

Proses Sistematisasi dalam Pembuktian Matematika

¹Sitti Karimah Sulfiah, ^{2*}Yus Mochamad Cholily, ³Putri Ayu
Kusgiarohmah

^{1,2}Magister Pendidikan matematika, Universitas Muhammadiyah Malang

³Magister Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang

email: yus@umm.ac.id

Abstrak

Mahasiswa sebagai calon guru harus memiliki kemampuan dalam melakukan pembuktian matematis. Kemampuan tersebut berfungsi untuk meyakinkan seseorang akan suatu rumus ataupun teorema. Semakin tinggi kemampuan mahasiswa dalam melakukan pembuktian akan berdampak pada peningkatan keterampilan pembuktian matematika siswa. Secara umum metode pembuktian yang dikenal oleh siswa adalah pembuktian secara langsung dan tidak langsung. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui kemampuan mahasiswa dalam melakukan pembuktian ditinjau dari proses sistematisasi. Penelitian ini juga bertujuan untuk mengetahui faktor apa saja yang mempengaruhi kemampuan siswa dalam melakukan pembuktian matematis. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan pendekatan kualitatif. Hasil penelitian yang dijelaskan secara deskriptif menunjukkan bahwa kemampuan pembuktian mahasiswa ditinjau dari proses sistematisasi masih lemah, mahasiswa belum memahami perbedaan antara rumus, definisi, teorema ataupun sifat. Selain itu, mahasiswa juga belum mengaitkan definisi, sifat, ataupun teorema yang relevan dengan pembuktian yang dilakukan. Akibatnya mahasiswa menyelesaikan soal dengan cara coba-coba. Salah satu faktor yang mempengaruhi hal tersebut yaitu kurangnya latihan dalam mengerjakan soal yang berbasis pembuktian matematika.

Kata Kunci: Matematika; Pembuktian Matematik; Sistematisasi

Abstract

Students as prospective teachers must have the ability to carry out mathematical proof. This ability serves to convince someone of a formula or theorem. The higher ability of students in conducting proof will have an impact on improving students' mathematical proof skills. In general, the method of proof known by students is direct and indirect method. The purpose of this study is to determine the ability of students to conduct evidence in terms of the systematization process. This study also find out what factors affect the ability of students to carry out mathematical proof. This research was conducted using a qualitative approach. The results of this study described descriptively indicate that the ability of proof of students in terms of the systematization process is still weak, students do not understand the difference between formulas, definitions, theorems or properties. In addition, students also have not linked definitions, traits, or theorems that are relevant to the evidence carried out. As a result, students solve problems by trial and error. One factor that influences this is the lack of practice in working on problems based on mathematical proof.

Keywords: Mathematics; Mathematical Proof; Systematization

A. Pendahuluan

Pembuktian matematika adalah salah satu standar kemampuan matematis yang harus dimiliki siswa (NCTM, 2000). Adanya proses pembuktian dapat meyakinkan seseorang akan suatu rumus ataupun teorema (Rahman & Yunita, 2018). Menurut Hernadi (2013), pembuktian matematika adalah pembuktian kebenaran dari suatu argumen logis berupa premis, teorema, definisi, ataupun postulat terkait. Metode pembuktian digunakan untuk meningkatkan kemampuan tersebut (Syafri, 2017).

Secara umum metode pembuktian yang dikenal oleh siswa adalah pembuktian secara langsung dan tidak langsung (Machmud, 2019). Pembuktian langsung adalah membuktikan teorema yang berbentuk implikasi ($p \Rightarrow q$), sedangkan pembuktian tidak langsung adalah dengan mencari kebenaran kontraposisi dari suatu implikasi ($\sim q \Rightarrow \sim p$) (Hernadi, 2013).

Menurut Herizal, Suhendra, & Nurlaelah, (2019); Nurhidayah, Rosjanuardi, & Nurlaelah, (2019), Siswa masih mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian, kesulitan siswa dalam melakukan pembuktian membuat mereka melakukannya dengan cara mencoba-coba (Tanisli, 2016). Faktor yang mempengaruhi peningkatan keterampilan siswa dalam melakukan pembuktian adalah perilaku mengajar guru (Brunner & Reusser, 2019). Akan tetapi banyak guru yang kurang mampu dalam melakukan pembuktian (Noto, Priatna, & Dahlan, 2019; Tanisli, 2016) dan buku teks yang digunakan memuat kurang dari 6% latihan yang berbasis pembuktian (Thompson, Senk, & Johnson, 2012).

Pada tahun pertama perkuliahan, mahasiswa sebagai calon guru telah terbiasa membuktikan konsep-konsep matematika sederhana (Salsabila, Ratnaningsih, & Hadi, 2016), sehingga bukan hal baru bagi guru dalam melakukan pembuktian. Akan tetapi kemampuan mahasiswa dalam membuktikan masih rendah (Hodiyanto, 2017). Empat hal yang dapat dilihat dalam pembuktian matematika (Maslahah, 2019) yaitu : verifikasi, penalaran (*reasoning*), pengkomunikasian, dan sistematisasi. Dalam penelitian ini pembuktian mahasiswa hanya dilihat pada proses sistematisasi, yaitu kemampuan dalam mengaitkan definisi, sifat atau teorema yang relevan dalam membuktikan, karena Minggi, Paduppai, & Assagaf (2016) menyatakan bahwa pemahaman konsep dan prinsip matematika mahasiswa masih rendah dan guru hanya dapat melakukan pembuktian matematika pada tahap verifikasi dan *explanation* (Tanisli, 2016).

B. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan di salah satu perguruan tinggi di Pamekasan, pada mahasiswa tingkat akhir prodi pendidikan matematika sebagai calon guru yang akan berkecimpung dalam sekolah. Analisis data yang digunakan adalah kualitatif dengan pendekatan deskriptif karena peneliti ikut serta dalam penelitian dan akan mendiskripsikan tentang kemampuan pembuktian mahasiswa ditinjau dari proses sistematisasi.

Instrumen yang digunakan adalah soal tes yang berkaitan dengan pembuktian matematika dan pedoman wawancara semi terstruktur. Soal tes digunakan untuk melihat kemampuan pembuktian matematika mahasiswa ditinjau berdasarkan proses sistematisasi dan transkrip hasil wawancara

digunakan untuk memvalidasi hasil tes dalam melihat keabsahan perolehan data penelitian.

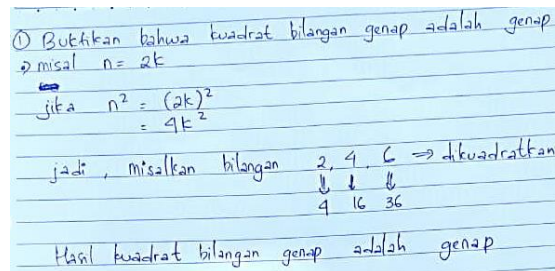
Tahap-tahap yang digunakan dalam analisis data sesuai dengan langkah-langkah penelitian kualitatif. Langkah-langkah tersebut yaitu reduksi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan.

C. Hasil dan Pembahasan

Berikut adalah data yang didapatkan dari penelitian yang berupa jawaban tes secara tertulis serta transkrip hasil wawancara. Data tersebut kemudian diolah dan dideskripsikan sesuai tujuan penelitian.

1. Kemampuan pembuktian matematis

Berdasarkan enam subjek yang diteliti, terdapat dua perbedaan jawaban mendasar yang akan dianalisis secara satu persatu dari setiap jawaban. Berikut adalah salah satu jawaban subjek (S) sebagai perwakilan dari salah satu jawaban bentuk pertama:



Gambar 1. Jawaban soal nomor 1 oleh subjek S

Untuk lebih meyakinkan hasil penelitian yang termuat dalam Gambar 1, berikut transkrip kutipan proses wa-wawancara peneliti (P) terhadap S:

P3: Disitu kamu langsung menuliskan "misal $n = 2k$ ". Itu maksudnya apa ya?

S3: Kalau bilangan genap itu rumus-nya $2n$ kalau ganjil $2n - 1$, Jadi saya tulis saja begitu, karena di soal keterangannya adalah bilangan genap

P4: $n = 2k$ itu apa? Rumus, teorema, atau apa?

S4: Permisalan untuk rumus bilangan genap

P5: Jadi itu hanya permisalan saja ya? Bukan rumus, bentuk umum, teorema, postulat, atau yg lain?

S5: iya rumus

P6: Maksudnya bagaimana?

Permisalan atau rumus? Beda antara memisalkan dan memang ada rumusnya.

S6: Memisalkan suatu hal yang ber-kaitan dengan rumus, memisalkan suatu bilangan genap itu menggunakan n . Terus rumusnya n itu sama dengan $2k$.

P8: Kemudian setelah memisalkan itu apa yangg kamu lakukan?

S8: Membuat suatu pembuktian.

P9: Disitu kamu menjawab $4k^2$. Apa hubungan $4k^2$ dengan soal ya?

S9: Di soal tertulis “Kuadrat bilangan genap sama dengan bilangan genap”. Jadi yang tadi sudah dimisalkan itu dikuadratkan juga. Kemudian daripada itu untuk membangun suatu keyakinan bahwa segala sesuatunya dapat dipecahkan. Jadi menggunakan angka terus dikuadratkan

P11: Bagaimana kamu bisa menyimpulkan bahwa pernyataan itu benar. Sedangkan disitu kamu tidak memberikan kesimpulan dan jika dilihat dari rumus bilangan genap hasilnya itu tidak sesuai dengan rumus. Rumus = $2k$. Hasil = $4k^2$.

S11: Saya tidak tau, bingung. Jadi ya langsung diisi seingat saya saja, Ketidaksinkronan antara permisal-an dan hasil.

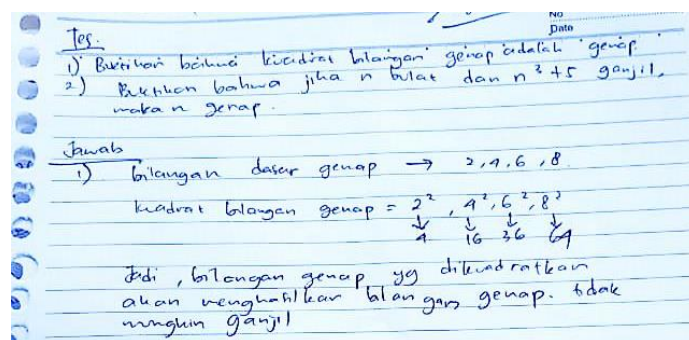
P13: Jadi bagaimana kamu bisa me-ngatakan bahwa perkerjaan mu itu benar, jika yang kamu kerjakan tidak sesuai dengan rumus bilangan genap.

S13: Berkaca pada pembuktian yg menggunakan angka.

Merujuk pada transkrip wawancara tersebut, terlihat bahwa subjek kurang memahami perbedaan antara rumus dan definisi. Pernyataan tersebut terlihat pada wawancara S6. Subjek mengatakan bahwa $n = 2k$ adalah rumus bilangan genap padahal $n = 2k$ merupakan definisi dari bilangan genap. Klaim itu sesuai dengan pendapat Suyitno (2010) yang menyatakan, definisi adalah pembatasan suatu konsep dalam matematika, sedangkan sifat dan teorema adalah pernyataan yang kebenarannya perlu dibuktikan.

Subjek juga belum mengaitkan hasil pembuktian dengan definisi, teorema, maupun postulat. Terlihat pada wawancara S9 dan S11 yang mengatakan bahwa subjek tidak mampu mengubah $4k^2$ kedalam definisi bilangan genap. Sehingga subjek tidak dapat menarik kesimpulan bahwa kuadrat bilangan genap adalah bilangan genap. Subjek melakukan penarikan kesimpulan melalui cara coba-coba dengan memberikan beberapa contoh. Artinya subjek mengeneralisasikan suatu pernyataan hanya dengan pembuktian secara parsial bukan pembuktian secara umum.

Berikut adalah jawaban dari salah satu subjek (R) sebagai perwakilan dari jawaban hasil tes bentuk kedua.



Gambar 2. Jawaban soal nomor 2 oleh subjek R

Untuk lebih meyakinkan hasil penelitian yang termuat dalam Gambar 2, berikut transkrip wawancara peneliti (P) terhadap R:

P2 : Mengapa kamu melakukan langkah seperti itu ?

R2 : Karena yang diminta bukti kuadrat bilangan bulat genap adalah genap, jadi saya menulis dasar genapnya dulu seperti 2,4,6,8, Kemudian dasar genap itu dikuadratkan seperti $2 \times 2 = 4$ dan seterusnya. Jadi bilangan genap yg dikuadratkan akan menghasilkan bilangan genap.

P3 : Apa benar dasar dari bilangan genap adalah 2,4,6,8, ... dan itu merupakan definisi atau gimana?

R3 : 2,4,6,8, ... termasuk $2n$ untuk n sendiri bilangan bulat. Jadi pernyataan saya di atas juga termasuk definisi.

P4 : Oh,, jadi maksudnya $2n$ itu adalah definisi dari bilangan genap?

R4 : Menurut saya begitu.

P5 : Tapi kenapa kamu tidak menuliskan $2n$ disitu kalau memang $2n$ adalah definisi bilangam genap. Kenapa harus membuat contoh-contoh?

R5 : Saya langsung ke angka genapnya. Jadi langsung angka genap dikuadratkan hasilnya akan genap.

P6 : Apa dengan melakukan pembuktian beberapa contoh ini bisa menarik kesimpulan bahwa berlaku secara umum?

R6 : Saya kurang tau.

Mengutip dari transkrip wawancara tersebut terlihat bahwa subjek belum melakukan pembuktian matematis. Ketika melakukan pembuktian, subjek menggunakan cara coba-coba dengan mengambil beberapa contoh untuk mengambil suatu kesimpulan seperti yang terlihat pada R2 dan R5. Selain itu, subjek juga masih ragu dengan hasil pekerjaannya meskipun telah melakukan pembuktian secara parsial untuk memperoleh kesimpulan yang berlaku secara umum. Klaim ini sesuai dengan pernyataan subjek di bagian R6 ketika proses wawancara.

2. Kesulitan dan Faktor-faktor yang mempengaruhi

Berikut kutipan wawancara subjek tentang kesulitan apa yang dialami dalam melakukan pembuktian. Wawancara ini juga berfungsi untuk menggali faktor apa saja yang mempengaruhi kemampuan pembuktian matematis.

Kutipan wawancara pada S

P15 : Kesulitan apa yang kamu rasakan dalam mengerjakan soal tersebut?

S15 : Kesulitannya diawal ketika menafsirkan soal.

P16 : Selain kesulitan dalam memahami soal, kira-kira kesulitan apa lagi yang kamu hadapi? Apakah cukup sampai dalam memahami soal saja?

S16 : Iya, sulit yang mau menafsirkan soalnya mau dibawa kemana

P17 : Berarti sulit untuk menentukan strategi apa yang akan digunakan gitu ya ?

S17 : *iya benar.*

P18 : *Kira-kira apa penyebab kesulitan kamu itu?*

S18 : *Pertama karena kurang latihan, kedua, karena dosen jarang melatih siswa terhadap soal-soal pembuktian.*

Kutipan wawancara pada R

P7 : *Apakah kamu pernah melakukan pembuktian sebelumnya?*

R7 : *Belum pernah.*

P8 : *Di analisis real atau geometri euclid atau aljabar belum pernah?*

R8 : *Sepertinya sudah, tapi saya lupa.*

Mengutip transkripsi wawan-cara tersebut, subjek merasa kesulitan dalam memilih strategi yang tepat untuk melakukan pembuktian dan juga kurang mampu dalam mengaitkan sebuah definisi, teorema, atau postulat dalam melakukan pembuktian. Salah satu faktor yang mempengaruhi adalah kurangnya latihan dalam mengerjakan soal berbasis pembuktian matematika.

D. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil analisis jawaban soal tes dan transkripsi wawancara mahasiswa dapat disimpulkan bahwa mahasiswa masih lemah dalam melakukan pembuktian matematika, khususnya pada proses sistematisasi. Mereka belum mengaitkan definisi, sifat, atau teorema yang relevan dengan pembuktian yang mereka lakukan. Mereka kurang memahami perbedaan antara definisi, rumus, teorema maupun sifat.

Salah satu penyebab lemahnya kemampuan mahasiswa yaitu kurangnya latihan dalam mengerjakan soal yang berbasis pembuktian. Padahal, sebagai calon guru seharusnya mahasiswa mampu melakukan pembuktian agar dapat meningkatkan keterampilan pembuktian siswa.

E. Daftar Pustaka

- Brunner, E., & Reusser, K. (2019). Type of mathematical proof: personal preference or adaptive teaching behavior? *ZDM - Mathematics Education*, 51(5), 747–758.
- Hatip, A. (2019). Pembelajaran Matematika di Era Industri 4.0. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika*, 896–906.
- Herizal, H., Suhendra, S., & Nurlaelah, E. (2019). The ability of senior high school students in comprehending mathematical proofs. *Journal of Physics: Conference Series*, 1157(2), 1–6.
- Hernadi, J. (2013). Metoda Pembuktian dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1).
- Hodiyanto. (2017). Analisis Kesalahan Mahasiswa Semester V dalam Mengerjakan Soal Pengantar Analisis Real. *Edu Sains: Jurnal Pendidikan Sains & Matematika*, 5(1), 33–44.

- Machmud, T. (2019). Bukti dan Pembuktian Dalam Pengajaran Matematika di Sekolah Menengah. *Jurnal Inovasi*, 6(2), 183–193.
- Maslahah, F. N. (2019). Analisis Kemampuan Pembuktian, Kemampuan Berfikir Kreatif dan Self-Efficacy Mahasiswa Pendidikan Matematika Pada Mata Kuliah Aljabar Abstrak Di Yogyakarta. *Tesis Program Studi Pendidikan Matematika Program Pascasarjana Universitas Negeri Yogyakarta*.
- Minggi, I., Paduppai, D., & Assagaf, S. F. (2016). Penyebab Kesulitan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematika. *Jurnal Penelitian Pendidikan INSANI*, 19(1), 18–2.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.
- Noto, M. S., Priatna, N., & Dahlan, J. A. (2019). Mathematical proof: The learning obstacles of pre-service mathematics teachers on transformation geometry. *Journal on Mathematics Education*, 10(1), 117–126.
- Nurhidayah, N., Rosjanuardi, R., & Nurlaelah, E. (2019). Investigating 10th grade students' understanding of the structure of deductive proof. *Journal of Physics: Conference Series*, 1157, 1–5.
- Rahman, A. A., & Yunita, A. (2018). Penerapan Modul Pembelajaran PACE untuk Meningkatkan Kemampuan Pembuktian Matematika Siswa di Kelas VII SMP Materi Geometri. *Maju*, 5(1), 27–38.
- Salsabila, E., Ratnaningsih, R., & Hadi, I. (2016). Pembekalan Pemahaman Metode Pembuktian Matematika dan Penerapan Strategi Abduktif-Deduktif Untuk Mengembangkan Kemampuan Membuktikan Konsep Aljabar Abstrak Pada Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNJ. *Jurnal Matematika Integratif*.
- Suyitno, A. (2010). Sistem deduktif aksiomatis dalam matematika dan matematika sekolah. *Aksioma*, 1(2), 1–13.
- Syafri, F. S. (2017). Kemampuan representasi matematis dan kemampuan pembuktian matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(1), 49–55.
- Tanisli, D. (2016). How Do Students Prove Their Learning and Teachers Their Teaching? Do Teachers Make a Difference? *Eurasian Journal of Educational Research*, (66), 47–70.
- Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253–295.