

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ESCOAMENTO DE FLUIDOS MAGNÉTICOS
EM TUBO CAPILAR: TEORIA E
EXPERIMENTO**

Por,

Yuri Zeniti Sinzato

Brasília, 5 de dezembro de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ESCOAMENTO DE FLUIDOS MAGNÉTICOS EM TUBO CAPILAR: TEORIA E EXPERIMENTO

Por,

Yuri Zeniti Sinzato

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Francisco Ricardo da Cunha (Orientador) _____

Prof. Adriano Possebon Rosa _____

Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira _____

Brasília 5 de dezembro de 2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Antonia e Florencio, pelo exemplo, carinho, educação e por apoiarem a minha formação.

Agradeço a minha namorada Bruna pela companhia, ajuda e atenção proporcionada nestes anos.

Agradeço ao meu orientador prof. Francisco que me acolheu desde o início do curso na pesquisa acadêmica e me orientou para desenvolver trabalhos com seriedade e qualidade.

Agradeço aos professores Yuri, Adriano e Taygoara pelo conhecimento transmitido.

Agradeço aos amigos do grupo com que dividi momentos de aprendizado e descontração: Filipe, Gesse, Victor e, em especial, ao Igor que me auxiliou nos resultados experimentais.

Resumo

O presente projeto visa investigar o escoamento de fluidos magnéticos em geometria axissimétrica tanto do ponto de vista teórico como experimental. Os experimentos serão realizados por meio do escoamento em tubo capilar, em regimes de baixo números de Reynolds, instalado numa bancada do tipo bomba de seringa. Os modelos teóricos propostos são resolvidos com um método de solução baseado em expansões assintóticas regulares bem como por integração numérica com discretização do domínio. As equações governantes são adimensionalizadas de forma apropriada para a identificação dos parâmetros físicos adimensionais do problema como o número de Péclet, a fração volumétrica de partícula e o parâmetro adimensional de campo efetivo aplicado. Os resultados teóricos de perfis de velocidade, perfis de magnetização e quantidades mais globais do escoamento como a viscosidade relativa e a viscosidade aparente na parede serão comparados com as medidas experimentais da bancada bomba de seringa. Observou-se uma boa concordância da solução numérica com os resultados experimentais mediante uma calibração dos parâmetros. Uma comparação com medidas experimentais em um reômetro de disco rotativo indicou concordância no regime de campos fracos. Para campos moderados, verificou-se um menor efeito magnetoviscoso no tubo capilar, indicando a presença de efeitos decorrentes do gradiente de taxa de cisalhamento.

Palavras-chaves: Ferrofluido, reologia, tubo capilar , efeito magnetoviscoso.

Abstract

The present work aims to investigate the flow of a magnetic fluid in axial symmetry through both theoretical and experimental approaches. The experiments are performed by means of a capillary tube flow, installed in a syringe pump experimental setup at low Reynolds number. The proposed theoretical models are investigated with a perturbation method based on a regular asymptotic solution, as well as numerical integration. The equations are made dimensionless in order to identify the physical dimensionless numbers such as the Péclet number, the particle volume fraction and the dimensionless parameter of effective applied magnetic field. The theoretical and experimental results are compared by means of the velocity and magnetization profiles, as well as more global quantities such as the wall viscosity and the relative viscosity. The numerical solution recovered well the experimental results at low Péclet number. A comparison between experimental results in capillary flow and rotating disk rheometer indicated a good agreement for weak magnetic fields. For moderate fields, the capillary tube measured a lower magnetoviscous effect, indicating the influence of the gradient of shear rate.

Key-words: Ferrofluid, rheology, capillary tube, magneto viscous effect.

Lista de Figuras

Figura 1 – Condições de contorno para o campo magnético e vetor densidade de fluxo.	10
Figura 2 – Diagrama de uma suspensão de partículas magnéticas.	12
Figura 3 – Cisalhamento simples de um fluido entre placas paralelas.	24
Figura 4 – Esquema do escoamento de um fluido magnético em um tubo capilar.	29
Figura 5 – Análise de convergência da malha de acordo com o número de intervalos N	34
Figura 6 – Incremento na viscosidade relativa em função do número de Péclet, para vários campos efetivos aplicados. - - - Solução Numérica. $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$	36
Figura 7 – Incremento na viscosidade parede em função do número de Péclet de parede, para vários campos efetivos aplicados. - - - Solução Numérica. $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$	37
Figura 8 – Incremento na viscosidade efetiva para número de Péclet pequeno. - - - Solução Numérica. —Solução assintótica. $\alpha_o = 1$ $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$	39
Figura 9 – Incremento na viscosidade de parede para número de Péclet de parede pequeno.- - - Solução Numérica. —Solução assintótica. $\alpha_o = 1$ $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$	39
Figura 10 – Incremento na viscosidade de parede em função do campo efetivo aplicado. - - - Solução Numérica. — Viscosidade efetiva. - · - Limite de Saturação. $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$	40
Figura 11 – Incremento na viscosidade efetiva para número de Péclet alto.- - - Solução Numérica. —Solução assintótica. $\alpha_o = 1$ $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$	42
Figura 12 – Incremento na viscosidade de parede para número de Péclet de parede alto. - - - Solução Numérica. —Solução assintótica. $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$	43
Figura 13 – Solução numérica das componentes da magnetização - - - M_Z e - · - M_r em função da coordenada radial r para $Pe = 0,1$. —Solução assintótica. $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$	44

Figura 14 – Ângulo da magnetização com o campo aplicado em função da coordenada radial r para $Pe = 0, 1$. - - - Solução Numérica. — Solução assintótica. $\alpha_o = 1, \phi = 5\%, \lambda = 1.3$	45
Figura 15 – Componente radial da magnetização em função da coordenada radial r para $Pe = 1$. - - - Solução Numérica. Solução assintótica para — $Pe \ll 1$ e - · - $Pe \gg 1$. $\alpha_o = 1, \phi = 5\%, \lambda = 1.3$	45
Figura 16 – Componente longitudinal da magnetização em função da coordenada radial r para $Pe = 1$. - - - Solução Numérica. Solução assintótica para — $Pe \ll 1$ e - · - $Pe \gg 1$. $\alpha_o = 1, \phi = 5\%, \lambda = 1.3$	46
Figura 17 – Ângulo da magnetização com o campo aplicado em função da coordenada radial r para $Pe = 1$. - - - Solução Numérica. Solução assintótica para — $Pe \ll 1$ e - · - $Pe \gg 1$. $\alpha_o = 1, \phi = 5\%, \lambda = 1.3$	47
Figura 18 – Intensidade da magnetização na parede em função do campo efetivo aplicado. - - - Solução Numérica. — Magnetização de equilíbrio. <i>En-carte</i> : Detalhe da saturação das magnetizações. $\phi = 5\%, \lambda = 1.3$	47
Figura 19 – Ângulo da magnetização na parede em função do campo efetivo aplicado. - - - Solução Numérica. $\phi = 5\%, \lambda = 1.3$	48
Figura 20 – Intensidade da magnetização na parede em função do número de Péclet de parede. - - - Solução Numérica. $\lambda = 1.3$	48
Figura 21 – Incremento na viscosidade aparente local em função do número de Péclet local. - - - Solução Numérica. Solução assintótica para — $Pe \ll 1$ e - · - $Pe \gg 1$. $Pe = 1, \alpha_o = 1, \phi = 5\%, \lambda = 30, 9$	49
Figura 22 – Perfil de velocidade em função da componente radial - - - Solução Numérica. — Perfil parabólico. $Pe = 1, \alpha_o = 15, \phi = 5\%, \lambda = 1.3$	50
Figura 23 – Velocidade máxima em função do campo efetivo aplicado - - - Solução Numérica. — Perfil parabólico. $Pe = 1, \phi = 5\%, \lambda = 1.3$	51
Figura 24 – Esquema de funcionamento da bancada experimental de bomba de seringa.	52
Figura 25 – Tubos capilares de vidro da marca Hildenberg.	53
Figura 26 – Bomba de seringa Cole & Parmer modelo KDS 101.	54
Figura 27 – Transdutor de pressão de relutância variável da marca Validyne.	54
Figura 28 – Manômetro de Bourdon digital da marca Zürich.	55
Figura 29 – Conjunto solenoide de cobre esmaltado e fonte de tensão contínua regulada.	55
Figura 30 – Banho térmico da marca LAUDA.	56
Figura 31 – Reômetro MCR 301 da Anton Paar.	57
Figura 32 – Constante de leitura nula em função da corrente aplicada nas solenoides, para o EFH 3.— Ajuste quadrático.	59
Figura 33 – Campo magnético axial produzido pelas solenoides em função da corrente aplicada.— Ajuste linear.	60

Figura 34 – Curva de diferença de pressão por vazão para óleo mineral.— Ajuste linear.	60
Figura 35 – Série temporal da leitura de pressão do transdutor em função do tempo para o EFH 3 com vazão de 1000 $\mu\text{l}/\text{min}$ na ausência de campo.	61
Figura 36 – Curva de diferença de pressão por vazão na ausência de campo aplicado para (a) APG 1134 e (b) EFH 3. — Ajuste linear. $T = 25\text{ }^\circ\text{C}$, $d = 500\ \mu\text{m}$	64
Figura 37 – Incremento na viscosidade de parede em função do número de Péclet de parede para (a) APG 1134 e (b) EFH 3. \circ Tubo capilar, — Solução numérica, - - - Platô de viscosidade constante. $\alpha_o = 1,182$, $\lambda = 1,3$, $T = 25\text{ }^\circ\text{C}$	66
Figura 38 – Incremento na viscosidade de parede em função do campo efetivo aplicado para (a) APG 1134 e (b) EFH 3. \circ Tubo capilar, - - - Ajuste da solução assintótica. $Pe_w = 0,018$, $\lambda = 1,3$, $T = 25\text{ }^\circ\text{C}$	67
Figura 39 – Incremento na viscosidade de parede em função do número de Péclet de parede para (a) APG 1134 e (b) EFH 3 no: \circ Tubo capilar e \blacksquare Reômetro. - - - Platô de viscosidade constante. $\alpha_o = 1,182$, $\lambda = 1,3$, $T = 25\text{ }^\circ\text{C}$	69
Figura 40 – Incremento na viscosidade de parede em função do campo efetivo aplicado para (a) APG 1134 e (b) EFH 3 no: \circ Tubo capilar e \blacksquare Reômetro. - - - Platô de viscosidade constante. $Pe_w = 0,018$, $\lambda = 1,3$, $T = 25\text{ }^\circ\text{C}$	70

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Parâmetros físicos adimensionais e seus valores típicos	23
Tabela 2 – Algoritmo numérico.	34
Tabela 3 – Características das amostras de ferrofluido. Dados fornecidos pelo fabricante.	57
Tabela 4 – Parâmetros físicos adimensionais utilizados no experimento	63

Lista de abreviaturas e siglas

FHD	Ferrohidrodinâmica
MHD	Magnetohidrodinâmica

Lista de símbolos

α	Campo efetivo adimensional local
α_o	Campo efetivo adimensional aplicado
β	Coefficiente da Derivada Oldroyd-Maxwell
$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento
δ	Variação virtual
ε	Parâmetro adimensional da expansão assintótica
ϵ	Tensor de Levi-Civita
η	Viscosidade dinâmica
η_o	Viscosidade do fluido base
η_ϕ	Viscosidade de Einstein
η_r	Viscosidade relativa
η_w	Viscosidade de parede
η_a	Viscosidade aparente local
θ	Ângulo entre a magnetização e o campo aplicado
λ	Parâmetro de interação dipolar magnética
μ_o	Permeabilidade magnética do vácuo
ξ	Vorticidade
ρ	Massa específica
ρ_l	Densidade de carga livre
σ	Tensor de tensões
τ	Tempo de relaxação

τ_b	Tempo de relaxação browniano
τ_n	Tempo de relaxação de Néel
ϕ	Fração volumétrica de partícula
χ	Susceptibilidade magnética do fluido
χ	Susceptibilidade magnética de saturação
Ω	Velocidade angular
a	Raio da esfera
A	Área
\mathbf{B}	Vetor indução magnética
d	Diâmetro do tubo
D_r	Coefficiente rotacional de difusão browniana
D_t	Coefficiente translacional de difusão browniana
\mathbf{D}_s	Dipolo hidrodinâmico de partícula
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação
E_m	Energia magnética
\mathbf{f}	Força sobre a partícula
\mathbf{F}	Força sobre um corpo material
\mathbf{G}	Gradiente de pressão
\mathbf{H}	Campo magnético
I	Corrente elétrica
I_r	Momento de inércia rotacional
\mathbf{I}	Tensor identidade
\mathbf{J}	Densidade corrente elétrica
k	Constante de Boltzmann
L	Comprimento do tubo
\mathbf{L}	Parte anti-simétrica do dipolo hidrodinâmico
\mathcal{L}	Função de Langevin

\mathbf{m}	Momento de dipolo magnético
\mathbf{M}	Magnetização
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor unitário normal
N	Número de partículas
N_v	Número de voltas na solenoide
p	Pressão termodinâmica
\mathbf{p}	Momento linear
Pe	Número de Péclet
\mathcal{P}	Função densidade de probabilidade
Q	Vazão
R	Raio do tubo
S	Superfície de uma região
\mathbf{S}	Parte simétrica do dipolo hidrodinâmico
t	Torque sobre uma partícula
\mathbf{T}	Grandeza tensorial
\mathbf{u}	Velocidade
U	Velocidade média
v_k	Volume da partícula
V	Volume de uma região
W	Trabalho
\mathbf{x}	Vetor posição
r, φ, z	Coordenadas cilíndricas

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Fluidos Magnéticos	1
1.2	Objetivos	4
	2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	Equações de Balanço da Mecânica dos Meios Contínuos	6
2.1.1	Equação de Balanço da Massa	6
2.1.2	Equação de Balanço do Momento Linear	7
2.2	Eletromagnetismo	8
2.2.1	Leis de Maxwell	8
2.2.2	Força e torque sobre uma partícula magnética	10
2.3	Formalismo Constitutivo	11
2.4	Equação de Evolução da Magnetização	12
2.4.1	Conceito de magnetização	12
2.4.2	Magnetização de equilíbrio	13
2.4.3	Modelos para a evolução da magnetização	16
2.5	Hidrodinâmica de Fluidos Magnéticos	18
2.6	Adimensionalização das Equações Governantes	21
	3 REOLOGIA DE TUBO CAPILAR	24
3.1	Conceito de reologia	24
3.2	Hipótese de Unidirecionalidade	25
3.3	Lei de Hagen-Poiseuille	26
3.4	Fluidos não-newtonianos	27
3.5	Modelagem do escoamento de fluidos magnéticos em tubo capilar	28
	4 METODOLOGIA NUMÉRICA	31
4.1	Método de Newton	31
4.2	Malha e integração da velocidade	32
4.3	Método da secante	33

4.4	Convergência da malha	33
4.5	Algoritmo	33
5 RESULTADOS NUMÉRICOS E APROXIMAÇÕES ASSINTÓ- TICAS		35
5.1	Viscosidade relativa em função do número de Péclet	35
5.2	Viscosidade de parede em função do número de Péclet de parede	36
5.3	Aproximação para Péclet pequeno	37
5.4	Aproximação para Péclet alto	41
5.5	Perfis de magnetização	43
5.6	Magnetização na parede	47
5.7	Perfil de viscosidade aparente local em função do número de Péclet local	49
5.8	Perfis de velocidade	50
5.9	Regiões de validade do modelo	50
6 METODOLOGIA EXPERIMENTAL		52
6.1	Aparato Experimental	52
6.1.1	Tubos capilares	53
6.1.2	Bomba de Seringa	53
6.1.3	Transdutor de Pressão	54
6.1.4	Solenóide	55
6.1.5	Banho Térmico	56
6.2	Amostras de fluidos magnéticos	56
6.2.1	Reômetro	57
6.3	Calibração do sistema	58
6.3.1	Curva de calibração do transdutor de pressão	58
6.3.2	Calibragem de leitura zero do transdutor em função da corrente	58
6.3.3	Curva de calibração do campo magnético	59
6.3.4	Verificação para um fluido newtoniano	60
6.4	Procedimento Experimental	61
6.5	Análise de incerteza	62
7 RESULTADOS EXPERIMENTAIS		63
7.1	Comportamento newtoniano na ausência de campo magnético	63
7.2	Efeito magnetoviscoso	65
7.2.1	Dependência com o Péclet de parede	65
7.2.2	Dependência com o campo efetivo aplicado	66
7.3	Viscometria de tubo capilar e reômetro	68
7.3.1	Dependência com o Péclet de parede	68
7.3.2	Dependência com o campo efetivo aplicado	70

	8 CONCLUSÕES	72
8.1	Sugestões para trabalhos futuros	73
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

1.1 Fluidos Magnéticos

Fluidos magnéticos, também chamados de ferrofluidos, são suspensões de partículas nanométricas magnéticas em um fluido base regular. Cada partícula é como um pequeno ímã, que responde a ação de um campo externo e transmite momento para o fluido base. Inicialmente, foi desenvolvido pela NASA em 1965 para ser usado como um combustível de baixa viscosidade em ambientes de micro-gravidade (STEPHEN, 1965). No entanto, a possibilidade de controlar seu movimento e suas propriedades externamente motivaram uma série de estudos e aplicações nas últimas décadas (RINALDI et al., 2005; RAJ; MOSKOWITZ, 1990).

Do ponto de vista microscópico, um ferrofluido é uma suspensão coloidal de partículas magnéticas com diâmetro típico de 10 nm, dotadas de um único domínio magnético, imersas em fluido base newtoniano não magnético. A adição de surfactantes à suspensão previne a agregação de partículas, garantindo sua estabilidade mesmo sob a ação de campos magnéticos intensos. As partículas magnéticas são normalmente de magnetita (Fe_3O_4), mas podem ser de vários outros elementos ferromagnéticos como cobalto, manganês e hólmio. Quanto ao fluido base, este normalmente é um solvente orgânico como o óleo mineral e a querosene, mas também é possível sintetizar uma suspensão aquosa (ODENBACH, 2009).

A modelagem da hidrodinâmica de fluidos magnéticos combina a mecânica dos fluidos de suspensões coloidais com as equações do eletromagnetismo. A interseção destas áreas para um fluido magnético não condutor, ausente da ação de campos e correntes elétricas, define a área da Ferrohodinâmica (FHD) (CUNHA, 2002; ROSENSWEIG, 2013). Essa área contrasta com a Magnetohodinâmica (MHD), em que o fluido magnético é substituído por um fluido condutor sob a ação da força de Lorentz.

Na ausência de campos aplicados, a agitação térmica (i.e. movimento browniano) orienta os dipolos magnéticos das partículas aleatoriamente, de modo que não há magnetização média e o fluido se comporta como uma suspensão ordinária. Quando um campo magnético externo é aplicado, os dipolos passam a sofrer a ação de forças magnéticas provenientes de gradientes de campo, e torques magnéticos provenientes do desalinhamento

entre o dipolo e o campo. As partículas então propagam essa ação para o fluido base por meio de tensões extras, gerando um tensor de tensões para o fluido contínuo equivalente

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_m , \quad (1.1)$$

em que a $\boldsymbol{\sigma}_h$ é o tensor de tensões puramente hidrodinâmico e $\boldsymbol{\sigma}_m$ é a contribuição magnética (CUNHA, 2002). O tensor de tensões equivalente não pode ser deduzido de maneira absoluta das equações de balanço, pois necessita de modelos constitutivos que descrevem o comportamento do material. A formulação de $\boldsymbol{\sigma}_m$ constitui um dos problemas de fechamento da hidrodinâmica de fluidos magnéticos. Para suspensões concentradas, as interações hidrodinâmicas e magnéticas entre as partículas passam a ser relevantes, podendo inclusive gerar flutuações de velocidade das partículas.

Quanto ao eletromagnetismo, as equações fundamentais são as equações de Maxwell no regime magnetostático, em que não há ação de campos e correntes elétricas, nem a presença de cargas. Para fechar a formulação, é necessário um modelo constitutivo para a magnetização do fluido magnético. Devido ao acoplamento entre a hidrodinâmica e o magnetismo, a magnetização passa sofrer a ação da vorticidade, que pode desalinhar a magnetização em relação ao campo. Como reação, surgem torques restauradores que tendem a trazer a magnetização de volta para a condição de equilíbrio. O comportamento temporal da magnetização passa a depender da competição entre esses diversos efeitos.

A equação de evolução da magnetização é o ponto menos estabelecido da hidrodinâmica de fluidos magnéticos. Uma teoria completa derivada do comportamento microscópico não está disponível, de modo que os modelos existentes fazem uso de argumentos fenomenológicos. A primeira equação de evolução da magnetização foi proposta por Shliomis (1971). Esta equação possui uma validade limitada em regimes diluídos e próximos do equilíbrio. Martsenyuk, Raikher e Shliomis (1973) e Kroh e Felderhof (1987) propuseram novos modelos na tentativa de compatibilizar com os resultados experimentais (PATEL; UPADHYAY; MEHTA, 2003; BACRI et al., 1995; SCHUMACHER et al., 2003). Neste trabalho utiliza-se uma equação evolutiva baseada no modelo de Shliomis (1971) estendido com uma derivada material Oldroyd-Maxwell, de modo a preservar a objetividade da equação constitutiva.

A relação complexa entre as grandezas eletromagnéticas e hidrodinâmicas leva a necessidade de investir na caracterização reológica de suspensões magnéticas, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Nesse sentido, a reometria têm um papel essencial, pois modelos constitutivos são testados em escoamentos simples como cisalhamento linear, quadrático ou oscilatório. De modo geral, pode se separar o efeito magnético nos fluidos magnéticos em duas componentes principais: a ação de gradientes de campo magnético, explorada em processos de separação magnética (CUNHA; SOBRAL, 2004) e redução de arrasto em tubos (ROSA; GONTIJO; CUNHA, 2016); e a ação de torques internos decorrentes do desalinhamento entre a magnetização e o campo magnético. Este último é o enfoque deste trabalho. No cisalhamento entre placas paralelas de um fluido

magnético submetido a um campo magnético uniforme perpendicular às placas, a vortividade tende a desalinhar a magnetização da posição de equilíbrio, dando origem a torques restauradores. Essa competição aumenta a dissipação viscosa, levando ao chamado efeito magnetoviscoso (ODENBACH; THURM, 2002). Essa viscosidade extra é comumente chamada de viscosidade rotacional, e para o exemplo em questão é definida como

$$\eta_r = \frac{\mu_o H_y M_x}{2\dot{\gamma}}, \quad (1.2)$$

em que H_y é o campo aplicado, M_x é a componente da magnetização perpendicular ao campo, μ_o é a permeabilidade magnética no vácuo e $\dot{\gamma}$ é a taxa de cisalhamento (ROSA, 2014).

O efeito magnetoviscoso foi verificado experimentalmente primeiro por McTague (1969). No entanto, os experimentos apresentaram incrementos de viscosidade uma ordem de grandeza maiores que aqueles previstos teoricamente, embora recuperem o comportamento qualitativo (PATEL; UPADHYAY; MEHTA, 2003). A hipótese geralmente adotada nos modelos teóricos de ausência de interação dipolar e monodispersidade não é apropriada para a maioria dos ferrofluidos comerciais. Na realidade, as partículas magnéticas interagem formando cadeias e agregados que intensificam a viscosidade do fluido. Odenbach (2003) mostrou ainda que a polidispersidade da suspensão é determinante e que as partículas de maior diâmetro são as únicas capazes de formar estruturas. Estes resultados são fundamentais para orientar o síntese de ferrofluidos comerciais.

No escoamento em tubos capilares, o fenômeno adquire alguma complexidade adicional, pois existe um gradiente de taxa de cisalhamento. Para um campo aplicado longitudinal ao tubo, uniforme e constante, o efeito magnetoviscoso sempre leva a um aumento do gradiente de pressão, mantida a vazão constante. Mas caso o campo aplicado seja variado no tempo com uma frequência suficientemente alta, pode se obter uma viscosidade "negativa". Primeiramente verificado por Bacri et al. (1995), existe na realidade a conversão de energia magnética em energia cinética, reduzindo o gradiente de pressão. Neste trabalho, nos restringimos a um campo uniforme e constante, de modo a observar mais claramente a importância de cada força atuante no fenômeno.

A presença de um gradiente de taxa de cisalhamento pode dar origem a efeitos adicionais não observados no cisalhamento simples. Andhariya et al. (2008), Hajjani e Larachi (2013), Nowak e Odenbach (2016) observaram variações na efeito magnetoviscoso com o diâmetro do tubo capilar e desvios no perfil de velocidade comparado com o perfil parabólico. No entanto, a grande quantidade de mecanismos físicos presentes (agregação e quebra de estrutura, polidispersidade, difusão hidrodinâmica, variações na constituição das partículas e dos surfactantes, entre outros) associado a dificuldades experimentais fazem com que o escoamento de ferrofluidos em tubo capilar permanece pouco compreendido.

A possibilidade de controlar as propriedades dos fluidos magnéticos têm motivado diversas aplicações. Algumas já são comercialmente consolidadas em vedações, alto-

falantes e amortecedores (RAJ; MOSKOWITZ, 1990), enquanto outras ainda estão em desenvolvimento, mas possuem grande potencial, como a hipertermia para o tratamento de câncer (HIERGEIST et al., 1999; DEATSCH; EVANS, 2014; HEDAYATNASAB; AB-NISA; DAUD, 2017). Esta última aplicação se mantém como uma intensa área pesquisa, sendo que a compreensão do escoamento em tubos capilares é essencial, pois o uso se daria em vasos sanguíneos capilares cujo diâmetro é da ordem de algumas dezenas de μm .

1.2 Objetivos

Neste trabalho é investigado, teoricamente e experimentalmente, o escoamento de fluidos magnéticos em tubo capilar sob a ação de um campo magnético longitudinal, uniforme e constante. Considera-se um escoamento permanente e unidirecional, de modo que os termos de inércia e convecção de magnetização não são relevantes. O sistema de equações governantes é resolvido numericamente com a discretização radial do domínio do tubo e a combinação de um método de Newton e um método da secante. Em seguida, as soluções numéricas são comparadas com aproximações assintóticas obtidas com um método de expansão regular. Por fim, os resultados teóricos são comparados com resultados experimentais obtidos em uma bancada de bomba de seringa. Na primeira etapa do Projeto de Graduação o enfoque será na investigação teórica do problema. Os objetivos específicos do PG1 são:

- Desenvolver as equações governantes em coordenadas axissimétricas utilizando as hipóteses de escoamento permanente e unidirecional e campo aplicado uniforme;
- Identificar os parâmetros físicos adimensionais governantes do problema;
- Discretizar o domínio e resolver o sistema de equações governantes com um método de Newton para sistemas;
- Obter as viscosidades relativa e de parede, bem como os perfis de magnetização, de velocidade e de viscosidade aparente local;
- Identificar um parâmetro adimensional de pequena ordem e obter uma aproximação assintótica com um método de expansão regular;
- Validar os resultados numéricos comparando com as soluções assintóticas.

Na segunda etapa do Projeto de Graduação será desenvolvida a investigação experimental do escoamento. Os objetivos específicos do PG2 são:

- Montar uma bancada experimental de bomba de seringa para o ensaio do escoamento de ferrofluidos em tubos capilares submetidos a um campo magnético uniforme;

- Obter as curvas de pressão e vazão para diferentes ferrofluidos e várias intensidades de campo magnético aplicado;
- Calcular a viscosidades de parede para diferentes valores dos parâmetros físicos adimensionais;
- Comparar qualitativamente e quantitativamente os resultados numéricos e experimentais, identificando os regiões de validade do modelo teórico.
- Comparar qualitativamente e quantitativamente os resultados experimentais para a bancada de bomba de seringa e aqueles obtidos no reômetro, identificando efeitos oriundos do cisalhamento quadrático.

Este relatório possui a seguinte estrutura: no capítulo 2, são desenvolvidas as equações governantes da Ferrohidrodinâmica e são identificados os parâmetros físicos adimensionais do problema; no capítulo 3, são apresentados os principais conceitos da reologia de tubo capilar e as equações governantes são particularizadas para coordenadas axis-simétricas experimentais; no capítulo 4, a metodologia numérica utilizada é detalhada; no capítulo 5, os resultados numéricos obtidos são apresentados e as aproximações assintóticas são desenvolvidas; no capítulo 6, apresentam-se o aparato e o procedimento a serem utilizados na investigação experimental; no capítulo 7, os resultados experimentais são apresentados e comparados com os resultados numéricos e do reômetro; por fim no capítulo 8, são discutidas as conclusões obtidas, com sugestões para trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

Para descrever o comportamento físico do escoamento de fluidos magnéticos, parte-se das leis fundamentais da mecânica dos meios contínuos e do eletromagnetismo. Estas equações são válidas para quaisquer escoamentos, independente do fluido em estudo, mas não são suficientes para a descrição completa. São necessárias então equações adicionais, chamadas equações constitutivas, baseadas nas propriedades materiais do fluido estudados. Essas equações são obtidas a partir de observações experimentais ou hipóteses sobre a natureza física do fluido, e devem obedecer aos princípios do formalismo constitutivo. Neste capítulo, são apresentadas as equações fundamentais da mecânica dos meios contínuos e do eletromagnetismo. Em seguida, são apresentados os modelos constitutivos para descrever o tensor de tensões para um fluido magnético e a evolução temporal da magnetização. Por fim, as equações são adimensionalizadas e são identificados os parâmetros físicos adimensionais que governam o problema.

2.1 Equações de Balanço da Mecânica dos Meios Contínuos

São apresentadas nesta seção as equações governantes da mecânica dos fluidos, obtidas das leis que regem a mecânica dos meios contínuos, em particular, a conservação da massa e do momento linear. Não é abordado aqui o princípio da conservação da energia, pois este não é relevante para a descrição do problema.

2.1.1 Equação de Balanço da Massa

Considere um volume arbitrário V associado um corpo material. Pelo princípio da conservação da massa, a variação temporal da massa m_V para um referencial transladando com a velocidade \mathbf{u} do fluido é nula,

$$\frac{Dm_V}{Dt} = 0, \quad (2.1)$$

em que $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ representa a derivada material associada a um referencial lagrangiano. A massa do corpo material pode ser escrita em termos de sua massa específica ρ , tal que

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2.2)$$

Aplicando a teorema do transporte de Reynolds (ARIS, 2012) para na equação 2.2, tem-se que

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 . \quad (2.3)$$

Pelo teorema da divergência (ARIS, 2012), a integral de superfície é igual à integral de volume de $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$, logo

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = 0 . \quad (2.4)$$

Como o volume V é arbitrário, podemos aplicar o teorema da localização (ARIS, 2012) para obter a equação da conservação da massa na forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 , \quad (2.5)$$

que também é chamada de equação da continuidade. No caso em que a massa específica é constante e uniforme, a equação 2.5 se reduz a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (2.6)$$

Essa equação também é chamada de condição de incompressibilidade e é válida para o escoamento de líquidos ou gases a velocidades pequenas comparadas a velocidade do som.

2.1.2 Equação de Balanço do Momento Linear

O momento linear \mathbf{p} de um corpo material de volume V pode ser escrito por

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{u} dV . \quad (2.7)$$

Pelo princípio da conservação do momento linear, sob a forma da 2ª Lei de Newton, a variação temporal do momento linear do corpo material corresponde à força líquida \mathbf{F} sobre o corpo, ou seja,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F} . \quad (2.8)$$

Aplicando o teorema do transporte de Reynolds à equação (2.8), tem-se que

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mathbf{F} . \quad (2.9)$$

A força líquida sobre o corpo material pode ser escrita em termos da densidade das forças de campo \mathbf{b} e do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ para o fluido,

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS . \quad (2.10)$$

Substituindo a equação 2.10 na equação 2.9, tem-se que

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS . \quad (2.11)$$

Aplicando o teorema da divergência, as integrais de superfície podem ser escritas como integrais de volume

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) dV = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV . \quad (2.12)$$

Novamente aplicando o teorema da localização, obtém-se a equação da conservação do momento linear na forma diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.13)$$

Substituindo a equação 2.5 na equação 2.13 resulta que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.14)$$

Essa equação também é conhecida como equação de Cauchy.

2.2 Eletromagnetismo

Nesta seção são apresentadas as grandezas e equações fundamentais do eletromagnetismo. Primeiro, as equações de Maxwell são particularizadas para o regime da Ferrohodinâmica. Em seguida, deduz-se a força e o torque magnéticos agindo sobre um dipolo magnético. Neste trabalho utilizaremos o Sistema Internacional de Unidades (SI), portanto a forma das equações poderá divergir daquelas apresentadas em outros estudos que utilizam o sistema CGS.

2.2.1 Leis de Maxwell

O eletromagnetismo é governado pelas 4 equações de Maxwell, que relacionam as principais grandezas elétricas e magnéticas. Em regime não relativístico, essas equações são

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{D}_e = \rho_l & \text{(Lei de Gauss da eletricidade) ,} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(Lei de Gauss do magnetismo) ,} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial t} & \text{(Lei de Ampère) ,} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(Lei de Indução de Faraday) .} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

As grandezas elétricas são o campo elétrico \mathbf{E} , o vetor deslocamento elétrico \mathbf{D}_e , o vetor densidade de corrente \mathbf{J} e a densidade de carga livre ρ_l . Na Ferrohodinâmica, em que o fluido magnético é não condutor e não há a ação de campos elétricos externos, todas essas grandezas elétricas são nulas, de modo que a Lei de Gauss da eletricidade e a lei de indução de Faraday não são relevantes (CUNHA, 2002; GRANT; PHILLIPS, 2013).

As duas grandezas fundamentais no magnetismo são o vetor densidade de fluxo \mathbf{B} e o vetor campo magnético \mathbf{H} . Em geral, considera-se \mathbf{B} como a grandeza fundamental

pela sua maior generalidade, sendo definido a partir da Lei de Biot-Savart aplicada a um circuito elétrico C percorrido por uma corrente \mathbf{I} ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{x}}{x^3} dl, \quad (2.16)$$

em que \mathbf{r} é o vetor posição associado ao elemento de linha dl . A Lei de Gauss do magnetismo é uma consequência direta da inexistência de monopólos magnéticos, e diz que o fluxo de \mathbf{B} ao longo de uma superfície fechada S é nulo,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \quad (2.17)$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície S e apontando para fora. Aplicando o teorema da divergência e o teorema da localização à equação 2.17, obtem-se a Lei de Gauss do magnetismo em sua forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.18)$$

O vetor campo magnético \mathbf{H} pode ser definido a partir de \mathbf{B} , pela relação

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M}, \quad (2.19)$$

em que μ_o é a permeabilidade magnética no vácuo e \mathbf{M} é a magnetização do material, descrito por um modelo constitutivo. Esta grandeza será tratada com mais detalhes na seção 2.4. A Lei de Ampère postula que a circulação do campo magnético ao longo de uma curva fechada C é igual a corrente elétrica ao longo de uma superfície S com fronteira em C , ou em termos da densidade de corrente elétrica \mathbf{J} , ou seja,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.20)$$

Aplicando o Teorema de Stokes à integral de linha, tem-se que

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.21)$$

Como a superfície S é arbitrária, pode-se aplicar o teorema da localização e escrever a lei de Ampère em sua forma diferencial

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (2.22)$$

Na Ferrodinâmica, não existem correntes elétricas no fluido, então a Lei de Ampère se reduz a

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (2.23)$$

que junto com a equação 2.18 são as equações fundamentais do eletromagnetismo em FHD. A partir dessas equações em sua forma integral, 2.17 e 2.20, podem ser deduzidas as condições de contorno para \mathbf{B} e \mathbf{H} em uma fronteira entre dois meios 1 e 2. Considere uma

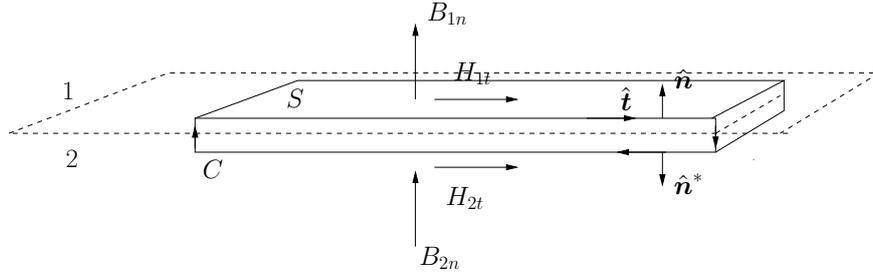


Figura 1 – Condições de contorno para o campo magnético e vetor densidade de fluxo.

superfície gaussiana S na fronteira, conforme a Figura 1. Pela lei de Gauss do magnetismo em sua forma integral 2.17

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = S(B_{1n} - B_{2n}) = 0 . \quad (2.24)$$

Generalizando a expressão 2.24, obtém-se a condição de contorno da continuidade da componente normal à superfície de \mathbf{B}

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 . \quad (2.25)$$

Considere agora uma curva fechada C na fronteira entre os meios, conforme a Figura 1. Pela lei de Ampère em sua forma integral 2.20, tem-se que

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = l(H_{1t} - H_{2t}) = 0 . \quad (2.26)$$

Generalizando a expressão, obtém-se a condição de contorno da continuidade da componente tangencial de \mathbf{H} ,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{0} . \quad (2.27)$$

2.2.2 Força e torque sobre uma partícula magnética

Considere uma partícula magnética pontual, com um momento de dipolo magnético \mathbf{m} fixo nela, e imersa em um campo magnético externo \mathbf{H} . O momento de dipolo magnético pode ser definido pelo produto da corrente I e da área A de um pequeno circuito plano fechado, ou seja,

$$\mathbf{m} = IA\hat{\mathbf{n}} , \quad (2.28)$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal ao circuito, orientado segundo a convenção da mão direita. Vamos analisar a força e o torque magnéticos atuantes sobre essa partícula devido ao campo externo utilizando o princípio do trabalho virtual. Conforme Schwartz (1972), a energia potencial associada a essa partícula é dada por

$$E_m = -\mu_o \mathbf{H} \cdot \mathbf{m} . \quad (2.29)$$

Suponha um deslocamento virtual angular $\delta\theta$ sobre a partícula. A variação de energia potencial é

$$\delta E_m = \delta(-\mu_o \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}) = \mu_o (\mathbf{H} \times \mathbf{m}) \cdot \delta\theta . \quad (2.30)$$

Essa variação de energia é igual a menos o trabalho exercido pelo torque \mathbf{t}_m sobre a partícula, assim,

$$-\mathbf{t}_m \cdot \delta\boldsymbol{\theta} = \mu_o(\mathbf{H} \times \mathbf{m}) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} . \quad (2.31)$$

Então, pelo princípio do trabalho virtual, o torque magnético sobre a partícula é

$$\mathbf{t}_m = \mu_o\mathbf{m} \times \mathbf{H} . \quad (2.32)$$

Suponha agora um deslocamento virtual de translação $\delta\mathbf{x}$ sobre a partícula. A variação de energia potencial é

$$\delta E_m = \delta(-\mu_o\mathbf{H} \cdot \mathbf{m}) = -\mu_o\nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{m}) \cdot \delta\mathbf{x} . \quad (2.33)$$

Neste caso, a variação de energia é igual a menos o trabalho exercido pelo força \mathbf{f}_m sobre a partícula, assim

$$-\mathbf{f}_m \cdot \delta\mathbf{x} = -\mu_o\nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{m}) \cdot \delta\mathbf{x} . \quad (2.34)$$

Aplicando o princípio do trabalho virtual, resulta que

$$\mathbf{f}_m = \mu_o\nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{m}) . \quad (2.35)$$

Como o momento de dipolo é constante para uma translação, então a força magnética sobre a partícula é

$$\mathbf{f}_m = \mu_o\mathbf{m} \cdot \nabla\mathbf{H} . \quad (2.36)$$

2.3 Formalismo Constitutivo

As equações de balanço da mecânica dos meios contínuos e do eletromagnetismo são derivadas de princípios de conservação, portanto são válidas para qualquer sistema, independente do material. Mas essas equações são insuficientes para descrever completamente um sistema físico. São necessárias ainda equações adicionais, denominadas constitutivas, baseadas em observações experimentais ou modelos teóricos acerca do material em estudo. Conforme [Truesdell \(1992\)](#), uma equação deve obedecer a certos princípios para que seja uma possível candidata a equação constitutiva, sendo eles:

- *Princípio do Determinismo*: Considere uma grandeza tensorial \mathbf{T} descrita por uma equação constitutiva da forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathfrak{F}(\mathbf{x}^t; \mathbf{X}, t) , \quad (2.37)$$

em que \mathfrak{F} é um funcional. O princípio do determinismo postula que $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ é determinado pelo histórico de movimento \mathbf{x}^t da partícula \mathbf{X} ;

- *Princípio da Ação Local*: O movimento de uma partícula \mathbf{Z} , suficientemente distante de uma partícula \mathbf{X} , pode ser desconsiderado para o cálculo da grandeza \mathbf{T} associada à \mathbf{X} ;

- *Princípio da Objetividade*: Também chamado de princípio da indiferença de referencial-material (*Material Frame-Indifference*). Postula que a equação constitutiva deve ser invariante à uma mudança de referencial, de modo que

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T , \quad (2.38)$$

em que \mathbf{Q} é um tensor ortogonal associado a mudança de referencial, e \mathbf{T}' é o valor de \mathbf{T} no outro referencial.

2.4 Equação de Evolução da Magnetização

2.4.1 Conceito de magnetização

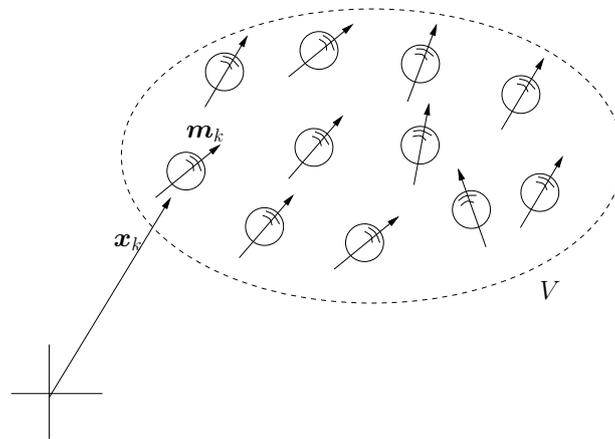


Figura 2 – Diagrama de uma suspensão de partículas magnéticas.

Conforme [Cunha \(2002\)](#), a magnetização é uma propriedade macroscópica que mede o grau de polarização de um material contínuo magnetizável. Materiais ferromagnéticos, tais como ferro, cobalte e níquel, podem intensificar o campo aplicado na ordem de algumas centenas de vezes. Do ponto de vista microscópico, a magnetização é uma média dos momentos de dipolo magnéticos presentes no material, por unidade de volume. No caso de um fluido magnético, cada partícula magnética contém um momento de dipolo magnético \mathbf{m}_k , imersa em um fluido não-magnetizável, conforme a Figura 2. O momento de dipolo é dado por

$$\mathbf{m}_k = M_d v_p \hat{\mathbf{d}}_k , \quad (2.39)$$

em que M_d é a magnetização de saturação do sólido ferromagnético, v_p é o volume da partícula e $\hat{\mathbf{d}}_k$ é a orientação do momento. Supõe-se uma distribuição monodispersa de partícula com mesma intensidade de momento de dipolo m . Embora a orientação de cada dipolo magnético possa variar de partícula a partícula, é possível definir um momento de dipolo médio $\bar{\mathbf{m}}$, considerando um volume V contendo uma quantidade N de partículas, como

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k . \quad (2.40)$$

Defini-se uma grandeza macroscópica contínua \mathbf{M} , chamada magnetização local, tal que seja dada por uma média de probabilidade dos momentos de dipolo do meio, por unidade de volume. Se a distribuição de momentos for estatisticamente homogênea e independente do volume V , que contém um número suficientemente grande de partículas, a média de probabilidade padrão pode ser substituída por uma média volumétrica. Assim, a magnetização é dada por

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{m} , \quad (2.41)$$

em que $d\mathbf{m}$ é o momento de dipolo associado a um elemento diferencial dV . O volume V corresponde ao volume de fluido base V_f mais o volume de cada partícula v_p , sendo que o momento de dipolo do fluido é nulo. Assim,

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \int_{V_f} d\mathbf{m} + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{v_p^k} d\mathbf{m} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k = \frac{N}{V} \overline{\mathbf{m}} . \quad (2.42)$$

A razão N/V corresponde ao número de densidade n da suspensão, sendo igual à razão entre a fração volumétrica de partículas ϕ e o volume da partícula v_p . Assim,

$$\mathbf{M} = n\overline{\mathbf{m}} = \frac{\phi}{v_p} \overline{\mathbf{m}} . \quad (2.43)$$

2.4.2 Magnetização de equilíbrio

Na ausência de um campo externo, as partículas magnéticas se orientam aleatoriamente devido à agitação térmica, de modo que a magnetização é nula. Quando um campo magnético externo \mathbf{H} é aplicado, na ausência de escoamento, os dipolos tendem a se orientar na direção $\hat{\mathbf{e}}_H$ do campo, competindo com a agitação térmica. No limite assintótico de um campo muito intenso, todos os dipolos se orientam com o campo e a magnetização atinge um valor de saturação. [Rosensweig \(2013\)](#) deduz a relação da magnetização de equilíbrio em função do campo aplicado utilizando a formulação de Langevin. Da equação [2.30](#), a energia gasta para girar o dipolo do alinhamento até um ângulo θ entre o dipolo e campo é

$$W = mH(1 - \cos \theta) . \quad (2.44)$$

A função densidade de probabilidade $\mathcal{P}(\theta)$ de se encontrar um dipolo com orientação θ , considerando a independência entre as orientações, é dado por um fator de Boltzmann, de modo que

$$\mathcal{P}(\theta) = \frac{1}{2Z} e^{-\frac{W}{kT}} \sin(\theta) , \quad (2.45)$$

em que k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta, e Z é a constante de normalização da função. Assim, o momento de dipolo médio é dado por

$$\overline{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{e}}_H \int_0^\theta (m \cos \theta) \mathcal{P}(\theta) d\theta . \quad (2.46)$$

Resolvendo a integral, resulta em

$$\bar{\mathbf{m}} = m\mathcal{L}(\alpha)\hat{\mathbf{e}}_H , \quad (2.47)$$

em que $\mathcal{L}(\alpha)$ é a função de Langevin, dada por

$$\mathcal{L}(\alpha) = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \quad (2.48)$$

e α é o campo efetivo local dado por:

$$\alpha = \frac{\mu_o m H}{kT} , \quad (2.49)$$

sendo uma razão entre as forças magnéticas e as forças brownianas. Aplicando 2.47 em 2.43 resulta que a magnetização de equilíbrio \mathbf{M}_e da suspensão, na ausência de escoamento, é

$$\mathbf{M}_e = \phi \frac{m}{v_p} \mathcal{L}(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_H . \quad (2.50)$$

Mas m/v_p é igual a magnetização de saturação do sólido M_d . Assim,

$$\mathbf{M}_e = \phi M_d \mathcal{L}(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_H . \quad (2.51)$$

No limite de $\alpha \rightarrow \infty$, a função de Langevin tende a $\mathcal{L}(\alpha) \rightarrow 1$. Assim, pode-se definir uma magnetização de saturação M_s do fluido dada por

$$M_s = \phi M_d . \quad (2.52)$$

Da razão entre as magnitudes da magnetização e do campo aplicado defini-se a susceptibilidade magnética do fluido χ tal que

$$\mathbf{M}_e = \chi(H) \mathbf{H} . \quad (2.53)$$

No limite de $\alpha \rightarrow 0$, a função de Langevin pode ser aproximada por $\mathcal{L}(\alpha) \approx \alpha/3$. Assim, defini-se a susceptibilidade inicial do fluido χ_{iL} no regime de Langevin como

$$\chi_{iL} = \frac{\mu_o m M_s}{3kT} , \quad (2.54)$$

válida para campo fracos. A expressão 2.50 é válida apenas no regime diluído, em que não há interação entre os momentos de dipolo. Ivanov e Kuznetsova (2001) apresentaram uma correção ordem ϕ^2 para a magnetização considerando a interação magnética dipolar entre partículas,

$$M_e(\alpha, \phi) = M_s \mathcal{L}(\alpha) \left(1 + \phi \lambda \mathcal{E}(\alpha) + \phi^2 \lambda^2 \mathcal{F}(\alpha) \right) , \quad (2.55)$$

em que $\lambda = \mu_o m^2 / 24kT v_p$ é definido como o parâmetro de interação dipolar e $\mathcal{E}(\alpha)$ e $\mathcal{F}(\alpha)$ são funções de α dadas por

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\alpha) = -\frac{8}{\sinh^2 \alpha} + \frac{8}{\alpha^2} , \\ \mathcal{F}(\alpha) = \frac{68}{\alpha^4} + \frac{64 \coth \alpha}{\alpha \sinh^2 \alpha} - \frac{64 \coth^2 \alpha}{\sinh^2 \alpha} - \frac{64 \coth \alpha}{\alpha^3} + \frac{4}{\sinh \alpha^2} + \frac{8}{\alpha^2 \sinh^2 \alpha} . \end{cases} \quad (2.56)$$

Novamente, no limite de $\alpha \rightarrow 0$, a susceptibilidade inicial χ_i do fluido para a correção de Ivanov e Kuznetsova (2001) é

$$\chi_i = \chi_{iL} \left(1 + \frac{\chi_{iL}}{3} + \frac{\chi_{iL}^2}{144} \right). \quad (2.57)$$

Neste trabalho, considera-se a correção de Ivanov e Kuznetsova (2001) para a magnetização na condição de equilíbrio (ausência de escoamento), conforme a expressão 2.55. Supondo um pequeno desvio da magnetização em relação ao equilíbrio, na ausência de escoamento, a magnetização irá relaxar para o valor de equilíbrio conforme a expressão

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_m} (\mathbf{M}_e - \mathbf{M}), \quad (2.58)$$

cujas solução é um decaimento exponencial na forma

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_e (1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}), \quad (2.59)$$

em que τ_m é o tempo de relaxação da magnetização. São dois os tempos característicos que governam essa relaxação. O tempo de Néel τ_n está associado com o escorregamento interno do dipolo magnético em relação à partícula, e escala com a exponencial do volume da partícula (RINALDI et al., 2005)

$$\tau_n = \tau_o e^{\frac{K v_p}{kT}}, \quad (2.60)$$

em que K e τ_o são constantes do material. Vale ressaltar que no limite do volume da partícula tendendo a zero $v_p \rightarrow 0$, o tempo de Néel tende à τ_o , que é da ordem de 10^{-9} s, sendo muito pequeno nesta escala. O tempo browniano τ_b está associado ao processo hidrodinâmico de rotação do dipolo fixo devido às flutuações brownianas das partículas,

$$\tau_b = \frac{1}{w D_r}, \quad (2.61)$$

em que D_r é o coeficiente rotacional de difusão browniano dado por

$$D_r = \frac{kT}{8\pi\eta_o a^3}, \quad (2.62)$$

em que a é o raio da partícula e η_o é a viscosidade do fluido base (BRADY; BOSSIS, 1988). O coeficiente rotacional se relaciona com o coeficiente translacional de difusão browniana D_t por um $D_r/D_t = 4a^2/3$. O tempo browniano escala com o volume da partícula $\tau_b \propto v_p$. O tempo de relaxação total é calculado por

$$\tau_m = \frac{\tau_n \tau_b}{\tau_n + \tau_b}. \quad (2.63)$$

Para um ferrofluido típico com partículas de diâmetro médio de 10 nm, o tempo de Néel é muito maior que o tempo browniano (RINALDI et al., 2005). Assim, podemos considerar que o momento de dipolo é fixo na partícula, e o tempo de relaxação é igual ao tempo browniano,

$$\tau_m = \tau_b = \frac{4\pi\eta_o a^3}{kT}. \quad (2.64)$$

2.4.3 Modelos para a evolução da magnetização

Cunha (2018a) analisa o efeito do escoamento sobre a magnetização, partindo de uma análise microhidrodinâmica sobre as partículas. Pela 2ª Lei de Fáxen, que descreve o torque hidrodinâmico \mathbf{t}_h sobre uma esfera de raio a em regime de Stokes,

$$\mathbf{t}_h = 8\pi\eta_o a^3 \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_o - \boldsymbol{\Omega} \right), \quad (2.65)$$

em que $\boldsymbol{\Omega}$ é a velocidade angular da partícula e $\boldsymbol{\xi}_o$ é a vorticidade do escoamento avaliada no centro da esfera. O balanço de torques em uma partícula com momento de inércia rotacional I_r é

$$I_r \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \mathbf{t}_h + \mathbf{t}_m + \mathbf{t}_b + \mathbf{t}_{di}, \quad (2.66)$$

em que \mathbf{t}_h , \mathbf{t}_m , \mathbf{t}_b e \mathbf{t}_{di} são respectivamente os torque hidrodinâmico, magnético, browniano e dipolar. Na condição em que a inércia da partícula é desprezível, o torque hidrodinâmico deve ser balanceado pelos demais torques atuantes na partícula,

$$\mathbf{t}_h = -\mathbf{t}_m - \mathbf{t}_b - \mathbf{t}_{di}. \quad (2.67)$$

Para uma suspensão diluída estatisticamente homogênea, o torque devido à interação dipolar \mathbf{t}_{di} pode ser desprezado. O torque browniano, por sua vez, é um processo estocástico cuja média a ser tomada se anulará ($\overline{\mathbf{t}_b \times \mathbf{m}} = \mathbf{0}$), de modo que podemos suprimi-lo da equação. A equação 2.67 resulta então que o torque hidrodinâmico é balanceado pelo torque magnético, dado pela equação 2.32. Combinando essas equações, a velocidade angular da partícula é dada por

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_o + \frac{\mu_o}{8\pi\eta_o a^3} \mathbf{m} \times \mathbf{H}. \quad (2.68)$$

Seja $\mathbf{m}_k = m\hat{\mathbf{p}}_k$ o momento de dipolo de uma partícula k com direção $\hat{\mathbf{p}}_k$. Como o dipolo é fixo na partícula, então a rotação do dipolo é dada por

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}_k}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{p}}_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_o \times \hat{\mathbf{p}}_k + \frac{\mu_o}{8\pi\eta_o a^3} \mathbf{m}_k \times \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{p}}_k. \quad (2.69)$$

Como a magnitude do dipolo é constante, então a variação do dipolo é

$$\frac{d\mathbf{m}_k}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_o \times \mathbf{m}_k + \frac{\mu_o}{8\pi\eta_o a^3} \mathbf{m}_k \times \mathbf{H} \times \mathbf{m}_k. \quad (2.70)$$

Aplicando uma média volumétrica na equação 2.70, obtém-se que

$$\frac{d\overline{\mathbf{m}}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_o \times \overline{\mathbf{m}} + \frac{\mu_o}{8\pi\eta_o a^3} \overline{\mathbf{m}_k \times \mathbf{H} \times \mathbf{m}_k}. \quad (2.71)$$

Em regime diluído, a correlação entre os momentos de dipolo pode ser desconsiderada, de modo que $\overline{\mathbf{m}_k \times \mathbf{H} \times \mathbf{m}_k} = \overline{\mathbf{m}} \times \mathbf{H} \times \overline{\mathbf{m}}$ ¹ Assim, obtém-se que

$$\frac{d\overline{\mathbf{m}}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \times \overline{\mathbf{m}} + \frac{\mu_o}{8\pi\eta_o a^3} \overline{\mathbf{m}} \times \mathbf{H} \times \overline{\mathbf{m}}. \quad (2.72)$$

¹ Considere a identidade $\overline{\mathbf{m}_k \times \mathbf{H} \times \mathbf{m}_k} = \overline{\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{m}_k} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{m}_k \mathbf{m}_k}$. Se a suspensão for suficientemente diluída, os momentos de dipolo são descorrelacionados, de modo que $\overline{\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{m}_k} = \overline{\mathbf{m}} \cdot \overline{\mathbf{m}}$ e $\overline{\mathbf{m}_k \mathbf{m}_k} = \overline{\mathbf{m}} \overline{\mathbf{m}}$. Reescrevendo a identidade, tem se $\overline{\mathbf{m}_k \times \mathbf{H} \times \mathbf{m}_k} = \overline{\mathbf{m}} \cdot \overline{\mathbf{m}} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{m}} \overline{\mathbf{m}} = \overline{\mathbf{m}} \times \mathbf{H} \times \overline{\mathbf{m}}$

A equação 2.43 relaciona a magnetização com o momento de dipolo médio, de modo que a equação 2.72 pode ser reescrita como

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} + \frac{\mu_o v_p}{8\pi\eta_o a^3 \phi} \mathbf{M} \times \mathbf{H} \times \mathbf{M} . \quad (2.73)$$

Como $v_p = 4\pi a^3/3$, então

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} + \frac{\mu_o}{6\eta_o \phi} \mathbf{M} \times \mathbf{H} \times \mathbf{M} . \quad (2.74)$$

Esta equação não considera o efeito da relaxação browniana, conforme a equação 2.58. Introduzindo o termo de relaxação na equação 2.74, obtém-se a equação de evolução da magnetização obtida por Shliomis (1971),

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} + \frac{\mu_o}{6\eta_o \phi} \mathbf{M} \times \mathbf{H} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_b} (\mathbf{M}_e - \mathbf{M}) . \quad (2.75)$$

Na ausência de escoamento, a equação 2.75 se reduz a

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{\mu_o}{6\eta_o \phi} \mathbf{M} \times \mathbf{H} \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_b} (\mathbf{M}_e - \mathbf{M}) = \mathcal{F}_{sh} , \quad (2.76)$$

em que $\mathcal{F}_{sh} = \mathcal{F}_{sh}(\mathbf{M}, \mathbf{H}, \mathbf{M}_e)$ é denotada como função de Shliomis. No caso mais geral, na presença de escoamento, para que uma equação constitutiva seja válida, esta deve satisfazer o princípio da invariância material com relação a um sistema de referência (2.38). Sendo $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ um propriedade material, isto requer a introdução de derivadas materiais Maxwell-Oldroyd

$$\frac{\mathfrak{D}\mathbf{G}}{\mathfrak{D}t} = \frac{D\mathbf{G}}{Dt} + (2\beta - 1)(\mathbf{G} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{G}) , \quad (2.77)$$

em que \mathbf{G} é uma propriedade material, β é um coeficiente de 0 a 1, e \mathbf{D} e \mathbf{W} são as partes simétrica e anti-simétrica do gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{u}$. Aplicando a derivada à equação 2.76, permite obter uma equação constitutiva para a magnetização

$$\frac{\mathfrak{D}\mathbf{M}}{\mathfrak{D}t} = \mathcal{F}_{sh} . \quad (2.78)$$

O termos da derivada associados à \mathbf{D} correspondem a referenciais que se deformam com a partícula fluída. Como neste estudo é considerada uma suspensão diluída sem formação de agregados, estes termos não são adotados. Conforme Cunha (2018b), escolhe-se $\beta = 1/2$, de modo que a derivada Maxwell-Oldroyd é chamada de derivada Jaumann, e a equação 2.78 é escrita como

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} - \frac{\mu_o}{6\eta_o \phi} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\tau_b} (\mathbf{M}_e - \mathbf{M}) , \quad (2.79)$$

que é a equação de evolução da magnetização adotada neste trabalho. Os três mecanismos físicos presentes nesta equação são: a relaxação magnética, que tende a restaurar a magnetização para a condição de equilíbrio, o termo de precessão, que tende a alinhar a magnetização com o campo magnético e o termo de vorticidade, que tende a girar a magnetização com a rotação do fluido.

2.5 Hidrodinâmica de Fluidos Magnéticos

Para descrever a hidrodinâmica de um fluido magnético são necessárias as equações de balanço dos meios contínuos 2.6 e 2.14, junto com uma equação constitutiva para o tensor de tensões. Cunha (2018b) propõe uma dedução do tensor de tensões para um fluido magnético a partir de uma abordagem microhidrodinâmica. Considere uma suspensão magnética diluída formada por partículas rígidas magnéticas, monodispersas, imersas em um fluido base newtoniano incompressível. A análise parte da tensão produzida pelo escoamento em torno de uma partícula. Se a suspensão for estatisticamente homogênea, as médias formais de probabilidade possam ser substituídas por médias volumétricas. Nesta condição, a suspensão pode ser tratada com um meio contínuo equivalente, e o tensor de tensões médio pode ser determinado por

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV . \quad (2.80)$$

O volume V corresponde a soma do volume do fluido base com o volume das partículas, ou seja,

$$V = V_f + \sum_{k=1}^N v_k , \quad (2.81)$$

em que V_f é o volume do fluido base e v_k é o volume da partícula k . A equação 2.80 pode ser reescrita por

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_{V_f} \boldsymbol{\sigma} dV + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{v_k} \boldsymbol{\sigma} dV . \quad (2.82)$$

Para o fluido base newtoniano, o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}^N$ é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}^N = -p\mathbf{I} + 2\eta_o\mathbf{D} , \quad (2.83)$$

em que p é a pressão mecânica, η_o é a viscosidade dinâmica do fluido base e \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, dado pela parte simétrica do gradiente de velocidade $\nabla\mathbf{u}$. Substituindo 2.83 em 2.82 resulta

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_{V_f} (-p\mathbf{I} + 2\eta_o\mathbf{D}) dV + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{v_k} \boldsymbol{\sigma} dV . \quad (2.84)$$

Primeiramente, considere a integral para a pressão média

$$\bar{p} = \frac{1}{V} \int_{V_f} p dV + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{v_k} p dV . \quad (2.85)$$

Para uma esfera rígida, a integral da pressão na partícula se nula. Assim, a expressão 2.85 se reduz a

$$\bar{p} = \frac{1}{V} \int_{V_f} p dV . \quad (2.86)$$

Considere agora a integral para o tensor taxa de deformação médio

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{V} \int_{V_f} \mathbf{D} dV + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{v_k} \mathbf{D} dV . \quad (2.87)$$

Escrevendo o tensor taxa de deformação em termos do gradiente de velocidade, resulta que

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{1}{V} \int_{V_f} \mathbf{D} dV + \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^N \int_{v_k} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) dV . \quad (2.88)$$

Utilizando o teorema da divergência na integral no volume das partículas, obtém-se que

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{1}{V} \int_{V_f} \mathbf{D} dV + \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^N \int_{s_k} (\mathbf{u} \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \mathbf{u}) dS . \quad (2.89)$$

Novamente, para uma partícula rígida, a integral na superfície dela se nula, assim

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{1}{V} \int_{V_f} \mathbf{D} dV . \quad (2.90)$$

Substituindo as expressões 2.90 e 2.86 em 2.84, resulta que

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = -\bar{p} \mathbf{I} + 2\eta_o \overline{\mathbf{D}} + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{v_k} \boldsymbol{\sigma} dV . \quad (2.91)$$

Para avaliar o último termo, podemos utilizar a identidade

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}) - \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) , \quad (2.92)$$

em que \mathbf{x} é o vetor posição. Substituindo essa identidade na integral do tensor de tensões no volume da partícula, resulta que

$$\int_{v_k} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{v_k} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}) dV - \int_{v_k} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV . \quad (2.93)$$

Aplicando o teorema da divergência na primeira integral, a expressão é reescrita como

$$\int_{v_k} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{s_k} \mathbf{x} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dS - \int_{v_k} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV . \quad (2.94)$$

Para avaliar estas integrais, é necessário analisar o escoamento de uma partícula magnética esférica sob ação de um campo externo. Suponha que o número de Reynolds na escala da partícula seja muito inferior a 1,

$$Re_p = \frac{a^2 \dot{\gamma}_c \rho}{\eta_o} \ll 1 , \quad (2.95)$$

em que a é o raio da partícula, $\dot{\gamma}_c$ é a taxa de cisalhamento característica do escoamento e ρ e η_o são a massa específica e viscosidade do fluido base. Nesta condição, o escoamento em torno de uma partícula centrada em \mathbf{x}_o é descrito por uma expansão multipolo do escoamento de Stokes,

$$-\nabla p + \eta_o \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \delta(\mathbf{x}_o) + \mathbf{D}_s \nabla \delta(\mathbf{x}_o) + \dots , \quad (2.96)$$

em que \mathbf{f} é a força sobre a partícula e \mathbf{D}_s é o dipolo hidrodinâmico na partícula. O dipolo da partícula corresponde à integral de superfície em 2.94

$$\mathbf{D}_s = \int_{s_k} \mathbf{x} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dS . \quad (2.97)$$

O dipolo pode ser separado em

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{S} + \mathbf{L} , \quad (2.98)$$

em que \mathbf{S} é a parte simétrica chamada tensão de partícula (*Stresslet*), e \mathbf{L} é a parte anti-simétrica chamada tensor torque. Pela 3ª Lei de Faxén, a tensão de partícula é

$$\mathbf{S} = 5\eta_o v_k \overline{\mathbf{D}} . \quad (2.99)$$

O tensor torque está relacionado pela relação dual ao torque hidrodinâmico \mathbf{t}^h agindo sobre a partícula

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{t}^h , \quad (2.100)$$

em que $\boldsymbol{\epsilon}$ é o tensor de terceira ordem de Levi-Civita. Para uma partícula magnética de momento de dipolo \mathbf{m}_k , livre de inércia, o torque hidrodinâmico é balanceado pelo torque magnético dado por 2.32. Assim,

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\mu_o \mathbf{m}_k \times \mathbf{H}) . \quad (2.101)$$

Reescrevendo a expressão, obtém-se que

$$\mathbf{L} = \frac{\mu_o}{2} (\mathbf{H} \mathbf{m}_k - \mathbf{m}_k \mathbf{H}) . \quad (2.102)$$

Aplicando os resultados 2.99 e 2.102 em 2.94, resulta que

$$\int_{v_k} \boldsymbol{\sigma} dV = 5\eta_o v_k \overline{\mathbf{D}} + \frac{\mu_o}{2} (\mathbf{H} \mathbf{m}_k - \mathbf{m}_k \mathbf{H}) - \int_{v_k} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV . \quad (2.103)$$

Para resolver a última integral de volume em 2.103, devemos notar que o termo $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f}$ é a força por unidade de volume agindo sobre a partícula, que corresponde a força magnética dada por 2.36. Assim,

$$\int_{v_k} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = - \int_{v_k} \mathbf{x} \nabla \left(\frac{\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}}{v_k} \right) dV . \quad (2.104)$$

Considerando que \mathbf{x} é fixo na escala da partícula, podemos passá-lo para dentro do gradiente,

$$\int_{v_k} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = - \int_{v_k} \nabla \left(\mathbf{x} \frac{\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}}{v_k} \right) dV . \quad (2.105)$$

Aplicando o teorema da divergência, a integral de volume pode ser reescrita como

$$\int_{v_k} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = - \int_{s_k} \left(\mathbf{x} \frac{\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}}{v_k} \right) \hat{\mathbf{n}} dS . \quad (2.106)$$

Na superfície da esfera, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + a \hat{\mathbf{n}}$, em que a é o raio da esfera, logo

$$\int_{v_k} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = - \int_{s_k} \left(\mathbf{x}_o \frac{\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}}{v_k} \right) \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{s_k} \left(a \frac{\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}}{v_k} \right) \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} dS . \quad (2.107)$$

Como o momento de dipolo e o campo magnético são constantes na escala da esfera,

$$\int_{v_k} \mathbf{x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = - \left(\mathbf{x}_o \frac{\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}}{v_k} \right) \int_{s_k} \hat{\mathbf{n}} dS - \left(a \frac{\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}}{v_k} \right) \int_{s_k} \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} dS . \quad (2.108)$$

Observe que a primeira integral é nula, enquanto a segunda integral é isotrópica. Assim,

$$\int_{v_k} \mathbf{x}(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})dV = -(\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} . \quad (2.109)$$

Substituindo o resultado em 2.103, resulta que

$$\int_{v_k} \boldsymbol{\sigma}dV = 5\eta_o v_k \overline{\mathbf{D}} + \frac{\mu_o}{2}(\mathbf{H}\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_k\mathbf{H}) + (\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} . \quad (2.110)$$

Retornando ao tensor de tensões médio 2.91,

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = -\overline{p}\mathbf{I} + 2\eta_o \overline{\mathbf{D}} + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \left[5\eta_o v_k \overline{\mathbf{D}} + \frac{\mu_o}{2}(\mathbf{H}\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_k\mathbf{H}) + (\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} \right] . \quad (2.111)$$

Para uma suspensão monodispersa no diâmetro das partículas e no momento de dipolo,

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = -\overline{p}\mathbf{I} + 2\eta_o \overline{\mathbf{D}} + 5nv_p \eta_o \overline{\mathbf{D}} + \frac{\mu_o}{2}(\mathbf{H}n\overline{\mathbf{m}} - n\overline{\mathbf{m}}\mathbf{H}) + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N (\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} . \quad (2.112)$$

Observando que $nv_p = \phi$ e $\mathbf{M} = n\overline{\mathbf{m}}$, tem-se que

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = -\overline{p}\mathbf{I} + 2\eta_\phi \overline{\mathbf{D}} + \frac{\mu_o}{2}(\mathbf{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{H}) + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N (\mu_o \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} . \quad (2.113)$$

O termo $\eta_\phi = (1 + 5\phi/2)\eta_o$ é a viscosidade de Einstein para uma suspensão diluída de esferas rígidas. Essa expressão é a equação constitutiva do tensor de tensões para um fluido magnético diluído já comentada primeiramente em [Malvar, Gontijo e Cunha \(2016\)](#). Substituindo essa equação constitutiva na equação de Cauchy 2.14, resulta na equação de Navier-Stokes modificada para um fluido magnético,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta_\phi \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mu_o}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \mu_o \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} . \quad (2.114)$$

O primeiro termo magnético $\mu_o \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})/2$ está relacionado com os torques magnéticos sobre as partículas, e surge quando há um desalinhamento entre o campo magnético e a magnetização. O segundo termo magnético $\mu_o \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ está relacionado às forças magnéticas sobre as partículas, e surge quando há um gradiente de campo magnético. Neste trabalho estamos interessados no efeito de um campo magnético uniforme quando o vorticidade desalinha a magnetização em relação ao campo. Assim, apenas o primeiro termo magnético será relevante no fenômeno.

2.6 Adimensionalização das Equações Governantes

Nesta seção, as equações governantes são adimensionalizadas e os parâmetros físicos adimensionais do problema são identificados. Em um escoamento em tubo capilar, a escala típica de comprimento é dada pelo diâmetro do tubo d , enquanto a escala típica de velocidade é dada pela velocidade média U . Para a magnetização e o campo magnético, as

escalas típicas são, respectivamente, a magnetização de saturação do fluido M_s e o campo externo aplicado H_o . Consideramos aqui a hipótese de unidirecionalidade do escoamento, assim o termo de inércia não é relevante. Assim, a escala característica de pressão é dada pela tensão viscosa $\eta_o U/d$. As condições de validade dessa hipótese são detalhadas na seção 3.2. Aplicam-se as seguintes adimensionalizações:

$$p = p^* \frac{\eta_o U}{d} ; \nabla = \frac{\nabla^*}{d} ; \mathbf{u} = \mathbf{u}^* U ; \mathbf{M} = \mathbf{M}^* M_s ; \mathbf{H} = \mathbf{H}^* H_o . \quad (2.115)$$

Aplicando as adimensionalizações 2.115 na equação de evolução da magnetização 2.79, resulta em

$$\frac{D\mathbf{M}^*}{Dt^*} = \boldsymbol{\xi}^* \times \mathbf{M}^* - \frac{\mu_o M_s H_o d}{6\phi \eta_o U} \mathbf{M}^* \times (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) + \frac{d}{U \tau_b} (\mathbf{M}_e^* - \mathbf{M}^*) . \quad (2.116)$$

Definimos o parâmetro adimensional $\alpha_o = \mu_o m H_o / kT$ como o campo efetivo aplicado, que relaciona a força magnética e a força browniana sobre as partículas, e o parâmetro adimensional $Pe = 3U \tau_b / 2d = 6\pi \eta_o a^3 U / dkT$ como o número de Péclet, que relaciona o tempo Browniano com o tempo convectivo. A equação de evolução da magnetização fica

$$\frac{D\mathbf{M}^*}{Dt^*} = \boldsymbol{\xi}^* \times \mathbf{M}^* - \frac{3\alpha_o}{4Pe} \mathbf{M}^* \times (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) + \frac{3}{2Pe} (\mathbf{M}_e^* - \mathbf{M}^*) . \quad (2.117)$$

Substituindo novamente as adimensionalizações 2.115 na equação de Navier Stokes modificada 2.114, desprezando o termo de inércia, resulta em

$$-\nabla^* p^* + \eta_\phi^* \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{9\phi \alpha_o}{2Pe} \left(\mathbf{M}^* \cdot \nabla^* \mathbf{H}^* + \frac{1}{2} \nabla^* \times (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \right) = \mathbf{0} , \quad (2.118)$$

em que η_ϕ^* é a viscosidade de Einstein adimensionalizada por η_o . As adimensionalizações também são aplicadas às relações entre as grandezas magnéticas. Para o campo de indução, utilizamos como escala típica $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* \mu_o H_o$. Assim, a equação 2.19 fica

$$\mathbf{B}^* = \frac{M_s}{H_o} \mathbf{M}^* + \mathbf{H}^* . \quad (2.119)$$

Denotamos a razão adimensional M_s/H_o como a susceptibilidade de saturação χ_s . Assim, a equação 2.119 fica

$$\mathbf{B}^* = \chi_s \mathbf{M}^* + \mathbf{H}^* . \quad (2.120)$$

A equação para a magnetização de equilíbrio 2.53 adimensionalizada fica

$$\mathbf{M}_e^* = \frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} \mathbf{H}^* . \quad (2.121)$$

O campo efetivo local se relaciona com o campo efetivo aplicado por

$$\alpha = \alpha_o H^* . \quad (2.122)$$

Assim, os parâmetros físicos adimensionais do modelo são o campo efetivo aplicado α_o , o número de Péclet Pe , a fração volumétrica de partículas ϕ e o parâmetro de interação dipolar λ . Vale ressaltar que a susceptibilidade de saturação $\chi_s = M_s/H_o$ pode ser escrita como $\chi_s = 24\phi\lambda/\alpha_o$, logo não é um parâmetro independente.

Para um escoamento de ferrofluido típico, o diâmetro médio das partículas é da ordem de 10 *nm*, a magnetização de saturação das partículas de magnetita é 440 *kA/m*, a fração volumétrica varia até 10 %, a viscosidade do fluido base é da ordem de 1000 *cP* e o campo magnético aplicado é da ordem da magnetização de saturação do fluido. Assim, podemos calcular a faixa de valores típicos para os parâmetros adimensionais, conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros físicos adimensionais e seus valores típicos

Parâmetro	Fórmula	Valores
Campo efetivo aplicado	$\alpha_o = \frac{\mu_o m H_o}{kT}$	0 - 10
Número de Péclet	$Pe = \frac{6\pi\eta_o a^2 U}{kT} \frac{a}{d}$	0 - 10
Fração volumétrica de partícula	ϕ	0 - 0.1
Parâmetro de interação dipolar	$\lambda = \frac{\mu_o m^2}{24kTv_p}$	1.3
Susceptibilidade de saturação	$\chi_s = \frac{M_s}{H_o} = \frac{24\phi\lambda}{\alpha_o}$	0.1 - ∞

* Podemos definir ainda um parâmetro físico adimensional dado pela razão entre o campo efetivo aplicado e o número de Péclet, $Re_m = \alpha_o/Pe$. Chamado de número de Reynolds magnético, este parâmetro é uma razão entre a força magnética e a força viscosa. Sendo função dos demais parâmetros, não utilizaremos este parâmetro ao longo deste trabalho.

3 Reologia de Tubo Capilar

3.1 Conceito de reologia

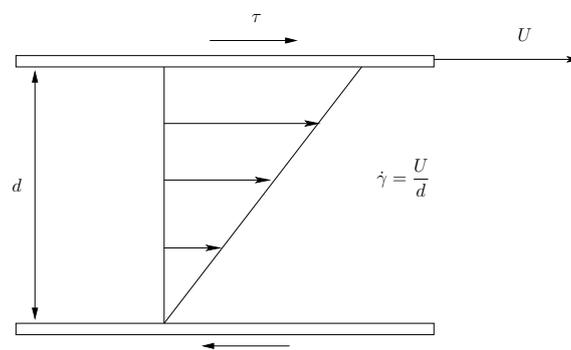


Figura 3 – Cisalhamento simples de um fluido entre placas paralelas.

Segundo [Barnes, Hutton e Walters \(1989\)](#), a reologia é definida como o estudo da deformação e do escoamento da matéria. Quando um fluido entre duas placas paralelas é sujeito a um cisalhamento, surgirá uma tensão contrária à deformação, conforme a Figura 3. O problema básico da reologia está na relação entre a tensão de cisalhamento aplicada τ e a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma} = U/d$, em que U é a velocidade relativa entre as placas e d é o espaçamento entre elas. Para fluidos newtonianos, a razão entre essas duas grandezas, chamada viscosidade dinâmica η , é constante e igual a

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} . \quad (3.1)$$

Fluidos como a água, glicerina ou óleos são newtonianos. O interesse da reologia está em fluidos que apresentam um comportamento não-linear, ou seja, a viscosidade não é mais uma constante, mas varia com a taxa de cisalhamento e o histórico de deformação $\eta = \eta(\dot{\gamma}, \mathfrak{T})$. Esse comportamento deriva da estrutura complexa desses fluidos, comumente suspensões de partículas sólidas, gotas ou macromoléculas.

Uma sub-área essencial da reologia é a reometria, que consiste do estudo de escoamentos simples, como o cisalhamento simples, o cisalhamento oscilatório e o escoamento em tubo capilar. A utilidade da reometria é a de correlacionar funções reométricas com comportamentos observados na indústria. Estes escoamentos simples permitem validar equações constitutivas, que podem posteriormente ser utilizadas na modelagem de processos industriais.

Neste trabalho, o enfoque é dado à reometria de fluidos magnéticos em tubo capilar. O escoamento em tubo capilar tem como agente motor um gradiente de pressão (*pressure-driven flow*) e é caracterizado por um gradiente de taxa de cisalhamento ao longo da direção radial. Assim, a viscosidade do fluido pode variar ao longo do raio. O comportamento não-newtoniano do fluido magnético deriva da competição entre as forças ou torques magnéticos e o ação da vorticidade.

Uma escala característica da taxa de cisalhamento em um escoamento em tubo capilar é dada pela razão entre a velocidade média e o diâmetro do tubo

$$\dot{\gamma}_c = \frac{U}{d}, \quad (3.2)$$

e seu inverso fornece um tempo característico convectivo. Um tempo característico para a relaxação de um fluido magnético é o tempo browniano. Assim, o número de Péclet pode ser considerado como uma taxa de cisalhamento adimensional global do escoamento, pois relaciona o tempo browniano com o tempo convectivo médio do escoamento, ou seja,

$$Pe = \dot{\gamma}_c \tau_b = \frac{U \tau_b}{d}. \quad (3.3)$$

Mas no escoamento em tubo capilar, a taxa de cisalhamento varia ao longo do raio. É possível então definir uma taxa de cisalhamento local adimensional, que iremos chamar de número de Péclet local, dado por

$$Pe_l = \dot{\gamma}(r) \tau_b = Pe \frac{\dot{\gamma}(r)}{\dot{\gamma}_c}. \quad (3.4)$$

Em particular, na parede do tubo capilar o número de Péclet local é chamado de Péclet de parede,

$$Pe_w = \dot{\gamma}(d/2) \tau_b = Pe \frac{\dot{\gamma}_w}{\dot{\gamma}_c}, \quad (3.5)$$

em que $\dot{\gamma}_w$ é a taxa de cisalhamento na parede do tubo.

3.2 Hipótese de Unidirecionalidade

No escoamento em tubos capilares, sob determinadas condições, o termo de inércia da equação de Navier-Stokes pode ser desprezado, de modo que o escoamento é tratado como unidirecional. Parte-se de uma análise de escala da equação da continuidade 2.6 em coordenadas axissimétricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

As escalas características para u_z , r e z são respectivamente U , velocidade média do escoamento, d , diâmetro do tubo, e L , comprimento do tubo. Assim, a equação 3.6 fornece como escala característica para u_r

$$u_r \sim U \frac{d}{L}. \quad (3.7)$$

Para um tubo com razão de aspecto $d/L \ll 1$, a velocidade radial é desprezível com respeito à velocidade longitudinal. Considere agora a componente longitudinal da equação de Navier-Stokes 2.114 permanente e sem os termos de força magnética

$$\rho u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta_o \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (3.8)$$

O membro esquerdo, o termo convectivo, da equação escala com $\rho U^2/L$, enquanto o membro direito, o termo difusivo, escala com $\eta_o U/d^2$. Assim, o termo convectivo será desprezível se

$$\frac{\rho U^2}{L} \ll \frac{\eta_o U}{d^2}. \quad (3.9)$$

Reorganizando os termos, podemos definir a condição de unidirecionalidade do escoamento como

$$Re_d \left(\frac{d}{L} \right) \ll 1, \quad (3.10)$$

em que $Re_d = \rho U d / \eta_o$ é o número de Reynolds do escoamento com respeito ao diâmetro do tubo. A condição de unidirecionalidade permite desconsiderar a componente radial da velocidade e o termo de inércia da equação do movimento.

3.3 Lei de Hagen-Poiseuille

Considere um escoamento unidirecional, totalmente desenvolvido em um tubo capilar de diâmetro d . O balanço de forças em um elemento cilíndrico de comprimento dz e raio r é

$$2\pi r \tau dz = -(\pi r^2) dp \Rightarrow \tau = \frac{r}{2} G, \quad (3.11)$$

em que τ é a tensão de cisalhamento na fronteira do elemento cilíndrico e $G = -dp/dz$ é o gradiente de pressão. Na parede do tubo ($r = d/2$), a tensão cisalhante τ_w é

$$\tau_w = \frac{d}{4} G. \quad (3.12)$$

A taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ é dada pela derivada da velocidade na direção radial

$$\dot{\gamma} = -\frac{du_z}{dr}. \quad (3.13)$$

A vazão através do capilar é dada por

$$Q = \int_0^{d/2} u_z (2\pi r) dr. \quad (3.14)$$

Utilizando integração por partes, a integral em 3.14 pode ser reescrita como

$$Q = \pi \left[u_z r^2 \right]_0^{d/2} - \pi \int_0^{d/2} r^2 du_z. \quad (3.15)$$

Pela condição de não-escorregamento na parede, $u_z(r = d/2) = 0$. Além disso, 3.13 implica que $du_z = -\dot{\gamma}dr$. Assim, faz-se uma mudança de variáveis em 3.15, de modo que

$$Q = \pi \int_0^{d/2} r^2 \dot{\gamma} dr . \quad (3.16)$$

Para um fluido newtoniano, em que a viscosidade η do fluido independe da taxa de cisalhamento, tem-se que

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta} = \frac{r}{2\eta} G . \quad (3.17)$$

Substituindo 3.17 em 3.16 e resolvendo a integral resulta na Lei de Hagen-Poiseuille

$$Q = \frac{\pi d^4}{128\eta} G . \quad (3.18)$$

Essa expressão relaciona a vazão e o gradiente de pressão para o escoamento de um fluido newtoniano em um tubo capilar em regime laminar.

3.4 Fluidos não-newtonianos

Para fluidos não-newtonianos, a taxa de cisalhamento não é linear com a tensão de cisalhamento. Para obter a relação entre vazão e gradiente de pressão, é necessária uma equação para a taxa de cisalhamento. No caso de fluidos não-newtonianos que obedecem o modelo da lei de potência, tem-se

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\tau}{C} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{r}{2C} G \right)^{\frac{1}{n}} , \quad (3.19)$$

em que C e n são as constantes do fluido. Substituindo a expressão 3.19 em (3.16) e resolvendo a integral resulta em

$$Q = \frac{\pi n R^3}{3n + 1} \left(\frac{R}{2C} G \right)^{\frac{1}{n}} . \quad (3.20)$$

Para fluidos não-newtonianos em que a relação entre τ e $\dot{\gamma}$ é desconhecida, devemos primeiro encontrar uma expressão para a taxa de cisalhamento na parede do tubo. Inicialmente vamos realizar uma mudança de variável de r para τ . Combinando as equações 3.11 e 3.12 podemos escrever que

$$r = \frac{d}{2} \frac{\tau}{\tau_w} \Rightarrow dr = \frac{d}{2\tau_w} d\tau . \quad (3.21)$$

Aplicando essa mudança de variável em 3.16 resulta em

$$Q = \frac{\pi d^3}{8\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 \dot{\gamma} d\tau . \quad (3.22)$$

Derivando a expressão com relação a τ_w , obtemos que a taxa de cisalhamento na parede do tubo $\dot{\gamma}_w$ é dada por

$$\dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}(r = d/2) = \frac{1}{\tau_w^2} \frac{d}{d\tau_w} \left(\frac{8\tau_w^3 Q}{\pi d^3} \right) . \quad (3.23)$$

Desenvolvendo a derivada em 3.23, obtém-se que

$$\dot{\gamma}_w = \frac{8Q}{\pi d^3} \left(3 + \frac{\tau_w}{Q} \frac{dQ}{d\tau_w} \right). \quad (3.24)$$

Partindo da equação 3.12, podemos substituir τ_w em 3.24. Assim,

$$\dot{\gamma}_w = \frac{8Q}{\pi d^3} \left(3 + \frac{\Delta p}{Q} \frac{dQ}{d\Delta p} \right), \quad (3.25)$$

em que $\Delta p = GL$, com L o comprimento do tubo. Simplificando 3.25, obtemos a relação de Weissenberg-Rabinowitsch (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987),

$$\dot{\gamma}_w = \frac{8Q}{\pi d^3} \left(3 + \frac{d \ln |Q|}{d \ln |\Delta p|} \right). \quad (3.26)$$

Essa relação é de particular interesse experimental, pois permite calcular a taxa de cisalhamento na parede do tubo a partir de uma curva de vazão por gradiente de pressão. Dispondo deste resultado, a viscosidade na parede do tubo pode ser determinada experimentalmente por

$$\eta_w = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w}, \quad (3.27)$$

em que τ_w e $\dot{\gamma}_w$ são calculados por 3.12 e 3.26 respectivamente. Esta viscosidade também é chamada de viscosidade aparente.

Outra forma usual de definir uma viscosidade para fluidos não-newtonianos é pela extensão da lei de Hagen-Poiseuille. Isolando a viscosidade na equação 3.18, define-se a viscosidade relativa por

$$\eta_r = \frac{\pi d^4}{128Q} G, \quad (3.28)$$

sendo que essa viscosidade não é mais independente da vazão. Definindo o gradiente de pressão adimensional como $G^* = Gd^2/\eta_o U$ e substituindo a vazão por $Q = \pi d^2 U/4$, resulta que a viscosidade relativa adimensional $\eta_r^* = \eta_r/\eta_o$ é dada por

$$\eta_r^* = \frac{G^*}{32}. \quad (3.29)$$

Para um fluido newtoniano com viscosidade η_o , o gradiente de pressão adimensional se reduz a $G^* = 32$.

3.5 Modelagem do escoamento de fluidos magnéticos em tubo capilar

Neste trabalho estuda-se o escoamento de um fluido magnético em um tubo capilar sob a ação de um campo magnético externo longitudinal uniforme e de um gradiente de pressão longitudinal, conforme o esquema na Figura 4. O fenômeno de interesse é a variação na viscosidade aparente e de parede do fluido magnético decorrente da competição

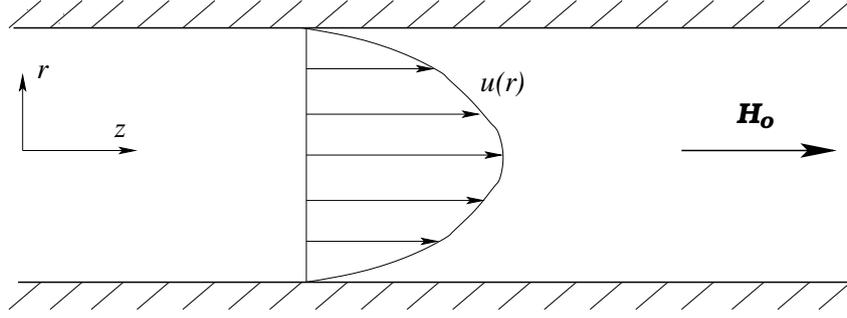


Figura 4 – Esquema do escoamento de um fluido magnético em um tubo capilar.

entre a vorticidade e o torque magnético, o chamado efeito magnetoviscoso. O escoamento é permanente, unidirecional e não há gradiente longitudinal de campo magnético. Assim, os termos de inércia e de convecção de magnetização são desprezáveis, e o escoamento é axissimétrico com dependência apenas da coordenada radial. As equações serão desenvolvidas em coordenadas cilíndricas (r, φ, z) . Todas as grandezas apresentadas a partir desta seção serão adimensionais, e o asterisco será omitido por conveniência. Como o escoamento é unidirecional, só há a componente de velocidade na direção longitudinal, de modo que denotaremos $u = u_z$ por simplicidade. A parede do tubo corresponde a $r = 1/2$ e o centro a $r = 0$.

Inicia-se explicitando as condições de contorno magnéticas em coordenadas cilíndricas. A condição de continuidade da componente normal do vetor densidade de fluxo 2.25 é

$$B_{ext,r} = B_{int,r} \Rightarrow H_r = -\chi_s M_r, \text{ para } r = \frac{1}{2}, \quad (3.30)$$

e a condição de continuidade da componente tangencial do campo magnético 2.27 é

$$H_{ext,t} = H_{int,t} \Rightarrow H_z = 1, \text{ para } r = \frac{1}{2}. \quad (3.31)$$

Em seguida, explicitam-se as equações da magnetostática em coordenadas cilíndricas. Da equação 2.18 tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (3.32)$$

Utilizando a hipótese de axissimetria e a relação 2.120, resulta que

$$H_r = -\chi_s M_r. \quad (3.33)$$

Assim, observa-se que, mesmo que o campo magnético externo seja uniforme e puramente longitudinal, pode existir no fluido magnético gradientes radiais de campo. A componente radial do campo magnético é chamada de campo de desmagnetização, por atuar em sentido contrário à magnetização (BACRI et al., 1995). Da componente φ da equação 2.23 tem-se

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0. \quad (3.34)$$

Aplicando a condição de contorno 3.31 resulta que

$$H_z = 1 . \quad (3.35)$$

Analisa-se agora a equação de Navier-Stokes modificada. Da componente r da equação 2.118, tem-se

$$-\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{9\phi\alpha_o\chi_s}{4Pe} \frac{\partial M_r^2}{\partial r} = 0 . \quad (3.36)$$

Define-se uma pressão modificada \tilde{p} , dada por

$$\tilde{p} = p + \frac{9\phi\alpha_o\chi_s M_r^2}{4Pe} , \quad (3.37)$$

de modo que \tilde{p} é função apenas de z . Note que o gradiente de pressão adimensional G é

$$G = -\frac{d\tilde{p}}{dz} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{9\phi\alpha_o\chi_s M_r^2}{4Pe} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} . \quad (3.38)$$

Desenvolvendo agora a componente z da equação 2.118, tem-se:

$$G + \frac{\eta_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{9\phi\alpha_o}{4Pe} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_r (1 + \chi_s M_z)) = 0 . \quad (3.39)$$

Multiplicando a equação 3.39 por r e integrando em r , resulta que

$$\frac{du}{dr} + \frac{rG}{2\eta_\phi} - \frac{9\phi\alpha_o}{4Pe\eta_\phi} M_r (1 + \chi_s M_z) = 0 . \quad (3.40)$$

Desenvolvendo as componentes r e z da equação 2.79, tem-se, respectivamente,

$$\frac{du}{dr} M_z + \frac{3\alpha_o}{4Pe} M_r M_z (1 + \chi_s M_z) + \frac{3M_r}{2Pe} (\chi(\alpha) + 1) = 0 \quad (3.41)$$

e

$$\frac{du}{dr} M_r + \frac{3\alpha_o}{4Pe} M_r^2 (1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2Pe} \left(\frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} - M_z \right) = 0 . \quad (3.42)$$

Essas três equações (3.40, 3.41 e 3.42) compõe o sistema de equações do problema. As equações são puramente algébricas nas variáveis G , du/dz , M_r e M_z . Para fechar o problema, são necessárias ainda a condição de não-deslizamento na parede,

$$u \left(\frac{1}{2} \right) = 0 , \quad (3.43)$$

e condição para a velocidade média. Como a velocidade média foi utilizada para adimensionalizar a velocidade, então, por definição,

$$\bar{u} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} u(r) 2\pi r dr = 1 . \quad (3.44)$$

Portanto, o campo de velocidade encontrado deve satisfazer essa integral.

4 Metodologia Numérica

Neste capítulo é detalhado o método numérico utilizado para resolver o conjunto de equações governantes do problema:

$$\begin{cases} \frac{du}{dr} + \frac{rG}{2\eta_\phi} - \frac{9\phi\alpha_o}{4Pe\eta_\phi} M_r (1 + \chi_s M_z) = 0 , \\ \frac{du}{dr} M_z + \frac{3\alpha_o}{4Pe} M_r M_z (1 + \chi_s M_z) + \frac{3M_r}{2Pe} (\chi(\alpha) + 1) = 0 , \\ \frac{du}{dr} M_r + \frac{3\alpha_o}{4Pe} M_r^2 (1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2Pe} \left(\frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} - M_z \right) = 0 . \end{cases} \quad (4.1)$$

Esse sistema possui como variáveis du/dr , M_r , M_z , que são função de r , e G que é independente de r . Note que, embora essas variáveis dependam de r , não há derivadas em r (consideramos du/dr como a variável, ao invés de u). Assim, esse sistema é algébrico e não-linear. Como esse sistema possui 4 variáveis e 3 equações, é necessário estimar uma das variáveis para resolver o sistema para cada valor de r . Em seguida, é necessário verificar se a solução para o campo de velocidades $u(r)$ obtida satisfaz as condições:

$$\begin{cases} u\left(\frac{1}{2}\right) = 0 , \\ \bar{u} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} u(r) 2\pi r dr = 1 . \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1 Método de Newton

Para resolver o sistema algébrico não linear 4.1, é utilizado um método de Newton-Raphson para sistemas. Inicialmente, o gradiente de pressão adimensional é estimado com o valor para um escoamento de Poiseuille $G_o = 32$. O vetor de variáveis \mathbf{x} do sistema é

$$\mathbf{x}(r) = \left[\frac{du}{dr}(r) \ M_r(r) \ M_z(r) \right] , \quad (4.3)$$

sendo função de r . A solução do sistema é raiz do vetor de funções $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ou seja,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad (4.4)$$

em que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}) \ f_2(\mathbf{x}) \ f_3(\mathbf{x}))$ é dado pelas equações do sistema 4.1:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \frac{du}{dr} + \frac{rG}{2\eta_\phi} - \frac{9\phi\alpha_o}{4Pe\eta_\phi} M_r (1 + \chi_s M_z) , \\ f_2(\mathbf{x}) = \frac{du}{dr} M_z + \frac{3\alpha_o}{4Pe} M_r M_z (1 + \chi_s M_z) + \frac{3M_r}{2Pe} (\chi(\alpha) + 1) , \\ f_3(\mathbf{x}) = \frac{du}{dr} M_r + \frac{3\alpha_o}{4Pe} M_r^2 (1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2Pe} \left(\frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} - M_z \right) . \end{cases} \quad (4.5)$$

O método iterativo de Newton consiste em estimar uma solução inicial \mathbf{x}_o e corrigir o passo seguinte com uma aproximação linear

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}') \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_o) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_o) , \quad (4.6)$$

em que $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ é matriz jacobiana das derivadas de \mathbf{f} em função de \mathbf{x} . O procedimento iterativo consiste então em resolver o seguinte sistema linear para cada valor de r

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) \cdot \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) , \quad (4.7)$$

e corrigir o passo seguinte por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x} . \quad (4.8)$$

Como chute inicial, utiliza-se o perfil parabólico para a velocidade $(du/dr)_o = -16r$ e a magnetização na condição de equilíbrio $M_{r_o} = 0$ e $M_{z_o} = \chi(\alpha_o)/\chi_s$. O sistema linear 4.7 é resolvido invertendo analiticamente a matriz 3×3 \mathbf{J} , para evitar problemas de convergência em um método de inversão iterativo. A iteração é interrompida quando a incremento na solução é inferior a uma tolerância

$$\max |\Delta \mathbf{x}| < \frac{10^{-3}}{N} , \quad (4.9)$$

em que N é o número de intervalos utilizados para discretizar o domínio.

4.2 Malha e integração da velocidade

Como o sistema não-linear 4.1 varia para cada valor de r , é necessário discretizar o domínio nesta direção. Os extremos do intervalo são $r = 0$ (centro do tubo) e $r = 1/2$ (parede do tubo), dividido em $N + 1$ nós ou N sub-intervalos. Para cada ponto da malha, o método de Newton descrito na seção anterior é utilizado para resolver a derivada da velocidade e as componentes da magnetização. O resultado é um perfil dessas variáveis ao longo de r . Para recuperar o perfil de velocidade $u(r)$, utiliza-se um método de integração pela regra dos trapézios, associado a condição de velocidade nula na parede $u(1/2) = 0$. Utiliza-se o método dos trapézios pois a derivada da velocidade possui um comportamento aproximadamente linear.

Em seguida, deve-se calcular a velocidade média \bar{u} para verificar se a condição 4.2 é satisfeita. Para resolver a integral da velocidade média, utiliza-se o método do 1/3 de Simpson, pois a velocidade possui um comportamento aproximadamente quadrático.

4.3 Método da secante

O resultado da integração da velocidade média é função do chute inicial para o gradiente de pressão adimensional G ,

$$\bar{u} = \bar{u}(G) . \quad (4.10)$$

Deve se encontrar o valor de G para o qual é satisfeita a condição 4.2, ou seja,

$$\bar{u}(G) - 1 = 0 . \quad (4.11)$$

Como a dependência de \bar{u} com G não é explícita, não é conveniente o cálculo de sua derivada. Utiliza-se então um método da secante para encontrar a solução de 4.11, dado pela seguinte relação iterativa

$$G_{k+1} = \frac{G_{k-1}(\bar{u}_k - 1) - G_k(\bar{u}_{k-1} - 1)}{\bar{u}_k - \bar{u}_{k-1}} . \quad (4.12)$$

A iteração acaba quando o incremento em G é menor que uma tolerância

$$|G_{k+1} - G_k| < \frac{10^{-3}}{N} . \quad (4.13)$$

O resultado final fornece a solução do gradiente de pressão adimensional G , bem como os perfis de velocidade $u(r)$ e das componentes da magnetização $M_z(r)$ e $M_r(r)$. Para calcular as viscosidade de parede e relativa, utilizam-se as expressões 3.27 e 3.28.

4.4 Convergência da malha

Para determinar o número N de intervalos na malha, foi feito um estudo da convergência da viscosidade relativa. Para condições intermediárias dos parâmetros adimensionais, a viscosidade relativa foi calculada para vários valores de N , conforme a Figura 5.

A partir de $N = 500$, a variação na viscosidade relativa é inferior à 10^{-7} em relação ao valor de convergência. O procedimento foi repetido para outros valores dos parâmetros adimensionais, com o valor $N = 500$ apresentando resultados dentro da tolerância indicada, sendo assim adotado.

4.5 Algoritmo

O método numérico foi implementado em Fortran 95. O fluxograma do algoritmo numérico é apresentado a seguir:

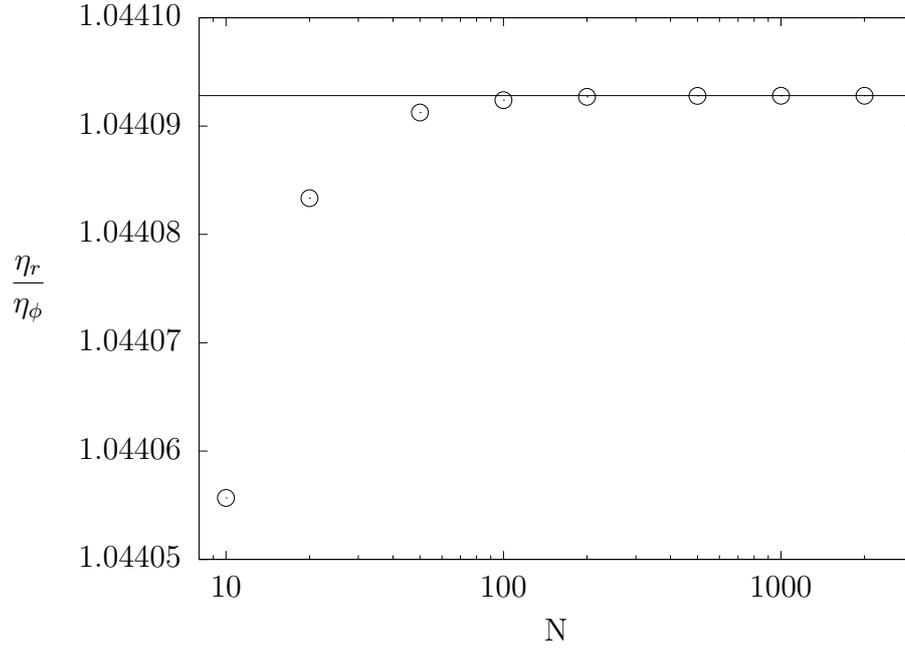


Figura 5 – Análise de convergência da malha de acordo com o número de intervalos N .

Tabela 2 – Algoritmo numérico.

- 1 - Estimativa Inicial para G , du/dr , M_r , M_z
- 2 - $\Delta \mathbf{x} \leftarrow -\mathbf{J}_k^{-1} \cdot \mathbf{f}_k$
- 3 - $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}$
- 4 - Se $|\Delta \mathbf{x}| > \text{tol}$, retornar ao passo 2
- 5 - Integrar a velocidade \mathbf{u}
- 6 - Integrar a velocidade média $\bar{\mathbf{u}}$
- 7 - $G_{k+1} \leftarrow \frac{G_{k-1}(\bar{u}_k - 1) - G_k(\bar{u}_{k-1} - 1)}{\bar{u}_k - \bar{u}_{k-1}}$
- 8 - Se $|G_{k+1} - G_k| > \text{tol}$, retornar ao passo 2
- 9 - Salvar em arquivo os perfis de u , M_r e M_z
- 10 - $\eta_r/\eta_o \leftarrow G/32$
- 11 - $\eta_w \leftarrow \tau_w/\dot{\gamma}_w$
- 12 - FIM

5 Resultados Numéricos e Aproximações Assintóticas

Neste capítulo, são apresentados os resultados para a simulação numérica do escoamento de fluidos magnéticos em tubo capilar e as aproximações assintóticas obtidas por um método de expansão regular. Os três mecanismos físicos que competem no escoamento são o torque mecânico associado à vorticidade, o torque magnético e a relaxação browniana. De maneira geral, o aumento do campo efetivo aplicado eleva o efeito magnetoviscoso, devido ao aumento no torque magnético, até atingir a saturação. Já o aumento do número de Péclet eleva a importância do torque mecânico com respeito ao torque magnético, desviando a magnetização da condição de alinhamento com o campo magnético. Assim, a resistência ao cisalhamento é reduzida devido a diminuição do efeito magnetoviscoso.

São calculadas as viscosidades relativa e de parede para diversas condições de campo efetivo aplicado e número de Péclet. Em seguida, desenvolvem-se soluções assintóticas nos regimes assintóticos de baixo número de Péclet ($Pe \ll 1$) e alto número de Péclet ($Pe \gg 1$). Em cada regime, um parâmetro adimensional pequeno é identificado nas equações governantes, e uma solução assintótica é obtida com um método de expansão regular (HINCH, 1991). As soluções numérica e assintótica para as viscosidades relativa e de parede são comparadas. Na sequência, são apresentados os resultados numéricos para os perfis de magnetização, perfis de velocidade e perfis de viscosidade aparente local, que são comparados com as soluções assintóticas obtidas.

5.1 Viscosidade relativa em função do número de Péclet

A partir do gradiente de pressão adimensional G obtido numericamente, a viscosidade relativa, aquela definida pela extensão da Lei de Hagen-Poiseuille, é calculada pela expressão 3.29. Os resultados são apresentados em termos apenas da contribuição do efeito magnetoviscoso, ou seja, o incremento de viscosidade relativa em relação à viscosidade de Einstein η_ϕ

$$\frac{\Delta\eta_r}{\eta_\phi} = \frac{\eta_r - \eta_\phi}{\eta_\phi} . \quad (5.1)$$

A Figura 6 apresenta o incremento na viscosidade relativa em função do número de Péclet Pe , para várias condições de campo efetivo aplicado α_o . Para baixos números de Péclet, observa-se a presença de um platô-newtoniano, com uma viscosidade efetiva superior à de Einstein, caracterizando a presença do efeito magneto-viscoso. Nesse regime, o torque magnético domina o torque de cisalhamento, aumentando a dissipação viscosa. Com o aumento do número de Péclet (que é a taxa de cisalhamento adimensional), a viscosidade relativa diminui, caracterizando um comportamento pseudoplástico. Para $Pe \gg 1$, a contribuição do efeito magnetoviscoso tende a 0 e a viscosidade relativa tende à viscosidade de Einstein. Na Figura 6, a viscosidade de Einstein corresponde ao incremento nulo $\Delta\eta_r = 0$. A redução do efeito magnetoviscoso é uma consequência direta do aumento do torque hidrodinâmico com a taxa de cisalhamento ou Pe em comparação ao torque magnético.

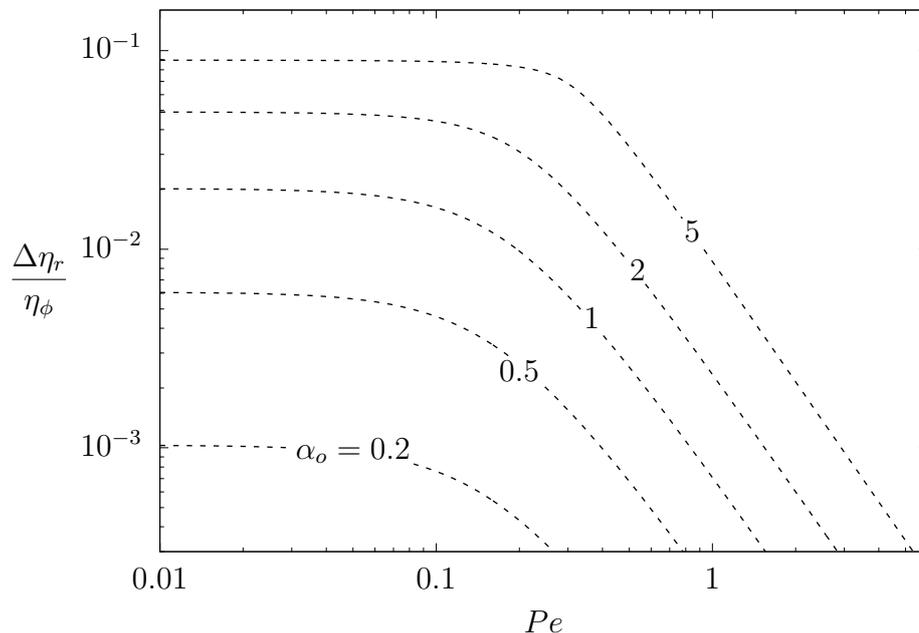


Figura 6 – Incremento na viscosidade relativa em função do número de Péclet, para vários campos efetivos aplicados. - - - Solução Numérica. $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

5.2 Viscosidade de parede em função do número de Péclet de parede

A viscosidade de parede é calculada a partir do gradiente de pressão adimensional e da taxa de cisalhamento na parede do tubo, obtidos numericamente, utilizando as expressões 3.12 e 3.27. Novamente os resultados são apresentados em termos do incremento da viscosidade de parede em relação à viscosidade de Einstein

$$\frac{\Delta\eta_w}{\eta_\phi} = \frac{\eta_w - \eta_\phi}{\eta_\phi}. \quad (5.2)$$

A Figura 7 apresenta o incremento na viscosidade de parede em função do número de Péclet de parede Pe_w , para várias condições de campo efetivo aplicado α_o . O número

de Péclet de parede Pe_w é tipicamente uma ordem de grandeza superior comparado ao número de Péclet global Pe . Os resultados são análogos àqueles observados para a viscosidade relativa. No regime de baixo número de Péclet de parede, há um platô newtoniano em que predomina o torque magnético sobre o torque mecânico associado à vorticidade. No regime de alto número de Péclet de parede, o efeito magnetoviscoso tende a zero e o viscosidade de parede tende à viscosidade de Einstein.

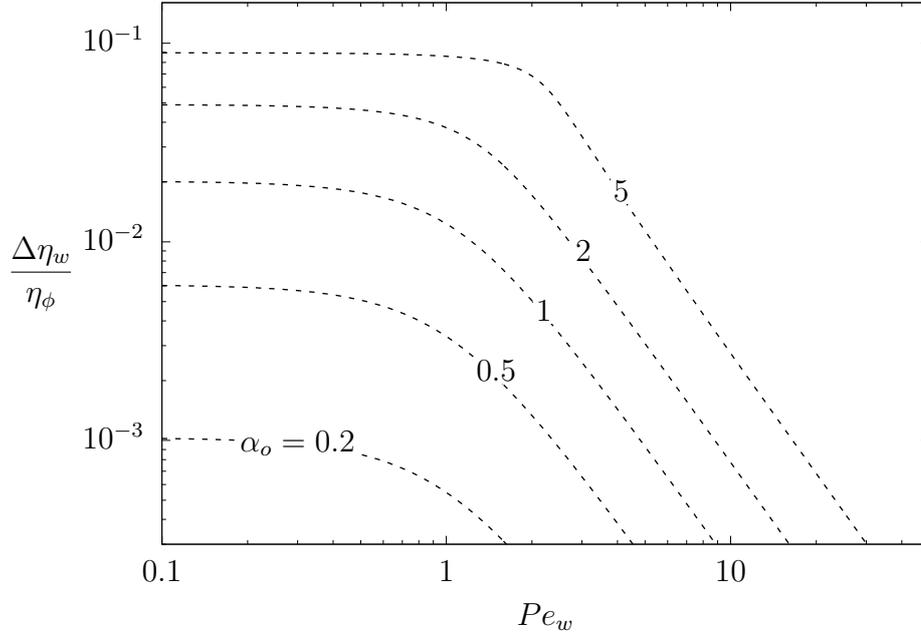


Figura 7 – Incremento na viscosidade parede em função do número de Péclet de parede, para vários campos efetivos aplicados. - - - Solução Numérica. $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

5.3 Aproximação para Péclet pequeno

Nesta seção é utilizado um método de expansão regular para obter uma solução assintótica das equações governantes no regime de baixo número de Péclet ($Pe \ll 1$) (HINCH, 1991). Nessa condição, o torque magnético domina o problema e o efeito de rotação imposto pela vorticidade é uma pequena perturbação da solução. Considere as equações 3.40, 3.41 e 3.42, reescritas de modo que o número de Péclet aparece no numerador :

$$\begin{cases} Pe \frac{du}{dr} + Pe \frac{rG}{2\eta_\phi} - \frac{9\phi\alpha_o}{4\eta_\phi} M_r (1 + \chi_s M_z) = 0 , \\ Pe \frac{du}{dr} M_z + \frac{3\alpha_o}{4} M_r M_z (1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2} M_r (\chi(\alpha) + 1) = 0 , \\ Pe \frac{du}{dr} M_r + \frac{3\alpha_o}{4} M_r^2 (1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2} \left(\frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} - M_z \right) = 0 . \end{cases} \quad (5.3)$$

No equilíbrio, $Pe = 0$, a solução do sistema se reduz à

$$\begin{cases} M_r = 0 , \\ M_z = \frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} , \end{cases} \quad (5.4)$$

que corresponde à magnetização na ausência de escoamento. Supondo $M_r \sim Pe$, propomos uma reescala $M_r = Pe\tilde{M}_r$. Rescrevendo o sistema 5.3, obtêm-se:

$$\begin{cases} \frac{du}{dr} + \frac{rG}{2\eta_\phi} - \frac{9\phi\alpha_o}{4\eta_\phi}\tilde{M}_r(1 + \chi_s M_z) = 0 , \\ \frac{du}{dr}M_z + \frac{3\alpha_o}{4}\tilde{M}_r M_z(1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2}\tilde{M}_r(\chi(\alpha) + 1) = 0 , \\ \varepsilon \left[\frac{du}{dr}\tilde{M}_r + \frac{3\alpha_o}{4}\tilde{M}_r^2(1 + \chi_s M_z) \right] + \frac{3}{2} \left(\frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} - M_z \right) = 0 . \end{cases} \quad (5.5)$$

Observe na 3ª equação de 5.5 a presença do parâmetro adimensional $\varepsilon = Pe^2$. Quando $Pe \ll 1$, este parâmetro é de pequena ordem $\varepsilon = Pe^2 \ll 1$. Propomos então uma expansão regular em potências de ε :

$$\begin{cases} G = G_0 + \varepsilon G_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \\ u(r) = u_0(r) + \varepsilon u_1(r) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \\ \tilde{M}_r(r) = \tilde{M}_{r0}(r) + \varepsilon \tilde{M}_{r1}(r) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \\ M_z(r) = M_{z0}(r) + \varepsilon M_{z1}(r) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \end{cases} \quad (5.6)$$

A expansão para o campo de velocidade deve satisfazer ainda as condições 3.43 e 3.44, de modo que

$$\begin{cases} u_0\left(\frac{1}{2}\right) = u_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0 , \\ \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} u_0(r) 2\pi r dr = 1 , \quad \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} u_1(r) 2\pi r dr = 0 . \end{cases} \quad (5.7)$$

A resolução do sistema consiste em substituir as expansões 5.6 no sistema 5.5 e identificar os coeficientes de ordem 0 e ordem 1. Para cada sistema, as soluções para $du/dr(r)$, $M_r(r)$ e $M_z(r)$ são encontradas em função de G . Em seguida, as soluções são aplicadas na equação 5.7, que fornece a solução para G . Aplicando o resultado na equação 3.29, obtém-se a solução assintótica para o incremento na viscosidade relativa no regime de baixo número de Péclet

$$\frac{\Delta\eta_r}{\eta_\phi} = \frac{3\phi}{\eta_\phi} \frac{\alpha_o\chi(\alpha_o)}{2\chi_s + \alpha_o\chi(\alpha_o)} + Pe^2 \frac{G_1}{72\eta_\phi} , \quad (5.8)$$

em que G_1 é dado por

$$G_1 = \frac{2^{13}\phi\alpha_o\chi_s\chi(\alpha_o)(\alpha_o\chi(\alpha_o)^2 - 2\chi_s)}{(1 + \chi(\alpha_o))^2(2\chi_s + \alpha_o\chi(\alpha_o))^3} . \quad (5.9)$$

A Figura 8 compara os resultados numéricos e assintóticos para a viscosidade relativa no regime de baixo Péclet. Os resultados apresentam boa concordância para $Pe < 0,1$.

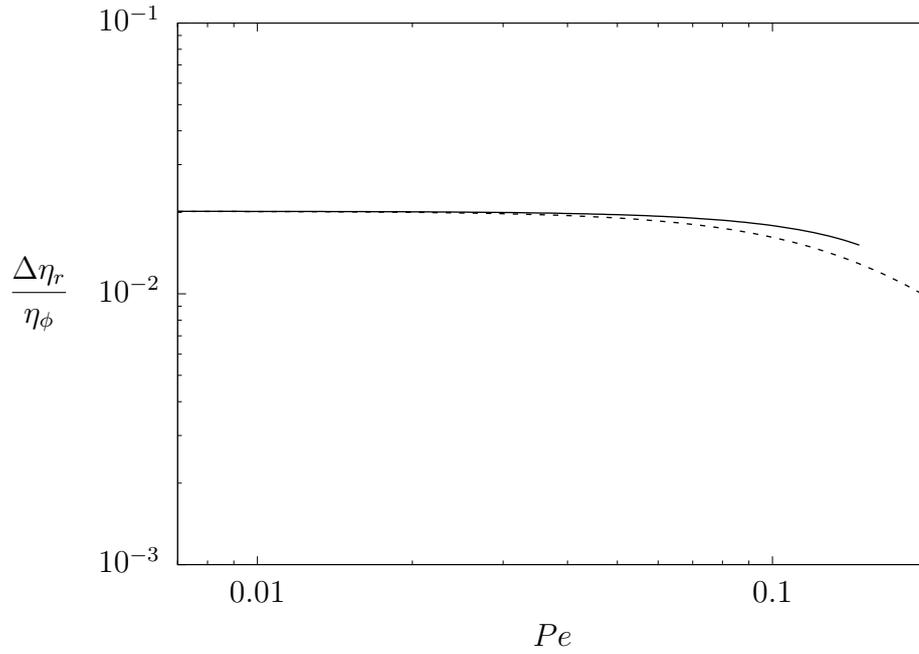


Figura 8 – Incremento na viscosidade efetiva para número de Péclet pequeno. - - - Solução Numérica. — Solução assintótica. $\alpha_o = 1$ $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

A solução assintótica para a viscosidade de parede é calculada utilizando a equação 3.27

$$\frac{\Delta\eta_w}{\eta_\phi} = \frac{3\phi}{\eta_\phi} \frac{\alpha_o \chi(\alpha_o)}{2\chi_s + \alpha_o \chi(\alpha_o)} + Pe^2 \frac{G_1}{36\eta_\phi} . \quad (5.10)$$

O número de Péclet na parede pode ser aproximado com a taxa de cisalhamento na

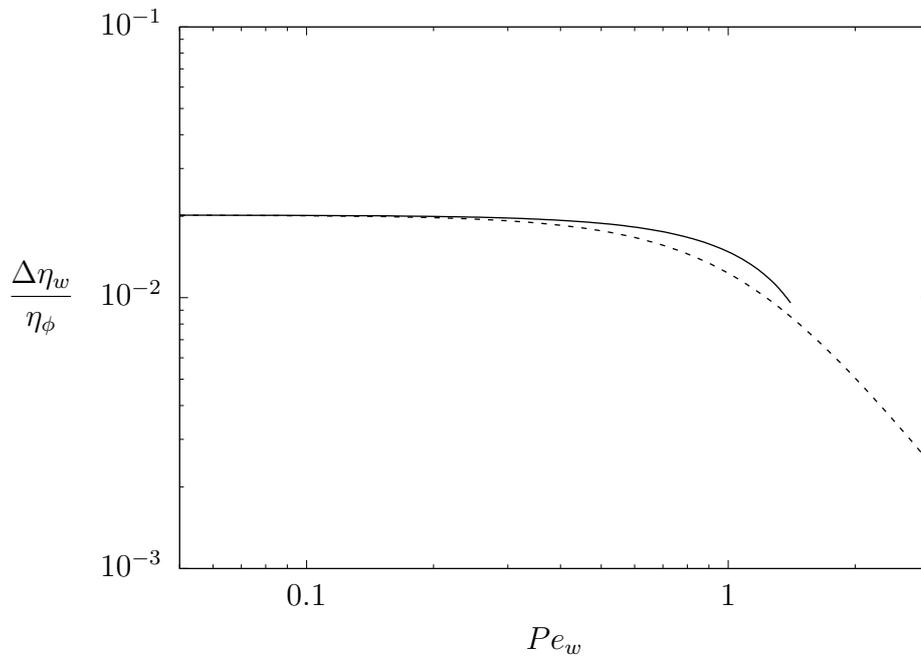


Figura 9 – Incremento na viscosidade de parede para número de Péclet de parede pequeno. - - - Solução Numérica. — Solução assintótica. $\alpha_o = 1$ $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

parede pela solução do escoamento de Poiseuille

$$Pe_w = Pe \left| \frac{du}{dr} \right|_{r=1/2} \approx 8Pe . \quad (5.11)$$

Substituindo o número de Péclet global pelo número de Péclet de parede na equação 5.10, obtêm-se a solução assintótica para a viscosidade de parede em função do número de Péclet de parede

$$\frac{\Delta\eta_w}{\eta_\phi} = \frac{3\phi}{\eta_\phi} \frac{\alpha_o \chi(\alpha_o)}{2\chi_s + \alpha_o \chi(\alpha_o)} + Pe_w^2 \frac{G_1}{16^2 \eta_\phi 9} . \quad (5.12)$$

A Figura 9 compara os resultados numéricos e assintóticos para a viscosidade de parede no regime de baixo Péclet de parede. Os resultados apresentam boa concordância para $Pe_w < 0,5$.

No limite em que $Pe = 0$, as soluções assintóticas para a viscosidade relativa e de parede convergem para a viscosidade efetiva η_e

$$\frac{\Delta\eta_e}{\eta_\phi} = \frac{3\phi}{\eta_\phi} \frac{\alpha_o \chi(\alpha_o)}{2\chi_s + \alpha_o \chi(\alpha_o)} . \quad (5.13)$$

Este resultado é análogo à viscosidade rotacional obtida por de Shliomis (1971), sendo 2 vezes maior que este, pois na equação de evolução de magnetização 2.79 adotada neste trabalho, o coeficiente da vorticidade é 1, enquanto que na equação de Shliomis 2.75 este coeficiente é 1/2. A viscosidade efetiva é função da fração volumétrica e do campo efetivo aplicado. Para um campo aplicado muito intenso ($\alpha_o \rightarrow \infty$), a magnetização tende à saturação e a viscosidade efetiva tende ao limite

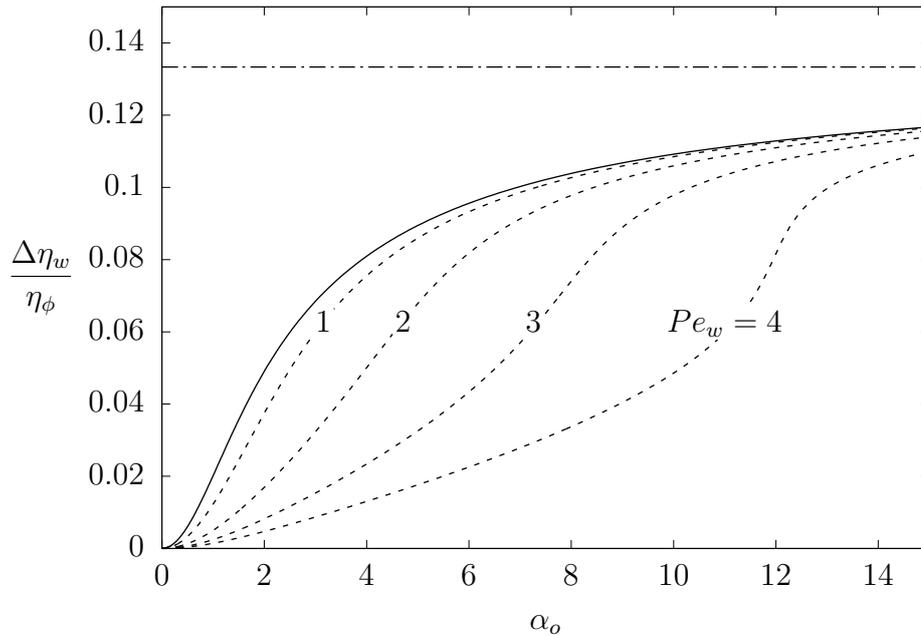


Figura 10 – Incremento na viscosidade de parede em função do campo efetivo aplicado. - - Solução Numérica. — Viscosidade efetiva. - · - Limite de Saturação. $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

$$\left[\frac{\Delta\eta_e}{\eta_\phi} \right]_{m\acute{a}x} = \frac{3\phi}{\eta_\phi} . \quad (5.14)$$

Este é o limite teórico para o aumento de viscosidade devido ao efeito magneto-viscoso, sendo função apenas da fração volumétrica de partícula. O comportamento da viscosidade de parede em função do campo efetivo aplicado é apresentado na Figura 10. Observa-se um comportamento típico de saturação, análogo à curva de saturação de magnetização, em que a viscosidade de parede tende ao limite de saturação dado por 5.14. Para números de Péclet baixos, a viscosidade de parede tende à curva de viscosidade efetiva.

5.4 Aproximação para Péclet alto

Nesta seção é explorado o regime assintótico oposto, em que o número de Péclet é alto ($Pe \gg 1$). Neste caso, o torque de cisalhamento domina o escoamento e o torque magnético age como uma pequena perturbação. Novamente é utilizado um método de expansão regular para obter uma solução assintótica das equações governantes. Considere as equações 3.40, 3.41 e 3.42 :

$$\begin{cases} \frac{du}{dr} + \frac{rG}{2\eta_\phi} - \frac{9\phi\alpha_o}{4Pe\eta_\phi} M_r (1 + \chi_s M_z) = 0 , \\ \frac{du}{dr} M_z + \frac{3\alpha_o}{4Pe} M_r M_z (1 + \chi_s M_z) + \frac{3M_r}{2Pe} (\chi(\alpha) + 1) = 0 , \\ \frac{du}{dr} M_r + \frac{3\alpha_o}{4Pe} M_r^2 (1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2Pe} \left(\frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} - M_z \right) = 0 . \end{cases} \quad (5.15)$$

No limite em que $1/Pe = 0$, a solução do sistema é

$$\begin{cases} \frac{du}{dr}(r) = -16r , \\ M_z = M_r = 0 , \\ G = 32\eta_\phi . \end{cases} \quad (5.16)$$

Calculando as viscosidades relativa e de parede, obtém-se que o incremento nas viscosidades nesse regime é nulo, ou seja,

$$\frac{\Delta\eta_r}{\eta_\phi} = \frac{\Delta\eta_w}{\eta_\phi} = 0 . \quad (5.17)$$

Para números de Péclet elevados, o termo de vorticidade na equação de evolução da magnetização domina sobre os demais. Como a vorticidade é não-nula (a exceção do centro do tubo), o resultado é que a magnetização se anula nas duas direções. Além disso, o termo de torque magnético na equação de Navier-Stokes modificada tende a zero neste regime, desacoplando a hidrodinâmica do efeito da magnetização.

Vamos buscar uma correção ordem Pe^{-2} para as viscosidades. Sendo $M_r \sim Pe^{-1}$, pode-se definir uma reescala $M_r = Pe^{-1}\tilde{M}_r$. Reescrevendo o sistema 5.15, têm-se

$$\begin{cases} \frac{du}{dr} + \frac{rG}{2\eta_\phi} - \varepsilon \frac{9\phi\alpha_o}{4\eta_\phi} \tilde{M}_r (1 + \chi_s M_z) = 0, \\ \frac{du}{dr} M_z + \varepsilon \left[\frac{3\alpha_o}{4} \tilde{M}_r M_z (1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2} \tilde{M}_r (\chi(\alpha) + 1) \right] = 0, \\ \frac{du}{dr} \tilde{M}_r + \varepsilon \frac{3\alpha_o}{4} \tilde{M}_r^2 (1 + \chi_s M_z) + \frac{3}{2} \left(\frac{\chi(\alpha)}{\chi_s} - M_z \right) = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Observe no sistema 5.18 a presença do parâmetro adimensional $\varepsilon = Pe^{-2}$. Quando $Pe \gg 1$, este parâmetro é de pequena ordem $\varepsilon = Pe^{-2} \ll 1$. Propomos então uma expansão regular em potências de ε , idêntica à utilizada no regime de baixo Péclet, conforme as equações 5.6 e 5.7. Novamente, o sistema é resolvido para as ordens 0 e 1, e as soluções assintóticas para a viscosidade relativa e de parede são calculadas. A solução assintótica da viscosidade relativa no regime de alto Péclet, com correção ordem Pe^{-2} é

$$\frac{\Delta\eta_r}{\eta_\phi} = Pe^{-2} \frac{27\alpha_o\chi(\alpha_o)}{8\eta_\phi\chi_s}. \quad (5.19)$$

A Figura 11 compara os resultados numéricos e assintóticos para a viscosidade relativa no regime de elevado Péclet. Os resultados apresentam boa concordância para $Pe > 0,8$.

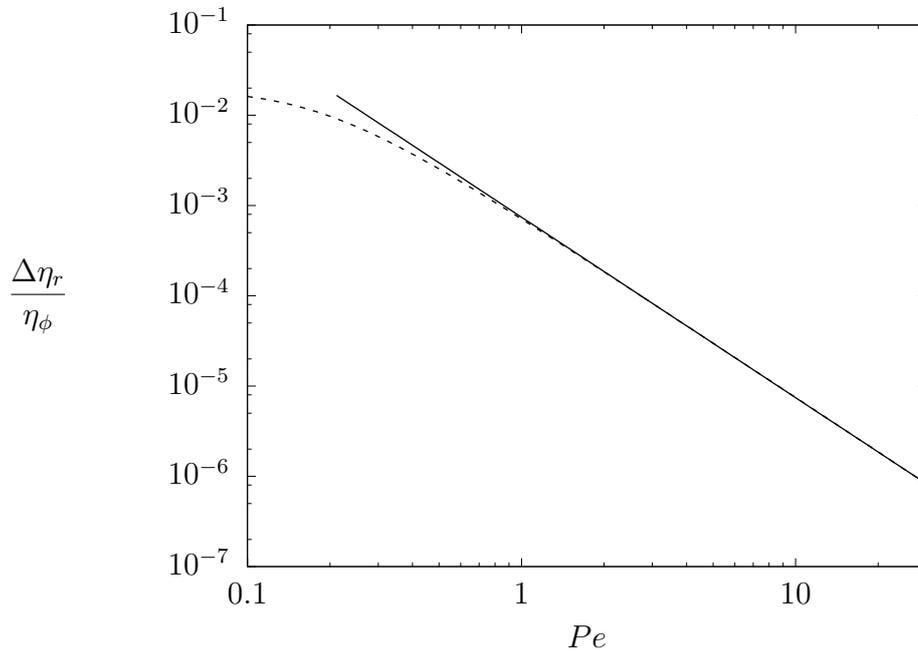


Figura 11 – Incremento na viscosidade efetiva para número de Péclet alto. - - - Solução Numérica. — Solução assintótica. $\alpha_o = 1$ $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

A solução assintótica para a viscosidade de parede é idêntica àquela obtida para a viscosidade relativa. Reescrevendo 5.19 em termos do número de Péclet de parede têm-se

$$\frac{\Delta\eta_w}{\eta_\phi} = Pe_w^{-2} \frac{324\alpha_o\chi(\alpha_o)}{\eta_\phi\chi_s}. \quad (5.20)$$

A Figura 12 compara os resultados numéricos e assintóticos para a viscosidade de parede no regime de elevado Péclet de parede. Os resultados apresentam boa concordância para $Pe_w > 3$.

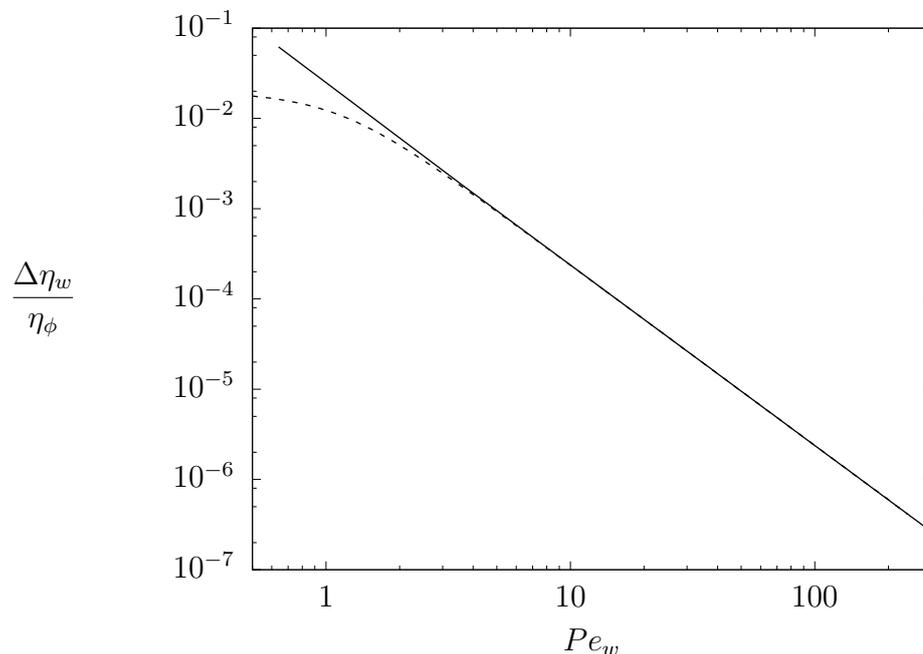


Figura 12 – Incremento na viscosidade de parede para número de Péclet de parede alto. - - - Solução Numérica. — Solução assintótica. $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

Nota-se que a solução assintótica para regimes de alto Péclet é válida mesmo para valores relativamente pequenos do número de Péclet ($Pe > 0,8$). No outro extremo, a solução assintótica para baixo Péclet é válida só para valores bem pequenos ($Pe < 0,1$). Essas faixas indicam que um número de Péclet aparentemente médio de $Pe = 1$ representa fisicamente um regime em que o torque de cisalhamento já domina sobre o torque magnético, considerando um valor de campo efetivo moderado $\alpha_o = 1$.

5.5 Perfis de magnetização

Para uma condição fixa de número de Péclet e campo efetivo aplicado, o método numérico fornece os perfis de magnetização e de velocidade em função do coordenada radial r . A Figura 13 apresenta os perfis das componentes da magnetização em uma condição de baixo número de Péclet, em que o efeito do torque magnético é dominante. No centro do tubo ($r = 0$), a vorticidade é nula, e o campo tende a condição de equilíbrio ($M_z = M_e$ e $M_r = 0$). Afastando-se do centro do tubo, a vorticidade aumenta e o torque mecânico compete com o torque magnético, girando a magnetização. O resultado é um aumento da magnetização radial M_r e a redução da magnetização longitudinal M_z .

A solução assintótica obtida para o regime de baixo Péclet fornece uma aproximação para as componentes da magnetização. A solução para a componente longitudinal da

magnetização com correção ordem Pe^2 é

$$M_z(r) = \frac{\chi(\alpha_o)}{\chi_s} - Pe^2 \frac{64^2 \chi_s \chi(\alpha_o)}{9(1 + \chi(\alpha_o))(2\chi_s + \alpha_o \chi(\alpha_o))^2} r^2 \quad (5.21)$$

e para a componente radial é

$$M_r(r) = Pe \frac{64\chi(\alpha_o)}{3(1 + \chi(\alpha_o))(2\chi_s + \alpha_o \chi(\alpha_o))} r. \quad (5.22)$$

Observe que para a componente radial a correção é apenas ordem Pe , pois a correção ordem Pe^2 é nula. As soluções assintóticas para os perfis de magnetização são comparadas com os resultados numéricos na Figura 13. Observa-se que a solução assintótica apresenta maior concordância para regiões próximas do centro do tubo, onde a vorticidade é menor.

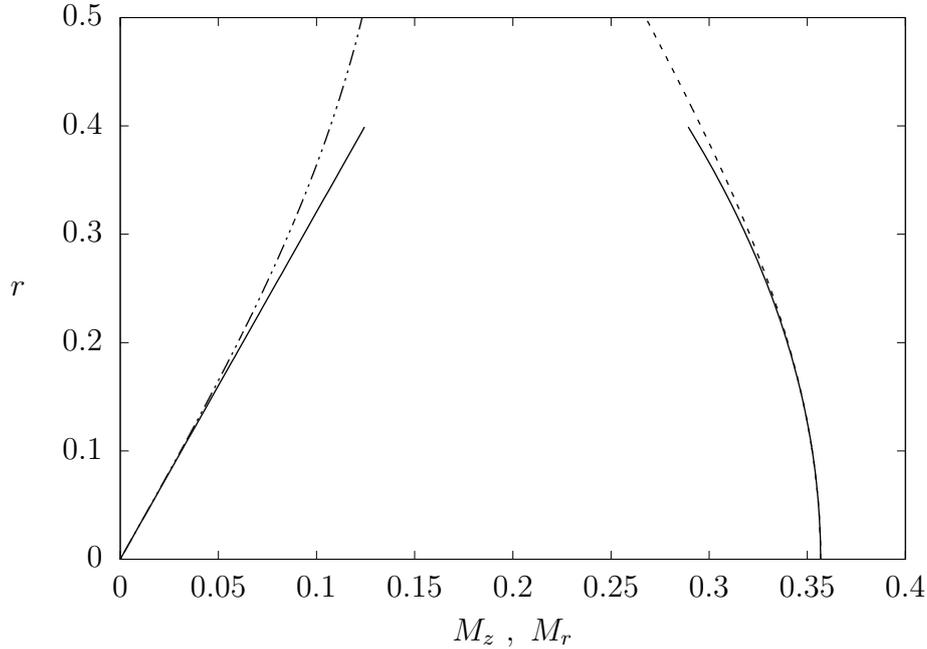


Figura 13 – Solução numérica das componentes da magnetização - - - M_z e - · - M_r em função da coordenada radial r para $Pe = 0, 1$. — Solução assintótica. $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

O comportamento da magnetização também pode ser observado em termos do ângulo $\theta_M = \text{atan}(M_r/M_z)$ da magnetização com o campo magnético aplicado. A solução assintótica para o ângulo é

$$\theta_M(r) = Pe \frac{64\chi_s}{3(1 + \chi(\alpha_o))(2\chi_s + \alpha_o \chi(\alpha_o))} r. \quad (5.23)$$

Novamente, a correção ordem Pe^2 é nula. A Figura 14 compara a solução assintótica e os resultados numéricos do ângulo da magnetização, apresentando boa concordância no regime de baixo Péclet.

No condição oposta, quando o número de Péclet é alto, o torque de cisalhamento domina o escoamento e as componentes da magnetização tendem a zero. A aproximação assintótica com correção ordem Pe^{-2} para a componente longitudinal da magnetização é

$$M_z(r) = Pe^{-2} \frac{9\chi(\alpha_o)(1 + \chi(\alpha_o))}{32^2 \chi_s} \frac{1}{r^2} \quad (5.24)$$

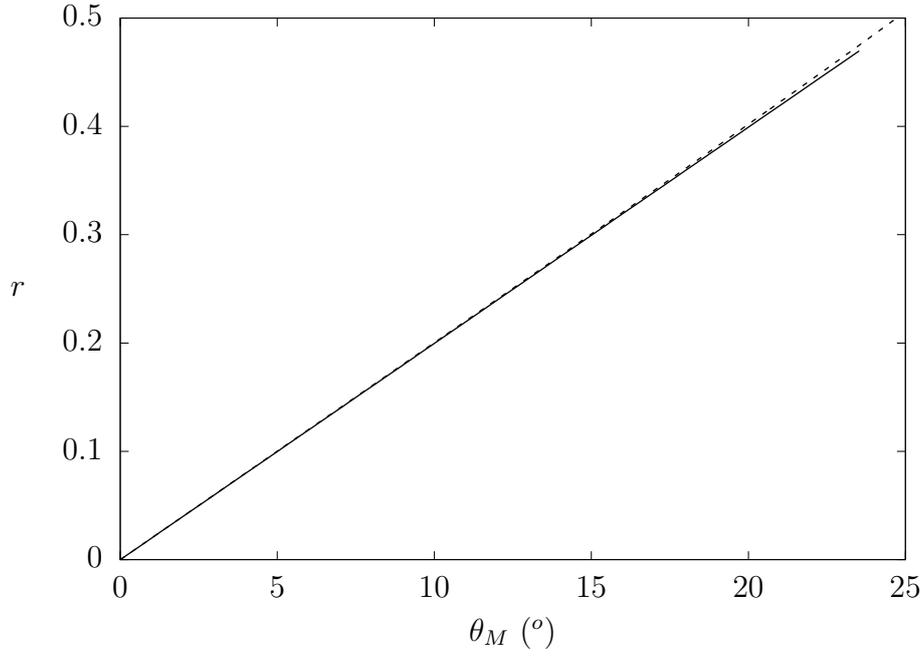


Figura 14 – Ângulo da magnetização com o campo aplicado em função da coordenada radial r para $Pe = 0, 1$. - - - Solução Numérica. — Solução assintótica. $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

e para a componente radial é

$$M_r(r) = Pe^{-1} \frac{3\chi(\alpha_o)}{32\chi_s} \frac{1}{r}. \quad (5.25)$$

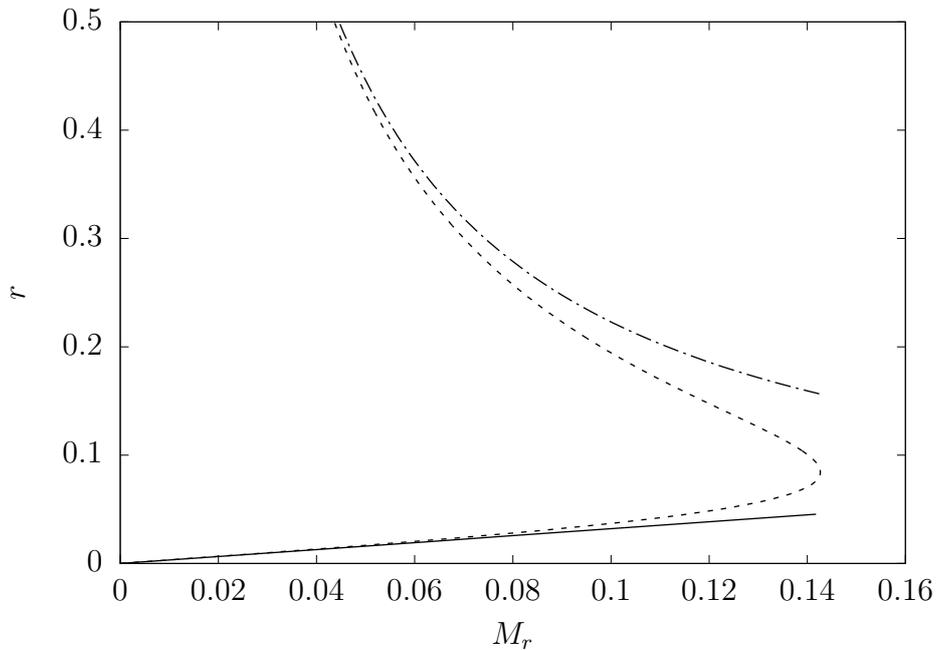


Figura 15 – Componente radial da magnetização em função da coordenada radial r para $Pe = 1$. - - - Solução Numérica. Solução assintótica para — $Pe \ll 1$ e - · - $Pe \gg 1$. $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

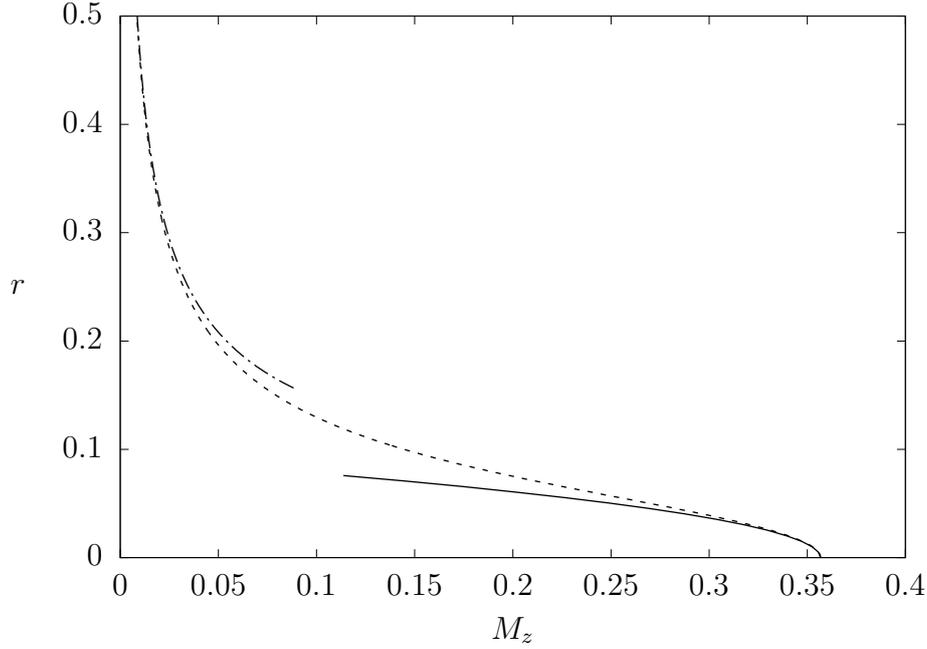


Figura 16 – Componente longitudinal da magnetização em função da coordenada radial r para $Pe = 1$. - - Solução Numérica. Solução assintótica para — $Pe \ll 1$ e - · - $Pe \gg 1$. $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

No limite de $Pe \rightarrow \infty$, as soluções assintóticas retornam $M_r = M_z = 0$. As Figuras 5.25 e 5.24 apresentam os perfis de magnetização numéricos em um regime de alto número de Péclet, junto com as aproximações assintóticas. Nota-se que próximo a parede do tubo ($r = 1/2$), as magnetizações tendem a zero, pois a vorticidade é mais intensa. Nesta região, as soluções assintóticas de alto número Péclet apresentam boa concordância com os resultados numéricos.

Observa-se, no entanto, que na vizinhança do centro do tubo, a magnetização concorda com a aproximação de baixo número de Péclet. Nesta região, a taxa de cisalhamento é baixa, de modo que o número de Péclet local Pe_l é baixo, mesmo que o número de Péclet global seja alto.

No caso do ângulo de orientação da magnetização, no centro do tubo este é zero, tendendo à 90° próximo da parede de tubo. Ou seja, na região de alta vorticidade, a magnetização tende a se orientar na direção radial. A aproximação assintótica de alto Péclet para o ângulo de orientação é

$$\theta_M(r) = \text{atan} \left(\frac{32rPe}{3 + 3\chi(\alpha_o)} \right). \quad (5.26)$$

A Figura 17 apresenta os resultados numérico e assintótico do perfil do ângulo de orientação da magnetização para uma condição de alto Péclet global.

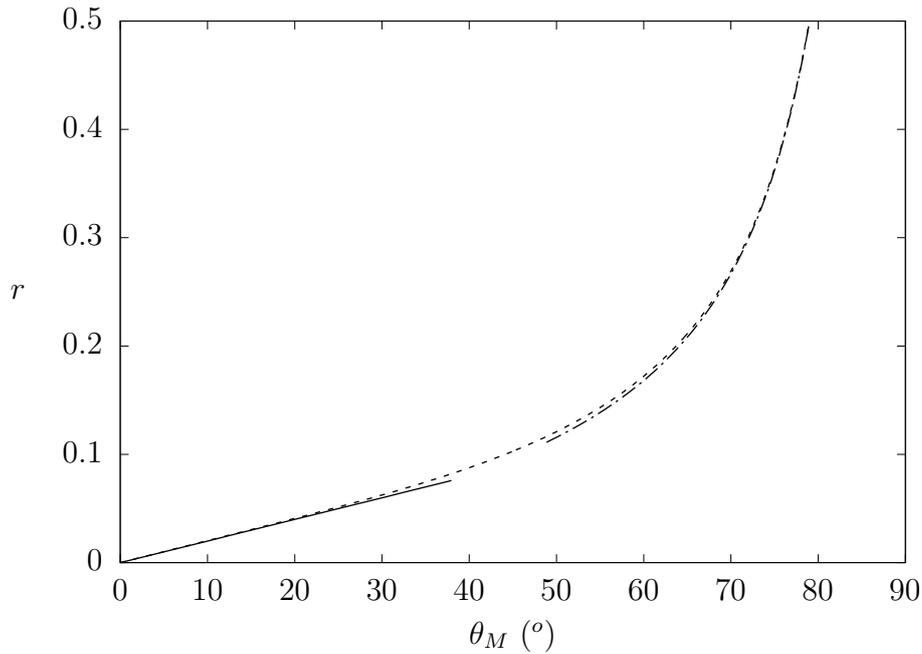


Figura 17 – Ângulo da magnetização com o campo aplicado em função da coordenada radial r para $Pe = 1$. - - - Solução Numérica. Solução assintótica para — $Pe \ll 1$ e - · - - $Pe \gg 1$. $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

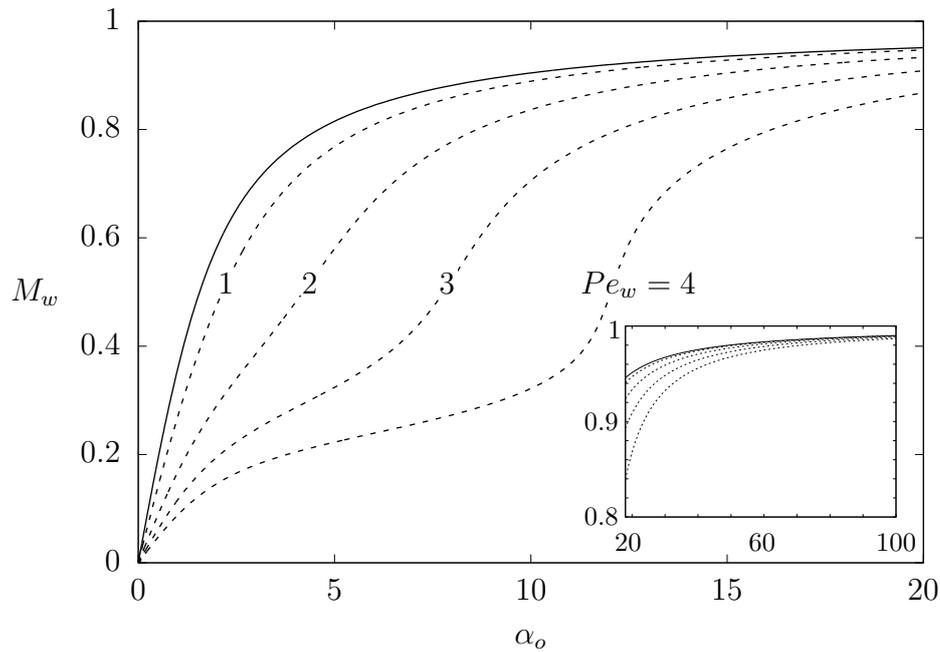


Figura 18 – Intensidade da magnetização na parede em função do campo efetivo aplicado. - - - Solução Numérica. — Magnetização de equilíbrio. *Encarte*: Detalhe da saturação das magnetizações. $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

5.6 Magnetização na parede

A magnetização sofre o maior desvio em relação ao equilíbrio na parede do tubo, pois o torque hidrodinâmico associado a vorticidade é máximo. No equilíbrio, a intensidade da magnetização na parede é igual a M_e , dado pela equação 2.55, crescendo com o

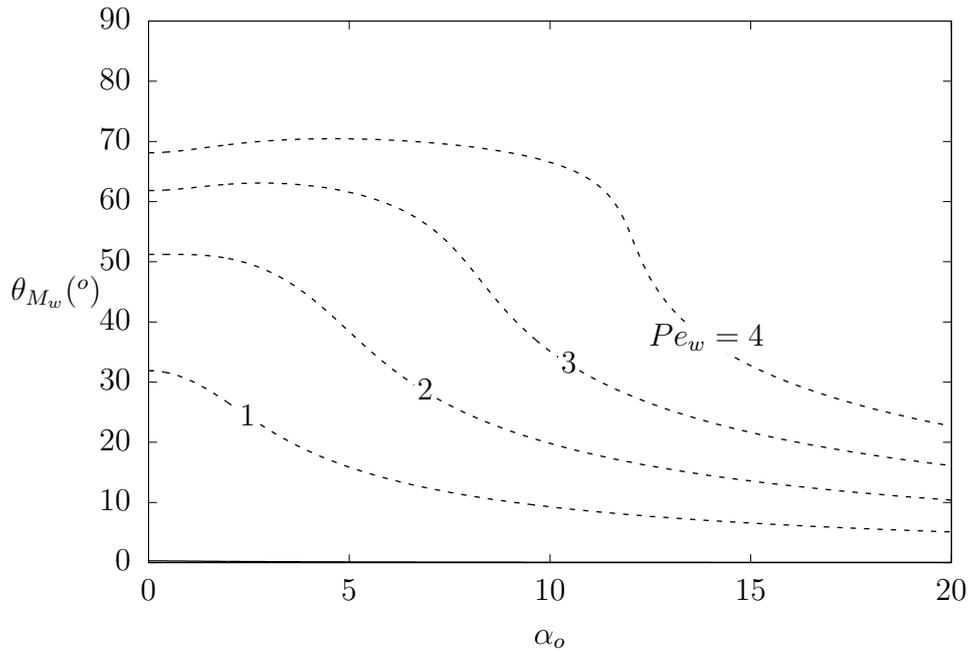


Figura 19 – Ângulo da magnetização na parede em função do campo efetivo aplicado. - - - Solução Numérica. $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

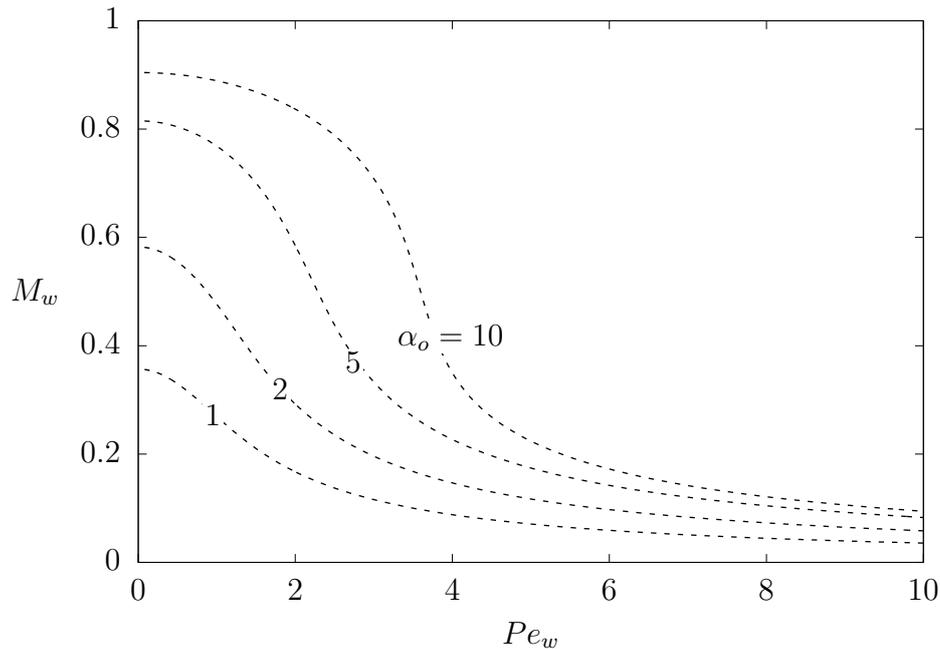


Figura 20 – Intensidade da magnetização na parede em função do número de Péclet de parede. - - - Solução Numérica. $\lambda = 1.3$.

campo efetivo aplicado até atingir a saturação ($M = 1$). O ângulo entre a magnetização na parede e o campo aplicado é nulo no equilíbrio. A medida que o número de Péclet aumenta, a magnetização na parede se desvia da condição de equilíbrio, reduzindo sua intensidade e aumentando o ângulo com o campo aplicado. As Figuras 18 e 19 apresentam o comportamento da intensidade e do ângulo da magnetização na parede em função do campo efetivo aplicado, para vários valores de número de Péclet de parede. Em todos os casos se recupera o comportamento de saturação no limite de $\alpha_o \rightarrow \infty$, conforme apre-

senta o encarte da Figura 18. A Figura 20 mostra o desvio da magnetização em relação à condição de equilíbrio com o aumento do número de Péclet de parede. No limite em que $Pe_w \rightarrow \infty$, a magnetização tende a zero.

5.7 Perfil de viscosidade aparente local em função do número de Péclet local

Além da viscosidade relativa e da viscosidade de parede, que são resultados globais do escoamento, é possível analisar a dependência da viscosidade aparente local η_a com o número de Péclet local Pe_l . O número de Péclet local cresce com a coordenada radial r , de acordo com a equação 3.4, e varia de 0 até o Péclet de parede em $r = 1/2$. A viscosidade aparente local varia da viscosidade efetiva η_e no centro do tubo até a viscosidade de parede η_w . As soluções assintóticas para a viscosidade aparente local são as mesmas da viscosidade de parede (Eqs. 7.3 e 5.20), substituindo o Péclet de parede pelo Péclet local. A Figura 21 apresenta os resultados numérico e assintótico para a viscosidade aparente local em função do número de Péclet local, para um número de Péclet global elevado. O comportamento é idêntico ao observado para a viscosidade de parede em função do Péclet de parede. Nota-se que a viscosidade não é uniforme ao longo do tubo, como é esperado para um escoamento quadrático de um fluido não-newtoniano. No centro do tubo, onde a vorticidade é menor, o torque magnético domina e o efeito magneto viscoso é mais intenso. Próximo à parede do tubo, o torque de cisalhamento domina e o aumento na viscosidade é reduzido.

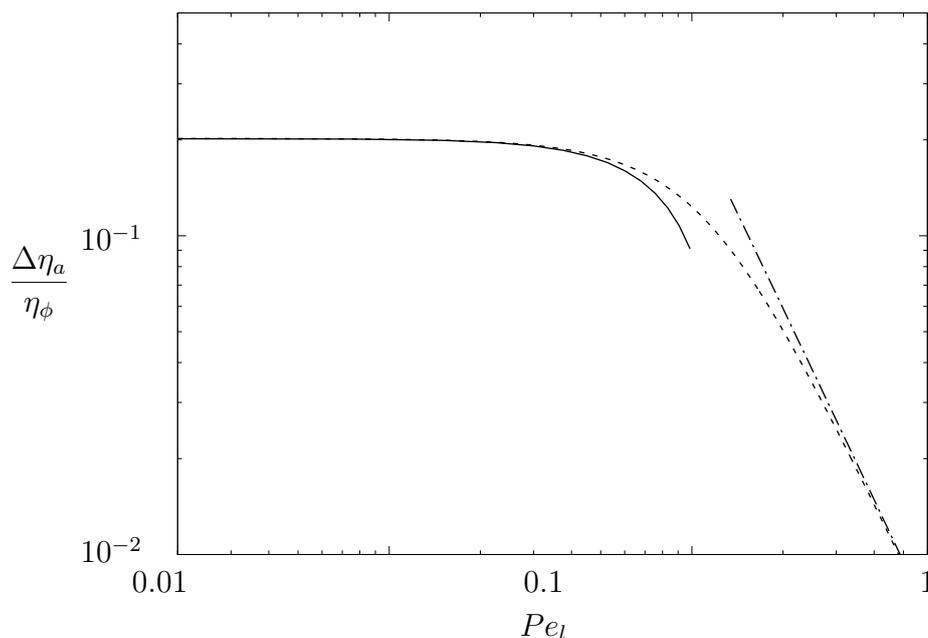


Figura 21 – Incremento na viscosidade aparente local em função do número de Péclet local. - - - Solução Numérica. Solução assintótica para — $Pe \ll 1$ e - · - $Pe \gg 1$. $Pe = 1$, $\alpha_o = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 30,9$.

5.8 Perfis de velocidade

A variação de viscosidade ao longo da componente radial resulta na deformação do perfil parabólico de velocidade de Poiseuille. A Figura 22 mostra o achatamento do perfil de velocidade em comparação com o perfil parabólico, devido a maior viscosidade no centro do tubo. Vale ressaltar que os perfis são normalizados em termos da velocidade média. O achatamento também pode ser observado pela velocidade máxima do perfil, que

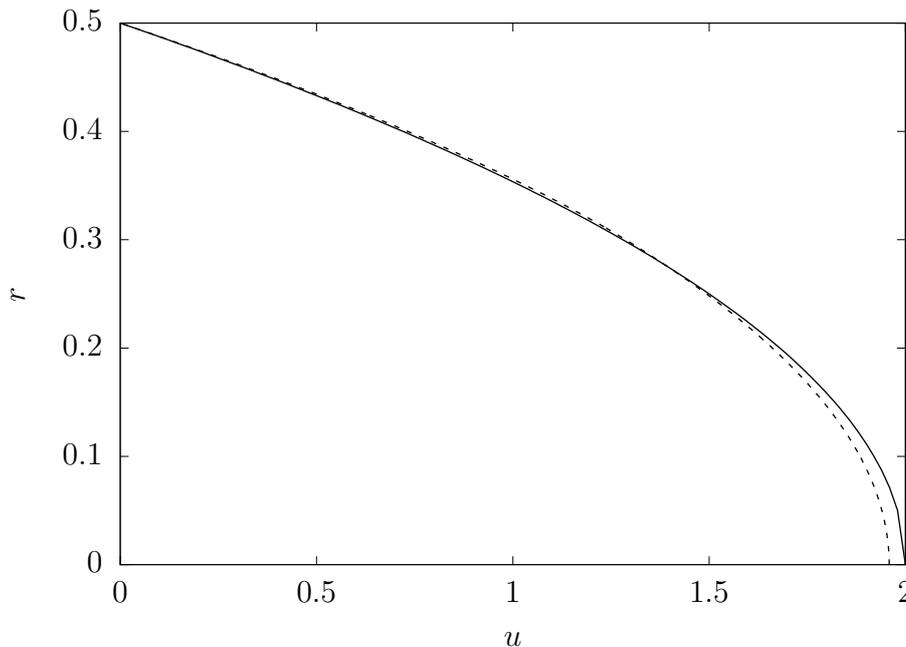


Figura 22 – Perfil de velocidade em função da componente radial - - - Solução Numérica. — Perfil parabólico. $Pe = 1$, $\alpha_o = 15$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

é atingida no centro do tubo. Quanto maior o achatamento, menor a velocidade máxima. A Figura 23 apresenta a velocidade máxima do perfil em função do campo efetivo aplicado. Observa-se um maior achatamento do perfil para campos mais intensos.

5.9 Regiões de validade do modelo

O modelo apresentou boa concordância entre os resultados numéricos e assintóticos na faixa de valores de número de Péclet de 0 a 10, e de campo efetivo aplicado de 0 a 15. Para valores superiores a esses, o método de resolução numérico não convergiu. Para valores elevados destes parâmetros, os termos de vorticidade e precessão na equação de evolução da magnetização se sobressaem. Como estes dois termos são não-lineares, neste regime o modelo torna-se instável. É necessário, neste caso, considerar a tridimensionalidade do escoamento, além da presença de termos de convecção na equação da magnetização. Outro aspecto importante é que valores muito grandes de número de

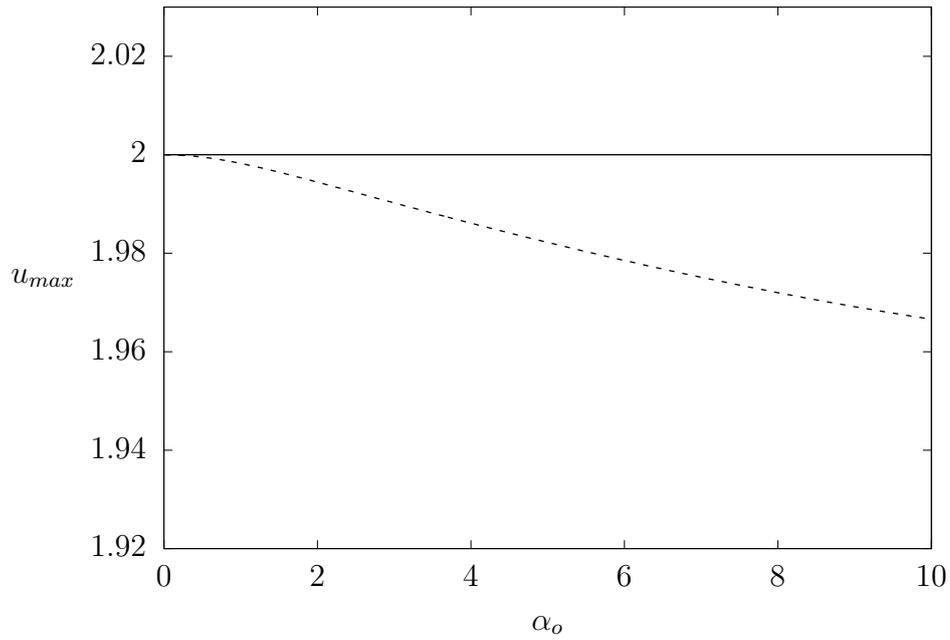


Figura 23 – Velocidade máxima em função do campo efetivo aplicado - - - Solução Numérica. — Perfil parabólico. $Pe = 1$, $\phi = 5\%$, $\lambda = 1.3$.

Péclet implicitamente significam velocidades altas, podendo atingir uma condição em que a hipótese de unidirecionalidade não é mais válida.

6 Metodologia Experimental

O estudo experimental do escoamento de fluidos magnéticos em tubos capilares é desenvolvido por meio de uma bancada de bomba de seringa. Busca-se comparar qualitativamente e quantitativamente os resultados numéricos e experimentais, com o objetivo de validar o modelo adotado. Os parâmetros hidrodinâmicos coletados são a vazão e a diferença de pressão ao longo do tubo. O parâmetro magnético medido é a corrente elétrica que alimenta a solenoide e gera o campo magnético. A partir desses parâmetros, calcula-se a viscosidade de parede conforme a expressão 3.27, para que possa ser comparada com os resultados numéricos. Faz-se ainda uma comparação com resultados experimentais para cisalhamento simples obtidos em um reômetro de disco rotativo.

6.1 Aparato Experimental

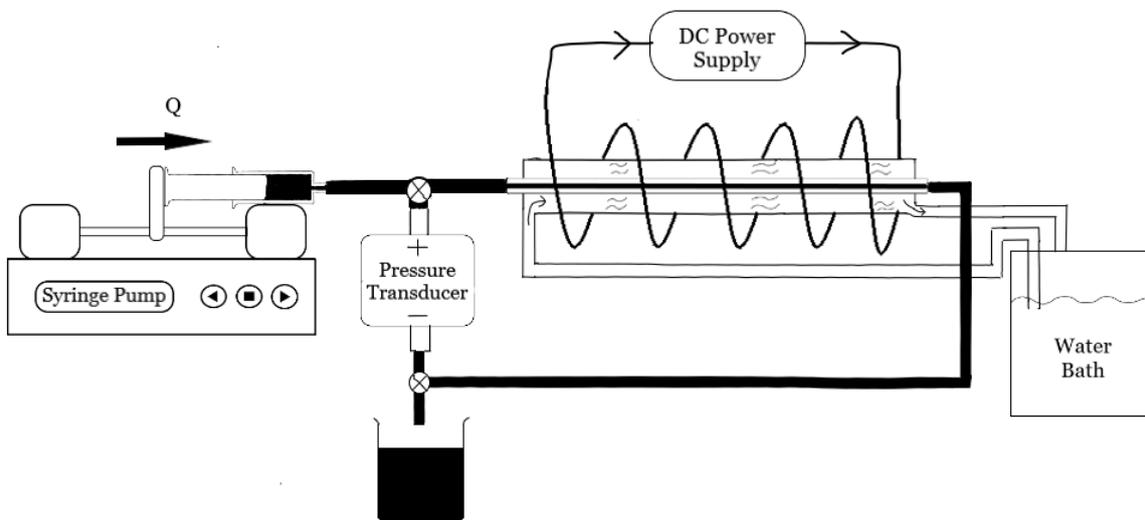


Figura 24 – Esquema de funcionamento da bancada experimental de bomba de seringa.

A bancada experimental para o estudo de escoamentos em tubo capilar consiste de tubos capilares, seringas, bomba de seringa, solenoide, fonte de tensão estabilizada, manômetro, banho térmico, transdutores de pressão e um sistema de aquisição de dados. A bancada está presente no Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia - MicroReo - VORTEX na Universidade de Brasília. A figura 24 apresenta um esquema da bancada.

A bomba de seringa fornece uma vazão controlada de fluido magnético para o tubo capilar. Um transdutor de pressão afere a diferença de pressão à montante e à jusante do tubo capilar e envia para um sistema de aquisição de dados. As tubulações auxiliares são suficientemente largas, de modo a não introduzir queda de pressão significativa. Duas solenoides em volta do tubo aplicam um campo magnético longitudinal e aproximadamente uniforme. Por meio da corrente elétrica fornecida pela fonte de tensão regulada à solenoide, é possível calcular a intensidade do campo magnético aplicado. Após passar pelo tubo capilar, o fluido magnético é retornado a um erlenmeyer. As conexões entre os elementos são feitas com tubos de silicone e torneiras em T do tipo LUER. Uma tubulação de *by-pass* ao tubo capilar permite a equalização da pressão e facilita o retorno da seringa à posição original. O controle de temperatura é feito com um fluxo de água em volta do tubo capilar, promovido por um banho térmico que mantém a água a temperatura constante.

6.1.1 Tubos capilares

Os capilares utilizados são da marca *Hilgenberg*, fabricados em vidro, conforme a Figura 25. Seu comprimento é de $L = 150$ mm, o diâmetro externo é de 3 mm. e o diâmetro interno é de $500 \mu\text{m}$. A elevada razão comprimento/diâmetro do tubo capilar garante a unidirecionalidade do escoamento. A incerteza do diâmetro interno é de $\pm 4\%$.

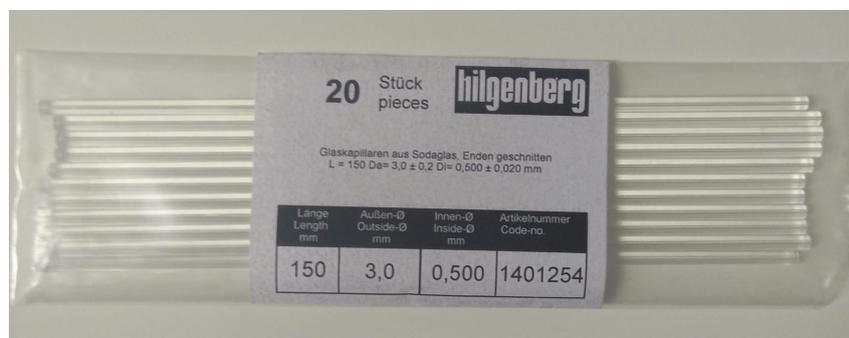


Figura 25 – Tubos capilares de vidro da marca Hilgenberg.

6.1.2 Bomba de Seringa

A vazão é controlada pela bomba de seringa *Cole & Parmer*, modelo KDS 101, com mostrador digital, avanço automático, capacidade para duas seringas e modos de avanço e recuo, conforme a Figura 26. A faixa de vazões possíveis varia de acordo com a seringa utilizada. Para a seringa de 5 ml utilizada neste experimento, a vazão mínima é de $0,01 \mu\text{l}/\text{min}$ e a vazão máxima é de $14.000 \mu\text{l}/\text{min}$. A acurácia da vazão é de $\pm 1 \%$ e a repetibilidade é de $\pm 0,1 \%$.

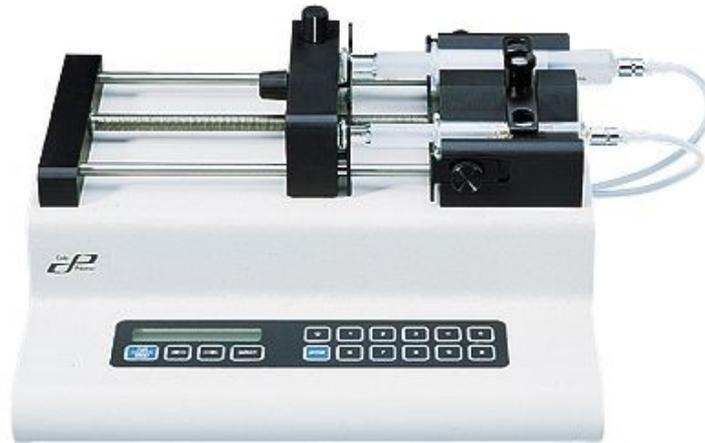


Figura 26 – Bomba de seringa Cole & Parmer modelo KDS 101.

6.1.3 Transdutor de Pressão



(a) Corpo do transdutor



(b) Membrana do transdutor

Figura 27 – Transdutor de pressão de relutância variável da marca Validyne.

A diferença de pressão no tubo foi medida utilizando um transdutor de pressão de relutância variável da marca *Validyne*, conforme a Figura 27. Consiste de uma membrana de aço presa entre dois blocos, também de aço. Cada bloco possui uma bobina alimentada com uma corrente alternada. Quando uma diferença de pressão é aplicada entre os lados da membrana, esta sofre uma deformação proporcional. Essa deformação causa uma diferença na relutância magnética de cada bloco, medida por um sinal de retorno para um sistema de aquisição de dados. O sinal é então amplificado e linearizado, fornecendo um tensão elétrica proporcional à pressão aplicada. Várias membranas estão disponíveis, sendo as mais finas destinadas a pequenas faixas de pressão e as mais espessas destinadas a grandes faixas de pressão. Neste experimento foi utilizada a membrana 36 ($P_{max} = 260$ mmHg). A acurácia do transdutor é de $\pm 0,25$ % do fundo de escala. A cavidade do transdutor de pressão é preenchida com glicerina para evitar a entrada de ferrofluido dentro do sensor, que poderia afetar o seu funcionamento.

Para calibrar a membrana foi utilizado um manômetro da marca *Zurich*, conforme a Figura 28. Este é um manômetro de Bourdon digital, capaz de medir pressões de até 280 mmHg com incerteza de $\pm 0,28$ mmHg.



Figura 28 – Manômetro de Bourdon digital da marca Zürich.

6.1.4 Solenoide



(a) Solenoide



(b) Fonte de tensão

Figura 29 – Conjunto solenoide de cobre esmaltado e fonte de tensão contínua regulada.

Para produzir um campo magnético uniforme ao longo do tubo, foram utilizadas duas solenoides em série, de modo a cobrir toda a extensão do tubo. Cada solenoide é composta de uma bobina espessa de cobre esmaltado, conforme a Figura 29, com 2400 voltas e comprimento de 64 mm. Para fornecer corrente elétrica às solenoides, foi utilizado a fonte de tensão regulada MPC 3005 da marca Milipa. O campo magnético axial

produzido no interior da solenoide é dado pela relação

$$H_o = f_e \frac{N_v I}{L}, \quad (6.1)$$

em que N_v é o número de voltas, I é a corrente aplicada, L é o comprimento e f_e é um fator de correção experimental do campo. A corrente máxima fornecida pela fonte é de 0,70 A, com resolução de 0,01 A e precisão de $\pm 0,02$ A. O fator de correção experimental foi determinado por uma curva de calibração, em que o campo magnético axial é aferido no centro das bobinas e traçado em função da corrente fornecida pelo fonte. O campo magnético é mensurado com um Gaussímetro de sonda Hall, modelo F.W. Bell 5060, com precisão de 2 %. Para elevadas correntes, a solenoide sofre grande aquecimento, por isso, um ventilador é usado para o resfriamento.

6.1.5 Banho Térmico



Figura 30 – Banho térmico da marca LAUDA.

Tendo em vista que a viscosidade de um fluido é muito sensível à sua temperatura, o tubo capilar foi inserido em uma tubulação de silicone de maior diâmetro, na qual passa um fluxo de água à temperatura constante. A temperatura e o fluxo da água são controlados por um banho térmico, que mantém a temperatura do experimento em $T = 25,00 \pm 0,02^\circ C$. O banho térmico utilizado é o modelo ECO SILVER RE 415 da fabricante LAUDA, conforme a Figura 30.

6.2 Amostras de fluidos magnéticos

As amostras de ferrofluido utilizadas nos experimentos são suspensões de magnetita da marca Ferrotec. As frações volumétricas utilizadas foram de 3,9 % e 11,8%. As

partículas magnéticas possuem diâmetro médio de 10 nm e magnetização de saturação de 440 kA/m. As propriedades de cada amostra são apresentadas na Tabela 3. É necessário cerca de 20 ml de cada fluido para realizar os ensaios.

Tabela 3 – Características das amostras de ferrofluido. Dados fornecidos pelo fabricante.

Produto	M_s (kA/m)	ϕ	η_ϕ (cP) (27°C)	ρ (g/ml) (25°C)	Fluido base
APG 1134	17,5	3,9 %	1000	1,07	Hidrocarboneto
EFH 3	51,7	11,8 %	12	1,42	Hidrocarboneto

6.2.1 Reômetro



Figura 31 – Reômetro MCR 301 da Anton Paar.

A fim de comparar os resultados experimentais em cisalhamento quadrático (tubo capilar) com o escoamento em cisalhamento simples, os fluidos magnéticos foram ensaiados no reômetro Anton Paar modelo MCR 301, conforme a Figura 31. Seu princípio de funcionamento é o escoamento entre disco rotativo e placa plana. Uma pequena quantidade de amostra é necessária para realizar os ensaios (≈ 1 ml). O controle de temperatura é realizado por um sistema *Peltier* localizado na placa inferior, associado a um banho térmico LAUDA. Para avaliar o efeito da ação do campo magnético sobre a amostra de ferrofluido, o dispositivo magnetoreológico MDR 70/1T, também da Anton Paar, é acoplado ao reômetro. Esse dispositivo é capaz de gerar campos de até 1 Tesla, e mantém a cavidade da amostra isolada em uma cápsula de blindagem magnética. O disco rotativo de 20 mm é utilizado em conjunto.

6.3 Calibração do sistema

Nesta seção são descritas as etapas de calibração e verificação da bancada, tendo em vista garantir o correto funcionamento do sistema.

6.3.1 Curva de calibração do transdutor de pressão

Para converter o sinal de tensão fornecido pelo transdutor em uma leitura de diferença de pressão, deve ser obtida a constante de calibração da membrana. Para determinar essa constante, o manômetro de calibração foi colocado junto ao transdutor por meio de uma conexão em 'T', de modo que estivessem a mesma pressão. O transdutor foi pressurizado com ar utilizando uma seringa, aplicando pressões ao longo de toda a faixa de calibração da membrana. A diferença de pressão Δp indicada no manômetro foi relacionada com a tensão V lida no transdutor por

$$\Delta p = aV , \quad (6.2)$$

em que a é a constante de calibração de cada membrana.

6.3.2 Calibragem de leitura zero do transdutor em função da corrente

Na ausência de vazão imposta ao tubo capilar, o transdutor de pressão pode gerar um leitura não-nula devido a uma deformação permanente na membrana, diferença de pressão estática devido à coluna de fluido, ou ainda devido a diferença de pressão magnética entre os pontos de tomada de pressão. Para compensar esse efeito é necessário fazer uma calibragem de leitura nula no transdutor, em função da corrente aplicada na solenoide. Com as tubulações preenchidas com o fluido de ensaio, a leitura do transdutor é adquirida por 10 min, na condição de vazão nula e para diferentes correntes. A média e incerteza da leitura é então calculada e utilizada para calcular a constante de leitura nula Δp_o .

A figura 32 apresenta do coeficiente de correção em função da corrente aplicada. A variação decorre da pressão magnética na interface entre o ferrofluido e a glicerina. Uma análise de escala pode ser feita para identificar a dependência com a corrente. Na interface de um fluido magnético, a pressão magnética p_m é proporcional ao quadrado da magnetização normal a interface (ROSENSWEIG, 2013)

$$p_m = \frac{\mu_o M_n^2}{2} . \quad (6.3)$$

Para campos fracos, a magnetização é proporcional ao campo magnético, que por sua vez é proporcional à corrente elétrica. Assim, a pressão magnética escala com o quadrado da

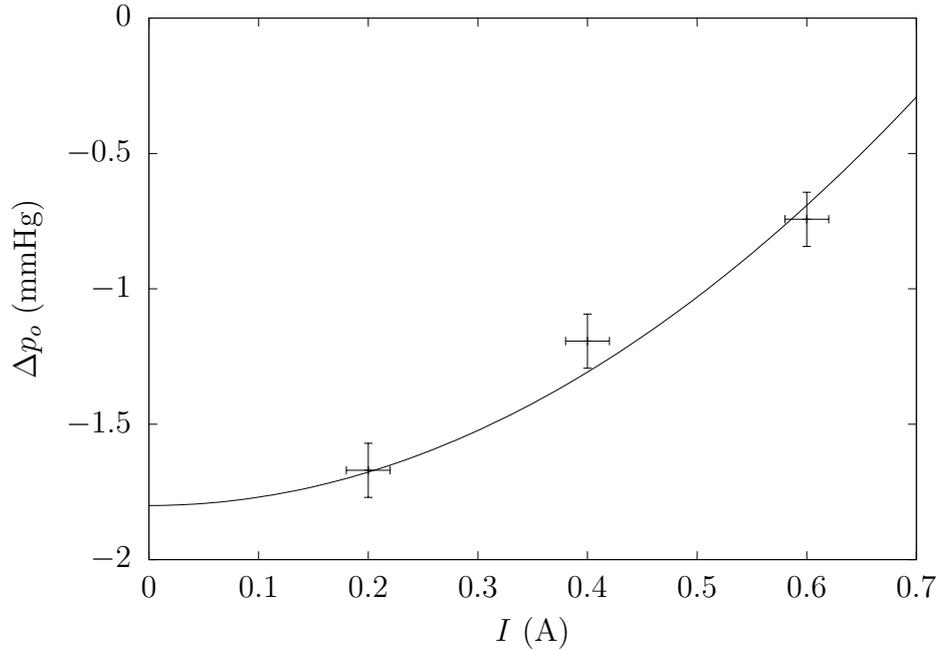


Figura 32 – Constante de leitura nula em função da corrente aplicada nas solenoides, para o EFH 3.— Ajuste quadrático.

corrente $p_m \sim I^2$. Propõe-se então uma regressão quadrática nos dados. O equação do ajuste obtido é

$$\Delta p_o = a + bI^2, \quad (6.4)$$

em que a e b são as constantes de ajuste, calculadas para cada fluido e membrana. O valor real da diferença de pressão é calculado como

$$\Delta p = \Delta p_t + \Delta p_o, \quad (6.5)$$

em que Δp_t é a leitura do transdutor. Vale notar que a correção máxima da leitura é inferior a 0,5% do fundo de escala do transdutor.

6.3.3 Curva de calibração do campo magnético

Para determinar o campo magnético axial aplicado sobre o tubo capilar, faz-se uma curva de calibração do campo magnético medido pelo gaussímetro em função da corrente fornecida pela fonte de tensão, conforme a figura 33. A sonda do gaussímetro é posicionado entre as bobinas, mensurando o campo axial. Assume-se que o campo magnético ao longo do tubo capilar é uniforme. Utilizando um ajuste linear sobre os dados aferidos, o fator de correção entre o campo experimental e o teórico foi determinada como $f_e = 0,75$.

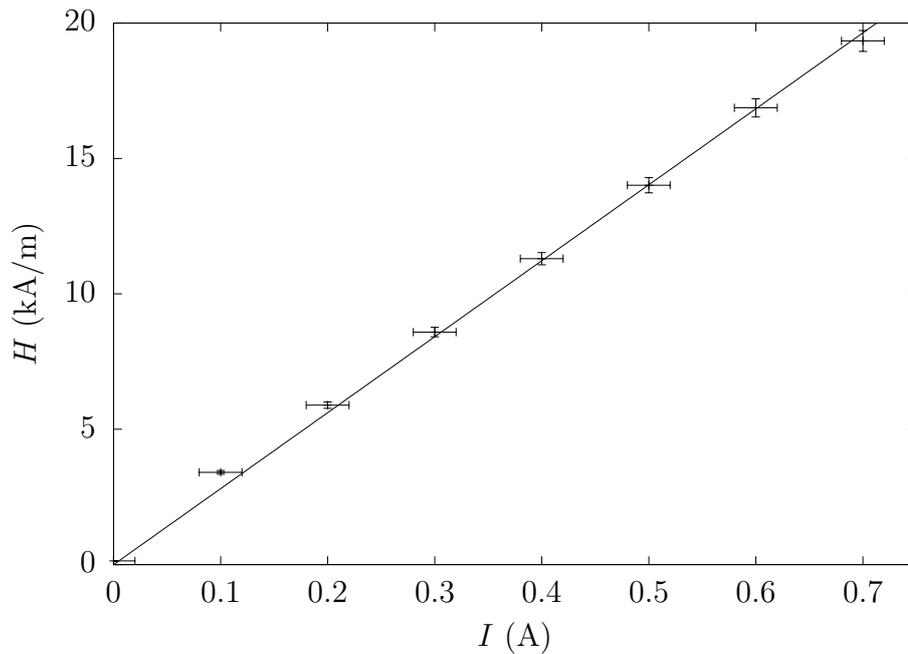


Figura 33 – Campo magnético axial produzido pelas solenoides em função da corrente aplicada.— Ajuste linear.

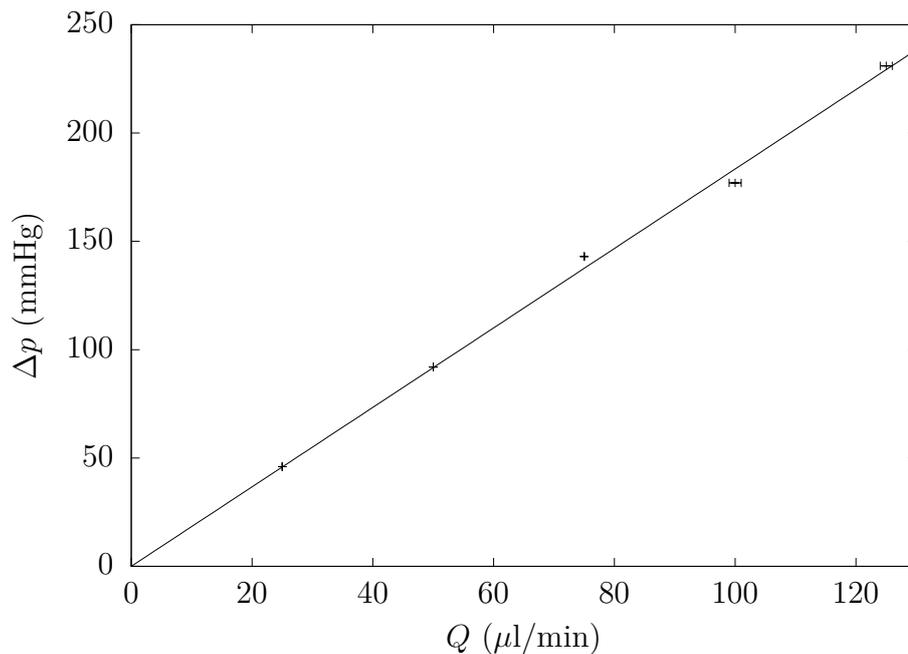


Figura 34 – Curva de diferença de pressão por vazão para óleo mineral.— Ajuste linear.

6.3.4 Verificação para um fluido newtoniano

Para verificar o correto funcionamento da bancada experimental, foi ensaiado um fluido newtoniano. A figura 34 apresenta a curva de diferença de pressão por vazão para o óleo mineral a temperatura de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Observa-se a recuperação do comportamento linear previsto pela lei de Hagen-Poiseuille.

6.4 Procedimento Experimental

O procedimento experimental consiste das seguintes etapas:

- O banho térmico é ajustado em $T = 25^{\circ}C$ e aguarda-se um transiente de cerca de 10 min para a estabilização da temperatura do capilar;
- Uma vazão é imposta pela bomba de seringa e a leitura de pressão do transdutor é adquirida a cada 1 s e armazenada. A série temporal de leitura é exemplificada pela figura 35. Devido à relaxação do sistema, a leitura de pressão possui um transiente até a estabilização da leitura. O tempo de relaxação varia entre 1 a 30 min, de acordo com vazão imposta. Após a estabilização da leitura, a aquisição é mantida por cerca de 10 min. Uma média temporal da leitura é feita sobre os pontos do patamar;

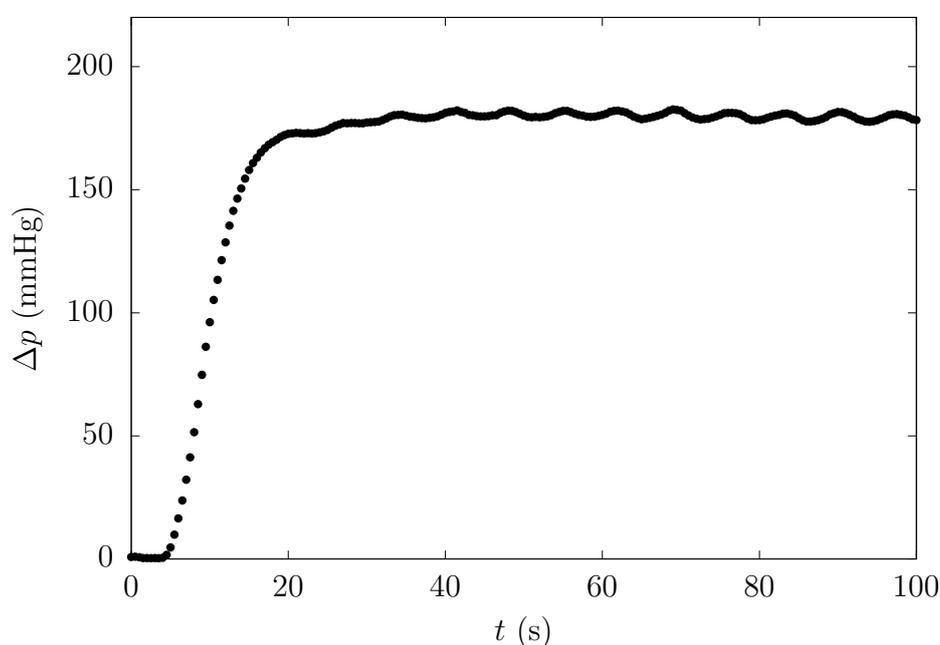


Figura 35 – Série temporal da leitura de pressão do transdutor em função do tempo para o EFH 3 com vazão de $1000 \mu\text{l}/\text{min}$ na ausência de campo.

- O seringa é retornada a posição inicial e repete-se o procedimento para a mesma vazão por 5 vezes, sobre os quais é calculada a média e a incerteza da leitura de pressão;
- A série de medidas é repetida para diferentes vazões e diferentes correntes aplicadas, obtendo resultando nas curvas de diferença de pressão em função da vazão e da corrente.
- A taxa de cisalhamento na parede é calculada utilizando a relação de Weissenberg-Rabinowitsch (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987),

$$\dot{\gamma}_w = \frac{32Q}{\pi d^3} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{d \ln |Q|}{d \ln |\Delta p|} \right), \quad (6.6)$$

em que a derivada em cada ponto experimental é estimada por um ajuste do tipo lei de potência utilizando os pontos vizinhos;

- A viscosidade de parede é calculada combinando as relações 3.12 e 3.26, resultando em

$$\eta_w = \frac{\pi d^4 \delta p}{128 Q L} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{d \ln |Q|}{d \ln |\Delta p|} \right)^{-1}. \quad (6.7)$$

6.5 Análise de incerteza

Os resultados para a viscosidade e campo magnético estão sujeitos a incertezas decorrentes de variações aleatórias e/ou erros instrumentais. A incerteza do campo magnético aplicado é dependente da precisão da corrente elétrica fornecida pela fonte ($\delta I = \pm 0,02$ A) e da precisão da leitura do Gaussímetro ($\delta H_{Gau} = \pm 2\% H_o$). Utilizando a expressão 6.1, a incerteza é estimada como

$$\delta H_o = \pm \left[|\delta H_{Gau}| + f_e \frac{N_v}{L} |\delta I| \right]. \quad (6.8)$$

A incerteza no campo magnético é propagada para o cálculo do campo efetivo α_o , de modo que

$$\delta \alpha_o = \pm \left| \frac{\mu_o m}{kT} \delta H_o \right|. \quad (6.9)$$

Conforme a expressão 6.7, a incerteza viscosidade de parede é afetada pelas incertezas da leitura de pressão, da vazão imposta e do diâmetro do capilar,

$$\delta \eta_w = \pm \eta_w \sqrt{\left| \frac{\delta p}{\Delta p} \right|^2 + \left| \frac{\delta Q}{Q} \right|^2 + \left| 4 \frac{\delta d}{d} \right|^2}. \quad (6.10)$$

A incerteza da leitura de pressão é adotada como o maior valor entre o erro aleatório $|\delta p|_{alea}$ da análise estatística das leituras e a acurácia do transdutor ($|\delta p|_{inst} = 0,25\%$ do fundo de escala),

$$\delta p = \text{MÁX} [|\delta p|_{alea} ; |\delta p|_{inst}]. \quad (6.11)$$

A incerteza na vazão corresponde a acurácia da bomba de seringa ($\delta Q = \pm 1\% Q$). A incerteza do diâmetro do tubo é dominante no cálculo da viscosidade, tanto devido ao alto valor ($\delta d = \pm 4\% d$), quanto devido a alta sensibilidade decorrente da dependência com d^4 . Para eliminar a influência do incerteza do diâmetro, o mesmo tubo capilar foi utilizado em todas as medidas e a viscosidade foi apresenta em termos de seu incremento dividido pela viscosidade sem campo η_ϕ . Desta forma, o diâmetro interno torna-se um parâmetro fixo e a expressão 6.10 é simplificada para

$$\delta \left(\frac{\Delta \eta_w}{\eta_\phi} \right) = \pm \frac{\eta_w}{\eta_\phi} \sqrt{\left| \frac{\delta p}{\Delta p} \right|^2 + \left| \frac{\delta Q}{Q} \right|^2}. \quad (6.12)$$

7 Resultados Experimentais

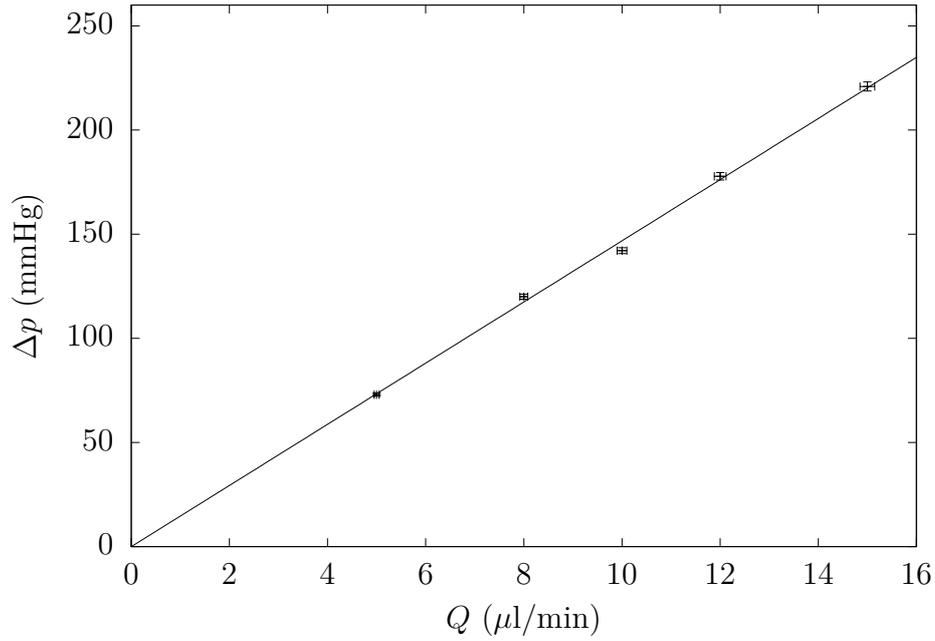
Neste capítulo são apresentados os resultados experimentais obtidos na bancada de bomba de seringa para os ferrofluidos APG 1134 e EFH 3. Os resultados para a viscosidade de parede são comparados com os resultados obtidos na simulação numérica e no reômetro. Os parâmetros físicos utilizados nos experimentos estão indicados na tabela 4. Os experimentos foram desenvolvidos em regime de baixo número de Péclet ($Pe = 10^{-4}$ a 10^{-3}). O campo efetivo aplicado varia desde a ausência de campo ($\alpha = 0$) até campos moderados ($\alpha \sim 1$). O ferrofluido APG 1134 possui uma fração volumétrica de partículas moderada ($\phi = 3,9\%$), enquanto o ferrofluido EFH 3 ($\phi = 11,8\%$) possui uma fração volumétrica elevada. O parâmetro de interação magnética dipolar para estes fluidos é moderado, $\lambda = 1, 3$. No entanto, devido a polidispersidade das suspensões, estão presentes partículas maiores cujo valor para λ é elevado (visto que $\lambda \sim v_p$). Assim, é esperado que estes fluidos apresentem efeitos devido a interação entre partículas e formação de estruturas. Não é possível fazer uma comparação direta entre os ferrofluidos, pois estes possuem composições químicas distintas.

Tabela 4 – Parâmetros físicos adimensionais utilizados no experimento

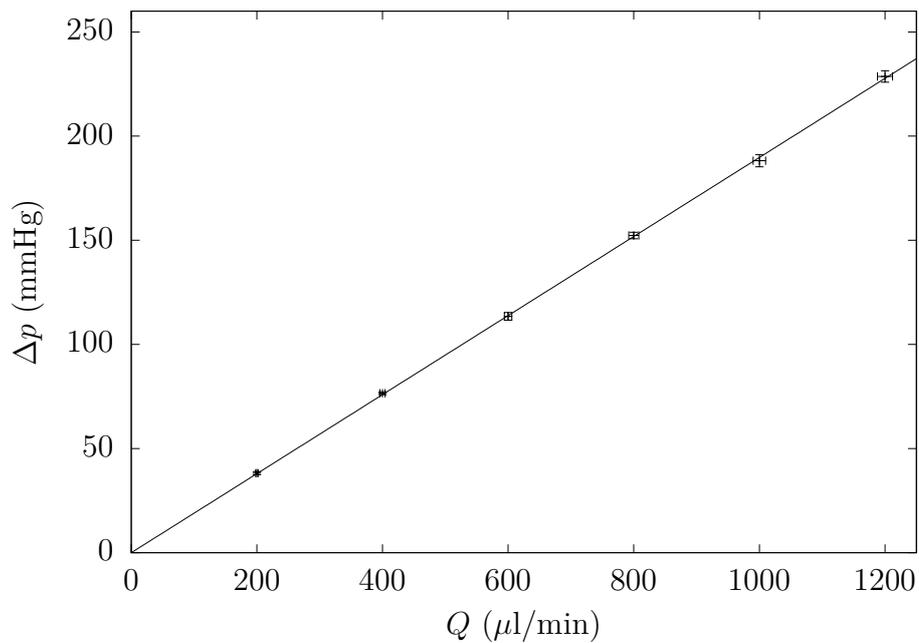
Parâmetro	Fórmula	Valores
Campo efetivo aplicado	$\alpha_o = \frac{\mu_o m H_o}{kT}$	0 - 1,4
Número de Péclet	$Pe = \frac{6\pi\eta_o a^2 U}{kT} \frac{a}{d}$	10^{-4} - 10^{-3}
Fração volumétrica de partícula	ϕ	0,039 - 0,118
Parâmetro de interação dipolar	$\lambda = \frac{\mu_o m^2}{24kT v_p}$	1,3

7.1 Comportamento newtoniano na ausência de campo magnético

Na ausência de campo magnético aplicado, a suspensão magnética deve-se comportar como um fluido newtoniano equivalente. A figura 36 apresenta as curvas de diferença de pressão por vazão para os ferrofluidos ensaiados. Vale notar que Δp representa a dife-



(a) APG 1134 - $\phi = 3,9\%$, $\eta_\phi = 1199 \pm 9$ cP



(b) EFH 3 - $\phi = 11,8\%$, $\eta_\phi = 15,49 \pm 0,03$ cP

Figura 36 – Curva de diferença de pressão por vazão na ausência de campo aplicado para (a) APG 1134 e (b) EFH 3. — Ajuste linear. $T = 25$ °C, $d = 500$ μm

rença de pressão entre a entrada e a saída do tubo capilar, sendo assim um valor positivo. Um ajuste linear foi efetuado sobre os dados, na forma

$$\Delta p = kQ , \quad (7.1)$$

em que k é a constante linear do ajuste. A viscosidade da suspensão η_ϕ é calculada por

$$\eta_\phi = \frac{\pi d^4 k}{128L} , \quad (7.2)$$

Observa-se a boa concordância dos dados experimentais com o ajuste linear, conforme previsto pela lei de Hagen-Poiseuille 3.18. Conclui-se que os ferrofluidos ensaiados possuem comportamento newtoniano na ausência de campo aplicado.

7.2 Efeito magnetoviscoso

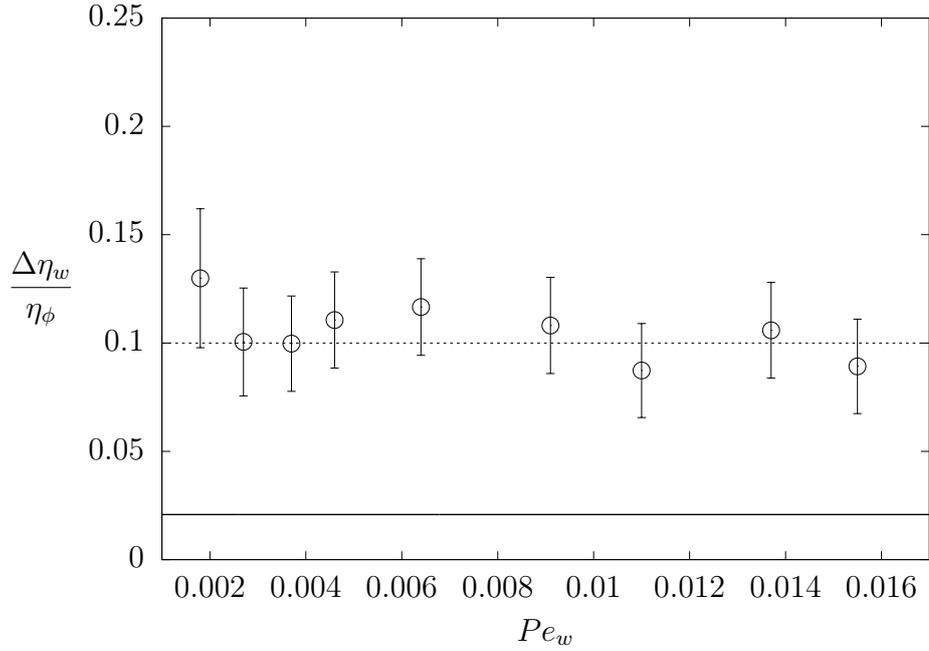
Resultados experimentais para o tubo capilar e comparação com modelo teórico

Conforme a metodologia apresentada na seção 6.4, a viscosidade de parede para as amostras foi calculada para várias condições de campo efetivo aplicado α_o e número de Péclet de parede Pe_w . Analogamente a expressão 5.2, os resultados são apresentados em termo do incremento relativo, no qual a viscosidade da suspensão η_ϕ foi obtida das figuras 36a e 36b. Assim, os resultados representam o efeito magnetoviscoso.

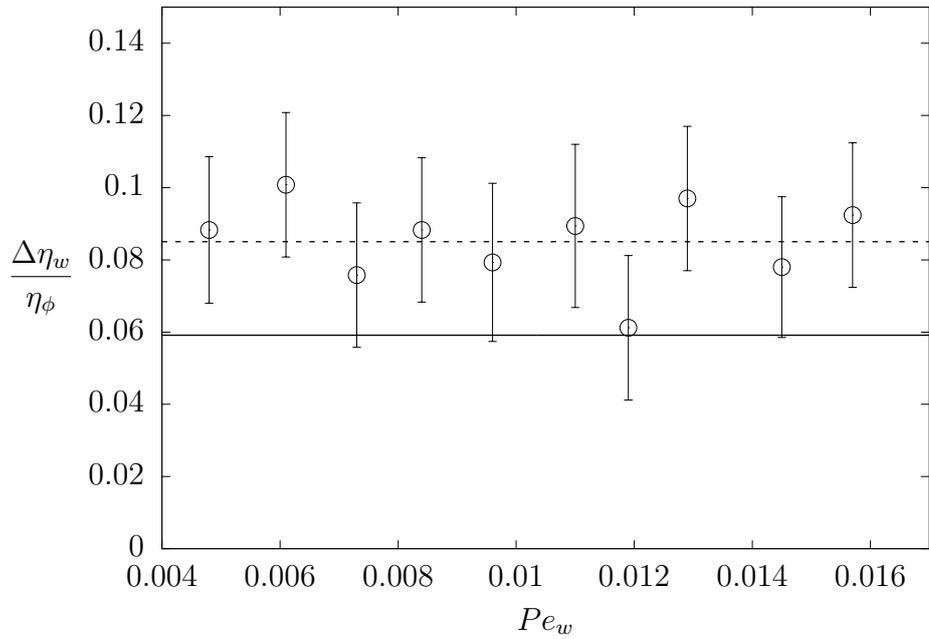
7.2.1 Dependência com o Péclet de parede

Na presença de um campo efetivo moderado ($\alpha_o = 1, 182$), os ferrofluidos ensaiados apresentaram um incremento de cerca de 10 % na viscosidade, caracterizando um efeito magnetoviscoso. A figura 37 apresenta o incremento na viscosidade de parede em função do número de Péclet parede. Para esse intervalo, a viscosidade permaneceu constante dentro das barras de erro, caracterizando um platô de viscosidade constante. Para esse regime de número de Péclet, o torque magnético domina sobre o torque mecânico devido à vortividade. Não foi possível observar a presença de um comportamento pseudo-plástico, que só deve se pronunciar para números de Péclet maiores.

Os resultados experimentais são comparados na figura 37 com os resultados obtidos na simulação numérica, para os mesmos parâmetros adimensionais. Os resultados numéricos apresentaram um incremento na viscosidade muito menor comparados aos resultados experimentais, principalmente para o APG 1134. Este resultado é esperado pois o modelo teórico utilizado neste trabalho supõe uma suspensão diluída e sem interação entre partículas. Na realidade, para as suspensão ensaiadas ocorre a formação de agregados de partículas induzidos pelo campo aplicado, que aumentam a viscosidade da suspensão. Passa a surgir nesta suspensão a competição entre a formação de estruturas devido a ação do campo magnético e a quebra das estruturas devido a ação do cisalhamento. É provável esses fluidos apresentem uma polidispersidade de tamanho, de modo que estruturas sejam formadas principalmente pela interação entre as partículas maiores. Ainda assim, não é possível confirmar essa hipótese pois não foi feita uma análise de dispersão das partículas.



(a) APG 1134 - $\phi = 3,9\%$, $\eta_\phi = 1199 \pm 9$ cP

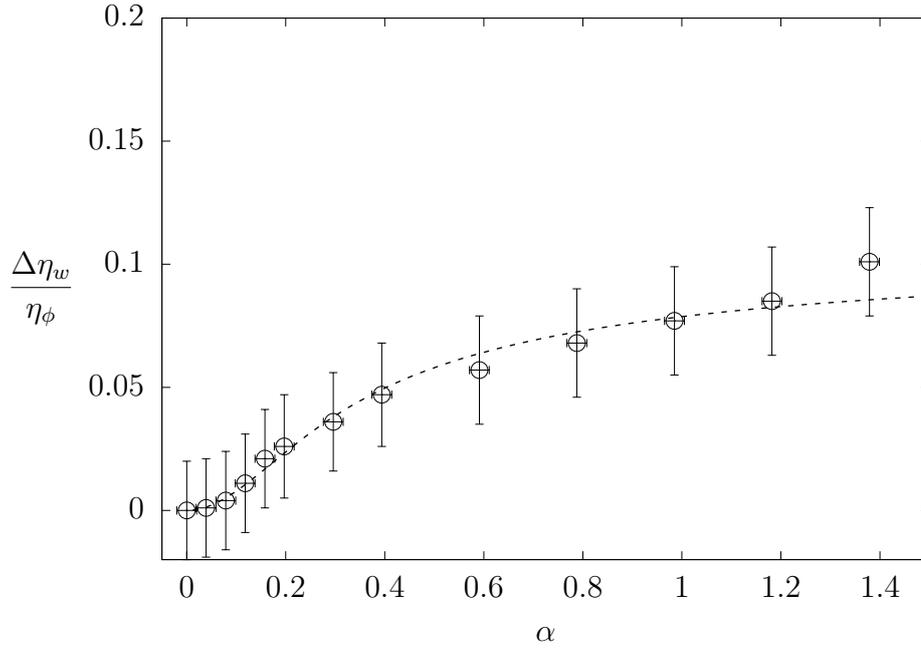


(b) EFH 3 - $\phi = 11,8\%$, $\eta_\phi = 15,49 \pm 0,03$ cP

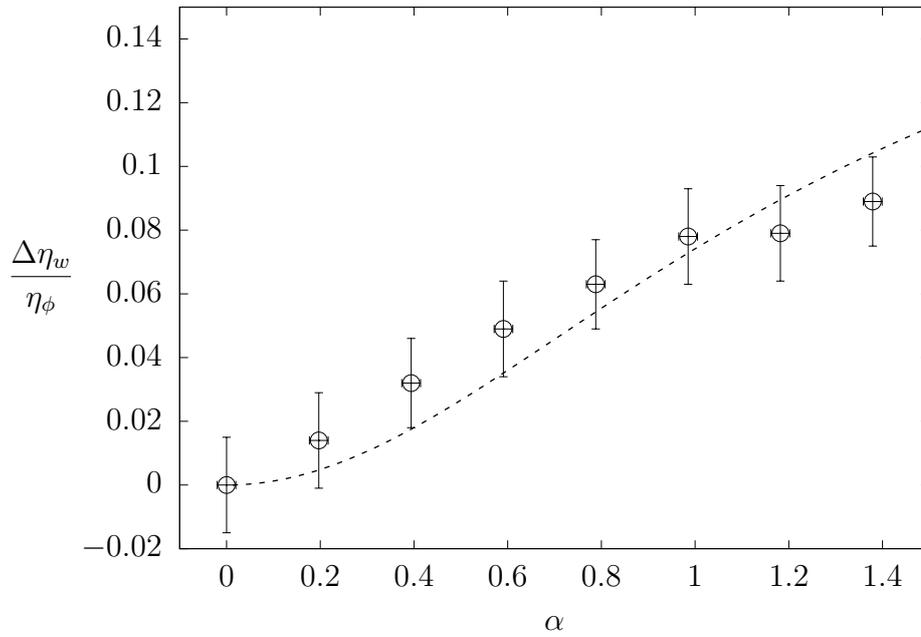
Figura 37 – Incremento na viscosidade de parede em função do número de Péclet de parede para (a) APG 1134 e (b) EFH 3. \circ Tubo capilar, — Solução numérica, - - - Platô de viscosidade constante. $\alpha_o = 1,182$, $\lambda = 1,3$, $T = 25$ °C

7.2.2 Dependência com o campo efetivo aplicado

Na ausência de campo aplicado, os ferrofluidos não são capazes de manter a presença de agregados de partículas. Com o aumento do campo magnético, espera-se que os resultados experimentais diverjam gradualmente do modelo teórico, a medida que ocorre a formação de estruturas. No entanto, o modelo teórico pode recuperar quantitativamente



(a) APG 1134 - $\phi = 3,9\%$, $\eta_\phi = 1199 \pm 9$ cP, $C_1 = 6,59$



(b) EFH 3 - $\phi = 11,8\%$, $\eta_\phi = 15,49 \pm 0,03$ cP, $C_1 = 1,39$

Figura 38 – Incremento na viscosidade de parede em função do campo efetivo aplicado para (a) APG 1134 e (b) EFH 3. \circ Tubo capilar, - - - Ajuste da solução assintótica. $Pe_w = 0,018$, $\lambda = 1,3$, $T = 25$ °C

os resultados experimentais se for feita uma calibração dos parâmetros. Como os experimentos foram realizados em baixo regime de Péclet, consideramos a solução assintótica da viscosidade de parede no limite em que $Pe \rightarrow 0$,

$$\frac{\Delta\eta_w}{\eta_\phi} = \frac{3\phi}{\eta_\phi} \frac{\alpha_o\chi(\alpha_o)}{2\chi_s + \alpha_o\chi(\alpha_o)} . \quad (7.3)$$

Nesse limite, as soluções numéricas e assintótica convergem para a viscosidade de [Shliomis \(1971\)](#). Para calibrar a solução assintótica, propomos uma reescala do parâmetro α_o , com $\alpha_o \rightarrow C_1 \alpha_o$, em que C_1 é o parâmetro de ajuste. A figura ?? apresenta os resultados experimentais e o ajuste da solução numérica para o incremento na viscosidade de parede em função do campo efetivo aplicado α_o . Observa-se uma boa concordância entre os resultados, indicando que o modelo teórico recupera o comportamento funcional da viscosidade no regime de baixo número de Péclet.

7.3 Viscometria de tubo capilar e reômetro

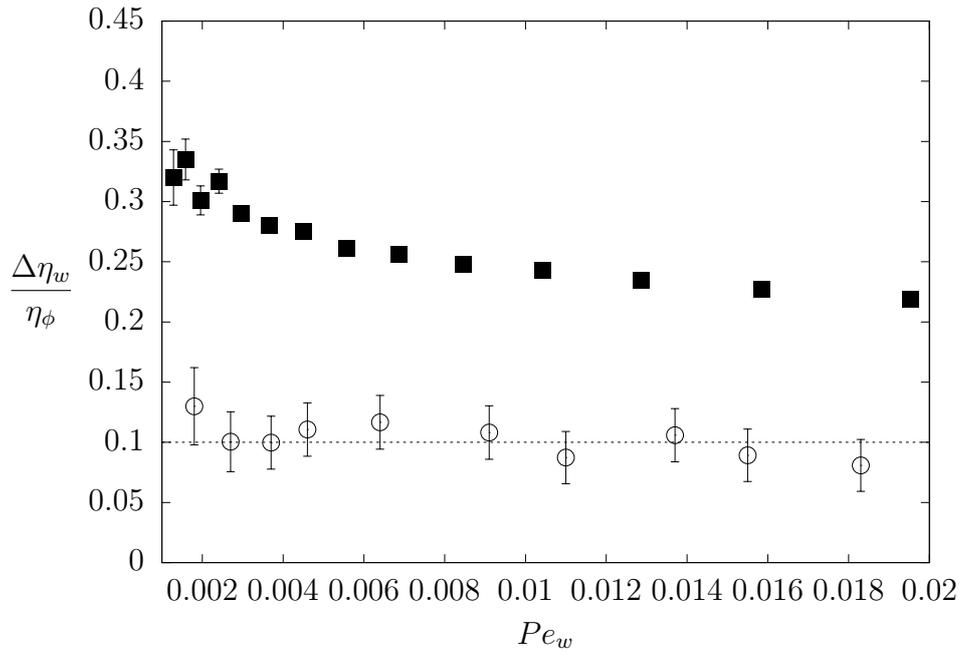
Comparação entre cisalhamento simples e quadrático

Com o objetivo de validar os resultados experimentais e verificar possíveis particularidades do viscosímetro de tubo capilar, foram feitas comparações com outros resultados experimentais obtidos no reômetro de disco rotativo. O reômetro é um equipamento robusto com uma incerteza inferior aquela obtida na bancada de tubo capilar. A diferença fundamental entre os equipamentos é que o escoamento no reômetro ocorre em cisalhamento simples, enquanto o escoamento no tubo capilar ocorre em cisalhamento quadrático. Os experimentos no reômetro foram desenvolvidos pelo aluno de mestrado Igor Dal Osto Pereira, também membro do grupo VORTEX. Os mesmos intervalos de taxa de cisalhamento e campo magnético foram utilizados nas duas bancadas.

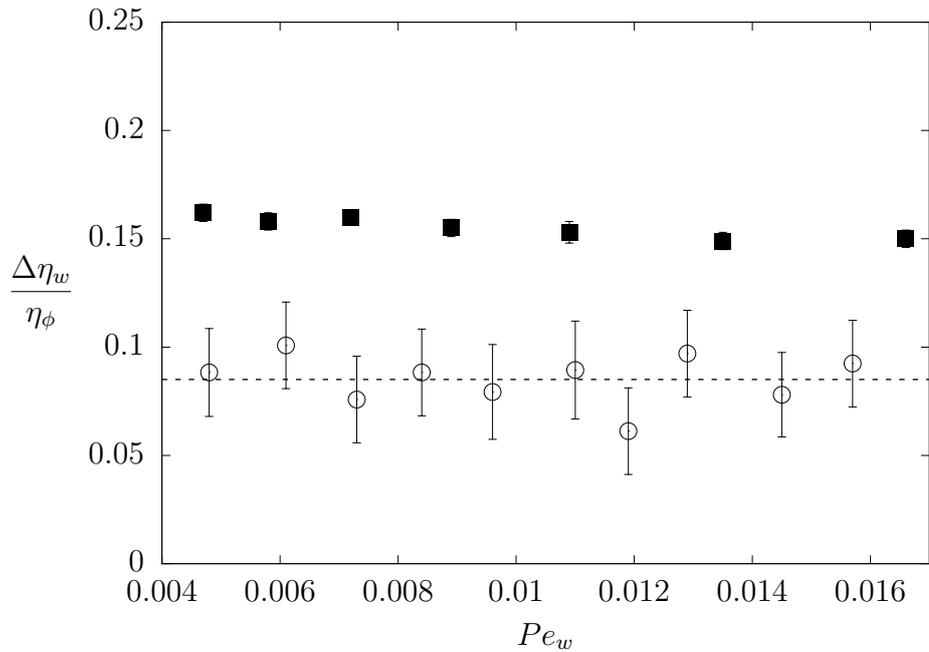
O incremento relativo $\Delta\eta$ na viscosidade aferida pelo reômetro foi calculado utilizando a viscosidade da suspensão η_ϕ medida pelo próprio reômetro, que pode diferir levemente daquela obtida no tubo capilar. Deste modo, é comparado apenas o incremento relativo na viscosidade, isolando efeitos decorrentes de diferenças de calibração dos equipamentos e incertezas do diâmetro do tubo capilar e do diâmetro do disco rotativo. A viscosidade de parede e a taxa de cisalhamento no reômetro correspondem àquela aferida na extremidade do disco rotativo.

7.3.1 Dependência com o Péclet de parede

Na presença de um campo efetivo moderado ($\alpha_o = 1,182$), os resultados experimentais para o tubo capilar e para o reômetro apresentaram diferenças no efeito magnetoviscoso, sendo este maior no reômetro. A figura 39 mostra o incremento na viscosidade, obtido no tubo capilar e no reômetro, para um campo efetivo constante em função do número de Péclet de parede. Enquanto o tubo capilar indicou a presença de um platô de viscosidade constante para os dois ferrofluidos, o reômetro identificou um efeito pseudoplástico de decréscimo da viscosidade para o APG 1134 para o mesmo intervalo de Péclet. Este efeito é provavelmente decorrente do aumento da quebra de agregados com o crescimento do cisalhamento, algo que não é possível identificar no tubo capilar.



(a) APG 1134 - $\phi = 3,9\%$

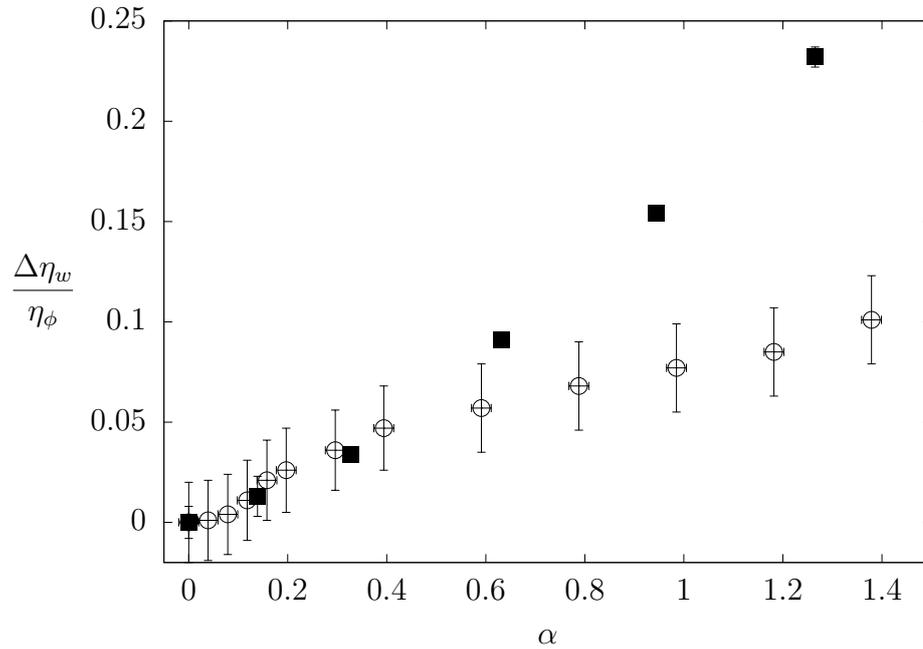


(b) EFH 3 - $\phi = 11,8\%$

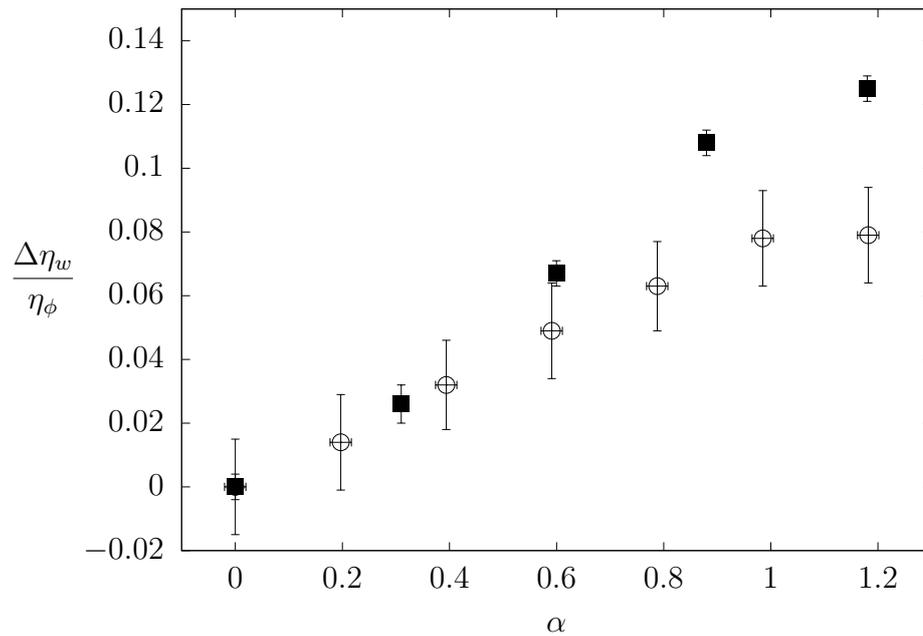
Figura 39 – Incremento na viscosidade de parede em função do número de Péclet de parede para (a) APG 1134 e (b) EFH 3 no: \circ Tubo capilar e \blacksquare Reômetro. - - - Platô de viscosidade constante. $\alpha_o = 1,182$, $\lambda = 1,3$, $T = 25\text{ }^\circ\text{C}$

As amostras de fluidos utilizadas nas duas bancadas experimentais foram retiradas do mesmo lote, e os parâmetros físicos são idênticos. Sendo assim, as diferenças observadas entre os resultados experimentais dos dois equipamentos é decorrente de diferenças na estrutura do fluido, possivelmente induzidas pelo cisalhamento quadrático em oposição ao cisalhamento simples. Para analisar mais afundo essa diferença, investigamos o efeito do variação do campo aplicado.

7.3.2 Dependência com o campo efetivo aplicado



(a) APG 1134 - $\phi = 3,9\%$



(b) EFH 3 - $\phi = 11,8\%$

Figura 40 – Incremento na viscosidade de parede em função do campo efetivo aplicado para (a) APG 1134 e (b) EFH 3 no: \circ Tubo capilar e \blacksquare Reômetro. - - - Platô de viscosidade constante. $Pe_w = 0,018$, $\lambda = 1,3$, $T = 25\text{ }^\circ\text{C}$

A figura 40 mostra o incremento na viscosidade, obtido no tubo capilar e no reômetro, para um Péclet de parede constante em função do campo efetivo aplicado. Observa-se que para campos fracos, há excelente concordância entre os resultados, enquanto que para campos maiores o reômetro indica incrementos de viscosidade maiores.

Uma provável justificativa para a diferença de viscosidade é o efeito de migração de estruturas da parede para o centro no escoamento quadrático. Essa migração provoca uma redução na concentração de agregados na parede do tubo, reduzindo a viscosidade do fluido naquela região. No reômetro, em contrapartida, não existe gradiente de taxa de cisalhamento, de modo que não há indução de migração.

Para a confirmação dessas hipóteses seria necessário uma investigação experimental da estrutura e dispersão dos agregados formados no escoamento, ou uma modelagem numérica que considerasse efeitos de formação de agregados e migração.

8 Conclusões

Na primeira etapa do Projeto de Graduação foi investigado teoricamente o escoamento de um fluido magnético em um tubo capilar sob a ação de um campo magnético uniforme. As equações governantes da Ferrohodinâmica foram particularizadas para um escoamento axissimétrico, permanente e sem convecção. O sistema obtido é um conjunto de equações algébricas não-lineares na derivada da velocidade, no gradiente de pressão e nas componentes da magnetização. As condições da velocidade na parede e da velocidade média fecham o problema. Os parâmetros físicos adimensionais do sistema são o campo efetivo aplicado e o número de Péclet, além da fração volumétrica e do parâmetro de interação dipolar magnética.

Para a resolução numérica do sistema de equações, o domínio na direção radial foi discretizado e para cada ponto o sistema foi resolvido por um método de Newton. Um método da secante associado à condição da velocidade média foi utilizado para corrigir iterativamente o gradiente de pressão adimensional. Os resultados obtidos foram os perfis de velocidade, magnetização e viscosidade aparente local, além de propriedades globais como as viscosidades relativa e de parede.

Foram identificados dois regimes físicos principais. Para um número de Peclét pequeno, o efeito do torque magnético sobre as partículas é dominante no escoamento, impedindo estas de girar e aumentando a dissipação viscosa. No limite de Péclet nulo, recuperou-se a viscosidade rotacional de Shliomis, corrigida por um fator de 2 devido a mudança na equação da magnetização adotada. Utilizando um método de perturbação regular, foi obtido uma solução assintótica com correção ordem Pe^2 , em que a vorticidade age como uma perturbação no escoamento. Os resultados numérico e assintótico apresentaram boa concordância. Na dependência com o campo efetivo aplicado, observou-se um comportamento típico de saturação, em que a viscosidade relativa aumenta com o campo até atingir o limite de saturação.

O segundo regime físico identificado foi o regime de elevado número de Péclet, em que o efeito da vorticidade domina o escoamento. No limite assintótico de Péclet infinito, o torque magnético não consegue reorientar as partículas e o efeito magnetoviscoso é nulo. Novamente, um método de perturbação regular foi utilizado para obter uma correção ordem Pe^{-2} , em que o torque magnético age como uma perturbação. Os resultados numéricos recuperam a aproximação assintótica para elevado número de Péclet. Na solução

dos perfis de magnetização, observou-se a presença de uma pequena camada no centro do tubo em que são válidas as aproximações de baixo Péclet. Como no centro do tubo a vorticidade é pequena, o torque magnético é relevante localmente, mesmo para uma condição de número de Péclet global elevado. A boa concordância entre os resultados numéricos e as aproximações assintóticas permitiu validar o método numérico.

Na segunda parte do Projeto de Graduação, o fenômeno foi investigado experimentalmente para duas amostras de ferrofluido com frações volumétricas de moderada a elevada. Foi preparada uma bancada experimental de bomba de seringa, capaz de medir a vazão e a diferença de pressão no escoamento das amostras em um tubo capilar. Uma solenoide em volta do tubo fornece um campo magnético externo uniforme. A viscosidade de parede foi medida para várias condições de número de Péclet de parede e campo efetivo aplicado.

A comparação entre os resultados numérico e experimental indicou um incremento de viscosidade maior para este último. A análise dos resultados indica que a interação entre partículas e a formação de agregados, fatores não considerados no modelo numérico, são determinantes para o efeito magnetoviscoso. Uma calibração da solução numérica permite recuperar quantitativamente os resultados experimentais.

Os resultados experimentais foram ainda comparados com medidas experimentais obtidas em um reômetro de disco rotativo. Para campos fracos, os resultados apresentaram boa concordância. Entretanto, para campos moderados, o efeito magnetoviscoso foi menor para o tubo capilar. Essa diferença pode ser devido a mudanças na estrutura do fluido induzida pelo gradiente de taxa de cisalhamento presente no tubo. Todavia, investigações mais detalhadas são necessárias para esclarecer este resultado. Estes resultados são de fundamental importância para aplicações em tubos capilares, como no caso de transporte de medicações em vasos sanguíneos e hipertermia magnética.

8.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como tópico de investigação para trabalhos futuros é sugerido:

- Utilizar um modelo para a simulação numérica que considere a presença de interação magnética dipolar na equação do movimento e de acoplação vorticidade-magnetização;
- Investigar numericamente o efeito de migração e deformação de agregados em um escoamento com gradiente de taxa de cisalhamento;
- Investigar experimentalmente a variação na fração volumétrica de partícula no incremento de viscosidade da suspensão magnética;

- Explorar outros regimes de número de Péclet na bancada experimental, caracterizando a presença de um comportamento pseudo-plástico;
- Investigar a influência de um campo magnético oscilatório no escoamento de um fluido magnético em tubo capilar.

Referências

- ANDHARIYA, N. et al. Field induced rotational viscosity of ferrofluid: Effect of capillary size and magnetic field direction. *Journal of colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 323, n. 1, p. 153–157, 2008. Citado na página 3.
- ARIS, R. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, 2012. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486134895. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=OkHCAgAAQBAJ>>. Citado na página 7.
- BACRI, J.-C. et al. “negative-viscosity” effect in a magnetic fluid. *Physical review letters*, APS, v. 75, n. 11, p. 2128, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 29.
- BARNES, H. A.; HUTTON, J. F.; WALTERS, K. *An introduction to rheology*. [S.l.]: Elsevier, 1989. v. 3. Citado na página 24.
- BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R. C.; HASSAGER, O. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. New York, NY: John Wiley and Sons Inc., 1987. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 61.
- BRADY, J. F.; BOSSIS, G. Stokesian dynamics. *Annual review of fluid mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 20, n. 1, p. 111–157, 1988. Citado na página 15.
- CUNHA, F.; SOBRAL, Y. Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure-driven flow of a magnetic fluid. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 343, p. 36–64, 2004. Citado na página 2.
- CUNHA, F. R. Fundamentos da hidrodinâmica de fluidos magnéticos. In: FREIRE, A. S.; MENUT, P.; SU, J. (Ed.). *Turbulência, ABCM*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2002. v. 1, cap. 7. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 8 e 12.
- CUNHA, F. R. Notas de aula do curso de dinâmica dos fluidos. *Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas - Universidade de Brasília*, 2018. Citado na página 16.
- CUNHA, F. R. A note on the stress tensor and magnetization evolution for magnetic dilute suspensions of rigid spherical particles. *to be submitted*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- DEATSCH, A. E.; EVANS, B. A. Heating efficiency in magnetic nanoparticle hyperthermia. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 354, p. 163–172, 2014. Citado na página 4.
- GRANT, I. S.; PHILLIPS, W. R. *Electromagnetism*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado na página 8.

- HAJIANI, P.; LARACHI, F. Controlling lateral nanomixing and velocity profile of dilute ferrofluid capillary flows in uniform stationary, oscillating and rotating magnetic fields. *Chemical engineering journal*, Elsevier, v. 223, p. 454–466, 2013. Citado na página 3.
- HEDAYATNASAB, Z.; ABNISA, F.; DAUD, W. M. A. W. Review on magnetic nanoparticles for magnetic nanofluid hyperthermia application. *Materials & Design*, Elsevier, v. 123, p. 174–196, 2017. Citado na página 4.
- HIERGEIST, R. et al. Application of magnetite ferrofluids for hyperthermia. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 201, n. 1-3, p. 420–422, 1999. Citado na página 4.
- HINCH, E. J. *Perturbation methods*. [S.l.]: Cambridge university press, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- IVANOV, A. O.; KUZNETSOVA, O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: an influence of interparticle correlations. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 4, p. 041405, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- KROH, H.; FELDERHOF, B. Electromagnetodynamics of polar liquids and suspensions. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, Springer, v. 66, n. 1, p. 1–6, 1987. Citado na página 2.
- MALVAR, S.; GONTIJO, R.; CUNHA, F. Nonlinear motion of an oscillating bubble immersed in a magnetic fluid. *Journal of Engineering Mathematics*, Springer, p. 1–28, 2016. Citado na página 21.
- MARTSENYUK, M.; RAIKHER, Y. L.; SHLIOMIS, M. On the kinetics of magnetization of suspensions of ferromagnetic particles. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, v. 65, p. 834–841, 1973. Citado na página 2.
- MCTAGUE, J. P. Magnetoviscosity of magnetic colloids. *The Journal of Chemical Physics*, AIP, v. 51, n. 1, p. 133–136, 1969. Citado na página 3.
- NOWAK, J.; ODENBACH, S. A capillary viscometer designed for the characterization of biocompatible ferrofluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 411, p. 49–54, 2016. Citado na página 3.
- ODENBACH, S. Ferrofluids—magnetically controlled suspensions. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, Elsevier, v. 217, n. 1-3, p. 171–178, 2003. Citado na página 3.
- ODENBACH, S. *Colloidal magnetic fluids: basics, development and application of ferrofluids*. [S.l.]: Springer, 2009. v. 763. Citado na página 1.
- ODENBACH, S.; THURM, S. Magnetoviscous effects in ferrofluids. In: *Ferrofluids*. [S.l.]: Springer, 2002. p. 185–201. Citado na página 3.
- PATEL, R.; UPADHYAY, R.; MEHTA, R. Viscosity measurements of a ferrofluid: comparison with various hydrodynamic equations. *Journal of colloid and interface science*, Elsevier, v. 263, n. 2, p. 661–664, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- RAJ, K.; MOSKOWITZ, R. Commercial applications of ferrofluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 85, n. 1-3, p. 233–245, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 4.

RINALDI, C. et al. Magnetic fluid rheology and flows. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, Elsevier, v. 10, n. 3-4, p. 141–157, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 15.

ROSA, A.; GONTIJO, R.; CUNHA, F. Laminar pipe flow with drag reduction induced by a magnetic field gradient. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 40, n. 5-6, p. 3907–3918, 2016. Citado na página 2.

ROSA, A. P. *Análise numérica e experimental da reologia e microestrutura de suspensões magnéticas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2014. Citado na página 3.

ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 1, 13 e 58.

SCHUMACHER, K. R. et al. Experiment and simulation of laminar and turbulent ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field. *Physical Review E*, APS, v. 67, n. 2, p. 026308, 2003. Citado na página 2.

SCHWARTZ, M. *Principles of electrodynamics*. New York: Dover, 1972. Citado na página 10.

SHLIOMIS, M. Effective viscosity of magnetic suspensions. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, v. 61, n. 2411, p. s1971d, 1971. Citado 4 vezes nas páginas 2, 17, 40 e 68.

STEPHEN, P. S. *Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particles*. [S.l.]: Google Patents, 1965. US Patent 3,215,572. Citado na página 1.

TRUEDELLE, C. A. *A first course in rational continuum mechanics*. [S.l.]: Academic Press, 1992. v. 1. Citado na página 11.