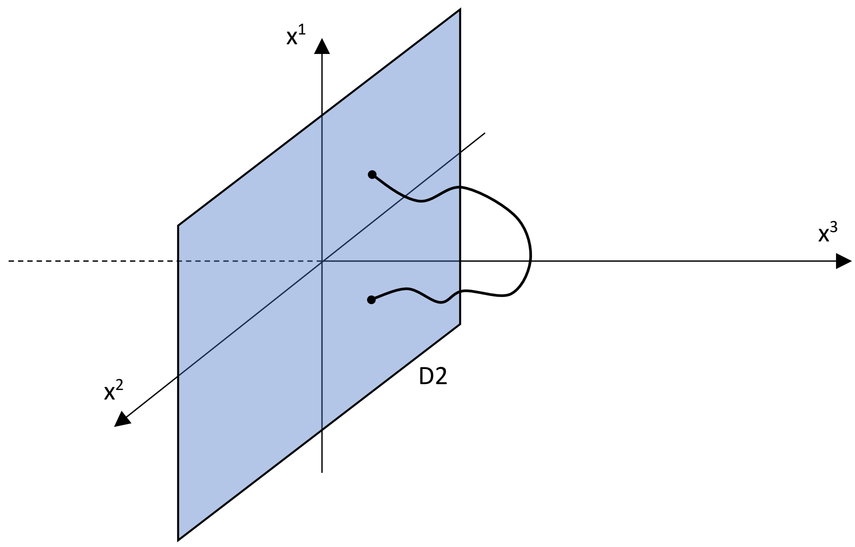

Figura 2.3: Si riporta una *D2-brana* giacente sul piano (x^1, x^2). I punti estremi della stringa aperta sono liberi di muoversi sulla brana ma devono restare attaccati ad essa. La coordinata x^3 dei punti estremi deve annullarsi ad ogni istante. Questa è una condizione al contorno di Dirichlet per la coordinata della stringa X^3.

2.5 Il gauge statico

Al fine di rendere più semplice e comprensibile l'espressione dell'azione di Nambu-Goto, è utile parametrizzare la superficie di mondo in modo conveniente, soprattutto ai fini del calcolo pratico. Ogni scelta di parametrizzazione è lecita, in quanto l'azione della stringa gode dell'invarianza per riparametrizzazione: è possibile usare diversi parametri per rappresentare la superficie di mondo e giungere alle medesime conclusioni sul moto fisico della stringa. Nel caso della particella puntiforme relativistica ad esempio, si è visto che la scelta più comoda per parametrizzare la linea di mondo, ricadeva sul tempo proprio della particella stessa. Per le stringhe si sceglie di trattare una parametrizzazione parziale della superficie di universo: si fissano le linee in cui τ assume valori costanti e si mette il parametro in relazione con le coordinate temporali, $X^0 = ct$, di un dato sistema di riferimento lontentziano. Considerando un iperpiano di tempo costante $\tau = t_0$, nella superficie spaziotemporale, si ha che la sua intersezione con la superficie di universo restituisce una curva, corrispondente esattamente alla *stringa al tempo* t_0. Per le assunzioni appena fatte, la stringa sarà quindi caratterizzata da $\tau = t_0$ costante.

Estendendo questa definizione ad ogni istante temporale t si ha che, per ogni punto Q della superficie di universo

$$\tau(Q) = t(Q). \tag{2.38}$$

Questa scelta di parametrizzazione per τ è detta *gauge statico* perchè le curve con τ costante sono *"stringhe statiche"*, nel sistema di riferimento scelto.
Per quanto riguarda il parametro σ, così come adottato finora, si può richiedere per una stringa aperta che $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Le linee caratterizzate da σ costante sono rappresentabili sulla superficie spaziotemporale in modo arbitrario, tenendo conto però che queste non si intersechino, non presentino punti irregolari e restino all'interno della superficie di mondo. Nel caso di una stringa chiusa la parametrizzazione è fissata in modo analogo, l'unica peculiarità da considerare è che lo spazio dei parametri (τ, σ) è di forma cilindrica, in accordo con il fatto che la superficie di mondo della stringa è topologicamente un cilindro. La parametrizzazione scelta per τ fa sì che la (2.38) possa essere scritta come

$$X^0(\tau, \sigma) \equiv ct(\tau, \sigma) = c\tau. \tag{2.39}$$

Le coordinate della stringa X^μ possono essere descritte come segue:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = \left(ct, \overrightarrow{X}(t, \sigma)\right), \tag{2.40}$$

così che il vettore $\overrightarrow{X}$ rappresenti le coordinate spaziali della stringa. In questo modo la notazione (2.11), per le derivate parziali dell'azione di Nambu-Goto, può essere espressa come:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial X^0}{\partial t}, \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial t}\right) = \left(c, \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial t}\right), \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial \sigma}\right) = \left(0, \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial \sigma}\right). \tag{2.42}$$

Da queste due ultime equazioni è evidente che la parametrizzazione scelta permette di separare le coordinate spaziali e temporali in modo piuttosto netto. Ciò permette di semplificare l'azione (2.10) e l'equazione del moto (2.35), in modo da rendere più semplice la loro interpretazione e la conseguente deduzione delle proprietà fisiche delle stringhe.

2.6 Il parametro di pendenza α'

I primi stadi dello sviluppo della teoria delle stringhe sono stati caratterizzati dall'introduzione di un parametro, correlato alla tensione della stringa T_0, e rappresentato con

$\alpha^{'}$, avente un'interpretazione fisica importante. Se si considera una stringa aperta rigida e rotante, allora $\alpha^{'}$ è la costante di proporzionalità che mette in relazione il momento angolare totale J della stringa, misurato in unità di $\hbar$, con il quadrato della sua energia E. Più esplicitamente:

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha^{'} E^2. \tag{2.43}$$

Poichè la componente sinistra dell'equazione è adimensionale, il parametro $\alpha^{'}$ ha dimensione inversa al quadrato dell'energia:

$$[\alpha^{'}] = \frac{1}{[E]^2}. \tag{2.44}$$

Per verificare la relazione (2.43) si pensi ad una stringa aperta di energia E che ruota rigidamente sul piano (x, y), ovvero avente momento angolare non nullo solo lungo $z(\hat{k})$. Le componenti del momento angolare della stringa sono esprimibili nel seguente modo: $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$, dove ϵ_{ijk} è il simbolo totalmente antisimmetrico di Ricci e $M_{\mu\nu}$ rappresentano in generale le componenti delle cariche conservate di Lorentz, antisimmetriche, definite come segue:

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{\tau}_{\mu\nu}(\tau, \sigma) d\sigma = \int (X_\mu \mathcal{P}^{\tau}_{\nu} - X_\nu \mathcal{P}^{\tau}_{\mu}) d\sigma. \tag{2.45}$$

Quando μ, ν rappresentano gli indici spaziali j, k allora $\mathcal{M}^{\tau}_{\mu\nu}$ diviene precisamente la densità di momento angolare e, come conseguenza, le componenti M_{jk} misurano il momento angolare della stringa. In modo esplicito si ha $J_1 = M_{23}, J_2 = M_{13}, J_3 = M_{12}$.
Tornando quindi al caso della stringa aperta rotante sul piano (x, y), l'unica componente di momento angolare non nulla sarà M_{12}, il cui modulo è rappresentato come $J = |M_{12}|$. Perciò, in accordo con l'equazione (2.45), si avrà:

$$M_{12} = \int_0^{\sigma^1} (X_1 \mathcal{P}^{\tau}_{2} - X_2 \mathcal{P}^{\tau}_{1}) d\sigma. \tag{2.46}$$

Per calcolare questo integrale è necessario introdurre le formule per la posizione e per il momento di una stringa rotante:

$$\overrightarrow{X}(t, \sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos\frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(\cos\frac{\pi c t}{\sigma_1}, \sin\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right), \tag{2.47}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\tau} = \frac{T_0}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial t} = \frac{T_0}{c} \cos\frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(-\sin\frac{\pi c t}{\sigma_1}, \cos\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right), \tag{2.48}$$

le quali restituiscono rispettivamente le componenti $(X^1, X^2), (\mathcal{P}^{\tau}_1, \mathcal{P}^{\tau}_2)$. L'integrale (2.46) è quindi ora possibile esprimerlo come:

$$M_{12} = \frac{\sigma_1}{\pi}\frac{T_0}{c} \int_0^{\sigma^1} \cos^2\frac{\pi\sigma}{\sigma_1} d\sigma = \frac{\sigma_1^2 T_0}{2\pi c}. \tag{2.49}$$

Come atteso, la dipendenza temporale sparisce, in accordo con il fatto che il momento angolare della stringa si conserva. Scegliendo la parametrizzazione più comune che prevede, sulla superficie della stringa, l'ortogonalità delle linee in cui i parametri $\sigma \in [0, \sigma^1]$ e $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$ assumono rispettivamente valori costanti, si ha che la densità di energia $dE/d\sigma$ eguaglia la tensione della stringa. Integrando si ottiene quindi $\sigma^1 = E/T_0$. Grazie a questa relazione, richiamando che $J = |M_{12}|$, si ottiene:

$$J = \frac{1}{2\pi T_0 c} E^2. \tag{2.50}$$

Come anticipato, il momento angolare è proporzionale al quadrato dell'energia della stringa e, facendo un paragone con l'equazione (2.43), si deduce che:

$$\alpha^{'} = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c} \quad e \quad T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha' \hbar c}. \tag{2.51}$$

Queste equazioni rendono evidente la relazione tra il parametro di pendenza $\alpha^{'}$ e la tensione della stringa T_0. Sin dalla fisica classica è noto che per le rotazioni rigide $J = I\omega$, dove I è il momento d'inerzia e ω è la velocità angolare. Per un oggetto di massa M, caratterizzato da una lunghezza di scala L, vale $I \sim ML^2 \to J \sim ML^2\omega$. Per una stringa rotante relativistica è possibile dimostrare che $M, L \sim E$, e $\omega \sim 1/E$, perciò $J \sim E^2$.

Il nome parametro di pendenza sorge perchè $\alpha^{'}$ è esattamente la pendenza della retta, chiamata *traiettoria di Regge*, di J graficato con E^2. Queste traiettorie scaturivano naturalmente dalla raccolta dei dati sperimentali che rivelavano la relazione lineare tra J e E^2, valida solo per gli adroni eccitati. I leptoni, infatti, non erano coinvolti in queste osservazioni e ciò fece presupporre che, a differenza degli adroni, fossero realmente particelle elementari. Fu proprio questo fatto che segnò gli albori della teoria delle stringhe, nata alla fine degli anni '60 con l'obiettivo di spiegare le interazioni forti, in grado di mantenere legati i costituenti elementari degli adroni. Come accennato nell'introduzione, tra tutte le teorie sviluppate in questo periodo, fu la teoria di Gauge $SU(3)$, chiamata Cromodinamica Quantistica (QCD), a primeggiare sulle altre proposte.

É possibile definire la *lunghezza della stringa* ℓ_S in funzione di $\hbar, c$ e $\alpha^{'}$, nel seguente modo:

$$\ell_S = \hbar c\sqrt{\alpha'}. \tag{2.52}$$

A meno dei fattori $\hbar$ e c, la lunghezza della stringa corrisponde esattamente alla radice quadrata del parametro di pendenza. Questa connessione di $\alpha^{'}$ con una lunghezza di scala fondamentale, fornisce una sua ulteriore interpretazione fisica.

Capitolo 3

Stringhe relativistiche nel cono-luce

3.1 Scelta di una parametrizzazione per τ

Nel primo capitolo si è introdotto il gauge statico che prevede di identificare il tempo τ della superficie di mondo con la coordinata temporale X^0 dello spaziotempo:

$$X^0(\tau, \sigma) = c\tau. \tag{3.1}$$

In generale questa non è l'unica via. É possibile scegliere altre relazioni per τ, ed ognuna di esse determinerà un gauge specifico. In questo contesto si usa in particolare il *gauge cono-luce* perchè permette di risolvere le equazioni del moto della stringa in modo completo e diretto, più di quanto permesso dal gauge statico.
Iniziando ad impostare in tutta generalità una classe di gauge per la quale, il parametro τ è eguagliato ad una combinazione lineare delle coordinate della stringa

$$\eta_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau, \tag{3.2}$$

è evidente che, ponendo $\eta_\mu = (1, 0, 0, ..., 0)$ e $\lambda = c$, ci si riconduce alla condizione del gauge statico (3.1). L'equazione (3.2) è possibile esprimerla anche in funzione delle coordinate spaziotemporali come

$$\eta_\mu x^\mu = \lambda\tau. \tag{3.3}$$

Siano x_1^μ e x_2^μ due vettori distinti e arbitrari, che soddisfano entrambi la condizione del gauge appena riportata, allora si ha

$$\eta_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu) = 0. \tag{3.4}$$

Si afferma quindi che, ogni vettore congiungente due punti che soddisfano l'equazione, è ortogonale a η^μ infatti, in generale, la (3.3) individua un iperpiano ortogonale a η^μ.

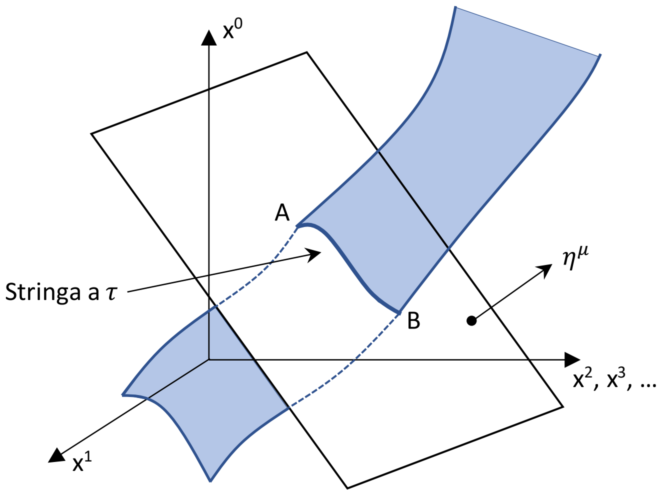

Figura 3.1: Si riporta una stringa, nel gauge $\eta_\mu x^\mu = \lambda\tau$, ottenuta dall'intersezione tra la superficie di mondo e l'iperpiano ortogonale a η^μ.

I punti X^μ che soddisfano la (3.2) appartengono contemporaneamente sia alla superficie di mondo, sia all'iperpiano perciò, per soddisfare contemporaneamente le due equazioni, si deve fissare un valore costante per il parametro τ. In questo modo l'iperpiano risulta essere ortogonale anche all'asse del tempo x^0 e la stringa sarà ottenuta dalla sua intersezione con la superficie di mondo, come mostrato in Figura 3.1. In questa parametrizzazione quindi le stringhe saranno costituite da punti $X(\tau, \sigma)$, con τ costante, che soddisfano la (3.2).
In generale si vuole che la stringa sia un oggetto di tipo spazio. Questa richiesta è piuttosto intuitiva: si vuole immaginare la superficie di mondo della stringa muoversi all'interno di uno spazio euclideo, dove la quarta dimensione temporale viene tagliata fuori. Affinchè ciò sia verificato si impone che l'intervallo ΔX^μ, tra due punti distinti e arbitrari della stringa, sia tipo spazio o al limite nullo, ma mai tipo tempo. É possibile dimostrare che, nel gauge considerato, un vettore η^μ tipo tempo garantisce che la stringa sia un oggetto tipo spazio. Infatti, come sopra detto, in questo gauge ogni intervallo lungo la stringa ΔX^μ soddisfa $n \cdot \Delta X = 0$. Perciò, in conclusione, il gauge (3.2) permetterà di scegliere η^μ come vettore tipo tempo o al limite nullo.
Sia p^μ il momento conservato della stringa, l'espressione (3.2) può essere riscritta in funzione di questo come:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \lambda(n \cdot p)\tau. \tag{3.5}$$

Affinchè $(n{\cdot}p)$ sia costante in generale, è necessario scegliere opportunamente il vettore η^μ in quanto, le stringhe aperte attaccate alle D-brane, non conservano tutte le componenti del loro momento. Questa condizione risulta comunque più debole rispetto a quella di conservazione del momento della stringa. Dal punto di vista dimensionale i prodotti $n \cdot X$, $n \cdot p$ hanno rispettivamente le unità di una lunghezza e di un momento mentre si pongono τ,σ e η^μ adimensionali. Ne consegue che λ sia una velocità su una forza e, per convenzione, si sceglieranno risepttivamente la velocità della luce c e la tensione della stringa T_0

$$\lambda \sim \frac{c}{T_0} = 2\pi\alpha^{'}\hbar c^2, \tag{3.6}$$

dove si è fatto uso della (2.51). Introducendo la convenzione delle unità naturali $\hbar = c = 1$

$$[\alpha^{'}] = \frac{1}{[T_0]} = L^2. \tag{3.7}$$

Allora la condizione di gauge che permette di fissare il valore del parametro τ, ponendo per le stringhe aperte $\lambda = 2\alpha'$, diviene:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n \cdot p)\tau. \tag{3.8}$$

3.2 Scelta di una parametrizzazione per $\boldsymbol{\sigma}$

Nel gauge statico si parametrizza σ in modo tale che la densità energetica $\mathcal{P}^{\tau 0}$ sia costante su tutta la stringa, definita da un valore di τ fissato. In questo caso si richiede invece che la densità del momento sia costante sull'iperpiano ortognale a n^μ perciò si deve avere: $n{\cdot}\mathcal{P}^\tau$ costante. Richiedendo un range di riparametrizzazione $\sigma \in [0, \pi]$, è possibile scalare σ con un fattore costante. Ciò permette di preservare per $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ l'indipendenza da σ. Si ottiene così

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) = a(\tau), \tag{3.9}$$

dove a è una funzione non nota del parametro τ. Integrando l'espressione sulla stringa è possibile esplicitare la funzione a:

$$\int_0^\pi d\sigma n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) = n \cdot p = \pi a(\tau) \quad \rightarrow \quad a(\tau) = \frac{n \cdot p}{\pi}. \tag{3.10}$$

Il prodotto scalare $n{\cdot}p$ è conservato, perciò è evidente che la funzione a non può dipendere da τ, ma sarà fissata dalle condizioni imposte per la parametrizzazione. Si giunge così a

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{\pi}, \tag{3.11}$$

che rappresenta la costanza della densità del momento nella parametrizzazione scelta. Ciò significa che il valore di σ, che viene assegnato ad ogni punto della stringa, è proporzionale alla quantità di momento trasportato dalla porzione di stringa compresa tra il punto dato e l'estremo $\sigma = 0$.
Considerando ora l'equazione del moto $\partial_\tau \mathcal{P}^\tau_\mu + \partial_\sigma \mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$ e proiettandola su n, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0. \tag{3.12}$$

Il primo termine è nullo per la (3.11), perciò l'equazione del moto si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0, \tag{3.13}$$

ovvero $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ è indipendente da σ. Considerando l'equazione (3.5) si assume $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ ai punti estremi della stringa, al fine di assicurare la costanza del prodotto scalare $n \cdot p$.
Nel caso di stringhe chiuse si apporta una modifica all'intervallo di riparametrizzazione che da $\sigma \in [0, \pi] \to \sigma \in [0, 2\pi]$. La (3.11) diventa allora

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi}. \tag{3.14}$$

In questo contesto conviene quindi apportare una piccola modifica alla condizione di parametrizzazione per τ, che consiste nell'eliminare il fattore 2 a destra dell'equazione (3.8). É quindi possibile affermare in tutta generalità

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau, \tag{3.15}$$

con $\beta = 1, 2$ rispettivamente per stringhe chiuse e aperte.
Nel caso delle stringhe chiuse è necessario però fare alcune osservazioni. La condizione (3.13) vale anche nel caso di queste ultime ma, essendo per l'appunto curve chiuse, non è possibile scegliere su di esse un punto particolare (come i punti estremi nel caso delle stringhe aperte), per il quale sia certo che $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$. In aggiunta, si pone anche il problema di come scegliere il punto $\sigma = 0$ per il quale τ abbia valore costante. Una possibile soluzione a questi due quesiti è considerare la superficie di universo cilindrica come una successione continua di stringhe chiuse. In questo modo è possibile selezionare, in modo arbitrario, un $\sigma = 0$ su una stringa e trovare di conseguenza gli altri su tutte le stringhe rimanenti, richiedendo che anche per queste ultime valga $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$. Traducendo quanto detto in formalismo matematico si ha

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\partial_\tau (n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \tag{3.16}$$

dove si è fatto uso della definizione (2.32b). Dalla (3.15) si ha che $\partial_\sigma(n \cdot X) = 0$, perciò

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{(\dot{X} \cdot X')\partial_\tau(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}. \tag{3.17}$$

É quindi ora sufficiente dimostrare che è possibile annullare $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ in almeno un punto per ogni stringa ed essendo $\partial_\tau(n \cdot X)$ costante, si deve provare solo che $\dot{X} \cdot X' = 0$ sia per una stringa chiusa, sia per una aperta. In quest'ultimo caso il risultato è già stato ottenuto in quanto, per i punti estremi, si è supposto $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ al fine di garantire la conservazione del prodotto scalare $n \cdot p$. Nel caso di stringhe chiuse invece, si procede scegliendo per una data stringa un punto arbitrario P tale che $\sigma = 0$. Si suppone inoltre l'esistenza di un unico vettore v^μ, tangente alla superficie di mondo in P ed ortogonale al vettore tipo spazio $X^{\mu'}$ (tangente alla stringa). In P la superfcie di mondo ha un vettore tangente tipo tempo t^μ che, non essendo parallelo a $X^{\mu'}$, genera con questo uno spazio tangente alla superficie di mondo nel punto in questione. Nel caso particolare in cui t^μ e $X^{\mu'}$ siano ortogonali, allora $t^\mu = v^\mu$. Se invece $t_\mu X^{\mu'} \neq 0$, allora è possibile definire $v^\mu = t^\mu + bX^{\mu'}$ da cui, imponendo che $v^\mu X^{\mu'} = 0$, si trova

$$v^\mu = t^\mu - \frac{t \cdot X'}{X' \cdot X'}X^{\mu'}. \tag{3.18}$$

Il punto $\sigma = 0$ nella stringa adiacente si trova come $X^\mu(P) + \epsilon v^\mu$, con ϵ infinitesimo. In questo modo è possibile costruire passo a passo la linea corrispondente a $\sigma = 0$ sull'intera superficie di mondo, con v^μ tangente a questa. Si garantisce così che $\dot{X} \cdot X' = 0$ e, di conseguenza, che $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ in almeno un punto su ogni stringa. Ne consegue che, in virtù dell'assenza di punti speciali, la condizione $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ è valida ovunque.
Risulta quindi dimostrato che $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ è valida sia nel caso di stringhe aperte, che chiuse. Inoltre, la parametrizzazione adottata fino a questo momento è adattabile in entrambi i casi, scegliendo per β il valore opportuno. Nel caso delle stringhe chiuse resta però ambigua l'applicazione delle condizioni di gauge a causa del fatto che, la definizione del punto $\sigma = 0$ è totalmente arbitraria. Sarà pertanto sempre possibile traslare lungo la direzione σ la parametrizzazione della stringa chiusa.

3.3 Equazioni d'onda e modi di espansione

Nel capitolo precedente si è visto che l'annullarsi della (3.17) insieme al fatto che $\partial_\tau(n \cdot X)$ è una costante non nulla, ha portato a concludere che $\dot{X} \cdot X' = 0$. Questa uguaglianza esprime un vincolo scaturito dall'aver fissato una parametrizzazione. É possibile usare questa condizione per semplificare la definizione (2.32a) in:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{(X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{-(\dot{X})^2(X')^2}}. \tag{3.19}$$

La conservazione della densità del momento sulla stringa, trovata nel capitolo precedente, porta a definire il prodotto scalare $n \cdot p$ come

$$n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^{\tau}, \tag{3.20}$$

dove si è inserito il fattore β per generalizzare sia al caso aperto che chiuso. Ora è possibile riscrivere la (3.20) come

$$n \cdot p = \frac{1}{\beta\alpha^{'}} \frac{(X^{'})^2(n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-(\dot{X})^2(X^{'})^2}}. \tag{3.21}$$

Poichè, sempre dalla (3.20), è possibile concludere che $n \cdot \dot{X} = \beta\alpha^{'}(n \cdot p)$, il fattore β si elide e si trova:

$$1 = \frac{X^{'2}}{\sqrt{-\dot{X}^2 X^{'2}}} \quad \rightarrow \quad \dot{X}^2 + X^{'2} = 0. \tag{3.22}$$

Dalla scelta della parametrizzazione si ottengono così due vincoli, $\dot{X} \cdot X^{'} = 0$ e $\dot{X}^2 + X^{'2} = 0$, che vengono compattati in

$$(\dot{X} \pm X^{'})^2 = 0, \tag{3.23}$$

validi per ogni valore di β. In virtù delle condizioni appena trovate è possibile semplificare le espressioni delle densità dei momenti $\mathcal{P}^{\tau}$ e $\mathcal{P}^{\sigma}$. Il primo è contraddistinto da un segno negativo sotto radice in cui, usando la (3.22), si ha:

$$\sqrt{-\dot{X}^2 X^{'2}} = \sqrt{X^{'2} X^{'2}} = X^{'2}. \tag{3.24}$$

Si trova quindi

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha^{'}} \dot{X}^{\mu}. \tag{3.25}$$

Similmente, per $\mathcal{P}^{\sigma}$ si trova:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha^{'}} X^{\mu'}. \tag{3.26}$$

Le densità dei momenti diventano così semplicemente le derivate delle coordinate ed inserendo queste espressioni semplificate nell'equazione del moto $\partial_{\tau}\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} + \partial_{\sigma}\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = 0$, si trova:

$$\ddot{X}^{\mu} - X^{\mu''} = 0. \tag{3.27}$$

Si conclude perciò che, con la parametrizzazione scelta, le equazioni del moto sono equazioni d'onda. Nal caso delle stringhe aperte si richiede che nei punti estremi $X^{\mu'}$ si annulli, esattamente come $\mathcal{P}^\sigma$.
La soluzione più generale per la (3.27), supponendo che la stringa sia aperta, è esprimibile come

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\left(f^\mu(\tau,\sigma) + g^\mu(\tau-\sigma)\right). \tag{3.28}$$

La condizione $\mathcal{P}^\sigma = 0$ per $\sigma = 0, \pi$ richiede che, nei punti estremi della stringa, valga $\partial_\sigma X^\mu = 0$. Questa espressione è detta condizione al contorno di Neumann e implica che le funzioni f^μ e g^μ coincidano a meno di una costante. Si ottiene così, per $\sigma = \pi$:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau,\pi) = \frac{1}{2}\left(f^{\mu'}(\tau,\pi) - f^{\mu'}(\tau-\pi)\right) = 0. \tag{3.29}$$

Poichè questa equazione deve valere per ogni τ, si giunge a concludere che $f^{\mu'}$ deve essere una funzione periodica con $T = 2\pi$. Integrando la serie di Fourier di $f^{\mu'}$, è possibile ottenere l'espansione di f^μ:

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^\mu \cos nu + B_n^\mu \sin nu\right). \tag{3.30}$$

Inserendola nella (3.28), si ottiene

$$X^\mu(\tau,\sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau\right)\cos n\sigma, \tag{3.31}$$

dove i coefficienti verranno sostituiti da altri aventi un'interpretazione fisica immediata.
La costante f_1^μ può essere fisicamente intesa come una quantità proporzionale al momento trasportato dalla stringa nello spaziotempo. É infatti possibile ricavare che $f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu$.
Sia a_n^μ una costante adimensionale definita come

$$a_n^\mu = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2\alpha'}}\left(B_n^\mu - iA_n^\mu\right), \tag{3.32}$$

questa rende possibile la sostituzione in (3.31) dei coefficienti A e B. Nella teoria quantistica a_n^μ ed il complesso coniugato $a_n^{\mu *}$ diverranno operatori di creazione e distruzione.
Ponendo infine $f_0^\mu = x_0^\mu$, la (3.31) diviene

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\mu *} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}\right)\frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{3.33}$$

dove i termini corrispondono in ordine al modo zero, al momento e all'oscillazione della stringa. Nel caso particolare in cui tutti i coefficienti $a_n^\mu = 0$, l'equazione rappresenterebbe il moto di una particella puntiforme.
É ora possibile introdurre una nuova notazione per riscrivere la soluzione all'equazione del moto:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \quad \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu *} \sqrt{n} \tag{3.34}$$

con $n \geq 1$. Si noti che gli a_n^μ sono definiti per n interi positivi mentre gli α_n^μ sono definiti per ogni valore intero, incluso lo zero. La (3.33) diviene così

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} n^{-1} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma. \tag{3.35}$$

Questa rappresenta la soluzione generale alle equazioni del moto soggette alle condizioni al contorno di Neumann. Per definire una soluzione particolare è necessario specificare tutte le costanti x_0^μ e α_0^μ, soddisfando la condizione $n \geq 0$.
Dall'equazione sopra riportata è possibile dedurre le derivate delle coordinate della stringa rispetto ai parametri τ e σ:

$$\partial_\tau X^\mu = \dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}, \tag{3.36a}$$

$$\partial_\sigma X^\mu = X^{\mu'} = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \sin n\sigma e^{-in\tau}, \tag{3.36b}$$

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \tag{3.36c}$$

La (3.36c) riporta una combinazione lineare delle due derivate precedentemente definite. In questo modo si sono trovate le soluzioni all'equazione d'onda che soddisfano le condizioni al contorno. É però necessario tenere conto anche dei vincoli, compattati nella (3.23), che richiedono la non completa determinazione arbitraria delle costanti α_n^μ. Nel prossimo paragrafo, al fine di trovare una soluzione in grado di soddisfare contemporaneamente l'equazione d'onda ed i vincoli, si fisserà un gauge particolare.

3.4 Soluzioni cono-luce per le equazioni del moto

La ricerca delle soluzioni alle equazioni del moto prevede l'utilizzo delle coordinate cono-luce, presentate nel paragrafo 1.5, e l'imposizione di condizioni che definiranno il *gauge cono-luce*. Si è visto come, in generale, fissare un gauge corrisponde ad una specifica scelta di parametrizzazione della superficie di mondo. Adottare il gauge cono-luce significa imporre le condizioni (3.15) e (3.20). Proiettando X e p sull'iperpiano ortogonale a η^μ, si trova

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+, \tag{3.37}$$

ovvero le coordinate X^0, X^1, p^0, p^1 vengono sostituite da opportune combinazioni lineari. Queste due relazioni permettono di riscrivere le condizioni sopra citate, dove si ricorda che $\beta = 1, 2$ rispettivamente per stringhe chiuse e aperte, come

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta}\mathcal{P}^{\tau+}. \tag{3.38}$$

La seconda uguaglianza mostra come la densità del momento p^+ sia costante lungo tutta la stringa, in accordo con la già nota conservazione di p^μ.
Il gauge cono-luce contiene tutta la dinamica nelle *coordinate trasverse* indicate con X^I, dove $I = 2, ..., d$. Le coordinate X^-, a meno del modo zero, non sono fisicamente interessanti. Facendo uso del prodotto relativistico nel cono-luce, definito in (1.38), e della metrica associata $\hat{\eta}_{\mu\nu}$, è possibile riscrivere i vincoli della (3.23) nel seguente modo

$$-2(\dot{X}^+ \pm X^{+'})(\dot{X}^- \pm X^{-'}) + (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0. \tag{3.39}$$

Le condizioni del gauge prevedono però l'annullamento di $X^{+'}$ e che $\dot{X}^+ = \beta\alpha' p^+$, perciò si ottiene in definitiva

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'}\frac{1}{2p^+}(\dot{X}^I \pm X^{I'})^2. \tag{3.40}$$

É evidente che, per considerare valida questa equazione, si deve assumere $p^+ \neq 0$ ma è noto che $p^+ \geq 0$. Per $p = 0$ si ha l'unico caso in cui il formalismo cono-luce non può essere usato e, fisicamente, corrisponde ad una situazione non comune: una particella non massiva che viaggia a velocità della luce nella direzione negativa dell'asse x^1. In generale quindi si assume che $p^+ > 0$.
Considerando il caso di stringhe aperte, è possibile esprimere le coordinate trasverse nella stessa forma della soluzione generale (3.35)

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0} n^{-1}\alpha_n^I e^{-in\tau}\cos n\sigma. \tag{3.41}$$

Parallelamente le condizioni di gauge fanno sì che

$$X^+(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^+ \tau, \tag{3.42}$$

annullano cioè la posizione del modo zero e le oscillazioni di X^+. La coordinata X^-, essendo una combinazione lineare di X^0, X^1, soddisfa la medesima equazione del moto e gli stessi vincoli delle altre coordinate perciò, usando la stessa espansione, si ottiene:

$$X^-(\tau,\sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0} n^{-1}\alpha_n^- e^{-in\tau}\cos n\sigma. \tag{3.43}$$

Ponendo allora $\mu = -$ e $\mu = I$, per la (3.36c) si trova

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau\pm\sigma)}, \tag{3.44a}$$

$$\dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau\pm\sigma)}. \tag{3.44b}$$

É possibile usare queste due equazioni, insieme alla (3.40), per ottenere l'identità

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \tag{3.45}$$

Questa costituisce la soluzione completa. Infatti, per rappresentare un moto fisicamente permesso, si devono specificare arbitrariamente p^+, x_0^-, x_0^I e tutte le costanti α_n^I, per determinare $X^I(\tau,\sigma)$ e $X^+(\tau,\sigma)$. La (3.45) permette invece di calcolare le costanti α_n^- che, insieme con x_0^-, determinano infine $X^-(\tau,\sigma)$. In questo modo si costruisce appunto l'intera soluzione particolare.
L'espressione a destra dell'uguaglianza sopra riportata, rappresentante una combinazione quadratica di oscillatori, è stata chiamata *modo trasverso di Virasoro* $L_n^\perp$:

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \tag{3.46}$$

La (3.40) e la (3.44a) è possibile riscriverle ora in termini di $L_n^\perp$ come:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{p^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau\pm\sigma)} = \frac{1}{4\alpha' p^+}(\dot{X}^I \pm X^{I'})^2. \tag{3.47}$$

É possibile dimostrare che i modi di Virasoro rappresentano esattamente i modi di espansione della coordinata $X^-(\tau,\sigma)$:

$$X^-(\tau,\sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+}L_0^\perp\tau + \frac{i}{p^+}\sum_{n\neq 0} n^{-1} L_n^\perp e^{-in\tau}\cos n\sigma, \tag{3.48}$$

dove il modo zero è definito come

$$L_0^\perp = \alpha' 2p^+p^-. \tag{3.49}$$

Nel contesto della meccanica quantistica i modi di Virasoro vengono elevati ad operatori. Per concludere la trattazione è interessante determinare la massa di una stringa. Questa, conservandosi, dipenderà dai coefficienti costanti a_n^I, introdotti per definire la soluzione del moto. In generale è possibile partire dalla nota relazione relativistica

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^Ip^I, \tag{3.50}$$

dove si sono introdotte le coordinate cono-luce nella seconda uguaglianza. Facendo riferimento alla notazione introdotta in (3.34) e usando i modi trasversi di Virasoro definiti in (3.46), si ottiene

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'}L_0^\perp = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{I*}\alpha_n^I\right) = p^Ip^I + \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}na_n^{I*}a_n^I. \tag{3.51}$$

Sostituendo quanto ottenuto nella (3.50), si ottiene finalmente

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}na_n^{I*}a_n^I. \tag{3.52}$$

Da questa formula finale si deduce che la massa non è mai definita negativa, infatti è ottenuta da una somma di termini nella forma $a^*a = |a|^2 \geq 0$. La massa di una stringa è sempre reale e solo quando tutti i coefficienti a_n^I si annullano $M = 0$ e la stringa collassa in un punto.
L'espressione appena ottenuta presenta un limite: non restituisce un numero sufficiente di stati non massivi. Nello specifico gli stati che si ottengono con $M = 0$ non esibiscono proprietà compatibili con i mediatori dei campi elettromagnetici e gravitazionali, ad esempio. Per far fronte a questo problema, la meccanica quantistica apporta un contributo extra alla definizione (3.52), che permette di ottenere stati identificabili con i mediatori noti. Grazie a ciò, infatti, la teoria delle stringhe acquisisce la possibilità di proporre una descrizione soddisfacente dei campi di gauge tra i quali, il gravitazionale, rappresenta quello di maggior interesse.

3.5 Operatori Virasoro per stringhe chiuse

Nel paragrafo precedente si è visto che, per le stringhe aperte, gli operatori di Virasoro rappresentano i modi di espansione α_n^- della coordinata cono-luce X^-. Nel caso quantistico delle stringhe chiuse, le coordinate hanno due modi di espansione: semplici e barrati. Gli $\bar{\alpha}$ vengono detti *operatori di moto sinistro*, quelli α *operatori di moto destro* e tra loro commutano. Ci si aspettano così due set di operatori di Virasoro. Facendo riferimento all'equazione (3.40), si ottiene ora

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\alpha'}\frac{1}{2p^+}(\dot{X}^I \pm X^{I'})^2, \tag{3.53}$$

dove, trattando esclusivamente stringhe chiuse, si è semplicemente assunto $\beta = 1$. Si definiscono quindi gli operatori di Viraroso, in analogia con quanto fatto in (3.47), come:

$$(\dot{X}^I + X^{I'})^2 = 4\alpha' \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)}, \tag{3.54a}$$

$$(\dot{X}^I - X^{I'})^2 = 4\alpha' \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}. \tag{3.54b}$$

Più esplicitamente è possibile esprimere i due set di operatori di Virasoro, per la stringa chiusa, come:

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I. \tag{3.55}$$

Ora, mettendo in relazione le (3.54) con la (3.53), si ottiene

$$\dot{X}^- + X^{-'} = \frac{2}{p^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \dot{X}^- - X^{-'} = \frac{2}{p^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}. \tag{3.56}$$

Espandendo le derivate della coordinata X^- della stringa chiusa:

$$\dot{X}^- + X^{-'} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \dot{X}^- - X^{-'} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau-\sigma)}. \tag{3.57}$$

Considerando la (3.56) e la (3.57), è possibile ottenere le espressioni per l'oscillatore -:

$$\sqrt{2\alpha'}\,\bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+}\bar{L}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'}\,\alpha_n^- = \frac{2}{p^+}L_n^\perp. \tag{3.58}$$

Nel caso particolare di $n = 0$ sorge un vincolo. Poichè le stringhe chiuse sono caratterizzate da un solo momento modo zero ($\alpha_0^I = \bar{\alpha}_0^I$), si trova la *condizione di corrispondenza del livello*:

$$\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp. \tag{3.59}$$

L'interpretazione fisica di ciò è che, siccome gli operatori sono definiti a seconda della loro azione sugli stati, ogni stato generico $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ deve soddisfare l'uguaglianza $L_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \bar{L}_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle$. Tutti gli stati che non soddisfano questo vincolo non possono appartenere allo spazio degli stati delle stringhe chiuse quantizzate. Per evitare ambiguità, si definisco gli operatori $\bar{L}_0^\perp, L_0^\perp$ come ordinati, senza costanti addizionali:

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4}p^I p^I + \bar{N}^\perp, \quad L_0^\perp = \frac{\alpha'}{4}p^I p^I + N^\perp. \tag{3.60}$$

Gli $\bar{N}^{\perp}, N^{\perp}$ sono operatori numero associati rispettivamente agli operatori barrati e semplici:

$$\bar{N}^{\perp} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{a}_n^{I\dagger}\bar{a}_n^I, \quad N^{\perp} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I. \tag{3.61}$$

La condizione di corrispondenza del livello (3.59) può essere ora sintetizzata in $N^{\perp} = \bar{N}^{\perp}$. Considerando allora le (3.58) nel modo zero, $n = 0$, e tenendo conto del vincolo, è possibile giungere all'espressione compatta

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- \equiv \frac{1}{p^+}(\bar{L}_0^{\perp} + L_0^{\perp} - 2) = \alpha' p^-, \tag{3.62}$$

dove l'ambiguità sull'ordinamento di $\bar{L}_0^{\perp}, L_0^{\perp}$ è eliminata dall'imposizione dell'invarianza Lorentziana. Imponendo che la teoria quantistica sia Lorentz invariante si giunge anche a determinare le dimensioni spaziotemporali che caratterizzano le stringhe chiuse: $D = 26$. Infatti, se la teoria classica è Lorentz invariante per ogni D, quella quantistica presenta un'anomalia: la simmetria non è preservata dalla quantizzazione eccetto quando D=26. Per maggiori dettagli si faccia riferimento a [3]. Le dimensioni delle stringhe chiuse coincidono con quelle aperte e ciò significa che i due tipi di stringa possono coesistere. Se ciò non accadesse sarebbe strano: una stringa aperta, congiungendo i suoi due punti estremi, riesce infatti sempre a formarne una chiusa.
L'ultima uguaglianza nella (3.62) si ottiene dalla relazione che lega il momento della stringa chiusa ad α_0. É così ora possibile calcolare il quadrato della massa M della stringa, in accordo con la (3.49):

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(\bar{L}_0^{\perp} + L_0^{\perp} - 2) - p^I p^I. \tag{3.63}$$

Sostituendo ora i valori espressi in (3.60), si trova

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(\bar{N}^{\perp} + N^{\perp} - 2). \tag{3.64}$$

Questa è l'espressione finale con cui si rappresenta la massa degli stati quantizzati, nel gauge cono-luce, di una stringa chiusa.

Capitolo 4

Campi cono-luce e particelle

4.1 Azione per campi scalari classici

Un campo scalare è una funzione reale dello spaziotempo e formalmente viene indicato con $\phi(t, \overrightarrow{x})$ o, più semplicemente, con $\phi(x)$. L'aggettivo scalare deriva dalla proprietà di invarianza sotto trasformazioni di Lorentz: ogni osservatore lorentziano concorderà sul valore del campo, per ogni punto fisso dello spaziotempo. In meccanica classica l'energia cinetica di una particella è proporzionale al quadrato della sua velocità. Similmente, nel caso di un campo scalare, la densità di energia cinetica T è per definizione proporzionale al quadrato del tasso di variazione del campo nel tempo:

$$T = \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2. \tag{4.1}$$

Si fa riferimento alla densità di energia perchè, per ogni istante temporale fissato, T è una funzione della posizione. In questo modo l'energia cinetica totale corrisponderà all'integrazione di T sullo spazio. Anche nel caso della densità di energia potenziale V è possibile fare un parallelismo con la meccanica classica. Considerando un oscillatore armonico contraddistinto da una posizione di equilibrio $x = 0$, la sua energia potenziale avrà un andamento del tipo $V \sim x^2$. Supponendo allora che il valore di equilibrio del campo sia $\phi = 0$ e che questo preferisca rimanere in tale stato, il potenziale più semplice che descriva questa situazione è quadratico ed è rappresentabile come:

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{4.2}$$

dove la costante m ha le dimensioni della massa. Poichè le equazioni (4.1) e (4.2) rappresentano entrambe delle densità di energia, devono essere contraddistinte dalle stesse unità di misura. É quindi necessario richiedere che $[m] = [\partial_0] = L^{-1} = M$. Combinando le due forme di densità energetica appena ottenute, è possibile ottenere una prima forma di densità Lagrangiana $\mathcal{L} \stackrel{?}{=} T - V$. Questa non è però completa in quanto, il primo termine dell'equazione rappresenta la spesa energetica a seguito della variazione del campo nel tempo, ciò fa supporre che sia necessario un contributo energetico anche a seguito della variazione del campo nello spazio. Il nuovo termine è quindi associato alle derivate spaziali del campo scalare (che verranno indicate con ∂_i), e può essere scritto come

$$V' = \frac{1}{2}\sum_i (\partial_i \phi)^2 = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2. \tag{4.3}$$

Questo contributo è da attribuire all'energia potenziale e non a quella cinetica perchè quest'ultima è sempre associata a derivate temporali. Questa scelta, inoltre, rende $\mathcal{L}$ un invariante lorentziano, esprimibile in forma completa come

$$\mathcal{L} = T - V' - V = \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi - \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_i\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{4.4}$$

dove gli indici i ripetuti rappresentano una somma. I segni che contraddistinguono i primi due termini della parte destra dell'uguaglianza appena riportata, permettono di semplificare la sua espressione introducendo la metrica di Minkowski:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{4.5}$$

É così evidente che, sino a quando tutti gli indici sono correttamente abbinati, la densità Lagrangiana è Lorentz invariante. L'azione associata è:

$$S = \int d^D x \left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right), \tag{4.6}$$

dove $d^D x = dx^0 dx^1 ... dx^d$ con $D = d + 1$ che rappresenta il numero delle dimensioni spaziotemporali. L'Eq. (4.6) è l'azione per un *campo scalare libero* di massa m. Un campo è detto libero quando le sue equazioni del moto sono lineari. Se tutti i termini dell'azione sono quadratici nel campo, come in questo caso, le equazioni del moto saranno sicuramente lineari nel campo. Un campo non libero è detto interagente ed è contraddistinto da termini di terzo grado, o superiori, nell'azione. Per trovare la densità energetica del campo si calcola prima quella Hamiltoniana $\mathcal{H}$. Il momento Π coniugato al campo è definito come

$$\Pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi. \tag{4.7}$$

A questo punto la densità Hamiltoniana è esprimibile come:

$$\mathcal{H} = \Pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{4.8}$$

I tre termini che contraddistinguono l'Hamiltoniana, a seguito dell'ultima uguaglianza, sono riconducibili rispettivamente a T, V', V. L'energia totale E è data dall'Hamiltoniana H corrispondente all'integrale spaziale della densità di Hamiltoniana:

$$E = H = \int d^d x \left(\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right). \tag{4.9}$$

A questo punto, per ottenere le equazioni del moto, è possibile applicare il principio di minima azione considerando una variazione $\delta\phi$ del campo e imponendo che la variazione dell'azione sia nulla. Scartando tutte le derivate totali si ottiene:

$$\delta S = \int d^D x(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu(\delta\phi)\partial_\nu\phi - m^2\phi\delta\phi) = \int d^D x\delta\phi(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - m^2\phi) = 0. \tag{4.10}$$

Si conclude quindi che l'equazione del moto per il campo scalare ϕ è

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - m^2\phi = 0. \tag{4.11}$$

Ponendo $\partial^2 \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, si ha:

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0, \tag{4.12}$$

in cui è possibile esplicitare la separazione spaziale e temporale, giungendo alla nota espressione conosciuta come *equazione di Klein-Gordon*

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \nabla^2\phi - m^2\phi = 0. \tag{4.13}$$

4.2 Soluzioni classiche di onde piane

L'equazione di Klein-Gordon è contraddistinta da soluzioni aventi la forma di onde piane. Considerando ad esempio l'espressione

$$\phi(t, \overrightarrow{x}) = ae^{-iEt+i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}}, \tag{4.14}$$

dove a ed E sono costanti e $\overrightarrow{p}$ è un vettore arbitrario, l'equazione di campo (4.13) fissa i possibili valori di E in termini di $\overrightarrow{p}$ e m:

$$E^2 - \overrightarrow{p}^2 - m^2 = 0 \quad \rightarrow \quad E = \pm E_p, \quad E_p \equiv \sqrt{\overrightarrow{p}^2 + m^2}. \tag{4.15}$$

La radice quadrata è scelta positiva così che $E_p > 0$.
In realtà, l'espressione (4.14) sopra riportata, non è del tutto corretta in quanto ϕ rappresenta un campo reale ma le sue soluzioni non lo sono. Affinchè questa fornisca soluzioni reali è necessario aggiungerle il termine complesso coniugato nel seguente modo:

$$\phi(t, \overrightarrow{x}) = ae^{-iE_pt+i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} + a^* e^{iE_pt-i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}}. \tag{4.16}$$

Questa soluzione dipende esplicitamente dal numero complesso a. L'interpretazione quantistica del campo scalare non è semplice: interpretando i due termini della soluzione come equazioni d'onda, allora il primo dovrebbe rappresentare l'equazione d'onda di una particella avente momento $\overrightarrow{p}$ ed energia E_p, positiva per definizione. Il secondo, al contrario, dovrebbe rappresentare la funzione d'onda di una particella con momento ed energia negativi: -$\overrightarrow{p}$, -E_p. Quest'ultima condizione non è fisicamente accettabile. Per poter applicare la meccanica quantistica ad un campo scalare classico è necessaria l'operazione di quantizzazione che fornisce come risultato stati di particelle contraddistinte unicamente da energia positiva.
In virtù della dualità matematica tra spazio e quantità di moto si ha che, se una funzione è data nello spazio delle posizioni $\phi(x)$, allora la sua trasformata di Fourier esprime la stessa funzione nello spazio dei momenti $\phi(p)$. É quindi possibile esprimere la trasformata di Fourier del campo scalare $\phi(x)$ come

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip\cdot x} \phi(p). \tag{4.17}$$

La trasformata di Fourier viene effettuata su tutte le coordinate spaziotemporali, infatti il prodotto scalare tra posizione e momento corrisponde a $p \cdot x = -p^0 x^0 + \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x}$. Affermare che ϕ è reale significa che vale l'uguaglianza $\phi(x) = (\phi(x))^*$. In questo modo la (4.17) diviene

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip\cdot x} \phi(p) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip\cdot x} (\phi(p))^*. \tag{4.18}$$

Applicando la trasformazione $p \to -p$, che non influenza l'integrazione $\int d^D p$, è possibile raccogliere nell'equazione precedente tutti i termini a sinistra:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip\cdot x} (\phi(-p) - (\phi(p))^*) = 0. \tag{4.19}$$

Il termine tra parentesi rappresenta la trasformata di Fourier della funzione nello spazio dei momenti e deve identicamente annullarsi. Per questo motivo si trova che, anche nello spazio dei momenti, vale la condizione:

$$\phi(-p) = (\phi(p))^*. \tag{4.20}$$

Sostituendo la (4.17) in (4.12) si trova:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (-p^2 - m^2) \phi(p) e^{ipx} = 0, \tag{4.21}$$

dove si fa agire ∂^2 su $e^{ip\cdot x}$. Visto che l'annullarsi dell'integrale deve verificarsi per ogni valore di x arbitrario, l'equazione richiede che

$$(p^2 + m^2)\phi(p) = 0 \quad \text{per ogni } p. \tag{4.22}$$

Per risolvere questa equazione è necessario specificare i valorori di $\phi(p)$ per tutti i valori che p può assumere. É possibile distinguere i seguenti due casi:

- $p^2 + m^2 \neq 0$: in questo caso si annulla il campo scalare $\phi(p) = 0$;
- $p^2 + m^2 = 0$: in questo caso il campo scalare $\phi(p)$ è arbitrario.

Nello spazio dei momenti la ipersuperficie $p^2 + m^2 = 0$ è chiamata *mass-shell*. Richiamando il quadrimomento $p^\mu = (E/c, \overrightarrow{p})$, la condizione di mass-shell diviene il luogo dei punti dello spazio dei momenti in cui vale $E^2 = \overrightarrow{p}^2 + m^2$. Si conclude perciò che $\phi(p)$ si annulla solo al di fuori della condizione di mass-shell, altrimenti può assumere valori arbitrari. Infatti per un dato punto di mass-shell p^μ, è possibile determinare la soluzione specificando il numero complesso $\phi(p)$. Questo numero permette di determinare anche la soluzione al punto $-p^\mu$, appartenente anch'esso alla mass-shell in virtù della condizione di realtà. Ciò significa che un numero complesso fissa i valori del campo per due distinti punti, appartenenti entrambi alla mass-shell. É possibile affermare che un campo che soddisfa l'equazione (4.22) detiene *un grado di libertà per ogni punto appartenente alla mass shell*.
Per esprimere l'equazione del moto di un campo scalare in coordinate cono-luce si definisce $\overrightarrow{x}_T$, vettore le cui componenti sono le coordinate trasverse x^I:

$$\overrightarrow{x}_T = (x^2, x^3, ..., x^d). \tag{4.23}$$

Adottando questa notazione, le coordinate dello spaziotempo divengono $(x^+, x^-, \overrightarrow{x}_T)$. L'equazione (4.12), espansa in coordinate cono-luce, è

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial x^I} - m^2\right)\phi(x^+, x^-, \overrightarrow{x}_T) = 0. \tag{4.24}$$

É possibile modificare la dipendenza spaziale del campo scalare $\phi(x^+, x^-, \overrightarrow{x}_T)$, applicando a quest'ultimo le seguenti sostituzioni: $x^- \rightarrow p^+$, $x^I \rightarrow p^I$. Dalla trasformata di Fourier si ottiene infatti:

$$\phi(x^+, x^-, \overrightarrow{x}_T) = \int \frac{dp^+}{2\pi} \int \frac{d^{D-2}\overrightarrow{p}_T}{(2\pi)^{D-2}} e^{-ix^-p^+ + i\overrightarrow{x}_T\cdot\overrightarrow{p}_T}\phi(x^+, p+, \overrightarrow{p}_T), \tag{4.25}$$

dove $\overrightarrow{p}_T = (p^2, p^3, ..., p^d)$ è il vettore avente per componenti i momenti trasversi p^I. Sostituendo questa nuova espressione per il campo scalare nella (4.24) e dividendo per $2p^+$, si trova

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{1}{2p^+}(p^I p^I + m^2)\right)\phi(x^+, p^+, \overrightarrow{p}_T) = 0. \tag{4.26}$$

Questa è un'equazione differenziale di primo grado, nel tempo cono-luce, ed ha la stessa struttura formale dell'equazione di Schröedinger, anch'essa al primo ordine nel tempo. Il parallelismo tra le due equazioni è utile nella ricerca di una relazione tra particella puntiforme e campo scalare.

4.3 Campi scalari quantistici e stati di particelle

Per descrivere il comportamento di particelle elementari e delle loro interazioni è possibile usare la teoria dei campi quantistici che permette di applicare, per l'appunto, la meccanica quantistica ai campi classici. Nella teoria quantistica, gli osservabili definiti classicamente, vengono sostituiti da opportuni operatori. Tornando all'onda piana (4.16), che descrive la sovrapposizione di due onde complesse aventi rispettivamente momento $\overrightarrow{p}$ e -$\overrightarrow{p}$ non nullo, si consideri un campo classico $\phi_P(t, \overrightarrow{x})$ dalla forma

$$\phi_p(t, \overrightarrow{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a(t) e^{i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} + a^*(t) e^{-i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} \right). \tag{4.27}$$

In questa configurazione del campo, determinata dalla variabile dinamica $a(t)$, si è generalizzata la dipendenza temporale attraverso la funzione $a(t)$ stessa e la sua complessa coniugata $a(t)^*$. Ai denominatori dell'equazione compaiono due fattori di normalizzazione, con E_p già definito in (4.15), e V rappresentante il volume dello spazio. Per questioni di semplicità è possibile considerare lo spazio come una scatola contraddistinta dai lati $L_1, L_2, ..., L_d$. In questo caso allora il fattore di volume assume la forma $V = L_1 L_2 ... L_d$. Generalmente quando si considera un campo interno ad una scatola, si richiede che questo sia periodico, ovvero che tutte le coordinate p_i di $\overrightarrow{p}$ soddisfino la condizione

$$p_i L_i = 2\pi n_i, \quad i = 1, 2, ..., d, \quad n_i \in \mathbb{Z}. \tag{4.28}$$

In questo modo, ogni componente del momento è quantizzata. Data la configurazione del campo scalare ϕ_p espressa in (4.27), l'azione corrispondente è:

$$S = \int dt \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_0 \phi_p)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_p)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_p^2 \right). \tag{4.29}$$

Questa prevede l'elevamento al quadrato del campo stesso, del suo gradiente e della sua derivata temporale. Sviluppando tutti i quadrati si ottengono due tipologie di termini: quelli indipendenti dallo spazio e quelli con dipendenza spaziale $exp(\pm 2i\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x})$, che forniscono un integrale $\int d^d x$ nullo, a seguito della condizione di quantizzazione (4.28). Per i termini privi di dipendenza dallo spazio invece, l'integrale spaziale fornisce un fattore del volume V che si elide con il fattore di normalizzazione $\sqrt{V}$. Si ottiene quindi la seguente espressione per l'azione:

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t) \dot{a}(t) - \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t) \right). \tag{4.30}$$

Questa descrive la dinamica di due oscillatori armonici semplici e poichè $a(t)$ è una variabile dinamica complessa, è possibile esprimerla in forma cartesiana

$$a(t) = q_1(t) + i q_2(t), \tag{4.31}$$

dove $q_1(t)$ e $q_2(t)$ sono reali. Esprimendo l'azione in funzione delle sole coordinate reali, si ottiene quindi

$$S = \int dtL = \sum_{i=1}^{2} \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{q}_i^2(t) - \frac{1}{2} E_p q_i^2(t) \right). \tag{4.32}$$

L'azione espressa in questa forma rende evidente il fatto che $q_1(t)$ e $q_2(t)$ sono coordinate di due oscillatori armonici distinti ma identici. I loro momenti sono ottenibili come

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i}{E_p} \quad \rightarrow \quad p_1(t) + ip_2(t) = \frac{1}{E_p} \dot{a}(t). \tag{4.33}$$

Dalla variazione dell'azione (4.32), espressa in funzione di coordinate reali, è possibile ottenere le seguenti equazioni del moto

$$\ddot{q}_i(t) = -E_p^2 q_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{4.34}$$

che, tornando alla notazione complessa più compatta, divengono

$$\ddot{a}(t) = -E_p^2 a(t). \tag{4.35}$$

Quest'ultima equazione è risolvibile in termini di esponenziali ed essendo di secondo grado, è contraddistinta da due diverse soluzioni:

$$a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t}, \tag{4.36}$$

dove a_p e a_{-p}^* sono due costanti complesse indipendenti.
Facendo uso dell'Eq. (4.9) è possibile esprimere l'energia di campo H come :

$$H = E_p \left(a_p^* a_p + a_{-p}^* a_{-p} \right). \tag{4.37}$$

Si noti che la dipendenza temporale è sparita e questo porta a concludere che l'energia sia una quantità conservata.
Nella teoria di campo scalare classico si esprime il momento, trasportato dal campo, attraverso un'espressione integrale che, in questo specifico caso, assume la forma

$$\overrightarrow{P} = -\int d^d x (\partial_0 \phi) \nabla \phi, \tag{4.38}$$

dove il momento del campo è conservato. L'espressione di $\overrightarrow{P}$ nel caso particolare della configurazione (4.27), con $a(t)$ definita in (4.36), è:

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{p} \left(a_p^* a_p - a_{-p}^* a_{-p} \right). \tag{4.39}$$

Il sistema in analisi consiste di due oscillatori armonici e l'espressione di H suggerisce che nella teoria quantistica a_p e a_{-p} siano *operatori di distruzione*, mentre a_p^* e a_{-p}^* siano *operatori di creazione* rappresentati rispettivamente come $a_p^\dagger$ e $a_{-p}^\dagger$. Questi oscillatori devono soddisfare le relazioni di commutazione

$$[a_p, a_p^\dagger] = 1, \quad [a_{-p}, a_{-p}^\dagger] = 1. \tag{4.40}$$

Ogni commutatore, avente un operatore con pedice p e uno con $-p$, si annulla. Anche la variabile $a(t)$ diviene ora un operatore, a cui è possibile associare il coniugato Hermitiano $a(t)^\dagger$. Si ottengono in questo modo due equazioni di operatori a cui è possibile aggiungere anche le rispettive derivate temporali:

$$a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t}, \tag{4.41a}$$

$$a^\dagger(t) = a_p^\dagger e^{iE_p t} + a_{-p} e^{-iE_p t}, \tag{4.41b}$$

$$\dot{a}(t) = -iE_p(a_p e^{-iE_p t} - a_{-p}^\dagger e^{iE_p t}), \tag{4.41c}$$

$$\dot{a}^\dagger(t) = iE_p(a_p^\dagger e^{iE_p t} - a_{-p} e^{-iE_p t}). \tag{4.41d}$$

Gli unici commutatori non nulli sono:

$$[a(t), \dot{a}^\dagger(t)] = [a^\dagger(t), \dot{a}(t)] = 2iE_p. \tag{4.42}$$

In questo contesto anche l'Hamiltoniana (4.37) diviene un operatore, descrivente una coppia di oscillatori armonici, ed assume la forma

$$H = E_p \left(a_p^\dagger a_p + a_{-p}^\dagger a_{-p} \right). \tag{4.43}$$

Entrambi gli oscillatori armonici sono contraddistinti da una frequenza E_p. Similmente, il momento (4.39) diviene l'operatore

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{p} \left(a_p^\dagger a_p - a_{-p}^\dagger a_{-p} \right). \tag{4.44}$$

Gli oscillatori contraddistinti dagli operatori con pedice $-p$ contribuiscono al momento totale con un segno negativo. Le prime due equazioni in (4.41) possono essere usate per ottenere la configurazione del campo, descritta in (4.27), in versione di operatore

$$\phi_p(t, \overrightarrow{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-iE_p t + i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} \right) \tag{4.45a}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{-p} e^{-iE_p t - i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t + i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} \right). \tag{4.45b}$$

Si noti che ϕ_p è un operatore dipendente dallo spaziotempo, anche detto *operatore di campo*. La (4.45b) è ottenuta dalla (4.45a) sostituendo a $\overrightarrow{p} \to -\overrightarrow{p}$. Si conclude quindi che il campo quantistico $\phi(t, \overrightarrow{x})$ include i contributi di tutti i possibili valori del momento $\overrightarrow{p}$:

$$\phi(t, \overrightarrow{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\overrightarrow{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-iE_p t + i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{x}} \right). \tag{4.46}$$

Le relazioni di commutazione per gli oscillatori sono le generalizzazioni di quelle definite in (4.40) ed assumono la seguente forma:

$$[a_p, a_k^\dagger] = \delta_{p,k}, \quad [a_p, a_k] = [a_p^\dagger, a_k^\dagger] = 0, \tag{4.47}$$

dove p, k sono vettori spaziali. La delta di Kronecker $\delta_{p,k}$ è sempre nulla a meno che $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{k}$, unico caso in cui vale uno. Considerando ora i contributi di tutti i valori che il momento può assumere, è necessario modificare le espressioni degli operatori H e $\overrightarrow{P}$ nel seguente modo:

$$H = \sum_{\overrightarrow{p}} E_p a_p^\dagger a_p, \tag{4.48a}$$

$$\overrightarrow{P} = \sum_{\overrightarrow{p}} \overrightarrow{p} a_p^\dagger a_p. \tag{4.48b}$$

Per costruire lo spazio degli stati, del sistema quantistico in analisi, è possibile procedere in analogia con quello già noto dell'oscillatore armonico. Si assume perciò l'esistenza di uno *stato vuoto* $|\Omega\rangle$ che, come nel caso dello stato fondamentale $|0\rangle$, è contraddistinto dall'energia minima ed è , in questo caso, interpretato come uno stato in cui non esistono particelle. Ne consegue che $H|\Omega\rangle = 0$, che rende $|\Omega\rangle$ uno stato a zero-energia e che $a_p|\Omega\rangle = 0$ per ogni $\overrightarrow{p}$. Al contrario, nel caso dell'operatore si creazione, si ha

$$a_p^\dagger |\Omega\rangle, \tag{4.49}$$

viene interpretato come stato avente momento $\overrightarrow{p}$. Per dimostrare quest'ultima assunzione è possibile fare agire l'operatore momento (4.48b) sullo stato ed ottenere quindi

$$\overrightarrow{P} a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\overrightarrow{k}} \overrightarrow{k} a_k^\dagger [a_k, a_p^\dagger] |\Omega\rangle = \overrightarrow{p} a_p^\dagger |\Omega\rangle, \tag{4.50}$$

dove si è fatto uso delle regole di commutazione sopra definite.
É possibile ottenere nello stesso modo l'energia dello stato, facendo agire l'operatore Hamiltoniano si ha

$$H a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\overrightarrow{k}} E_k a_k^\dagger [a_k, a_p^\dagger] |\Omega\rangle = E_p a_p^\dagger |\Omega\rangle. \tag{4.51}$$

Lo stato $a_p^\dagger |\Omega\rangle$ ha energia positiva. Nonostante l'operatore di campo quantistico abbia valori energetici sia positivi che negativi, gli stati che rappresentano le particelle sono contraddistinti da energie positive. Gli stati $a_p^\dagger |\Omega\rangle$ sono *stati ad una particella.* Al contempo lo spazio degli stati contiene anche *stati multiparticella*, ottenibili facendo agire sullo stato vuoto una collezione di operatori di creazione:

$$a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger ... a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle \, . \tag{4.52}$$

Questo stato, avente k operatori di creazione, rappresenta uno stato a k-particelle aventi rispettivamente momenti $\overrightarrow{p}_1, \overrightarrow{p}_2, ..., \overrightarrow{p}_k$ ed energie $E_{p_1}, E_{p_2}, ..., E_{p_k}$. I vari momenti $\overrightarrow{p}_i$ non devono essere necessariamente tutti diversi.
Dall'analisi delle soluzioni classiche si era giunti a concludere che, ad ogni punto sulla mass-shell, corrisponde un grado di libertà. Focalizzando l'attenzione sullo stato ad una particella ci si restringe alla parte fisica della mass-shell, ovvero quella contraddistinta da energia positiva. Si ha quindi un solo stato ad una particella, etichettato dal momento $\overrightarrow{p}$, per ogni punto appartenente alla mass-shell fisica.
Per descrivere gli stati delle particelle nelle coordinate cono-luce si parametrizza la parte fisica della mass-shell attraverso il momento trasverso $\overrightarrow{p}_T$ ed il momento cono-luce p^+ tale che $p^+ > 0$. Il valore dell'energia cono-luce p^- è ora fissato e anch'esso positivo. Per questo motivo, anzichè etichettare gli oscillatori con il vettore momento, si fa uso solo di p^+ e $\overrightarrow{p}_T$, così che lo *stato ad una particella per un campo scalare* sia rappresentabile, in notazione bra-ket, come:

$$a_{p^+, p_T}^\dagger |\Omega\rangle \, . \tag{4.53}$$

4.4 Campo di Maxwell e stato del fotone

In elettromagnetismo le equazioni di campo sono scritte in funzione del potenziale vettore $A_\mu(x)$. Questo non è definito in modo univoco, infatti si potrebbe fare equivalentemente uso di

$$A_\mu^{'} = A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \tag{4.54}$$

dove $\Lambda(x)$ è una funzione scalare arbitraria dello spaziotempo. La trasformazione (4.60) rappresenta una *simmetria di gauge* e viene espressa anche nel seguente modo:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon, \tag{4.55}$$

dove ϵ è detto parametro di gauge. Il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non è influenzato da questa trasformazione:

$$F_{\mu\nu}^{'} = \partial_\mu A_\nu^{'} - \partial_\nu A_\mu^{'} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda(x) - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu},$$

infatti i campi di Maxwell, a differenza dei campi scalari, sono dotati di invarianza di Gauge. Le equazioni del campo, in assenza di sorgenti, assumono la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0. \tag{4.56}$$

Sia $\partial^2 = \partial^\nu \partial_\nu$, è possibile scriverle anche come

$$\partial^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial \cdot A) = 0. \tag{4.57}$$

Facendo un paragone tra questa equazione e la (4.12) del campo scalare si nota che, in questo caso, non c'è alcun riferimento ad una massa. Questa potrebbe essere ricondotta ad un termine privo di derivate spaziotemporali, assente nell'espressione sopra riportata. É noto infatti che il campo di Maxwell non è massivo. Al fine di determinare le equazioni del moto, nello spazio dei momenti, è possibile applicare la trasformata di Fourier a tutte le componenti del potenziale vettore

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip\cdot x} A^\mu(p), \tag{4.58}$$

in cui, essendo $A^\mu(p)$ reale, vale $A^\mu(-p) = (A^\mu(p))^*$. Sostituendo quest'ultima equazione nella (4.57), si ottiene

$$p^2 A^\mu - p^\mu(p \cdot A) = 0. \tag{4.59}$$

É possibile fare la trasformata di Fourier anche alla trasformazione di gauge espressa nella forma (4.55) che, nello spazio dei momenti, mette in relazione δA^μ alla trasformata di Fourier del parametro ϵ nel seguente modo:

$$\delta A^\mu(p) = ip_\mu \epsilon(p), \tag{4.60}$$

dove vale la condizione di realtà anche per ϵ. Per analizzare la trasformazione di gauge in questa versione, è conveniente adottare le componenti cono-luce del campo di gauge:

$$A^+(p), \quad A^-(p), \quad A^I(p). \tag{4.61}$$

Con queste componenti, la (4.60) diviene

$$\delta A^+ = ip^+\epsilon, \quad \delta A^- = ip^-\epsilon, \quad \delta A^I = ip^I\epsilon. \tag{4.62}$$

Nel formalismo del cono-luce si assume sempre che $p^+ \neq 0$. Al contrario le trasformazioni di gauge in (4.62), rendono evidente che sia possibile porre A^+ a zero scegliendo opportunamente il valore del parametro di gauge. Infatti, applicando la trasformazione

$$A^{'+} = A^+ + ip^+\epsilon, \tag{4.63}$$

la componente + del nuovo campo $A^{'}$ si annulla scegliendo $\epsilon = iA^+/p^+$. Perciò è sempre possibile annullare la componente + di un campo di Maxwell applicando una trasformazione di gauge. Questa osservazione permette di definire la condizione per il *gauge cono-luce nella teoria di Maxwell* come

$$A^+(p) = 0. \tag{4.64}$$

Annullando la componente A^+ si determina il parametro di gauge ϵ e, in questo caso, applicare una qualsiasi successiva trasformazione di gauge non è possibile perchè renderà A^+ non nulla. Questa condizione semplifica l'equazione del moto (4.59) dove, ponendo $\mu = +$, si trova

$$p^+(p \cdot A) = 0 \quad \rightarrow \quad p \cdot A = 0 \quad , \text{con } p^+ \neq 0. \tag{4.65}$$

Questa equazione può essere espansa usando gli indici cono-luce:

$$-p^+A^- - p^-A^+ + p^IA^I = 0. \tag{4.66}$$

Sino a quando $A^+ = 0$ questa equazione permette di determinare A^- in termini di A^I trasversa:

$$A^- = \frac{1}{p^+}(p^IA^I). \tag{4.67}$$

A questo punto usando la (4.65) nella (4.59), tutto ciò che resta dell'equazione di campo è

$$p^2A^\mu(p) = 0. \tag{4.68}$$

Per $\mu = +$ questa equazione è banalmente soddisfatta mentre, per $\mu = I$ si ottiene un set di condizioni

$$p^2A^I(p) = 0. \tag{4.69}$$

Per $\mu = -$ l'equazione è soddisfatta grazie a (4.67) e (4.69). Per ogni valore di I l'equazione (4.69) assume la forma di equazione del moto di un campo scalare non massivo. Nello specifico $A^I(p) = 0$ quando $p^2 \neq 0$, così che anche $A^- = 0$ e, fino a quando A^+ è zero, anche l'intero campo di gauge è nullo. Per $p^2 = 0$, gli $A^I(p)$ non sono soggetti a vincoli e gli $A^-(p)$ sono determinati in funzione degli A^I. I gradi di libertà dei campi di Maxwell sono quindi apportati dai $(D-2)$ campi trasversi $A^I(p)$, per $p^2 = 0$. Si hanno così $(D-2)$ gradi di libertà per ogni punto sulla mass-shell. É possibile dimostrare invece che, per $p^2 \neq 0$, non si hanno gradi di libertà e tutti i campi sono equivalenti al campo zero. Se un campo differisce da quello zero, solo per una trasformazione di gauge, si dice essere un *gauge puro*. Richiamando infatti la trasformazione (4.54) si ha che per $A_\mu = 0$,

$A'_\mu = \partial_\mu \Lambda$ è equivalente di gauge al campo zero e, per questo, è gauge puro. Nello spazio dei momenti, un gauge puro, è un campo che può essere scritto come

$$A_\mu(p) = ip_\mu \Lambda(p), \tag{4.70}$$

per qualche scelta di Λ. Riscrivendo l'equazione del moto (4.59) come $p^2 A_\mu = p_\mu(p \cdot A)$, sino a quando $p^2 \neq 0$, vale

$$A_\mu = ip_\mu \left(\frac{-ip \cdot A}{p^2} \right). \tag{4.71}$$

Facendo un paragone con la (4.70) si nota che A_μ è un gauge puro. Ciò significa che non ci sono gradi di libertà nel campo di Maxwell quando $p^2 \neq 0$ e, a tutti gli effetti, è possibile affermare che non c'è campo. Tutti i campi classici indipendenti A^I possono essere espansi con lo stesso procedimento seguito nel caso del campo scalare in (4.46) e possono essere inferiti, nello stesso modo, gli oscillatori a_p^I e $a_p^{I\dagger}$, dove il pedice p rappresenta i valori di p^+ e $\overrightarrow{p}_T$. Si ottengono così $(D-2)$ specie di oscillatori. Introducendo, in analogia con quanto già detto, il vuoto $|\Omega\rangle$, lo *stato ad un fotone* dovrebbe essere scritto come

$$a^{I\dagger}_{p^+, p_T} |\Omega\rangle , \tag{4.72}$$

dove l'indice $I = (2, ..., d)$ è l'etichetta di polarizzazione. Lo stato del fotone appena scritto è detto essere polarizzato in direzione I-esima. Poichè si hanno $(D-2)$ possibili polarizzazioni, si hanno $(D-2)$ stati ad un fotone linearmente indipendenti, per ogni punto sul settore fisico della mass-shell. Si conclude, perciò, che uno *stato ad un fotone* con momento (p^+, p_T), è una sovrapposizione lineare degli stati sopra citati:

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a^{I\dagger}_{p^+, p_T} |\Omega\rangle . \tag{4.73}$$

Qui il vettore trasverso ξ_I è detto vettore di polarizzazione. In uno spaziotempo quadri-dimensionale, la teoria di Maxwell prevede $D - 2 = 2$ stati di singolo fotone per ogni momento fissato. Ciò è un'espansione di quanto già noto classicamente, dove le onde elettromagnetiche, che si propagano in una direzione prefissata ed hanno una lughezza d'onda definita, sono la sovrapposizione di due onde piane che rappresentano stati di polarizzazione indipendenti.

4.5 Campo gravitazionale e stato del gravitone

La relatività generale di Einstein è una teoria della gravitazione che, molto elegantemente, descrive la geometria dello spaziotempo attraverso variabili dinamiche.

Lo spaziotempo della relatività ristretta è quello di Minkowski, le cui proprietà geometriche sono rappresentate dalla formula definita in (1.4a). In presenza di un campo gravitazionale non trascurabile, la metrica costante $\eta_{\mu\nu}$ viene rimpiazzata da quella dinamica $g_{\mu\nu}(x)$, propria della relatività generale. Anche quest'ultima mantiene la proprietà di essere simmetrica rispetto allo scambio degli indici. Per molti fenomeni fisici la gravità è molto debole ed è quindi possibile scegliere $g_{\mu\nu}$ molto vicino alla nota metrica di Minkowski:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{4.74}$$

dove $h_{\mu\nu}(x)$ è una piccola fluttuazione intorno a $\eta_{\mu\nu}$.
Le equazioni di Einstein, per il campo gravitazionale, possono essere espanse in termini di $h_{\mu\nu}$ per derivare un'equazione del moto linearizzata. In assenza di sorgenti, l'espressione risultante è:

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha(\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu\partial^\nu h = 0, \tag{4.75}$$

dove $h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Questa equazione è l'analogo gravitazionale della (4.56), descrivente i campi di Maxwell in assenza di sorgenti. Mentre la (4.56) è esatta, la (4.75) è valida solo per campi gravitazionali deboli, in quanto rappresenta l'approssimazione lineare di un'equazione che include termini quadratici e di ordine superiore in h. Definendo $h_{\mu\nu}(p)$ come la trasformata di Fourier di $h_{\mu\nu}(x)$, l'equazione sopra riportata, nello spazio dei momenti, diviene:

$$S^{\mu\nu}(p) \equiv p^2 h^{\mu\nu} - p_\alpha(p^\mu h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{\mu\alpha}) + p^\mu p^\nu h = 0. \tag{4.76}$$

Ogni termine dell'espressione contiene due derivate e ciò fa supporre che le fluttuazioni $h_{\mu\nu}$ siano associate ad eccitazioni non massive.
Anche la gravità di Einstein, così come l'elettromagnetismo, è contraddistinta da trasformazioni di gauge. In questo contesto l'invarianza di gauge è un'invarianza per riparametrizzazione: usando diversi sistemi di coordinate si giunge alla medesima descrizione della fisica gravitazionale. Un cambio di coordinate infinitesimo

$$x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \tag{4.77}$$

può essere interpretato come un cambiamento infinitesimo della metrica $g_{\mu\nu}$ e della fluttuazione $h_{\mu\nu}$. É possibile mostrare che il cambiamento è dato da:

$$\delta h^{\mu\nu} = \delta_0 h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon, h), \quad \text{con} \quad \delta_0 h^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu\epsilon^\nu + \partial^\nu\epsilon^\mu. \tag{4.78}$$

Si noti che il cambiamento infinitesimo comprende anche una correzione lineare nel parametro di gauge ϵ e nella fluttuazione in h. A differenza del caso Maxwelliano, in cui ϵ non ha indici, in relatività generale, il parametro di gauge ha indici vettoriali (non riportati per semplicità). L'invarianza dell'equazione del moto completa, non lineare, sotto trasformazione di gauge $\delta h^{\mu\nu}$, implica l'invarianza di quella linearizzata sotto $\delta_0 h^{\mu\nu}$. Per dimostrare ciò, nel caso dell'equazione del moto lineare, espressa nello spazio dei momenti, si esplicita la trasformazione come:

$$\delta_0 h^{\mu\nu}(p) = ip^\mu \epsilon^\nu(p) + ip^\nu \epsilon^\mu(p). \tag{4.79}$$

Per prima cosa si calcola $\delta_0 h$:

$$\delta_0 h = \eta_{\mu\nu}\delta_0 h^{\mu\nu} = i\eta_{\mu\nu}(p^\mu \epsilon^\nu + p^\nu \epsilon^\mu) = 2ip \cdot \epsilon. \tag{4.80}$$

A questo punto si giunge ad una variazione risultante di $S^{\mu\nu}$, esprimibile come:

$$\delta_0 S^{\mu\nu} = ip^2(p^\mu \epsilon^\nu + p^\nu \epsilon^\mu) - ip^\mu p^\nu (p \cdot \epsilon) - ip^2 p^\mu \epsilon^\nu \tag{4.81a}$$
$$- ip^\mu p^\nu (p \cdot \epsilon) - ip^2 p^\nu \epsilon^\mu + 2ip^\mu p^\nu p \cdot \epsilon. \tag{4.81b}$$

É evidente che tutti i termini si elidono, perciò $\delta_0 S^{\mu\nu} = 0$, a riprova che l'equazione del moto sia gauge invariante.
Visto che la metrica $h^{\mu\nu}$ è simmetrica ed ha due indici che possono assumere nel gauge cono-luce i valori $(+, -, I)$, in generale si considera il seguente oggetto:

$$(h^{IJ}, h^{+I}, h^{-I}, h^{+-}, h^{++}, h^{--}). \tag{4.82}$$

L'obiettivo è settare a zero ogni campo contenente un indice $+$. Per fare ciò si fa uso della (4.79) per analizzare nel dettaglio le trasformazioni di gauge che coinvolgono un $+$:

$$\delta_0 h^{++} = 2ip^+ \epsilon^+, \tag{4.83}$$
$$\delta_0 h^{+-} = ip^+ \epsilon^- + ip^- \epsilon^+, \tag{4.84}$$
$$\delta_0 h^{+I} = ip^+ \epsilon^I + ip^I \epsilon^+. \tag{4.85}$$

Come nel caso dei campi di Maxwell si assume $p^+ \neq 0$. Allora, dalla (4.83), è evidente che una scelta opportuna di ϵ^+ permette di annullare h^{++}. Dalla (4.84), nonostante ϵ^+ abbia un valore fissato, è possibile trovare un ϵ^- per annullare h^{+-}. Similmente anche nell'ultima equazione è possibile scegliere un ϵ^I che azzeri h^{+I}. In questo modo, sfruttando la libertà di gauge, si sono settate a zero tutte le componenti di $h^{\mu\nu}$ contraddistinte da un indice $+$. Ciò definsce il *gauge cono-luce per il campo gravitazionale*:

$$h^{++} = h^{+-} = h^{+I} = 0. \tag{4.86}$$

I restanti gradi di libertà sono rappresentati da (h^{IJ}, h^{-I}, h^{--}).
Tenendo conto delle condizioni di gauge, quando $\mu = \nu = +$, l'equazione del moto (4.76) diviene

$$(p^+)^2 h = 0 \quad \rightarrow \quad h = 0. \tag{4.87}$$

Esplicitando l'espressione di h si trova:

$$h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -2h^{+-} + h^{II} = 0 \quad \rightarrow \quad h^{II} = 0, \tag{4.88}$$

ciò significa che la matrice h^{IJ} è a traccia nulla. Con $h = 0$, la (4.76) si riduce a

$$p^2 h^{\mu\nu} - p^{\mu}(p_\alpha h^{\nu\alpha}) - p^{\nu}(p_\alpha h^{\mu\alpha}) = 0. \tag{4.89}$$

Ponendo ora $\mu = +$ si ottiene $p^+(p_\alpha h^{\nu\alpha}) = 0$, perciò

$$p_\alpha h^{\nu\alpha} = 0. \tag{4.90}$$

Se quest'ultima condizione è valida, allora la (4.89) diviene

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0. \tag{4.91}$$

Questo è tutto ciò che resta dell'equazione del moto.
Nella (4.90) l'unico indice libero é ν e ponendo $\nu = +$, l'equazione è banale, con $\nu = I$ si trova $p_\alpha h^{I\alpha} = 0$, che può essere espansa come:

$$-p^+ h^{I-} - p^- h^{I+} + p_J h^{IJ} = 0 \quad \rightarrow \quad h^{I-} = \frac{1}{p^+} p_J h^{IJ}. \tag{4.92}$$

Similmente per $\nu = -$ si ha $p_\alpha h^{-\alpha} = 0$, espandibile in

$$-p^+ h^{--} - p^- h^{-+} + p_I h^{-I} = 0 \quad \rightarrow \quad h^{--} = \frac{1}{p^+} p_I h^{-I}. \tag{4.93}$$

Le due ultime equazioni permettono di ricavare h con l'indice -, in termini della h^{IJ} trasversa.
Tornando alla (4.91) si ha che l'equazione è banale per ogni campo con indice +, mentre per indici trasversi si ha:

$$p^2 h^{IJ}(p) = 0 \quad \text{per} \quad p^2 \neq 0. \tag{4.94}$$

Le equazioni $p^2 h^{I-} = 0$ e $p^2 h^{--} = 0$, sono automaticamente soddisfatte in virtù delle (4.92), (4.93). Quando nella (4.94) si ha che $p^2 = 0$, allora gli $h^{IJ}(p)$ non sono vincolati, a meno della condizione di traccia nulla $h_{II}(p) = 0$.
Si conclude perciò che i gradi di libertà del campo gravitazionale classico D-dimensionale sono apportati dal tensore di campo h^{IJ} simmetrico, trasverso e a traccia nulla, le cui componenti soddisfano le equazioni del moto di uno scalare non massivo. Questo tensore ha un numero di componenti pari ad una matrice quadrata, simmetrica, a traccia nulla di dimensione $(D-2)$. Il numero delle componenti della matrice è esprimibile come:

$$n(D) = \frac{1}{2}(D-2)(D-1) - 1 = \frac{1}{2}D(D-3). \tag{4.95}$$

Come nel capitolo precedente, si assume per uno scalare non massivo, un grado di libertà per ogni punto sul settore fisico della mass-shell. In uno spaziotempo quadridimensionale esistono due direzioni trasverse e una matrice simmetrica a traccia nulla di dimensione 2, ha due componenti indipendenti, perciò si hanno $n(4) = 2$ gradi di libertà. All'aumentare delle dimensioni dello spaziotempo, aumentano i gradi di libertà in modo piuttosto rapido. Per ottenere lo stato del gravitone si espande ogni campo indipendente h^{IJ}, attraverso opportuni operatori di creazione e distruzione. Per fare ciò sono necessari gli oscillatori $a^{IJ}_{p^+,p_T}$ e $a^{IJ\dagger}_{p^+,p_T}$. Si introduce come al solito il vuoto $|\Omega\rangle$ e, a questo punto, si definisce lo *stato del gravitone* con momento $(p^+, \overrightarrow{p}_T)$ come una sovrapposizione lineare degli stati indipendenti polarizzati $a^{IJ\dagger}_{p^+,p_T}|\Omega\rangle$:

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a^{IJ\dagger}_{p^+,p_T} |\Omega\rangle \,, \quad \xi_{II} = 0, \tag{4.96}$$

dove ξ_{IJ} è il tensore di polarizzazione del gravitone. La condizione classica di traccia nulla trovata in (4.88), si traduce ora in $\xi_{II} = 0$. Poichè ξ_{IJ} è una matrice simmetrica, a traccia nulla, di dimensione $(D-2)$, si hanno $n(D)$ stati di gravitone linearmente indipendenti, per ogni punto sulla mass-shell fisica.
Ad oggi si ritiene che la relatività generale non sia conciliabile con la meccanica quantistica. La teoria della gravità mostra infatti comportamenti inattesi quando si ha a che fare con distanze molto piccole, si dice che non è normalizzabile. Sfortunatamente gli effetti quantistici sulla gravità sono rilevanti ad energie fuori della portata degli esperimenti in laboratorio, cioè non vi sono dati sperimentali che possano fare luce su come si comporta lo spaziotempo alla scala di Planck. É questo il regno odierno della teoria delle stringhe, che si propone come possibile candidata per una teoria quantistica della gravitazione e, per questo motivo, si mostra nel prossimo paragrafo come ottenere lo stato del gravitone come modo di vibrazione di una stringa chiusa, quantizzata nel gauge cono-luce.

4.6 Spazio degli stati di una stringa chiusa

Per costruire lo spazio degli stati per le stringhe chiuse, si parte dalla definizione degli stati fondamentali, rappresentati come $|p^+, \overrightarrow{p}_T\rangle$. La scelta dei due operatori non è casuale. Quantizzando la stringa nel gauge cono-luce, le variabili dinamiche a disposizione sono (x^I, x_0^-, p^I, p^+). Da questo set, a seguito delle regole di commutazione, è possibile scegliere un solo elemento per ciascuna delle due seguenti coppie: (x^-, p^+), (x^I, p^I). Si sono quindi scelti rispettivamente p^+ e p^I, a seguito del fatto che è sempre preferibile lavorare nello spazio dei momenti. Per generare gli stati eccitati è necessario far agire su $|p^+, \overrightarrow{p}_T\rangle$ gli operatori di creazione $a_n^{I\dagger}$, $\bar{a}_n^{I\dagger}$, definiti come:

$$\alpha^I_{-n} = a_n^{I\dagger}\sqrt{n}, \quad \bar{\alpha}^I_{-n} = \bar{a}_n^{I\dagger}\sqrt{n}, \quad \text{con} \quad n \geq 1. \tag{4.97}$$

Il vettore generale è:

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{I=2}^{25}(a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}}\right] \times \left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{J=2}^{25}(\bar{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}}\right] |p^+, \overrightarrow{p}_T\rangle \,, \tag{4.98}$$

con $\lambda_{n,I}$ e $\lambda_{m,J}$ interi non negativi, rappresentanti il numero di volte che gli operatori di creazione $a_n^{I\dagger}$, $\bar{a}_n^{I\dagger}$ compaiono. Lo stato $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ è perciò definito specificando il numero di volte che gli oscillatori agiscono sul fondamentale $|p^+, \overrightarrow{p}_T\rangle$ ed il conteggio è fornito dalla lista degli interi n non negativi e dagli indici di polarizzazione $I, J = 2, ..., 25$.
Gli operatori numero agiscono su $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ con autovalori:

$$N^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{I=2}^{25} n\lambda_{n,I}, \quad \bar{N}^{\perp} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{J=2}^{25} m\bar{\lambda}_{m,J}. \tag{4.99}$$

Un vettore $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ appartiene allo spazio degli stati della stringa se e solo se soddisfa il vincolo di corrispondenza del livello (3.59), espresso in termini di operatori numero. Perciò non tutti gli stati in (4.98) sono ammissibili. La massa degli stati è ottenuta dalla (3.64) come

$$\frac{1}{2}\alpha^{'} M^2 = N^{\perp} + \bar{N}^{\perp} - 2. \tag{4.100}$$

Identificando i primi stati ottenibili, in relazione alle loro masse, si trova che gli stati fondamentali, contraddistinti da $N^{\perp} = \bar{N}^{\perp} = 0$, sono stati ad una particella del campo scalare quantistico. In virtù della (4.100), si trova che la loro massa è immaginaria: $M^2 = -4/\alpha^{'}$. Ciò porta a concludere che si tratti di *tachioni*, particelle superluminali che costituiscono uno dei punti deboli della teoria delle stringhe. Oggi infatti, gran parte della comunità scientifica, ritiene che il tachione sia un errore legato alla soluzione di equazioni, avente significato matematico, ma non fisico. Gli stati eccitati successivi si ottengono facendo agire due oscillatori su $|p^+, \overrightarrow{p}_T\rangle$, al fine di preservare il vincolo $N^{\perp} = \bar{N}^{\perp}$. Un oscillatore deve essere un operatore di moto destro e uno di moto sinistro, entrambi di modo 1. Ciò restituisce stati aventi tutti $M^2 = 0$. Poichè gli indici di polarizzazione I, J etichettano due oscillatori distinti, il numero degli stati sarà $(D-2)^2$. Per una trattazione più completa sugli ulteriori stati vibrazionali, ottenibili dalla quantizzazione di una stringa chiusa, è possibile consultare [4]. Tornando agli stati non massivi appena discussi, essi si possono esprimere in modo generico, con momento fissato, come

$$\sum_{I,J} M_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \, |p^+, \overrightarrow{p}_T\rangle \,, \tag{4.101}$$

dove si è introdotta una matrice arbitraria M avente dimensione $(D-2)$. É noto che, ogni matrice quadrata, è scomponibile in una parte simmetrica S e antisimmetrica A:

$$M_{IJ} = \frac{1}{2}(M_{IJ} + M_{JI}) + \frac{1}{2}(M_{IJ} - M_{JI}) \equiv S_{IJ} + A_{IJ}. \tag{4.102}$$

La parte simmetrica è ulteriormente scomponibile:

$$S_{IJ} = \left(S_{IJ} - \frac{1}{D-2}\delta_{IJ}S \right) + \frac{1}{D-2}\delta_{IJ}S, \quad S \equiv S^{II} = \delta^{IJ}S_{IJ}. \tag{4.103}$$

Il primo termine a destra dell'uguaglianza è a traccia nulla perciò, la (4.103), decompone la matrice quadrata in una priva di traccia e in un multiplo dell'unità. Introducendo la notazione $\hat{S}_{IJ}$ per la matrice a traccia nulla e $S^{'} = S/(D-2)$ per il fattore moltiplicativo, è possibile esprimere la matrice quadrata iniziale come:

$$M_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S^{'}\delta_{IJ}. \tag{4.104}$$

Si è appena visto che, quando si scrive una matrice quadrata, è in generale possibile esprimerla attraverso tre termini indipendenti. Ne consegue che gli stati in (4.101) possono essere splitatti in tre diversi gruppi di stati linearmente indipendenti:

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \left| p^+, \overrightarrow{p}_T \right\rangle, \tag{4.105a}$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \left| p^+, \overrightarrow{p}_T \right\rangle, \tag{4.105b}$$

$$S^{'} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \left| p^+, \overrightarrow{p}_T \right\rangle. \tag{4.105c}$$

Nella (4.105a) sono rappresentati *gli stati ad una particella di gravitone*, mediatore dell'interazione di gravità. Nella teoria quantistica di campo gravitazionale, questi stati erano rappresentati da (4.96), dove compariva la matrice simmetrica ξ_{IJ}, a traccia nulla, arbitraria. Poichè $\hat{S}_{IJ}$ è anch'essa una matrice simmetrica a traccia nulla, si ha:

$$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \left| p^+, \overrightarrow{p}_T \right\rangle \leftrightarrow a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} \left| \Omega \right\rangle. \tag{4.106}$$

Questa identificazione è lecita perchè i due set di stati sono etichettati dagli stessi indici, trasportano lo stesso momento e sono entrambi non massivi. Ciò mostra che le stringhe chiuse, quantizzate nel gauge cono-luce, presentano naturalmente lo stato di gravitone e, per questo motivo, sono ottime candidate per formulare la teoria di gravità quantistica.

Bibliografia

[1] Costas Christodoulides. *The Special Theory of Relativity*. Springer, 2016.

[2] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifŝits. *Meccanica: Fisica teorica*. Editori Riuniti, Roma, 2004.

[3] Joseph Polchinski. *String theory: Volume 1, an introduction to the bosonic string*. Cambridge university press, 1998.

[4] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2009.