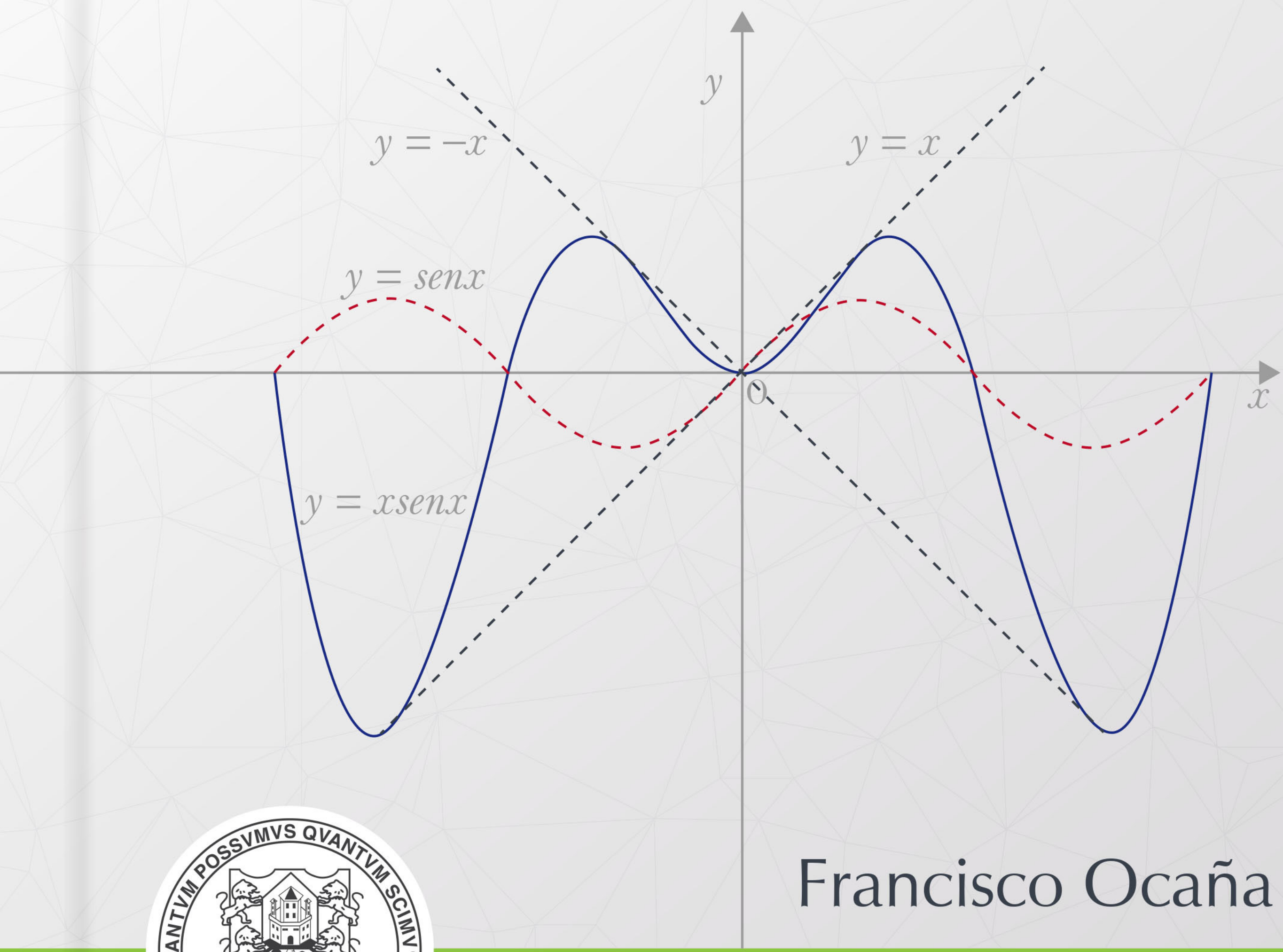
$f(x_1) \neq f(x_2)$

Las funciones y sus gráficas

Manual

ISBN: 978-958-5123-08-3



Francisco Ocaña

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Las funciones y sus gráficas ***- Manual***

© Autor: Francisco Ocaña
© Editorial Universidad de Nariño
ISBN: 978-958-5123-08-3

Primera Edición
Revisor de Estilo: Oscar Fernando Soto A.
Diseño y Diagramación: Maria Elena Mesías
Centro de Publicaciones Universidad de Nariño

Fecha de Publicación: Agosto 2020
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Tabla de Contenido

Indice de Figuras

Presentación

La experiencia en la enseñanza de cursos de cálculo muestra una notoria desigualdad en los estudiantes que ingresan a instituciones de educación superior en cuanto a los conocimientos que sirven de fundamento para una adecuada apropiación de esta importante parte de las matemáticas, que va desde claras deficiencias y desconocimiento, hasta niveles aceptables de comprensión y uso en este campo.

Fundamento esencial para los cursos de cálculo, en particular, lo constituye el conocimiento de las funciones, sus clases, por la relación entre los elementos de los conjuntos, por los conjuntos que la conforman o por su forma analítica. Así mismo, la construcción de sus gráficas, permiten identificar sus peculiaridades, las propiedades que muestran, en forma clara, sus diferencias y similitudes.

En la búsqueda de contribuir a remediar o nivelar estos fundamentos, y al tiempo, aclarar y complementar lo aprendido, se propone este manual sobre las funciones y la construcción de sus gráficas.

Aunque tiene como referente los estudiantes de los últimos grados de de la educación media, y los primeros semestres de la educación superior en carreras técnicas, puede servir también, como orientador o guía a maestros y profesores de unos y otros.

Para los estudiantes se trata de hacer asequibles los conceptos relacionados con las funciones y sus gráficas, presentándolos de forma menos formal, y para los profesores, brindarles algunas herramientas que pueden facilitar su labor.

El manual se basa en la consulta, la investigación bibliográfica y una larga experiencia del autor, por lo que se puede afirmar, que este manual puede facilitar el aprendizaje de las funciones, y especialmente, las destrezas en la construcción de sus gráficas, por la presentación de variados y sencillos métodos aquí expuestos, de distintos autores y por la experiencia del autor, que redundará en brindar un camino menos difícil en la apropiación del cálculo.

El manual es un inicio, y por tanto, susceptible de correcciones y mejoramiento. Por lo mismo, agradecemos de antemano, posibles sugerencias o propuestas en este sentido.

CAPÍTULO 1

Conceptos Fundamentales

Las matematicas son la ciencia de las magnitudes; su punto de partida es el concepto de magnitud.
Federico Engels - Dialéctica de la naturaleza

1.1. Número, Magnitudes

Uno de los conceptos fundamentales en matemáticas, es el de número. Este concepto surgió en la antigüedad, desarrollándose y generalizándose con el tiempo.

Las matemáticas tratan del estudio de las magnitudes haciendo abstracción de su contenido concreto. Por ejemplo, al medir magnitudes físicas como tiempo, área, volumen, masa, velocidad, temperatura, etc., se obtienen valores numéricos, y por lo mismo, cuando se habla de magnitudes, se tiene en cuenta sus valores numéricos.

Hay fenómenos en que ciertas magnitudes cambian, es decir, varían su valor (numérico) y otras lo mantienen constante. Así, en el movimiento uniforme de un cuerpo, varían el tiempo y la distancia, pero la velocidad se mantiene constante.

Magnitud variable, o simplemente variable, es aquella que puede tomar distintos valores numéricos. *Magnitud constante*, es aquella cuyo valor numérico no cambia. Sin embargo, en matemáticas, frecuentemente, la constante se considera como un caso particular de una magnitud variable cuyos valores numéricos son todos iguales.

Se debe tener en cuenta que, en condiciones físicas, una misma magnitud puede ser constante en un fenómeno y variable en otro. Por ejemplo, la velocidad en el movimiento uniforme es constante y variable en el movimiento uniformemente acelerado.

También existen magnitudes cuyo valor numérico es invariable, por lo que se las llama *constantes absolutas*. Por ejemplo, la razón de la longitud de la circunferencia y su diámetro es una de estas constantes, se designa mediante la letra griega π ($\pi = 3,141592\ldots$).

Generalmente, las variables se designan con las últimas letras minúsculas del alfabeto: x, y, z, $\ldots$, t, $\ldots$, y las constantes con las primeras: a, b, c, $\ldots$, k, $\ldots$.

1.2. Representación geométrica de los números reales

1.2.1. Sistema uni-dimensional de coordenadas. Recta real

Se considera un segmento de recta horizontal en un plano en el cual se elige un punto arbitrario O y a cierta distancia hacia la derecha, un punto A. Al sub-segmento OA se le asigna un valor igual a uno, $OA = 1$, estableciendo así una unidad de medida y una escala.

Si al punto O se le hace corresponder el número cero 0, entonces, al punto A le corresponde el número 1, repitiendo esta distancia a partir de A se obtiene en la recta, puntos a los que les corresponde los números 2, 3, $\ldots$, y así sucesivamente. Si este procedimiento se hace hacia la izquierda a partir de O se obtendrá en esta recta, los puntos: -1, -2, -3, $\ldots$.

Se tiene, entonces, una recta con escala, llamado también *eje numérico*, lo que permite representar, mediante un punto, cada uno de los números reales, donde el número que le corresponde a cada punto se lo llama *coordenada* del mismo.

Esta recta es tal, que a cada uno de sus puntos le corresponde un número real, y a cada número real le corresponde un punto de la recta, estableciéndose, de esta manera, una correspondencia biunívoca. La recta tiene un sentido de izquierda a derecha que se designa con una flecha en el extremo derecho de la misma, muestra el orden ascendente de los números reales y se denota con la letra x (Fig.1.1).

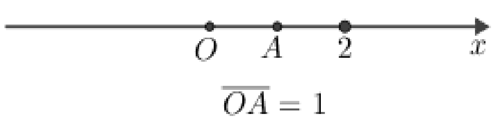


Figura 1.1: Recta real.

Esta recta, es una representación geométrica de los números reales, recibe el nombre de *recta real*, o *eje x*, y conforma un sistema coordenado lineal o de una dimensión. Particularmente, el punto O recibe el nombre de *origen del sistema*. Para los números racionales (fraccionarios), se divide el segmento donde debe ubicarse el número dado en las partes que indica el denominador y tomar cuantas de ellas según el numerador.

Ejemplo. Representar los puntos: $O = 0$, $A = 1$, $B = \frac{11}{8}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{7}{4}$.

Solución. $\frac{11}{8}$ significa que el primer y segundo segmentos a partir del origen 0, se dividen cada uno en 8 partes iguales y se toman 11 de ellas, donde resulta que el punto marcado en el segmento $[2, 3]$ es la tercera onceava parte del mismo. El punto $-\frac{1}{2}$ se obtiene dividiendo el intervalo $[-1, 0]$ (hacia la izquierda del origen) en dos partes y marcando el punto en la mitad del mismo. El punto $-\frac{7}{4}$ significa que se toman dos unidades, igualmente hacia la izquierda del origen, se dividen cada una en 4 partes y se cuentan 7 desde el origen hacia la izquierda (Fig.1.2).

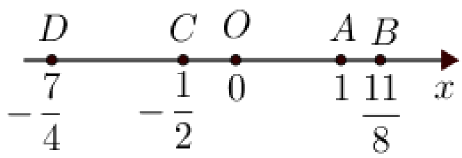


Figura 1.2: Ejemplo recta real.

Para la representación de los números irracionales en la recta real, se realiza su construcción, generalmente, teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, la de $\sqrt{2}$; en el punto 1 (OA) de la recta, se levanta la recta perpendicular $AB = 1$. La distancia OB es igual a la $\sqrt{2}$, que se traslada a la recta mediante un compás (OD).

Para la construcción de $-\sqrt{3}$, se traslada $\sqrt{2}$ hacia el segmento negativo de la recta, en ese punto $-\sqrt{2}$, se traza la perpendicular a la recta real $AB = 1$ y el segmento OC, es igual a $-\sqrt{3}$ que se traslada a la recta mediante un compás (Fig.1.3).

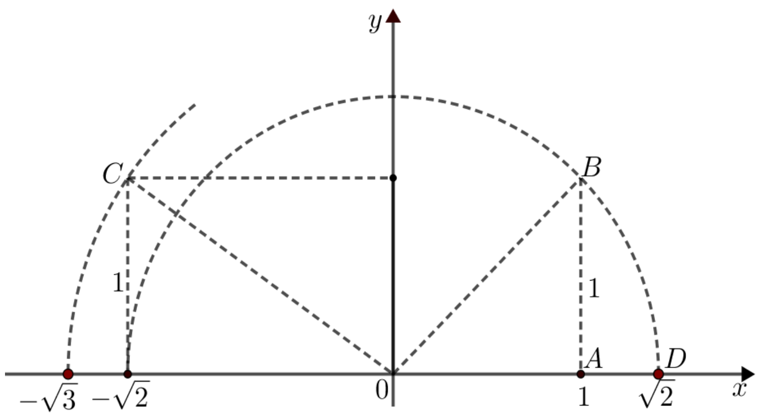


Figura 1.3: Construcción números irracionales $\sqrt{2}$, -$\sqrt{3}$.

1.3. Dependencia funcional

Las magnitudes de un mismo fenómeno pueden estar en interdependencia, de tal manera que el cambio de las unas determina respectivos cambios en las otras. Por ejemplo, el aumento (o disminución) del radio de una circunferencia determina el aumento (o disminución) de su área. En este caso se dice que entre las magnitudes variables existe una dependencia funcional.

Conviene recordar, que como se dijo antes, en matemáticas se hace abstracción del contenido concreto de las magnitudes, por lo que la relación entre ellas se expresa como la relación entre conjuntos numéricos, generalmente, subconjuntos o todo el conjunto de los números reales, o aún puede ser, el de los números complejos.

Así, siendo el conjunto de los números reales el conjunto universo, una *variable* se define como un símbolo $(x, y, z, \ldots)$ que puede reemplazarse por un número real cualquiera. *Constante*, es un símbolo $(a, b, c, \ldots)$ que representa un elemento bien definido de los números reales.

La dependencia funcional también se expresa como la relación entre conjuntos numéricos, e involucra un importante concepto en matemáticas, el de *función*.

1.4. Funciones

Definición. *Función* es una relación entre dos conjuntos, A y B, tal que, a cada elemento del primer conjunto A llamado *dominio**, asocia un elemento y solo uno del conjunto B llamado *codominio*. Mediante la letra f se representa la relación entre ellos o función y su notación es: $f : A \to B$ que se lee "función de A en B" o "función de A hacia B" (Fig.1.4).

*también: dominio de definición de la función.

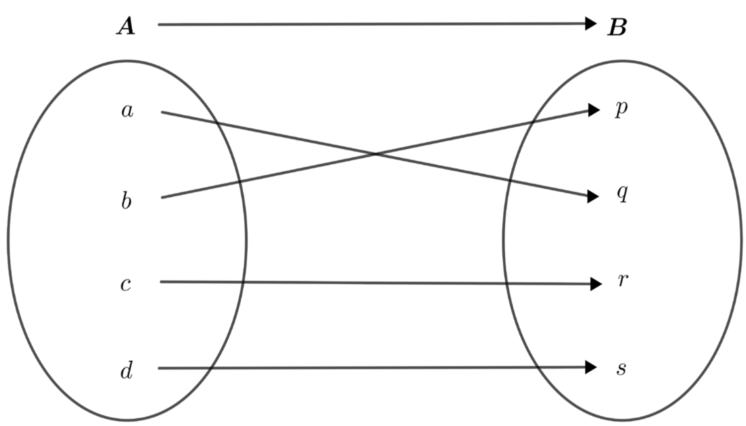


Figura 1.4: $f : A \to B$.

Aunque al conjunto de todos los valores de la función se llama "*recorrido*" de f, o "*la imagen de a por* f" y su notación es $f(a)$, y (el recorrido) es, un subconjunto del codominio de la función o, puede ser todo él, en cuyo caso se dice que la función es sobreyectiva.

Generalmente, los conjuntos A y B se asocian con subconjuntos o con todo el conjunto de los números reales. Así, todos los elementos del dominio A, se representan mediante la variable x, y los elementos del codominio mediante la variable y. En este caso, se da como definición de función la siguiente:

Si a cada valor de la variable x perteneciente a cierto conjunto, le corresponde uno y solo un valor determinado de la variable y, se dice que "y es función de x" y su notación es: $y = f(x)$, se lee "y igual a f de x". Donde, x recibe el nombre de *variable independiente o argumento de la función*, e y, *variable dependiente o función* (Fig.1.5).

(El dominio también se llama conjunto de valores de la variable independiente)

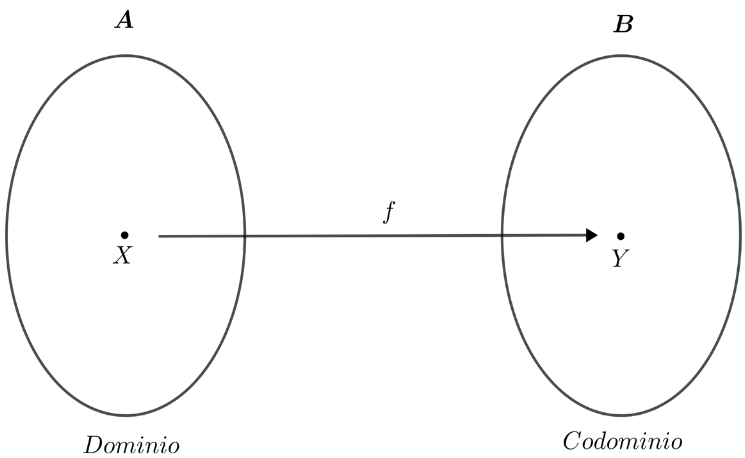


Figura 1.5: $y = f(x)$.

CAPÍTULO 2

Clasificación. Características. Sistema coordenado rectangular en el plano. Gráficas

Las funciones se clasifican teniendo en cuenta sus propiedades, características principales y aspectos, entre los cuales se enuncian:

- La relación entre los elementos pertenecientes a los conjuntos numéricos designados como dominio y codominio, estableciendo las condiciones para la existencia de la función inversa y la composición de funciones.
- La relación de los conjuntos numéricos entre los cuales se considera la dependencia funcional.
- El carácter analítico que define la ley mediante la cual se da la correspondencia entre los valores de x e y.
- Otras propiedades y características.
- Sus gráficas

2.1. Clases de funciones por la relación entre los elementos del dominio y codominio

Definición. Se dice que una función f es *inyectiva* si a elementos diferentes del dominio A corresponden elementos diferentes (imágenes) en el codominio B.

Es decir, si x_1, $x_2 \in D_f$, donde, D_f dominio de la función f, y si $x_1 \neq x_2$, entonces, $f(x_1) \neq f(x_2)$ (Fig.2.1 y 2.2).

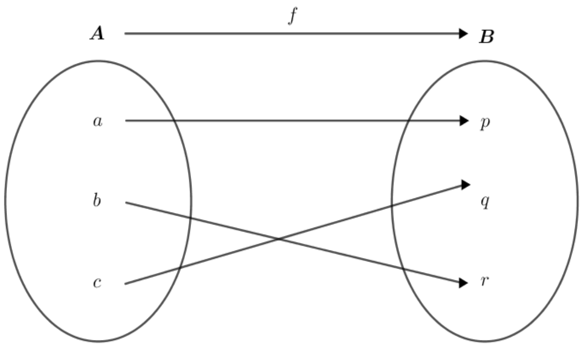


Figura 2.1: Función inyectiva.

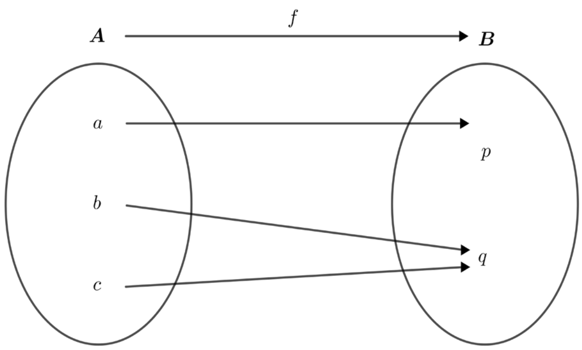


Figura 2.2: Función no inyectiva.

Se dice que f es *sobreyectiva o sobre*, si todos los elementos del codominio son imágenes de los elementos del dominio, o si todos los elementos del codominio están relacionados con los del dominio (si el rango de la función es todo el codominio) (Fig.2.3 y 2.4).

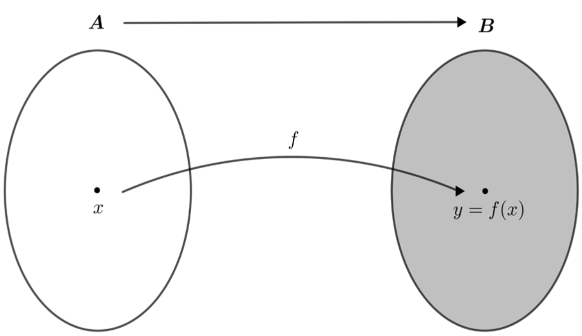


Figura 2.3: Función sobreyectiva.

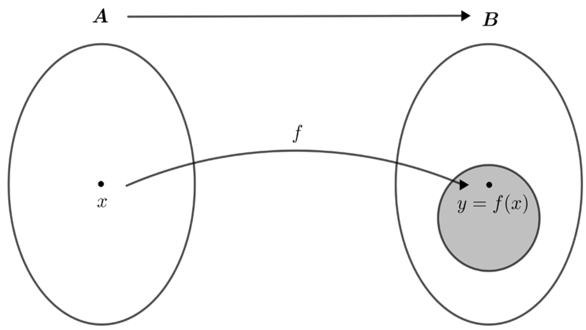


Figura 2.4: Función no sobreyectiva.

Se dice que una función f es *biyectiva*, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez (Fig.2.5).

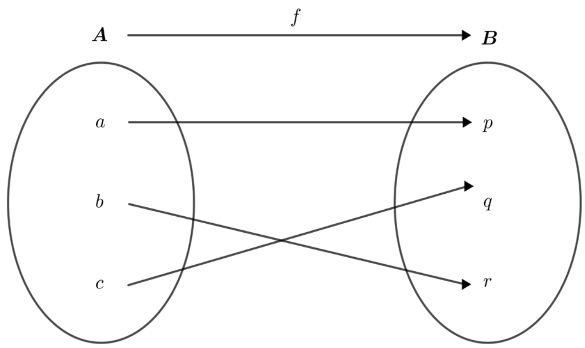


Figura 2.5: Función biyectiva.

Función inversa: Dada la función $y = f(x)$, donde $x \in A$, e $y \in B$, puede existir una función cuyo dominio sea la imagen B de f, y su codominio el conjunto A y que asocie a cada $y \in B$, el correspondiente $x \in A$. Esta función se llama inversa de f y su notación es f^{-1}, es decir, $f^{-1} : B \to A$ (Fig.2.6).

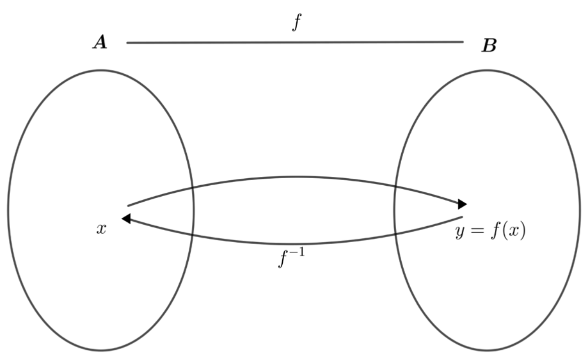


Figura 2.6: Función inversa.

Además, se establece que la condición necesaria y suficiente para que exista la función inversa de otra dada, es, que sea biyectiva.

Ejemplo. Determinar la inversa de la función $y = 1 - 2^x$.

Solución. $2^x = 1 - y \Rightarrow log_2(2^x) = log_2(1 - y) \Rightarrow x = log_2(1 - y)$, así $y = f^{-1}(x) = log_2(1 - x)$.

Una función dada y su inversa tienen la misma representación, pero generalmente se cambian las variables, por ejemplo, en este caso, la función inversa tiene la fórmula $y = f^{-1}(x) = log_2(1 - x)$, caso en el cual, la gráfica de la función inversa será simétrica a la primera respecto al eje $y = x$.

2.2. Composición de funciones

Si se considera una función f cuyo dominio sea el conjunto A y su codominio sea el conjunto B, y una función g, donde el dominio sea el conjunto B y su codominio sea un conjunto C, y tales que:

Para $a \in A$, se tiene $b = f(a)$, donde $b \in B$, se puede tomar $c = g(b)$, donde $c \in C$, es decir, existe una función $h = g(b) = g[f(a)]$.

Esta composición asocia a cada elemento de A un elemento de C y es, por tanto, una función h que es la composición de f y g y su notación es $g \circ f$, que se lee función compuesta de f y g, es decir, $h = (g \circ f)(a)$, se debe tener en cuenta que una función compuesta de f y g se lee en orden inverso ya que primero se aplica f y luego g (Fig.2.7).

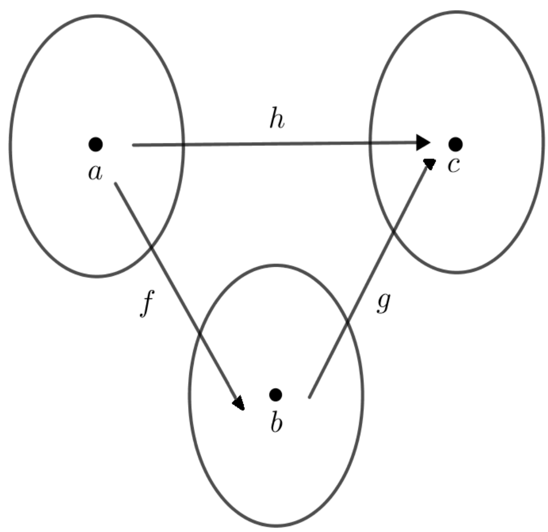


Figura 2.7: Función compuesta.

2.3. Clases de funciones por la relación entre los conjuntos dominio y codominio

Puede ser que los conjuntos entre los cuales se establece la función, es decir, tanto el dominio como el codominio, sean conjuntos de números complejos, que se sabe, contienen a los números reales, unión de los racionales e irracionales, y donde los racionales contienen a los números enteros que a su vez, contienen a los naturales.

Se presentan las siguientes funciones (Fig.2.8):

- f_1- *Función real de variable real.* El dominio y codominio son conjuntos de números reales.
- f_2- *Función real de variable compleja.* El dominio es el conjunto de números complejos y el codominio es el conjunto de los números reales.
- f_3- *Función compleja de variable real.* El dominio está en los reales y el codominio, en los complejos.
- f_4- *Función compleja de variable compleja.* El dominio y codominio están en los números complejos.

Un tipo de funciones importante son aquellas en que el dominio es el conjunto de los números naturales y el codominio es el conjunto de los números reales, reciben el nombre de *sucesiones.*

Finalmente, otro tipo de funciones es aquel en el que el dominio es un producto cartesiano de conjuntos de números reales, por ejemplo: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Estas son las llamadas *funciones de varias variables.* Para el caso en que el dominio es $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, se tiene una función de dos variables.

Las funciones que aquí se tienen en cuenta, son las funciones reales de variable real o simplemente, funciones reales.

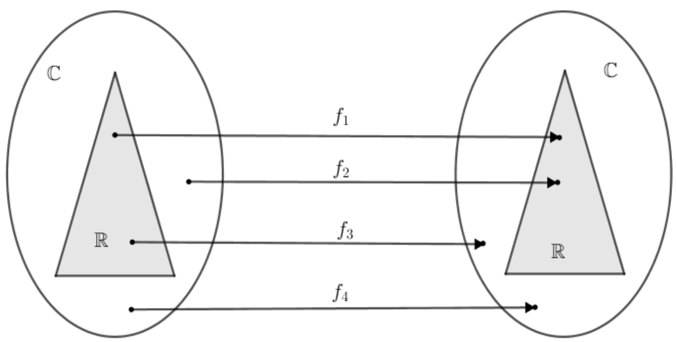


Figura 2.8: Clases de funciones - relación dominio y codominio.

2.4. Clases de funciones por su carácter analítico o expresión algebraica

En este caso, las funciones se dividen en dos grandes clases: *algebraicas* y *trascendentes*:

$$\text{I. Algebraicas} \begin{cases} \text{Polinómicas} \begin{cases} \text{Lineales} \\ \text{Cuadráticas} \\ \text{Cúbicas} \end{cases} \\ \text{Racionales} \\ \text{Fraccionarias} \end{cases}$$

$$\text{II. Trascendentes} \begin{cases} \text{Potenciales} \\ \text{Exponenciales} \\ \text{Logarítmicas} \\ \text{Trigonométricas} \\ \text{Trigonométricas inversas} \\ \text{Hiperbólicas} \\ \text{Hiperbólicas inversas} \end{cases}$$

2.5. Métodos de plantear una función

La dependencia funcional establecida entre los valores del argumento x, y la función y, puede expresarse de las siguientes maneras:

1. **Método condicional.** Una función dada mediante este método, como su nombre lo indica, es cuando se establecen condiciones. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

2. **Método tabular.** Se construye una tabla de dos filas en una de las cuales se asignan valores del argumento $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ y en la otra, los correspondientes a cada uno de éstos en virtud de f, de la función: $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$.

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

3. **Método analítico.** En este método se da una fórmula o expresión algebraica mediante la cual se indican las operaciones que deben efectuarse con los valores asignados a x para obtener los correspondientes de y. Por ejemplo, la función que asocia a cada número real, su cuadrado, se expresa: $y = x^2$.

4. **Método gráfico.** Básicamente consiste en una interpretación geométrica sencilla en el plano cartesiano. La principal ventaja de este método está en la representación que hace evidentes aspectos relevantes del comportamiento de la función (Fig.2.9).

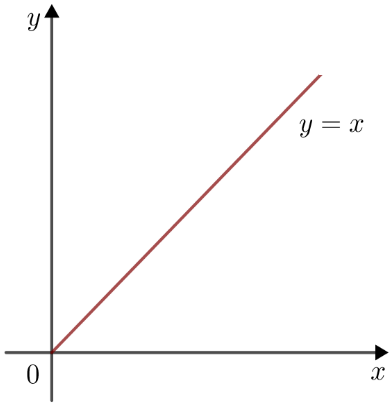


Figura 2.9: Método gráfico.

5. **Método paramétrico.** Se dan las ecuaciones

$$\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases} \tag{2.5.1}$$

donde t toma valores comprendidos en el intervalo $[t_0, t_1]$. A cada valor de t le corresponde los de x y los de y (suponiendo que α y β son funciones unívocas).

Considerando que x e y son las coordenadas de un punto en el plano O_{xy}, a cada valor de t le corresponde un punto determinado del plano. Estos puntos describen cierta curva en el plano, cuando t varía desde t_0 hasta t_1, que precisamente es la gráfica de la función $y = f(x)$.

Las ecuaciones (2.5.1) se denominan *ecuaciones paramétricas* de la curva; t toma el nombre de *parámetro*, y la forma de dar la curva mediante las ecuaciones (2.5.1) se llama *método paramétrico.*

La expresión $y = f(x)$ donde y depende directamente de x, se obtiene eliminando el parámetro t de las ecuaciones (2.5.1).

Ejemplos.

a) Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, de radio r, con centro en el origen de coordenadas; encontrar sus ecuaciones paramétricas (Fig.2.10).

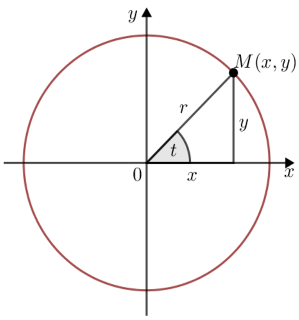


Figura 2.10: Ejemplo método paramétrico.

Solución. Se tiene que: $\operatorname{sen} t = \frac{y}{r} \rightarrow y = rsent$, $cost = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos t$, entonces:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

Son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia dada.

b) Las ecuaciones paramétricas de la parábola cúbica $y^2 = x^3$ (Fig.2.11), son:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

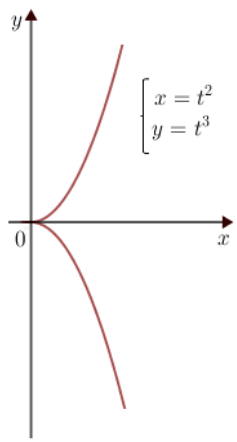


Figura 2.11: Ecuaciones paramétricas.

Funciones implícitas

Sean los valores de las variables x, e y, que se encuentran ligadas mediante la ecuación

$$F(x, y) = 0. \tag{2.5.2}$$

Si la función $y = f(x)$ definida en un cierto intervalo (a, b) es tal que, al sustituir y en la ecuación (2.5.2) por la expresión $f(x)$, esta se convierte en una identidad respecto a x, se dice, entonces, que la función $y = f(x)$ está implícita en la ecuación (2.5.2).

Ejemplo. La ecuación

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \tag{2.5.3}$$

determina implícitamente las funciones:$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

En efecto, al sustituir, por ejemplo, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ en (2.5.3), se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + (-\sqrt{r^2 - x^2})^2 &= r^2 \\ x^2 + (r^2 - x^2) &= r^2 \\ r^2 &= r^2 \end{aligned}$$

No toda función implícita puede ser representada en forma explícita, es decir, de la forma $y = f(x)$. Por ejemplo $y - x + \operatorname{sen}(xy) = 0$, $x^y = y^x$, $(x-2)^2 - \tan\frac{y}{x} = 0$. Las formas implícita y explícita no cambian la esencia de la función.

2.6. Gráficas de las funciones

2.6.1. Sistema coordenado rectangular en el plano. Plano cartesiano

Dos rectas numéricas o rectas reales en un plano, la una horizontal y la otra vertical, perpendiculares entre sí, que se cortan en el punto O que corresponde al número cero (0) de cada una, conforman lo que se denomina un sistema coordenado rectangular en el plano 0-bidimensional, llamado también *plano cartesiano.*

Así, cualquier punto se puede representar geométricamente en éste plano mediante dos números (x, y) que son las distancias desde el punto, la primera x, a la recta vertical, llamada *eje* O_y, o *eje de ordenadas*, o simplemente *eje* y; y la segunda y, a la recta horizontal, que se llama *eje* O_x o *eje de abscisas*, o *eje* x, y su notación es $P(x, y)$ que conforman una pareja ordenada o coordenada del punto: x-abscisa, y-ordenada.

Ejemplo. Los puntos $M(1,3)$, $P(-2,-1)$ (Fig.2.12).

Los ejes x e y determinan cuatro regiones en el plano llamados *cuadrantes*, se nombran: I-primero (superior derecho), II-segundo (superior izquierdo), III-tercero (inferior izquierdo) y IV-cuarto (inferior derecho) (Fig.2.12).

El punto de corte de los ejes corresponde al punto O, tiene coordenadas $O(0,0)$ y es llamado origen del sistema coordenado.

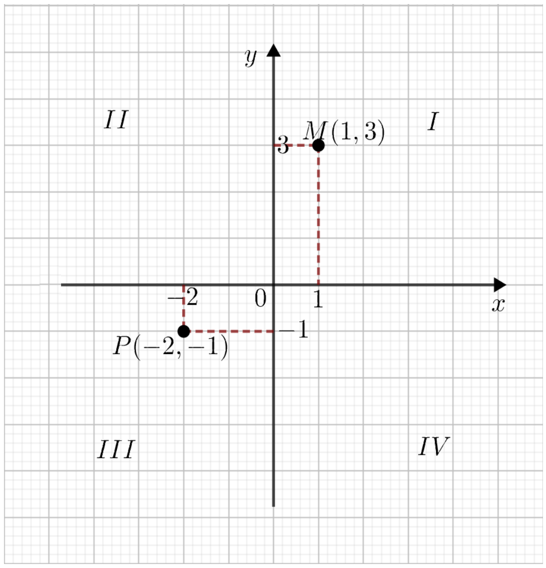


Figura 2.12: Plano cartesiano-ejemplos: $M(1,3)$ y $P(-2,-1)$.

2.6.2. Gráfica de una función

Se llama gráfica de la función

$$y = f(x) \tag{2.6.1}$$

al conjunto de todos los puntos del plano $P(x,y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2.6.1).

Para construir la gráfica o curva de la función dada por su fórmula, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se conforma una tabla de los valores del argumento x y los correspondientes de la función y.
2. En el plano se traza el sistema coordenado O_{xy} y se elige la unidad de medida para construir la escala de los ejes (no necesariamente, la misma para los dos).
3. Se marca una red nutrida de puntos $P_i(x_i, y_i)$ donde $i = 1, 2, 3, \ldots$, que son sus coordenadas, e $y_i = f(x_i, y_i)$, en el plano cartesiano.

4. Se unen los puntos entre sí mediante una línea donde se tienen en cuenta los puntos intermedios.

La construcción de la gráfica de la función se simplifica en algunos casos, si tienen ciertas características:

2.6.3. Simetría

Si $f(-x) = f(x)$, se dice que la *función* es *par* y es simétrica respecto al eje de ordenadas Oy.

Si $f(-x) = -f(x)$, se dice que la *función* es *impar*, simétrica respecto al origen del sistema.

Si $f(-x) \neq f(x)$, la función no es ni par, ni impar, no tiene simetría.

Es decir, si el cambio de signo del argumento modifica el valor de la función en la forma expuesta, entonces, hay simetría par o impar, o no es simétrica.

Ejemplos.

1. $y = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, función par (Fig.2.13).

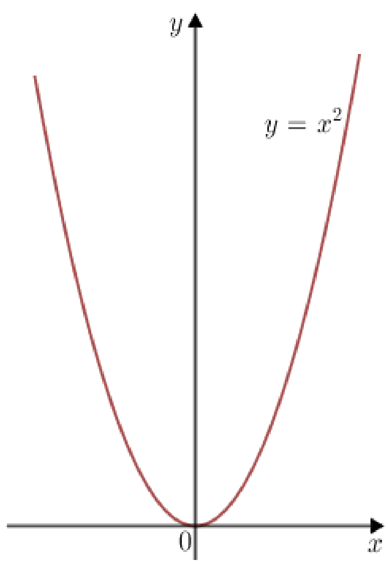


Figura 2.13: Función par, $y = x^2$, parábola.

2. $y = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, función impar (Fig.2.14).

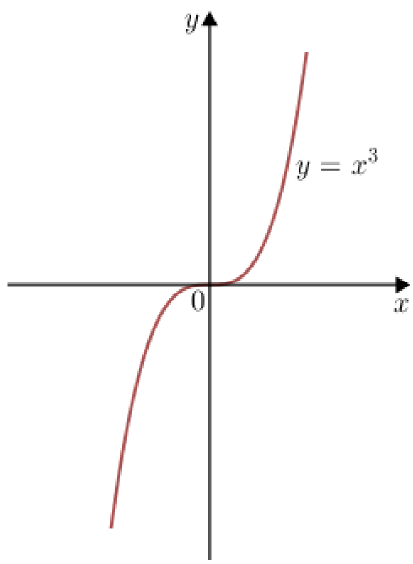


Figura 2.14: Función impar $y = x^3$, parábola cúbica.

2.7. Características de algunas funciones

2.7.1. Funciones acotadas

Se dice que una función está acotada cuando se puede hallar un número $M > 0$ tal que, $|f(x)| < M$ para todos los valores de x del dominio de definición de la función. M se llama *cota* de la función.

Ejemplo. $y = \operatorname{sen} x$ es una función acotada ya que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para todo x en el intervalo $(-\infty, \infty)$ (Fig.2.15).

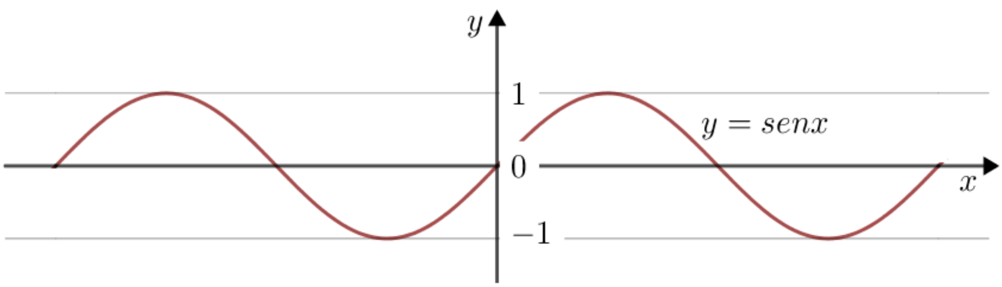


Figura 2.15: Función acotada $y = \operatorname{sen} x$.

2.7.2. Funciones crecientes y decrecientes

Una función es creciente si al asignar a la variable x valores cada vez mayores, el valor de esta aumenta, es decir, f es *creciente* en el segmento $[a, b]$ si y sólo si para todos x_1, $x_2 \in [a, b]$, donde $x_1 < x_2$, entonces, $f(x_1) < f(x_2)$.

Análogamente, una función es decreciente cuando al asignar valores a la variable x cada vez mayores, el valor de la función disminuye, es decir que f es *decreciente* en $[a, b]$ si sólo si, para x_1, $x_2 \in [a, b]$, $f(x_1) > f(x_2)$, donde $x_1 < x_2$.

A las funciones solamente crecientes o solamente decrecientes se las llama *monótonas* (Fig.2.16 y 2.17).

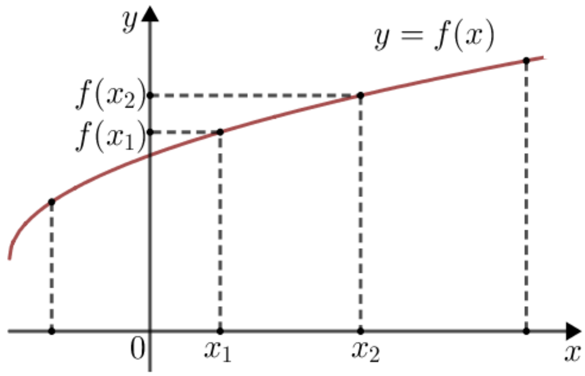


Figura 2.16: Función creciente.

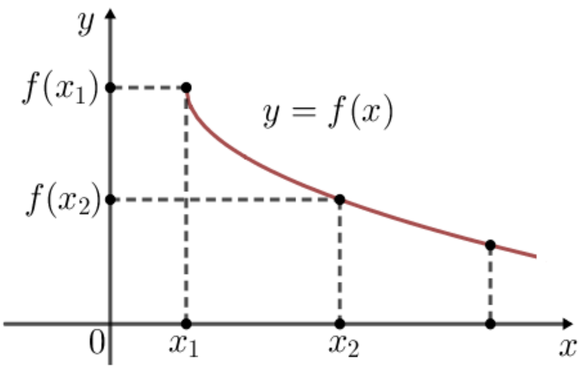


Figura 2.17: Función decreciente.

2.7.3. Funciones periódicas

Si a medida que los valores de la variable x crecen, los valores de la función se repiten después de cierto intervalo, se dice que la *función* es *periódica*, es decir que existe un periodo P tal que $f(x+P) = f(x)$ para todos los valores de x del dominio de la función. Por ejemplo, la función $\operatorname{sen} x$ es periódica, ya que $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$.

El carácter periódico de una función, geométricamente, se representa como una repetición de una misma figura a intervalos regulares del eje de abscisas.

Ejemplo. La función $y = f(x)$ para la parte decimal de x es periódica para todo valor de $x \in \mathbb{R}$ y se define: $y = x - [x]$ (Fig.2.18).

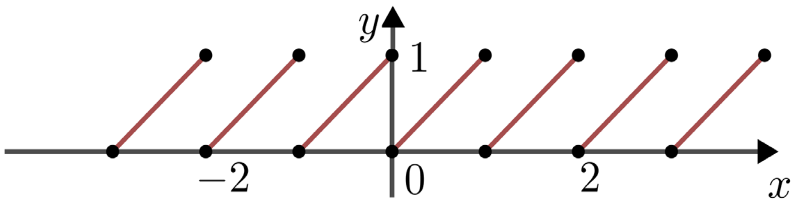


Figura 2.18: Función periódica.

2.8. Funciones algebraicas

2.8.1. Funciones polinómicas

Son expresiones de la forma: $P_{n(x)} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y los coeficientes $a_n (n = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes.

Funciones lineales

Son de la forma $y = kx + b$ donde el coeficiente de x, k se llama *pendiente de la recta* y es el valor de la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje Ox, y b es el punto donde la recta corta el eje y, llamado *intercepto*(Fig.2.19).

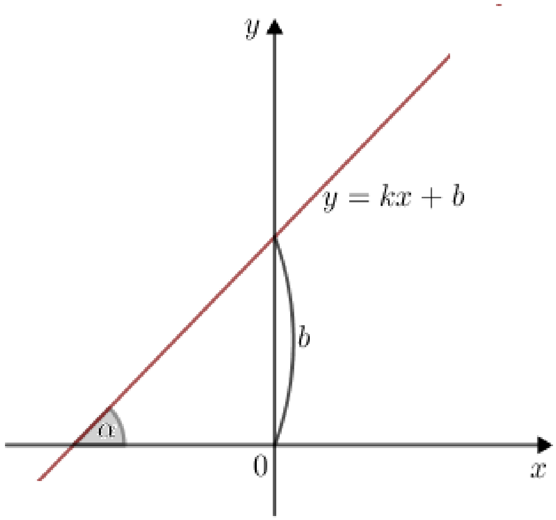


Figura 2.19: Función lineal ($k = \operatorname{tg} \alpha$).

En las ciencias como la física, se puede indicar donde las dependencias entre variables se expresan por funciones lineales.

Ejemplos.

1. Si se calienta una masa de gas dada m_0, de volumen v_0, tomada a la temperatura de cero grados centígrados, con la presión constante p, el volumen de gas v aumentará al elevarse la temperatura t por la fórmula: $v = v_0 + v_0(1 + \alpha t)$, donde α es el coeficiente de dilatación cúbica del gas.

2. El camino recorrido por un cuerpo animado de movimiento rectilíneo uniforme, varía según la ley $s = v_0 t + s_0$ donde v_0 es una constante de la velocidad del cuerpo en movimiento y s_0 es el camino inicial recorrido.

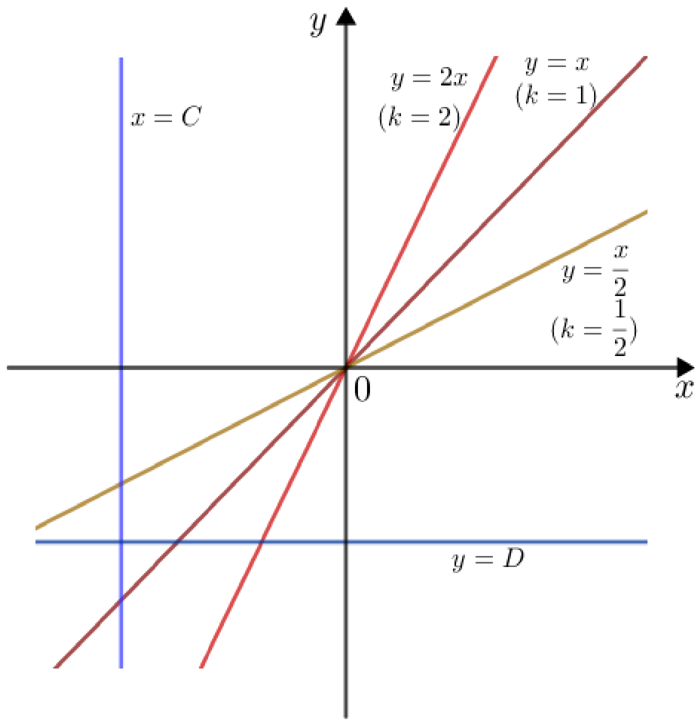


Figura 2.20: Función polinómica lineal.

Funciones cuadráticas

Son de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Si $a = 1$, $b = c = 0$, entonces, $y = x^2$. El dominio de la función D_f, son todos los números reales. Es una función par, ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, por tanto, es simétrica respecto al eje Oy.

Para cuando $x = 0$, $y = 0$, es decir, la curva pasa por el origen de coordenadas. La gráfica de esta función recibe el nombre de *parábola* (Fig.2.13).

Ejemplos.

1. El camino recorrido por un cuerpo con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o uniformemente retardado se expresa por la fórmula $s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$ donde t es tiempo, s es el camino recorrido, s_0 el camino inicial, v_0 la velocidad inicial, a la aceleración.

2. La dependencia entre el radio del círculo r, y su área F se expresa por la fórmula $F = \pi r^2$.

Funciones cúbicas

Son expresiones de la forma: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y son constantes. Si $a = 1$, $b = c = d = 0$; $y = x^3$, a la gráfica de esta función la llaman *parábola cúbica* (Fig.2.14).

Nota: pueden darse funciones de grados $4, 5, \ldots$, es decir, de polinomios de los citados grados.

2.8.2. Funciones racionales

Son aquellas formadas por la razón de dos polinomios, es decir, de la forma:

$$y = \frac{P_{n(x)}}{D_{m(x)}} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0}$$

y pueden ser: *propias*, cuando $n < m$, e *impropias* cuando $n > m$, o $m = n$. Las fracciones impropias siempre se pueden reducir a la suma de un polinomio más una función racional propia.

El dominio de las funciones racionales es el conjunto de los números reales, excluyendo a aquellos que reducen a cero el denominador de la fracción.

Ejemplos.

1.
$$y = \frac{1}{x} \tag{2.8.1}$$

2.
$$y = \frac{2x - 1}{x + 2} \tag{2.8.2}$$

3.
$$y = \frac{x + 1}{x^2 + 1} \tag{2.8.3}$$

Aquí, (2.8.1) y (2.8.3) propias; (2.8.2) impropia. Si se toma (2.8.1) como ejemplo, es una función que expresa una dependencia funcional inversamente proporcional (Fig.2.21).

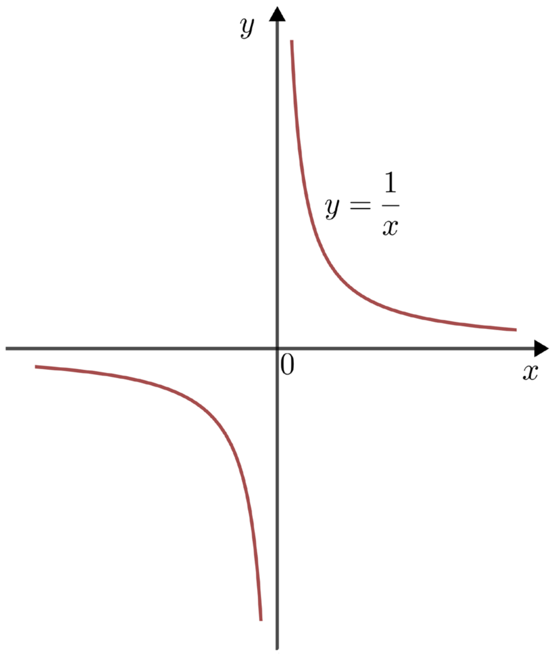


Figura 2.21: Ejemplo de función racional.

2.8.3. Funciones irracionales

Son expresiones de la forma $y = \sqrt[n]{P(x)}$ o aquellas en que con $y = f(x)$, se deben efectuar operaciones de adición, sustracción, multiplicación,. . . , etc., con expresiones en que figuran radicales.

Ejemplos.

1. $y = \sqrt{x}$
2. $y = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}$
3. $y = \sqrt[3]{x}$

2.9. Funciones trascendentes

2.9.1. Función potencial

Son expresiones de la forma $y = x^k$ donde k es un número real. Se pueden presentar los siguientes casos:

1. k es un número natural o entero positivo. El dominio de definición de esta función es: D_f : $(-\infty, \infty)$.

   Ejemplo. $y = x^3$ (Fig.2.14).

2. k es un número entero negativo, en este caso el dominio de definición de la función son todos los números reales excepto aquellos en en los cuales $x = 0$.

   Ejemplo. $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ (Fig.2.22).

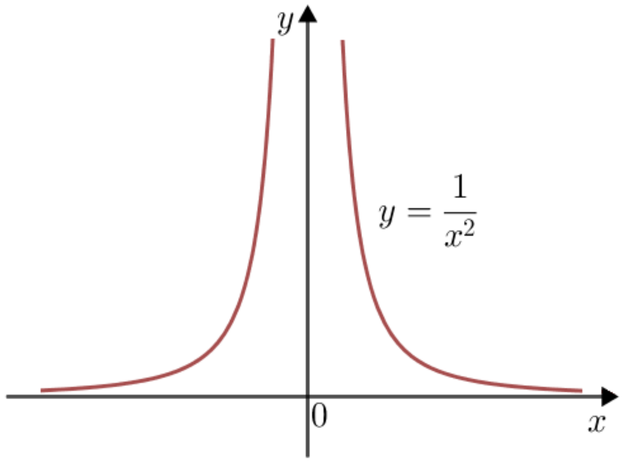


Figura 2.22: Función potencial (índice negativo).

3. k es un número fraccionario.

   Ejemplo. $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ (Fig.2.23).

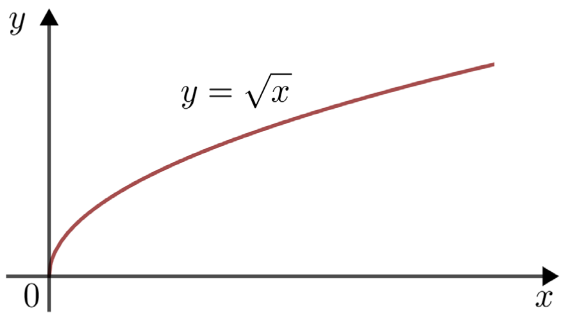


Figura 2.23: Función potencial (índice racional).

Es evidente que en todos los casos, estas funciones son casos particulares de las funciones algebraicas ya vistas (polinómicas, racionales, irracionales, ...).

2.9.2. Función exponencial

Son de la forma: $y = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Está definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. $y = 2^x, y = \frac{1}{2^x}$ (Fig.2.24).

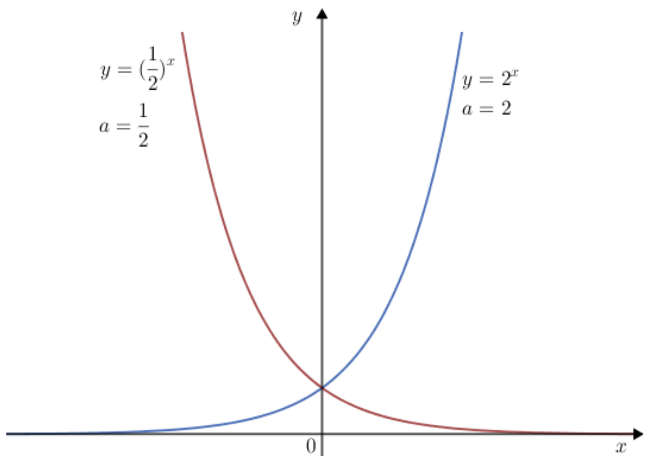


Figura 2.24: Función exponencial.

Como se ve de los ejemplos, independientemente de los valores de a para todos los valores del exponente x, la función exponencial es positiva; en el punto $x = 0$, los valores de las funciones son iguales a 1.

Para cuando $a > 1$ las funciones son crecientes y cuando $a < 1$, son decrecientes. Así mismo, son simétricas respecto al eje y.

2.9.3. Función logarítmica

Es de la forma $y = \log_a(x)$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Está definida para los valores de $x > 0$.

Las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a(x)$, son inversas la una con respecto a la otra.

Ejemplo. $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ son funciones inversas (Fig.2.25), por ello sus curvas son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$.

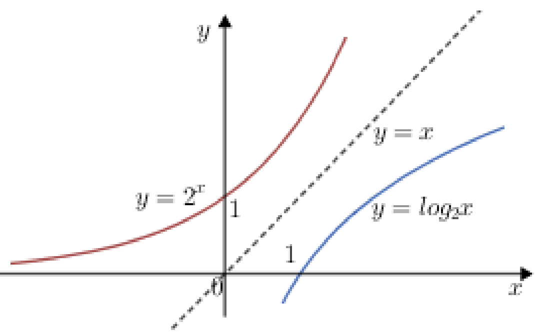


Figura 2.25: $y = log_2 x$, $y = 2^x$.

Lo mismo que en los casos anteriores, si $a > 1$, ($y = log_2 x$, $y = log_3 x$) las funciones son crecientes (Fig.2.25 y 2.26); cuando $a < 1$, ($y = log_{\frac{1}{2}} x$, $y = log_{\frac{1}{3}} x$), son decrecientes (Fig.2.27).

De igual manera estas son simétricas respecto al eje $y = x$.

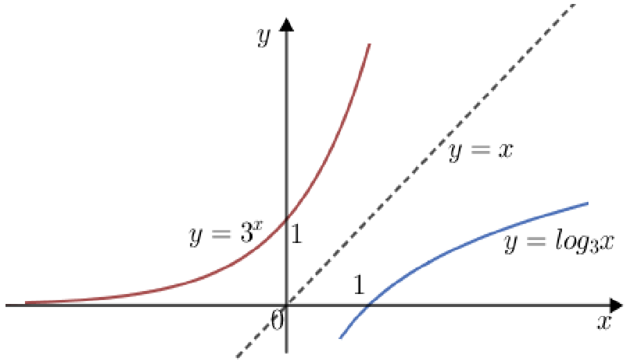


Figura 2.26: $y = log_3 x$, $y = 3^x$.

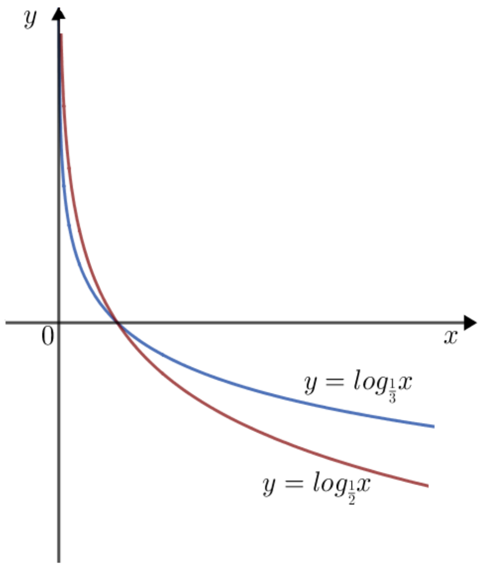


Figura 2.27: $y = log_{\frac{1}{2}} x$, $y = log_{\frac{1}{3}} x$.

2.9.4. Funciones trigonométricas

La característica fundamental de estas funciones es que son periódicas, es decir: $f(x + P) = f(x)$, donde P es el periodo.

1. **Función seno.** $y = \operatorname{sen} x; D_f : (-\infty, \infty)$. La función $y = \operatorname{sen} x$ es acotada, ya que su rango es $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, es decir, $[-1; 1]$. Su periodo es 2π. (Fig.2.28).

2. **Función coseno.** $y = \cos x; D_f : (-\infty, \infty)$ Análoga a la anterior, la función $\cos x$ es acotada, ya que su rango es $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, el intervalo $[-1; 1]$. Su periodo también es 2π. (Fig.2.28).

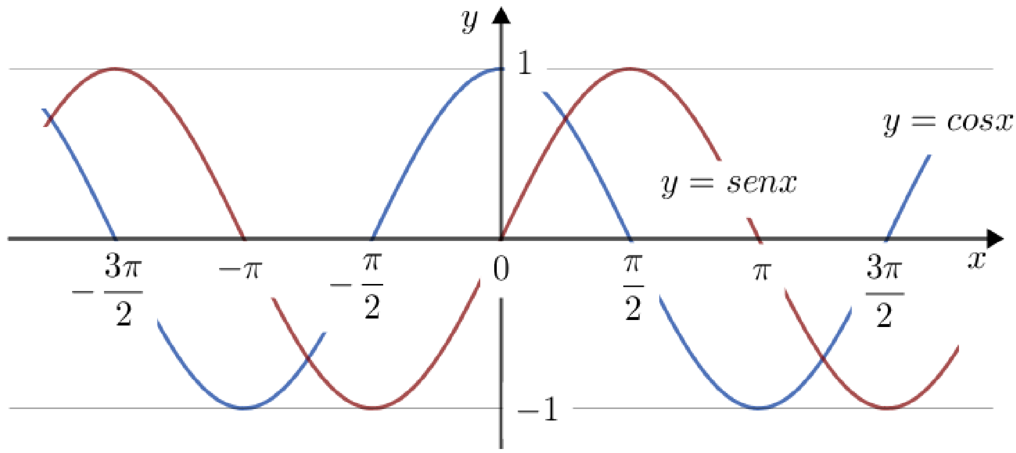


Figura 2.28: Funciones seno y coseno.

3. **Función tangente.** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$; $D_f : \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}(k \in \mathbb{N})$. (Fig.2.29).

4. **Función cotangente.** $y = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$; $D_f : \operatorname{sen} x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi(k \in \mathbb{N})$. (Fig.2.29).

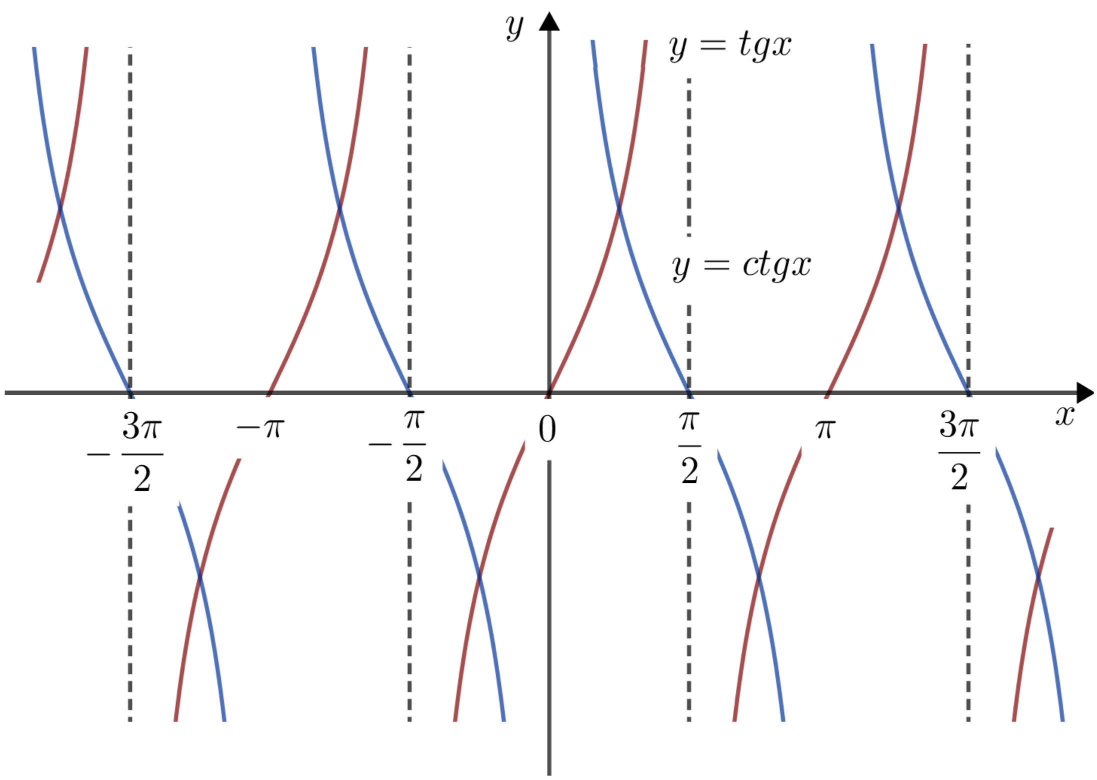


Figura 2.29: Funciones tangente y cotangente.

5. **Función secante.** $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$; $D_f : \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}(k \in \mathbb{N})$. (Fig.2.30).

6. **Función cosecante.** $y = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$; $D_f : \operatorname{sen} x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi(k \in \mathbb{N})$. (Fig.2.30).

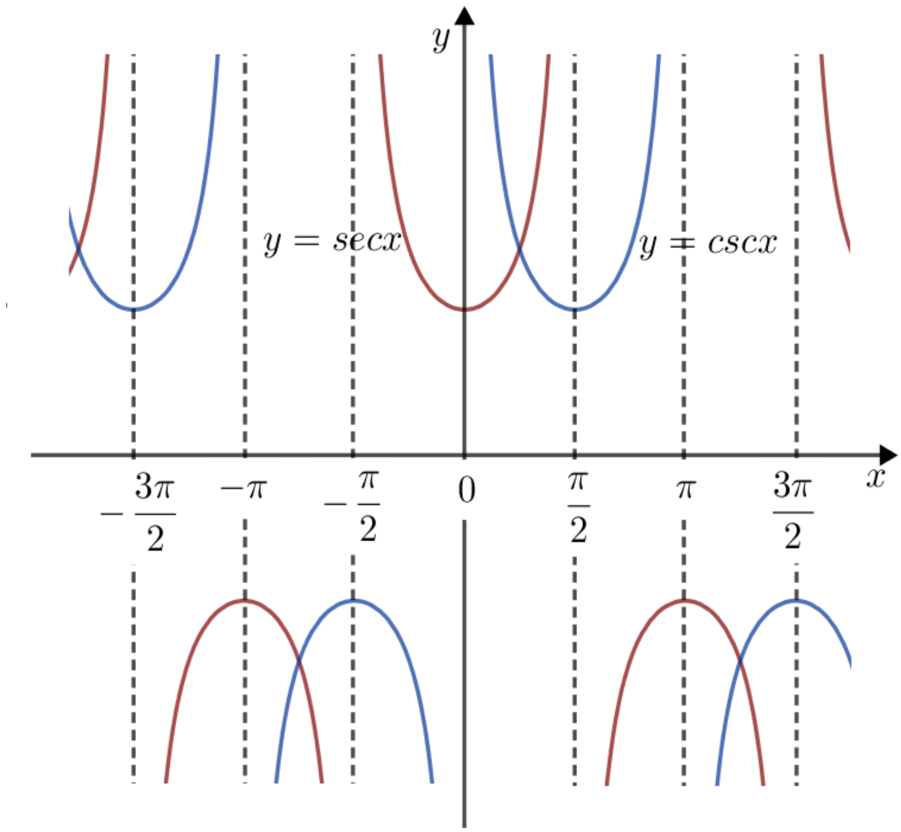


Figura 2.30: Funciones secante y cosecante.

2.9.5. Funciones trigonométricas inversas

La condición necesaria y suficiente para que una función inversa exista es que f sea biyectiva (inyectiva y sobreyectiva al tiempo). Sin embargo, las funciones trigonométricas, por ser periódicas, repiten sus valores para cada periodo, o sea, no son inyectivas.

Para obviar este problema, se toma los intervalos donde estas funciones son estrictamente monótonas (crecientes o decrecientes).

1. **Función arcoseno.**La función inversa a $y = \operatorname{sen} x$, es $y = \operatorname{arc\,sen} x$; que también se designa por $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, $(y = f^{-1}(x))$. La función $y = \operatorname{sen} x$, es estrictamente monótona en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (creciente), y su rango es de $[-1, 1]$, entonces, la función $y = \operatorname{arc\,sen} x$, tiene como dominio el intervalo $[-1, 1]$ y como rango $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Fig.2.31).

2. **Función arcocoseno.** La función inversa a $y = \cos x$, es $y = \arccos x$; que también se designa por $y = \cos^{-1} x$, $(y = f^{-1}(x))$. La función $y = \cos x$, es monótona en el intervalo $[0, \pi]$ (decreciente) y su rango es de $[-1, 1]$, entonces, la función $y = \arccos x$, tiene como dominio el intervalo $[-1, 1]$ y como rango $[0, \pi]$ (Fig.2.31).

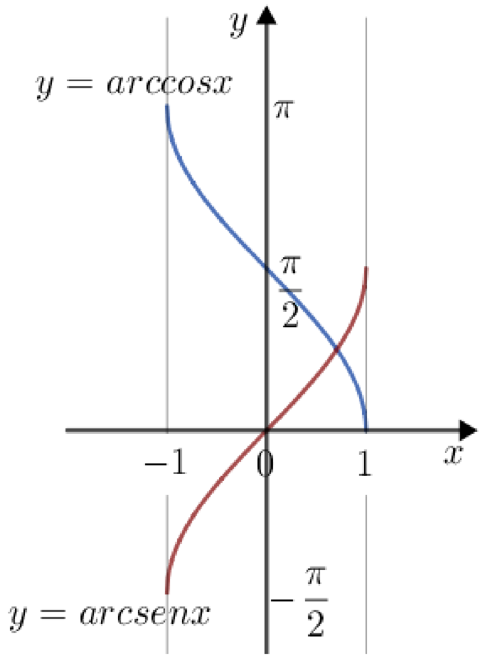


Figura 2.31: Funciones arcoseno y arcocoseno.

3. **Función arcotangente.** La función inversa a $y = \operatorname{tg} x$,es $y = \operatorname{arc\,tg} x$; que también se designa por $y = \operatorname{tg}^{-1} x$. La función $y = \operatorname{tg} x$, es monótona en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (creciente), y su rango es $(-\infty, \infty)$, entonces, el dominio de la función $y = \operatorname{arc\,tg} x$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Fig.2.32).

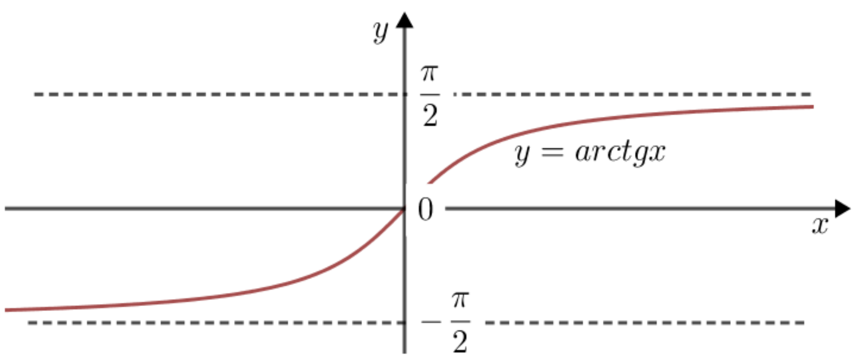


Figura 2.32: Función arcotangente.

4. **Función arcocotangente.** La función inversa a $y = \cot x$, es $y =$arccot x; que también se designa por $y = \cot^{-1} x$. La función $y = \cot x$, es monótona en el intervalo $(0, \pi)$ (decreciente), y su rango es $(-\infty, \infty)$, entonces, la función $y =$arccot x, tiene como dominio el intervalo $(-\infty, \infty)$ y como rango $(0, \pi)$ (Fig.2.33).

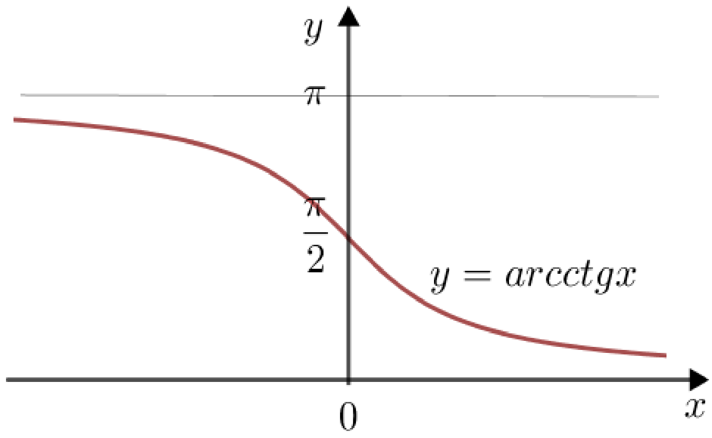


Figura 2.33: Función arcocotangente.

5. **Función arcosecante.**La función inversa a $y = \sec x$, es $y =$arcsec x; que también se designa por $y = \sec^{-1} x$. La función $y = \sec x$, está definida para los valores de $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Pero en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la función no es monótona, ya que para $\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ decrece desde ∞ hasta 1, y para $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ crece en $[1, \infty)$. Entonces, se toma como dominio de la función $y =$arcsec x el intervalo $[1, \infty)$ y como rango $[0, \frac{\pi}{2})$ (Fig.2.34).

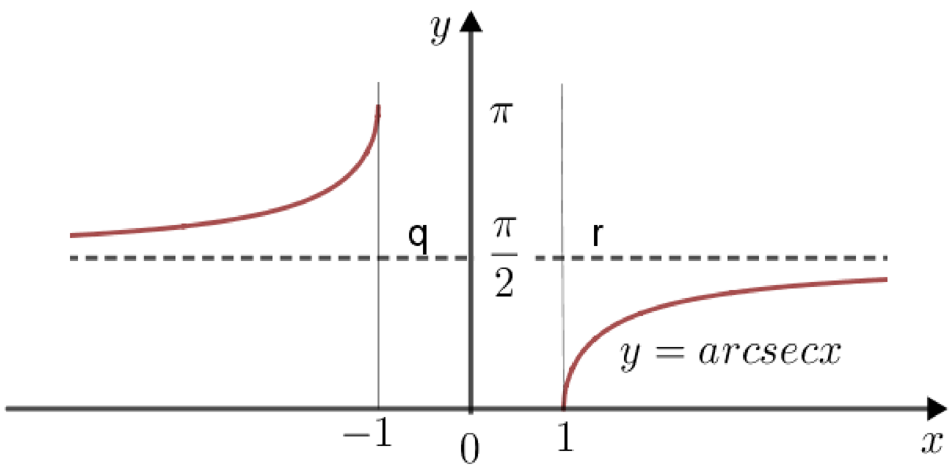


Figura 2.34: Función arcosecante.

6. **Función arcocosecante.** La función inversa a $y = \csc x$, es $y =$ arccsc x; que también se designa por, $y = \csc^{-1} x$. La función $y = \csc x$, está definida para los valores $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Pero como en el caso anterior, no es monótona en cada intervalo donde existe. Así, crece en $-\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}$, desde $-\infty$ hasta -1 y decrece en $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, desde -1 hasta $-\infty$; decrece en el intervalo $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ desde $(\infty, 1]$, y crece en $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$, desde 1 a ∞. Por lo tanto, se toma como dominio de la función arccsc x los intervalos $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ y como rango $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ (Fig.2.35).

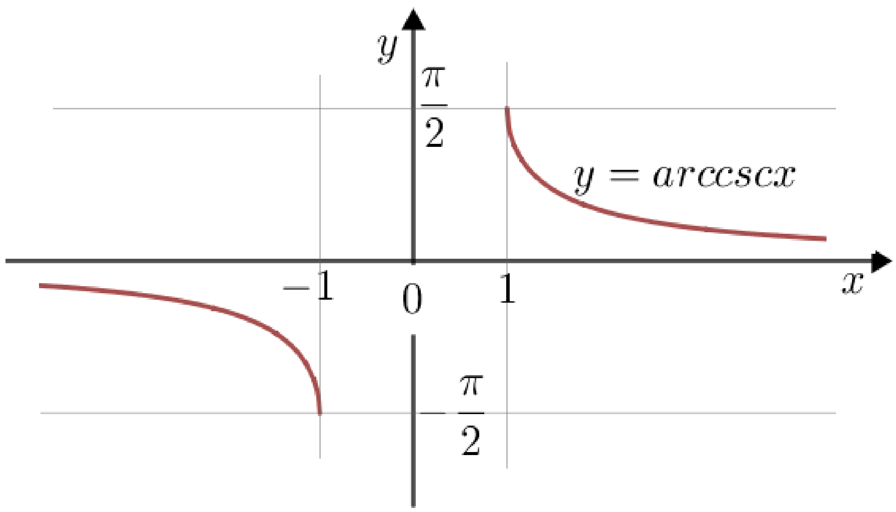


Figura 2.35: Función arcocosecante.

2.9.6. Funciones hiperbólicas

En muchos aspectos las funciones hiperbólicas son análogas a las trigonométricas. Se definen en función de exponentes positivos y negativos de la variable x. Se consideran las siguientes:

1. **Función seno hiperbólico.** $y =$sh $x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ Su campo de existencia o dominio, son todos los números reales $D_f : \mathbb{R}$.

   Simetría: $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$, función impar (Fig.2.36).

2. **Función coseno hiperbólico.** $y =$ch $x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, como la anterior, su dominio son todos los reales $D_f : \mathbb{R}$.

   Simetría: $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$, función par (Fig.2.36).

   Las gráficas $y =$sh x e $y =$ch x son la diferencia, la primera, y la suma la segunda, de las funciones $y = \frac{e^x}{2}$ e $y = \frac{e^{-x}}{2}$.

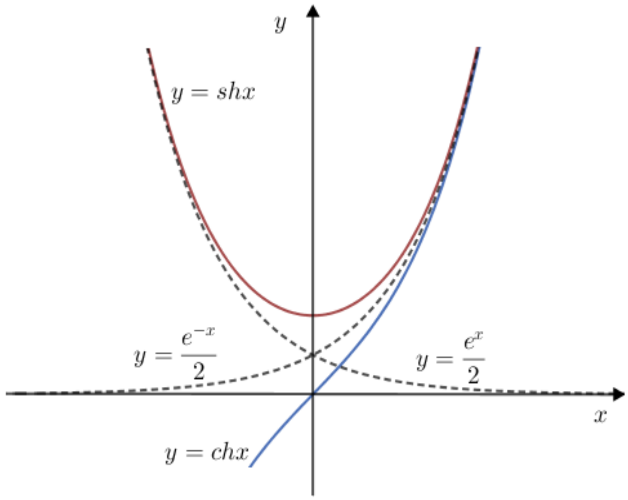


Figura 2.36: Función seno y coseno hiperbólicos.

3. **Función tangente hiperbólica.** $y = thx = \frac{shx}{chx}$, D_f : el coseno hiperbólico no se reduce a cero en todo su dominio, por tanto la tangente hiperbólica es continua para todo valor x de los números reales. Dado que el sh x es función impar y el ch x es par, la th x es impar (Fig.2.37).

4. **Función cotangente hiperbólica.** $y = cthx = \frac{chx}{cshx}$, $D_f : shx \neq 0, x \neq 0$.

   Así como la anterior, siendo el seno hiperbólico función impar y el coseno par, su relación es impar (Fig.2.37).

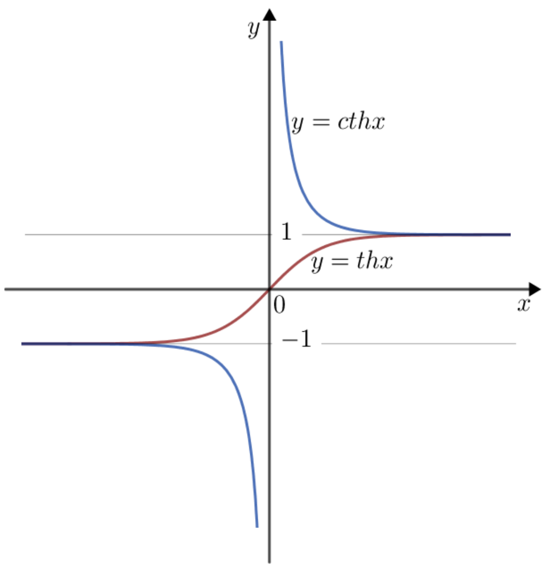


Figura 2.37: Función tangente y cotagente hiperbólicas.

5. **Función secante hiperbólica.** $y = sechx = \frac{1}{chx}$, el dominio de esta función son todos los reales. Siendo el chx función par, la $sechx$, también lo es (Fig.2.38).

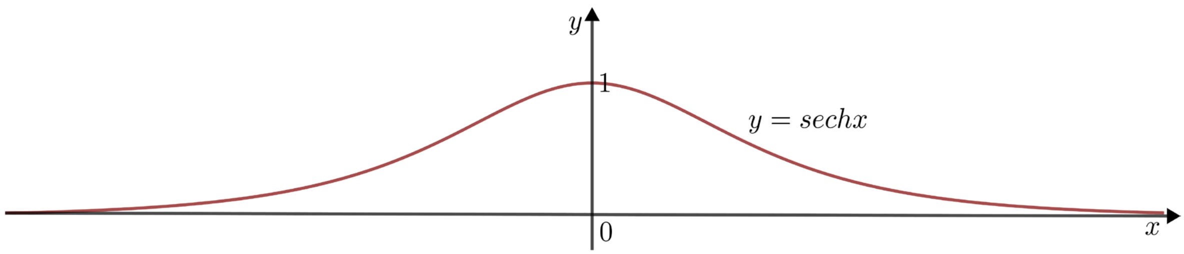


Figura 2.38: Función secante hiperbólica.

6. **Función cosecante hiperbólica.** $y = cschx = \frac{1}{shx}$, $D_f : shx \neq 0$, $e^x - e^{-x} \neq 0$, $x \neq 0$ (Fig.2.39). Esta función es impar como el shx.

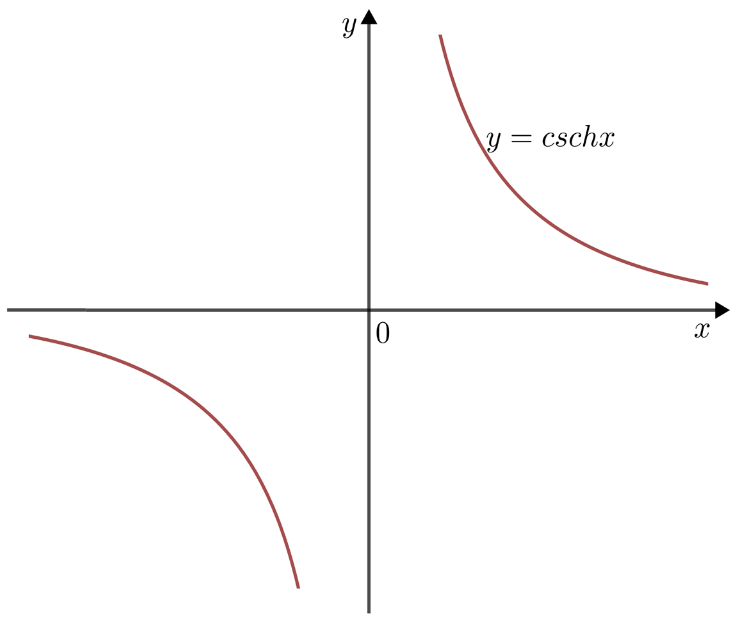


Figura 2.39: Función cosecante hiperbólica.

2.9.7. Funciones hiperbólicas seno y coseno inversas

1. **Función seno hiperbólico inversa.** o argsh x, o también ash x (Fig.2.40).

$$y = \mathrm{sh}^{-1}x = \mathrm{ash}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

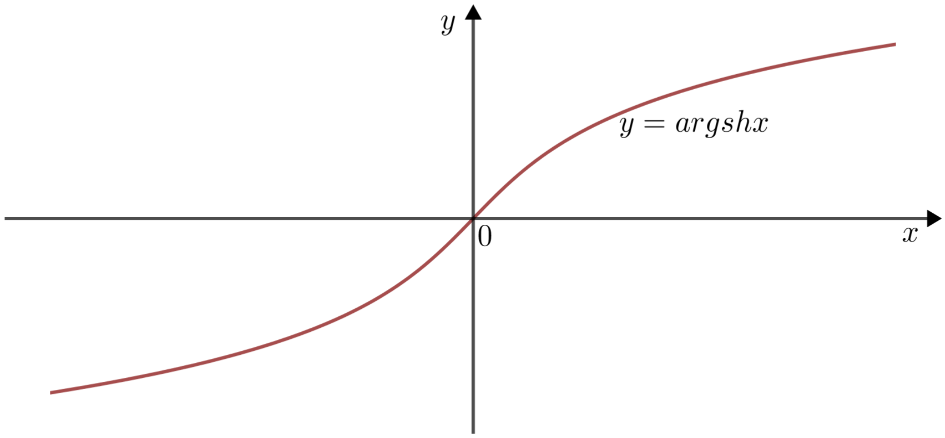


Figura 2.40: Función seno hiperbólico inverso.

2. **Función coseno hiperbólico inversa.** o argch x, o también ach x (Fig.2.41).

$$y = \mathrm{ch}^{-1}x = \mathrm{ach}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

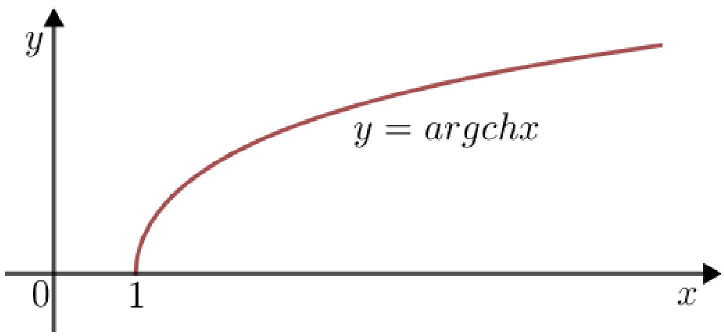


Figura 2.41: Función coseno hiperbólico inverso

2.10. Campo de definición y campo de variación de una función

Definición. El conjunto de los valores de la variable independiente, para los cuales se determina los valores de la función, en virtud de las operaciones f se llama *dominio de definición de la función* o su *campo de existencia.*

El conjunto donde la función toma sus valores, se llama *codominio* o *rango* de la misma.

Es decir, por dominio de definición de una función f, se entiende el conjunto de todos los valores de x, para los cuales la fórmula que determina la función, tiene sentido.

Este dominio en la recta real puede ser uno o más intervalos, uno o varios puntos separados, o la combinación de unos y otros.

2.11. Restricciones del dominio de una función

1. **Reducción a cero del denominador.** Los valores de x, para los cuales el denominador se reduce a cero (lo que determina que la expresión analítica de una función pierda sentido), no son parte del dominio de una función.

   Ejemplos.

   a) La función: $y = \frac{1}{x}$ para cuando $x = 0$, no existe. El dominio de una función se denota D_f. Entonces, para $y = \frac{1}{x}, D_f : x \neq 0$.

   b) Las funciones: $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \sec x$, $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$; $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; cuando $\cos x = 0$ no están determinadas, es decir, D_f:$\cos x \neq 0, x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$.

2. **Raíces pares.** Las funciones reales pierden sentido cuando x toma valores que convierten en negativo el radicando de raíces con índice par.

   Ejemplos.

   a) $y = \sqrt{x}$; $D_f : x \geq 0$ ya que para $x < 0$ la función no existe

   b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$; $D_f : \frac{x-1}{x+2} \geq 0$ $(x + 2 \neq 0)$;
   $x - 1 \geq 0 \to x \geq 1x + 2 > 0 \to x > -2$
   $x - 1 \leq 0 \to x \leq 1x + 2 < 0 \to x < -2$

$x-1$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
		-2	1

   Por lo que: $D_f : (-\infty, -2)U[1, \infty)$.

3. **Expresiones con logaritmos.** No forman parte del dominio de una función los valores de x, que convierten en negativa una expresión bajo el signo de logaritmo, o que la reduzcan a cero.

   Ejemplos.

   a) $y = \log(x + 3)$; $D_f : x + 3 > 0 \to x > -3$

   b) $y = \log_2(3 - 2x)$; $D_f : 3 - 2x > 0 \to x < \frac{3}{2}$

Tampoco forman parte del dominio de una función con logaritmos, los valores de x, para los cuales la base del logaritmo se convierta en negativa, en cero, o en 1.

Ejemplo. $\log_x 2$, $D_f : (-\infty, 1)U(1, \infty)$

Las anteriores son las restricciones más frecuentes, pero no las únicas. Sin embargo, para cada caso concreto, se especificaran otras, según se presenten.

2.12. Ejercicios I

1. Representar en la recta real los puntos:

   a)$\frac{1}{3}$ b)-2 c)$\frac{2}{5}$ d)3 e)$\frac{8}{5}$

2. Construir la representación de los puntos:

   a)$\sqrt{2}$ b)$-\sqrt{5}$ c)$\sqrt{7}$ d)$\sqrt{10}$ e)$\sqrt{11}$

3. Hallar:

   a)$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, si $f(x) = x3 - 6x^2 + 11x - 6$

   b)$f(0)$, $f(-\frac{3}{4})$, $f(-2)$, $f(\frac{1}{5})$, si $y = \sqrt{1 + x^2}$

4. De las funciones siguientes, establecer cuáles son inyectivas, cuáles sobreyectivas y cuales biyectivas:

   a)$f(x) = \frac{1}{x}$ b)$f(x) = x^2$ c)$y^2 = x$ d)$y = 5$ e)$f(x) = x^3$

5. Hallar las inversas de las siguientes funciones:

   a)$y = 3x - 1$ b)$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ c)$y = \frac{x}{x-2}$ d)$f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

6. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$, hallar:

   a)$f(-x)$ b)$f(\frac{1}{x})$ c)$\frac{1}{f(x)}$

7. Escribir una sola expresión que exprese la función: $\begin{cases} 0, six \leq 0 \\ x, six > 0 \end{cases}$ mediante la utilización del símbolo de valor absoluto.

8. Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

   a)$y = \sqrt{x + 1}$ b)$y = \operatorname{arcsen} \log \frac{x}{10}$ c)$y = \sqrt{x^2 - 2}$ d)$y = \sqrt{\frac{x-1}{1-x^2}}$ e)$y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$

   f)$y = \ln \frac{1-x^2}{x+2}$ g)$y = \sqrt{x - x^3}$ h)$y = \log \frac{2+x}{2-x}$ i)$y = \log \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ j)$y = \arccos \frac{2x}{1+x}$

   k)$y = \frac{x}{4-x^2}$ l)$y = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$ m)$y = -\sqrt{x} + \frac{1}{x+2}$

9. Sea $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$ hallar:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f(x)\right]$$

10. Establecer la simetría de las siguientes funciones:

a)$f(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$ b)$f(x) = \sqrt{1+x+x^x} - \sqrt{1-x+x^2}$ c)$f(x) = \ln|x|$

d)$f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$ e)$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

11. Construir las gráficas de las funciones siguientes, estableciendo el dominio y simetría:

a)$y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$ b)$y = y_0 + (x-1)^2$ para $y_0 = 0, 1, -2, -3$ c)$y = (1-x)^3 + 2$

d)$y = x^3 - 3x + 2$ e)$y = \frac{x-2}{x+2}$ f)$y = \frac{2x-3}{3x+2}$

g)$y = x + \frac{1}{x}$ h)$y = \frac{x^2}{x+1}$ i)$y = \frac{1}{x^3}$

j)$y = \frac{10}{x^2+1}$ k)$y = \frac{2x}{1+x^2}$ l)$y = \sqrt[3]{x^2}$

m)$y = \pm x\sqrt{x}$ n)$y = \operatorname{sen}(nx)$ donde $n = 2, \frac{1}{2}$ ñ)$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{4-x}}$

o)$y = 2\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$ p)$y = A\operatorname{sen} x$ para $A = 1, \frac{1}{2}, -2$ q)$y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$

r)$y = x + \operatorname{sen} x$ s)$y = \operatorname{sen}(x - \varphi)$ donde $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \pi$ t)$y = x\cos x$

u)$y = (\operatorname{tg} x)^2$ v)$y = a^x$ donde $a = 3, \frac{1}{3}, |x|, -\frac{1}{x^2}$ w)$y = \log\frac{1}{x}$

x)$y = \ln(\ln x)$ y)$y = \log x^2$ z)$y = \log^2 x$

12. Construir las gráficas de las funciones siguientes, dadas en forma paramétrica:

a)$x = 10cost, y = sent$ (elipse) b)$x = t - t^2, y = t^2 - t^3$

c)$x = 2^t + 2^{-t}, x = 2^t - 2^{-t}$ (rama de una hipérbola)

13. Construir las gráficas de las funciones dadas en forma implícita:

a)$y^2 = 2x$ (parábola) b)$xy = 12$ (hipérbola)

c)$y^2 = x^2(100 - x^2)$ d)$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (elipse)

e)$x^2 + y^2 = 4$

CAPÍTULO 3

Límites y continuidad. Concepto de límite. Puntos y clases de discontinuidad. Complementos

El límite de una función, es otro concepto fundamental de las matemáticas, particularmente, del análisis matemático.

Así mismo, la noción de continuidad de una función es una importante propiedad de las funciones y que de alguna manera, tiene el mismo sentido en matemáticas, que en el lenguaje cotidiano. Cuando se dice que f es *continua* en $x = a$, significa que su gráfica no sufre interrupciones en ese punto, ni saltos o huecos.

3.1. Acercamiento al concepto de límite de una función

Se dice que la función $f(x)$ tiene un límite L, si cuando los valores de x se acercan a un número x_0, los valores de la función se acercan tanto como se quiera al número L. Simbólicamente se denota:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

y se lee: “ el límite de la función $y = f(x)$ tiende a L, cuando x tiende a x_0” (definición no formal).

Para cuando $x = x_0$, la función puede no tomar el valor de L y en general, puede no estar definida en este punto. Si cuando $x \to x_0$ (x tiende a x_0), la función $f(x)$ crece ilimitadamente, entonces se dice, que esta función tiende a infinito, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

También se dice que este es un *límite infinito*.

Límite al infinito. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ es un límite donde $x \to \pm\infty$, o sea, que x tiende a $(+)$ o $(-)$ infinito (toma valores mas y mas grandes en valor absoluto).

Límites laterales. Si la gráfica de la función no está definida en el punto $x = a$, o es discontinua en él (sufre una interrupción en ese punto), entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe, pero se necesita conocer el comportamiento de la función cuando $x \to a$ por la izquierda, por la derecha o por ambos lados.

Definición. Se dice que L_1, es el *límite de una función* $f(x)$ cuando $x \to a$ por la izquierda y su notación es: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ si x se acerca a a tomando valores ligeramente menores que a. Así mismo, L_2 es el límite de la función cuando $x \to a$ por la derecha y su notación es $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ si x se acerca a a tomando únicamente valores ligeramente mayores que a (Fig.3.1).

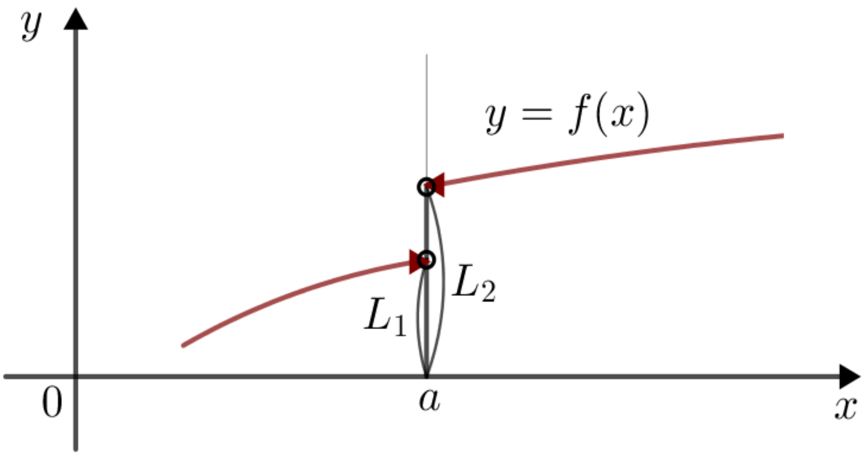


Figura 3.1: Límite de una función.

Ejemplos.

1. Sea la función $y = \frac{1}{x}$, su dominio $D_f : x \neq 0$, es decir, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ pero hay una diferencia cuando se acerca a cero por la izquierda y cuando se acerca por la derecha, entonces: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, sin embargo, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ un número finito.

   Las notaciones: $x \to a^-$ y $x \to a^+$, significan que existen límites laterales y lo signos $(-)$ y $(+)$ como exponentes, corresponden a "x tiende a a por la izquierda" y "x tiende a a por la derecha".

2. Sea la función $y = \operatorname{arc\,tg} x$, cuando $x \to +\infty$, la función tiende a $\frac{\pi}{2}$, y cuando $x \to -\infty$, la función tiende a $-\frac{\pi}{2}$, pero $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg} x = \infty$, la función crece indefinidamente (Fig.3.2).

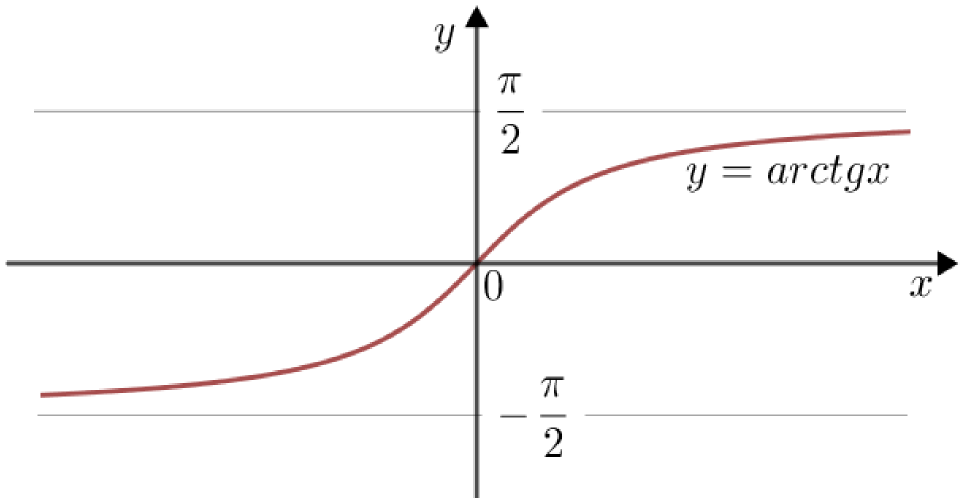


Figura 3.2: $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$.

3.2. Continuidad de una función. Puntos de discontinuidad

Intuitivamente se puede decir que una función es continua si su gráfica no sufre ni saltos ni interrupciones, es decir, se realiza sin levantar el lápiz del papel, de un solo trazo.

Definición de continuidad de una función en un punto

La función $y = f(x)$ se llama continua en el punto $x = x_0$ si:

1. $f(x_0)$ existe, es decir, la función está definida en $x = x_0$.
2. Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ donde L es un número finito.
3. El $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ es decir, que el valor del límite de la función, es igual al valor de la función en el punto sin importar la forma en que x se acerque a x_0.

Si cuando $x \to a$ una de las anteriores condiciones no se cumple, o sea, la función no está definida en $x = a$, o no existe el límite de la función cuando $x \to a$, o $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ entonces, en $x = a$ la función tiene un punto de discontinuidad, y a es un punto de discontinuidad de la función.

Ejemplos.

1. La función $y = \frac{1}{x-1}$, cuando $x = 1$, es discontinua ya que $f(1)$ no existe, no está definida en el punto 1.
2. La función $y = \operatorname{tg} x$, tiene un número infinito de puntos de discontinuidad cuando $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, donde $k \in \mathbb{Z}$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$.

Clases de discontinuidad de una función

Sea $x = a$ un punto de discontinuidad de la función $y = f(x)$, donde, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$ son números finitos, pero $f(a^-) \neq f(a^+)$, en este caso se dice que la función es discontinua en el punto $x = a$, y que $a$es un *punto de discontinuidad de primera clase o de primer género*.

Si en particular $f(a^-) = f(a^+)$, se dice que a es un *punto de discontinuidad de primera clase evitable o removible*.

Los puntos de discontinuidad de una función que no son de primera clase, se llaman *puntos de discontinuidad de segunda clase o de segundo género*, entre los que se incluyen los puntos de discontinuidad esencial o infinita.

Ejemplos. Determinar los puntos de discontinuidad y su clase para las siguientes funciones:

1. $y = \frac{senx}{|x|}$, $D_f : x \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{|-x|} = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|} = 1$, como $-1 \neq 1$, entonces, $x = 0$, es un punto de discontinuidad de la función de primera clase.

2. $y = \frac{1}{x-2}$, $D_f : -2 \neq 0$, $x \neq 2$, $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$, $x = 2$ es un punto de discontinuidad de la función de segunda clase o esencial.

3. $y = \frac{x^2-1}{x-1}$, $D_f : x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$, como la operación se repite cuando $x \to 1^-$ y cundo $x \to 1^+$ el resultado es 2, por tanto, $x = 1$ es un punto de discontinuidad evitable o removible.

3.3. Ejercicios II

Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

a)$y = \frac{x^2}{x-2}$ b)$y = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|$ c)$y = \frac{1+x^3}{1+x}$ d)$y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$ e)$y = \frac{|x|}{x}$ f)$y = e^{\frac{1}{x+1}}$

g)$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ h)$y = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$ i)$y = \frac{1-\cos x}{x^2}$ j)$y = \frac{(1+x)^2-1}{x}$ k)$y = \frac{x^3+1}{x+1}$ l)$y = \frac{x+1}{x^2-1}$

3.4. Notas complementarias sobre funciones

3.4.1. Signos y ceros de una función (interceptos)

En general, con la variación del argumento de la función, esta puede tomar valores tanto positivos, negativos o iguales a cero.

Para un valor positivo de la función ($f(x) > 0$), la gráfica de la misma, se sitúa por encima del eje de abscisa x; para los negativos ($f(x) < 0$) por debajo, y los ceros de la función ($f(x) = 0$) se sitúan en el eje x, (son puntos de corte o de tangencia de la gráfica de la función con el eje de abscisas).

Frecuentemente, para la construcción de las gráficas de las funciones, es necesario hallar los intervalos en los cuales la función mantiene un determinado signo.

Es evidente, que la función puede cambiar de signo (si es continua), únicamente en los puntos en que toma valores iguales a cero o en los puntos de discontinuidad (si es discontinua). Entonces, basta encontrar los ceros de la función ($f(x) = 0$), para determinar los intervalos donde la función mantiene un determinado signo.

Como para hallar los ceros de la función es necesario resolver la ecuación $f(x) = 0$, entonces son (los ceros) raíces de esta ecuación, donde el número de ceros es igual al número de raíces de la ecuación de diferentes valores. Por ejemplo, la función $y = \operatorname{sen} x$, cambia de signo en los puntos $x = k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$ (Fig.3.3).

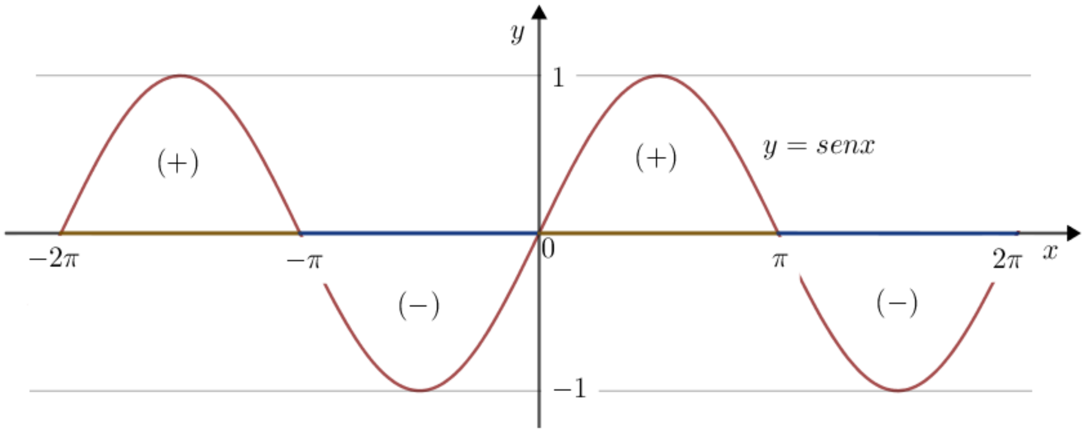


Figura 3.3: Signos y ceros de una función.

Es necesario advertir que no siempre, una función cambia de signo en los ceros o en los puntos de discontinuidad de la misma.

3.4.2. Extremos de una función: Valores máximos y mínimos

La función $f(x)$ tiene un máximo en el punto $x = a$ en el cual $f(a) \geq f(x)$, es decir, existe una vecindad del punto $x = a$ en la cual $f(a)$ es el mayor valor de la función.

Si cuando $x = a$, se cumple que $f(a) \leq f(x)$, es decir, en la vecindad de a, $f(a)$ es el menor valor de la función, se dice entonces que $f(a)$ es un mínimo de $f(x)$.

Ejemplos.

1. La función $y = x^2$ tiene un mínimo en el punto $x = 0$ (Fig.2.13).

2. La función $y = \frac{1}{1+x^2}$ alcanza el valor máximo en el punto $x = 0$ (Fig.3.4).

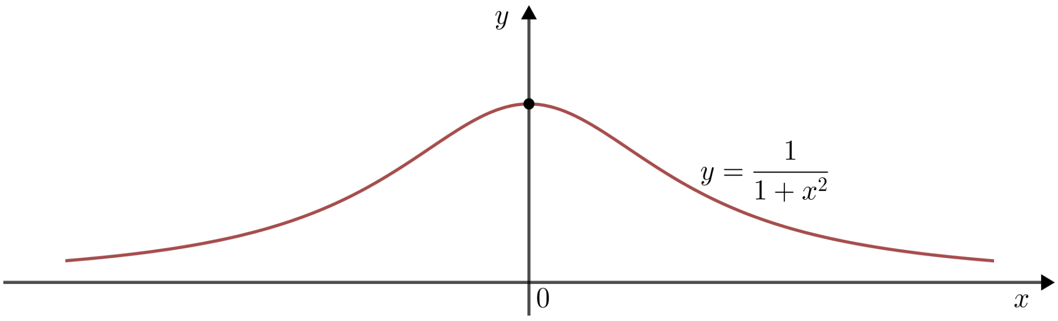


Figura 3.4: $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Nota: La función alcanza su valor máximo o su valor mínimo en un punto dado a, solo en relación a los puntos que están en la vecindad de a, es decir, estos valores no necesariamente son el mayor o el menor valor de la función en donde está definida.

3.4.3. Asíntotas

La recta A se llama *asíntota* a la curva $y = f(x)$, si la distancia d del punto variable M de la curva hasta esta recta, tiende a cero ($d \to 0$), cuando M se desplaza al infinito (Fig.3.5).

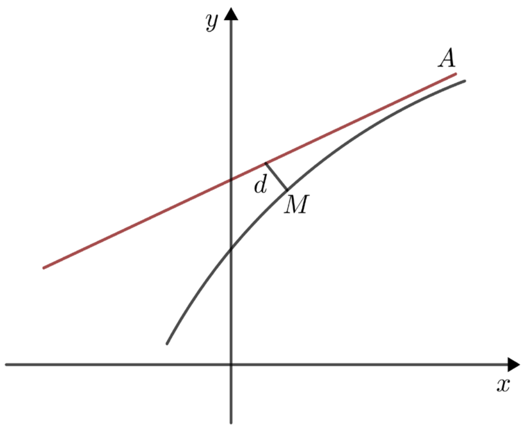


Figura 3.5: Asíntotas.

Las asíntotas pueden ser: verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntotas verticales. Son aquellas que se disponen paralelamente al eje $0y$; algunas veces, este (el eje), sirve como asíntota.

Generalmente, en los puntos de discontinuidad de una función, existen asíntotas verticales, es decir, cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ donde a es un punto de discontinuidad, se dice entonces, que $x = a$ es asíntota vertical.

Ejemplos.

1. La función $y = \frac{1}{x}$ está definida para $x \neq 0$ además, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ por lo que $x = 0$ es asíntota vertical (Fig.2.21).

2. La función $y = \tan x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ tiene asíntotas verticales en los puntos $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$ ya que $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$ y $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$, así mismo, $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} \tan x = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^+} \tan x = \infty$.

Asíntotas horizontales. Son las que se disponen paralelamente al eje x_0; particularmente, este puede ser asíntota horizontal si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ entonces L es asíntota horizontal.

Ejemplos.

1. La función $y = 2^{\frac{1}{x}}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$ también tiene asíntota vertical en $y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$ aunque $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$ (Fig.3.6).

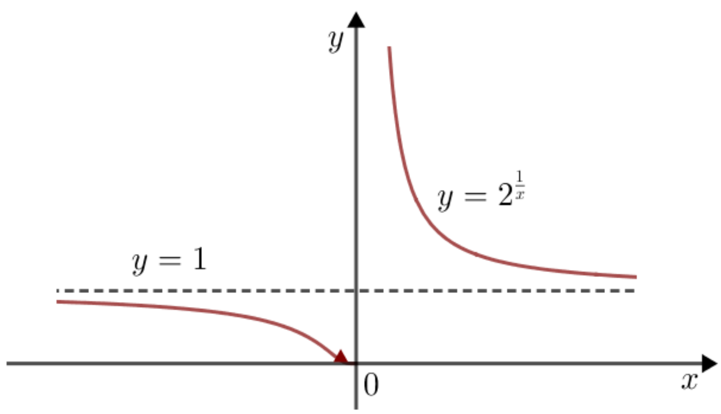


Figura 3.6: Asíntotas verticales y horizontales.

2. La función $y = \frac{1}{x}$ además de tener asíntota vertical en $x = 0$, tiene como asíntota horizontal el eje x: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ (ver Fig.2.21).

Por tanto, estas funciones tienen asíntotas verticales y horizontales.

Asíntotas oblicuas. Una recta es asíntota oblicua si está dispuesta formando un ángulo con los ejes x e y. La recta $y = kx + b$ es asíntota oblicua donde $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx]$
Si el primero de estos límites no existe o es igual a $\pm\infty$, entonces la gráfica no tiene asíntotas oblicuas.

Ejemplo.

La función $y = \frac{x^2}{x+1}$ tiene asíntota vertical en $x = -1$: $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x+1} = \infty$.

Además tiene asíntota oblicua: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^2}{x+1} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{x}{x+1} = -1$ por lo que la recta $y = x - 1$ es asíntota oblicua de esta función (Fig.3.7).

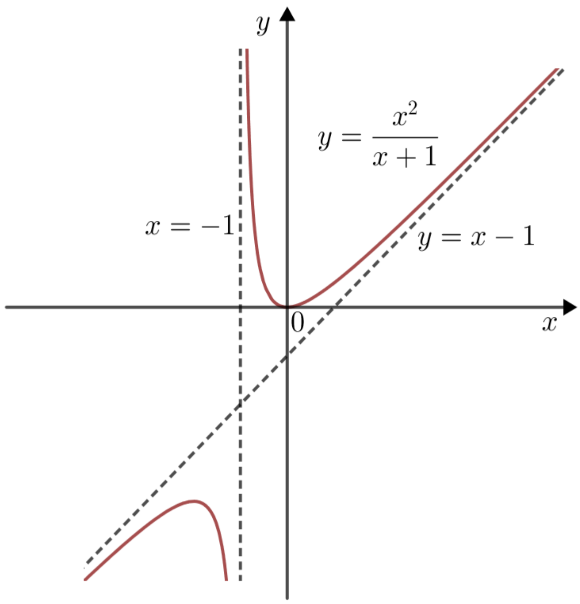


Figura 3.7: Asíntotas oblicuas.

En general, la recta $y = mx + b$ es asintota oblicua si $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx$.

CAPÍTULO 4

Método de análisis de una función para la construcción de su gráfica

La representación gráfica de las funciones elementales, se efectúa en el sistema coordenado rectangular en el plano - plano cartesiano.

En la matemática elemental, la construcción de la gráfica de una función se hace "por puntos", es decir, asignándole valores a la variable independiente x y obteniendo los correspondientes para y en virtud de f.

Esto es, teniendo en cuenta que la *gráfica de una función* se define como el lugar geométrico de todos los puntos del plano (x, y), que satisfacen la relación $y = f(x)$. El procedimiento consiste, como se anotó, en que se asignan valores a la variable x o argumento, y se calculan los correspondientes de la función y, conformando una tabla de parejas:

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Se disponen estos valores en el plano O_{xy} según sus coordenadas y se unen mediante una curva. Sin embargo, no son muchos los puntos que se toman, siempre queda la duda de una poca correcta construcción de la gráfica entre puntos, y muchas veces, el trazo de la curva se hace en base a supuestos. Es por esto, que, al construir la gráfica de una función, se recurre a un método en las propiedades de la misma, es decir basando en su análisis.

4.1. Orden de análisis

El orden de análisis de una función puede ser:

1. Determinación del *dominio* de definición de la función, de sus puntos de discontinuidad y clase

de los mismos.

2. *Simetría* de la gráfica de la función determinado si es par (simétrica respecto al eje y), impar (simétrica respecto al origen del sistema coordenado) o, ninguna de las dos.

3. Determinación de la *periodicidad* de la función.

4. Determinación de los *ceros de la función y los intervalos de constancia de los signos* (interceptos).

5. Hallar las *asíntotas* verticales, horizontales y oblícuas.

6. Comportamiento de la *función cuando* $x \to \pm\infty$ *o cuando los valores de* x *se acercan a los valores de las asíntotas verticales.*

7. *Máximos y mínimos de la función.*

   El análisis según este esquema se puede adelantar construyendo al tiempo, la gráfica por etapas.

8. *Estudio de la función en la vecindad de las asíntotas.*

Después, cuando la gráfica este construida totalmente, para mayor exactitud en algunos intervalos, a veces es necesario señalar ciertos valores, utilizando el método de construcción por puntos.

Se aclara el uso del esquema en general para el análisis, con ejemplos de dos clases de funciones.

1. **Función potencial, dada en forma de un producto de factores lineales**

   Se verán funciones de la forma: $y = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$.

   Está definida en toda la recta real, y en general es una función no periódica, que no tiene asíntotas (algebráica), cuando $x \to \pm\infty$ la función crece (o decrece) indefinidamente, es decir $|y| \to \pm\infty$.

   Los ceros (interceptos con el eje x) de la función, son los valores $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_n$, en estos puntos la función cambia de signo y entre dos ceros vecinos, el signo de la función se mantiene y consecuentemente a la continuidad de la función, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, tiene sin falta, máximos y mínimos.

   Ejemplos.

   a) Construir la gráfica de la función $y = x(2x - \frac{3}{2})(\sqrt{2} - x)(x + \frac{\pi}{2})$.

Solución. De acuerdo a lo expuesto anteriormente, queda por analizar el comportamiento de la función cuando $\to \pm\infty$ y determinar los ceros (interceptos) de la función.

Cuando x crece indefinidamente, es decir, cuando $x \to \pm\infty$, la función decrece indefinidamente, o sea $y \to -\infty$; análogamente, cuando $x \to -\infty$, $y \to -\infty$.

Los ceros de la función (interceptos con el eje x), son $x = \frac{3}{4}, x = \sqrt{2}, x = -\frac{\pi}{2}, x = 0$

Ahora la construcción de la gráfica de la función no causa dificultad (Fig.4.1).

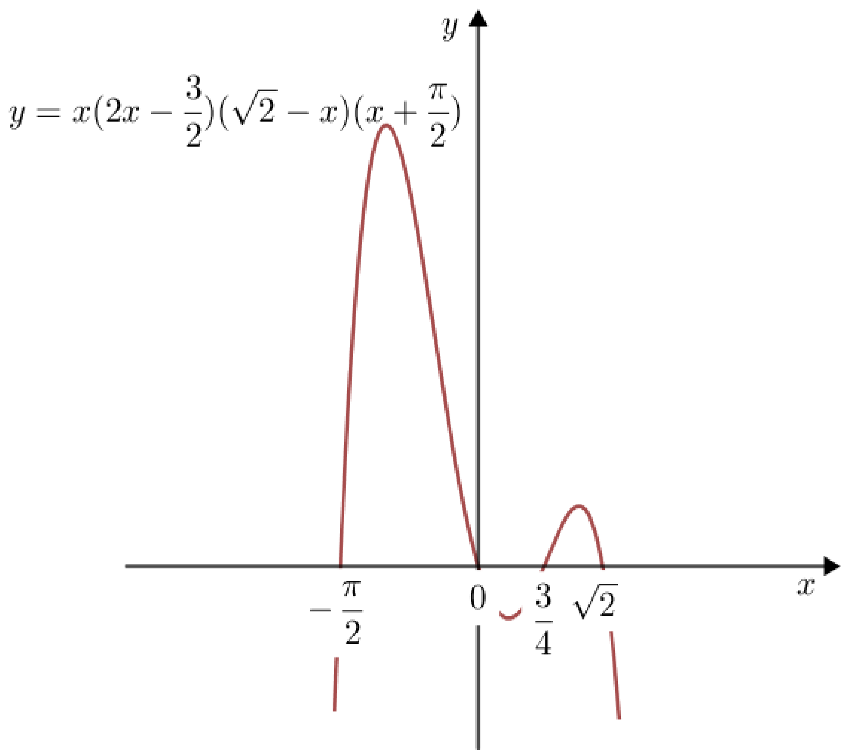


Figura 4.1: $y = x(2x - \frac{3}{2})(\sqrt{2} - x)(x + \frac{\pi}{2})$.

Para mayor exactitud de la gráfica se puede calcular algunos valores de la función en los intervalos entre ceros. Es necesario advertir que si la función está dada en forma de polinomio: $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, entonces, hay que representarla en forma de producto (si es posible), de factores lineales de la forma $(x - a)$.

b) Sea la gráfica de la forma $y = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, los ceros de esta función son $x = a$, $x = -a$, al disminuir el valor de $|a|$, los ceros de la función se van acercando y cuando $a = 0$, $(y = x^2)$, coinciden en un punto, es decir, se tendrá un cero de doble representación: en este punto la gráfica tendrá un punto de tangencia con el eje 0_x (Fig.4.2).

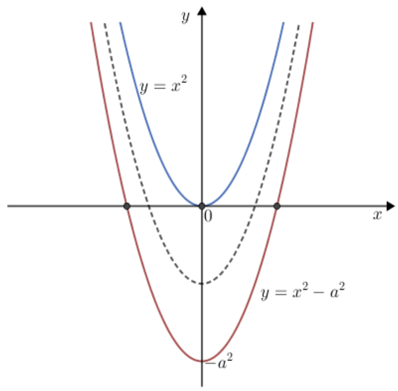


Figura 4.2: $y = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.

c) Sea ahora la parábola cúbica de la forma $y = x(x - a)(x + a)$. Los ceros de la función son: $x = a$, $x = -a$, $x = 0$.

Solución.

Cuando se disminuye el valor de $|a|$ los ceros se acercan (el uno al otro), y cuando $a = 0$, se tiene un cero múltiple de triple representación: la gráfica tiene un punto de tangencia con el eje x y corta este eje (Fig.4.3).

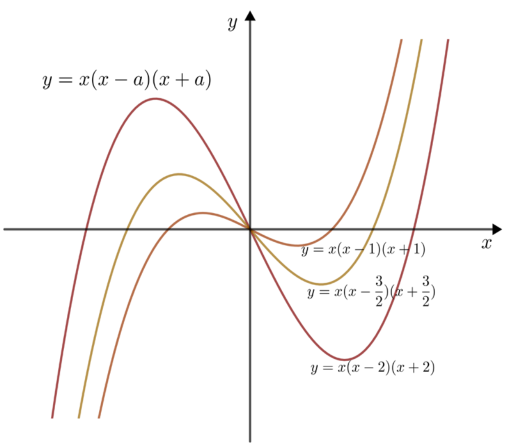


Figura 4.3: $y = x(x - a)(x + a)$.

Los dos ejemplos vistos muestran que aparecen ceros múltiples y puntos de tangencia de la gráfica con el eje x. Ahora se tiene la posibilidad de construir la gráfica de una función de la forma: $y = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_n)^{k_n}$ donde $k_1, k_2, \dots, k_n$ son números naturales.

Entonces, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

a) Si el cero es de multiplicidad par, entonces, la gráfica de la función no corta el eje x (es tangente a él), es decir, la función no cambia de signo; si el cero es de multiplicidad impar, en este caso y en el sencillo (de multiplicidad uno), la gráfica de la función corta el eje x.

b) Si el cero es múltiplo (par o impar), entonces la gráfica es tangente al eje x; si el cero no es múltiple o sencillo, entonces la gráfica de la función no es tangente al eje x (solamente lo corta).

Ejemplo. Construir la gráfica de la función $y = (x+1)^4(x-2)^3(1-x)^2x$.

Solución. está claro que cuando $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$.

Se señala en el eje x los ceros de la función: $x = -1$ (tetra-múltiple), $x = 0$ (sencillo), $x = 1$ (doble), $x = 2$ (de multiplicidad tres).

Siguiendo la regla, se va a construir la gráfica, siguiendo a lo largo del eje x, por ejemplo, de izquierda a derecha (es decir, desde $-\infty$, hasta $+\infty$) así como cuando $x = -1$; $y = 0$, entonces la función $y = (x+1)^4(x-2)^3(1-x)^2x$ cuando crece x desde $-\infty$, hasta -1, decrece desde ∞ hasta cero, y su gráfica de arriba hacia abajo.

Por cuanto $x = -1$ es tetra-múltiple raíz, entonces la gráfica de la función dada en el punto $x = -1$ es tangente al eje x.

Dentro del intervalo $(-1, 0)$ la función conserva el signo positivo (ejemplo, $f(\frac{-1}{2}) > 0$), y en sus extremos se reduce a cero, por esto, en consecuencia, de la continuidad de la función analizada, esta alcanza un máximo en el intervalo.

Como la gráfica en un principio, es decir, antes del punto $x = -1$, va de arriba hacia abajo, aquí va hacia arriba, y luego después del máximo, hacia abajo y en el punto $x = 0$ (cero sencillo), sin tangencia corta el eje de abscisas, y cambia de signo la función (se vuelve negativa).

En el intervalo $(0, 1)$, la función es negativa (ejemplo, $f(\frac{1}{2}) < 0)$) y en sus extremos es igual a cero, por lo cual, en consecuencia, de la continuidad de la función, esta alcanza un mínimo en el intervalo.

Su gráfica va hacia abajo desde el punto $x = 0$, hasta el mínimo, y luego hacia arriba, y en el punto $x = 1$ es tangente al eje x ($x = -1$, raíz doble).

Luego, permaneciendo por debajo del eje x, la curva pasa por un segundo mínimo y de nuevo se acerca al eje x.

En el punto $x = 2$, la gráfica corta el eje x (y, además, es tangente a este eje), que se acompaña con un cambio de signo de la función (se vuelve positiva), la curva se aleja hacia arriba, ya que cuando $x \to +\infty$, $y \to +\infty$ (Fig.4.4).

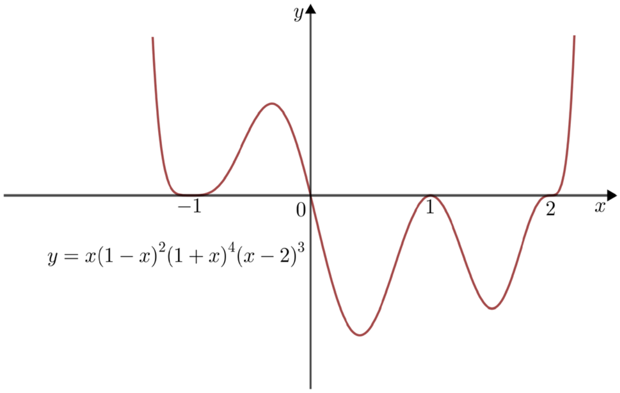


Figura 4.4: $y = x(1-x)^2(1+x)^4(x-2)^3$.

2. ***Funciones racionales (fraccionarias)***

Una función racional es una expresión de la forma: $y = A\frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_m)}$ donde $n, m \in \mathbb{Z}$.

Se puede afirmar que las funciones del parágrafo anterior son un caso particular de funciones racionales, para cuando el denominador $D(x) = 1$, además de los ceros, las funciones fraccionarias pueden tener puntos de discontinuidad y asíntotas.

Ejemplos.

a) Construir la gráfica de la función $y = \frac{x-1}{(2x-1)(2-x)}$.

Solución.

1) La función está determinada para los intervalos: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2) \cup (2, \infty)$; los puntos, $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$, son puntos de discontinuidad de la función.
2) Función no simétrica (ni par, ni impar).
3) Función no periódica.
4) La función tiene un cero cuando $x = 1$.
5) La función tiene cuatro intervalos de signo no constante, determinados por dos puntos de discontinuidad y un cero: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$.

Para determinar el signo de esta función, se toma simplemente un valor cualquiera de la misma en el intervalo y se determina el signo del factor del numerador y del denominador.

Esta comprobación muestra que, en los intervalos de signo constante, tiene correspondientemente, los siguientes signos: $(+)$, $(-)$, $(+)$, $(-)$.

Ejemplo. $f(0) > 0$, $f(\frac{3}{4}) < 0$, $f(\frac{3}{2}) > 0$, $f(4) < 0$.

6) Se analiza el comportamiento de la función cuando $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{(2x-1)(2-x)} = 0$, es decir, $y \to 0$, pero si $x \to +\infty$, $y < 0$, si $x \to -\infty$, entonces $y > 0$.

   En consecuencia $y = 0$ es asíntota horizontal; cuando $x \to +\infty$ la gráfica de la función se acerca a la asíntota desde abajo, cuando $x \to -\infty$, desde arriba.

7) La función tiene dos asíntotas verticales $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$, (donde el denominador se reduce a cero). No tiene asíntotas oblicuas, ya que cuando $x \to \mp\infty$, $y \to 0$.

8) En el numeral 6 se estudió el comportamiento de la función al acercarse a la asíntota horizontal.

Para estudiar el comportamiento de la función cerca de las asíntotas verticales, se tiene en cuenta el numeral 5.

Como a la izquierda de la asíntota $x = \frac{1}{2}$, es decir, en el intervalo $(-\infty, \frac{1}{2})$, es positiva, y a la derecha, o sea, en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$, es negativa, entonces, la gráfica de la función, acercándose a la asíntota por la izquierda, se dirige hacia arriba $(y \to +\infty)$, y por la derecha, hacia abajo $(y \to -\infty)$.

Análogamente siguiendo el comportamiento de la función cerca de la asíntota $x = 2$, se ve que por la izquierda de la misma $(y \to +\infty)$ y por la derecha $(y \to -\infty)$.

Ahora, la construcción de la gráfica se hace de manera fácil.

La función no tiene máximos ni mínimos (Fig.4.5).

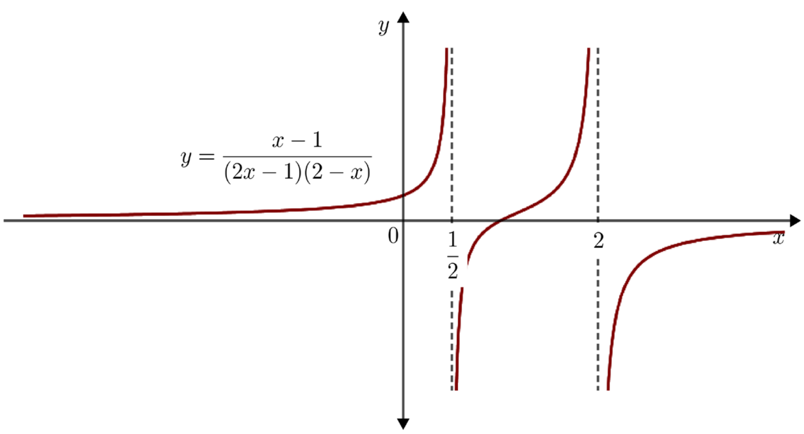


Figura 4.5: $y = \frac{x-1}{(2x-1)(2-x)}$.

b) Construir la gráfica de la función $y = \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$.

Solución. La construcción de la gráfica de esta función es análoga a la anterior.

1) El denominador, debe ser diferente de cero: $x^2 - 1 \neq 0$, $x^2 \neq 1$, $x \neq \pm 1$.

   Es decir, la función está determinada en los intervalos: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$; $x = -1$ y $x = 1$, son puntos de discontinuidad de la función.

2) La función no es ni par, ni impar (forma general).

3) La función no es periódica.

4) La función tiene un cero, $x = -\sqrt{2}$.

5) La función tiene cuatro intervalos de signo constante: $(-\infty, -\sqrt{2})$, la función es negativa; $(-\sqrt{2}, -1)$, positiva; $(-1, 1)$, negativa; $(1, \infty)$, positiva.

6) Cuando $x \to +\infty$, $y \to 0^+$; cuando $x \to -\infty$, $y \to 0^-$, consecuentemente, la recta $y = 0$, es una asíntota horizontal (las notaciones 0^+, y 0^-, significan que los valores de la ordenada se acercan a cero por encima y por debajo del eje x, correspondientemente).

7) La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$. No tiene asíntotas oblicuas.

8) Cuando $x \to +\infty$ los valores de la función decrecen, permaneciendo positiva, y su gráfica indefinidamente se acerca a la asíntota horizontal (el eje x) por arriba.

   Cuando $x \to -\infty$, los valores de la función disminuyen en valor absoluto, permaneciendo negativos, o sea, que la gráfica de la función se aproxima al eje x, por debajo.

   Conociendo el signo de la función en los diferentes intervalos, se puede determinar que, a la derecha de la asíntota $x = 1$, $\to +\infty$, a la izquierda, $y \to -\infty$; a la derecha de la asíntota $x = -1$, $y \to -\infty$, a la izquierda, $y \to +\infty$. La gráfica de la función se muestra en la figura 4.6.

9) Se puede ver, que para $x < -\sqrt{2}$, la función tiene un mínimo, y para $-1 < x < 1$, tiene un máximo. Para calcular su valor, se puede considerar la intersección de la gráfica de la función con una recta paralela al eje x, por ejemplo, con $y = a$.

   La gráfica se intercepta con la recta en dos puntos (Fig.4.6), las abscisas, se determinan mediante la ecuación:$\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} = c$, por lo que $x+\sqrt{2} = cx^2 - c$ ó $cx^2 - x - (\sqrt{2}+c) = 0$.

   $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c(\sqrt{2}+c)}}{2c}$, cuando aumenta c (la recta $y = c$, se desplaza hacia arriba), los puntos de corte intersección) se acercan uno al otro y para cierto valor $c = c_0$, los dos, coinciden.

   Esto sucede en el punto, donde se ubica el máximo de la función.

Se concluye, que el valor c_0 se puede hallar con la condición de igualar a cero el radicando (para lo cual $x_1 = x_2$):

$$1 + 4c(\sqrt{2} + c) = 0, 4c^2 + 4\sqrt{2}c + 1 = 0 \tag{4.1.1}$$

Lo establecido de igual manera se cumple para el máximo y el mínimo de la función, por lo que la última ecuación (4.1.1) determina el máximo y el mínimo de la misma.

Resolviendo esta ecuación (4.1.1) se tiene: $c_{1,2} = \frac{-4\sqrt{2}\pm\sqrt{(4\sqrt{2})^2+4{,}4}}{2{,}4} = \frac{4(-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1})}{2{,}4}$ entonces $c_1 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ y $c_2 = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Se puede calcular, ahora, los valores de x que corresponden a estos valores: $x_1 = \frac{1}{2c_1} = 1 - \sqrt{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2_2} = -1 - \sqrt{2}$.

Así, cuando $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ se obtiene un máximo: $y = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; cuando $x_2 = -1 - \sqrt{2}$, se obtiene un mínimo (Fig.4.6).

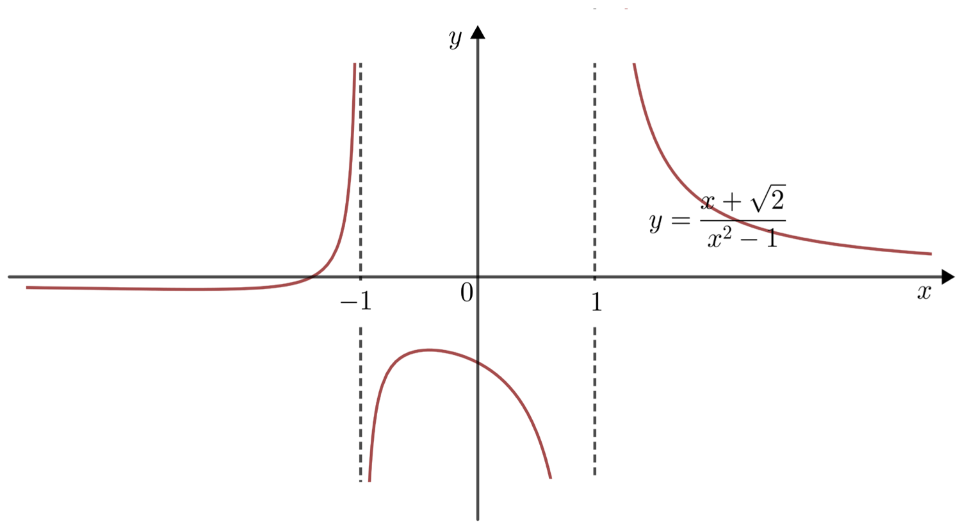


Figura 4.6: $y = \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$.

$c)$ Construir la gráfica de la función $y = \frac{(x+1)(2-x)}{2x-3}$.

Solución.

1) La función se reduce a cero (corte de la gráfica de la función con el eje x cuando $x = -1$ y $x = 2$ (interceptos).
2) El dominio de definición de la función es: $2x - 3 \neq 0$, es decir, $x \neq \frac{3}{2}$, en este punto, la función tiene una asíntota vertical.

3) Determinando los intervalos de signo constante, se ve que a la izquierda de la asíntota $x = \frac{3}{2}$, $y \to +\infty$, y a su izquierda, $y \to -\infty$. Cuando $x \to -\infty, y \to +\infty$, lo que significa es que la curva no tiene asíntota horizontal. En este caso, se comprueba si la curva tiene asíntota oblicua para lo cual: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{(x+1)(2-x)}{x(2x-3)} = -\frac{1}{2}$ y $b = \lim\limits_{x\to\mp\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\frac{(x+1)(2-x)}{(2x-3)} \frac{x}{2}) = -\frac{1}{4}$.

   Por lo tanto, la curva tiene una asíntota oblicua $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

   Se puede analizar la expresión $f(x) - (kx + b)$, cuando $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{(x+1)(2-x)}{(2x-3)} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{5}{4(2x-3)} = 0$.

   Como era de esperar, la expresión tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$, pero cuando $x \to \infty$ permanece positiva (es decir se acerca a la asíntota por encima, y negativa cuando $x \to -\infty$, lo cual significa que cuando $x \to +\infty$, la gráfica de la función se acerca a la asíntota por encima, y cuando $x \to -\infty$, se acerca, pero por debajo (Fig.4.7).

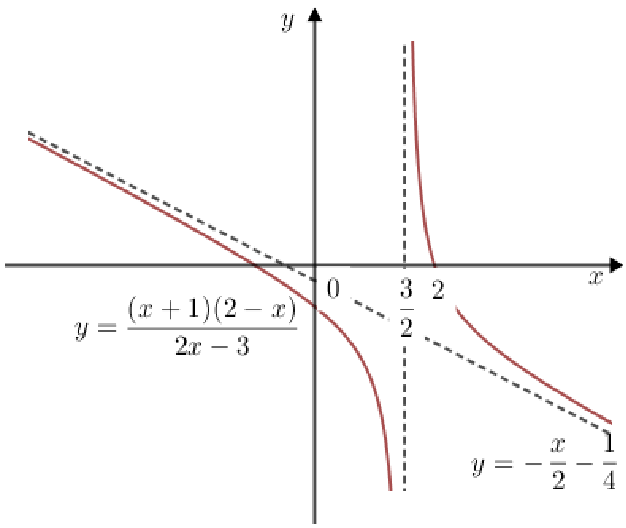


Figura 4.7: $y = \frac{(x+1)(2-x)}{2x-3}$.

d) Construir la gráfica de la función $y = \frac{x^2-3x+2}{x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x}$.

Solución.

1) El dominio de definición de la función es $D_f : x \neq 0$ (es discontinua en $x = 0$).
2) Simetría: $f(-x) = \frac{(-x-1)(-x-2)}{-x} = \frac{(x+1)(x+2)}{x} \neq f(x)$, la función no es ni par ni impar, no tiene simetría.
3) La función tiene dos ceros (interceptos con el eje O_x): $x = 1$, $x = 2$.

4) La función tiene 4 intervalos de signo constante: $(-\infty, 0)$ negativa; $(0, 1)$ positiva; $(1, 2)$ negativa; $(2, 1)$ positiva.
5) Cuando x se acerca a cero por el lado izquierdo $y \to -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x} = -\infty$ y cuando se acerca por la derecha $y \to +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x-1)(x-2)}{x} = +\infty$ por tanto, la función tiene una asíntota vertical $x = 0$, es decir, el eje O_y, y no tiene asíntota horizontal.

   Se busca si la función tiene asíntota oblicua: $K = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)}{x} = 1$ y $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{(x-1)(x-2)}{x}] = -3$

   Esta función tiene asíntota oblicua $y = x - 3$. Se puede analizar el comportamiento de la función cuando su gráfica se acerca a la asíntota oblicua, mediante la ecuación: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{(x-1)(x-2)}{x} - x + 3] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{2}{x}] = 0$.

   Se aclara que cuando $x \to +\infty$, la función se acerca a la asíntota por encima (ya que la expresión $f(x) - (kx + b)$ tiende a cero, permaneciendo positiva), y cuando $x \to -\infty$, se acerca por debajo.
6) Para hallar los máximos y mínimos, se resuelve la ecuación $\frac{(x-1)(x-2)}{x} = c$, es decir, $x^2 - (3+c)x + 2 = 0$, por lo tanto, $x_{1,2} = \frac{3+c\pm\sqrt{(3+c)^2-8}}{2}$, igualando a cero el radicando se tiene: $\sqrt{(\frac{3+c}{2})^2 - 2} = 0$, $(3+c)^2 - 8 = 0$, $(\frac{3+c}{2})^2 - 2 = 0$, $(\frac{3+c}{2})^2 = 2$, $(\frac{3+c}{2}) = \pm\sqrt{2}$, $c = \pm 2\sqrt{2} - 3$, entonces, $x_1 = \frac{3+(2\sqrt{2}-3)}{2} = \sqrt{2}$ y $x_2 = \frac{3+(-2\sqrt{2}-3)}{2} = -\sqrt{2}$.

   Cuando $x = -\sqrt{2}$, la función alcanza un máximo, y cuando $x = \sqrt{2}$, un mínimo: $y_{max} = -(3 + 2\sqrt{2})$; $y_{min} = 2\sqrt{2} - 3$ (Fig.4.8).

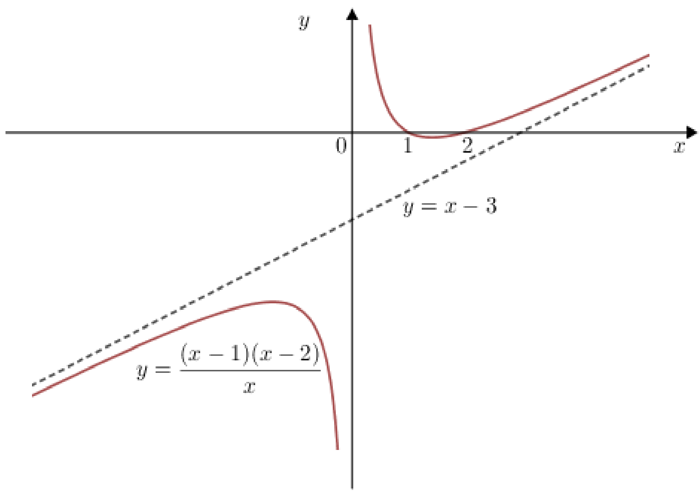


Figura 4.8: $y = \frac{(x-1)(x-2)}{x}$.

$e)$ Construir la gráfica de la función $y = \frac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)}$.

Solución.

1) $D_f : x + 3 \neq 0$, $1 - x \neq 0$, por lo anto $x \neq -3$, $x \neq 1$.
2) Simetría: $f(-x) = \frac{-x(-2x+1)}{(-x+3)(1+x)} = -\frac{x(1-2x)}{(3-x)(1+x)} \neq f(x)$ no tiene simetría.
3) La función tiene dos ceros: $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$.
4) La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -3$ y $x = 1$

$$\lim_{x\to -3^-}[\tfrac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)}] = -\infty,\ y \to -\infty$$

$$\lim_{x\to\to -3^+}[\tfrac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)}] = +\infty,\ y \to +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}[\tfrac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)}] = +\infty,\ y \to +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}[\tfrac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)}] = -\infty,\ y \to -\infty$$

Cuando x se acerca a -3 por la izquierda, $y \to -\infty$, y por la derecha, $y \to +\infty$, cuando x se acerca a 1 por la izquierda, $y \to +\infty$, y por la derecha, $y \to -\infty$.

5) La función tiene tres intervalos de signo constante: $(-\infty, -3)$, negativa; $(-3, 1)$, positiva; $(1, \infty)$, negativa.
6) La función tiende a -2 cuando $x \to \pm\infty$. $\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)}] = 2$ por lo tanto, $y = -2$ es una asíntota horizontal.

Para analizar el comportamiento de la función en los valores cercanos a la asíntota horizontal, se puede tener en cuenta la diferencia entre los valores de la función y la ordenada del punto en la asíntota $y = 2$ para un mismo valor del argumento, es decir, $\frac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)} - (-2) = \frac{-3x+6}{(x+3)(1-x)} \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.

Obviamente tiende a cero, pero permanece positiva cuando $x \to +\infty$, lo que significa que la curva se acerca a la asíntota por arriba; cuando $x \to -\infty$, la curva se acerca a la asíntota por debajo.

7) Para determinar los máximos y mínimos de la curva, se establece la ecuación: $\frac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)} = c$, es decir, $(2 + c)x^2 + (1 + 2c)x - 3c = 0$, por lo que:

$x = \frac{-(1+2c)\pm\sqrt{(1+2c)^2+12c(2+c)}}{2(2+c)} \Rightarrow (1 + 2c)^2 + 12c(2 + c) = 0$

$c = -\frac{14\pm\sqrt{(196-16)}}{16} = \frac{-7\pm\sqrt{5}}{8}$, por tanto, $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = 0,235$ y $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = 4,2$

Cuando $x = x_1$ la gráfica de la función tiene un mínimo y cuando $x = x_2$, un máximo (Fig.4.9).

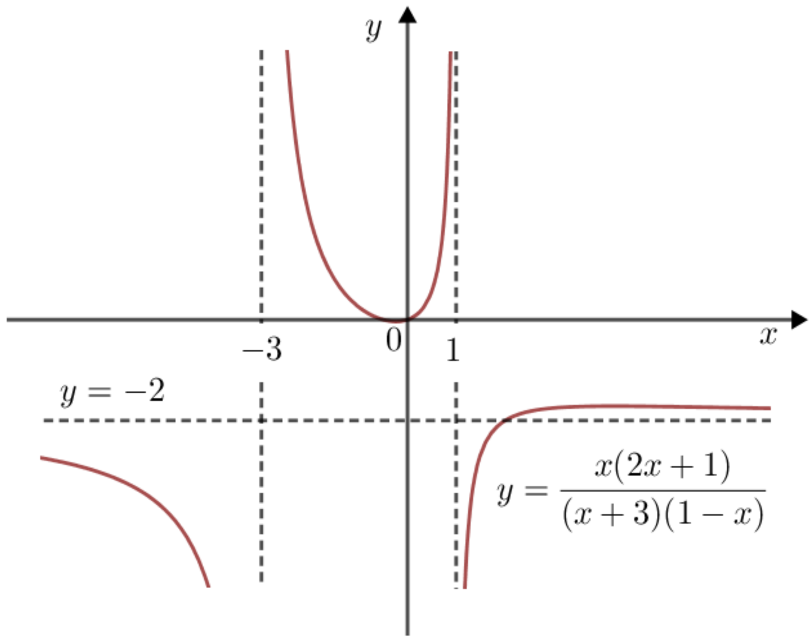


Figura 4.9: $y = \frac{x(2x+1)}{(x+3)(1-x)}$.

Como ya se anotó las funciones racional-fraccionarias, pueden tener ceros repetidos, donde el numerador se reduce a cero. Los ceros repetidos del denominador, son asíntotas múltiples y su situación es análoga a la de los ceros de la función desde el punto de vista de la construcción de la gráfica de la función.

Si la multiplicidad de la asíntota es par, entonces, a su izquierda y derecha tiene el mismo signo; si la multiplicidad es impar, particularmente sencilla (de multiplicidad 1), entonces, a la izquierda y derecha, la función tiene signos diferentes. Esta regla, junto con la de los ceros múltiples (repetidos), facilita la construcción de esta clase de funciones.

CAPÍTULO 5

Métodos básicos para la construcción de gráficas

El análisis de una función permite establecer su dominio de definición, su rango, los intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento), de signo constante, sus asíntotas, sus máximos y mínimos, etc. Pero para la construcción de muchas funciones, se puede evitar el análisis, utilizando, una serie de métodos que simplifican la expresión analítica y facilitan la construcción de su gráfica. Se describen algunos de estos, que pueden servir de orientación en este sentido.

5.1. Desplazamiento paralelo a lo largo del eje de ordenadas O_y

$$f(x) \to f(x) - b$$

Se necesita construir la gráfica de la función $y = f(x) - b$. Se puede advertir, que las ordenadas de esta gráfica, para todos los valores de x es, en $|b|$ unidades menos que las correspondientes de la gráfica de $y = f(x)$, cuando $b < 0$, y en $|b|$ unidades mas, cuando $b > 0$.

Por lo mismo, la gráfica de la función $y = f(x) - b$ se puede obtener haciendo un desplazamiento a lo largo del eje 0_y de la gráfica de la función $y = f(x)$ en $|b|$ hacia arriba si $b > 0$, o hacia abajo si $b < 0$.

El desplazamiento de la función está ligado a la complejidad de su dibujo, que generalmente es difícil, en los casos de gráficas complicadas.

El desplazamiento de la gráfica, hacia arriba o hacia abajo, en b unidades por el eje de ordenadas es equivalente al correspondiente desplazamiento contrario por el eje de abscisas en la misma cantidad de unidades. Precisamente, se utiliza el mismo método. Entonces, presentando la función dada, de la forma: $y + b = f(x)$, se puede formular la siguiente regla:

Para la construcción de la gráfica $y + b = f(x)$ se debe realizar la gráfica de la función $y = f(x)$ y "desplazar" el eje 0_x (de abscisas) en $|b|$ unidades, hacia arriba si $b > 0$ o hacia abajo si $b < 0$.

La gráfica en este nuevo sistema de coordenadas, es la función $y + b = f(x)$ (Fig.5.1).

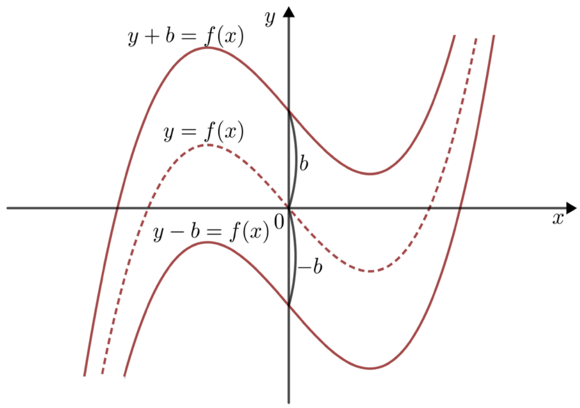


Figura 5.1: Desplazamiento paralelo (ordenadas).

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = 2^x - 3$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = 2^x$ en el sistema de coordenadas (x, y). Se corre el eje O_x en tres unidades hacia abajo. En las coordenadas (x, y), se obtiene la gráfica de la función $y = 2^x - 3$.

   La recta $y = -3$ es una asíntota horizontal. La gráfica corta el eje O_y en el punto $y = 4$ (Fig.5.2).

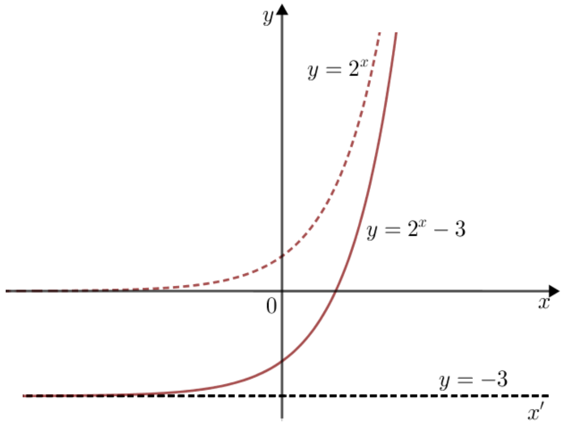


Figura 5.2: $y = 2^x - 3$.

2. Construir la gráfica de la función $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{4}$, sea $y + \frac{5}{4} = \frac{1}{x}$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ en las coordenadas Oxy. Se traslada el eje O_x en $\frac{5}{4}$ unidades hacia arriba.

   En las coordenadas O_{xy}, se obtiene la gráfica de la función $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{4}$. La recta $y = -\frac{5}{4}$ (eje O_x) es una asíntota horizontal. La gráfica de la función corta el eje de abscisas en el punto $x = \frac{4}{5}$ (Fig.5.3).

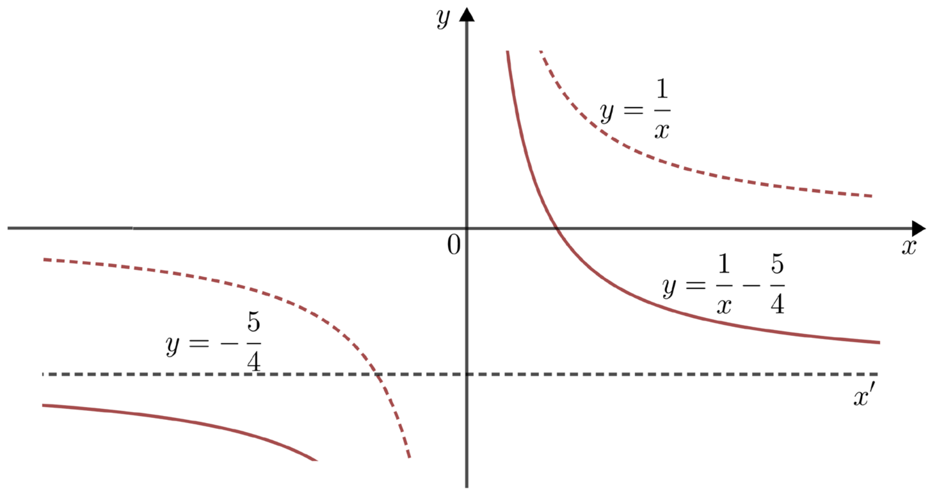


Figura 5.3: $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{4}$.

5.2. Desplazamiento paralelo a lo largo del eje de abscisas O_x

$$f(x) \to f(x+a)$$

Se necesita construir la gráfica de la función $y = f(x+a)$.

Se analiza la función $y = f(x)$, que en el punto $x = x_1$ tiene el valor $y = f(x_1)$.

Evidentemente, la función $y = f(x+a)$ toma el mismo valor en el punto $x = x_2$, la coordenada del cual se determina de la igualdad $x_2 + a = x_1$, es decir, $x_2 = x_1 - a$, además, esta igualdad se verifica para todos los valores de x del dominio de definición de la función. Por lo tanto, la gráfica de la función $y = f(x+a)$ puede obtenerse mediante un desplazamiento paralelo de la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje de abscisas a la derecha en $|a|$ unidades cuando $a < 0$, ó a la izquierda en $|a|$unidades si $a > 0$.

El desplazamiento paralelo a lo largo del eje de abscisas en $|a|$ unidades, es equivalente al desplazamiento del eje de ordenadas en esas mismas unidades, pero en sentido contrario.

Se cumple, entonces, la siguiente regla:

Para la construcción de la gráfica de la función $y = f(x + a)$, se necesita construir la gráfica de la función $y = f(x)$ y desplazar el eje de ordenadas en $|a|$ unidades a la derecha si $a > 0$, o en $|a|$ unidades a la izquierda si $a < 0$.

La gráfica obtenida en el nuevo sistema de coordenadas es la de la función $y = f(x - a)$ (Fig.5.4).

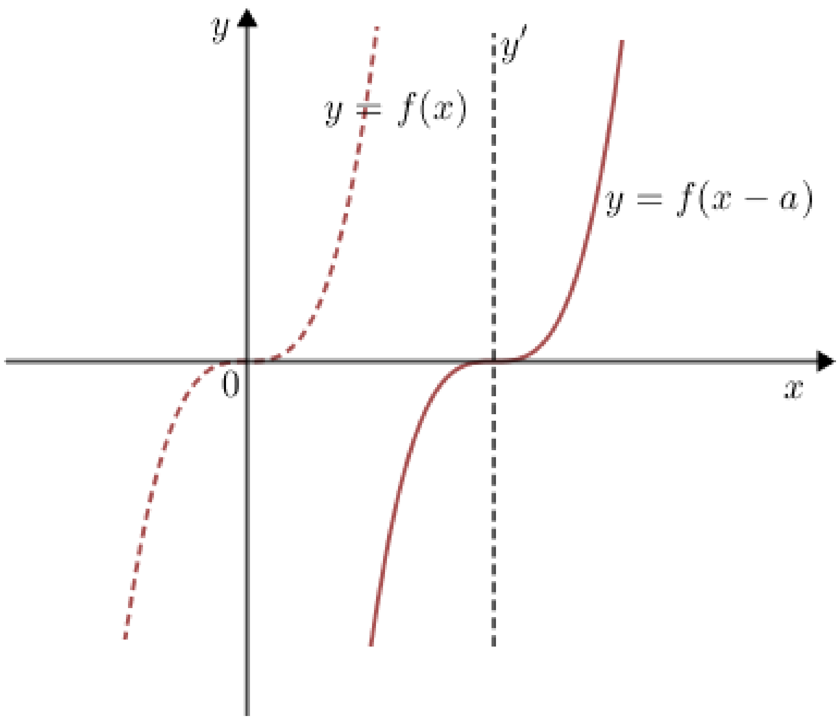


Figura 5.4: Desplazamiento paralelo (abscisas).

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = log_2(x + 2)$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = log_2 x$ en las coordenadas $O_{xy'}$, se traslada el eje $O_{y'}$ en dos unidades a la derecha, lo que permite obtener la gráfica de la función $y = log_2(x + 2)$ en las coordenadas O_{xy}.

   La recta $x = -2$, (eje $O_{y'}$), es una asíntota vertical, la gráfica de la función intersecta el eje de abscisas en el punto $x = -1$, y el eje de ordenadas, en el punto $y = 1$ (Fig.5.5).

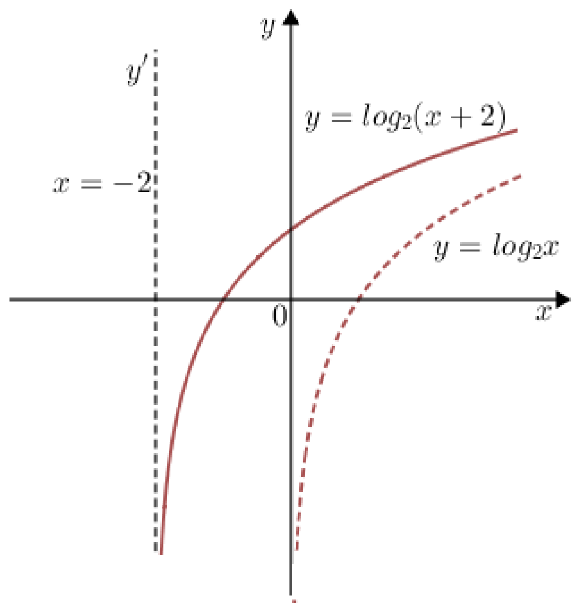


Figura 5.5: $y = log_2(x+2)$.

2. Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, en el sistema de coordenadas $O_{xy'}$, se traslada el eje $O_{y'}$ en $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha, lo que permite obtener la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$ en las coordenadas O_{xy} (Fig.5.6).

   Las coordenadas de los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas, se hallan de la condición: $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = 0$, por lo que $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, (donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

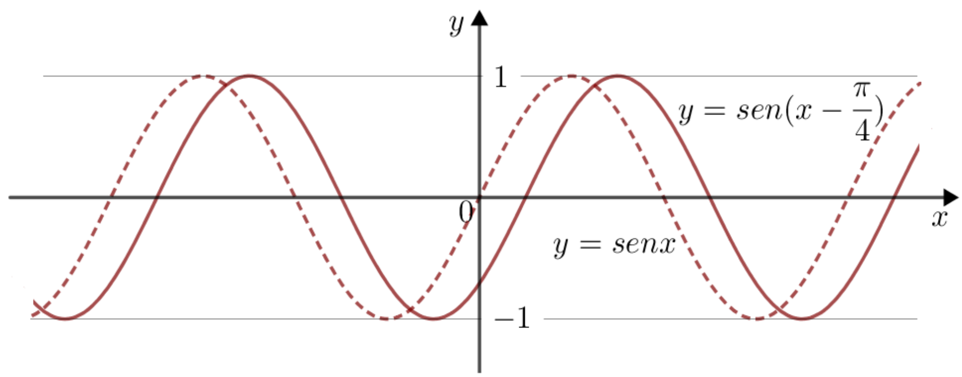


Figura 5.6: $y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$

5.3. Simetría

5.3.1. Construcción de la gráfica de la función $y = f(-x)$

Es evidente, que las funciones $y = f(x)$ e $y = f(-x)$ en los puntos de igual abscisa, tienen la misma ordenada, en valor absoluto, pero de signo contrario. Es decir, las ordenadas (de los puntos) de la gráfica $y = f(-x)$ en los intervalos de valores positivos (negativos) de x, serán iguales a las ordenadas de la gráfica $y = f(x)$ correspondientes en valor absoluto, a los valores negativos (positivos) de x.

Entonces, se puede enunciar, la siguiente regla: Para la construcción de la gráfica de la función $y = f(-x)$, se necesita construir la gráfica de la función $y = f(x)$ y reflejarla respecto al eje de ordenadas. La gráfica obtenida, es la de la función $y = f(-x)$.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = log_{\frac{1}{3}}(-x)$, $D_f : x < 0$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = log_{\frac{1}{3}}x$, y simétricamente respecto al eje O_y (su reflejo), se determinan los puntos de la gráfica $y = f(-x)$ (Fig.5.7).

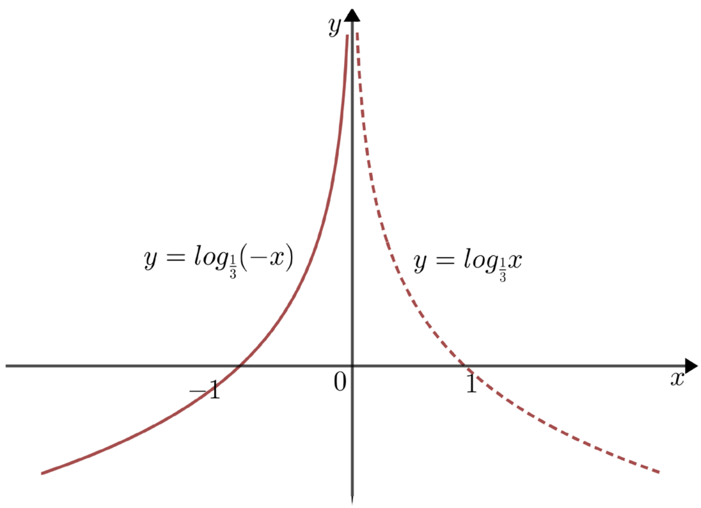


Figura 5.7: $y = log_{\frac{1}{3}}(-x)$.

2. Construir la gráfica de la función $y = arccos\ (-x)$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = arccos(x)$, y sus puntos, tomando simétricamente cada uno de ellos respecto al eje de ordenadas, serán los de la gráfica $y = arccos\ (-x)$ (Fig.5.8).

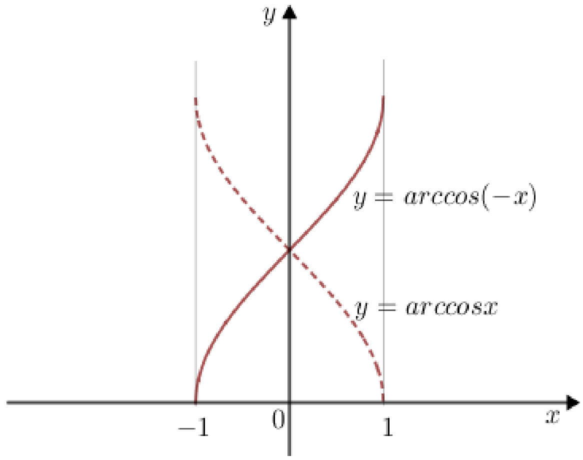


Figura 5.8: $y = arccos\ (-x)$.

5.3.2. Construcción de la gráfica de la función $y = -f(x)$

En este caso, para cada valor de x, las ordenadas de la función: $y = -f(x)$ son, en valor absoluto iguales, pero de signo contrario a los de la función $y = f(x)$, por lo tanto: para la construcción de la gráfica $y = -f(x)$ se construye la gráfica de la función $y = f(x)$ y se "refleja" respecto al eje de abscisas.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = -senx$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ (línea punteada) y se "refleja" respecto al eje de abscisas. Se obtiene la gráfica de la función $y = -\operatorname{sen} x$ (línea continua) (Fig.5.9).

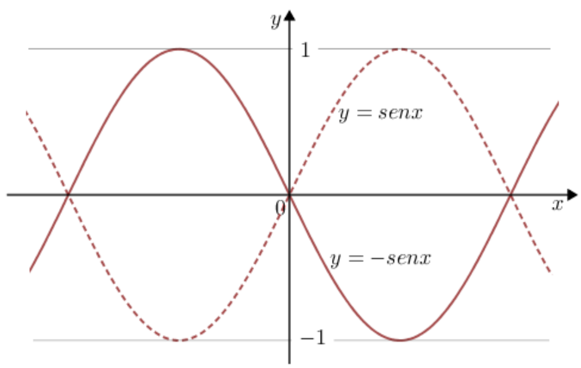


Figura 5.9: $y = -\operatorname{sen} x$.

2. Construir la gráfica de la función $y = -\frac{1}{x}$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ (línea punteada) y se "refleja" respecto al origen del sistema; se obtiene la gráfica de la función $y = -\frac{1}{x}$ (Fig.5.10).

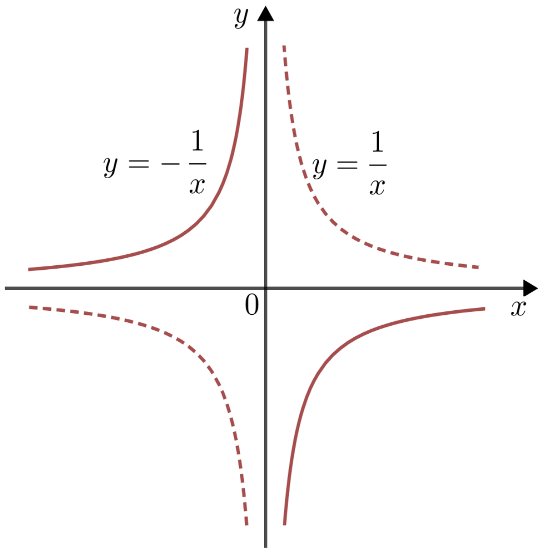


Figura 5.10: $y = -\frac{1}{x}$.

5.3.3. Construcción de gráficas de funciones pares e impares

Como ya se anotó, para la función par $y = f(x)$ en todo el campo de existencia de su argumento, se cumple la relación $f(x) = f(-x)$.

Por lo mismo, la función par toma valores iguales para todos los valores del argumento que son iguales en valor absoluto, pero opuestos por su signo.

La gráfica de esta clase de funciones es simétrica respecto al eje de ordenadas 0_y. Para la construcción de la gráfica de una función par $y = f(x)$, se debe construir una rama de la misma que corresponde a los valores positivos del dominio o campo de variación del argumento $x \geq 0$.

La rama de la gráfica de la función $y = f(x)$ que corresponde a los valores negativos de x $(x < 0)$, es simétrica a la rama derecha ya construida, y se obtiene al "reflejarla" respecto al eje O_y.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{tg}|x|$.

   Solución: Partiendo de que la función $y = \operatorname{tg}|x|$ es par, se construye la gráfica para los valores positivos del argumento $x \geq 0$, donde es de la forma $y = \operatorname{tg} x$.

La parte izquierda de la gráfica (cuando $x < 0$) se obtiene por "reflejo", o sea, simétrica respecto al eje de ordenadas (Fig.5.11) .

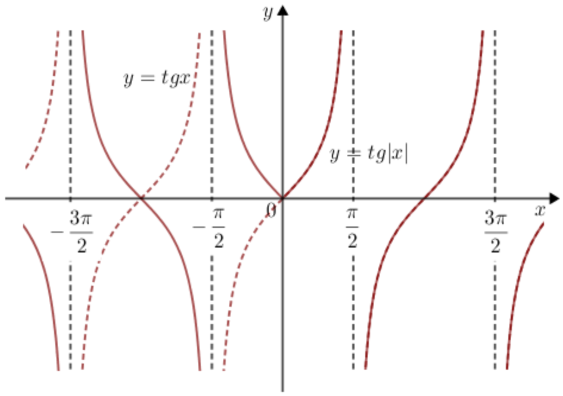


Figura 5.11: $y = \operatorname{tg}|x|$.

2. Construir la gráfica de la función $y = \frac{|x|}{x^2}$.

Solución. Esta función es par $f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2} = \frac{|x|}{x^2} = f(x)$.

Se construye la parte de la gráfica que corresponde a la parte positiva de los valores de x (el dominio de la función es $x \neq 0$). Cuando $x > 0$, la función es $y = \frac{|x|}{x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

La parte de la gráfica que corresponde a los valores de $x < 0$, se efectúa marcando, simétricamente respecto a O_y, los puntos obtenidos para $x > 0$ (Fig.5.12).

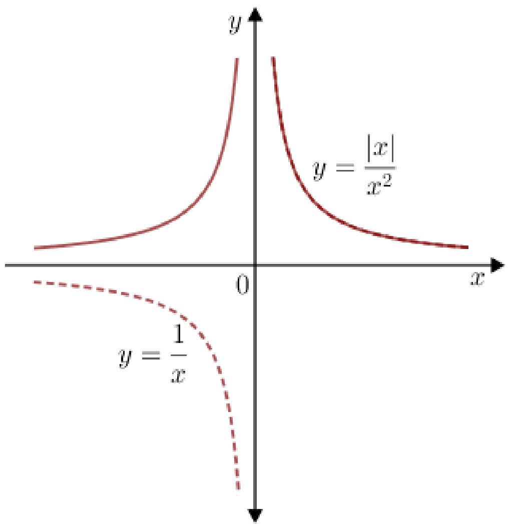


Figura 5.12: $y = \frac{|x|}{x^2}$.

Para las funciones impares se cumple que $f(-x) = -f(x)$, por lo tanto, para el campo de los valores negativos de x, las ordenadas de la gráfica de una función impar son iguales en valor, pero opuestas por el signo de las ordenadas de la gráfica que corresponden a los valores positivos de x.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen del sistema de coordenadas.

Para la construcción de la gráfica de una función impar $y = f(x)$ es necesario construir la rama que corresponde a los valores positivos del argumento $x \geq 0$.

La parte que corresponde a los valores negativos $x < 0$, son simétricos con respecto al origen de coordenadas y se puede obtener como reflejo de la gráfica respecto a este mismo punto.

3. Construir la gráfica de la función $y = x\,|x|$.

   Solución. Como $f(-x) = -x\,|-x| = -x\,|x| = -f(x)$, es decir, la función es impar, se puede construir para los valores positivos del argumento ($x \geq 0$), donde: $y = x\,|x| = x^2$, ($|x| = -x$, si $x \leq 0$).

   Para los valores negativos del argumento se obtiene el reflejo de la rama trazada respecto al origen de coordenadas (Fig.5.13).

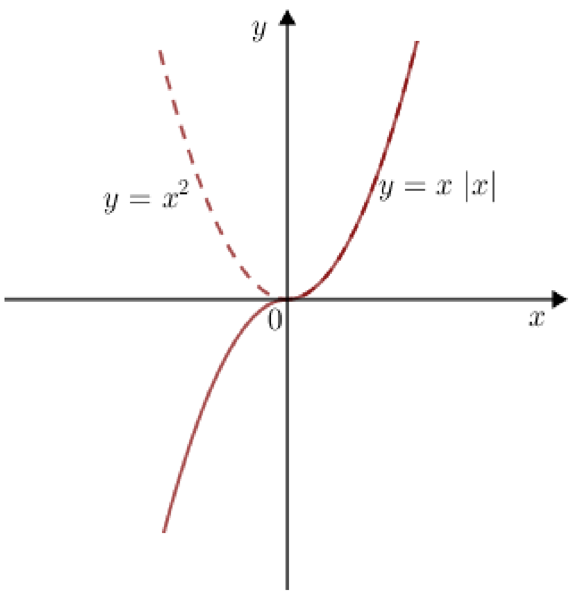


Figura 5.13: $y = x\,|x|$

4. Construir la gráfica de la función $y = \frac{x}{|x|}$.

   Solución. $f(-x) = \frac{-x}{|-x|} = \frac{-x}{|x|} = -f(x)$, la función es impar, por lo que se construye la gráfica para los valores de $x > 0$ $(D_f : x \neq 0)$, donde $y = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$.

   La parte de la gráfica de la función para $x < 0$ se obtiene como reflejo de la construida respecto al origen del sistema de coordenadas (Fig.5.14).

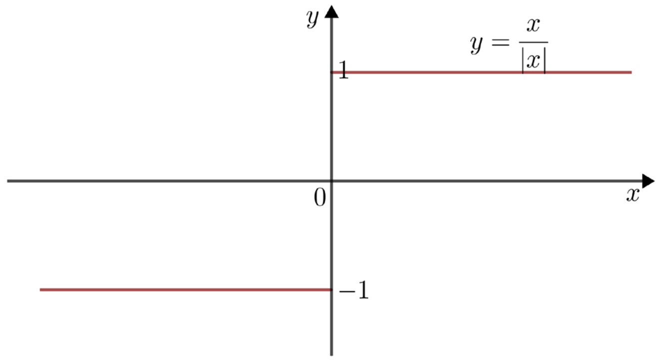


Figura 5.14: $y = \frac{x}{|x|}$.

   Las flechas significan que los puntos $(0, -1)$ y $(0; 1)$ no pertenecen a la gráfica.

5.4. Construcción de la gráfica de una función inversa

Una función y su inversa se expresan mediante la misma gráfica, solamente que se cambia su papel: y es ahora la variable independiente y x es la variable dependiente o función, $x = f(y)$.

Pero su utilización es, al contrario, x - variable independiente, y - función; $y = f^{-1}(x)$, entonces la gráfica de esta función es simétrica de $y = f(x)$, respecto a la recta $y = x$ que es bisectriz de los cuadrantes I y III, por lo que se puede afirmar que: Para la construcción de la gráfica $y = f^{-1}(x)$ es necesario construir la gráfica de la función $y = f(x)$ y “reflejarla” respecto a la recta $y = x$.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la inversa de la función $y = x^2$.

   Solución. La función $x = \pm\sqrt{y}$ es la función inversa y cambiando las variables, se escribe $y = \pm\sqrt{x}$. Entonces, se construye la gráfica de $y = x^2$ y se “refleja” respecto a la recta $y = x$.

   Como se ve, en la gráfica (Fig.5.15), la función $y = x^2$ tiene dos funciones inversas: $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$.

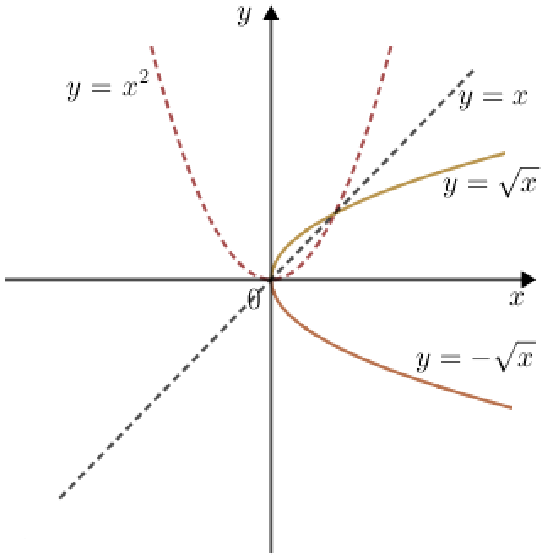


Figura 5.15: Inversa de la función $y = x^2$.

2. Construir la gráfica de la función $y = \sqrt[3]{x}$.

Solución. Esta es la inversa de la función $y = x^3$, por tanto, se construye la gráfica de $y = x^3$ y se "refleja" respecto al eje $y = x$ (Fig.5.16).

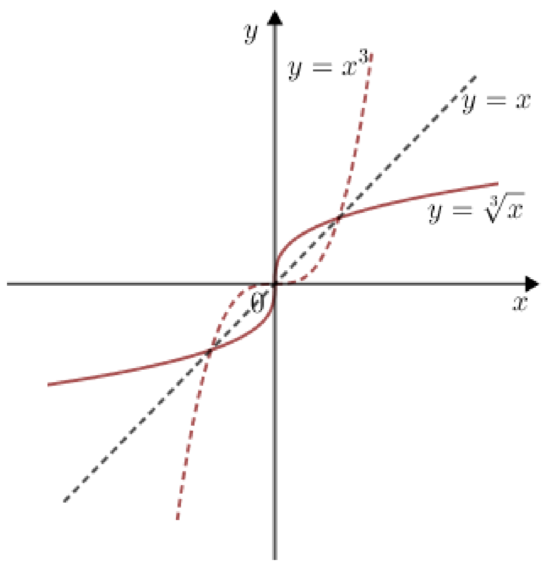


Figura 5.16: $y = \sqrt[3]{x}$.

5.4.1. Ampliación y contracción de una gráfica a lo largo del eje de ordenadas

$f(x) \to Af(x)$ sea la función $y = Af(x)$, donde $A > 0$.

Se puede advertir, que para unos mismos valores del argumento x, las ordenadas de esta función, serán A veces mayores que las de $y = f(x)$ cuando $A > 1$ ó $\frac{1}{A}$ veces menor cuando $A < 1$.

Por lo tanto, se pude construir la gráfica de la función $y = Af(x)$, construyendo la de $y = f(x)$, aumentando sus ordenadas A veces si $A > 1$, o disminuyéndolas en $\frac{1}{A}$ veces, si $A < 1$.

Ejemplo.

1. Construir las gráficas de las funciones: (i) $y = 3\cos x$ y (ii) $y = \frac{1}{2}\cos x$.

   Solución. Se construye la gráfica de la función $y = \cos x$ y se "amplían" sus ordenadas en el caso (i) en 3 veces, y se las reduce a $\frac{1}{2}$ en el caso (ii) (Fig.5.17).

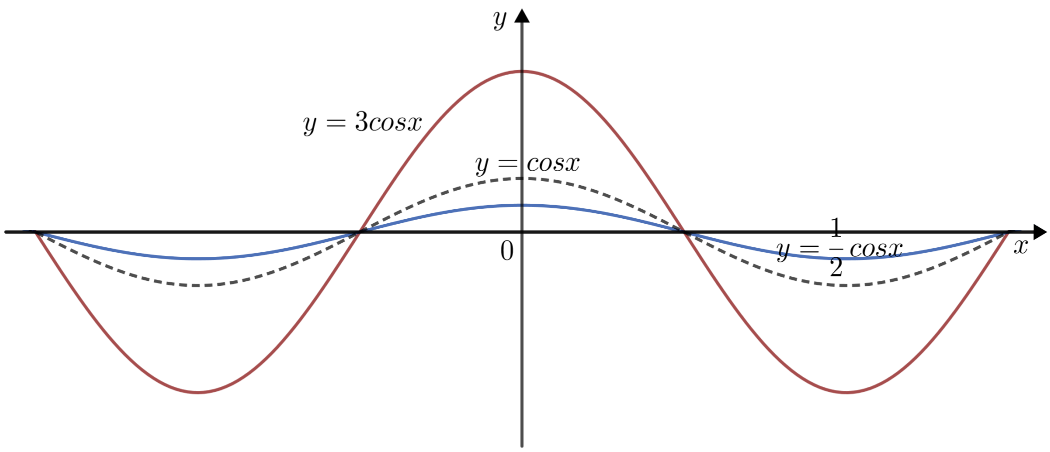


Figura 5.17: $y = 3\cos x$ y $y = \frac{1}{2}\cos x$.

5.4.2. Alargamiento y contracción de una gráfica a lo largo del eje de abscisas

Estiramiento o elongación y contracción de la gráfica de una función a lo largo del eje de abscisas: $f(x) \to f(ax)$.

Se necesita construir la gráfica de la función $y = f(ax)$ donde $a > 0$.

Partiendo de la función $y = f(x)$ que en el punto arbitrario $x = x_1$ toma el valor $y_1 = f(x_1)$, evidentemente, $y = f(ax)$ toma ese mismo valor en un punto $x = x_2$, la coordenada del cual, se determina de la ecuación $x_1 = ax_2$ o $x_2 = x_{\frac{1}{a}}$, que se cumple para todos los valores del dominio de la función.

Consecuentemente, la gráfica de la función será una contracción, si $a > 1$ o un "estiramiento" si $a < 1$ a lo largo del eje de abscisas, respecto a la gráfica de la función $y = f(x)$. De lo anterior, se pude concluir que para la construcción de la gráfica de $y = f(ax)$, se grafica la función $y = f(x)$ y se disminuye sus abscisas en a veces si $a > 1$ lo que "contrae" la gráfica a lo largo del eje O_x o se "estiran" (sus abscisas) en $\frac{1}{a}$ si $a < 1$, la gráfica que se obtiene es la de $y = f(ax)$.

Ejemplo.

1. Construir las gráficas: $(i) y = \operatorname{sen} 2x$ y $(ii) y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

   Solución- Se construye la gráfica $y = \operatorname{sen} x$ (línea punteada) y se contrae en 2 veces a lo largo de O_x en el caso (i), y se alarga en $\frac{1}{2}$ en el caso (ii).

   Periodo: $p = \frac{2\pi}{w}$; entonces para (i) se tiene $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ y para (ii), $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ (ver Fig. 5.18).

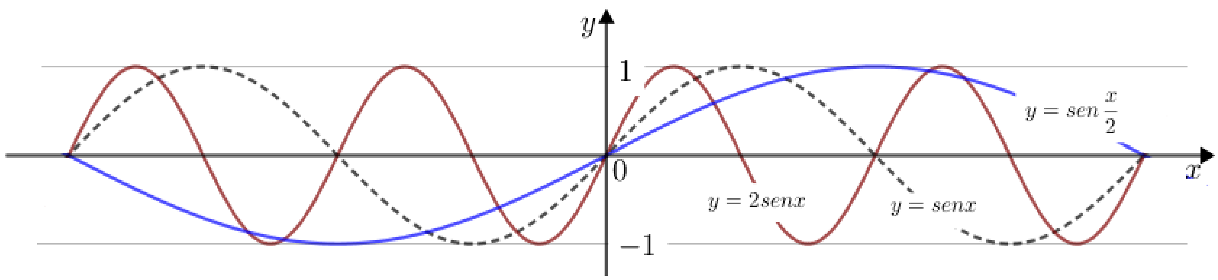


Figura 5.18: $y = \operatorname{sen} 2x$ y $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

5.4.3. Deformación y desplazamiento de la gráfica de una función

Frecuentemente se necesita la gráfica de una función que es el resultado de una combinación de desplazamiento y deformación de una gráfica dada.

La secuencia para la realización de una de estas gráficas obedece a las formas de simplificación consideradas en los casos anteriores, es decir, partiendo de la gráfica de una función elemental.

Construcción de la gráfica de la función: $y = Af(\omega x + a) - b$ $f(x) \to Af(\omega x + a) - b$.

A diferencia del anterior título, en la función original cada uno de los parámetros A y a puede ser positivo o negativo, teniendo en cuenta las reglas de desplazamiento paralelo, la simetría y la deformación (alargamiento o contracción), se da un esquema para la construcción de la gráfica por etapas.

Se cambia la función dada a la forma: $y + b = Af[\omega(x + \frac{a}{\omega})]$.

Realizando la construcción de la gráfica paso a paso en orden contrario al de la simplificación de la forma de función, con la utilización de las reglas señaladas, se obtiene la gráfica de la función dada.

Sea la función de la forma $y + b = Af[\omega(x + \frac{a}{\omega})]$.

Esquema de la construcción por etapas de la gráfica de la función:

1. $y = f(x)$.
2. Contracción o alargamiento de la función a lo largo del eje de abscisas: $y = f(|\omega|\, x)$.
3. Reflejo de la gráfica respecto al eje de ordenadas (esta etapa se cumple solamente si $\omega < 0$): $y = f(|\omega|\, x)$.
4. Contracción o alargamiento de la gráfica a lo largo del eje de ordenadas: $y = |A|\, f(\omega x)$.
5. Reflejo de la gráfica respecto al eje de abscisas (etapa que se cumple solamente si $A < 0$): $y = |A|\, f(\omega x)$.
6. Desplazamiento del eje de ordenadas en $\left|\frac{a}{\omega}\right|$ unidades: $y = Af[\omega(x + \frac{a}{\omega})]$.
7. Desplazamiento del eje de abscisas en $|b|$ unidades: $y + b = Af[\omega(x + \frac{a}{\omega})]$.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{tg}(-\frac{\pi x}{2}) = -\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})$

   Esquema de construcción: $a)y = \operatorname{tg} x$; $b)y = \operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})$; $c)$ $y = \operatorname{tg}(-\frac{\pi x}{2})$.

   Así la construcción de la gráfica de la función dada se debe comenzar por $y = \operatorname{tg} x$.

   La gráfica de $y = \operatorname{tg}(-\frac{\pi x}{2})$ corta el eje de abscisas en los puntos: $x = 2k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$.

   Son asíntotas de la función las rectas: $x = 1 + 2k$ (Fig.5.19).

2. Construir la gráfica de la función $y = -\sqrt{2} \arccos \frac{|x|}{\sqrt{2}}$.

   Solución. Esquema de construcción: $a)y = \arccos x$; $b)y = \arccos \frac{|x|}{\sqrt{2}}$; $c)y = \sqrt{2} \arccos \frac{x}{\sqrt{2}}$; $d)x \geq 0$, $y = -\sqrt{2} \arccos \frac{x}{\sqrt{2}}$; $e)y = -\sqrt{2} \arccos \frac{|x|}{\sqrt{2}}$.

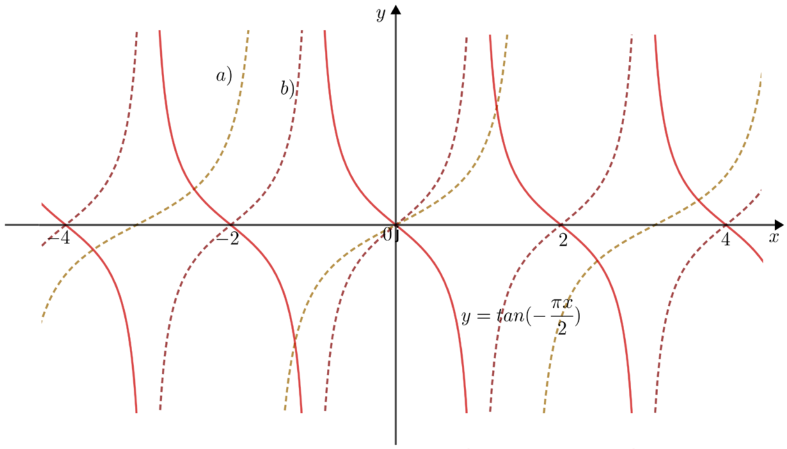


Figura 5.19: $y = \operatorname{tg}(-\frac{\pi x}{2})$.

La función es par: $f(-x) = f(x)$, por lo que se puede construir para cuando $x \geq 0$.

La gráfica de la función corta el eje de abscisas cuando $x \geq 0$ en el punto $x = \sqrt{2}$ el cual se halla haciendo $y = 0$ y resolviendo la ecuación $-2\arccos\frac{x}{\sqrt{2}} = 0$, luego se construye la gráfica para cuando $x < 0$ reflejada respecto al eje de ordenadas (Fig.5.20).

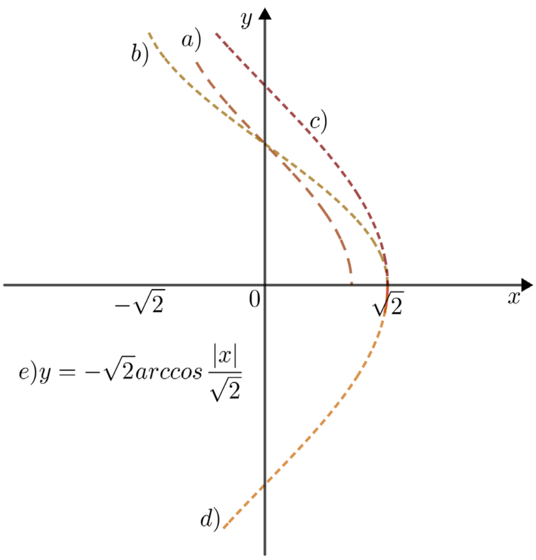


Figura 5.20: $y = -\sqrt{2}\arccos\frac{|x|}{\sqrt{2}}$.

3. Construir la gráfica de la función $y = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arc\,sen}(\frac{|x|}{3} - 1)$.

Solución. Esquema de construcción: $a)y = \operatorname{arc\,sen} x$; $b)y = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}$; $c)y = 2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}$; $d)y = -2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}$; $e)y = -2\operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{3}-1)$; $f)y = -2\operatorname{arc\,sen}(\frac{|x|}{3}-1)$; $g)y+\frac{\pi}{2} = -2\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}(|x|-\frac{1}{3})$.

La gráfica corta el eje de ordenadas en los puntos: $y = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arc\,sen}(-1) = \frac{3\pi}{2}$ (de condición $x = 0$), y el eje de abscisas, en los puntos $x = \pm 3(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ que se hallan resolviendo la ecuación: $\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{|x|}{3} - 1) = 0$ (Fig.5.21).

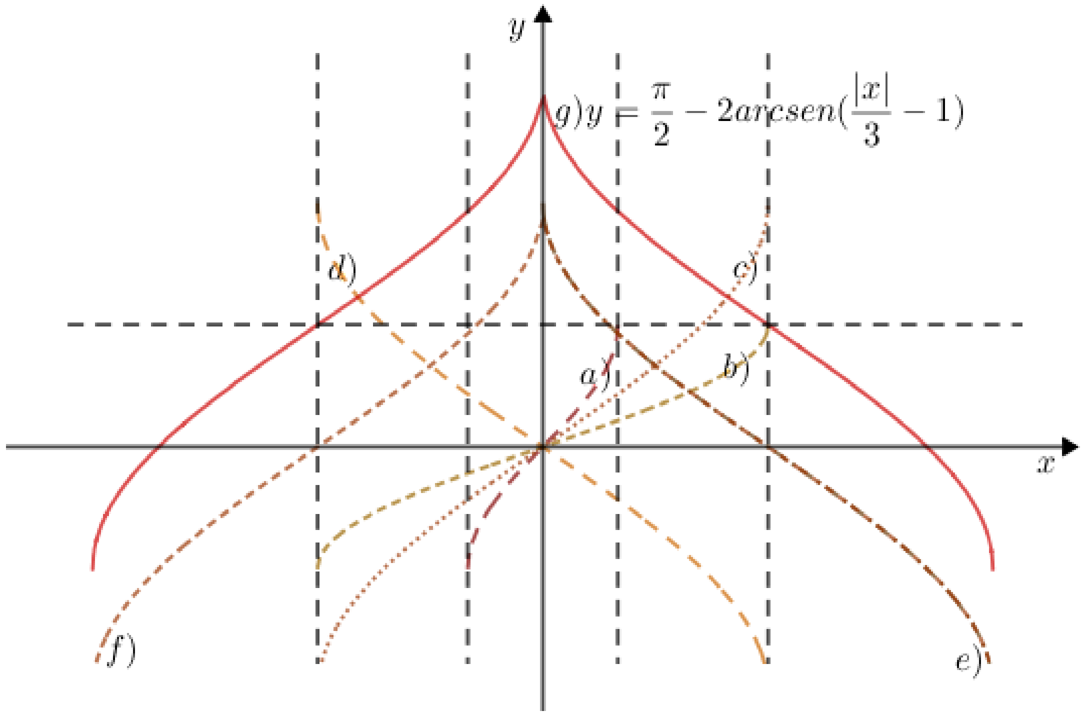


Figura 5.21: $y = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arc\,sen}(\frac{|x|}{3} - 1)$.

Construcción de las gráficas de la forma $y = ax^2 + bx + c$, trinomio cuadrado

Un trinomio cuadrado siempre se puede transformar a la forma: $y = a(x + m) - n$.

Ciertamente:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) = a(x^2 + \frac{b \cdot 2x}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

haciendo las notaciones: $\frac{b}{2a} = m$, $\frac{b^2 - 4ac}{4a} = n$, se tiene $y = a(x + m)^2 - n$ ó $y + n = a(x + m)^2$.

Ahora, siguiendo las reglas antes descritas, se establece el esquema de construcción de esta función:

1. $y = x^2$.
2. $y = |a|\,x^2$, deformación respecto al eje de ordenadas O_y.
3. $y = ax^2$, reflejo respecto al eje de abscisas (O_x, si $a < 0$).
4. $y + n = a(x + m)^2$, desplazamiento de los ejes de coordenadas.

El vértice de la parábola se sitúa en el punto de coordenadas: $x = -m$ e $y = -n$.

La gráfica de la parábola intersecta el eje de ordenadas en el punto $y = -n$.

Los puntos de corte (interceptos) de la gráfica con el eje de abscisas se hallan mediante la resolución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Si las raíces son iguales la gráfica es tangente al eje O_x. Si la ecuación no tiene raíces reales, la gráfica no tiene puntos comunes con el eje de abscisas y se sitúa por encima $(a > 0)$, o por debajo $(a < 0)$ de este eje.

Al respecto se puede juzgar teniendo en cuenta que la resolución de la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$ se logra aplicando la fórmula: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde el radicando $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de *discriminante de la ecuación*, y en efecto:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos raíces reales de la ecuación: x_1, x_2 que corresponden a los puntos de corte de la gráfica con el eje O_x.

2. $b^2 - 4a = 0$, entonces $x_1 = x_2 = x$, y la gráfica es tangente al eje de abscisas.

3. Si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son complejas y la gráfica no corta el eje O_x, situación arriba descrita.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = 2x^2 - 5x + \sqrt{2}$.

   Solución: $y = 2x^2 - 5x + \sqrt{2} = 2(x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2[(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{25}{16}] = 2(x - \frac{5}{4})^2 + \sqrt{2} - \frac{25}{8}$

   ya que $(x - \frac{5}{4})^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{5x}{4} + \frac{25}{16}$; $y = [(x - \frac{5}{4})^2 + \sqrt{2} - \frac{25}{8}]$

   Esquema: $a)y = x^2$; $b)y = 2x^2$; $c)y = 2(x - \frac{5}{4})^2 + \sqrt{2} - \frac{25}{8}$ y $n = \frac{8\sqrt{2}-25}{8}$.

   El vértice de la parábola se sitúa en el punto $(\frac{5}{4}, \sqrt{2} - \frac{25}{8})$.

   La gráfica corta el eje de ordenadas cuando $y = \sqrt{2}$ y el de abscisas en los puntos $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-8\sqrt{2}}}{4}$ que se obtienen haciendo: $2x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ (Fig.5.22).

2. Construir la gráfica de la función $y = -3x^2 + x - 1$.

   Solución. Se tiene

$$y = -3x^2 + x - 1 = -3(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}) = -3(x^2 - \frac{2\cdot x}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{3} - \frac{1}{36}) = -3(x - \frac{1}{6})^2 - \frac{11}{12}$$

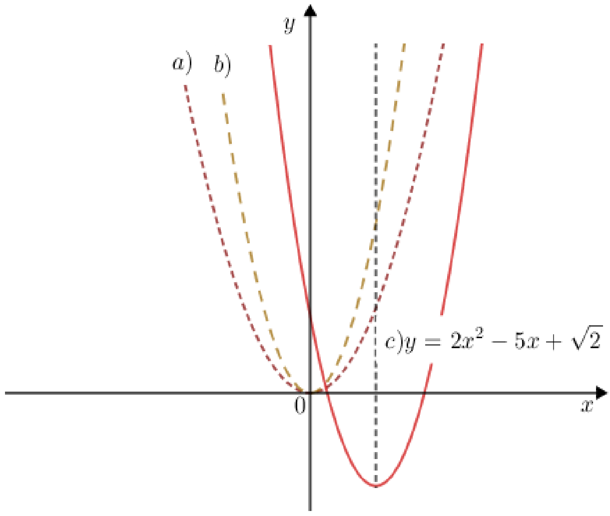


Figura 5.22: $y = 2x^2 - 5x + \sqrt{2}$.

Esquema: $a)y = x^2$; $b)y = 3x^2$; $c)y = -3x^2$; $d)y + \frac{11}{12} = -3(x - \frac{1}{6})^2$.

Las coordenadas del vértice de la parábola son: $x = \frac{1}{6}$; $y = -\frac{11}{12}$.

La gráfica corta el eje de ordenadas en el punto $y = -1$ y no tiene puntos comunes con el eje de abscisas porque no tiene raíces reales (Fig.5.23).

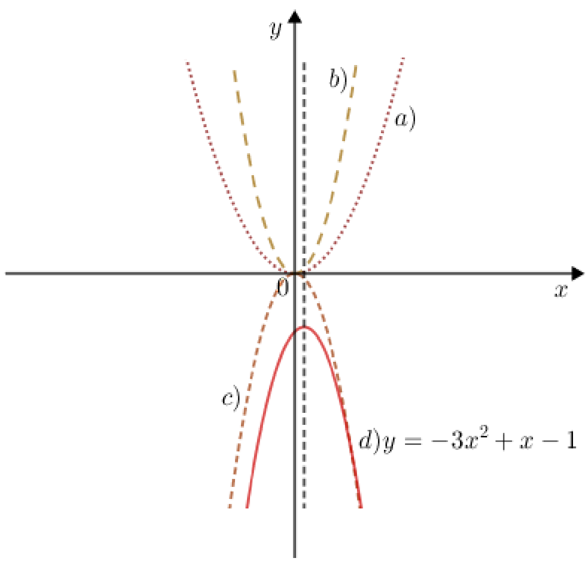


Figura 5.23: $y = -3x^2 + x - 1$.

Construcción de las gráficas de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; $D_f : cx + d \neq 0$, $x \neq -\frac{d}{c}$

Se cambia esta expresión: $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a(x+\frac{d}{c}) - \frac{ad}{c} + b}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a(x+\frac{d}{c})}{c(x+\frac{d}{c}} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{c(x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}}$; se hacen las notaciones: $\frac{a}{c} = -n$; $\frac{d}{c} = m$ y $\frac{bc-ad}{c^2} = k$; entonces, se tiene: $y = -n + \frac{k}{x+m}$ o $y + n = \frac{k}{x+m}$.

Ahora, teniendo en cuenta las reglas anteriores, se escribe el esquema de construcción de la gráfica:

1. $y = \frac{1}{x}$.
2. $y = \frac{|k|}{x}$, deformación respecto al eje de ordenadas.
3. $y = \frac{kx}{x}$, reflejo respecto al eje de abscisas, se cumple cuando $k < 0$.
4. $y + n = \frac{k}{x+m}$, desplazamiento de los ejes coordenados.

Las rectas $y = -n$ y $x = -m$, horizontal y vertical, son, correspondientemente, asíntotas de la gráfica de la función.

Los puntos de corte con los ejes coordenados, es más fácil hallarlos utilizando la forma primitiva de la función: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, haciendo $x = 0$, se halla el punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas $y = \frac{b}{d}$, análogamente, cuando $y = 0$, se halla el punto de corte con el eje de abscisas $x = -\frac{b}{a}$.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = \frac{3}{2x-1}$; $D_f : 2x - 1 \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$.

   Solución. $y = \frac{3}{2x-1} = \frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}$; $y = \text{lím}(x \to \infty)? \frac{3}{2x-1} = 0$

   Esquema de construcción de la gráfica: $a)y = \frac{1}{x}$; $b)y = \frac{\frac{3}{2}}{x}$; $c)y = \frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}$

   Las rectas $y = 0$ (eje de abscisas) y $x = \frac{1}{2}$ son asíntotas de la gráfica (Fig.5.24).

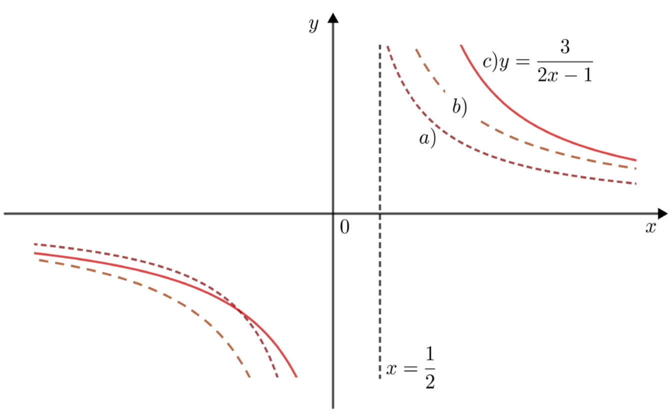


Figura 5.24: $y = \frac{3}{2x-1}$.

2. Construir la gráfica de la función $y = \frac{3x+2}{2x-3}$; $D_f : 2x - 3 \neq 0,\ x\frac{3}{2}$.

   Solución.

   $y = \frac{3x+2}{2x-3} = \frac{3x+2}{2(x-\frac{3}{2})} = \frac{3(x-\frac{3}{2})+2+\frac{9}{2}}{2(x-\frac{3}{2})} = \frac{3(x-\frac{3}{2})}{2(x-\frac{3}{2})} - \frac{\frac{13}{4}}{(x-\frac{3}{2})}$

   Esquema de construcción: $a) y = \frac{1}{x}$; $b) y = \frac{\frac{13}{4}}{x}$; $c) y - \frac{3}{2} = \frac{\frac{13}{4}}{x-\frac{3}{2}}$.

   Las rectas $x = \frac{3}{2}$ y $y = \frac{3}{2}$ son asíntotas de la gráfica. La curva corta el eje de abscisas en el punto $x = -\frac{2}{3}$ y al eje de ordenadas en $y = -\frac{2}{3}$ (Fig.5.25).

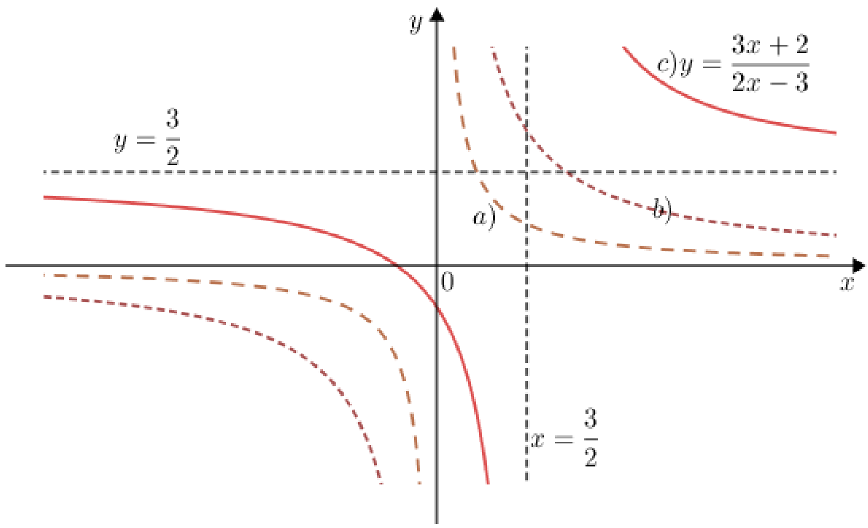


Figura 5.25: $y = \frac{3x+2}{2x-3}$.

3. Construir la gráfica de la función $y = \frac{x}{|x|-2}$; el dominio de la función es $D_f : |x| - 2 \neq 0$, esto es $x \neq 2$, $(x > 0)$ y $x \neq -2$ $(x < 0)$.

   $f(-x) = \frac{-x}{|-x|-2} = -\frac{x}{|x|-2} = -f(x)$ función impar, por lo que la curva se puede construir para $x \geq 0$, $y = \frac{x}{|x|-2} = \frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$; $y - 1 = \frac{2}{x-2}$ y para $x < 0$, los valores serán iguales en valor absoluto pero de signo contrario.

   Esquema: $a) y = \frac{1}{x}$; $b) y = \frac{2}{x}$; $c) y - 1 = \frac{2}{x-2}$.

   La gráfica es simétrica respecto al origen del sistema coordenado. Tiene dos asíntotas verticales en los puntos $x = -2$ y $x = 2$, y dos asíntotas horizontales: $y = -1$ y $y = 1$ (Fig.5.26).

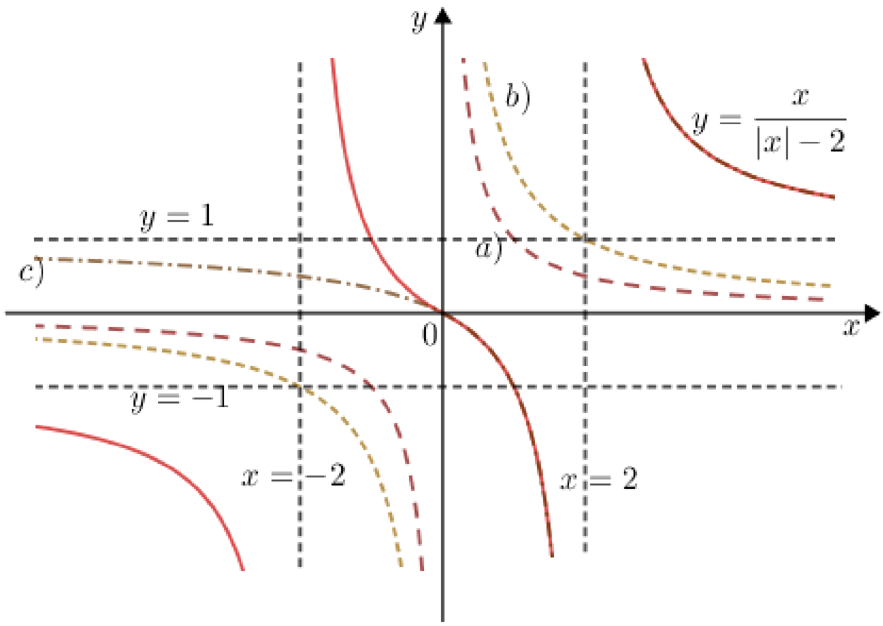


Figura 5.26: $y = \frac{x}{|x|-2}$.

5.5. Gráficas con valor absoluto de las funciones

Son de la forma: $y = |f(x)|$; $y = f(x) \to |f(x)|$.

Se recuerda que para todo $a \in \mathbb{R}$, su valor absoluto se define:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases} \tag{5.5.1}$$

Aplicando la definición de valor absoluto a la función $y = f(x)$, se tiene:

$$y = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases} \tag{5.5.2}$$

Por tanto, para construir la gráfica de la función $y = |f(x)|$, se necesita primero construir la gráfica de $y = f(x)$, y luego, la parte de la curva negativa (por debajo del eje de O_x), "reflejarla" respecto al eje de abscisas.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica de la función $y = |\operatorname{sen} x|$.

   Solución. se construye la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (línea punteada) y en los intervalos donde la función es negativa, se traza la curva hacia arriba, es decir, reflejándola respecto al eje de abscisas. La parte de la curva donde es positiva queda sin cambios (Fig.5.27).

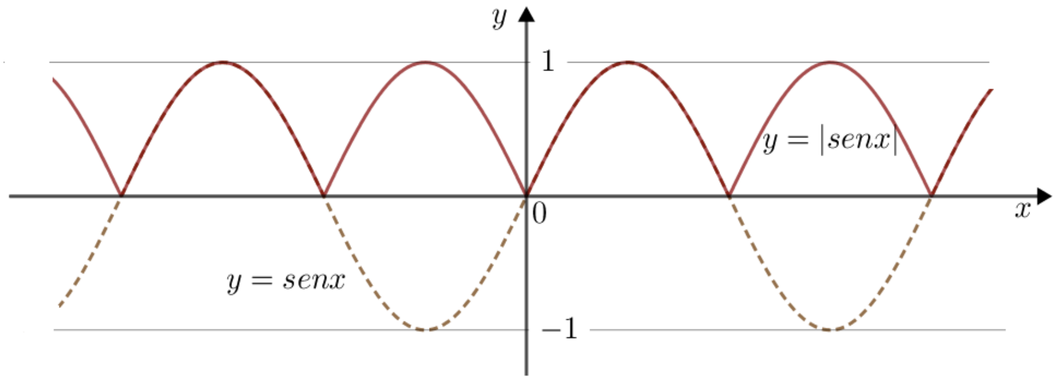


Figura 5.27: $y = |\operatorname{sen} x|$.

2. Gráfica de la función $y = |\log_2 x|$.

   Solución. Análogamente al caso anterior, se construye la gráfica de $y = \log_2 x$ y su parte negativa (en el intervalo $0 < x < 1$), se refleja respecto al eje O_x, obteniéndose la gráfica $y = |\log_2 x|$(Fig.5.28).

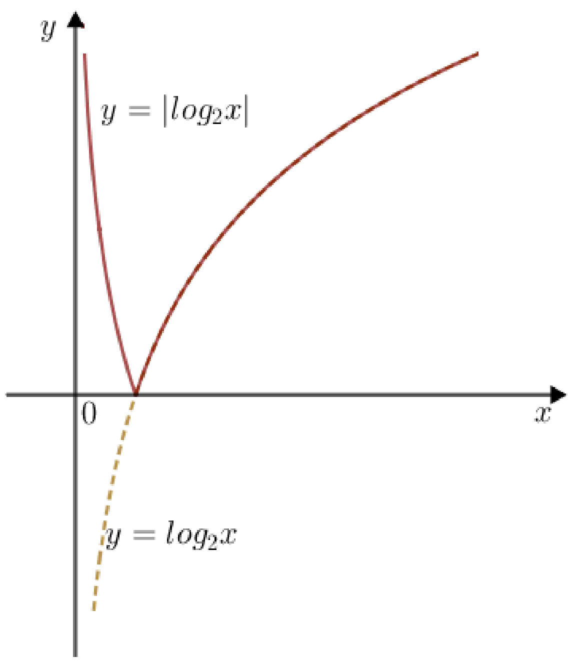


Figura 5.28: $y = |\log_2 x|$.

3. Gráfica de la función $y = \left|x^2 - 3x + 1\right|$.

   Solución. Se realiza la transformación: $y = x^2 - 3x + 1 = x^2 - \frac{3 \cdot 2x}{2} + \frac{9}{4} + 1 - \frac{9}{4} = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$;

$y + \frac{5}{4} = (x - \frac{3}{2})^2$; se construye esta gráfica. Como en los casos anteriores, la parte que queda debajo del eje de abscisas, se refleja hacia arriba de este eje, obteniendo la gráfica buscada (Fig.5.29).

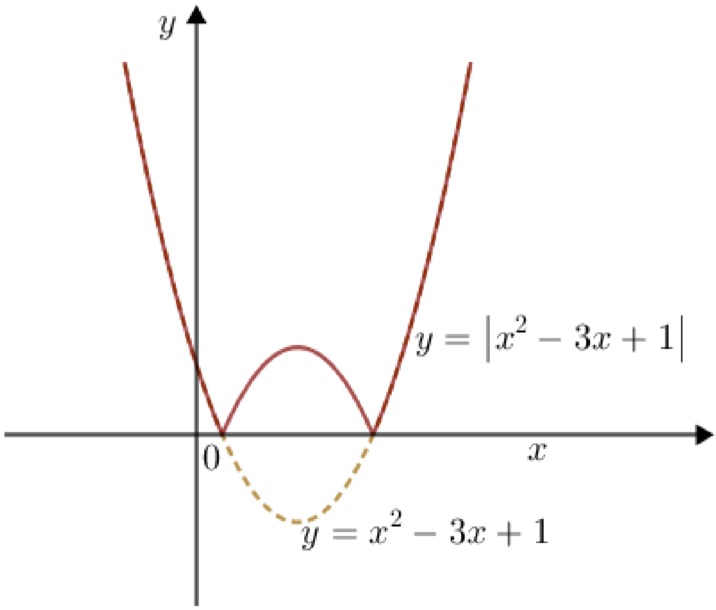


Figura 5.29: $y = \left|x^2 - 3x + 1\right|$.

5.6. Gráficas de funciones de la forma $y = f\,|x|$

La función $y = f\,|x|$ es par, por tanto, la construcción de su gráfica se reduce a la de $y = f(x)$ cuando $x \geq 0$ y "reflejarla" respecto al eje O_y, es decir, repetir los valores de las ordenadas de los puntos para cuando $x < 0$.

Otra opción es escribir la tabla de valores:

x	$\pm x_1$	$\pm x_2$	$\pm x_3$	$\cdots$	$\pm x_n$
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

donde y_1, y_2, y_3, $\ldots y_n$ están a la derecha e izquierda del eje O_x.

Ejemplos.

1. Gráfica de la función $y = \frac{|x|-1}{|x|(|x|-2}$.

Solución. se construye la gráfica $y = \frac{x-1}{x(x-2)}$, $D_f : x(x-2) \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq 2$, puntos de discontinuidad de segunda clase, por lo que, son asíntotas verticales, también: $y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x(x-2)} = 0$, $y = 0$ asíntota horizontal.

En $x = 1$, la función se reduce a cero, es decir, corta el eje O_x (siendo función par, también lo corta en $x = -1$). La parte de la gráfica para cuando $x > 0$, es, al tiempo la de la función dada. La rama izquierda para $x < 0$, se obtiene reflejando la parte construida, respecto al eje de ordenadas (Fig.5.30).

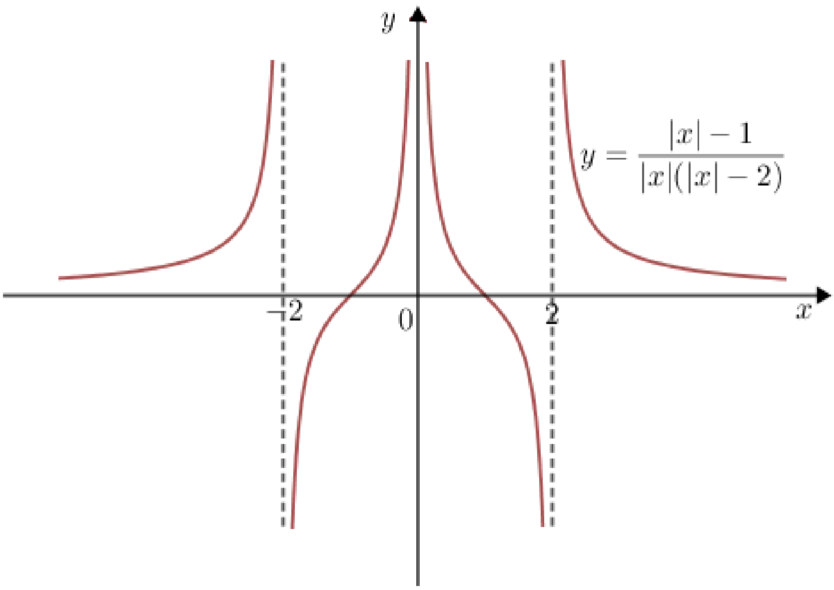


Figura 5.30: $y = \frac{|x|-1}{|x|(|x|-2}$.

5.7. Gráficas de funciones que contienen parcialmente el símbolo de valor absoluto

Para esta clase de gráficas de funciones, es necesario considerar la definición valor absoluto para su expresión y construir las gráficas en los intervalos que se determinan.

1. Gráfica de la función $y = |x| + x$.

   Solución. la función se expresa:

$$y = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Entonces, la gráfica está comprendida por dos semirectas a partir del origen del sistema coordinado (Fig.5.31).

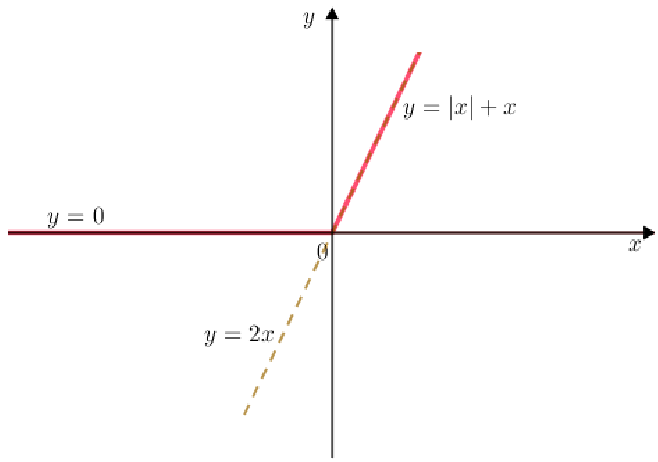


Figura 5.31: $y = |x| + x$

2. Gráfica de la función $y = |x-1| + |x+2|$.

Solución. $x - 1 = 0$, $x = 1$; $x + 2 = 0$, $x = -2$; los puntos $x = -2$ y $x = 1$, definen tres intervalos, por lo que, para cuando $x \leq -2$, se tiene que:

$$|x-1| = -(x-1) = -x+1;\ |x+2| = -(x+2) = -x-2$$

$$\Rightarrow |x-1| + |x+2| = -x+1-x-2 = -2x-1$$

$$\text{cuando } -2 < x < 1,\ |x-1| = -(x-1);\ |x+2| = x+2$$

$$\Rightarrow |x-1| + |x+2| = -(x-1) + (x+2) = -x+1+x+2 = 3$$

$$\text{cuando } x > 1,\ |x-1| = x-1;\ |x+2| = x+2$$

$$\Rightarrow |x-1| + |x+2| = x-1+x+2 = 2x+1$$

$$esdeciry = \begin{cases} -2x-1 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ 3 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

La gráfica está compuesta por tres semirectas (Figs.5.32 y 5.33).

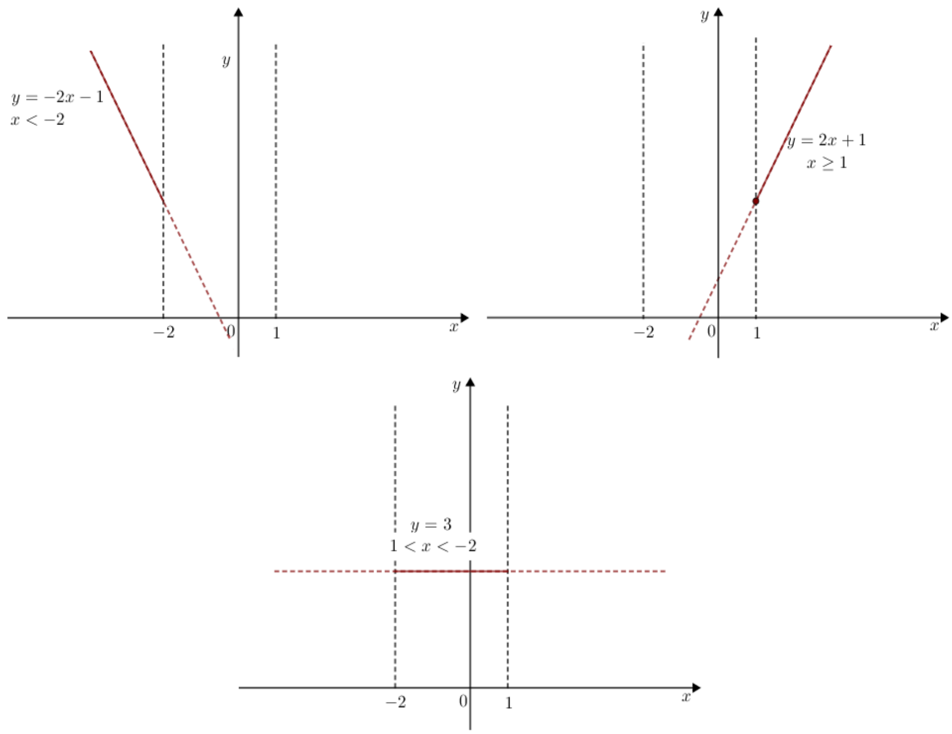


Figura 5.32: Semirrectas que componen a $y = |x-1| + |x+2|$.

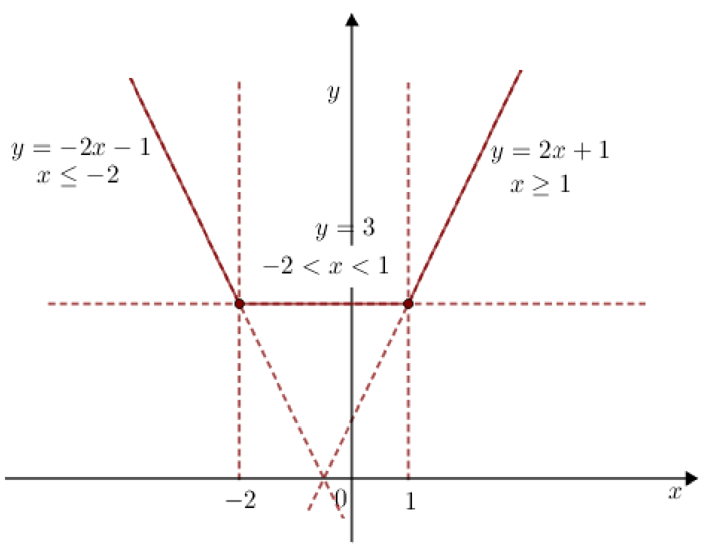


Figura 5.33: $y = |x-1| + |x+2|$.

5.8. Operaciones algébraicas con gráficas de funciones

Se consideran las operaciones algebraicas básicas con las funciones y sus gráficas tales como, suma y resta $y = f(x) \pm g(x)$; multiplicación $y = f(x) \cdot g(x)$; y división $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Para construir este tipo de gráficas, es necesario tener en cuenta que el dominio de definición de la función y es la parte común del dominio de $f(x)$ y $g(x)$.

Los métodos que se enuncian a continuación, son especialmente útiles en los casos, cuando $f(x)$ y $g(x)$ son funciones elementales de diferentes clases.

1. Graficas de la suma (resta) de las funciones: $y = f(x) \pm g(x)$.

   Se necesita construir la gráfica por puntos, sumando o restando las ordenadas de las funciones que corresponden a un mismo valor del argumento, lo cual es más fácil, si se construyen primero las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. Cuando se construye la gráfica de la resta de las funciones, generalmente, no se restan las gráficas, sino que, primero se construye la gráfica $-g(x)$, y después suman las gráficas de $f(x) - g(x)$.

   Ejemplos. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

   a) $y = x + \operatorname{sen} x$.

   Solución. Se construyen las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$(líneas punteadas), y se procede a la suma algebráica de las ordenadas de las gráficas ya construidas que correspondan a un mismo valor del argumento, obteniéndose la gráfica requerida. Esta gráfica está contenida entre las rectas paralelas $y = x - 1$ y $y = x + 1$ (Fig.5.34).

   b) $y = 2^x + (\frac{1}{2})^x$ e $y = 2^x - (\frac{1}{2})^x$.

   Solución. Se obtienen las gráficas, para la primera, sumando las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = (\frac{1}{2})^x$, y para la segunda, restándolas, como antes se indicó (se recomienda en el mismo sistema coordenado) (Fig.5.35).

2. Gráfica del producto de funciones $y = f(x) \cdot g(x)$.

   Se construyen las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y se multiplican los valores de las ordenadas correspondientes a un mismo valor del argumento.

   Ejemplos. Trazar las gráficas para:

   a) $y = x \operatorname{sen} x$.

   Solución. Se construyen las gráficas de la funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$.

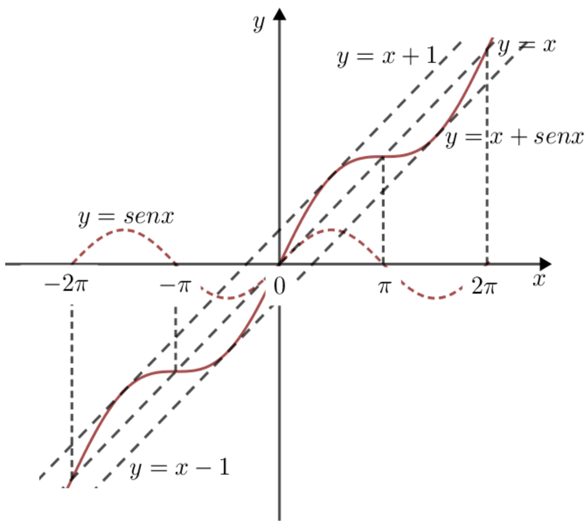


Figura 5.34: $y = x + \operatorname{sen} x$.

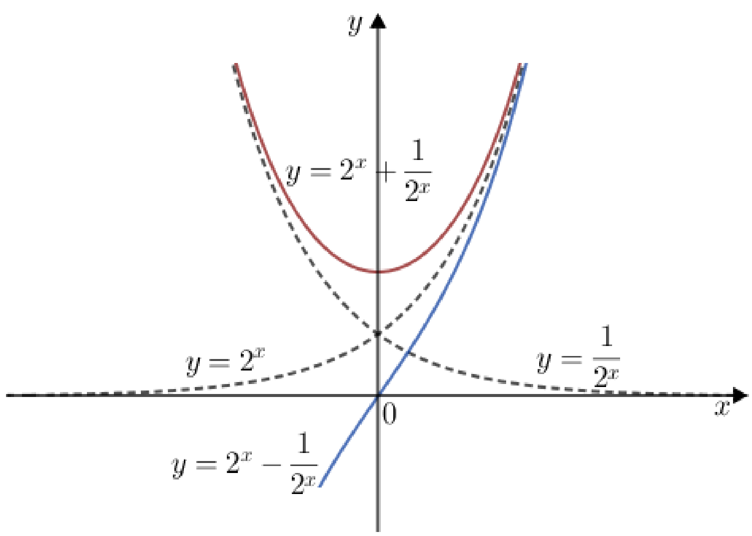


Figura 5.35: $y = 2^x + (\frac{1}{2})^x$, $y = 2^x - (\frac{1}{2})^x$.

La gráfica de la función y se obtiene (como se enunció), multiplicando las ordenadas de estas funciones que correspondan a un mismo valor de la abscisa x.

La función dada, es par ya que $f(-x) = -x \cdot \operatorname{sen}(-x) = -x \cdot -\operatorname{sen} x = x \operatorname{sen} x = f(x)$, por lo que realiza la gráfica para cuando $x \geq 0$, y luego se "refleja" respecto del eje de ordenadas.

La gráfica está comprendida entre las rectas $y = x$ e $y = -x$, además, en los puntos $x = k\pi$, en los cuales $\operatorname{sen} x = 0$, la función se reduce a cero. En los puntos donde $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$, donde $\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow y = x$, donde $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow y = -x$ (Fig.5.36).

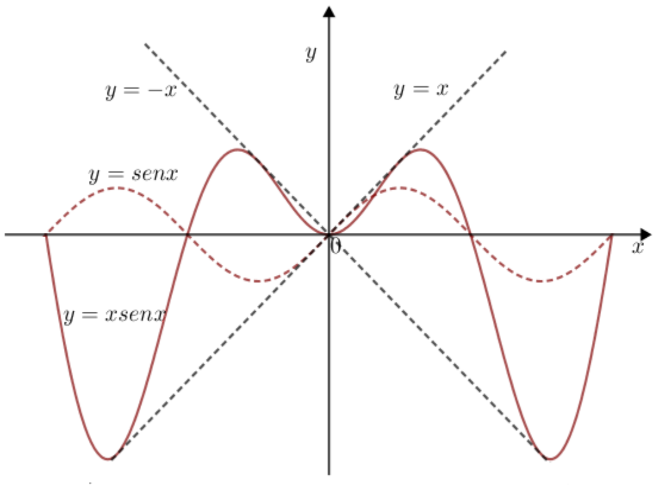


Figura 5.36: $y = x \operatorname{sen} x$.

b) $y = \sqrt[3]{x} \cos x$.

Solución. se construyen las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = \cos x$. Como en el caso anterior, la gráfica de y se obtiene multiplicando los valores de las ordenadas correspondientes (Fig.5.37).

3. Gráfica de las funciones de la forma $y = \frac{1}{f(x)}$; $D_f : f(x) \neq 0$.

El dominio de definición de esta función es el mismo que el de la función $y = f(x)$ con excepción de los valores de x que reducen a cero $f(x)$.

En estos puntos función $y = \frac{1}{f(x)}$ no está definida, es discontinua, y generalmente, tiene asíntotas verticales. Cuando $f(x) \to \pm\infty$, $y \to 0$.

Primero se construye la gráfica $y_1 = f(x)$ y se divide uno (1), entre los valores numéricos de

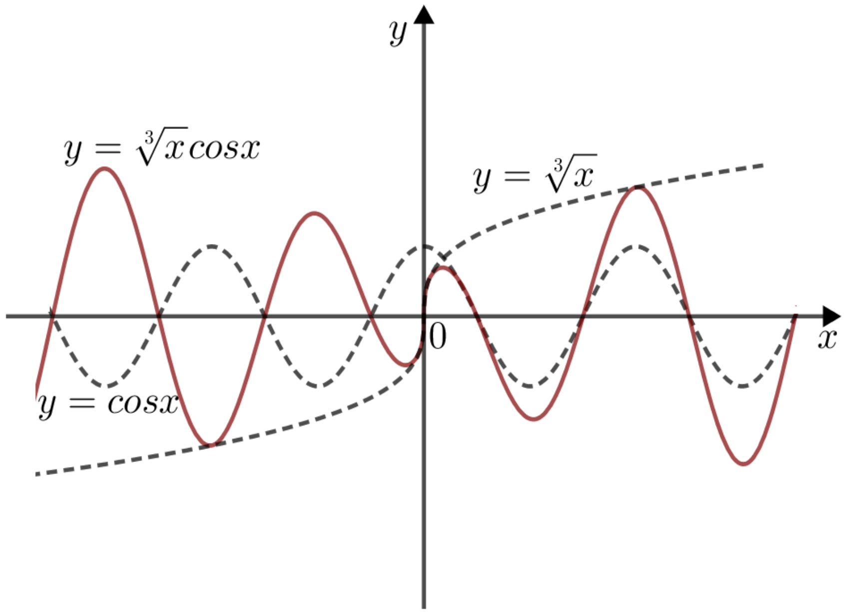


Figura 5.37: $y = \sqrt[3]{x}\cos x$.

las ordenadas de esta función, teniendo en cuenta el signo de cada abscisa, es decir, la función dada se construye por puntos.

Cuando $f(x) = \pm 1$, los valores de la función y e y_1 coinciden.

Ejemplos. Construir la gráfica de las funciones:

a) $y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$.

Solución. se construye la gráfica de la función $y = \cos x$, y como se anotó, se divide 1 entre los valores de las ordenadas de esta gráfica, se obtiene la gráfica de la función dada.

Es evidente que cuando $\cos x \to 0$, $y \to \pm\infty$, es decir, las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son asíntotas verticales. En los puntos donde $\cos x = \pm 1$ $(x = k\pi)$, $y = \pm 1$ (Fig.5.38).

b) $y = \frac{1}{log_2 x}$, $D_f : x > 0$, $log_2 x \neq 0$; $x \neq 1$.

Solución. Como en los casos anteriores, se construye la gráfica de la función $y = log_2 x$ y se divide 1 entre los valores de las ordenadas de esta gráfica y se obtiene la gráfica de $y = \frac{1}{log_2 x}$, cuando $log_2 x \to 0$, $y \to \pm\infty$, lo que significa que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Cuando $x \to +\infty$, entonces $log_2 x \to +\infty$, $y \to 0$, por lo que $y = 0$es asíntota horizontal.

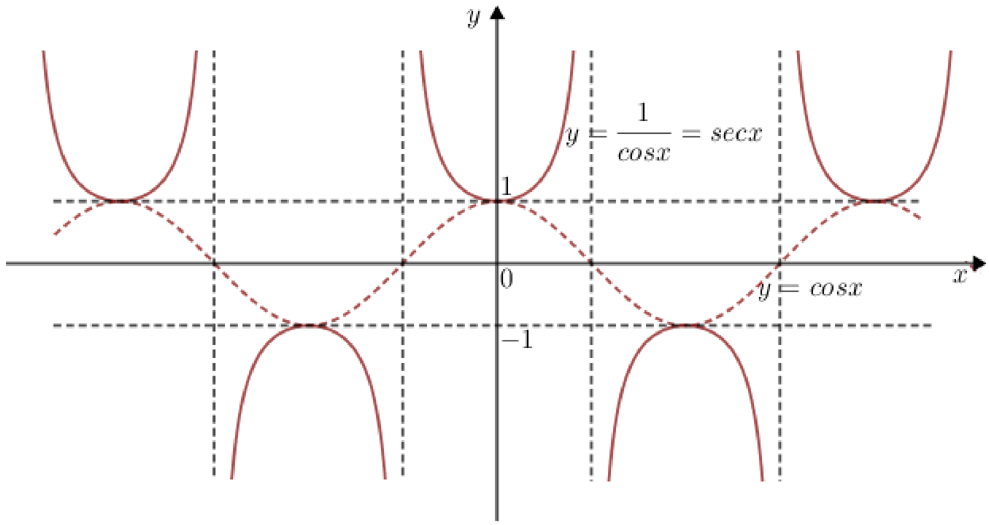


Figura 5.38: $y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$.

Cuando $x \to 0^+$, $log_2 x \to -\infty$, $y \to 0$ (Fig.5.39).

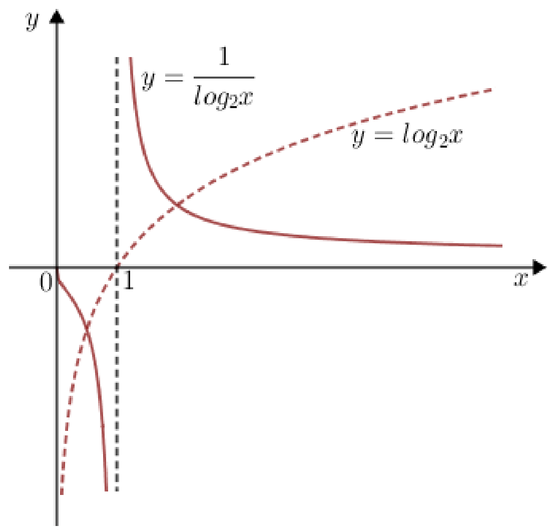


Figura 5.39: $y = \frac{1}{log_2 x}$

4. Gráfica del cociente de dos funciones $y = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$.

   Esta función se puede presentar de la forma $y = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, $D_f : g(x) \neq 0$, es decir, la función está definida para todo valor del argumento, excepto los que reducen a cero $g(x)$.

   Para esto, se construyen las gráficas de las funciones $y = f(x)$, y $y = \frac{1}{g(x)}$, luego se multiplican los valores de las ordenadas correspondientes de estas gráficas teniendo en cuenta el signo.

Ejemplo. Construir la gráfica de la función $y = \frac{\cos x}{x^2}$, $D_f : x \neq 0$, la función está definida para todos los valores de x, excepto, $x = 0$.

Solución. Se construyen las gráficas: $y_1 = \cos x$ y $y_2 = \frac{1}{x^2}$.

Simetría: $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{\cos x}{x^2} = f(x)$ función par, por lo que se construye la gráfica para $x > 0$, y los valores de las ordenadas se repiten para $x < 0$ (reflejo de la gráfica respecto al eje de ordenadas).

En los puntos: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{x^2} = +\infty$, y $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x^2} = +\infty$, significa que el eje O_y es asíntota vertical (Fig.5.40).

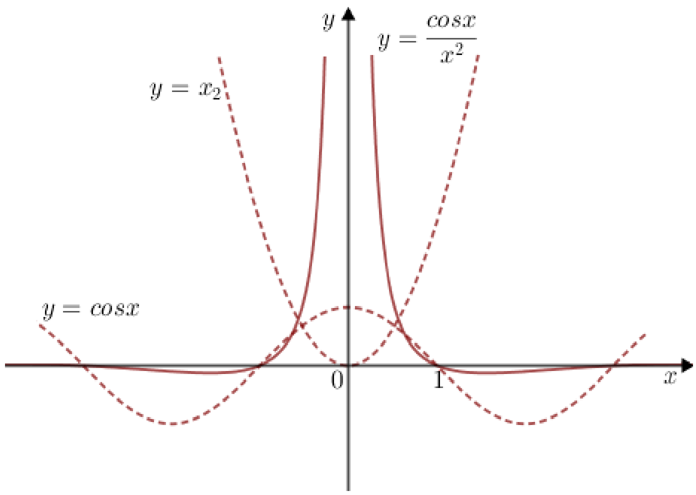


Figura 5.40: $y = \frac{\cos x}{x^2}$.

5.9. Gráficas de funciones compuestas

Para construir la gráfica de una función compuesta $y = g[f(x)]$, se empieza construyendo la gráfica $de f(x)$, y luego se construye la gráfica de la función compuesta por puntos realizando la operación de tomar la función g de la función f.

Se consideran algunos casos:

1. Gráfica de la función $y = [f(x)]^k$.

   Se construye la gráfica de la función $y_1 = f(x)$ y se eleva los valores de las ordenadas de la gráfica construida al índice k.

Ejemplos.

a) Construir la gráfica de la función $y = (\cos x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\cos x}$, $D_f : x \geq 0$.

Simetría: $f(-x) = \sqrt{\cos(-x)} = \sqrt{\cos x} = f(x)$ función par.

Solución. La construcción de la gráfica se realiza sacando la raíz cuadrada de los valores de las ordenadas de la cosinusoide.

En los intervalos en los cuales $\cos x < 0$ la función no tiene gráfica (Fig.5.41).

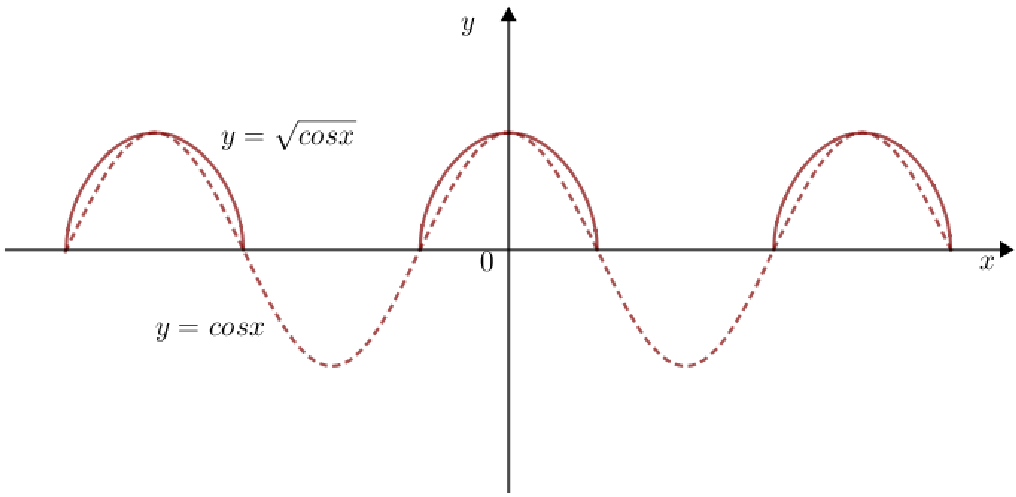


Figura 5.41: $y = (\cos x)^{\frac{1}{2}}$.

.

b) Gráfica de la función $y = (\operatorname{tg} x)^2$, $D_f : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Simetría: $f(-x) = (-tgx)^2 = (\operatorname{tg} x)^2 = f(x)$ función par.

Solución. La gráfica se construye elevando al cuadrado los valores de las ordenadas de la tangensoide que son los mismos para cuándo $x \geq 0$, y $x < 0$, correspondientemente. En los puntos ¡$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, la gráfica tiene asíntotas verticales (Fig.5.42).

.

2. Gráfica de la función $y = a^{f(x)}$ $(a > 0;\ a \neq 1)$.

Se construye la gráfica de $y_1 = f(x)$, y luego, se eleva la base a al índice igual a los valores de las ordenadas de la gráfica $y_1 = f(x)$, y se construye la gráfica de la función $y = a^{f(x)}$ por puntos. En los puntos donde $f(x) = 0$, $y = 1$; donde $f(x) = 1$, $y = a$.

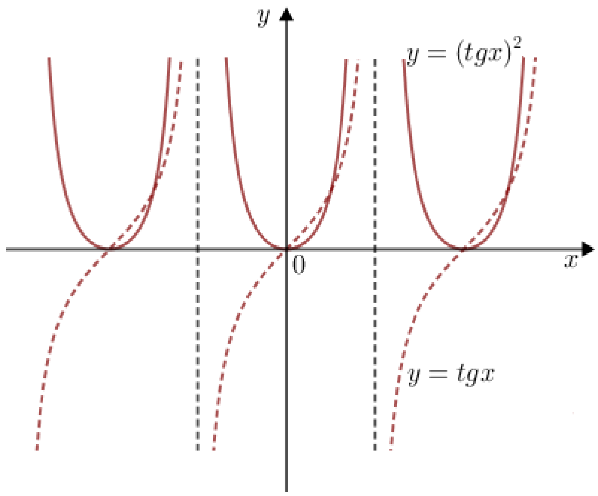


Figura 5.42: $y = (\operatorname{tg} x)^2$.

Para el caso en el cual: $a > 1$ cuando $f(x) \to \infty$, $y \to \infty$, y cuando $f(x) \to -\infty$, $y \to 0$.

Para cuando $a < 1$, si $f(x) \to \infty$, $y \to 0$, y si $f(x) \to -\infty$, $y \to \infty$.

En la práctica, cuando se construye las gráficas cuando $a < 1$, es mejor llevarla a la forma donde $a > 1$ (ejemplo $y = (\frac{1}{2})^{f(x)} = 2^{-f(x)} = 2^{\varphi(x)}$).

Ejemplos.

a) Construir la gráfica de la función $y = (\frac{1}{2})^{\operatorname{sen} x}$.

Solución. se representa la función de la forma $y = 2^{\operatorname{sen} x} = y = 2^{-\operatorname{sen} x}$, se construye la gráfica $y = -\operatorname{sen} x$ y se eleva 2 al índice igual a los valores de la ordenada de esta gráfica (Fig.5.43).

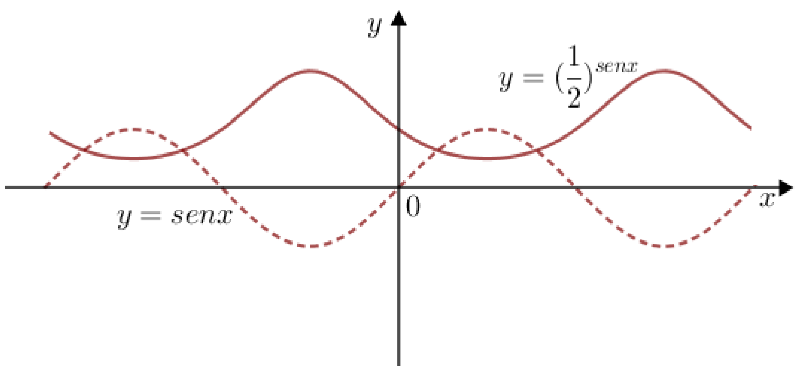


Figura 5.43: $y = (\frac{1}{2})^{\operatorname{sen} x}$.

b) Construir la gráfica de la función $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Solución. se construye la gráfica $y_1 = \frac{1}{x}$ $D_f : x \neq 0$.

Simetría: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ función impar, se eleva 2 a los valores de las ordenadas de esta gráfica. Cuando $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, $y \to 1$, entonces, $y = 1$ es asíntota horizontal. Cuando $x \to 0^+$, $y \to +\infty$, o sea que el eje de ordenadas es asíntota vertical. Si $x \to 0^-$, $y \to 0$, la gráfica se acerca al origen de coordenadas (Fig.5.44).

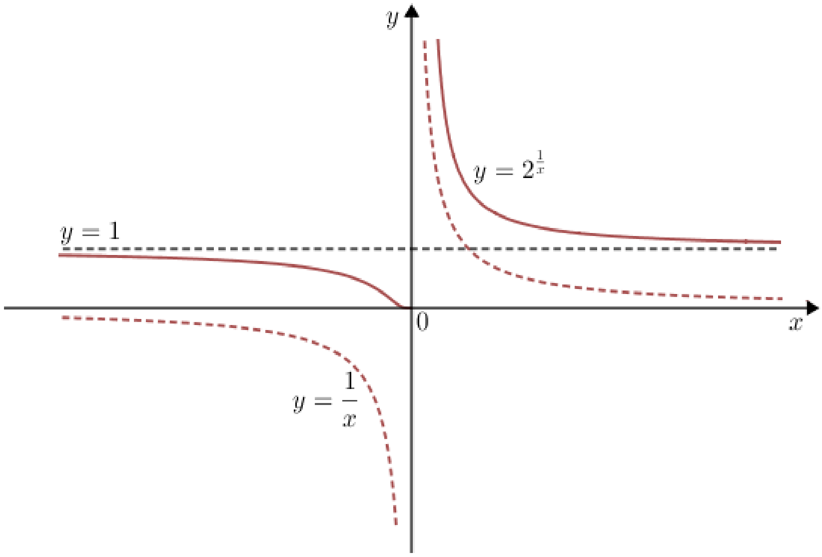


Figura 5.44: $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

3. Gráfica de la función $y = \log_a f(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ $D_f : x > 0$, solo existe para $x > 0$ por tanto, no tiene simetría.

   Para construir la gráfica, como en los casos anteriores, se construye la gráfica $y_1 = f(x)$, y se calcula los logaritmos (con base en a) de los valores de las ordenadas de esta función, construyendo por puntos, la gráfica de la función dada.

   Para cuando $f(x) \to 0^+$, $y \to -\infty$, es decir, el eje O_y es asíntota vertical; cuando $f(x) = 1$, la gráfica corta el eje de abscisas (cero de la función); cuando $f(x) = a$, el valor de la función es igual a 1.

   Si $a > 1$, cuando $f(x) \to \infty$, $y \to \infty$; si $a < 1$, cuando $f(x) \to \infty$, $y \to -\infty$, y cuando $f(x) \to 0^+$, $y \to \infty$.

   En la práctica, cuando $a < 1$, la construcción de la gráfica es mejor llevarla a la forma $a > 1$

(por ejemplo, $y = log_{\frac{1}{2}} f(x) = -log_2 f(x)$.

Ejemplos.

a) Construir la gráfica de la función $y = \log_{\frac{1}{3}} \cos x = -\log_3 \cos x$.

Solución. Representando la función de la forma $y = -\log_3 \cos x$, se construye la gráfica $y_1 = \cos x$, luego se calcula los logaritmos con base 3 de los valores de las ordenadas de esta gráfica, obteniendo la de $y = \log_3 \cos x$ (línea punteada), después $y = -\log_3 \cos x$, se obtiene la gráfica que solo existe para los valores donde $\cos x > 0$ (Fig.5.45).

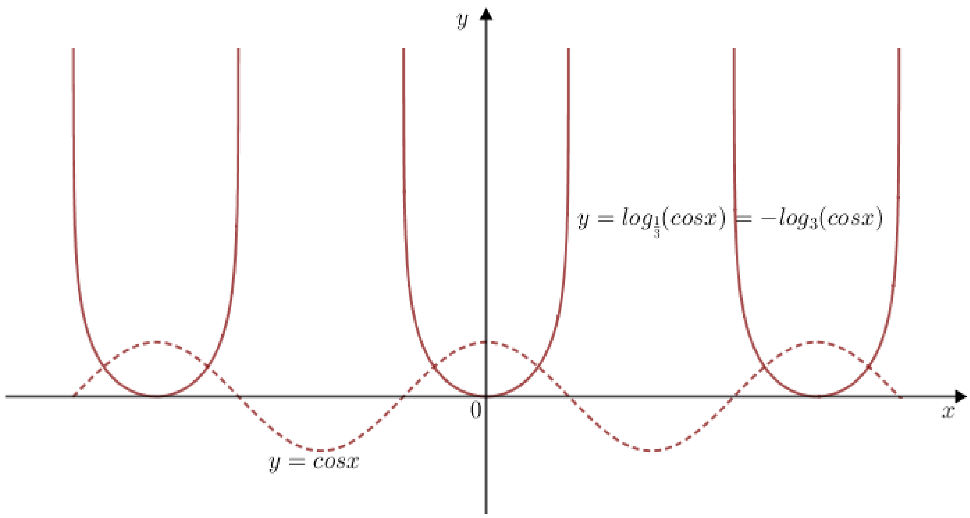


Figura 5.45: $y = \log_{\frac{1}{3}} \cos x = -\log_3 \cos x$.

4. Gráfica de funciones

Para la construcción de las gráficas de esta clase de funciones, así como en los casos anteriores, se necesita construir primero la de $y_1 = f(x)$ y luego, teniendo en cuenta los valores de las ordenadas de esta función, calcular los correspondientes de las funciones trigonométricas de este argumento, obteniendo la gráfica de la función pedida.

Las gráficas de $y = \operatorname{sen} f(x)$ y $y = \cos f(x)$ siempre estarán en la región comprendida entre las rectas $y = \pm 1$.

Ejemplos.

a) Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $D_f : x \neq 0$, simetría: $f(-x) = \operatorname{sen}(-\frac{1}{x}) = -\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = -f(x)$, función impar (simétrica respecto al origen de coordenadas).

Solución. después de construir la gráfica $y = \frac{1}{x}$ (línea punteada), se calcula el seno de los valores de las ordenadas de esta gráfica.

Siendo la función impar se construye la gráfica para cuando $x > 0$ y se reflejan respecto al eje de ordenadas pero cambiando al signo contrario.

Como $\lim x \to \infty \frac{1}{x} = 0$, $y \to 0$, es decir, el eje de abscisas es asíntota horizontal.

Así mismo, $\lim x \to 0 \frac{1}{x} = \infty$, la función oscila entre 1 y -1, y la frecuencia de las oscilaciones aumenta a medida que se acerca al origen del sistema coordenado (Fig.5.46).

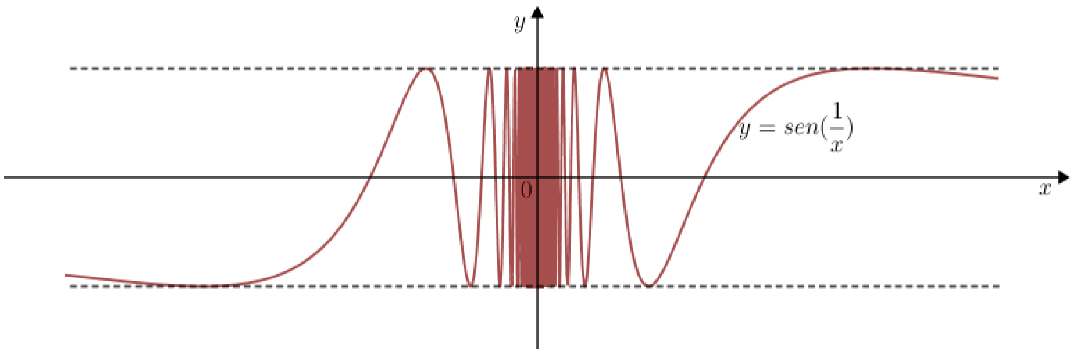


Figura 5.46: $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

$b)$ Gráfica de la función $y =$ctg$(\cos x)$, $D_f : \cos x \neq 0$, $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$.

Solución. Simetría: $f(-x) = \text{ctg}(\cos(-x)) =ctg(\cos x) = f(x)$, función par.

Se calculan los valores de la cotangente de las ordenadas de la gráfica $y_1 = \cos x$ que se construye primero (Fig.5.47).

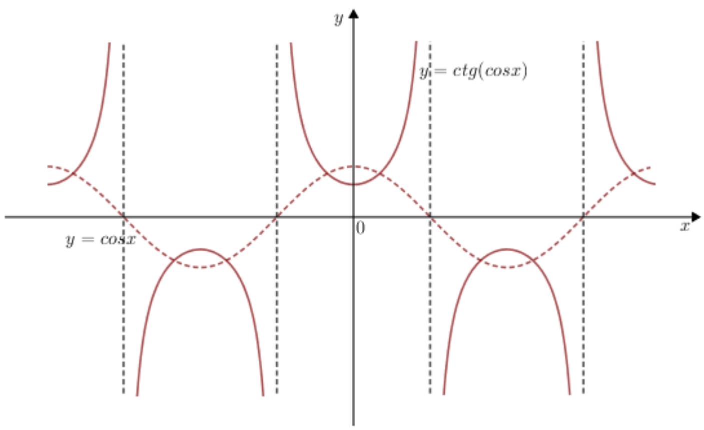


Figura 5.47: $y =$ctg$(\cos x)$

CAPÍTULO 6

Lugar geométrico de los puntos

Lo hasta ahora expuesto, consiste en que para representar gráficamente una función de la forma $y = f(x)$ se entiende, que para cada valor asignado al argumento dado, le corresponde un único valor de la función, es decir, se forman parejas ordenadas: $(x_i,\ y_i\ )$ donde $y_i = f(x_i)$, $(i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$.

Pero en la práctica, con frecuencia se halla tales dependencias entre las variables x e y, en las cuales, a cada valor de x le corresponden dos o más de y. La dependencia entre estas variables, incluso puede darse en forma de inecuaciones.

Estas dependencias, están estrechamente ligadas al concepto de lugar geométrico de los puntos.

Lugar geométrico de los puntos, que tiene ciertas propiedades, se llama al conjunto, al cual pertenecen, tales y solamente tales puntos, que tienen estas propiedades.

En esta definición se señalan las propiedades, que caracterizan al lugar geométrico del los puntos, que pueden estar dados mediante expresiones de la forma $F(x, y) = 0$, ó $F(x, y) \geq 0$.

Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos, las coordenadas del cual satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, es un círculo unitario $(r = 1)$ y con centro en el origen del sistema de coordenadas (Fig.6.1).

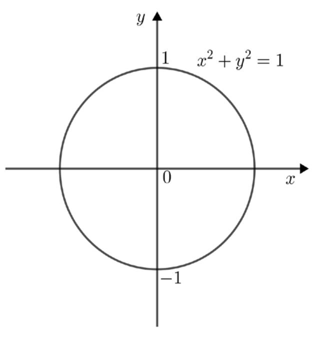


Figura 6.1: $x^2 + y^2 = 1$.

El lugar geométrico de los puntos, las coordenadas del cual, satisfacen la inecuación $x^2 + y^2 < 1$, es la parte del plano (x, y), comprendido dentro del círculo. A cada valor x en el intervalo $-1 < x < 1$, en primer caso corresponden dos valores, en segundo caso, un conjunto infinito de valores de y (Fig.6.2).

Todas las gráficas de funciones $y = f(x)$ estudiadas hasta ahora, se pueden considerar como el lugar geométrico de los puntos, las coordenadas de los cuales satisfacen la ecuación dada $y = f(x)$.

Así, la construcción de los lugares geométricos de los puntos, las coordenadas de los cuales satisfacen cierta relación, es una tarea más general, que la construcción de la gráfica de una función.

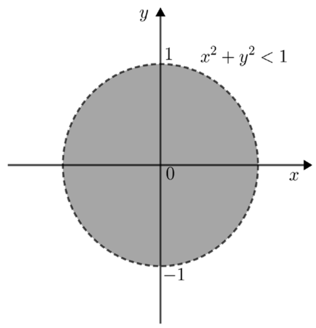


Figura 6.2: $x^2 + y^2 < 1$.

En este capítulo se considera, como ejemplo, un problema dedicado a la búsqueda en el plano (x, y) del lugar geométrico de los puntos, cuyas coordenadas satisfacen la correlación dada mediante las expresiones $F(x, y) = 0$ y $F(x, y) \geq 0$.

Lugar geométrico de los puntos de la forma $|y| = f(x)$

Un importante caso, es de la construcción del lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $|y| = f(x)$.

Es necesario advertir, que para los puntos para los cuales $f(x) < 0$, esta correlación no tiene significado, ya que $|y| \geq 0$. Según la definición de valor absoluto, la ecuación dada se puede representar:

$$|y| = \begin{cases} f(x) & \text{cuando} \quad y \geq 0 \\ -f(x) & \text{cuando} \quad y < 0 \end{cases}$$

Para construir este lugar geométrico de los puntos dado, se construye la gráfica de la función $y = f(x)$, y separando la parte de la misma donde $f(x) \geq 0$, se complementa reflejando la gráfica respecto al eje O_x. Puede ser necesario que para construir la gráfica $y = f(x)$, utilizar todas las reglas antes descritas.

Ejemplos.

1. $|y| = 2$.

   Solución. Se construye la gráfica $y = 2$ y su reflejo respecto al eje O_x. De esta forma, el lugar geométrico de los puntos buscado, son las rectas paralelas $y = \pm 2$ (Fig.6.3).

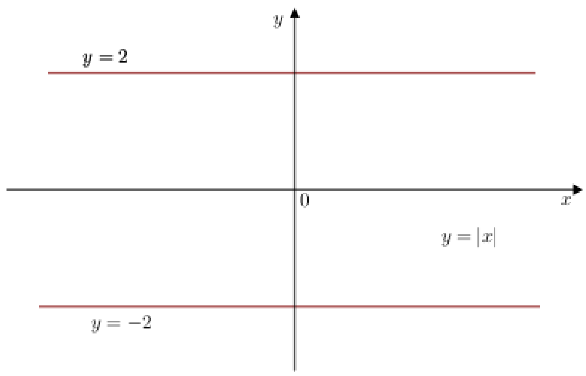


Figura 6.3: $|y| = 2$.

2. $|y| = x^2 - 3x + 2$.

   Solución. Para el intervalo $1 < x < 2$ la función es negativa y por tanto, la ecuación pierde significado. El lugar geométrico de los puntos buscado se compone de partes de la parábola $y = x^2 - 3x + 2$ en los semi-intervalos $x \leq 1$, y $x \geq 2$ y su reflejo respecto al eje de las abscisas (Fig.6.4).

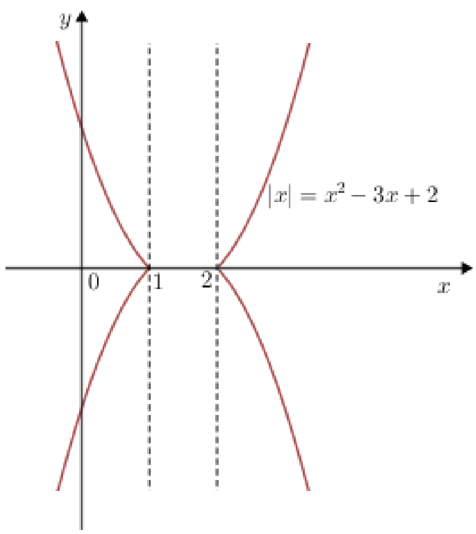


Figura 6.4: $|y| = x^2 - 3x + 2$.

La construcción del lugar geométrico de la forma $|y + a| = f(x)$ se reduce a la construcción de la gáfica de $|y| = f(x)$ y su desplazamiento a lo largo del eje O_x en $|a|$ unidades.

3. $|y+1| = \operatorname{sen} x$.

   Solución. Se construye la gráfica $|y| = \operatorname{sen} x$; son semiondas que existen solamente en los intervalos donde $\operatorname{sen} x \geq 0$, y se desplaza el eje de abscisas en una unidad hacia arriba (Fig.6.5).

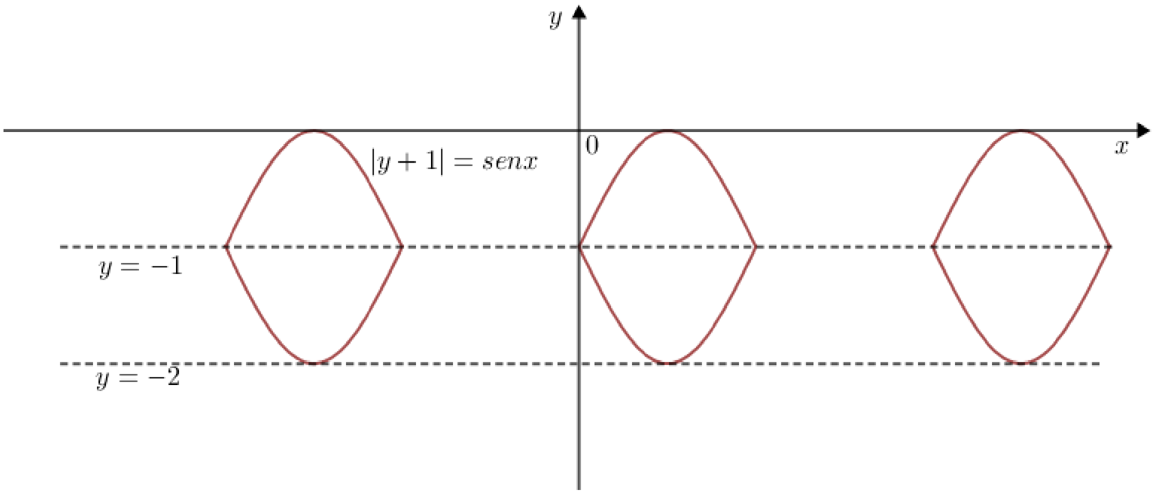


Figura 6.5: $|y+1| = \operatorname{sen} x$.

Cuando se necesita hallar el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen una correlación más general, primero se aplica la definición de valor absoluto, se separa la correlación dada en ecuaciones, para cada una de las cuales se cumple en una región determinada, y se halla el lugar geométrico de los puntos en cada una de estas por separado.

Es decir, la búsqueda del lugar geométrico de los puntos en un caso general se reduce a dos momentos: determinar las regiones en el plano (x, y), en cada una de las cuales el signo de módulo puede definirse, y la determinación de las ecuaciones, sin el signo de valor absoluto, a las cuales se puede llevar la dependencia buscada en las regiones encontrados.

Por ejemplo, para el caso particular la dependencia de la forma $|y| = f(x)$, el plano (x, y) se divide en dos semiplanos: el superior $y \geq 0$, y el inferior $y < 0$. Para cuando $y \geq 0$ la dependencia buscada se expresa mediante la ecuación $y = f(x)$, y cuando $y < 0$, la ecuación es $y = -f(x)$.

Observación: A los casos anteriores, son equivalentes las expresiones de la forma $y^2 = f(x)$, $(y+a)^2 = f(x)$, ya que $\sqrt{x^2} = |x|$ y $\sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$.

CAPÍTULO 7

Aplicación de las gráficas de funciones en la resolución de problemas

La habilidad para construir gráficas no es un único fin. Con frecuencia las gráficas están ligadas al seguimiento del comportamiento de las funciones.

Sin embargo, la necesidad de construir gráficas no solamente se reduce a esto. En una serie de casos, las gráficas facilitan la resolución de ecuaciones e inecuaciones, simplificando y acortando los desarrollos analíticos, y en varios casos, es el único método de resolverlos. Además, el método gráfico se aplica en la resolución de muchos problemas propuestos. Se exponen un número de ejemplos como ilustración.

7.1. Resolución de un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema es una dependencia funcional entre las variables x e y. Las dos funciones f_1 y f_2 pueden ser representadas gráficamente.

Las coordenadas x e y de los puntos de corte o de tangencia de estas gráficas son la solución buscada para el sistema de ecuaciones. El número de puntos comunes de las gráficas son el conjunto solución. Si no hay puntos comunes, el sistema no tiene solución.

Ejemplos.

1. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2(y-1) = 2y \\ y = 2^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

Solución. como

$$\begin{aligned} x^2(y-1) &= 2y \\ x^2y - x^2 - 2y &= 0 \\ y(x^2-2) &= x^2 \\ y &= \frac{x^2}{x^2-2} \end{aligned}$$

Las ecuaciones del sistema se pueden escribir de la forma:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{x^2-2} \\ y = \sqrt{2^x} \qquad (Fig.7,1) \end{cases}$$

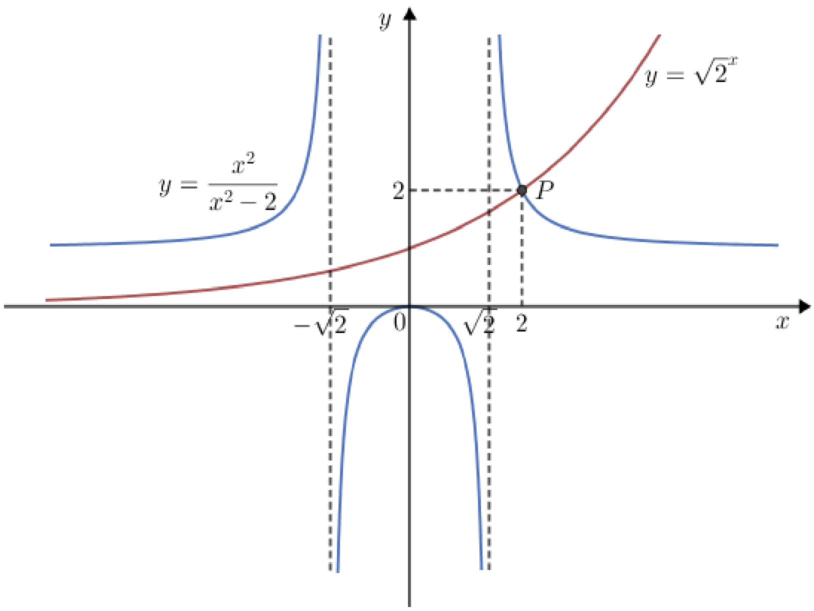


Figura 7.1: $y = \frac{x^2}{x^2-2}$, $y = \sqrt{2^x}$.

Las gráficas de estas funciones se cortan en el punto $(2, 2)$. Estos valores $x = 2$ e $y = 2$, son la solución del sistema dado. De la gráfica, es evidente que el corte es único.

2. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y+1 = x(x+2) \\ |x|\, y = 1 \end{cases}$$

Solución. Es necesario construir las gráficas $y = x^2 + 2x - 1$ y $y = \frac{1}{|x|}$(Fig.7.2).

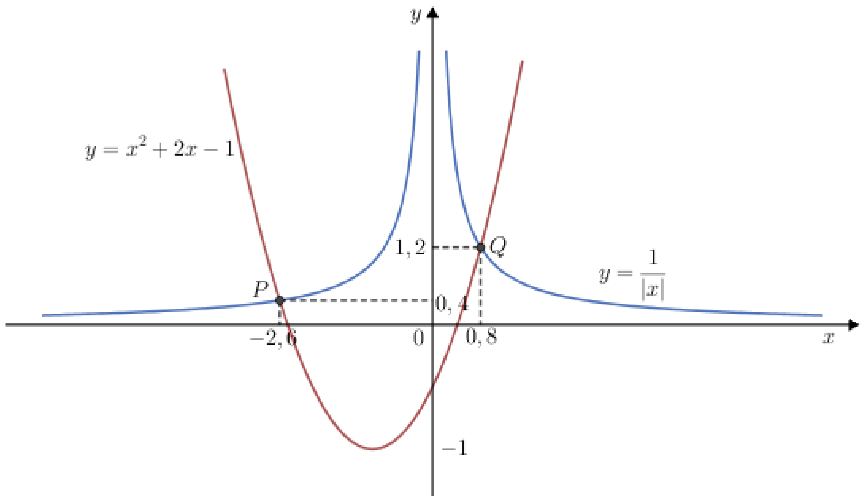


Figura 7.2: $y = x^2 + 2x - 1$, $y = \frac{1}{|x|}$.

Estas gráficas tienen dos puntos de corte, es decir, el sistema tiene dos soluciones, que aproximadamente son: $(0,8; 1,2)$ y $(-2,6; 0,4)$.

7.2. Resolución de ecuaciones

Para resolver una ecuación con una incógnita en forma gráfica, se escriben todos sus miembros del lado izquierdo igualándola a cero: $f(x) = 0$. Luego se construye la gráfica $y = f(x)$.

Las abscisas de los puntos de corte de esta gráfica con el eje $= O_x$ son iguales a las raíces de la ecuación dada. Si tales puntos no existen, entonces la ecuación no tiene solución.

En algunos casos al resolver esta clase de ecuaciones, puede ser viable utilizar otro método. Para esto, las ecuaciones se escriben de la forma $f_1(x) = f_2(x)$, y se cambia por el sistema,

$$y = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases}$$

que se resuelve en forma gráfica. Las abscisas de los puntos de corte o de tangencia de las gráficas $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son las raíces de la ecuación dada.

Ejemplos.

1. Hallar el número de raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = \log x$. El dominio de la función log?x es $x > 0$, por tanto la solución se busca en el semiplano donde $x \geq 0$.

   Solución. al construir las gráficas $y = \operatorname{sen} x$ y $y =$ log?x se establece que la ecuación tiene 3 raíces (soluciones)(Fig.7.3).

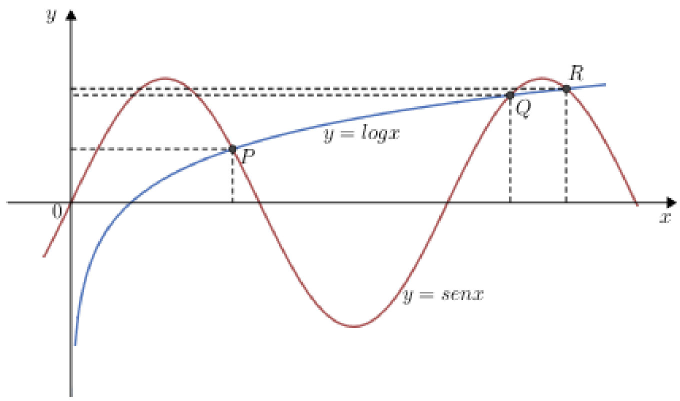


Figura 7.3: Solución gráfica de $\operatorname{sen} x = \log x$.

2. Resolver la ecuación $\left|x^2 - 1\right| = \frac{1}{x}$.

   Solución. Se construyen las gráficas $y_1 = \left|x^2 - 1\right|$ y $y_2 = \frac{1}{x}$. El punto de corte de las gráficas es, aproximadamente, $x \approx 1,15$ (Fig.7.4).

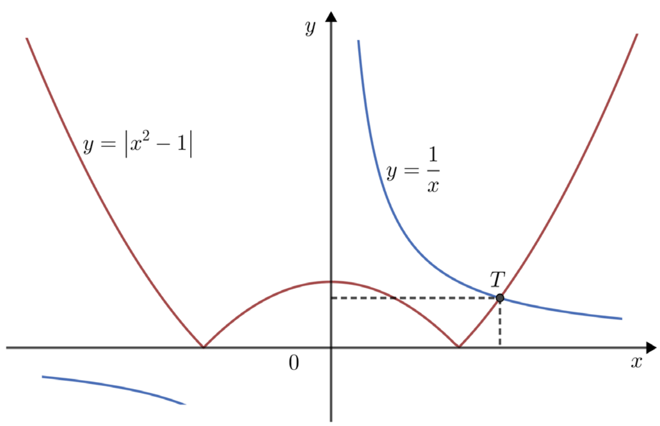


Figura 7.4: Solución gráfica de $\left|x^2 - 1\right| = \frac{1}{x}$.

7.3. Resolución de inecuaciones con una incógnita

La resolución de inecuaciones gráficamente, tiene una cercana analogía con la resolución de ecuaciones, solamente que en lugar de puntos separados, se hallan intervalos en el eje numérico.

Ejemplos.

1. Resolver la inecuación $\arccos x \leq \frac{\pi}{2}|x-1|$.

   Solución: para la construcción de las gráficas $y_1 = \text{arccos}\ x$, e $y_2 = \frac{\pi}{2}|x-1|$, se establece: para y_1, $D_f : -1 \leq x \leq 1$, para y_2 se tiene:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x-1 < 0, x < 1 \end{cases}$$

   Entonces, la solución debe estar comprendida en el segmento $[-1, 1]$, y es el conjunto de los valores de x, para los cuales la gráfica de y_1 están por debajo de los de la gráfica de y_2, además, en la solución están comprendidos los valores de las abscisas de los puntos de corte de las dos gráficas (Fig.7.5).

   De las gráficas de las funciones se puede ver que la solución es: $-1 \leq x \leq 0$, $x = 1$.

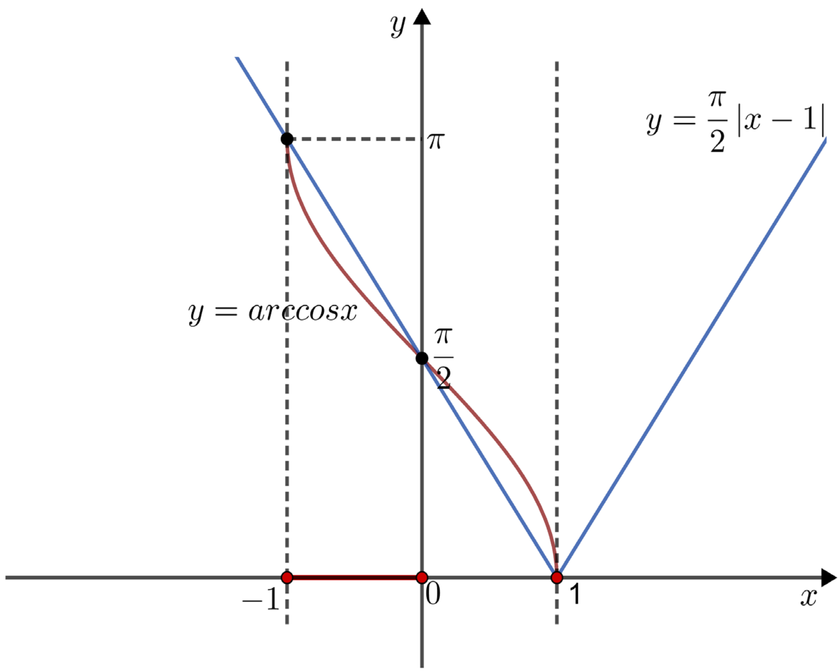


Figura 7.5: Solución gráfica de $\arccos x \leq \frac{\pi}{2}|x-1|$.

2. Resolver la inecuación $log_2(x+1)+1 < 2^x$.

   Solución. la función $y_1 = log_2(x+1)$ tiene su dominio $D_f : x+1 > 0$, esto es $x > -1$, la función $y_2 = 2^x$, existe para $(-\infty, \infty)$ (Fig.7.6).

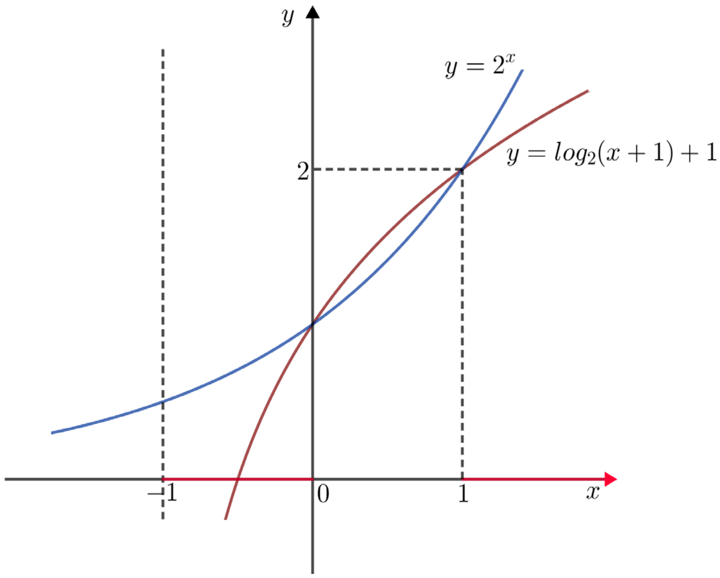


Figura 7.6: Solución gráfica de $log_2(x+1)+1 < 2^x$.

   Los puntos de la gráfica $y_1 = log_2(x+1)+1$ están por debajo de $y_2 = 2^x$ en: $-1 < x < 0$, $1 < x < \infty$.

7.4. Resolución de inecuaciones con dos incógnitas

Se llama solución de una inecuación con dos incógnitas x e y, a cualquier pareja de números, x_0 e y_0 que satisfacen esta inecuación. Gráficamente esto corresponde a los puntos dados con coordenadas $(x_0,\, y_0)$.

El conjunto de todos los puntos, las coordenadas de los cuales satisfacen cierta inecuación, es su conjunto solución.

Para la solución gráfica de una inecuación con dos incógnitas, es necesario construir las gráficas de las funciones $y = f(x)$ (para la inecuación de la forma $y > f(x)$ ó $y < f(x)$ o el lugar geométrico de los puntos $F(x,y) = 0$ (para las inecuaciones de la forma $F(x,y) \geq 0$).

Estas construcciones dividen el plano (x,y) en dos o más regiones. La región en la cual se cumple la inecuación dada es su campo (conjunto) de soluciones.

Ejemplos.

1. Resolver la inecuación $y > x^2 - 5x + 4$.

   Solución. La gráfica $y = x^2 - 5x + 4$ es una parábola. Las coordenadas de cualquier punto que se encuentre por encima de la parábola, satisfacen la inecuación dada, donde los puntos de la misma no forman parte de la solución (Fig.7.7).

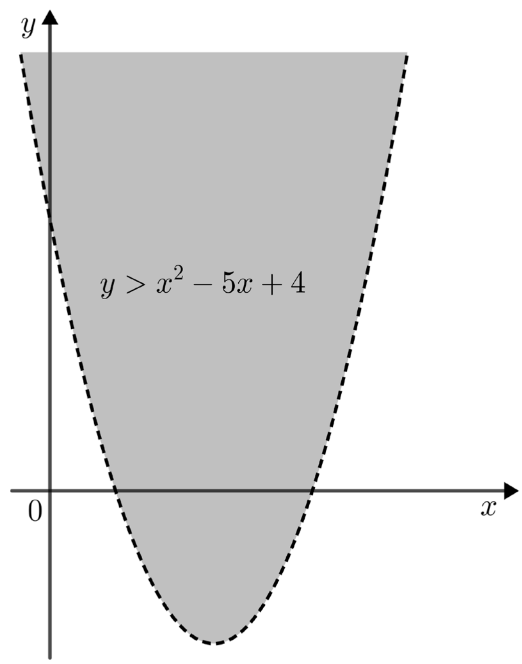


Figura 7.7: Solución gráfica de $y > x^2 - 5x + 4$.

2. Resolver la inecuación $\log(y - x) \leq 0$; $D_f : y - x > 0$, $y > x$.

   Solución. teniendo en cuenta el dominio de definición de la función y que la parte negativa de la función está entre 0 y 1 su resolución es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{cases} y - x > 0 \\ y - x \leq 1 \end{cases}$$

   Las gráficas de las funciones $y = x + 1$ y $y = x$ son rectas paralelas.

   El campo de solución de la inecuación $y - x \leq 1$ es el semiplano, por debajo de la recta $y = x + 1$, incluyendo sus puntos. El campo de solución de la inecuación $y - x > 0$, es el semiplano por encima de la recta $y = x$.

La región común de estos semiplanos (ó su intersección), evidentemente contiene los puntos, que satisfacen las dos inecuaciones (región sombreada).

Consecuentemente, el conjunto solución de la inecuación $\log(y-x) \leq 0$, es el corredor comprendido entre las dos rectas (región sombreada), además, los puntos de la recta de frontera $y = x + 1$, tambien forman parte de la solución (Fig.7.8).

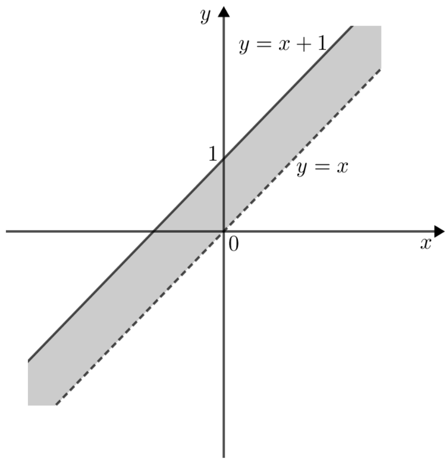


Figura 7.8: Solución gráfica de $\log(y-x) \leq 0$.

7.5. Importancia del método gráfico

La representación gráfica de la dependencia funcional entre los valores que caracterizan uno u otro fenómeno halló una amplia difusión y aplicación en todas las ciencias naturales, en la técnica y en variados campos de la actividad humana.

Algunas veces, como ya se anotó, es mediante estas representaciones, la única forma de encontrar la solución a problemas que se plantean en no pocas situaciones.

Ejemplo.

¿A qué altura máxima H respecto a la superficie de la Tierra con ayuda de un cohete de una etapa se puede llevar un satélite, suponiendo que su masa en toneladas depende de la altura de la órbita según la fórmula $M = 0,5 + \sqrt{H}$ (H se calcula en miles de kilómetros)?. La masa inicial del cohete es $M_0 = 5T$ (T-toneladas), la velocidad de salida de los gases del soplo del motor, $V_0 = 4,5km/seg$.

Consideraciones:

1. Se supone que la masa del satélite crece según su alejamiento de la Tierra en la medida del

necesario crecimiento de la potencia de los radio aparatos para la transmisión de datos a la Tierra, que se acompaña del crecimiento del peso del satélite.

2. La masa del satélite depende del radio de su órbita R, que se calcula desde el centro de la Tierra según la fórmula: $M = \frac{M_0}{10^k}$, donde $K = \frac{\sqrt{g \cdot R}}{2{,}3V_0}$, y $g = 9,8m/seg^2$-aceleración por la fuerza de gravedad.

Solución. para empezar se simplica la última expresión, reeplazando los valores numéricos de M_0, g, V_0, y expresando R a través de H de la forma: $R = (6 + H)1000km$ (se toma el radio de la tierra igual a $6000km$).

Entonces: $M = \frac{5}{10^{0,3\sqrt{6+H}}}$. Se hace evidente que el problema consiste en resolver la ecuación: $\frac{5}{10^{0,3\sqrt{6+H}}} = 0,5 + \sqrt{H}$, las raices de la cual no se pueden hallar en forma analítica, utilizando el método gráfico para resolverla, se construyen las gráficas de las funciones: $y = \frac{5}{10^{(0,3\sqrt{6+H})}}$ y $y = 0,5 + \sqrt{H}$ (Fig.7.9).

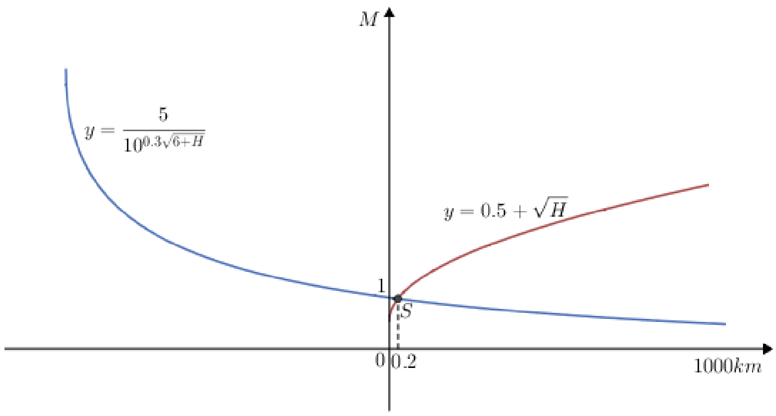


Figura 7.9: Solución gráfica de $\frac{5}{10^{0,3\sqrt{6+H}}} = 0,5 + \sqrt{H}$.

7.6. Ejercicios III

1. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

   a)$y = \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$

   b)$y = \operatorname{sen} x - |\operatorname{sen} x|$

   c)$y = x^2(2 - x^2)$ en el intervalo $[-3, 3]$

   d)$y = \frac{x}{2} + 2^{(-x)}$ en el intervalo $[0, 5]$

   e)$y = 2\operatorname{sen}(2x - 1)$ por etapas, partiendo de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen} 2x$, ...

f)$y = \operatorname{sen} x - |\operatorname{sen} x|$

g)$y = x^2(2 - x^2)$ en el intervalo $[-3, 3]$

h)$y = \frac{x}{2} + 2^{(-x)}$ en el intervalo $[0, 5]$

2. Resolver gráficamente las ecuaciones:

   a)$\log x = x$ b)$2x{+}1 = x^2$ c)$\log_2 x = \frac{1}{x}$ d)$\pm\sqrt{2-x} = \sqrt{x-1}$

   e)$2^x = 2x$ f)$3^x = 3x$ g)$2^x = x + 2$ h)$\log_2 x = x - 1$

   i)$\log_2 ?(x+3) = 3 - x$ j)$2^x = x^2$

3. Resolver gráficamente las inecuaciones:

   a)$\left|x^2 - 1\right| \leq 1$ b)$\operatorname{sen} x > 1 - x$ c)$x \leq (x+1)^2$ d)$\operatorname{tg} 2x > 1 - 2x$

   e)$\sqrt{1-x} > \frac{1}{x+1}$ f)$2x - 3 > 0$

4. Resolver los sistemas de desigualdades:

   a)$3x + 2 > 0$ $\begin{cases} \frac{x}{2} + 3 > 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases}$

   b)Gráficamente.

5. Resolver la inecuación $x \operatorname{sen} y < 0$, teniendo en cuenta que equivale a resolver los sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \operatorname{sen} y < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ \operatorname{sen} y > 0 \end{cases}$$

CAPÍTULO 8

Sistema coordenado polar

Las gráficas de ciertas funciones, también se pueden representar en otro sistema de coordenadas en el plano, el de coordenadas polares.

Las *coordenadas polares* son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo. Este sistema es ampliamente utilizado en matemáticas y física.

Como sistema de referencia se toma:

1. Un punto O del plano, al que se llama *polo u origen del sistema*.
2. Una recta dirigida (o rayo, o segmento OM) que pasa por O, llamada *eje polar* (equivalente al eje x del sistema cartesiano) (Fig.8.1).

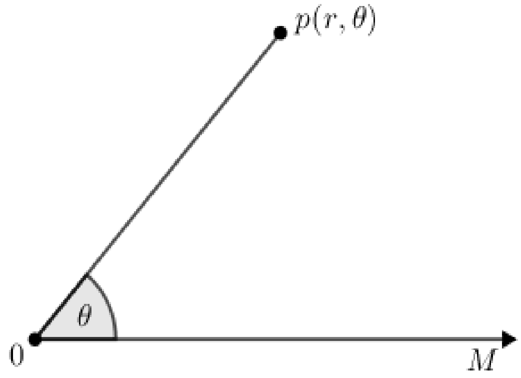


Figura 8.1: Sistema coordenado polar.

Con este sistema de referencia y una unidad de medida métrica (para asignar distancias entre cada par de puntos del plano), todo punto P del plano corresponde a un par ordenado (r, θ) donde r es la distancia de P al origen y θ es el ángulo formado entre el eje polar y la recta dirigida OP que va de O a P.

El valor θ crece en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj y decrece en sentido opuesto.

La distancia r ($r \geq 0$) se conoce como la *coordenada radial* o *radio vector*, mientras que el ángulo es la *coordenada angular* o *ángulo polar*.

En el caso del origen, O, el valor de r es cero, pero el valor de θ es indefinido. En ocasiones se adopta la convención de representar el origen por $(0, 0°)$.

8.1. Representación de puntos en coordenadas polares

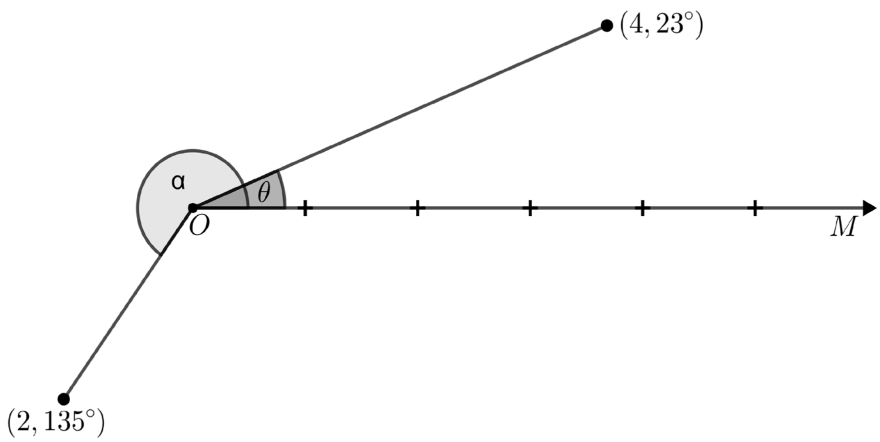


Figura 8.2: Representación de puntos en coordenadas polares.

En la figura 8.2 se representa un sistema de coordenadas polares en el plano, el centro de referencia (punto O) y la línea sobre la que se miden los ángulos.

Para referenciar un punto se indica la distancia al centro de coordenadas y el ángulo sobre el eje OM.

Ejemplos.

1. El punto $(4, 23°)$ indica que está a una distancia de 4 unidades desde O, medidas con un ángulo de 23° sobre OM (Fig.8.2).

2. El punto $(2, 235°)$ indica que está a una distancia de 2 unidades desde O y un ángulo de 235° sobre OM (Fig.8.2).

8.1.1. Paso de coordenadas polares a rectangulares y visceversa

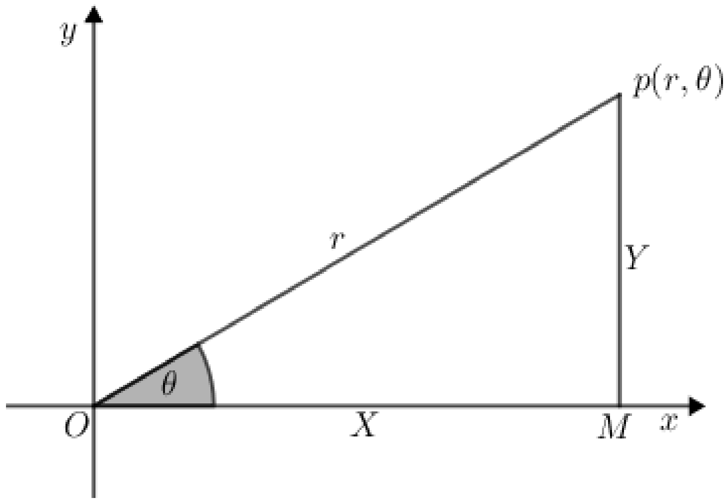


Figura 8.3: Paso de coordenadas polares a rectangulares y visceversa.

En la figura 8.3 se ilustra la relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas.

En el plano de ejes O_{xy}, con el origen del sistema se sitúa el punto O, polo del sistema de coordenadas polar, y haciendo coincidir el eje x del plano cartesiano, con el eje polar.

El punto p del plano, se define por la distancia r al centro de coordenadas, y el ángulo θ del vector de posición con el eje x y por las coordenadas (x, y).

La conversión de coordenadas cartesianas a polares se realiza mediante las ecuaciones (8.1.1):

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} & \Rightarrow & \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \Rightarrow & y = r\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta = \frac{x}{r} & \Rightarrow & \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \Rightarrow & x = r\cos\theta \end{array} \tag{8.1.1}$$

Y la conversión de polares a cartesianas, mediante las ecuaciones (8.1.2):

$$\tan\theta = \frac{y}{x}; x^2 + y^2 = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \text{arctan}\frac{y}{x}; r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{8.1.2}$$

Es decir que definido un punto del plano por sus coordenadas rectangulares (x, y), se tiene que la coordenada polar r es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Para determinar la coordenada angular θ, se tienen en cuenta dos casos:

1. Cuando $\theta = 0$, el ángulo θ puede tomar cualquier valor real.

2. Cuando $\theta \neq 0$, para obtener un único valor de θ, debe limitarse el intervalo a

Ejemplos.

1. *a*) Expresar en coordenadas polares la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

   Solución. por las ecuaciones (8.1.1) , se tiene: $x^2 = r^2 \cos^2 x$; $y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 x$, entonces:

$$\begin{aligned}
r^2 \cos^2 x - r^2 \operatorname{sen}^2 x &= 1 \\
r^2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) &= 1 \\
r^2 &= \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \\
r &= \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} \\
r &= \pm\sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}
\end{aligned}$$

   b) Expresar en coordenadas rectangulares la ecuación $r = a\cos 2\theta$.

   Solución. Según las ecuaciones (8.1.2): $\theta =$arctan$\frac{y}{x}$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Entonces:

$$\cos 2\theta = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{r^2}$$

   Asi:

$$\begin{aligned}
r &= a(\frac{x^2 - y^2}{r^2}) \\
r^3 &= a(x^2 - y^2) \\
(\sqrt{x^2 - y^2})^3 &= a(x^2 - y^2)
\end{aligned}$$

2. *a*) Hallar las coordenadas cartesianas del punto $P(-2, 135°)$.

   Solución. Mediante las ecuaciones (8.1.1), se tiene:

$$x = -2\cos(135°) = -2(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$$
$$y = -2\operatorname{sen}(135°) = -2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$$

   Por tanto: $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

   b) Hallar las coordenadas polares del punto P cuyas coordenadas cartesianas son: $P(-3, -2)$.

   Solución. según las ecuaciones (8.1.2):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 4} = \pm\sqrt{13}$$

$$\theta = \text{arctan}\frac{y}{x} = \text{arctan}\frac{-2}{-3} = \text{arctan}\frac{2}{3} = \text{arctan}0,666\ldots$$

en este caso, se tiene infinitas soluciones.

Generalmente, si no se establece alguna condición, se escoge de todas las soluciones, la que corresponde a un valor positivo de r, y un valor de θ comprendido entre $0 \leq \theta < 360°$.

Esta pareja escogida se denomina *pareja principal de coordenadas del punto*. En este ejemplo, P está en el III cuadrante, por lo que su pareja principal es $(\sqrt{13}, 213°41')$.

8.2. Ecuaciones polares

La ecuación que define una curva expresada en coordenadas polares, se llama *ecuación polar*. En muchos casos se puede especificar esta ecuación definiendo r como una función de θ ($r = f(\theta)$).

La curva resultante consiste en una serie de puntos de la forma $(\theta, f(\theta))$ y se puede representar como la gráfica de la función. Algunas de las curvas mas conocidas son la rosa polar, la espiral de Arquímedes, la lemniscata, el caracol de Pascal y la cardiode.

Para el círculo, la recta y la rosa polar no hay restricciones en el dominio y rango de la curva (Fig.8.4).

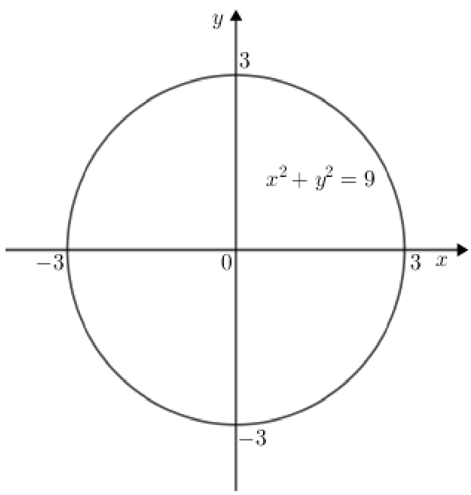


Figura 8.4: $x^2 + y^2 = 9$, $r = 3$.

Otra manera de graficar una ecuación polar es por el método tabular. Para la función $r = f(\theta)$ se asignan los valores para el ángulo θ y se obtienen los de r, conformando una tabla.

Ejemplos.

1. Construir la gráfica $r = 2\cos 3\theta$.

   Solución. Se realiza la siguiente tabla de valores

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2	0	-2	0	2	0	2

   Es importante tener en cuenta que los ángulos obtenidos en la tabla, se originan al igualar en ángulo de la ecuación al valor de la función coseno cuando esta es igual a cero, es decir, en $\frac{\pi}{2}$, por lo que $3\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$.

   Una vez cumplido este proceso, se procede a graficar la función (Fig.8.5).

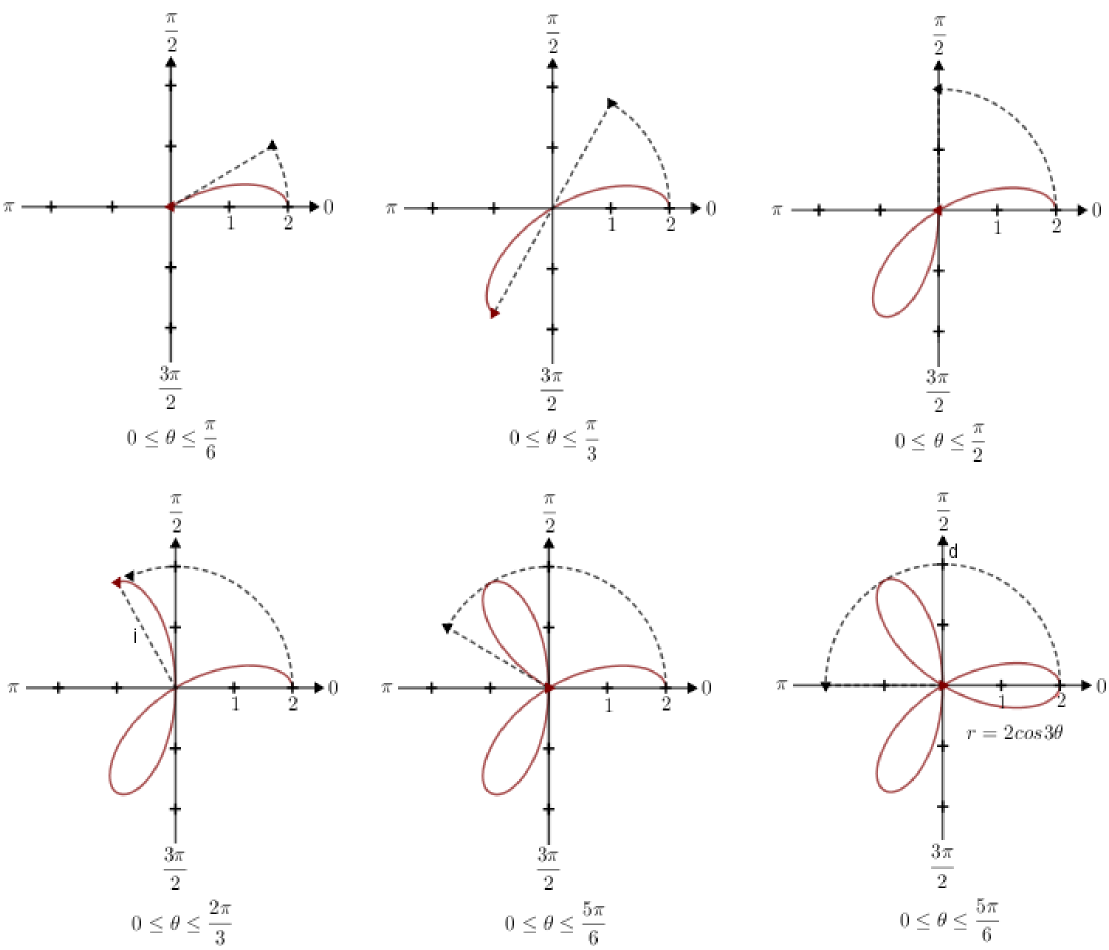


Figura 8.5: $r = 2\cos 3\theta$.

2. Construir la gráfica $r = 1 + \cos\theta$ (Fig.8.6).

   Solución.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	2	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

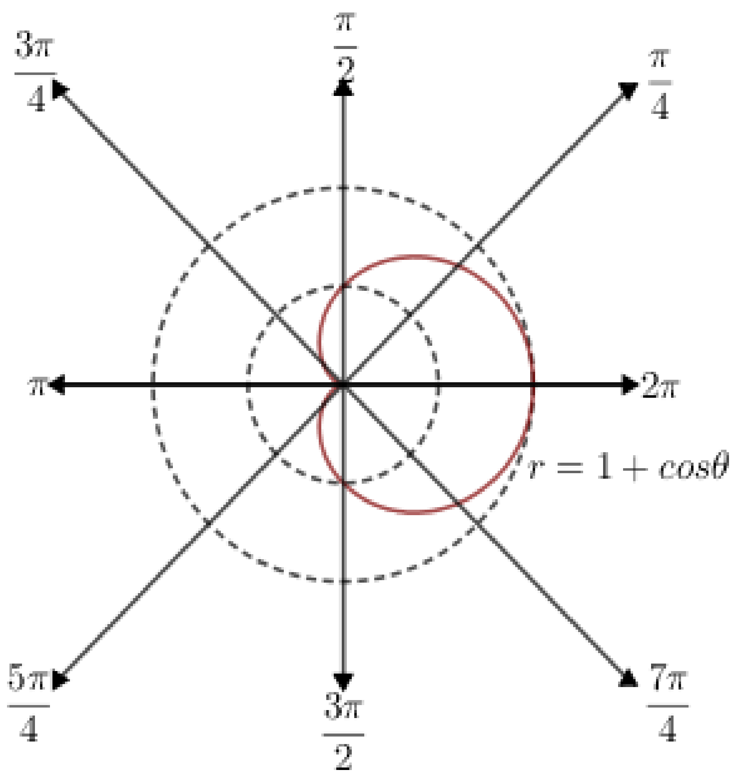


Figura 8.6: $r = 1 + \cos\theta$.

Resumiendo, el método general para trazar una gráfica consiste en dar valores a la variable θ de la ecuación $r = f(\theta)$ y hallar el valor correspondiente de la variable r, determinándose así pares (r, θ) que satisfacen la ecuación.

El trazado de gráficas puede simplificarse si previamente se efectúa un estudio de intersecciones y simetría.

Intersecciones

Las intersecciones que generalmente se determinan son las que corresponden al eje polar y a un eje perpendicular a este en el polo. Las primeras se hallan haciendo $\theta = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $n\pi$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y determinando en la ecuación los valores correspondientes de r.

Si existen intersecciones con el eje perpendicular al eje polar (a 90°), estas se obtienen haciendo $\theta = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ y es impar, ó $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Simetrías

1. Simetría con respecto al eje polar (Fig.8.7).

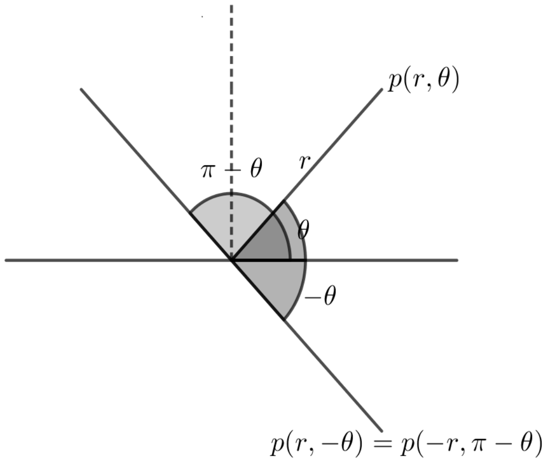


Figura 8.7: Simetría con respecto al eje polar.

Hay simetría con respecto al eje polar, si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

a) se reemplaza θ por $-\theta$.

b) se reemplaza θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$.

2. Simetría con respecto al eje a 90° (Fig.8.8).

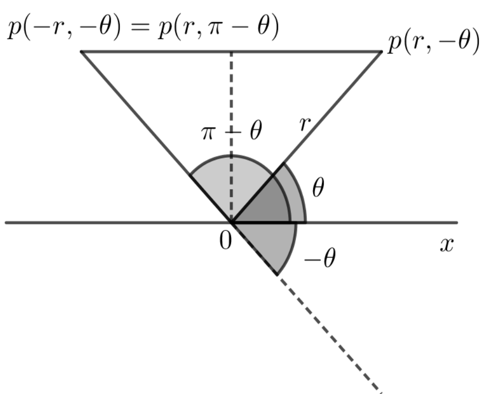


Figura 8.8: Simetría con respecto al eje a 90°.

Hay simetría con respecto al eje a 90°, si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

$a)$ se reemplaza θ por $\pi - \theta$.

$b)$ se reemplaza θ y r por $-r$.

3. Simetría con respecto al polo (Fig.8.9).

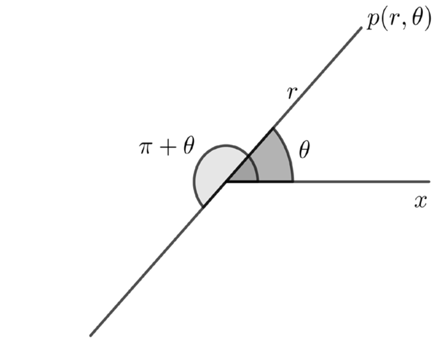


Figura 8.9: Simetría con respecto al polo.

Hay simetría con respecto al polo, si la ecuación no se modifica o se transforma en una equivalente cuando:

$a)$ se reemplaza θ por $\pi + \theta$.

$b)$ se reemplaza r por $-r$.

Ejemplo. Gráfica de la ecuación de la espiral hiperbólica $r = \frac{\pi}{\theta}$; $D_f : \theta > 0$ (Fig.8.10).

Solución. Los valores de θ se asignan en radianes (solo así tiene sentido). Para los valores de $\theta \neq 0$, existen valores reales de r, además, $\lim \theta \to 0 r = \infty$, es decir, cuando $\theta \to 0$, r toma valores cada vez mas grandes. Para cuando $0 < \theta \leq 2\pi$ (un giro completo), r decrece desde $+\infty$ hasta $\frac{1}{2}$.

La curva corta a las rectas que pasan por el polo, por ejemplo, la dirección del eje polar es cuando $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, entonces los puntos de corte de la curva con el eje polar son de la forma $P_n(n\pi, \frac{1}{n})$. Algunos de estos puntos son:

θ	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\to \infty$
r	12	6	4	3	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\to 0$

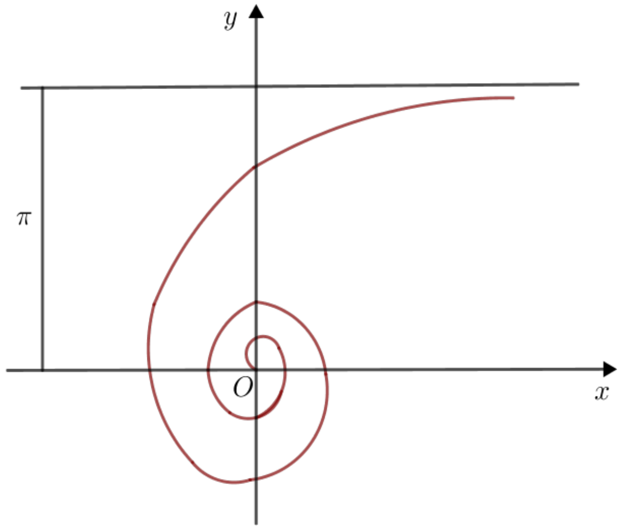


Figura 8.10: Gráfica de la espiral hiperbólica de ecuación $r = \frac{\pi}{\theta}$

En coordenadas cartesianas las gráficas de ecuaciones como $x =$constante ó $y =$constante, se representan por rectas paralelas a los ejes coordenados. En coordenadas polares, las ecuaciones más simples son de la forma $\theta = k$ (k-constante) y $r = c$ (c-constante).

$\theta = k$ representa el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo ángulo polar es igual a k por lo que es el radio vector toma varios valores, es decir, una recta que pasa por el polo y forma un ángulo k con el eje polar (Fig.8.11).

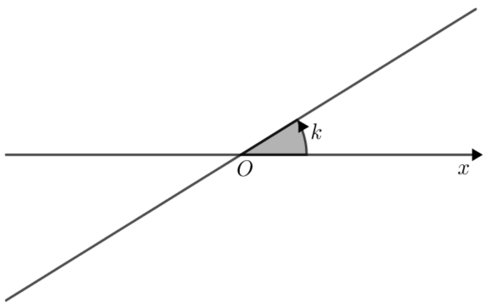


Figura 8.11: $\theta = k$ (k-constante) y $r = c$ (c-constante)

La ecuación $r = c$ representa el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo radio vector es igual a c y el ángulo θ está variando, por lo que la gráfica es una circunferencia de centro en el polo y radio c (Fig.8.12).

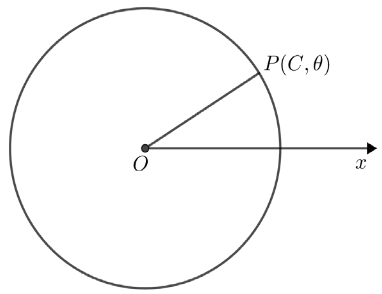


Figura 8.12: $r = c$.

8.3. Intersección de gráficas.

Las coordenadas de los puntos de intersección de dos gráficas se determinan como en coordenadas cartesianas, resolviendo simultáneamente las ecuaciones respectivas o sus equivalentes. En este sistema, las ecuaciones a resolver son, casi siempre, trigonométricas. Para hallar todos los puntos de intersección, se recomienda hacer un esbozo de las gráficas.

Ejemplo. Determinar los puntos de intersección de $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $r = 3\cos\theta$

Solución. Resolviendo las ecuaciones dadas: $2\operatorname{sen}\theta = 3\cos\theta$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} &= \frac{3}{2} \\ \tan\theta &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\frac{3}{2} \\ \theta &= 56°18' + n180°, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Los valores correspondientes son $\theta_1 = 56°18'$ y $\theta_2 = 236°18'$, correspondientemente:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2\operatorname{sen}(56°18') = 2(0,832) = 1,664 \\ r_2 &= 2\operatorname{sen}(236°18') = 2(-0,832) = -1,664 \end{aligned}$$

Las dos parejas de coordenadas corresponden al mismo punto $P_1(1,664; 56°18') = (-1,664; 236°18')$. Cualquier otro valor de θ para $n \neq 0$ o $n \neq 1$, corresponderá al mismo punto P_1.

Aparentemente, P_1 es el único punto común de las gráficas. Pero las coordenadas del polo son $r = 0$ y θ cualquier otro valor, se debe analizar por separado si el polo es un punto de intersección de las gráficas, verificando en cada una de las ecuaciones existe un valor de θ para el cual $r = 0$.

En el ejemplo, para $\theta = 0°$, se obtiene $r = 0$ en la ecuación $r = 2\operatorname{sen}\theta$, y para $\theta = 90°$ también se obtiene $r = 0$ en la ecuación $r = 3\cos\theta$.

Entonces, el polo pertenece a las dos gráficas, y por tanto es otro punto de intersección (Fig.8.13).

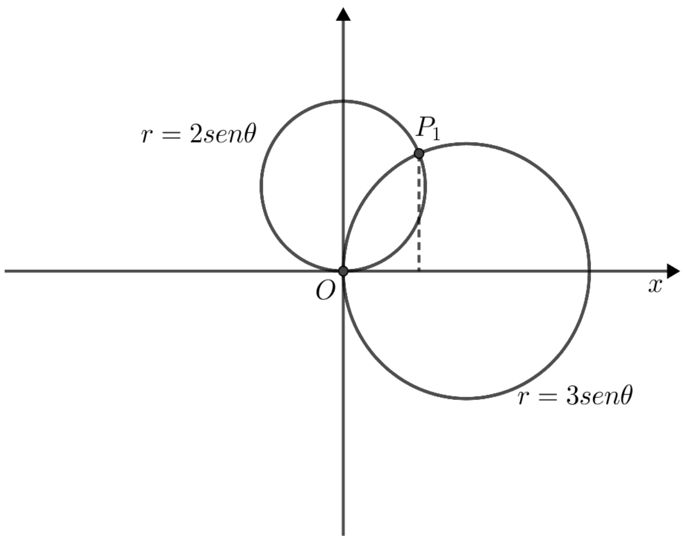


Figura 8.13: Solución gráfica de $2\operatorname{sen}\theta = 3\cos\theta$.

8.4. Ejercicios IV

1. Representar en el sistema coordenado polar los puntos cuyas coordenadas son:

   a)$(-3, 45°)$ b)$(2, -135°)$ c)$(-1, \frac{\pi}{2})$ d)$(-\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{2})$

2. Determinar las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas polares son:

   a)$(0, 90°)$ b)$(\sqrt{2}, -45°)$ c)$(-4, 0°)$ d)$(2, -\frac{\pi}{4})$

3. Determinar la representación polar principal de los puntos cuyas coordenadas cartesianas son:

   a)$(1, 1)$ b)$(\sqrt{3}, -1)$ c)$(5, 2)$ d)$(-1, \sqrt{5})$ e)$(2, 0)$

4. Hallar las ecuaciones cartesianas que corresponden a las ecuaciones polares siguientes:

   a)$r = 3\cos\theta$ b)$r = \frac{6}{2-3\operatorname{sen}\theta}$ c)$r = \frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$ d)$r = \frac{6}{1-\frac{1}{2\cos\theta}}$

5. Determinar la ecuación polar que corresponde a cada una de las ecuaciones cartesianas siguientes:

   a)$xy = 2$ b)$x^2 + y^2 = 16$ c)$2x - y = 0$ d)$y^2 - 3x^2 - 24x - 36 = 0$

6. Construir la gráfica de las ecuaciones:

   a)$r = \frac{3}{2}$ b)$\theta = 2\,\mathrm{rad}$ c)$r = 4\csc\theta$ d)$r = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ e)$r^2 = \operatorname{sen}2\theta$ f)$r^2 = \frac{\operatorname{sen}3\theta}{\cos\theta}$

7. Determinar los puntos de intersección de las siguientes parejas de curvas:

   a) $\begin{array}{l} r = \frac{\pi}{\theta} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{array}$ b) $\begin{array}{l} r = 2\cos\theta \\ r = 1 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} r^2 = 9\cos 2\theta \\ r = 3\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta \end{array}$

Bibliografía consultada

Baranenkov, G., Demidovch, B., Efimenko, V., Kogan, S., Lunts, G., Porshneva, E., Sichova, E., Frolov S., Shostak, R. & Yanplski, A. (1998). Problemas y ejercicios de análisis matemático. Editorial Paraninfo, Madrid - España.

Becerra, J. Funciones en coordenadas polares. Universidad Nacional Autónoma de México - UNAM. Disponible en: http://dgenp.unam.mx /direccgral /secacad /cmatematicas /geogebra /polares. html

Courant, R. & John, F. (1999). Introducción al cálculo y al análisis matemático Vol. I. Editorial Limusa, México.

Daltabuit, E. & Cárdenas, R. (2007). Cálculo - teoría, ejercicios y problemas. Editorial Limusa Noriega Editores, Mexico.

Dorodnov, A.M. (1991). Grafiki funktsiy. Editorial Vigshaia Shkola, Moscú.

EcuRed. Sistema de coordenadas polares. Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas - UCLV (1980). Cálculo Diferencial e Integral. Disponible en: https://www.ecured.cu/Sistema de coordenadas Polares.

Farramd, S. & Jim Poxon, N. (1988). Cálculo - Compendios Universitarios -. Harcourt, B.J. Publishers. Nueva York.

Guelfand, I.M., Glagoleva, E.G. & Shkol, E.E. (1987). El método de coordenadas. Editorial Mir, Moscú.

Guelfand, I.M., Glagoleva, E.G. & Shkol, E.E. (1968). Grafiki funktsiy. Editorial Nauka, Moscú.

Kalnin, R.A. (1988). Algebra y funciones elementales. Editorial Latinoamericana.

Kochetkov, E.C. & Kochetkova, E.C. (1965). Alguebra y elementarnie funktsii. Editorial Prosveshenie, Moscú.

Piskunov, N. (1983). Cálculo diferencial e integral. Tomo I. Editorial Montaner y Simon (M/S), Barcelona.

CEPUN

Centro de Publicaciones Universidad de Nariño
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia - Agosto de 2020