KALKULUS INTEGRAL

TOHERI

Judul:
Kalkulus Integral

Penulis:
Toheri

ISBN: 978-602-72562-2-5

Penerbit:

EDUVISION
Alamat: Graha Bima Terrace A-60 Cirebon, Jawa Barat, Indonesia
Email: eduvision_publishing@yahoo.com
www.eduvision.webs.com

Kata Pengantar

Syukur Alkhamdulillah kita panjatkan kehadiran Allah SWT. Atas rahmat dan hidayahNya penulisan buku daras Kalkulus Integral ini dapat diselesaikan. Shalawat serta salam kita persembahkan ke junjungan kita Muhammad Saw. Semoga kita kelak mendapat syafaatnya. Aamiin.

Buku ini disusun dalam rangka memudahkan mahasiswa untuk memahami materi Kalkulus yang sebagian besar dirasakan masih menyulitkan. Buku ini dirancang untuk menyesuaikan dengan kompetensi dari mata kuliah Kalkulus II pada Prodi Tadris Matematika. Susunan kalimat yang sederhana dan ringkas dengan hirarki konsep yang runut memudahkan untuk lebih memahami materi yang ada.

Buku ini disusun menjadi 5 bab yang terdiri dari; anti turunan, jumlah dan Notasi Sigma; Integral tentu dan sifat-sifatnya; Aplikasi Integral; Fungsi Transenden; dan Teknik Pengintegralan dan Bentuk taktentu. Setiap memuat pendahuluan, subbab dan latihan.

Bab pertama memuat tentang antiturunan sebagai operasi invers turunan yang dikenal dengan integral taktentu. Konsep jumlah dan notasi sigma disajikan di awal sebagai dasar untuk memahami konsep luas melalui pendekatan polygon.

Bab kedua diawali dengan pendekatan luas polygon dalam dan luar yang merupakan dasar bagi jumlah Riemann. Integral tentu didefinisikan melalui jumlah Riemann. Keterkaitan turunan dan integral disajikan secara formal melalui Teorema Dasar Kalkulus I. Melalui definisi integral tentu dapat diturunakan beberapa sifat integral seperti penambahan selang, pembandingan dan keterbatasan juga disajikan pada bab ini. Beberapa bantuan pengintegralan disajikan pula untuk lebih memudahkan pencarian hasil integrasi.

Bab Ketiga memuat secara umum tentang aplikasi integral yang dalam hal ini digunakan untuk menghitung luas bidang rata, volume benda putar dan luas permukaan hasil perputaran. Berbagai ilustrasi grafik diberikan untuk memberikan gambaran tentang daerah yang terbatas, bentuk benda hasil perputaran. Hal ini tentu akan lebih memudahkan bagi mahasiswa.

Bab empat memuat tentang fungsi transenden. Fungsi-fungsi yang dikaji pada bagian ini adalah berkaitan dengan fungsi logaritma, eksponen, fungi invers trigonometri, logaritma dan ekspoenen umum. Fungsi-fungsi ini memiliki karakteristik yang berbeda dengan fungsi-fungsi yang berbentuk polinom.

Bagian terakhir memuat tentang teknik pengintegralan dan bentuk taktentu. Teknik pengintegralan sangat penting untuk lebih memudahkan bagaimana memilih cara penyelesaian yang tepat untuk mencari solusi dari berbagai jenis fungsi integran. Sedangkan bentuk taktentu dikaji berkaitan dengan nilai limit dan batas-batas integral yang takhingga atau integran yang memuat titik takkontinu dan takhingga.

Akhirnya, penulis menyadari masih banyak kekurangan dan kesempurnaan dalam penulisan buku ini. Kritik dan saran untuk perbaikan buku ini sangat kami harapkan.

Cirebon, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

ANTI TURUNAN, JUMLAH DAN NOTASI SIGMA

BAB I

Pada Bab I ini, kita akan mengkaji tentang integral taktentu sebagai anti turunan. Integral taktentu ini merupakan sebuah operator linier yang merupakan operasi balikan atau invers dari turunan. Aturan pangkat dan trigonometri dalam integral merupakan teorema dasar yang akan kita kaji. Aturan pangkat ini selanjutnya digeneralisasi menjadi aturan pangkat yang diperumum yang merupakan landasan dalam menentukan integral dengan metode substitusi.

Notasi sigma digunakan untuk menyederhanakan penjumlahan dari suku-suku sebuah barisan. Sifat linier berlaku pula dalam notasi sigma. Beberapa bentuk notasi sigma dapat digolongkan dalam deret berjatuhan dan jumlah-jumlah istimewa.

Bab I merupakan bahan yang dapat dipergunakan untuk mencapai (1) ketrampilan mahasiswa dalam menentukan hasil proses integrasi berdasarkan sifat-sifat yang dimilliki oleh operasi integral sebagai anti turunan, (2) Memiliki ketrampilan dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan jumlah dan notasi sigma.

Ketercapain ketrampilan tersebut dapat ditunjukkan melalui indikator-indikator seperti pada table disamping.

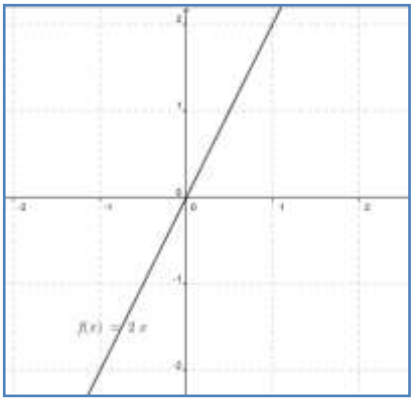
- Dapat menggunakan definisi untuk menentukan anti turunan dari sebuah fungsi
- Menggunakan aturan pangkat dan trigonometri untuk menentukan hasil pengintegralan
- Menjelaskan sifat kelinieran dari operasi integral
- Memahami aturan pangkat sebagai dasar penggunaan metode substitusi

- Dapat memanipulasi deret dengan notasi sigma dan sebaliknya
- Menggunakan sifat notasi untuk menghitung
- Membuktikan beberapa jumlah khusus

1.1 Anti Turunan

Banyak operasi dalam matematika yang memiliki pasangan. Operasi aritmetika misalnya; Operasi penjumlahan berpasangan dengan pengurangan. Operasi perkalian berpasangan dengan pembagian. Operasi kuadrat berpasangan dengan operasi akar.

Kajian kalkulus I sebelumnya membahas tentang turunan. Salah satu sifatnya dikenal sebagai operasi linier. Apakah turunan juga mempunyai pasangan operasi? Sebelumnya mari kita perhatikan grafik dari turunan ditujukan oleh fungsi berikut;

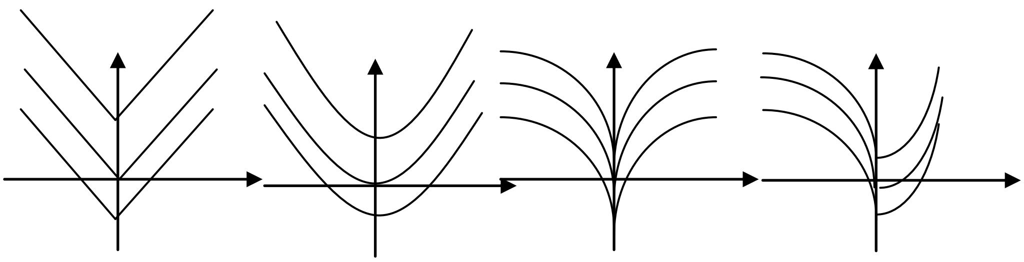


Gambar 1

grafik disamping menunjukkan turunan dari sebuah fungsi yang turunannya adalah $f(x) = 2x$.

Lalu, fungsi apakah yang turunannya sama dengan $f(x) = 2x$? Tentu, kita bisa menganalisis dengan beragam cara.

Cara pertama, dengan menganalisis nilai turunannya. Karena untuk x < 0, turunannya negative (-), maka fungsinya turun. Untuk x > 0, turunannya positif (+), maka fungsinya naik, dan untuk x = 0, turunannya nol (0), maka fungsi stasioner pada titik x = 0. Jadi, fungsinya mungkin berpola sebagai berikut;



Gambar 2

Dengan turunan kedua kita bisa mengidentifikasi kecekungan dari grafiknya. Karena turunan kedua atau $f''(x)=2 > 0$, maka fungsi cekung ke-atas. Jadi, grafik fungsi yang mungkin adalah gambar 1.b.

Cara kedua, menduga fungsi.

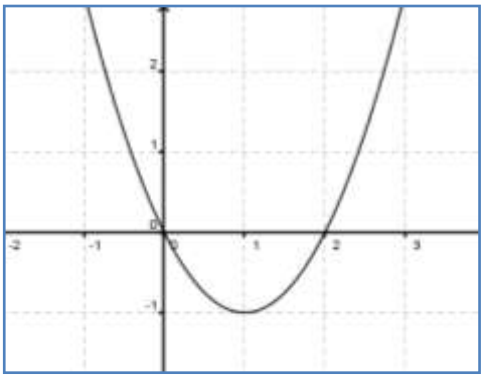
Mengingat kembali turunan fungsi. Kita dengan mudah menyatakan bahwa fungsi $F(x) = x^2$ adalah sebuah fungsi yang turunannya adalah $f(x) = 2x$. bagaimana dengan $G(x) = x^2 + 2$, $H(x) = x^2 - 3$, $P(x) = x^2 + \pi$? Tentu saja, $G(x) = x^2 + 2$, $H(x) = x^2 - 3$, $P(x) = x^2 + \pi$ adalah fungsi-fungsi yang memiliki turunan $f(x) = 2x$. Jadi, apa yang dapat kita simpulkan?

> **Fungsi yang memiliki turunan $f(x) = 2x$ adalah fungsi-fungsi yang berbentuk $F(x) = x^2 + C$, dengan C adalah konstanta bilangan real.**

Dengan menurunkan fungsi $F(x) = x^2 + C$, kita peroleh

$$D_x[F(x)] = D_x[x^2 + C] = D_x[x^2] + D_x[C] = 2x + 0 = 2x = f(x)$$

Bagaimana dengan fungsi yang turunannya seperti gambar berikut;



Karena grafiknya adalah berupa parabola, maka persamaannya adalah berbentuk fungsi kuadrat.

Dari grafik kita ketahui bahwa akar-akarnya adalah $x_1 = 0$ dan $x_2 = 2$, dan sumbu simetri $x = 1$.

Gambar 3

Ingat kembali, sumbu simetri adalah

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2a} = \frac{0+2}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} = 1.$$

Jadi, nilai $a = 1$.

Persamaan yang dimaksud adalah,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 1.(x-0)(x-2) = x(x-2) = x^2 - 2x$$

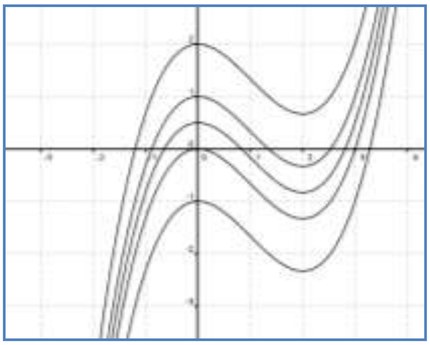
Sehingga fungsi yang turunannya $f(x) = x^2 - 2x$ adalah

$$F(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + C$$

Untuk mengecek, kita tinggal menurunkan fungsi $F(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + C$ yaitu;

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + C\right] = 3.\tfrac{1}{3}x^{3-1} - 2.x^{2-1} + 0 = x^2 - 2x = f(x)$$

Kita bisa melihat grafik dari F(x) sebagai berikut;



Gambar 4

tentu saja, banyak kemungkinan dari fungsi yang memiliki turunan $f(x) = x^2 - 2x$. Hal ini dikarenakan adanya konstanta *C* dari fungsi F(*x*). munculnya konstanta dapat juga dipandang sebagai pergeseran atau translasi fungsi F ke atas atau ke bawah.

Proses pencarian fungsi apabila turunannya diketahui dikenal dengan nama **Anti Turunan**. Proses ini dapat dikatakan sebagai pasangan operasi turunan atau invers dari operasi turunan.

Definisi

Fungsi *F* dikatakan sebuah **Antiturunan** dari *f* pada selang *I* jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua *x* pada *I*.

Pada awalnya, notasi Anti turunan dinyatakan dengan A_x, dimana

$$A_x[2x] = x^2 + C, A_x[x^2 - 2x] = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + C.$$

Akan tetapi, perkembangan saat ini lebih banyak menggunakan notasi 'integral" (∫) yang dicetuskan oleh Leibniz. Notasi ini dapat dituliskan berikut;

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{, dimana, } F'(x) = f(x)$$

Anti turunan di atas, selanjutnya dikenal atau disebut sebagai **integral taktentu.**

Mari Kita amati turunan-turunan

Fungsi	Turunan	Antiturunan
x^3	$3x^2$	$x^3 + C$
x^2	$2x$	$x^2 + C$
X	$1.x^0 = 1$	$x + C$
x^{-1}	$-x^{-2}$	$-x^{-1} + C$
x^{-2}	$-2x^{-3}$	$x^{-2} + C$
x^{-3}	$-3x^{-4}$	$x^{-3} + C$

Coba perhatikan, pada kolom turunan dan antiturunan. Kita bisa katakana bahwa

Jika turunan = $(n+1)x^n$, maka antirurunannya adalah $x^{n+1} + C$ atau

Jika turunan = x^n, maka antiturunannya adalah $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Akan tetapi, kita tidak bisa melihat untuk turunan dimana n = -1. Anda bisa eksplorasi untuk n bilangan rasional. Sehingga, kita dapat katakana bahwa, $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$

Yang biasa kita kenal dengan **aturan pangkat**. Perhatikan teorema berikut ini,

Teorema A (Aturan Pangkat)

Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Untuk memahami teorema tersebut, mari kita lihat beberapa contoh berikut ini.

Contoh 1

Tentukanlah hasil dari

a. $\int \left(x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \right) dx$

b. $\int \left(2x^3 - x^{-3} \right) dx$

c. $\int \left(2x^{3/2} - x^{-2/3} \right) dx$

d. $\int \left(2\sqrt{x^3} - \frac{2}{x^2} + 3 \right) dx$

Jawab

a. $\int \left(x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \right) dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{2x^{2+1}}{2+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} - \frac{2x^{0+1}}{0+1} + C$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 2x + C$

b. $\int \left(2x^3 - x^{-3} \right) dx = \frac{2}{4}x^4 - \frac{x^{-2}}{-2} + C$

$\frac{x^4}{2} + \frac{x^{-2}}{2} + C$

c. $\int \left(2x^{3/2} - x^{-2/3} \right) dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} + C$

$= \frac{2}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + C$

d. $\int \left(2\sqrt{x^3} - \frac{2}{x^2} + 3 \right) dx = \int \left(2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + 3 \right) dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{2x^{-1}}{-1} + 3x + C$

$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-1} + 3x + C$

Kita bisa mengecek jawaban yang kita peroleh dengan cara menurunkan hasil integrasi yang didapatkan. Sebagai contoh, perhatikan hasil integrasi (d),

$$F(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-1} + 3x + C$$

Dengan menurunkan kita dapatkan,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{4}{5}.\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} + 2.(-1).x^{-1-1} + 3 + 0 \\ &= 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + 3 \\ &= 2\sqrt{x^3} - \frac{2}{x^2} + 3 \end{aligned}$$

Hasilnya tentu akan sama dengan integran pada point (c). Selanjutnya, kita akan melihat anti turunan dasar dari fungsi trigonometri.

Teorema B (anti turunan dasar trigonometri)

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Bukti teorema ini dapat diperoleh dengan menurunkan bagian sebelah kanan. Misalkan, $D_x[\sin x + C] = \cos x + 0 = \cos x$. Pemahaman tentang identitas fungsi trigonometri pada kajian kalkulus I akan membantu proses integrasi pada fungsi trigonometri. Identitas trigonometri diperlukan terutama pada integran yang berbeda dengan integran pada aturan dasarnya.

Integral sebagai operator linier

Masih segar dalam ingatan bahwa limit dan turunan merupakan sebuah operator linier. Bagaimana dengan **integral**? Sebagai operasi pasangan dari turunan tentulah wajar apabila integral juga memiliki sifat yang sama dengan pasangannya. Integral memiliki sifat linier.

Sifat ini dapat dijamin oleh teorema kelinieran seperti disajikan berikut ini. Sifat ini memudahkan kita dalam menentukan hasil dari proses integrasi ada.

Teorema C (Integral taktentu sebagai operator linier)

Misalkan f dan g mempunyai anti-turunan (integral tak tentu) dan misalkan k konstanta, maka

(i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

(ii) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(iii) $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Bukti

Teorema tersebut cukup dibuktikan dengan menentukan turunan dari ruas kanan,

(i) $D_x\left[k\int f(x)dx\right] = k.D_x\left[\int f(x)dx\right]$ (berdasarkan sifat linier turunan.

$k.D_x\left[\int f(x)dx\right] = kD_x[F(x)+C] = k.F^1(x) = kf(x)$

Bukti (ii) dan (iii) dapat Anda coba sendiri.

Contoh 2

Gunakan sifat linier untuk menentukan

(a) $\int (3x^2 + x)dx$

(b) $\int (2x^3 - \sqrt[3]{x})dx$

(c) $\int (-2\sqrt[3]{x^2} + \sin x)dx$

Jawab

(a) $\int (3x^2 + x)dx = \int 3x^2dx + \int xdx$

$$= 3\int x^2 dx + \int x dx = 3.\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right)$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + (3C_1 + C_2) = x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

Hasil penumlahan ($3C_1$ + C_2) adalah sebuah konstanta baru yang dinyatakan dengan C.

(b) $\int \left(2x^3 - \sqrt[3]{x}\right) dx = \int 2x^3 dx - \int x^{\frac{1}{3}} dx$

$$= 2\int x^3 dx - \int x^{\frac{1}{3}} dx = 2.\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C$$

(c) $\int \left(-2\sqrt[3]{x^2} + \sin x\right) dx = \int -2x^{\frac{2}{3}} dx + \int \sin x dx$

$$= -2\int x^{\frac{2}{3}} dx + -\cos x + C$$

$$= -2.\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \cos x + C = -\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} - \cos x + C$$

Mari kita kaji integrasi-integrasi berikut;

(1) $\int (x-1)^2 dx$ (2) $\int (x^2-1)^3 x dx$ (3) $\int (x^2-1)^5 2x dx$

(4) $\int (x^2-1)^{10} 2x dx$ (5) $\int (x^2-x)^5 (2x-1) dx$

(6) $\int (2x^2-1)^{100} 2x dx$

Soal (1) dapat kita selesaikan dengan cara menguraikan integran menjadi $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ selanjutnya kita gunakan sifat linier akan diperoleh $\int (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$.

Bagaimana dengan soal (2)? Dengan cara yang sama kita peroleh, $(x^2-1)^3 x = (x^6-3x^4+3x^2-1)x = x^7-3x^5+3x^3-x$. Tentu saja kita membutuhkan pemahaman tentang perkalian polinom atau segitiga pascal atau persamaan Binomial untuk mendapatkannya. Hasil akhir tersebut menunjukkan bahwa $\int (x^2-1)^3 x dx = \frac{1}{8}x^8 - \frac{x^6}{2} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$. Meskipun kita memperoleh hasil integrasi, tentunya cara ini sedikit merepotkan dan membutuhkan ketelitian yang tinggi. Terlebih lagi, untuk menyelessaikan soal (3), (4), (5) dan (6).

Lalu, apakah ada cara yang lebih efektif? Sedikit mengingat kembali tentang **aturan rantai untuk turunan**, yakni;

Jika u = g(x) memiliki turunan dan n bilangan rasional, maka

$$\frac{d}{dx}[u^n] = \frac{d}{du}[u^n].\frac{du}{dx} = n.u^{n-1}.g'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$$

Dengan pendekatan turunan implicit, kita bisa nyatakan

$$d(u^n) = n[g(x)]^{n-1}.g'(x)dx$$

Integralkan kedua ruas, kita bisa peroleh

$$u^n = n\int [g(x)]^{n-1}.g'(x)dx$$

atau, $\int [g(x)]^{n-1}.g'(x)dx = \frac{u^n}{n} + C = \frac{[g(x)]^n}{n} + C$

Ambil n – 1 = r, sehingga menjadi

$$\int [g(x)]^r.g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Asalkan r tidak sama dengan -1.

Bentuk terakhir ini yang dikenal dengan **bentuk pangkat yang diperumum.** Bentuk ini merupakan bentuk yang paling banyak digunakan dalam proses integrasi.

Teorema D

Misalkan g adalah fungsi dan r bilangan rasional yang tidak sama dengan -1, maka $\int [g(x)]^r . g'(x) dx = \dfrac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$

Teorema tersebut dapat digunakan apabila ada fungsi yang berbentuk $g(x)$ dan $g'(x)$ dalam integran-nya.

Contoh 3

Tentukanlah

(a) $\int (x^3+2x)(3x^2+2)dx$ (b) $\int \sin^{10} x \cos x dx$

Jawab

(a) Misalkan $g(x) = x^3 + 2x$, maka $g'(x) = 3x^2 + 2$. Berdasarkan teorema D, maka

$$\begin{aligned} \int (x^3+2x)^{12}(3x^2+2)dx &= \int [g(x)]^{12} g'(x) dx \\ &= \frac{[g(x)]^{13}}{13} + C \\ &= \frac{(x^3+2x)^{13}}{13} + C \end{aligned}$$

(b) Misalkan $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$. Berdasarkan teorema D, maka

$$\begin{aligned} \int \sin^{10} x \cos x dx = \int (f(x))^{10} f'(x) dx &= \frac{[f(x)]^{11}}{11} + C \\ &= \frac{\sin^{11} x}{11} + C \end{aligned}$$

Bagaimana jika integran tidak memuat secara langsung g(x) dan g'(x) nya, seperti

$$\int (x^2-2)^5\,xdx, \int \left(x^3+3x\right)^5 (x^2+1)dx, \int \left(\frac{x^2}{2}+4\right)^2 x^2dx.$$

Pada kasus ini, penggunaan notasi turunan implicit yang disajikan oleh Leibniz dapat kita gunakan.

Jika $u = g(x)$, maka $du = g'(x)dx$. Selanjutnya teorema D dapat kita tulis ulang menjadi

$$\int u^r dr = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C$$

Mari kita selesaikan 3 contoh kasus di atas.

Kasus 1, $\int (x^2-2)^5\,xdx$

Penyelesaian,

Misalkan $u = x^2 - 5$ maka $du = 2xdx$. Jadi, $\frac{1}{2}du = xdx$ sehingga,

$$\int (x^2-2)^5\,xdx = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\int u^6 du = \frac{1}{12}u^6 + C$$
$$= \frac{1}{12}\left(x^2-2\right)^6 + C$$

Kasus 2, $\int \left(x^3+3x\right)^5 (x^2+1)dx$

Penyelesaian,

Misalkan $u = x^3 + 3x$ maka $du = (3x^2+3)dx$. Jadi, $du = 3(x^2+1)dx$ sehingga,

$$\int (x^3+3x)^5 (x^2+1)dx = \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3.6}u^6 + C$$
$$= \frac{1}{18}\left(x^3+3x\right)^6 + C$$

Kasus 3, $\int \left(\frac{x^2}{2}+4\right)^2 x^2dx$

Penyelesaian, Misalkan $u = \frac{x^2}{2} + 4$ maka $du = xdx$. Sehingga,

$$\int\left(\frac{x^2}{2}+4\right)^2 x^2dx=\int u^2 xdu$$

Tampak bahwa integral terakhir tidak bisa diselesaikan yang berarti penggunaan teorema D tidak berhasil.

Dengan cara lain mungkin bisa bermanfaat seperti manipulasi aljabar untuk integran-nya. Memanipulasi integran akan didapatkan,

$\left(\frac{x^2}{2}+4\right)^2 x^2=\left(\frac{x^4}{4}+4x^2+16\right)x^2=\frac{x^6}{4}+4x^4+16x^2$ sehingga,

$$\int\left(\frac{x^2}{2}+4\right)^2 x^2dx=\int\left(\frac{x^6}{4}+4x^4+16x^2\right)dx=\frac{x^7}{28}+\frac{4x^5}{5}+\frac{16x^3}{3}+C$$

Jadi, bisa kita simpulkan bahwa penggunaan teorema D akan bermanfaat apabila terdapat fungsi, dan turunannya atau kelipatan dari turunannya.

Soal Latihan 1.1

Hitunglah nilai integral berikut ini,

1. $\int\left(x^2+2x\right)dx$
2. $\int\left(x^2+2x\right)^2 dx$
3. $\int\left(\frac{x^2+2x-3}{x^4}\right)dx$
4. $\int\left(x^3+\sqrt{x}\right)dx$
5. $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx$
6. $\int\left(\frac{x^2+2x}{\sqrt{x}}\right)dx$
7. $\int\left(x^2-3\cos x\right)dx$
8. $\int\sin 2xdx$
9. $\int\left(\frac{x+6}{\sqrt{x}}\right)dx$
10. $\int\left(5\cos x+4\sin x\right)dx$
11. $\int\left(t^2-5\cos t\right)dt$
12. $\int\sec y(\tan y-\sec y)dy)$
13. $\int\left(\frac{\cos x}{1-\cos^2 x}\right)dx$

Tentukan hasil integrasi berikut ini,

14. $\int \sqrt{(x^2+2x)}(x+1)dx$
15. $\int (x^3+2x)^{\frac{4}{2}}(3x^2+2)dx$
16. $\int \sin(x^2+2x)(2x+2)dx$
17. $\int (x^2+2x)^2(x+2)dx$
18. Tentukanlah fungsi apabila melalui titik (0, 2) dan turunannya adalah $f'(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$
19. Buktikan bahwa $\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x).g(x) + C$
20. Buktikan bahwa $\int \left[\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}\right]dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$
21. Tentukanlah hasil dari $\int (x^2 \sin x - 2x \cos x)dx$
22. Tunjukkan bahwa $\int \left(\frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{\cos^2 x}\right)dx = \frac{x^2}{\cos x} + C$
23. Sebuah fungsi polinom P(x) memiliki gradient positif untuk setiap bilangan real x ≠ 0. Tentukanlah persamaan dari polinom p(x) tersebut?

1.2 JUMLAH DAN NOTASI SIGMA

Seorang pengusaha menawarkan dua pola penggajian pada

pekerjanya. Tawaran pertama diberikan upah harian tetap sebesar Rp. 50.000/hari. Tawaran kedua, diberikan hari dimana hari pertama sebesar Rp.4.000, hari kedua Rp.8.000, hari ke-3 Rp.12.000 dan seterusnya. Kalau Anda sebagai pekerja, sistem penggajian mana yang akan dipilih?

Mari kita coba hitung

Tawaran pertama,

Jumlah gaji = gaji hari ke-1 + gaji ke-2 + gaji ke-3 +….+gaji ke-30

= 50.000 + 50.000 +50.000+…+50.000

= 30 (50.000) = 1.500.000

Tawaran Kedua,

Jumlah gaji = gaji hari ke-1 + gaji ke-2 + gaji ke-3 +….+gaji ke-30

= 4.000 + 8.000 +12.000+…+120.000

= 15 (124.000) = 1.860.000

Jadi, tentu sebagai pekerja akan memilih tawaran penggajian pola kedua.

Bayangkan!

Sanggupkah Kita bila mengumpulkan uang pada hari pertama Rp. 1, hari kedua Rp. 2, hari ketiga Rp. 4, hari keempat Rp 8, dan seterusnya?. Berapakah uang yang kita kumpulkan selama sebulan?

Sebelum kita menyatakan sanggup dan mengitung jumlahnya, mari kita amati jumlah-jumlah berikut;

$$\underbrace{50.000 + 50.000 + 50.000 + \ldots + 50.000}_{30 \text{ buah}} = 30\ (50.000) =$$

4000 + 8000 + 12000 +…+120.000 =?

Butuh waktu tentu untuk menjumlahkannya. Akan tetapi, dengan matematika akan lebih sedikit waktu, sehingga

4000 + 8000 + 12000 +…+120.000 = 4000 (1+2+3+…30) = 4000 (31.15)

= 4000 x 465 =1860000.

Bagaimana kita bisa bekerja dengan matematika.

Perhatikan jumlah dari

c + c + c = 3c

c + c + c + c = 4c

c + c + c +…..+ c = n.c

Jumlah dalam matematika dapat dinotasikan dengan "∑"(baca sigma). Untuk menjumlahkan sebanyak n suku, dapat dinyatakan dengan menggunakan indeks yang biasa disimbolkan dengan,

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \ldots + c = n.c$$

Persamaan di atas dipahami dengan menjumlahkan sebanyak n suku dengan masing-masing suku besar sama dengan c.

Bagaimana dengan $\sum_{i=1}^{n} a_i$? Ini berarti menjumlahkan n suku yang masing-masing besarnya a_1, a_2, a_3,…, a_n, dimana

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\,.$$

Bagaimana dengan hasil dari 1 + 2 + 3 + … + 30? Tentu saja dengan mudah bisa kita hitung,

Pertama kita nyatakan dalam bentuk notasi sigma, yakni

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 30 = \sum_{i=1}^{30} i$$

$$30 + 29 + 28 + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{30} i$$

Dengan menjumlahkan keduanya kita peroleh

$$31 + 31 + 31 + \ldots. + 31 = 2\sum_{i=1}^{30} i \text{ atau } 30.31 = 2\sum_{i=1}^{30} i$$

jadi, jumlahnya adalah $\sum_{i=1}^{30} i = \dfrac{30.31}{2} = 465$.

Perhatikan contoh-contoh berikut,

Contoh 1

Nyatakan dalam notasi sigma pada penjumlahan berikut ini,

(a) 2 + 4 + 6 + 8 + 10

(b) 3 + 5 + 7 + 11 +…+101

(c) 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64

(d) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$

Jawab

(a) Karena 2 + 4 + 6 + 8 + 10 terdapat 5 suku dan setiap sukunya genap, maka

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{i=1}^{5} 2$$

(b) Suku-suku dalam 3 + 5 + 7 + 11 +…+101 adalah bilangan ganjil dan dengan mengingat kembali barisan aritmetika, kita bisa nyatakan 3 + 5 + 7 + 11 +…+101 dalam bentuk

$$3 + 5 + 7 + 11 + \ldots + 101 = \sum_{k=1}^{50} (2k+1)$$

(c) Dengan menulis ulang penjumlahan menjadi

$2+4+8+16+32+64 = 2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6$ maka notasi sigmanya adalah $2+4+8+16+32+64 = \sum_{k=1}^{6} 2^k$

(d) Bentuk $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ tentu lebih mudah kita nyatakan yakni $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$

Contoh 2

Uraikan notasi sigma berikut dalam penjumlahan biasa

(a) $\sum_{i=1}^{6}\left(k^2-k\right)$

(b) $\sum_{i=1}^{6}\left((k+1)^2-k^2\right)$

(c) $\sum_{i=1}^{6}\left(2^k-2^{k-1}\right)$

(d) $\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

Penyelesaian

(a) $\sum_{i=1}^{6}\left(k^2-k\right) = 0+(4-2)+(9-3)+(16-4)+(25-5)+(36-6)$

atau $\sum_{i=1}^{6}\left(k^2-k\right) = 0+2+6+12+20+30$

(b) $\sum_{i=1}^{6}\left((k+1)^2-k^2\right) = (2^2-1^2)+(3^2-2^2)+(4^2-3^2)+(5^2-4^2)+(6^2-5^2)$
$+(7^2-6^2)$

mungkin anda berkeinginan menyajikannnya menjadi,

$\sum_{i=1}^{6}\left((k+1)^2-k^2\right) = 3+5+7+9+11+13$

Kalau Anda nyatakan kembali ruas kanan dalam notasi sigma, akan didapatkan,

$3+5+7+9+11+13 = \sum_{k=1}^{6}(2k+1)$

Dengan demikian, apakah $\sum_{i=1}^{6}\left((k+1)^2-k^2\right)=\sum_{i=1}^{6}(2k+1)$?cobalah Anda kaji sendiri.

(c) $\sum_{i=1}^{6}\left(2^k-2^{k-1}\right)=(2-1)+(2^2-2)+(2^3-2^2)+(2^4-2^3)+(2^5-2^4)+(2^6-2^5)$

$$=1+2+4+8+16+32$$

Atau anda mencoba melakukan sedikit manipulasi terhadap bilangan-bilangannya sehingga didapatkan,

$1+2+4+8+16+32=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$

Apa yang dapat Anda katakana tentang bagian ruas kanannya?

(d) Perhatikan uraian berikut;

$$\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}$$

susun ulang bentuk terakhir, kita peroleh

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}=\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{4.3}+\frac{1}{5.4}+\frac{1}{6.5}+\frac{1}{7.6}+\frac{1}{8.7}$$

selanjutnya, bisa ditulis dalam bentuk notasi sigma berikut,

$$\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

Manipulasi aljabar dalam notasi sigma

Contoh pada bagian b, c dan d mengindikasikan berlakunya manipulasi aljabar dalam notasi sigma.

$\sum_{i=1}^{n}\left(k^2-k\right)=\sum_{i=1}^{n}k(k-1)$ dengan menggunakan sifat distributif.

$$\sum_{i=1}^{n}\left((k+1)^2-k^2\right)=\sum_{i=1}^{n}(k^2+2k+1-k^2)=\sum_{i=1}^{n}(2k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2^k-2^{k-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(2^k-\frac{2^k}{2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2^k}{2}\right)=\sum_{i=1}^{n}2^{k-1}$$

Manipulasi aljabar dalam notasi sigma memungkinkan kita untuk menyederhanakan bentuk dan memunculkan penjumlahan dengan hasil yang sama. Misalnya bentuk terakhir;

$$\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Sama dengan bentuk

$$\sum_{i-1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{4.3}+\frac{1}{5.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Selanjutnya mari kita kaji deret,

$$3+5+7+9+11+\ldots+(2n+1)$$

Sedikit trik bilangan untuk masing-masing sukunya, deret tersebut dapat dituliskan menjadi,

$$(1+2)+(2+3)+(3+4)+(4+5)+(5+6)+\ldots+(n+(n+1))$$

Susun kembali deret akan kita peroleh,

$$(1+2+3+4+5+6)+\ldots+n)+(2+3+4+5+6)+\ldots+(n+1))$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}k \qquad + \qquad \sum_{k=1}^{n}(k+1)$$

Sehingga bisa dikatakan bahwa,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k+(k+1))=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}(k+1)$$

Hal ini tidaklah sulit untuk dipahami. Notasi sigma selain berlaku manipulasi aljabar juga memiliki sifat linier. Sebagaimana dinyatakan dalam teorema berikut ini,

Teorema A (Linieritas ∑)
Misalkan $\{a_i\}$ dan $\{b_i\}$ adalah dua barisan dan misalkan c adalah konstanta. Maka:

(i) $\sum_{k=1}^{n} c.a_i = c\sum_{k=1}^{n} a_i$

(ii) $\sum_{k=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{k=1}^{n} a_i + \sum_{k=1}^{n} b_i$

(iii) $\sum_{k=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{k=1}^{n} a_i - \sum_{k=1}^{n} b_i$

Contoh 3

Misalkan $\sum_{k=1}^{100} a_i = 65$ dan $\sum_{k=1}^{100} b_i = 25$. Hitunglah

(a) $\sum_{k=1}^{100}(2a_i - b_i + 3)$ (b) $\sum_{k=1}^{100}(2a_i + 3b_i - 3)$

Jawab

(a)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100}(2a_i - b_i + 3) &= \sum_{k=1}^{100} 2a_i - \sum_{k=1}^{100} b_i + \sum_{k=1}^{100} 3 \\ &= 2\sum_{k=1}^{100} a_i - \sum_{k=1}^{100} b_i + \sum_{k=1}^{100} 3 \\ &= 2(65) - 25 + 3.100 = 105 + 300 = 405\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100}(2a_i + 3b_i - 3) &= 2\sum_{k=1}^{100} a_i + 3\sum_{k=1}^{100} b_i - \sum_{k=1}^{100} 3 \\ &= 2.65 + 3.25 - 3.100 \\ &= 130 + 75 - 300 = -95\end{aligned}$$

Deret Kolaps(berjatuhan)

Perhatikan deret berikut ini,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ldots + \frac{1}{2013.2014}$$

Tentu sangat sulit untuk menghitung hasil penjumlahan tersebut. Sedikit pengubahan pada penyebut mungkin akan membantu kita untuk bisa meghitung secara pasti jumlah dari deret tersebut.

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\ldots+\frac{1}{2013.2014}$$

Melalui sifat bilangan pecahan, kita bisa peroleh deret tersebut akan sama dengan,

$$(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}})+(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}})+(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}})+(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}})+\ldots+(\cancel{\frac{1}{2013}}-\frac{1}{2014})$$

Sehingga hasilnya adalah $1-\frac{1}{2014}$. Bila kita perhatikan, deret tersebut memuat bagian dari suku-suku yang saling menghilangkan.

Deret berjatuhan ini memiliki bentuk umum, $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)$.

Beberapa contoh deret berjatuhan dapat dilihat berikut ini,

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^2-k^2\right), \sum_{k=1}^{n}\left(2^k-2^{k-1}\right), \sum_{k=1}^{n}\left((k-1)^2-k^2\right), \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

Jumlah Khusus

Sebelum mengkaji lebih jauh, mari kita ingat kembali hasil dari penjumlahan berikut,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n \text{ …….(1)}$$

Dengan menyusun ulang (1) kita peroleh,

$$\sum_{i=1}^{n} i = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1 \text{............(2)}$$

Jumlahkan (1) dan (2) untuk mendapatkan,

$$2\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{\text{n buah}} = n.(n+1)$$

Persamaan terkahir menunjukkan bahwa, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Cara lain juga dapat kita gunakan untuk mendapatkan jumlah tersebut. Perhatikan berikut ini,

$$(i+1)^2-i^2 = i^2+2i+1-i^2 = 2i+1 \text{ sehingga}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^2-i^2\right] = \sum_{i=1}^{n}[2i+1]$$

Karena ruas kiri adalah deret kolaps dan berlaku sifat linier, maka

$$(n+1)^2 - 1 = \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 1 \Rightarrow n^2 + 2n = 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n^2 + n = n(n+1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Jadi, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Beberapa bentuk khusus dapat dilihat berikut;

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Contoh 4: Tentukanlah nilai dari $\sum_{i=1}^{n-1} i$

Jawab

Cara 1

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = 1+2+3+...+n-1 = (1+2+3+...+n-1+n) - n$$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \sum_{i=1}^{n} i - n = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^2+n-2n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Cara 2

Misalkan $k = n$-1, sehingga

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Substitusi $k = n - 1$ kita akan peroleh,

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Contoh 5, tentukan hasil dari $\sum_{i=3}^{n} i^2$

Jawab

Kita lihat bahwa $\sum_{i=3}^{n} i^2$ berawal dari i = 3, sedangkan jumlah khusus diawali dari 1. Akan tetapi, dengan sedikit langkah kita bisa gunakan jumlah khusus tersebut untuk digunakan.

Perhatikan bahwa,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 1^2 + 2^2 + \sum_{i=3}^{n} i^2$$

Sehingga,

$$\sum_{i=3}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - 5 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 30}{6}$$

Pembuktian jumlah khusus lainnya Anda dapat lakukan sendiri. Pembuktian ini dapat dilakukan dengan menggunakan jumlah khusus sebelumnya yang telah ditemukan dan deret berjatuhan.

Sebagai contoh, untuk membuktikan $\sum_{i=1}^{n} i^2$ akan membutuhkan jumlah $\sum_{i=1}^{n} i$. Dan dengan sedikit penyelesaian dari, $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$. Untuk membuktikan $\sum_{i=1}^{n} i^3$ akan membutuhkan jumlah $\sum_{i=1}^{n} i^2$. Dan dengan sedikit penyelesaian dari, $(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$. Dan begitu seterusnya.

Pemahaman terhadap jumlah dan notasi sigma akan dibutuhkan dalam mengkaji tentang luas polygon dan jumlah Riemann yang dikaji pada pertemuan berikutnya.

Soal Latihan 1.2

Ubahlah penjumlahan berikut dalam notasi sigma

1. 3 + 6 + 9 + 12 + … + 2013
2. 2 + 6 + 12 + 20 + 30 +….+110
3. 2 – 4 + 6 – 8 + 10 – 12 + 14 - …+ 30
4. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+....+\frac{1}{3^{10}}$
5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+....+\frac{k}{k+1}$

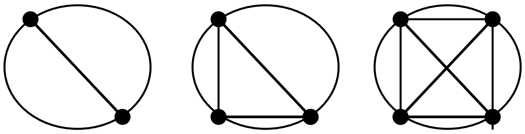
Kerjakan soal-soal berikut apabila $\sum_{i=1}^{20} a_i = 20$ dan $\sum_{i=1}^{20} b_i = 30$

6. $\sum_{i=1}^{20}(2a_i - b_i)$
7. $\sum_{i=0}^{19}(a_{i+1} - b_{i+1} + 2)$

Hitunglah nilai dari

8. $\sum_{k=1}^{6}\left(k^2+3k+2\right)$
9. $\sum_{i=1}^{5}\left(i^2-i\right)$
10. $\sum_{i=2}^{n-1}\left(i^2-i\right)$
11. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(i+1)^2}\right)$
12. $\sum_{i=1}^{n}\left(2^{-i}-2^{-i+1}\right)$
13. Buktikan bahwa $\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{a-ar^n}{1-r}, r \neq 1$
14. Buktikan bahwa $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$
15. Jika $\bar{x}$ adalah rata-rata dari data $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ buktikan bahwa $\sum_{k=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)=0$.
16. Misalkan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ adalah sembarang bilangan real. Tentukan nilai dari c agar nilai $\sum_{k=1}^{n}\left(x_i-c\right)$ minimum.

17. Pada sebuah lingkaran akan dibuat tali busur yang menghubungkan dua titik. Perhatikan gambar berikut;



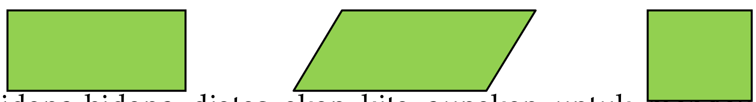
Berapakah banyaknya tali busur apabila ada 8 titik pada lingkaran? Berikan banyaknya tali busur apabila terdapat n titik pada lingkaran?

1.3 Luas Poligon

Pendahuluan luas

Luas merupakan salah satu ukuran, seperti halnya panjang, lebar, tinggi, berat dan lainnya. Ukuran-ukuran tersebut biasanya bernilai positif. Luas dapat dihitung berdasarkan bentuk daerahnya. Secara umum, luas dihitung berdasarkan perkalian dua ukuran yang saling tegak lurus.

Untuk kepentingan kajian selanjutnya, luas yang akan dikaji pada bagian ini berkaitan dengan luas berbentuk polygon, khususnya persegi panjang. Perhatikan gambar berikut,



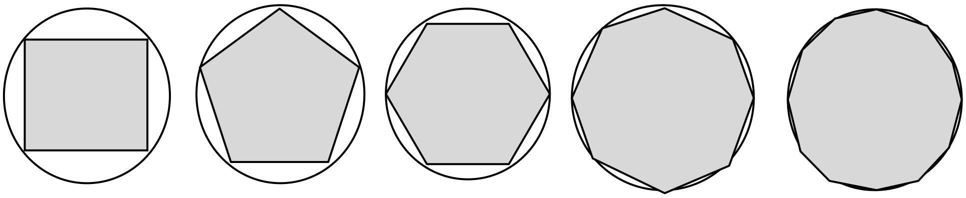
Bidang-bidang diatas akan kita gunakan untuk mendekati luas bidang rata yang tidak beraturan.

Beberapa sifat yang berkaitan dengan luas antara lain:

1. Luas dari sebuah daerah adalah positif

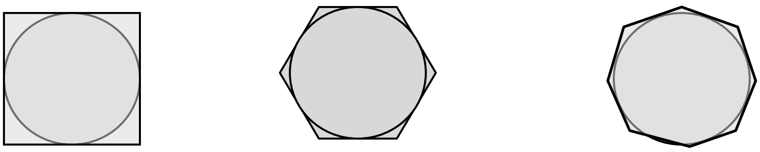
2. Luas persegipanjang adalah perkalian dari panjang dan lebar
3. Daerah yang kongruen memiliki luas yang sama
4. Gabungan dari dua daerah yang memiliki satu sisi bersama adalah jumlah dari dua daerah tersebut
5. Jika daerah yang satu memuat daerah kedua, maka luas daerah kedua lebih kecil atau sama dengan daerah pertama.

Sebagai ilustrasi, kita akan menghitung luas lingkaran dengan pendekatan polygon beraturan;



Bila kita perhatikan, maka kita bisa dekati luas lingkaran dengan polygon segi-n. semakin tinggi n, maka luasnya akan semakin mendekati luas lingkarannya. Luas dengan pendekatan diatas biasa dikenal dengan **polygon dalam**. Semakin besar n nya, maka pendekatan luas polygon semakin mendekati luas lingkarannya.

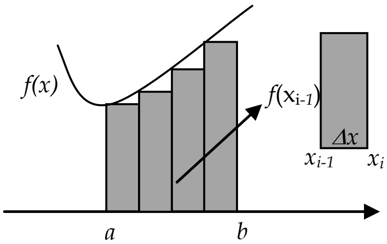
Dengan cara lain, kita bisa mendekati dengan membuat polygon segi-n diluarnya seperti gambar berikut;



Luas dengan pendekatan diatas biasa dinamakan denganpendekatan **polygon luar**.

Poligon Dalam

Polygon dalam merupakan salah satu pendekatan untuk menghitung luas daerah dibawah kurva dengan membuat persegipanjang yang berada dibawah kurva. Misalkan sebuah daerah yang dibatasi oleh y = f(x), x = a, x = b, dan sumbu-x. perhatikan gambar berikut;



bagi selang [*a,b*] menjadi n bagian yang sama dengan lebar Δ*x*, yaitu

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sehingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Dimana,

$$x_0 = a$$
$$x_1 = x_0 + \Delta x = a + \Delta x$$
$$x_2 = x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x$$
$$x_3 = x_2 + \Delta x = a + 3\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_i = x_{i-1} + \Delta x = a + i.\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = x_{n-2} + \Delta x = a + (n-1)\Delta x$$
$$x_n = x_{n-1} + \Delta x = a + n\Delta x = a + n.\frac{b-a}{n} = b$$

Luas polygon ke-*I* adalah L_i = $f(x_{i-1})$. Δ*x*, sehingga luas seluruh poligonnya adalah

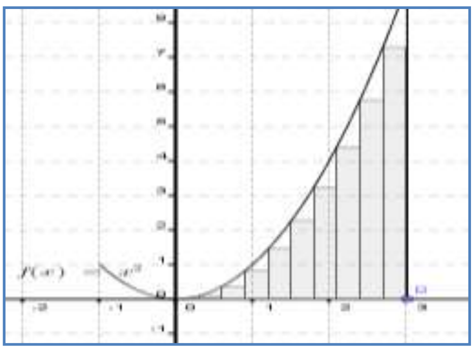
$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n$$

Atau

$$L = f(x_0).\Delta x + f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \ldots + f(x_{n-1}).\Delta x$$
$$= \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right)\Delta x$$

Bila kita tuliskan dalam notasi sigma, maka $L = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x$

Sekarang mari kita lihat luas daerah yang dibatasi oleh



$$y = f(x) = x^2, x = 0, x = 3, y = 0$$

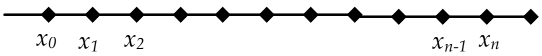
Andaikan sebuah daerah R yang dibatasi oleh

$y = f(x) = x^2$,sumbu-x, dan garis lurus x = 3. Perhatikan gambar berikut;

partisikan atau bagi selang [0,3] menjadi n bagian yang sama, dimana $\Delta x = \frac{3}{n}$ sehingga,

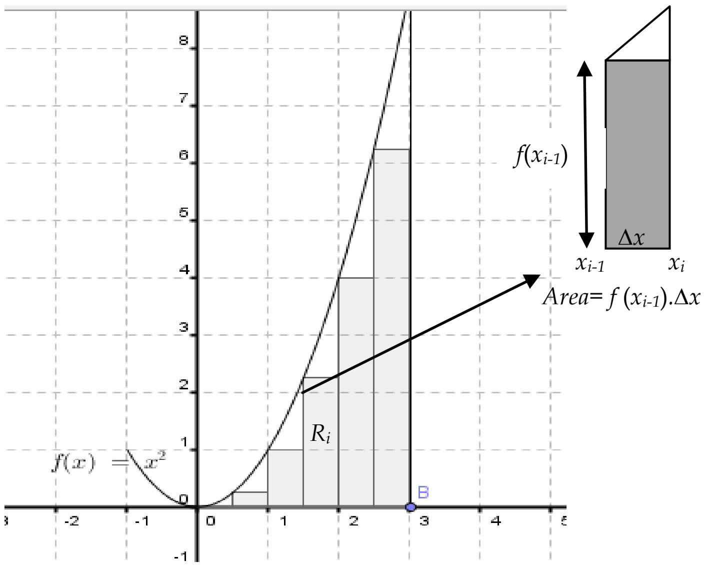
$0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$.

Lalu, bagaimana besar dari masing-masing x



Jadi,

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= x_0 + \Delta x = 0 + \Delta x = \tfrac{3}{n} \\
x_2 &= x_0 + 2\Delta x = 2.\Delta x = \tfrac{2.3}{n} \\
x_3 &= 3.\Delta x = \tfrac{3.3}{n} \\
&\vdots \\
x_i &= i.\Delta x = \tfrac{i.3}{n} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= (n-1)\Delta x = \tfrac{(n-1)\Delta x}{n} \\
x_n &= n.\Delta x = n.\frac{3}{n} = 3
\end{aligned}
$$



Luas daerah $A(R_n) = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$ Sehingga,

$$A(R_n) = f(x_0).\Delta x + f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \ldots + f(x_{n-1}).\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{3i}{n}).\frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(3i)^2}{n^2}.\frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{27}{n^3} i^2 = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

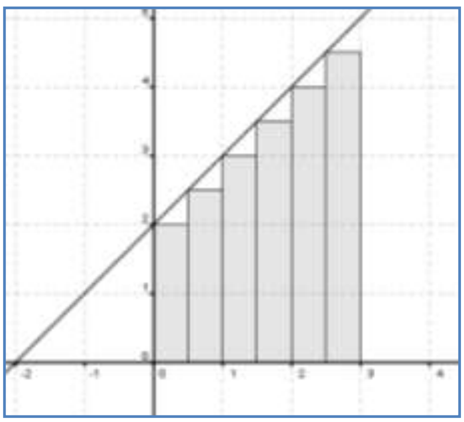
$$= \frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{27}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n)}{6}\right)$$

$$= 9 + \frac{27}{2n} + \frac{27}{6n^2}$$

Apabila n mendekati ∞, maka jumlah tersebut menjadi sebuah limit dimana,

$$\lim_{n\to\infty}\left(9 + \frac{27}{2n} + \frac{27}{6n^2}\right) = 9$$

Untuk lebih memahami mari kita kaji beberapa contoh berikut;



Contoh 1

Tentukan luas polygon dari gambar disamping

Jawab

Dari gambar diketahui bahwa, fungsinya adalah liner,

$f(x) = x + 2$, selang [0,3] dengan Δx = 0.5, dan n = 6. Sehingga,

$$\begin{aligned} A(R) &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 \\ &= f(0).\Delta x + f(0.5).\Delta x + f(1).\Delta x \\ &\quad + f(1.5).\Delta x + f(2).\Delta x + f(2.5).\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(R) &= 2(0.5) + 2.5(0.5) + 3(0.5) + 3.5(0.5) + 4(0.5) + 4.5(0.5) \\ &= 1 + 1.25 + 1.5 + 1.75 + 2 + 2.25 \\ &= 9.75 \end{aligned}$$

Kalau kita hitung luas daerah dari x = 0 sampai x = 3 yang berbentuk trapezium, maka luasnya = ½ (2 + 5).3 =21/2 = 10.5. Hal ini tentu sangat wajar karena pendekatan polygon dalam masih terdapat lubang-lubang yang berbentuk segitiga. Dengan mudah kita bisa hitung kalau luas masing-masing segitiganya adalah ½ (½)(½)= $^1/_8$. Jadi, luas yang **belum terhitung** sebesar = 6. 1/8 = 0.75.

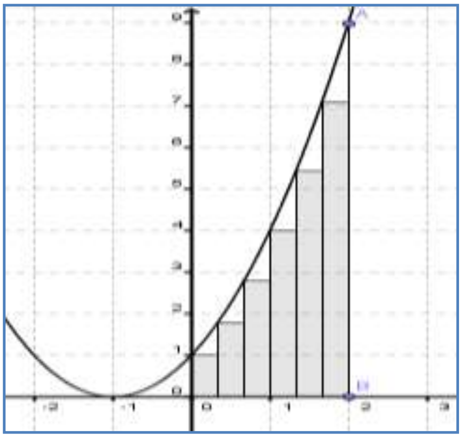
Hal ini bisa dilihat bahwa $L_{poligon} + L_{belum\ terhitung} = L_{trapesium}$

Contoh 2

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh $f(x) = x^2 + 2x + 1$, x = 0 dan x = 2, dan sumbu-x?

Jawab

Pertama, kita gambar daerahnya,



bagi selang [0,2] menjadi n bagian yang sama, sehingga

$$\Delta x = \frac{2}{n}$$

dan

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2$$

dengan demikian,

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + \tfrac{2}{n} = \tfrac{2}{n}, x_2 = \tfrac{2.2}{n}, x_3 = \tfrac{3.2}{n}$$

$$x_i = \tfrac{i.2}{n} = \tfrac{2i}{n}$$

Sehingga, luas ke-i adalah

$$A(R_i) = f(x_{i-1}).\Delta x = f\left(\frac{2(i-1)}{n}\right).\frac{2}{n} = \left[\left(\frac{2}{n}(i-1)\right)^2 + 2\left(\frac{2}{n}(i-1\right) + 1\right]\frac{2}{n}$$

$$= \left[\frac{8}{n^3}(i-1)^2 + \frac{8}{n^2}(i-1) + \frac{2}{n}\right]$$

Sehingga,

$$A(R) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{8}{n^3}(i-1)^2 + \frac{8}{n^2}(i-1) + \frac{2}{n}\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}$$

Sedikit manipulasi pada indeksnya, missal $k = i - 1$ kita peroleh

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 + \frac{8}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k + \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k + 2$$

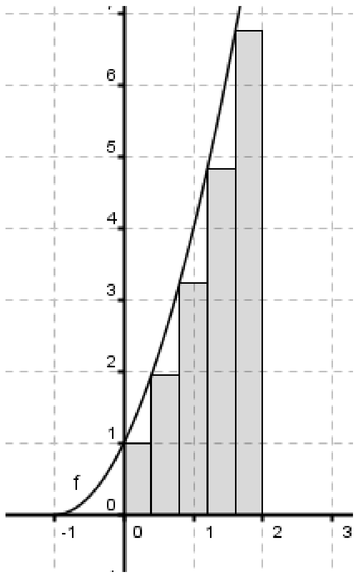
$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{2(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + (n-1)}{6}\right) + \frac{8}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + 2$$

$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3 - 6n^2 + 6n + 2 + 3n^2 - 6n + 3 + n - 1}{6}\right) + \frac{8}{n^2}\left(\frac{n^2 - n)}{2}\right) + 2$$

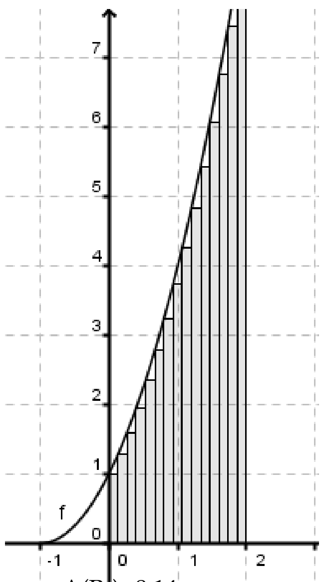
$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n + 1}{6}\right) + \frac{8}{n^2}\left(\frac{n^2 - n)}{2}\right) + 2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{n^3} + 4 + \frac{4}{n} + 2 = \frac{8}{3} + 6 + \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{n^3}$$

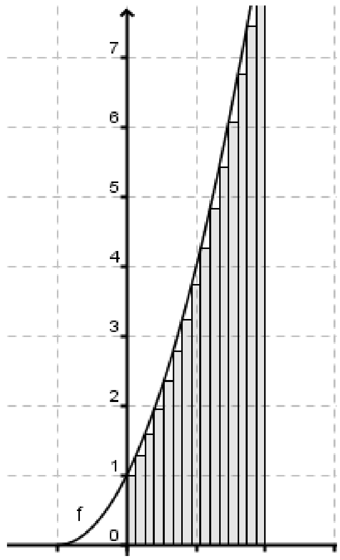
Jadi, untuk n yang besar, maka A(R) = 6 + 8/3 = 8, 67



A(R₅)=7.12



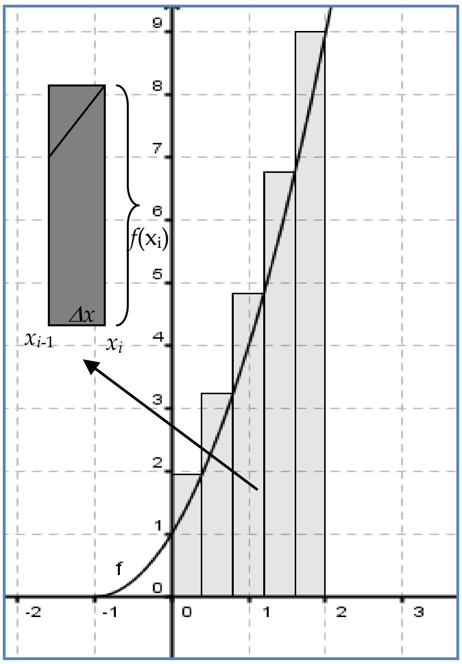
A(R₅)=8.14



A(R₅)=8.4

Luas Poligon Luar

Mungkin kita masih memiliki keraguan bahwa luas daerah yang dibatas oleh $f(x) = x^2 + 2x + 1$, x = 0, x = 2 dan sumbu-x adalah 8.67.



Kita dapat menunjukkan fakta melalui pendekatan lain. Perhatikan

kita bisa lihat bahwa luas polygon ke-i adalah

$$S_i = f(x_i).\Delta x$$

Selanjutnya dengan cara serupa dengan polygon dalam kita bisa dapatkan,

$$A(S_n) = f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + ... + f(x_n).\Delta x$$

sebelumnya kita dapat bahwa,

$$f(x_i).\Delta x = \left[\frac{8}{n^3}i^2 + \frac{8}{n^2}i + \frac{2}{n}\right]$$

Sehingga, luas daerah yang dimaskud adalah

$$A(S_n) = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}$$

$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{8}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 2$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^3} + 4 + \frac{4}{n} + 2$$

$$= 8\frac{2}{3} + \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Dengan mengambil n yang besar, kita simpulkan bahwa,

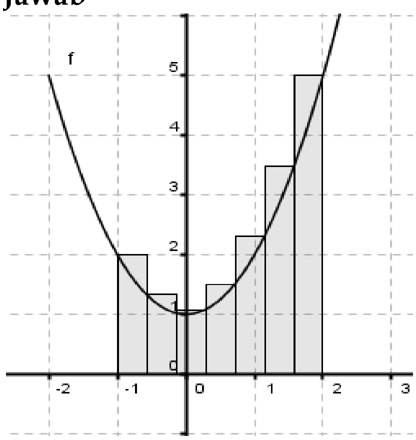
$$A(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(8\frac{2}{3} + \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = 8\frac{2}{3}$$

Jadi, penggunaan polygon untuk menentukan luas daerah akan menghasilkan nilai yang baik menggunakan polygon dalam ataupun polygon luar.

Untuk lebih memantapkan pemahaman, kita coba pada 2 contoh berikut.

Contoh 1: Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $g(x) = x^2 + 1$, x = -1, x = 2 dan sumbu-x.

Jawab



bagi [-1,2] menjadi n bagian yang sama, kita dapatkan,

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$x_0 = -1$

$x_1 = -1 + \frac{3}{n} = \frac{3}{n}$,

$x_2 = -1 + \frac{2.3}{n}$,

$x_3 = -1 + \frac{3.3}{n}$

$x_i = -1 + \frac{i.3}{n} = -1 + \frac{3i}{n}$

Sehingga, $L_i = f(x_i).\Delta x = f(-1 + {}^{2i}/_{n}).\ \Delta x$.

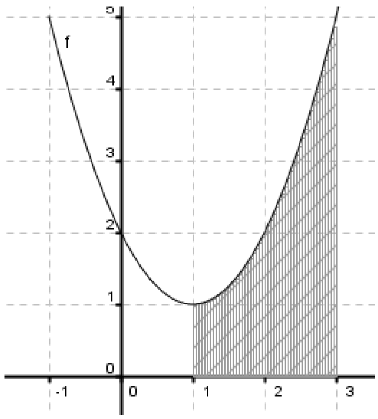
Atau $L_i = f(-1 + \frac{3i}{n}).\frac{3}{n} = \left(\frac{6}{n} - \frac{18i}{n^2} + \frac{27i^2}{n^3}\right)$

$$A(L_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{6}{n}-\frac{18i}{n^2}+\frac{27i^2}{n^3}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{n}-\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=6-\frac{18}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+\frac{27}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$$

$$=6-9-\frac{6}{n}+9+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}=6+\frac{2}{n^2}$$

Contoh 2: Tentukan luas dari daerah yang diarsir berikut ini,



Jawab : karena fungsi berbentuk parabola, maka persamaan umumnya adalah $f(x)=ax^2+bx+c$

Dari grafik diketahui bahwa c = 2 dan sifat sumbu simetri $x=\frac{-b}{2a}=1,$ atau b = -2a dan $x_1.x_2=\frac{c}{a}=2,$ karena c = 2, maka a = 1 dan b = -2. Jadi, $f(x)=x^2-2x+2$. Selanjutnya, bagi [1,3] menjadi n bagian yang sama untuk mendapatkan $\Delta x=\frac{2}{n}$ dan $x_i=1+\frac{2}{n}i$.

$$L_i=f(x_i).\Delta x=f(1+\tfrac{2i}{n}).\frac{2}{n}=\left[\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{2i}{n}\right)+2\right]\frac{2}{n}$$

$$=\left[1+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}-2-\frac{4i}{n}+2\right]\frac{2}{n}=\left[1+\frac{4i^2}{n^2}\right]\frac{2}{n}=\frac{2}{n}+\frac{8i^2}{n^3}$$

Sehingga,

$$A(L_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2}{n} + \frac{8i^2}{n_3}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}$$

$$= 2 + \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right)$$

$$= 2 + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

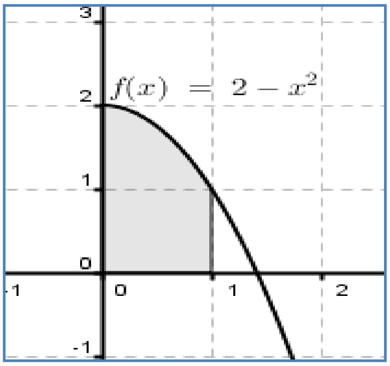
$$= 4\frac{4}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Sehingga luasnya $A = \lim_{n\to\infty}\left(4\frac{2}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = 4\frac{2}{3}$

Contoh 3

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh y = 2 – x², x = 0, x = 1, dan sumbu-*x*.

Penyelesaian



perhatikan gambar disamping, bila kita bagi [0,1] menjadi *n* bagian yang sama, maka lebar poligonnya adalah

$$\Delta x = \frac{1}{n} \text{ dan } x_i = a + i.\Delta x = \frac{i}{n}$$

Sehingga luas polygon ke-i adalah

$$L_i = f(x_i).\Delta x = (2 - \frac{i^2}{n^2}).\frac{1}{n} = \frac{2}{n} - \frac{i^2}{n^3}$$

Jadi, luas daerah dengan menggunakan polygon dalam didapat

$$L = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{n} - \frac{i^2}{n^3}\right) = 2 - \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = 2 - \frac{1}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right)$$

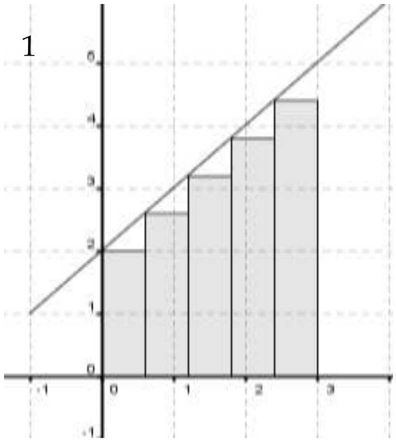
$$= 2 - \frac{1}{n^3}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} = \frac{5}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2}$$

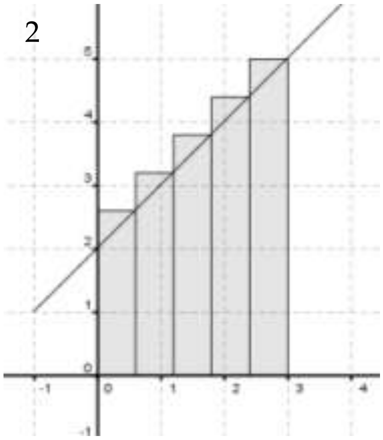
Soal Latihan 2.1

Tentukan luas daerah yang diarsir berikut ini,

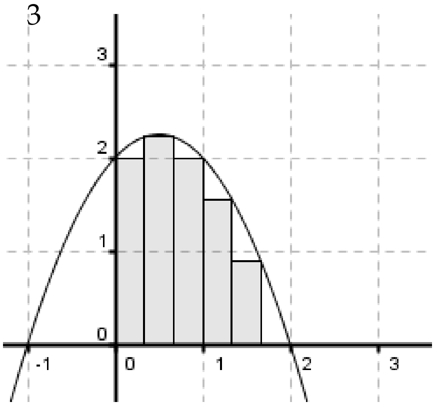
1



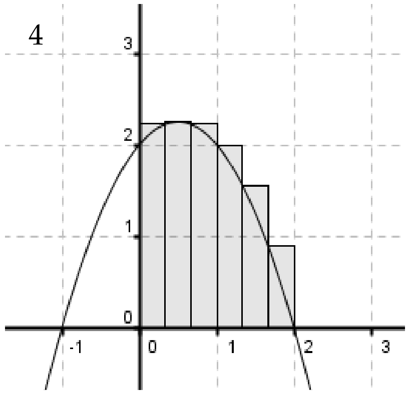
2



3



4



Tentukan luas daerah yang batas-batas daerah dan n yang diberikan sebagai berikut dengan menggunakan polygon dalam;

5. $f(x) = 2x + 1, x = 0, x = 2, n = 5$

6. $f(x) = x^2 - 4x + 4, x = 0, x = 3, n = 6$

7. $f(x) = x^3, x = 0, x = 3, n = 6$

Tentukan luas daerah yang batas-batas daerah dan n yang diberikan sebagai berikut dengan menggunakan polygon luar;

8. $f(x) = 2x + 1, x = 0, x = 2, n = 5$

9. $f(x) = x^2 - 4x + 4, x = 0, x = 3, n = 6$

10. $f(x) = x^3, x = 0, x = 3, n = 6$

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$ dan selang [a,b] dengan mengambil n→∞

11. $f(x) = x^2 - 4x + 4, a = 0, b = 2$

12. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1, a = 0, b = 1$

13. $f(x) = x^3, a = 1, b = 2$

14. $f(x) = x^2 - x^3, a = 0, b = 1$

15. $f(x) = 25 - x^2, a = 1, b = 4$

16. $f(x) = 2x - x^3, a = 0, b = 1$

17. $f(x) = x^2 + x, a = 1, b = 4$

18. Misalkan $y = x^2$ dan interval [a,b]. buktikan bahwa luas daerah yang dibatasi oleh y selana [a.b] dan sumbu-x adalah $\dfrac{b^3 - a^3}{3}$ andaikan a ≠ 0.

16. Turunkan rumus $A_n = \frac{1}{2}nr^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ dan $B_n = nr^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ untuk luas-luas polygon sisi n-sisi beraturan di dalam dan di luar dari sebuah lingkaran berjari r. Kemudian tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} A_n$ dan $\lim_{n\to\infty} B_n$ keduanya adalah πr^2.

BAB II

INTEGRAL TENTU DAN SIFAT-SIFATNYA

Pada bab sebelumnya, kita telah mengkaji tentang integral taktentu sebagai antiturunan. Beberapa aturan pengintegralan juga telah kita pahami. Kajian pada bab II ini merupakan kelanjutan dari apa yang telah kita kaji. Kajian kita pada bagian ini berkaitan dengan jumlah Riemann, integral tentu, teorema dasar kalkulus, sifat-sifat integral.

Setelah mengikuti dan mempelajari bab II ini kita diharapkan memiliki wawasan dan ketrampilan dalam menyelesaikan permasalahan integral tentu, menggunakan dan membuktikan sifat-sifat integral tentu. Ketrampilan tersebut dapat dilihat melalui indikator yang digambarkan berikut;

INDIKATOR

- Menentukan jumlah riemann dari fungsi yang terbatas
- Menjelaskan hubungan Jumlah Riemann dengan definisi integral tentu
- Membedakan fungsi yang terintegralkan dengan yang tidak terinegralkan
- Menentukan nilai integral tentu dengan batas yang diketahui

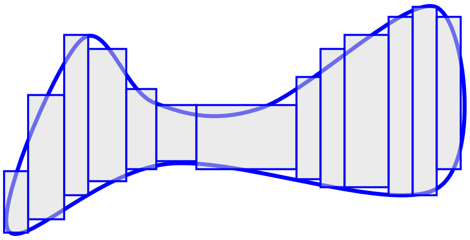
- menjelaskan definisi teorema dasar kalkulus
- menunjukkan integral tentu sebagai operator linier
- menggunakan sifat linier untuk menghitung integral tentu

- memahami dan menggunakan metode substitusi untuk menentukan hasil integrasi
- menggunakan sifat simetri untuk menentukan hasil integrasi
- menggunakan sifat periodik untuk menentukan hasil integrasi fungsi periodik

- menggunakan sifat penambahan selang untuk menghitung integral tentu
- menjelaskan sifat pembandingan dan keterbatasan untuk menganalisis fungsi
- menentukan turunan dari integral tentu
- menjelaskan teorema rata-rata dari integral tentu

2.1 Integral Tentu

Pendahuluan luas dan luas polygon merupakan sebuah konsep awal dalam mendefeinisikan integral tentu. Ide tentang jumlah Riemann merupakan gagasan yang dapat menuntun kita untuk memahaminya.Riemann

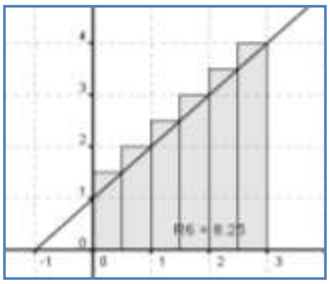


menyatakan bahwa, apabila sebuah fungsi f didefinisikan pada selang tertutup [a,b]. fungsi ini bernilai positif atau negative pada interval tersebut dan fungsinya tidak mesti kontinu.

Seperti telah kita kaji pada subbab sebelumnya, perhitungan luas dengan menggunakan polygon dalam tampaknya masih ada kekurangan dengan beberapa bagian yang belum terhitung. Begitu pula sebaliknya, penghitungan dengan menggunakan polygon luar akan kita dapatkan kelebihan dalam menghitungnya.

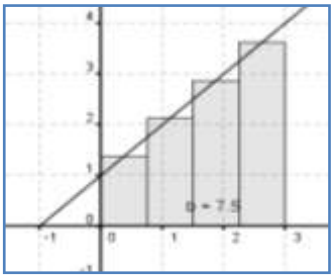
Potongan dengan cara gabungan dan penggunaan lebar yang disesuaikan kebutuhan tampaknya lebih tepat dan cepat. Perhatikan contoh berikut;

Gambar 1



Gambar 2

Gambar 3



Gambar 4

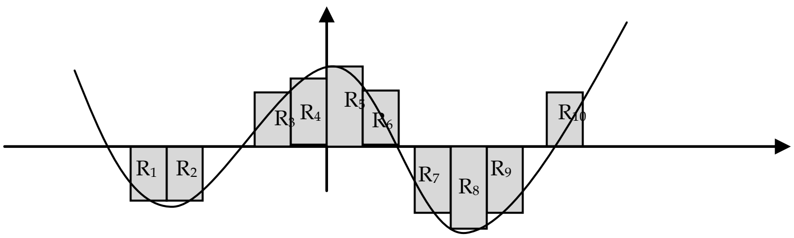
Kita bisa lihat dari ke-4 gambar bahwa gabungan antara polygon dalam dan luar dengan partisi yang tidak sama akan lebih tepat dan cepat.

Misalkan selang [a,b] dibagi menjadi n bagian selang (tidak mesti sama), sehingga, dan $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ adalah sebuah titik uji pada selang ke-i. berdasarkan data ini, maka luas ke-i dinyatakan dengan,

$R_i = f(\overline{x_i}).\Delta x_i$ sehingga jumlah Riemann dinyatakan dengan,

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

Berbeda dengan polygon yang digunakan untuk menghitung luas, maka jumlah Riemann menyatakan nilai integral pada selang tertentu. Oleh karena itu, jumlah Riemann mungkin bernilai positif atau negative.



Gambar 5

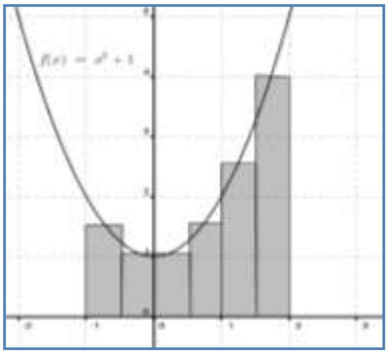
Maka jumlah Riemann

$$R_p = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 + R_9 + R_{10}$$

Contoh 1

Gunakan jumlah Riemann untuk fungsi $f(x) = x^2 + 1$ pada interval [-1,2] dengan menggunakan partisi -1 < -0.5 < 0 < 0.5 < 1 < 1.5 < 2 dengan titik uji x_i yang merupakan titik tengah?

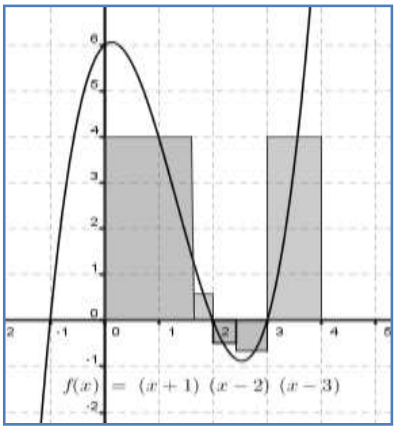
Penyelesaian



Gambar 6

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$
$$= \begin{bmatrix} f(-0{,}75) + f(-0{,}25) + f(0{,}25) + f(0.75) \\ + f(1{,}25) + f(1{,}75) \end{bmatrix}(0.5)$$
$$= \begin{bmatrix} 1.5625 + 1.0625 + 1.0625 + 1.562 + \\ 2.5625 + 4.0625 \end{bmatrix} 0.5$$
$$= 5.9375$$

Kita bisa bandingkan dengan menggunakan jumlah polygon dengan mengambil besar yang menghasilkan luas sebesar 6 satuan. Tentu masih terdapat perbedaan yang disebabkan pengambilan titik uji atau pembagian partisi masih menjadi 6 bagian.



Gambar 7

Contoh 2

Hitung jumlah Riemann R_p untuk $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$ pada interval [0,4] dengan menggunakan partisi P dengan titik-titik partisi 0 < 1.6 < 2 < 2.4 < 3 < 4 dan titik sampel yang berpadanan.

$$\overline{x}_1 = 0.5; \overline{x}_2 = 1.8; \overline{x}_3 = 2.2; \overline{x}_4 = 2.6; \overline{x}_5 = 3.5$$

Penyelesaian

$$
\begin{aligned}
R_P &= \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x_i}).\Delta x_i \\
&= f(\overline{x_1})\Delta x_1 + f(\overline{x_2})\Delta x_2 + f(\overline{x_3})\Delta x_3 + f(\overline{x_4})\Delta x_4 + f(\overline{x_5})\Delta x_5 \\
&= \begin{bmatrix} f(0.5)(1.1-0) + f(1.8)(1.6-1.1) + f(2.2)(2-1.6) \\ + f(2.6)(2.4-2) + f(3.5)(3-2.4) \end{bmatrix} \\
&= [5.625(1.1) + 0{,}672(0.5) + \text{-}0.51(0.4) + \text{-}0.86(0.4) + 3.375(0.6)] \\
&= 7.9981
\end{aligned}
$$

Dasar-dasar untuk memahami integral tentu sudah kita kaji. Integral tentu pada prinsipnya adalah untuk menentukan nilai fungsi pada selang tertentu.

Definisi integral tentu

Misalkan f terdefinisi [a,b]. Jika $\lim\limits_{\|p\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$ ada, kita katakana f terintegralkan pada selang [a,b]. selanjutnya $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tentu (atau integral Riemann) fungsi f dari a ke b dimana

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Bila kita memiliki sebuah fungsi f pada interval [a,b]. tentu dengan mudah kita katakana bahwa jumlah Riemann untuk f pada [a,b] akan sama dengan $\int_a^b f(x)dx$. Lalu apa yang terjadi bila a = b. Untuk menjawab ini tentu kita bisa gunakan jumlah Riemann. Pertama kita akan membagi selang menjadi n bagian dimana $\Delta x_i = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

dan $\overline{x_i} = x_i$. Karena b = a, maka Δxᵢ = Δx = 0. Hal ini berakibat pada suku ke-I dari jumlah Riemann yang sama dengan 0, yakni

$$R_i = f(\overline{x_i}).\Delta x_i = f(x_i).0 = 0$$

Sehingga,

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0 \text{ dan } \int_a^a f(x)dx = \lim_{\|p\|\to 0} R_p = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} R_i = 0$$

Oleh karena itu, dapat kita simpulkan bahwa

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Dengan cara yang sama, dikarenakan dan sedikit manipulasi bagi Δx, kita bisa dapatkan

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = -\frac{a-b}{n} = -\Delta x_i'$$

Selanjutnya Anda bisa lakukan penghitungan jumlah Riemann dan menghitung limitnya untuk mendapatkan kesamaan berikut,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Sebagai contoh Anda bisa hitung dan mengecek kebenaran berikut,

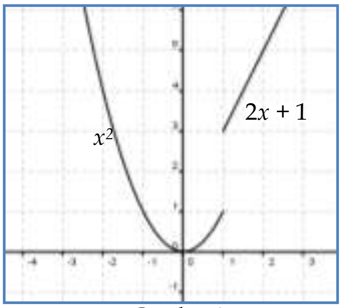
$$\int_2^2 x^3 dx = 0, \int_1^1 5x^2 dx = 0, \int_2^6 \left(x^2 + x - 1\right)dx = -\int_6^2 \left(x^2 + x - 1\right)dx$$

Selanjutnya, kita bisa katakana bahwa x adalah variable dummy (boneka) dalam perhitungan integral. Variable x ini dapat kita ganti dengan huruf lain pada setiap muncul variable x. jadi,

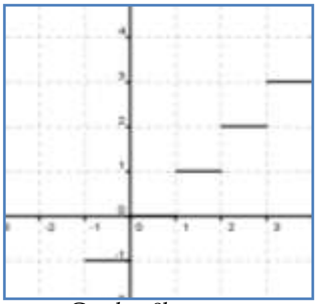
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

Pada awal kajian subbab ini, sebuah pernyataa, “fungsi f didefinisikan pada interval tertutup [a,b] akan bernilai positif atau negative meskipun tidak kontinu”, tampaknya menarik. Pernyataan ini menimbulkan pertanyaan, bagaimana dengan fungsi yang takterdefinisi pada selang [a,b]? apakah jumlah Riemann-nya bisa kita hitung? Apakah integralnya ada?.

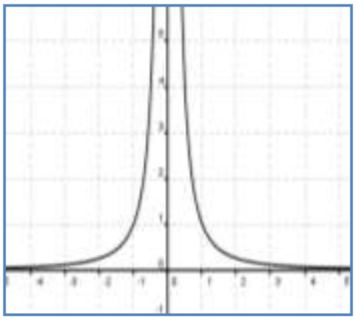
Mari kita perhatikan grafik fungsi berikut pada selang [-2,3]



Gambar 8a



Gambar 8b



Gambar bc

Gambar 8a merupakan grafik yang terbatas dan takkontinu pada [-2,3] di titik x = 1. Dengan membagi partisi menjadi -2<-1<0<1<2<3 dan titik uji -1,5;-0,5;0,5;1,5;2,5. Kita bisa menentukan jumlah Riemann-nya yang berakibat bahwa $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ dapat kita hitung.

Gambar 8b merupakan fungsi yang terbatas dan takkontinu pada [-2,3] setiap titik bilangan bulatnya. Akan tetapi, kita bisa membuat partisi -2<-1<0<1<2<3 dengan titik uji-1,5;-0,5;0,5;1,5;2,5. Kita bisa menentukan jumlah Riemann-nya yang berakibat bahwa $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ dapat kita hitung.

Gambar 8c merupakan grafik fungsi yang takterbatas dan takkontinu pada [-2,3]. Kita bisa membuat partisi 2<-1<0<1<2<3 dan titik uji -1,5;-0,5;0,5;1,5;2,5. Akan tetapi, kita bisa membuat jumlah Riemann pada **partisi sekitar 0** yang besar sekali sehingga jumlah Riemann secara keseluruhan tidak bisa dihitung. Ini berakibat bahwa $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ **tidak dapat** kita hitung yang berarti $f(x)$ tidak dapat dintegralkan.

Analogi yang membantu, kita tidak bisa menghitung luas daerah apabila batas-batas daerah tidak jelas dan pasti.

Teorema

Jika f terbatas pada [a,b] dan kontinu kecuali pada sejumlah titik berhingga, maka f terintegralkan pada [a,b]. khususnya, jika f kontinu pada [a,b], maka f terintegralkan pada [a,b].

Ingat kembali fungsi kontinu! Beberapa bentuk fungsi kontinu antara lain fungsi polinom, sinus, cosinus dan rasional (asalkan penyebutny tidak sama dengan 0). Akibatnya adalah fungsi-fungsi tersebut dapat diintegralkan pada [a,b] asalkan tidak memuat titik yang mengakibatkan penyebut = 0.

Untuk lebih memahami mari kita kaji contoh-contoh berikut;

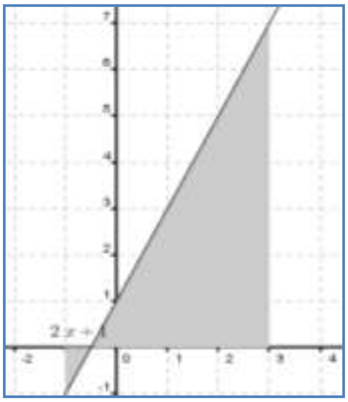
Contoh 3

Hitunglah nilai dari

(a) $\int_{-1}^{3} (x+2$ (b) $\int_{0}^{3} (x^2-4)dx$

Penyelesaian

(a) Pertama kita gambar daerah yang akan dihitung luasnya


Gambar 9

buat partisi selang [-1,3] menjadi n bagian yang sama, dimana $\Delta x_i = \Delta x = \frac{3-(-1)}{n} = \frac{4}{n}$

selanjutnya pilih titik uji yang sama dengan $\overline{x_i} = x_i$

Dimana

$x_0 = -1, x_1 = -1 + \frac{4}{n}, x_2 = -1 + \frac{2.4}{n}; x_i = -1 + \frac{4.i}{n}$

sehingga $R_i = f(x_i).\Delta x_i = f(x_i).\ \Delta x$.

Jadi, $R_i = \left(-1 + \frac{4i}{n} + 2\right).\frac{4}{n} = \left(\frac{4}{n} + \frac{16i}{n^2}\right)$

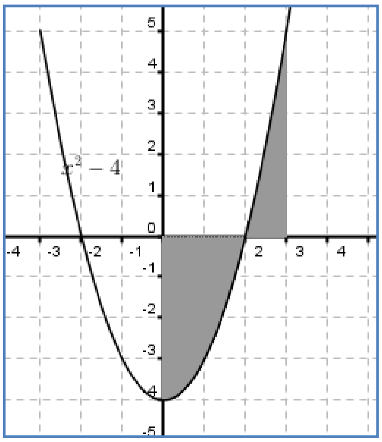
Jumlah Riemannnya adalah

$$R_p = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n} + \frac{16i}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16i}{n^2}\right) = 4 + \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 4 + \frac{16}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = 4 + 8 + \frac{8}{n} = 12 + \frac{8}{n}$$

Sehingga,

$$\int_{-1}^{3}(2x+2)dx = \lim_{\|p\|\to 0} R_p = \lim_{n\to\infty}\left(12 + \frac{8}{n}\right) = 12$$


Gambar 10

(b). Grafiknya bisa dilihat buat partisi [0,3] menjadi n bagian yang sama, $\Delta x_i = \Delta x = \frac{3-(0)}{n} = \frac{3}{n}$

sehingga kita dapatkan, $\overline{x_i} = x_i = \dfrac{3i}{n}$

Dan suku Riemann ke-I adalah

$$R_i = f(x_i).\Delta x = f\left(\frac{3i}{n}\right).\frac{3}{n}$$

$$= \left(\frac{9i^2}{n^2} - 4\right)\frac{3}{n} = \frac{27i^2}{n^3} - \frac{12}{n}$$

Jadi,

$$\int_0^3 (x^2-4)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27i^2}{n^3}-\frac{12}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{27}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right] - \lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}.n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{27}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right)-12$$

$$= 9-12=-3$$

Soal Latihan 2.1

Hitunglah jumlah Riemann dari fungsi, partisi dan titik uji yang diberikan

1. $f(x)=x; [-2,4]; -2<1<2<3<4;$

   $x_1=-0{,}5; x_2=1{,}5; x_3=2{,}5; x_4=3{,}5$

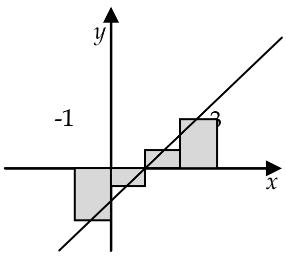
2. $f(x)=-x^2+x; [-1,2]; -1<0{,}2<0{,}8<1{,}2<2;$

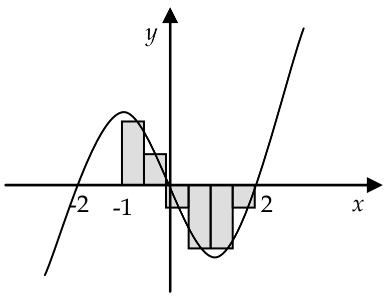
   $x_1=-0{,}5; x_2=0{,}5; x_3=1{,}1; x_4=1{,}6$

3. $g(x)=x^3-x^2+x-1; [-1,3]; -1<-0{,}4<0<0{,}8;<1{,}4<2{,}6;$

   $x_1=-0{,}8; x_2=-0{,}1; x_3=0{,}6; x_4=1; x_5=2{,}8$

Hitunglah luas daerah yang diarsir berikut ini





Gunakan definisi integral tentu untuk menghitung nilai dari soal-soal berikut

6. $\int_0^2 (-2x+1)dx$

7. $\int_1^3 (1-x^2)dx$

8. $\int_{-2}^1 (3x^2-2x+1)dx$

9. $\int_1^3 (-2x^2+3x)dx$

10. $\int_0^2 (x^2-x^3)dx$

11. $\int_{-1}^2 (x^2+1)dx$

12. $\int_{-2}^2 (x^3+2)dx$

2.2 Teorema Dasar Kalkulus I dan Sifat-Sifat Integral

Kajian berikutnya yang akan menjadi dasar dalam menjembati hubungan timbale balik antara turunan dan integral. Integral taktentu sebagaimana dikaji pada bagian sebelumnya menyatakan operasi balikan atau invers dari turunan. Apakah mungkin kita mencari turunan dari fungsi yang masih memuat tanda integral?

Contoh mudah dan sederhana berikut akan menuntun kita untuk sampai pada konsep tersebut,

Misalkan sebuah $\int_1^b (2t+1)dt$

$$\Delta x = \frac{b}{n},\ x_i = \frac{bi}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2bi}{n}+1\right)\frac{b}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2b^2 i}{n^2}+\frac{b}{n}\right) = \frac{2b^2}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+b$$

$$=\left(b^2+\frac{b}{n}+b\right)$$

Sehingga, $\int_0^b (2t+1)dt = \lim_{n\to\infty}\left(b^2+b+\frac{b}{n}\right) = b^2+b$

Jadi, hasilnya $b^2 + b$ yang sangat bergantungpada nilai *b*-nya. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa hasil ini merupakan sebuah fungsi $F(b) = b^2 + b$. karena berlaku untuk *b* sembarang, maka variable ini bisa kita ganti dengan yang lain, missal x. sehingga $F(x) = x^2 + x$. Fungsi terakhir ini dapat dinyatakan sebagai $\int_0^x (2t+1)dt$

Sekarang coba kita turunkan fungsi F, yakni $F'(x) = 2x + 1$ hasil ini tentu sama dengan fungsi integran yang ada.d

Secara umum, hal ini tentu dinyatakan dalam definisi yang dikenal dengan **Teorema Dasar Kalkulus I**

Definisi (Teorema Dasar Kalkulus 1)

Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan misalkan x sebarang titik dalam (a,b), maka $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$,

Untuk lebih memahaminya mari kita pelajari contoh berikut,

Contoh 1

Tentukanlah

1. $\frac{d}{dx}\left[\int_2^x (t^2 - 2t)dt\right]$ 2. $\frac{d}{dx}\left[\int_{-1}^x (t^2 + t^{2/3})dt\right]$

Penyelesaian

1. Hal ini dapat dilakukan dengan mensubstitusi variable x pada fungsi integrannya. Diketahui bahwa fungsi integran, $f(t) = t^2 - 2t$. Sehingga $f(x) = x^2 - 2x$

   Jadi, $\frac{d}{dx}\left[\int_2^x (t^2 - 2t)dt\right] = f(x) = x^2 - x$

2. Dengan cara yang sama, kita peroleh $f(x) = x^2 + x^{2/3}$

Jadi, $\frac{d}{dx}\left[\int_{-1}^{x}\left(t^2+t^{2/3}\right)dt\right]=f(x)=x^2+x^{2/3}$

Lalu, bagaimana untuk bentuk $\frac{d}{dx}\left[\int_{x}^{2}\left(t^2+t^{2/3}\right)dt\right]$?. Bentuk dimana variable x terletak pada batas bawah. Sifat integral tentu berkaitan dengan batas yang sudah kita kaji sebelumnya akan sangat membantu. Dengan sedikit manipulasi dan sifat turunan kita peroleh

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x}^{2}\left(t^2+t^{2/3}\right)dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_{2}^{x}\left(t^2+t^{2/3}\right)dt\right]=-\frac{d}{dx}\left[-\int_{2}^{x}\left(t^2+t^{2/3}\right)dt\right]$$

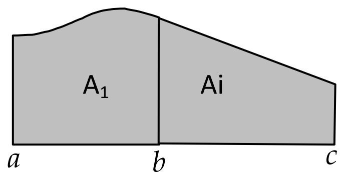
Jadi,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x}^{2}\left(t^2+t^{2/3}\right)dt\right]=-f(x)=-\left(x^2+x^{2/3}\right)$$

Mudah bukan! Selanjutnya, kita akan mengkaji tentang sifat-sifat integral.

Sifat-sifat Integral

Pendekatan jumlah Rieman dalam integral tentu memunculkan sifat yang berlaku dalam integral tentu. Perhatikan gambar berikut;



Tentunya Kita sepakat bahwa luas daerah yang diarsir adalah

$$A = A_1 + A_2$$

Bagaimana hubungannya dengan integral tentu? berdasarkan jumlah Riemann kita bisa simpulkan,

$$\int_{a}^{c} f(x)dx=\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{c} f(x)dx$$

Sifat ini dikenal dengan nama **sifat penambahan selang.** Sifat ini dinyatakan dalam teorema berikut;

Teorema

Jika *f* terintegralkan pada selang tertutup yang memuat, *a*, *b*, *c* maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

bagaimanapun urutan dari *a*, *b*, dan *c*.

ilustrasi urutan a, b, c

a b c

$$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$$

a c b

$$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$$

c a b

$$\int_c^a + \int_a^b = \int_c^b$$

b a c

$$\int_b^a + \int_a^c = \int_b^c$$

Ilustrasi di atas menyakinkan kita bahwa dimanapun kita meletakkan *b*, diantara a dan c, setelah c, sebelum a, atau setelah c dan a akan kita dapatkan rumusan yang seperti dalam teorema penambahan selang.

Contoh 2

Misalkan $\int_0^3 f(x)dx = 3$ dan $\int_2^3 f(x)dx = -1$, tentukanlah

(a) $\int_0^2 f(x)dx$ (b) $\int_0^3 [f(x)-1]dx$

(c) $\int_0^2 [2f(x)-1]dx$ (d) $\int_0^3 [3f(x)+x]dx$

Penyelesaian

(a) Berdasarkan sifat penambahan selang, kita dapatkan

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

$$= 3-(-1) = 3+1 = 4$$

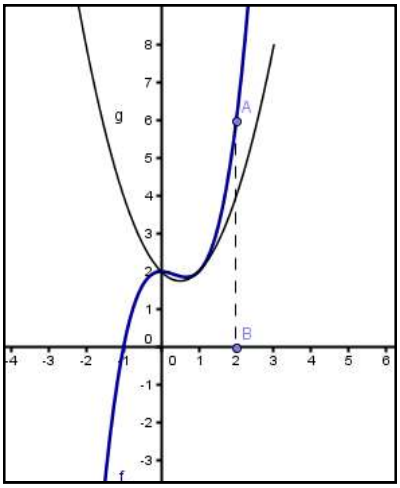
(b) $\int_0^3 [f(x)-1]dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^3 1dx = 3-(3-0) = 0$

(c) $\int_0^2 [2f(x)-1]dx = 2\int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 1dx = 2.4-(2-0) = 6$

(d) $\int_0^3 [3f(x)+x]dx = 3\int_0^3 f(x)dx + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 3.3+\frac{9}{2} = 13\tfrac{1}{2}$

Sifat pembandingan

Perhatikan grafik dua fungsi f(x) dan g(x) berikut,



Pada selang tertutup [0,2] berlaku $f(x) \le g(x)$.

Dengan mengambil partisi sembarang pada [0,2] dengan lebar Δx_i dan x_i kita bisa peroleh,

$$f(x_i).\Delta x_i \le g(x_i).\Delta x_i$$

Yang berimplikasi pada jumlah Riemann,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(x_i).\Delta x_i$$

Tentu saja akan berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i).\Delta x_i$$

Gunakan definisi integral tentu untuk mendapatkan,

$$\int_0^2 f(x)dx \le \int_0^2 g(x)dx$$

Sifat yang kita kaji di atas, dinamakan sefat perbandingan dalam integral tentu. Sifat ini dinyatakan dalam teorema berikut,

Teorema (sifat perbandingan)

Jika f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan jika $f(x) \le g(x)$ untuk semua x dalam $[a,b]$, maka $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Bukti

Misalkan P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots x_{n-1} < x_n = b$ adalah sebuah partisi sebarang [a,b], pada interval ke-i $[x_{i-1},x_i]$ yang sebarang titik ujinya $\overline{x_i}$

Maka,

$$f(\overline{x_i}) \le g(\overline{x_i})$$

$$f(\overline{x_i}).\Delta x_i \le g(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Contoh 3

Dua buah sepeda motor, motor A dan B, bergerak dengan kecepatan masing-masing, $v_A = t + 1/(t+1)$ dan $v_B = t + 1/(t+1)^2$. Tunjukkan bahwa sepeda motor B tidak pernah dapat menyusul sepeda motor B.

Penyelesaian

Jarak yang ditempuh sampai b jam dapat dinyatakan dengan

$$S = \int_0^b v\,dt$$

Sehingga kita peroleh,

$$S_A = \int_0^b v_A dt = \int_0^b \left(t + \frac{1}{t+1} \right) dt \text{ dan } S_B = \int_0^b v_B dt = \int_0^b \left(t + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

Dengan demikian cukup ditunjukkan $S_B \leq S_A$ untuk setiap $b > 0$. Berdasarkan sifat keterbatasan, kita perlu menunjukkan bahwa $v_B \leq v_A$ untuk setiap $t > 0$.

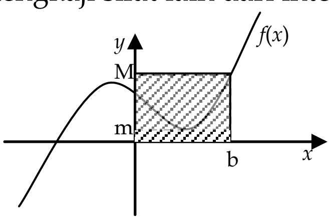
Karena $v_B \leq v_A$, maka $v_B - v_A \leq 0$ atau

$$\left(t + \frac{1}{(t+1)^2} \right) - \left(t + \frac{1}{(+1} \right) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} = \frac{-t}{(t+1)^2}$$

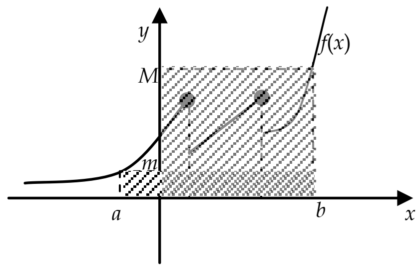
Karena $t > 0$, maka $-t/(t+1)^2 < 0$. Jadi, $v_B \leq v_A$ yang berarti sepeda motor B tidak pernah menyusul sepeda motor A.

Sifat keterbatasan

Tentu masih segar dalam ingatan kita bahwa syarat fungsi terintegralkan adalah fungsi tersebut mesti terbatas pada selang $[a,b]$. fungsi yang terbatas tersebut mungkin kontinu atau takkontinu pada berhingga titik. Ilustrasi grafik berikut akan membantu kita untuk mengkaji sifat lain dari integral.



Gambar 1



Gambar 2

Kita bisa lihat bahwa fungsi pada gambar di atas memiliki nilai minimum dan maksimum, yang masing-masingnya adalah m dan M. dengan demikian nilai fungsi pada selang [a,b] adalah $m \leq f(x) \leq M$. Implikasi dari hal ini adalah luas daerah dibawah kurva f(x) berada diantara $m(b-a)$ dan $M(b-a)$ (lihat ilustrasi grafik di atas).

Sifat ini dalam kajian kalkulus dinamakan **sifat keterbatasan**. Secara umum, sifat ini dituangkan dalam teorema di bawah.

Teorema Sifat Keterbatasan.

Jika f terintegralkan pada selang [a,b] dan jika $m \leq f(x) \leq M$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

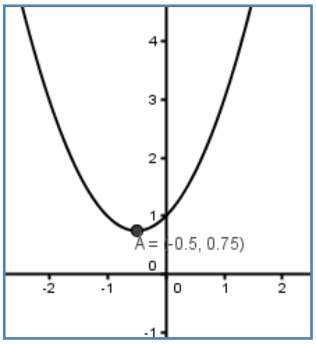
Contoh 4

Tunjukkan bahwa luas daerah dibawah kurva $f(x) = x^2 + x + 1$ pada [-2,2] lebih besar dari 3.

Penyelesaian

Karena nilai luasnya lebih besar, maka kita mesti menunjukkan nilai minimum dari fungsinya. Karena f kontinu pada [-2,2], maka berdasarkan teorema titik kritis, fungsi memiliki nilai maksimum dan minimum.

$$f'(x) = 2x + 1 = 0 \text{ atau } x = -\frac{1}{2}$$



Sehingga bisa ditunjukkan bahwa f(-0.5) = 0.75 adalah nilai minimum.

Jadi, $f(x) \geq$ 0.75 sehingga berdasarkan sifat keterbatasan, kita dapatkan

$$\int_{-2}^{2} \left(x^2 + x + 1\right)dx \geq 0.75(2-(-2)) = 0.75(4) = 3$$

Sifat Keliniearan

Seperti halnya dengan limit, turunan dan integral taktentu, maka integral tentu juga memiliki sifat linier.

Teorema Kelinieran. Jika f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan k konstanta, maka

(i) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(ii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Bukti
Berdasarkan definisi integral tentu, maka

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\|p\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\overline{x_i}).\Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$= k\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

Bukti (ii) anda dapat lakukan dengan cara yang sama.

Contoh 5

Diketahui $\int_1^3 f(x)dx = 6$ dan $\int_1^3 g(x)dx = 4$, maka hitunglah nilai dari

a. $\int_1^3 (2f(x) - g(x))dx$

b. $\int_1^3 (g(x) - 3)dx$

Penyelesaian

a. $\int_1^3 (2f(x) - g(x))dx = 2\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 2(6) - 4 = 8$

b. $\int_1^3 (g(x) - 3)dx = \int_1^3 g(x)dx - \int_1^3 3dx = 4 - 3(2) = -2$

Dari hasil-hasil kajian tadi, marilah kita buktikan **Teorema Dasar Kalkulus Pertama.**

Misalkan untuk setiap x pada $[a,b]$ didefinisikan $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ tentunya kita bisa katakan juga $F(x+h)=\int_0^{x+h} f(t)dt$. Sehingga,

$$F(x+h)-F(x)=\int_0^{x+h} f(t)dt-\int_0^x f(t)dt=\int_0^{x+h} f(t)dt+\int_x^0 f(t)dt$$

Berdasarkan sifat penambahan selang kita dapatkan,

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Andaikan $h > 0$ dan misalkan m dan M adalah nilai minimum dan maksimum fungsi f pada interval $[x, x+h]$, maka

$$mh\le \int_x^{x+h} f(t)dt\le Mh$$

Atau

$$mh\le F(x+h)-F(x)\le Mh$$

Jadi,

$$m\le \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\le M$$

Selanjutnya m dan M sangat bergantung pada h dan karena f kontinu berdasarkan **teorema Apit**, m dan M harus mendekati $f(x)$ bila $h\to 0$ dan,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

Contoh 6

Carilah $D_x\left[\int_1^{x^2}(3t-1)\right]dt$

Penyelesaian

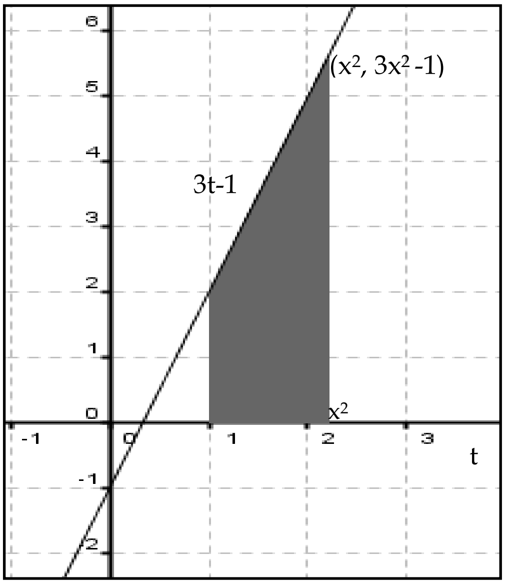
Kita dapat menyelesaikannya dalam 2 cara,

Pertama, dengan menggunakan TDK I dengan memisalkan u = x^2 sehingga,

$$D_x\left[\int_1^{x^2}(3t-1)dt\right]=D_u\left[\int_i^{u}(3t-1)dt\right].D_x^u=(3u-1).2x$$

$$=(3x^2-1).2x=6x^3-2x$$

Kedua, dengan menghitung hasil integrasi terlebih dahulu,



perhatikan gambar disamping,

karena berbentuk trapezium, maka luasnya adalah,

$$\frac{x^2-1}{2}\left[2+3x^2-1\right]=\frac{3}{2}x^4-x^2-\frac{1}{2}$$

sehingga dapat dikatakan bahwa,

$$\int_1^{x^2}(3t-1)dt=\frac{3}{2}x^4-x^2-\frac{1}{2}$$

Jadi,

$$D_x\left[\int_1^{x^2}(3t-1)dt\right]=D_x\left[\frac{3}{2}x^4-x^2-\frac{1}{2}\right]$$

$$=6x^3-2x$$

Soal Latihan 2.2

Carilah

1. $\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^{x}\left(t^2-t\right)dt\right]$
2. $\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^{x}\dfrac{\left(t^2+t\right)}{t^2}dt\right]$
3. $\dfrac{d}{dx}\left[\int_x^{2}\left(t=\dfrac{1}{t^2+1}\right)dt\right]$
4. $\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^{x}\left(t^2-t\right)\cos 2t dt\right]$
5. $\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^{x^2}\sin t dt\right]$
6. $\dfrac{d}{dx}\left[\int_x^{3x-1}\left(t^2-t\right)dt\right]$
7. $\dfrac{d}{dx}\left[\int_x^{x^2}\dfrac{t^2}{1+t}dt\right]$

8. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_{1}^{x^2+x}\left(2t^2-\sin t\right)dt\right]$

Carilah selang dimana fungsi y = f(x), x ≥ 0, (a) naik, (b) cekung keatas,

9. $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$

10. $f(x)=\displaystyle\int_0^x (t+\sin t)dt$

Diketahui $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=2, \int_1^2 f(x)dx=3, \int_0^1 g(x)dx=-1, \int_0^2 f(x)dx=4$.

Gunakan sifat integral untuk menentukan

11. $\displaystyle\int_0^2 2f(x)dx$

12. $\displaystyle\int_0^2 \left[2f(x)+g(x)\right]dx$

13. $\displaystyle\int_2^1 \left[2f(s)+5g(s)\right]ds$

14. $\displaystyle\int_1^1 \left[3f(x)+2g(x)\right]dx$

Hitunglah nilai dari $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$ diawali dengan menggambar grafik terlebih dahulu,

15. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{jika } 0\le x\le 2 \\ x & \text{jika } 2\le x\le 4 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{jika } 0\le x\le 1 \\ x & \text{jika } 1\le x\le 2 \\ 4-x & \text{jika } 2\le x\le 4 \end{cases}$

2.3 Bantuan Penghitungan Integral

Kajian tentang sifat-sifat integral sebelumnya sangat membantu untuk mengkaji beberapa teorema yang penting dalam menentukan hasil integrasi. Teorema dasar kalkulus II menjadi modal awal dalam menentukan integral tentu. teorema nilai rata-rata bermanfaat dalam menentukan rata-rata nilai integrasi. Pada dasarnya, Teorema Dasar Kalkulus II telah kita gunakan sepanjang menyelesaikan contoh-contoh pada kajian integral tentu di atas.

Teorema Dasar Kalkulus II

Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan F antiturunan dari f pada $[a,b]$, maka $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Contoh1 Hitunglah $\int_{-1}^{2}\left(4x - 6x^2\right)dx$

Penyelesaian

$$\int_{-1}^{2}\left(4x - 6x^2\right)dx = \left[2x^2 - 2x^3\right]_{-1}^{2} = (8-16) - (2+2) = -12$$

Teorema B (teorema nilai rata-rata integral)

Kita ingat kembali jumlah Riemann pada selang [a,b], dengan mengambil lebar selang yang sama,$\Delta x = (b-a)/n$ dan titik uji x_i dimana,

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x \Rightarrow R_p = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{R_P}{b-a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

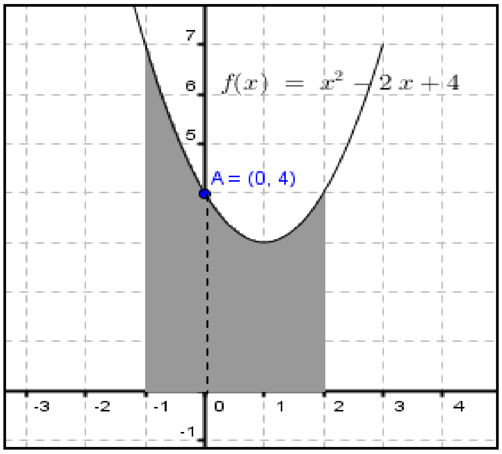
Kita dapat katakana bahwa ruas kanan merupakan nilai rata-rata fungsi pada selang [a,b] dari n partisi. Dengan mengambil $n \to \infty$ kita dapatkan.

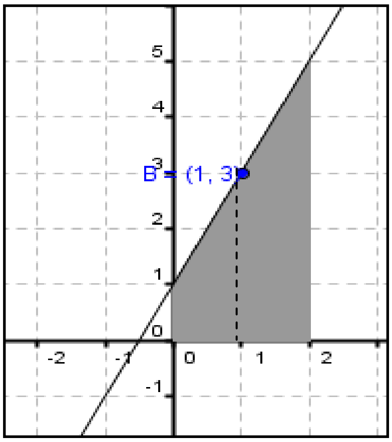
$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_p}{b-a} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{(b-a)}\lim_{n\to\infty} R_P = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

Berdasarkan definisi integral tentu dan ruas kanan merupakan nilai rata-rata, maka terdapat c sehingga

$$\frac{\int_a^b f(t)dt}{(b-a)} = f(c)$$

Ilustrasi geometri dapat kita lihat berikut;





Dari gambar diatas kita bisa lihat bahwa luas gambar (1) adalah 12 satuan, sehingga f(c) = 12/(2-(-1)) = 12/3 = 4 (lihat tiitk A), sedangkan gambar (2) memiliki luas 6 satuan, sehingga f(c) = 6/(2-0) = 6/2 = 3 (lihat titik B).

Teorema Nilai Rata-Rata: Jika f kontinu pada [a,b], dimana ada bilangan c diantara a dan b sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$$

Contoh 2

Tentukan nilai rata-rata integral dari fungsi $f(x) = 4x^3$;[1,3] dan pada titik mana

Penyelesaian

$$f(c) = \frac{\int_1^3 4x^3 dx}{3-1} = \frac{\left[x^4\right]_1^3}{2} = \frac{81-1}{2} = 40$$

Jadi, $4c^3 = 40$ atau $c^3 = 10$ atau $c = \sqrt[3]{10}$

Salah satu bantuan yang sangat berguna dalam integral adalah metode substitusi. Metode ini dapat dilakukan untuk integral taktentu dan integral tentu.

Teorema A (Substitusi untuk integral taktentu)

Misalkan g terdeferensialkan dan misalkan F anti turunan dari f, Maka jika $u = g(x)$,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Bukti

Untuk membuktikan teorema ini dapat kita lakukan dengan menurunkan fungsi hasil integrasinya,

$$D_x\left[F(g(x)) + C\right] = F'g(x).g'(x) + 0 = f(g(x)).g'(x)$$

Contoh 3

Tentukan $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Jawab

Misalkan $u = \sqrt{x}$, maka $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, maka

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\left(\tfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= 2\int \sin u du$$

$$= -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C$$

Contoh 4 Carilah $\int \left(3x^2 - 2x\right)^4 (3x-1)dx$

Penyelesaian

Karena integran memuat fungsi dan turunannya, maka kita lakukan pemisalan dimana,

$$u = 3x^2 - 2x \Rightarrow du = (6x - 2)dx = 3(2x - 1)dx$$

Sehingga,

$$\int (3x^2 - 2x)^4 (3x - 1)dx = \frac{1}{3}\int u^4 du = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}u^5\right) + C$$

$$= \frac{1}{15}(3x^2 - 2x)^5 + C$$

Kita juga bisa menggunakan metode substitusi untuk menentukan hasil integrasi pada integral tentu. Hal ini dijamin oleh teorema berikut ini.

Teorema B (substitusi pada integral tentu)

Misalkan g memiliki turunan kontinu pada $[a,b]$ dan misalkan f kontinu pada range dari g. maka

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Contoh 5

Hitung nilai dari $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2 + 2x + 6)^2} dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = x^2 + 2x + 6$, sehingga $du = (2x + 2)dx = 2(x + 1)dx$

Jika x = 0 maka u = 6 dan x = 1 maka u = 9 sehingga

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2 + 2x + 6)^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x + 6)^2} dx$$

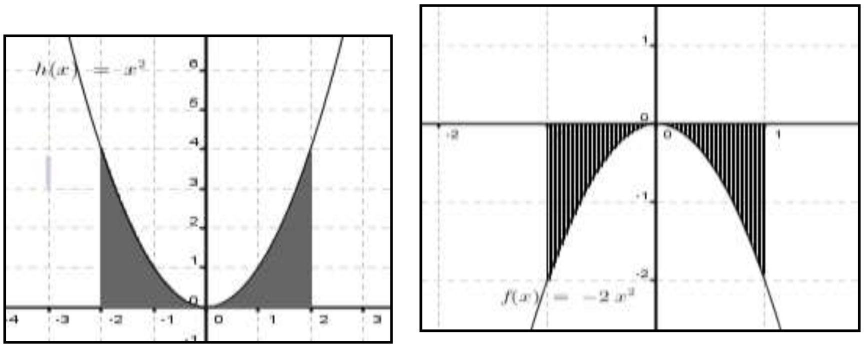
$$= \frac{1}{2}\int_6^9 u^{-2} du = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{u}\right]_6^9 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{1}{36}$$

Teorema C (Teorema Simetri)

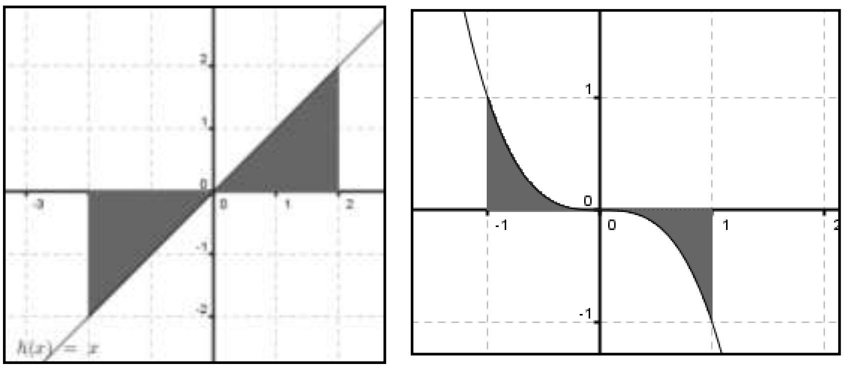
Jika f adalah fungsi genap, maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ dan jika f fungsi ganjil, maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Ilustrasi berikut akan menambah pemahaman tentang teorema simetri di atas. Seperti kita ketahui fungsi genap memiliki sumbu simetri pada sumbu y atau yang sejajar sumbu y. Sedangkan fungsi

ganjil memiliki sumbu simetri pada y = -x. Perhatikan gambar berikut;



Gambar (grafik fungsi genap)

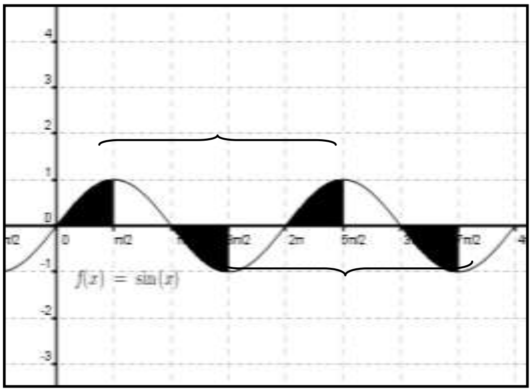


Gambar (fungsi ganjil)

Teorema D

Jika f fungsi periodic dengan perioda p, maka $\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Perhatikan daerah diarsir berikut ini;



dari grafik sinx dan daerah diarsir disamping dapat kita lihat bahwa,

$$\int_{2\pi}^{2\pi+\pi/2} f(x)dx = \int_{0}^{\pi/2} f(x)dx$$

Atau

$$\int_{3\pi}^{7\pi/2} f(x)dx = \int_{\pi}^{3\pi/2} f(x)dx$$

Contoh 6

Tunjukkan bahwa

(1) $\int_{-2}^{2} \left(2x^2 - 3x\right)dx = 4\int_{0}^{2} x^2 dx$

(2) $\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{1+t^2} dt = 0$

(3) $\int_{-2\pi}^{-3\pi/2} 2\sin xdx = \int_{0}^{\pi/2} 2\sin xdx$

Penyelesaian

(1) Berdasarkan sifat linier kita peroleh

$$\int_{-2}^{2} \left(2x^2 - 3x\right)dx = 2\int_{-2}^{2} x^2 dx - 3\int_{0}^{2} xdx$$

Karena x^2 fungsi genap dan x fungsi ganjil, maka

$$\int_{-2}^{2} \left(2x^2 - 3x\right)dx = 2\int_{-2}^{2} x^2 dx - 3\int_{0}^{2} xdx$$

$$= 2.2\int_{0}^{2} x^2 dx - 3.0 = 4\int_{0}^{2} x^2 dx$$

(2) Kita lihat fungsi $f(t)=\dfrac{t^3}{1+t^2}$. karena

$f(-t)=\dfrac{(-t)^3}{1+(-t)^2}=\dfrac{-t^3}{1+t^2}=-f(t)$, maka f(t) fungsi ganjil

Jadi, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{1+t^2}dt=0$

(3) Karena sin(x) =sin (x + k.2π) untuk k bilangan bulat, maka

Untuk k = -1, sin 0 =sin (0 +(-1).2π) = sin (-2π)

Untuk k = -1, sin(π/2) = sin(π/2 – 2π) = sin(-3π/2)

Jadi, $\displaystyle\int_{-2\pi}^{-3\pi/2}2\sin x dx=\int_{0}^{\pi/2}2\sin x dx$

Soal Latihan 2.3

1. $\displaystyle\int_{-4}^{-2}\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)dy$
2. $\displaystyle\int_{1}^{4}\left(\frac{s^4-8}{s^2}\right)dy$
3. $\displaystyle\int\sqrt[3]{2x-4}dx$
4. $\displaystyle\int\cos(3x+2)dx$
5. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+4}dx$
6. $\displaystyle\int x^2\left(x^3+4\right)^9dx$
7. $\displaystyle\int\frac{x\sin\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx$
8. $\displaystyle\int\frac{t\cos\left(\sqrt[3]{t^2+3}\right)}{\left(\sqrt[3]{t^2+3}\right)^2}dt$
9. $\displaystyle\int x^2(x^3+5)^8\cos\left[\left(x^3+5\right)^9\right]dx$
10. $\displaystyle\int x^2\sin(x^3+5)\cos^9\left[x^3+5\right]dx$
11. $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{1}{(t+2)^2}dt$
12. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt{x^2+1}(3x^2)dx$
13. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin x\cos^3 xdx$
14. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 3x\cos 3xdx$
15. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}(\sin 2x+\cos 2x)dx$
16. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sin x\sin(\cos x)dx$
17. $\displaystyle\int_{0}^{1}x^2\sin^2(x^2)\cos(x^3)dx$

18. Sebuah tempat penyimpanan air berkapasitas 200 lt mengalami kebocoran dengan laju V'(t) = 20 – t lt/jam. (a) berapa banyak air bocor antara 10 dan 20 jam, (b) berapa lama waktu yang diperlukan sampai tempat penyimpanan kosong.

Carilah rata-rata nilai fungsi pada selang yang diberikan

19. $f(x) = 5x^2; [1,4]$
20. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+16}}; [0,2]$
21. $f(x) = x\cos x^2; [0, \sqrt{\pi}]$
22. $f(t) = \dfrac{\sin t \cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}; [0, \frac{\pi}{2}]$

Tentukan semua nilai *c* yang memenuhi teorema nilai rata-rata dari fungsi dan selang yang diberikan

23. $f(x) = x^2; [-1,1]$
24. $f(x) = |x-1|; [-1,3]$
25. $g(x) = \sin x; [-\pi, \pi]$

Gunakan sifat simetri untul menghitung integral berikut

26. $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx$
27. $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^3}{(1+x^2)^4}\,dx$
28. $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)^2\,dx$
29. $\int_{-1}^{1} (1 + x + x^2 + x^3)\,dx$
30. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(|x|\sin^5 x + |x|^2 \tan x\right)^2 dx$

APLIKASI INTEGRAL

BAB III

Pendahuluan

Kita telah banyak mengkaji tentang integral tentu dan sifat-sifatnya. Lalu, bagaimana dengan aplikasi integral? Bab ini kita akan mencoba mengkaji aplikasi yang berkaitan langsung dengan matematika seperti aplikasi untuk luas, volume benda putar dan penghitungan panjang kurva.

Setelah mempelajari bagian ini diharapkan memiliki ketrampilan untuk menggunakan integral dalam menentukan luas, volume benda putar dan panjang kurva berdasarkan jenis fungsi dan daerah yang ada. Ketrampilan ini ditandai dengan indikator berikut;

INDIKATOR

- menggambar daerah yang akan dihitung luasnya
- menentukan batas-batas daerah
- menggunakan integral untuk menghitung luas

- Menentukan daerah yang akan diputar
- Menentukan benda hasil perputaran
- menentukan volume benda putar dengan metode yang tepat
- Membedakan penggunaan metode sesuai dengan hasil benda putarnya daerah

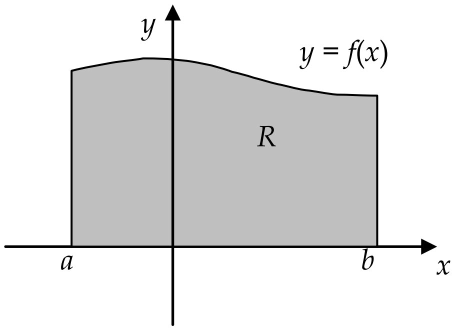
- Menentukan potongan panjang kurva dan menghitungnya
- Menentukan luas permukaan dari benda putar yang terjadi

3.1 Luas Bidang Rata

Beberapa kajian yang telah kita lakukan pada bab-bab sebelumnya berkaitan dengan polygon, anti turunan, jumlah Riemann yang berujung pada pendefinisan dan sifat-sifat integral tentu. Kajian-kajian itu merujuk pada penggunaan integral tentu untuk menghitung luas daerah dibawah kurva. Kita akan lakukan kajian dari kasus yang sederhana.

Daerah di atas sumbu-*x*. Misalkan $y = f(x)$ adalah sebuah kurva pada daerah xy dan andaikan f kontinu dan taknegatif pada selang $a \leq x \leq b$. Andaikan R adalah daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$. Kita katakana bahwa R adalah daerah dibawah $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$.

Perhatikan gambar berikut;



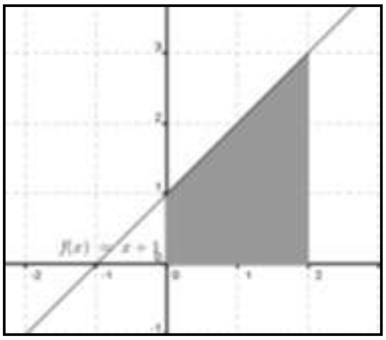
Berdasarkan gambar di atas, maka luas dapat dihitung dengan pendekatan polygon dan jumlah Riemann dan definisi integral tentu, maka

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Untuk lebih memahami kita akan kaji beberapa contoh yang berkaitan dengan luas daerah dibawah kurva dan diatas sumbu-x. contoh yang diberikan dimulai dari kasus sederhana, berupa fungsi linier.

Contoh 1

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ dan sumbu-x.



Penyelesaian

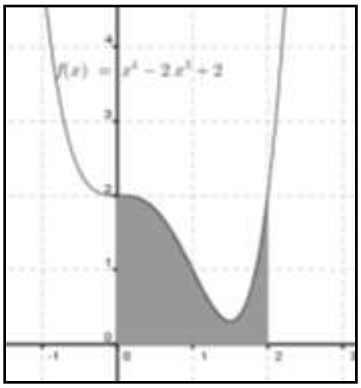
dari gambar kita bisa gunakan bahwa daerah berbentuk trapezium, sehingga luasnya adalah = ½ (1+3)(2) = 4.

Dengan integral dan TDK II kita peroleh,

$$A(R) = \int_0^2 (x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}2^2 + 2\right) - 0 = 4$$

Contoh 2 tentukan luas daerah R dibawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.



Penyelesaian

$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)dx$$

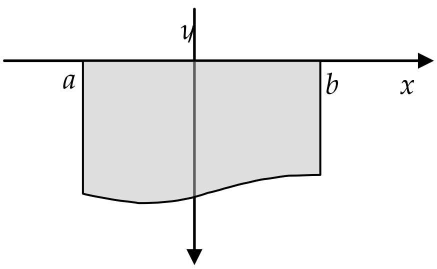
Jadi,

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - 8 + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{12}{5} + \frac{26}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

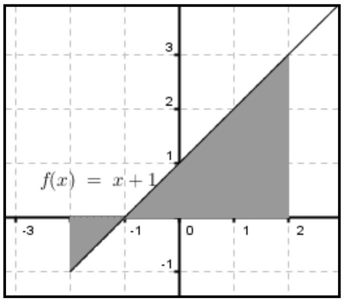
Daerah dibawah sumbu-x. Asumsi pertama tentang luas bernilai dan bersifat positif. Jika grafik fungsi $f(x)$ berada dibawah sumbu-x, maka



integral $\int_a^b f(x)dx$ adalah negative dan tidak dapat dikatakan luas. Bagaimanapun, daerah tersebut hanyalah negative dari luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan sumbu-x. Jadi,

$$A(R) = -\int_a^b f(x)dx$$

Contoh 3 tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x + 1$, $x = -2$, $x = 2$ dan sumbu-x?



Penyelesaian

Secara geometri kita bisa hitung luasnya adalah,

$$\frac{1}{2}.1.1+\frac{1}{2}3.3=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5$$

Dengan integral, maka

$$\int_{-2}^{2}(x+1)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)_{-2}^{2}=(2+2)-(2-2)=4$$

tentu saja ini memberikan hasil yang berbeda. Karena segitiga di bagian kiri terletak dibawah sumbu-x, jadi bernilai negative, yakni (-1/2). Sehingga wajar kita peroleh 4, karena (4,50-0,5) = 4.

Sifat penambahan selang membantu kita sehingga,

$$A(R) = -A_1 + A_2 = -\int_{-2}^{-1}(x+1)dx+\int_{-1}^{2}(x+1)dx$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2}=-\left(\left(\frac{1}{2}-1\right)-(2-2)\right)+\left((2+2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)$$

$$= -(-\frac{1}{2})+\left(4+\frac{1}{2}\right)=5$$

Cara berpikir yang dapat membantu

Untuk daerah yang sederhana sepertidi atas sangat mudah untuk diselesaikan. Akan tetapi, untuk permasalahan yang lebih kompleks langkah-langkah berikut dapat membantu kita;

(i) Sketsa daerah

(ii) Potong menjadi daerah yang lebih kecil

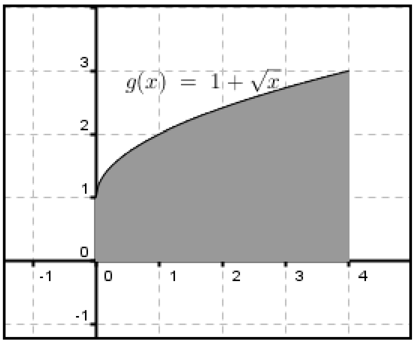
(iii) Hitung luas daerah potongan sebarang yang dibuat

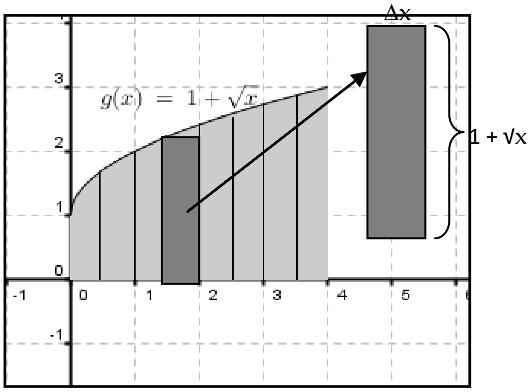
(iv) Jumlahkan semua potongan

(v) Ambil limit untuk dan hitung integralnya

Contoh 4 susunlah integral untuk menyatakan luas daerah dibawah y = 1 + √x diantara x = 0 dan x = 4

Penyelesaian





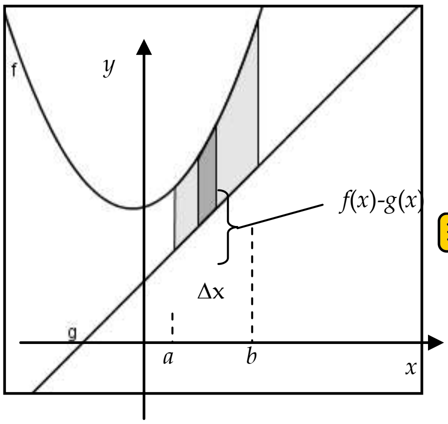
Maka $\Delta A_i = \left(1+\sqrt{x_i}\right)\Delta x_i$

Sehingga $A = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\sqrt{x_i}\right)\Delta x_i$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sqrt{x_i}\right)\Delta x_i = \int_0^4\left(1+\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \left(x + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)_0^4 = \left(4+\frac{2.2^3}{3}\right) = (4+\frac{16}{3}) = \frac{28}{3}$$

Daerah diantara dua kurva. Andaikan $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dimana $g(x) \leq f(x)$ pada) $a \leq x \leq b$. Grafik-grafik dan interval dapat dicontohkan seperti gambar dibawah. Tentu, dengan mudah kita dapat menentukan pendekatan melalui potong, ambil luas ke-i, hitung jumlah dan limitnya serta integrasi. Hal terpenting adalah kita mesti tepat dalam menentukan "tinggi" dari daerah yang akan kita hitung. Kita sepakat tentu, bahwa tinggi daerah akan sama dengan $f(x) - g(x)$.



Selanjutnya, perhatikan gambar berikut;

gambar disamping menunjukkan bahwa

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Bagaimana jika daerah berada dibawah sumbu-x? tentu saja, akan berlaku hal yang sama. Coba Anda kaji sendiri.

Contoh 5

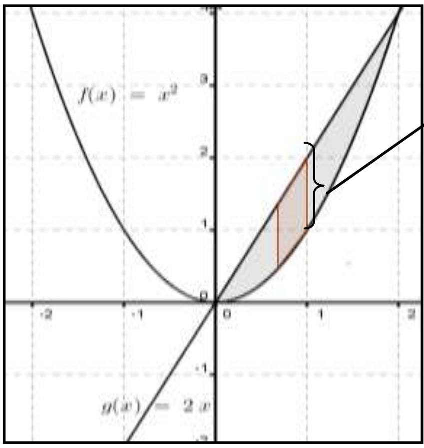
Carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 2x$

Penyelesaian

Pertama kita mesti mencari titik potong keduanya, sehingga $x^2 = 2x$. dengan demikian, maka $x^2 - 2x = 0$ atau $x(x - 2) = 0$

Jadi, titik potongnya pada $x = 0$ dan $x = 2$.

Kedua, kita buat sketsa dari grafiknya,



dari grafik kita bisa lihat bahwa tingginya adalah

$g(x) - f(x)$

sehingga,

$$\Delta A = [g(x) - f(x)]\Delta x$$

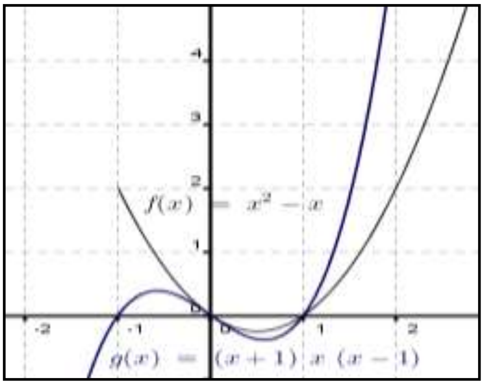
$$A = \int_0^2 [2x - x^2]dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Contoh 6 carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - x$, $y = x^3 - x$ pada (a) [0,1], (b) [1,2], dan (c) [0,2].

Penyelesaian

Pertama kita buat sketsa dari grafiknya,



dari grafik dapat dilihat bahwa, pada selang [0,1] fungsi $g(x) \le f(x)$, sedangkan pada selang [1,2] fungsi $f(x) \le g(x)$.

selain dari grafik kita juga bisa melihat nilai fungsi berdasarkan analisa fungsinya atau titik potong kedua fungsi, dimana;

$$x^2 - x = x^3 - x \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

	(-∞,0)	(0,1)	(1,∞)
Ket	$f(x) > g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$

Berdasarkan tabel diatas, maka dapat disimpulkan bahwa pada selang [0,1] fungsi $g(x) \le f(x)$, sedangkan pada selang [1,2] fungsi $f(x) \le g(x)$. jadi;

(a) Pada [0,1]

$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_0^1 [x^2 - x - x^3 + x]dx$$

$$= \int_0^1 [x^2 - x^3]dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

(b) Pada, $\Delta A = [g(x) - f(x)]\Delta x$

$$A = \int_1^2 [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_1^2 [x^3 - x - x^2 + x]dx$$

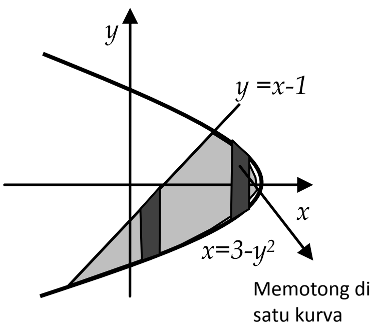
$$= \int_1^2 [x^3 - x^2]dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

(c) $A = A_a + A_b$ sehingga $A = \frac{1}{12} + \frac{17}{12} = \frac{18}{12} = 1.5$

Contoh 7

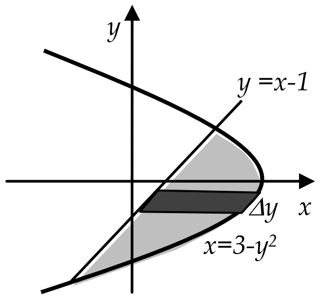
tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x - 1$ dan $x = 3 - y^2$



Penyelesaian

Pertama, kita skets daerahnya

Kalau kita buat potongan tegak, maka terdapat potongan yang memotong di satu kurva (lihat gambar), maka potongan harus dibuat mendatar. Karena ini akan memberikan $\Delta x = 0$ jadi akan memberikan luas yang sama dengan 0.



Sehingga luas potongannya adalah
$\Delta y = \{(3 - y^2) - (y + 1)\}.\Delta y$
Sehingga luasnya adalah

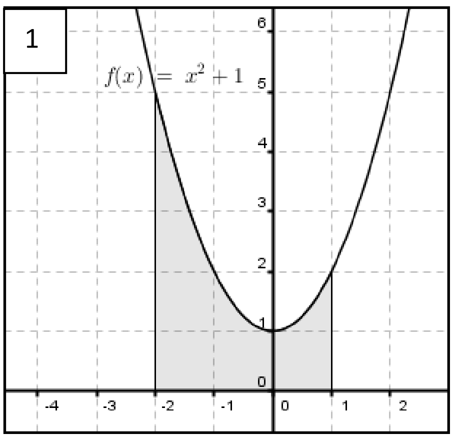
$$A = \int_a^b \left(3 - y^2 - y - 1\right) dy$$

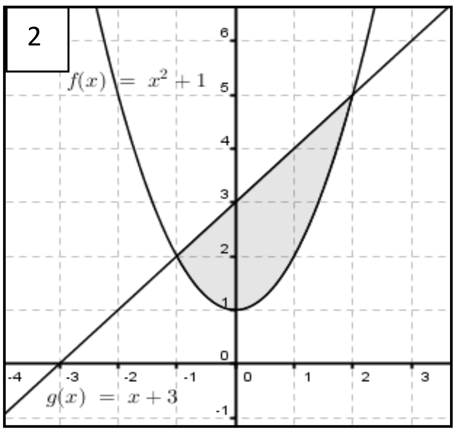
Sekarang kita cari titik potongnya, dimana $3 - y^2 = y + 1$ atau $y^2 + y - 2 = 0$.
Sehingga titik potongnya adalah y = -2 dan y = 1. Jadi, luasnya adalah

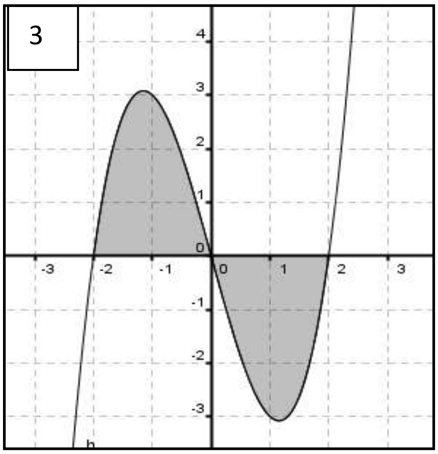
$$A = \int_{-2}^{1} \left(2 - y^2 - y\right) dy = \left[2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right)$$

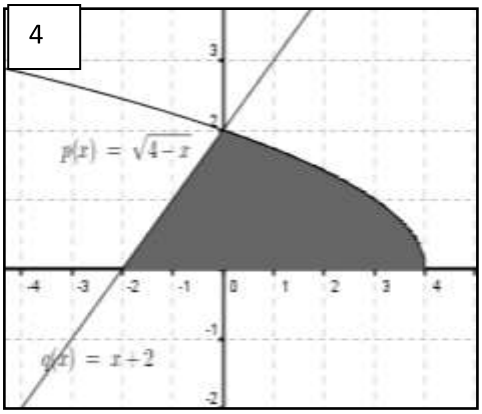
$$= 2 - \frac{5}{6} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 8 - \frac{21}{6} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$$

Soal Latihan 3.1
Tentukanlah luas daerah yang diarsir berikut ini;









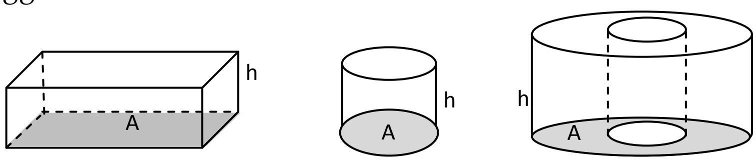
Untuk soal 5-10, Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh batas-batas yang diberikan dengan terlebih dahulu mensketsa daerah, aproksimasi dan hitung integralnya.

5. $y = 5x - x^2$, $y = 0$, antara $x = 1$ dan $x = 3$
6. $y = \sqrt{x} - 10$, $y = 0$, antara $x = 0$ dan $x = 9$
7. $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2$
8. $y = x^2 - 9$, $y = (2x - 1)(x + 3)$
9. $x = 8y - y^2$, $x = 0$
10. $x = 4y - 6y^2$, $x + 3y - 2 = 0$
11. Tentukan luas daerah segitiga dengan titik sudut (-1,4),(2,-2) dan (5,1) dengan menggunakan integral
12. tentukan daerah yang dibatasi oleh $y = x + 6$, $y = x^3$, dan $2y + x = 0$. Kemudian tentukan luasnya
13. Sebuah benda bergerak dengan kecepatan pada saat t detik adalah $v(t) = t^2 + 2t + 2$ m/s. Berapakah jarak yang ditempuh apabila benda bergerak dari t = 5 detik sampai dengan t = 10 detik?

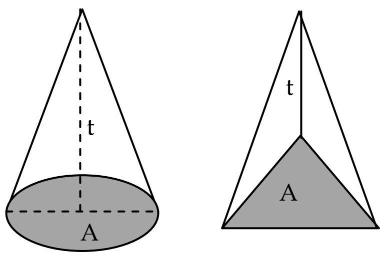
3.2 Volume Benda Putar

Sebelum mengkaji tentang volume benda putar alangkah baiknya kita ingat kembali tentang bangun ruang. Bangun ruang, dalam kajian geometri, memiliki satu ukuran yang dinamakan “volume”. Sebagian dari kita menyebutnya dengan “isi”. Meskipun tentu ada perbedaan antara isi dan volume.

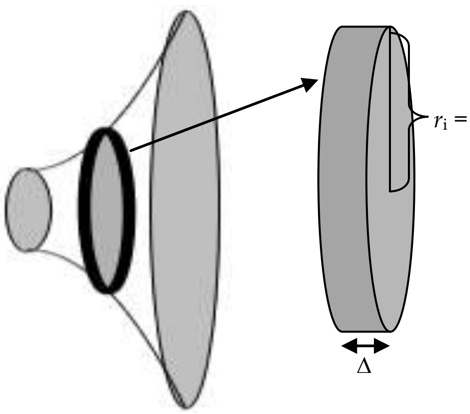
Secara umum volume benda dapat dihitung dengan berlandaskan pada V = A.h, dimana V= volume, A = luas alas, h = tinggi



Bentuk lain seperti berikut memiliki rumus volume V = 1/3. A.h



Bagaimana kalau berbentuk gambar dibawah. Penggunaan potongan kecil, aproksimasi, dan jumlahkan tampak jitu untuk menghitung volumenya.



$$\Delta V = A.\ \Delta x = \pi r_i^2\ \Delta x$$
$$= \pi . f^2(x_i).\Delta x$$

Dengan cara yang sama kita peroleh,

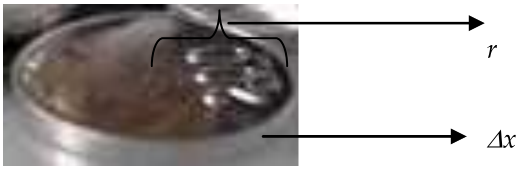
$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\overline{x_i}).\Delta x_i$ yang selanjutnya akan menjadi $V = \int^{b} A(x)dx$

Pada bagian ini, kita akan mengkaji tentang 3 metode yang berkaitan dengan aplikasi integral untuk menghitung volume benda putar. Metode tersebut adalah metode cakram, metode cincin dan metode kulit tabung.

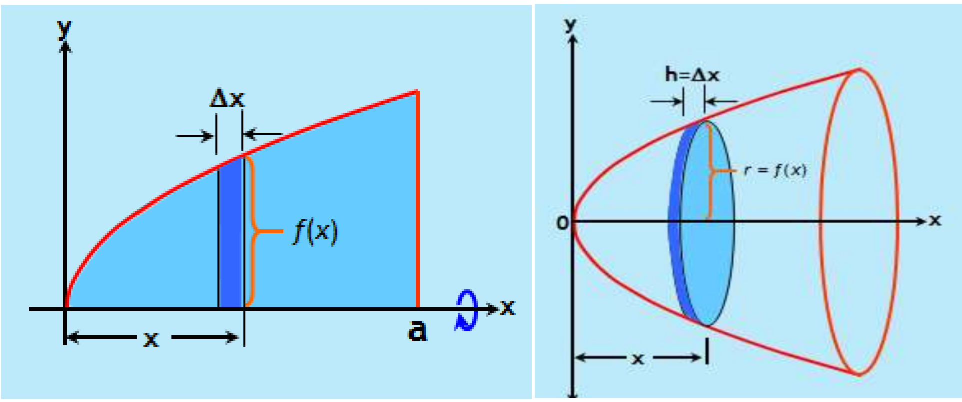
Kita akan mengawali kajian terhadap metode cakram.

Metode Cakram

Seperti namanya cakram adalah benda padat yang berbentuk lingkaran dengan ketebalan yang kecil. Penulis sendiri lebih aplikatif menyebutnya dengan metode uang koin.



Jadi, $\Delta V = \pi r^2 \Delta x$



Dari gambar di atas kita peroleh bahwa;

Jari-jari = r = $f(x)$, buat partisi kita peroleh $r_i = f(x_i)$ dan ketebalan atau $\Delta x_i = \dfrac{a-0}{n} = \dfrac{a}{n}$ Sehingga

$$\Delta V_i = \pi . f^2(x_i).\Delta x_i = \pi . f^2(\frac{ai}{n}).\frac{a}{n}$$

Volume total

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi . f^2(x_i).\Delta x_i = \pi \sum f^2(x_i).\Delta x_i$$

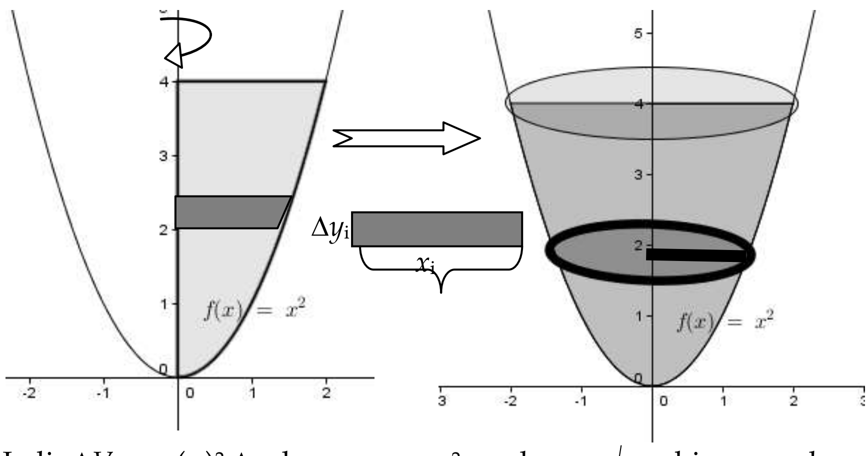
Dengan menggunakan definisi integral tentu kita peroleh,

$$V = \pi \int_0^a f^2(x)dx = \lim_{n \to \infty} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i).\Delta x_i$$

Amati gambar diatas, ternyata potongan yang dibuat dan hasil putaran potonganlah yang berbentuk seperti cakram atau koin. Satu hal lagi, ternyata sumbu putarnya adalah memuat salah satu sisi dari batas dari daerah yang akan kita putar.

Bagaimana kalau sumbu putarnya adalah sumbu-y? apakah hasil perputarannya berbentuk cakram? Bagaimana cara menghitung volumenya?

Perhatikan ilustrasi geometri berikut;



Jadi, $\Delta V = \pi.(x_i)^2.\Delta y_i$ karena $y = x^2$, maka $x = \sqrt{y}$ sehingga volumenya adalah,

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi . x_i^2 .\Delta y \text{ atau } \int_0^4 \pi . \sqrt{y} dy$$

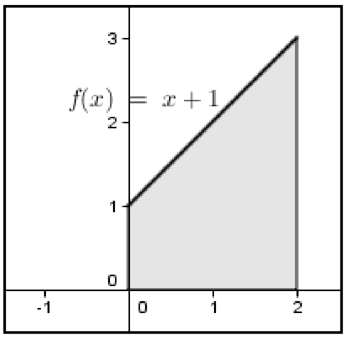
Kasus ini menyakinkan kita bahwa potongan ke arah sumbu-y dengan perputaran sumbu-y juga menghasilkan cakram. Perhitungan yang sama dapat dilakukan. Akan tetapi, peran invers fungsi memegang sangat penting dalam hal ini.

Contoh 1

Tentukanlah volume benda putar yang terjadi apabila y = x + 1, x = 0, x = 2, diputar mengelilingi

(a) Sumbu-x (b) sumbu-y (c) garis x = 2

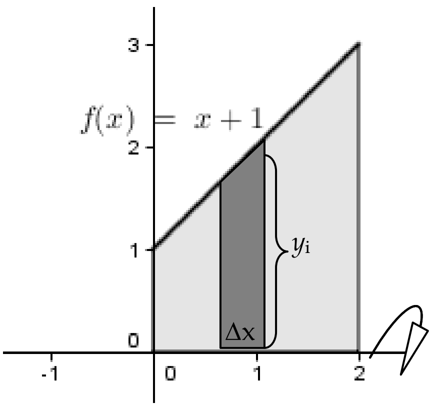
Penyelesaian

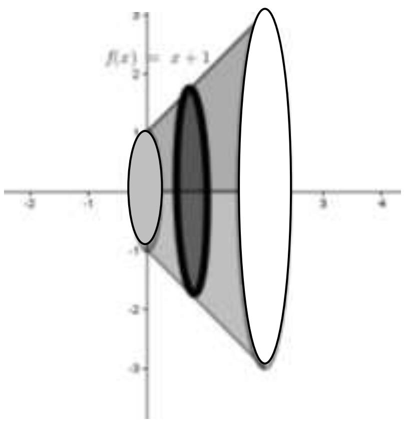


Pertama kita gambar daerah yang akan diputar

Dari gambar disamping tampak bahwa daerah yang akan diputar adalah berbentuk trapezium, sehingga bila diputar akan menghasilkan bangun ruang, yakni

(a) diputar mengelilillingi sumbu-x





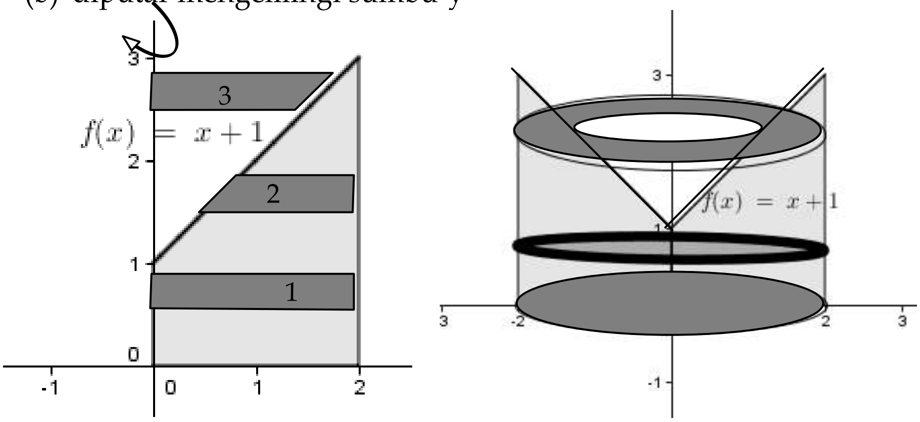
dari gambar kita peroleh, $\Delta V = \pi.(y_i)^2.\Delta x = \pi\ (x^2 + 2x + 1).\Delta x$.

Jadi, $V=\sum_{i=1}^{n}\pi\left(x_i^2+2x_i+1\right)\Delta x_i$ sehingga volume benda putar adalah

$$V=\int_0^2 \pi\left(x^2+2x+1\right)dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^2$$

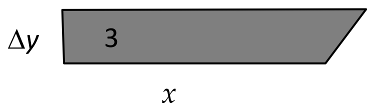
$$=\pi\left(\frac{8}{3}+4+2\right)=\frac{26\pi}{3}$$

(b) diputar mengelilingi sumbu-y



Perhatikan ada tiga jenis potongan yang dapat dilakukan, potongan 1 akan menghasilkan benda putar berbentuk tabung dengan jari-jari alas sama dengan 2, dan tinggi sama dengan 3, sehingga volumenya adalah, V = π.2².3 = 12π.

Bila kita lihat hasil putarannya maka akan lebih tepat bila kita lakukan pemotongan 3, dimana,



Bila kita putar, maka ΔV = π.$(x_i)^2$.Δy atau ΔV = π.$(y_i - 1)^2$.Δy

Jadi, volumenya hasil putaran pada potongan ini adalah,

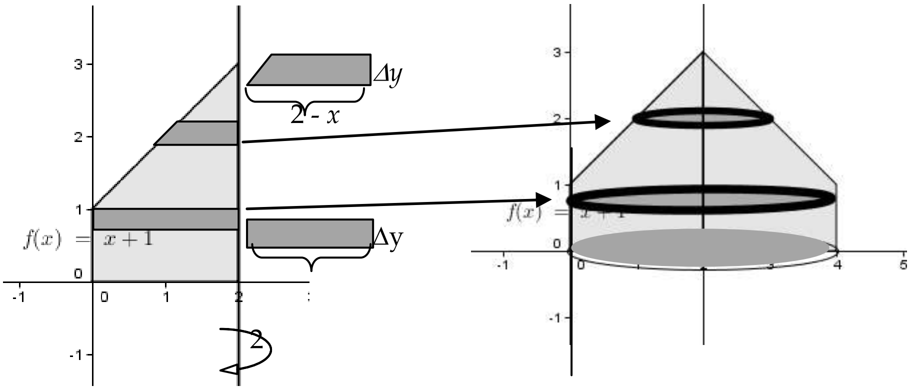
$$V=\int_1^3 \pi\left(y^2-2y+1\right)dy=\pi\left[\frac{y^3}{3}-y^2+y\right]_1^3=\pi\left[(9-9+3)-(\frac{1}{3}-1+1)\right]$$

$$=\pi\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{8\pi}{3}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa volume benda putar adalah

$$V_{BP} = V_T - V_{HP} = 12\pi - (8\pi/3) = 28\pi/3$$

(c) diputar mengeliingi x = 2



Berdasarkan gambar diatas, maka kita melakukan dua kali pemotongan dan pemutaran. Potongan pertama adalah pada arah sumbu-y pada selang [0,1], pemotongan kedua pada selang [1,3].

Sehingga penghitungan dilakukan dalam 2 cara

(i) pada selang [0,1]

$$\Delta V = \pi.2^2.\Delta y = 4\pi.\Delta y \text{ atau } V = \int_0^1 4\pi dy = 4\pi$$

(ii) Pada selang [1,3]

$$\Delta V = \pi.(2 - x)^2.\Delta y = \pi(3 - y)^2\ \Delta y \text{ atau}$$

$$V = \int_1^3 \pi\left(9 - 6y + y^2\right)dy = \pi\left[9y - 3y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_1^3$$

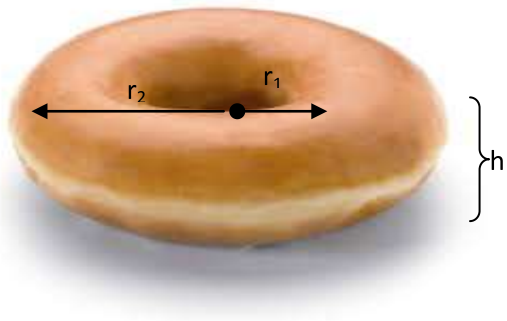
$$= \pi\left[(27 - 27 + 9) - \left(9 - 3 + \frac{1}{3}\right)\right] = \pi\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Jadi, luas totalnya adalah $V = V_{[0,1]} + V_{[1,3]} = 4\pi + 2\pi/3 = 4\frac{2}{3}\pi$.

Metode cakram tentunya tidak akan bisa bekerja apabila hasil perputarannya memilliki lubang. Untuk kasus ini, kita akan kaji pada bagian berikutnya yakni metode cincin.

Metode Cincin

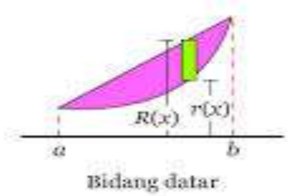
Mungkin kita semua pernah memakan donuts atau paling tidak melihatnya. Pernahkah kita berpikir berapa volumenya? Tentu saja, kalau kita hitung hanya memperoleh volume pendekatannya dimana;

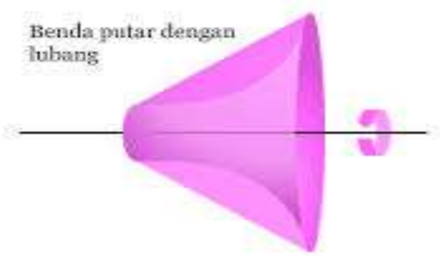


$$\boxed{V = \pi(r_2^2 - r_1^2)h}$$

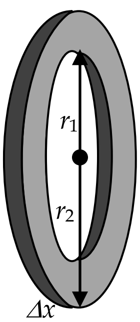
Volume benda yang memilliki lubang ditengahnya dapat didekati melalui perhitungan, dalam kalkulus, dikenal dengan nama **metode cincin.**

Perhatikan daerah berikut yang diputar pada arah mendatar.





Adanya jarak sisi terdekat dari daerah yang akan diputar menyebabkan hasil perputarannya memiliki lubang disekitar perputarannya. Kalau kita buat potongan kecil akan diperoleh bentuk umum seperti berikut;



Jadi, potongan benda putar memiliki volume,

$$\Delta V = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)\Delta x$$

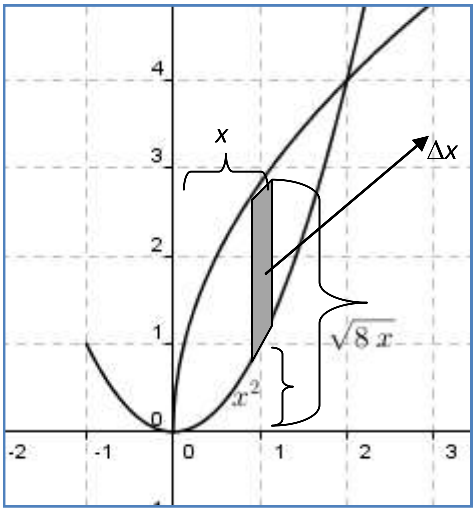
Tentunya volume benda putar dapat dihitung dengan cara volume pada jari-jari terluar dikurangi dengan volume pada jari-jari dalam. Untuk lebih memahami perhatikan contoh-contoh berikut;

Contoh 1

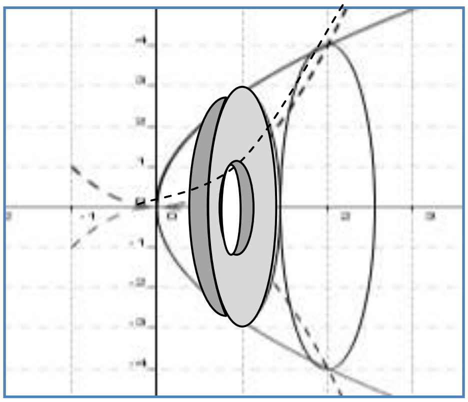
Tentukanlah volume benda apabila daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$, mengelilingi sumbu-x

Penyelesaian

(i) Gambar daerah



(ii). Potong daerah ke-I, gambar hasil perputarannya



(ii) Aproksimasi volume

$$\Delta V = \pi\left((\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2\right)\Delta x$$

(iii) Hitung integrasinya

$$V = \pi\int_0^2 \left((\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2\right)dx = \pi\int_0^2 \left(8x - x^4\right)dx$$

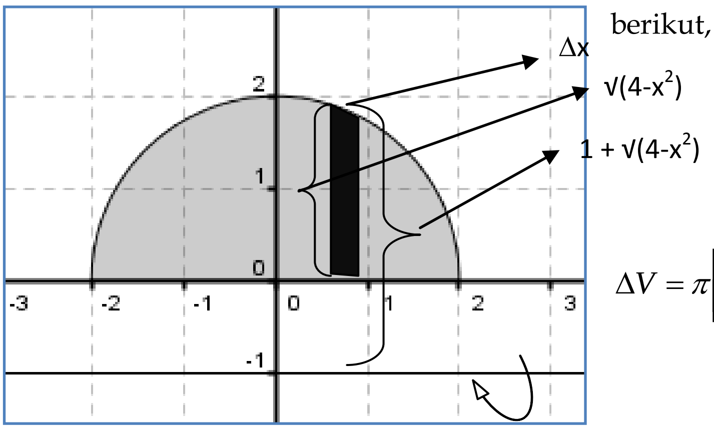
$$= \pi\left[4x^2 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \pi\left((4.4 - \tfrac{1}{5}.2^5) - 0\right) = \pi(16 - \frac{32}{5}) = \frac{48}{5}\pi$$

Contoh 2

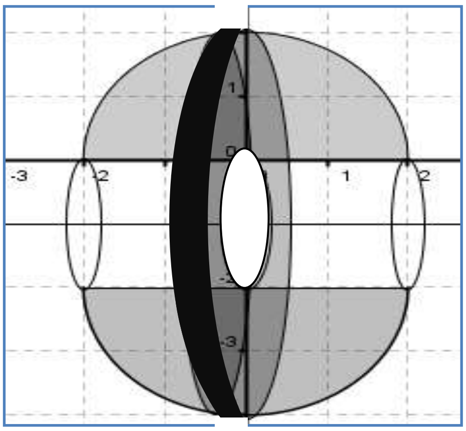
Sebuah daerah setengah lingkaran yang dibatasi oleh $y = \sqrt{4 - x^2}$ dan sumbu-y diputar mengelilingi garis y = -1?

Penyelesaian

Perhatikan gambar berikut,



$$\Delta V = \pi\left[\left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right)^2 - 1^2\right].\Delta x$$



hasil perputarannya akan tampak seperti gambar disamping;

$$\Delta V = \pi\int_0^2 \left[2\sqrt{4 - x^2} + 4 - x^2\right]dx$$

berdasarkan sifat integral kita peroleh,

$$\Delta V = 2\pi\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx + \int_0^2 \left[4 - x^2\right]dx$$

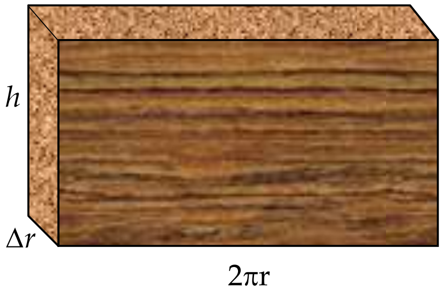
$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}.\pi.4\right) + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4\pi^2 + 8 - \frac{8}{3} = 4\pi^2 + \frac{16}{3}$$

Metode cincin digunakan pada saat hasil benda putar memiliki lubang ditengahnya. Selain itu, kita bisa katakana bahwa sumbu putar memiliki jarak dengan benda putarnya.

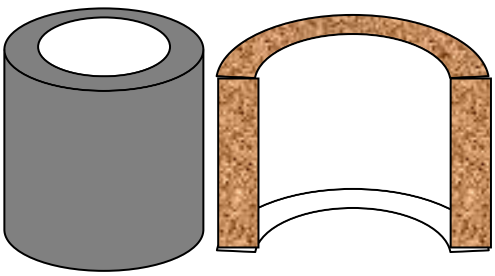
Metode Kulit Tabung.

Metode cakram dan metode cincin memiliki dapat digunakan apabila potongan yang dilakukan tegak lurus dengan sumbu putarnya. Bagaimana kalau potongan yang dibuat sejajar dengan sumbu putarnya?

Sebelum mengkaji lebih jauh, tentu kita tahu bambu. Kalau kita buka akan tampak seperti gambar berikut.



Kita bisa lihat bahwa h menyatakan tinggi bamboo, Δx menunjukkan selisih jari-jari dalam luar bamboo, dan r menyatakan rata-rata jari-jari dalam dan luarnya. Sehingga volumenya adalah V = $2\pi r.\Delta r.h$. Perhatikan gambar berikut;



$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \text{ atau}$$

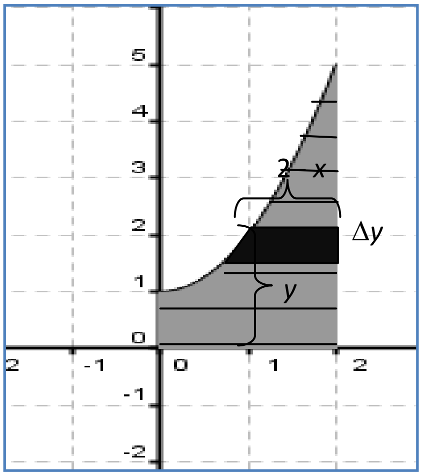
$$V = \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)h = 2\pi.\Delta r.\frac{r_2 + r_1}{2}h$$

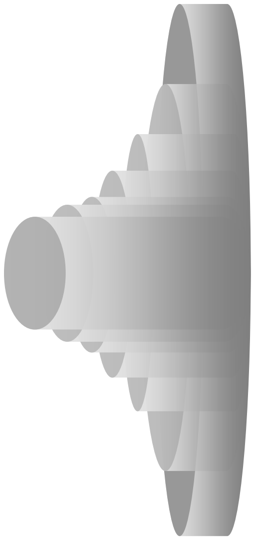
$$V = 2\pi.\Delta r.\bar{r}.h$$

$$V = 2\pi.(tebal).(rerata\ r)(panjang)$$

sehingga, volume benda putar yang terjadi adalah

$$\Delta V = 2\pi x f(x)\Delta x \text{ sehingga } \Delta V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$



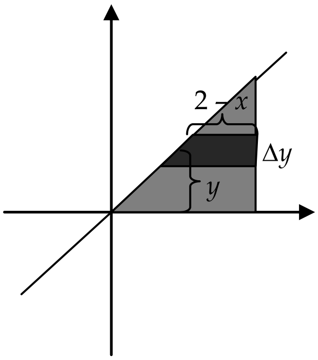


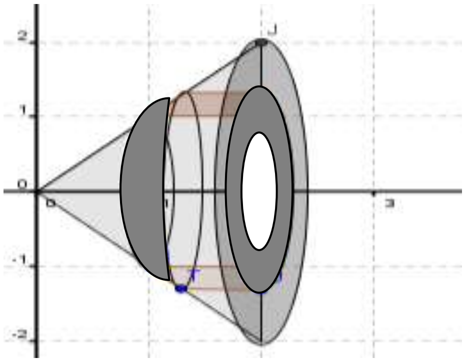
Contoh 1

Tentukanlah volume benda putar yang terjadi apabila daerah yang dbatasi oleh $y = x$, x = 0 dan x = 2, maka diputar mengelilingi sumbu-x, apabila potongannya sejajar sumbu-x.

Penyelesaian

Perhatikan gambar berikut ini





$$V=\int_0^2 2\pi(2-y)y\,dy = 2\pi\int_0^2 \left(2y-y^2\right)dy = 2\pi\left[y^2-\frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

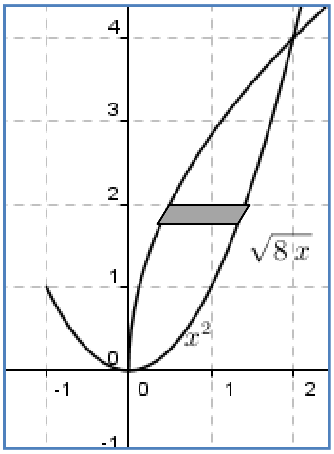
$$=2\pi\left(4-\frac{8}{3}\right)=2\pi\frac{4}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

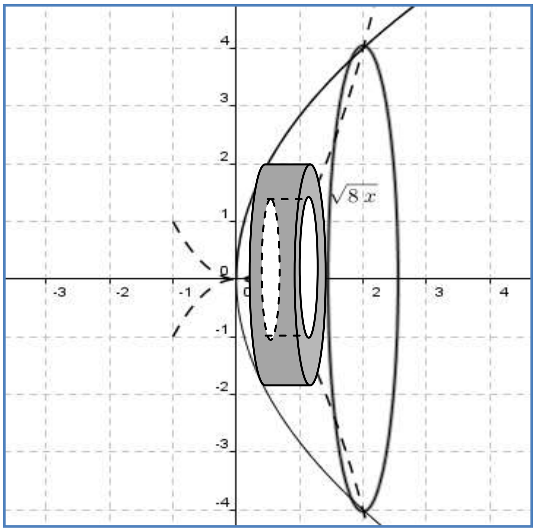
Contoh 2

Tentukanlah volume benda apabila daerah yang dibatasi oleh $y=x^2$ dan $y^2=8x$, mengelilingi sumbu-x

Penyelesaian

Bila kita gambar daerah dan hasil perputarannya akan tampak seperti berikut;





$$\Delta V = 2\pi(\sqrt{y}-\frac{y^2}{8})\sqrt{y}.\Delta y$$

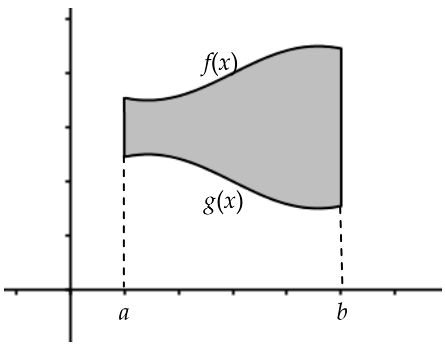
$$V=\int_0^4 2\pi\left(\sqrt{y}-\frac{y^2}{8}\right)y\,dy = 2\pi\int_0^4\left(y^{\frac{3}{2}}-\frac{y^3}{8}\right)dy = \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{y^4}{32}\right]_0^4$$

$$=2\pi\left(\frac{2.16.2}{5}-\frac{16.16}{32}\right)=2\pi\left(\frac{64}{5}-8\right)=\frac{48\pi}{5}$$

Soal Latihan 3.2

Tentukanlah volume benda yang terjadi, apabila daerah R yang diketahui diputar mengelilingi sumbu yang diberikan

1. $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$ diputar mengelilingi sumbu-*y*
2. $y = \sqrt{x}, x = 3, y = 0$ diputar mengelilingi sumbu-*y*
3. $y = 9 - x^2 (x \geq 0), x = 0, y = 0$ diputar mengelilingi sumbu-*y*
4. $y = 9 - x^2 (x \geq 0), x = 0, y = 0$ diputar mengelilingi garis x = 3
5. $y = \sqrt{x}, x = 5, y = 0$ diputar mengelilingi s garis x = 5
6. $y = x^2, y = 3x$ diputar mengelilingi sumbu-y
7. $x = y^2, y = 1, x = 0$; diputar mengelilingi sumbu-x
8. $x = y^2, y = 2, x = 0$; diputar mengelilingi garis y =2
9. $x = \sqrt{y} + 1, y = 4, x = 0, y = 0$; diputar mengelilingi sumbu-x
10. Perhatikan gambar berikut. Susunlah sebuah integral untuk volume benda putar yang diperoleh, apabila daerah R diputar mengelilingi sumbu yang diberikan



(a) sumbu-x (cincin)

(b) Sumbu-y (kulit tabung)

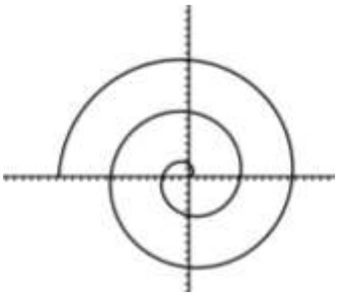
(c) Garis $x = a$ (kulit tabung)

(d) Garis $x = b$ (kulit tabung)

11. Sketsalah daerah R yang dibatasi oleh $y = 1/x^2$, $x = 1, x = 3$ dan y = 0. Susunlah (tidak perlu dihitung) integral-integral untuk masing-masing yang berikut;
    (a) Luas R
    (b) Volume benda putar, bila R diputar mengelilingi sumbu-y
    (c) Volume benda putar, bila R diputar mengelilingi garis y = -1
    (d) Volume benda putar, bila R diputar mengelilingi garis x = 4

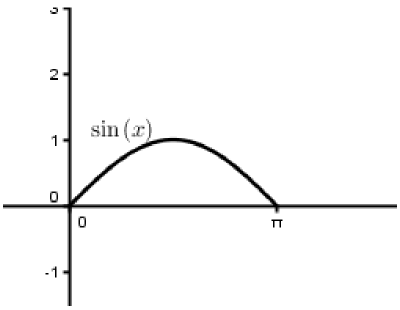
3.3 Panjang Kurva dan Luas Permukaan

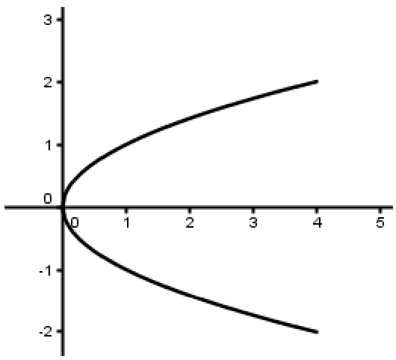
Perhatikan grafik kurva berikut;



Dapatkah Anda menghitung panjang kurvanya? Andai sebuah tali tentu dengan merentangkan menjadi garis lurus dengan mudah kita bisa menghitungnya.

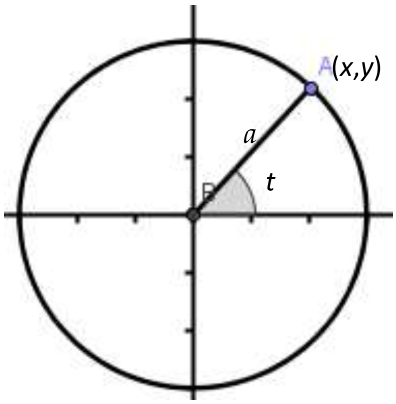
Pertanyaan ini memicu kita untuk lebih memahami tentang kurva. Mungkin dalam pikiran kita kurva diartikan sebagai grafik. Untuk lebih memahami perhatikan grafik fungsi dari $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$ dan $x = y^2, -2 \le y \le 2$





Grafik dari kedua fungsi tersebut merupakan sebuah kurva bidang. Kedua kasus diatas menyatakan bahwa kurva merupakan grafik dari fungsi yang berbentuk y = f(x) dan x = g(y).

Mari kita perhatikan lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$



persamaan lingkaran juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$x = a\cos t,\ y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Cara berpikir bisa kita anggap t sebagai waktu, x dan y menyatakan posisi pada saat t. variable t dinamakan sebagai parameter. Selanjutnya x dan y, dinamakan persamaan parametric yang menggambarkan sebuah lingkaran.

Jika kita gambar grafik dari persamaan parametric $x = \cos t$, dan $y = \sin t$, $0 \le t \le 5\pi$, maka kurva berbentuk spiral seperti pada kurva awal kajian ini.

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa kurva bidang ditentukan oleh pasangan persamaan parametric, $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, dimana kita asumsikan f dan g kontinu pada interval yang diberikan.

Definisi

Kurva bidang halus adalah sebuah kurva yang ditentukan oleh pasangan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, dimana f' dan g' ada dan kontinu pada (a,b).

Tentunya pengukuran panjang kurva menjadi penting dalam kalkulus.

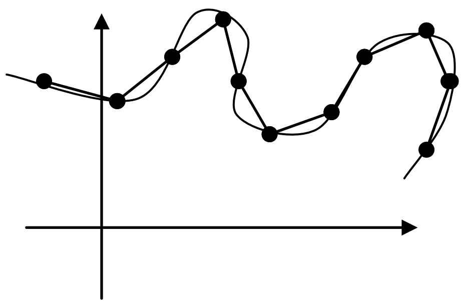
Panjang Busur

Misalkan diketahui $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. partisikan (a,b) menjadi n bagian sehingga,

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b\,,$$

Hasil potongan ini memberikan titik akhir dari setiap sub selangnya adalah $Q_0, Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}, Q_n$. Sehingga, panjang potongan bisa kita hitung melalui pendekatan jarak, dimana

$$\Delta w_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$



Berdasarkan teorema nilai rata-rata untuk turunan, maka ada titik $\overline{t_i}$ dan $\hat{t_i}$ di (t_{i-1}, t_i) sedemikian sehingga;

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\overline{t_i})\Delta t_i$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\overline{t_i})\Delta t_i$$

Dimana $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ Jadi,

$$\Delta w_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\left[f(\overline{t_i})\Delta t_i\right]^2 + \left[g(\hat{t_i}).\Delta t_i\right]^2}$$

$$= \sqrt{\left[f(\overline{t_i})\right]^2 + \left[g(\hat{t_i})\right]^2}.\Delta t_i$$

Sehingga total panjangnya adalah

$$\Delta w_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[f(\overline{t_i})\right]^2 + \left[g(\hat{t_i})\right]^2}.\Delta t_i$$

Berdasarkan definisi integral tentu, maka

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Apabila kurva didefinisikan dengan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ sedemikian sehingga;

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Contoh 1

Tentukan keliling lingkaran dari $x^2 + y^2 = a^2$

Penyelesaian

Kita tulis persamaan lingkaran, $x = a \cos t$ dan $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, maka $dx/dt = -a\sin t$ dan $dy/dt = a\cos t$.

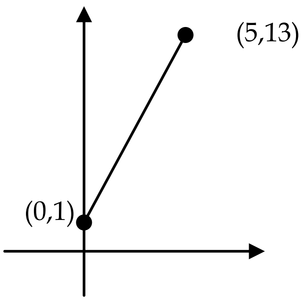
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} a.dt = [at]_0^{2\pi} = 2\pi.a$$

Contoh 2

Tentukan panjang segmen garis dari A(0,1) ke B(5,13)

Penyelesaian

Dari dua titik tersebut dapat dilihat persamaan $y = \frac{12}{5}x + 1$. $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{5}$



$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \int_0^5 \sqrt{\frac{5^2 + 12^2}{5^2}} = \frac{13}{5}\int_0^5 dx$$

$$= \left[\frac{13x}{5}\right]_0^5 = 13$$

Contoh 3 tentukan panjang busur dari kurva $y = x^{3/2}$ dari titik (1,1) sampai titik (4,8)

Penyelesaian

Berdasarkan jarak antar dua titik kita bisa hitung dari (1,1) ke (4,8), $\sqrt{(4-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \approx 7{,}6$

$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$, misalkan u = 1 + 9x/4, maka du = 9/4 dx, sehingga

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx = \frac{4}{9}\int_1^4 \sqrt{u}du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{8}{27}\left(\left[1+\frac{9}{4}x\right]^{3/2}\right)_1^4 = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - \frac{13^{3/2}}{8}\right) \approx 7{,}63$$

Turunan dari panjang busur

Misalkan f kontinu dan terdeferensialkan pada (a, b). untuk setiap x di (a,b) definisikan $s(x)$ oleh

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(u)]^2}\,du,$$

maka s(x) menyatakan panjang busur kurva $y = f(u)$ dari titik (a, $f(a)$) ke (x, $f(x)$). Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus I;

$$s'(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Jadi, $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

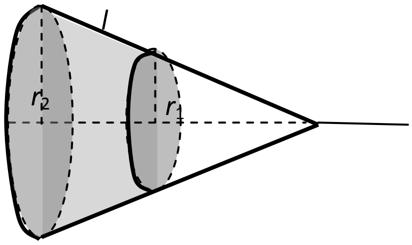
Dengan cara yang lain, akan kita dapatkan;

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Luas Permukaan Benda Putar

Pada kajian sebelumnya, kita telah mengkaji tentang hasil perputaran sebuah daerah. Hasil ini merupakan sebuah bangun ruang. Bangun ruang memiliki ukuran diantaranya volume dan luas permukaan. Volume benda putar telah kita kaji pada subbab sebelumnya. Pada bagian ini, kita akan mengkaji tentang luas permukaan benda putar.

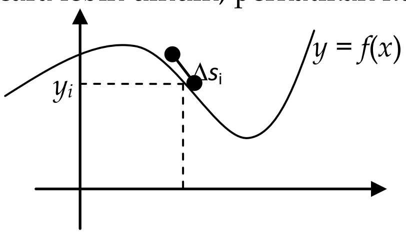
Mari kita mulai kajian dengan luas permukaan kerucut;



kalau kita lihat kerucut terpancungnya dengan jari-jari r_1 dan r_2, maka luas permukaannya adalah A = 2π x rata-rata jari-jari x tinggi miring, yakni;

$$A = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right).l$$

Secara lebih umum, perhatikan kurva berikut ini,



kalau kita gunakan prinsip partisi seperti dalam luas dan volume, maka bagi [a,b] menjadi n potong dengan titik-titik

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Misalkan Δs_i menyatakan panjang potongan ke-i, maka luas permukaan ke-I adalah $2\pi y_i \Delta s_i$. Jadi,

$$A = \lim_{\|P\|\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i.\Delta s_i$$

$$= 2\pi\int_a^b yds \quad = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Definisi

Misalkan $y = f(x)$ memiliki turunan dan kontinu pada interval [a,b]. luas permukaan benda putar S dengan cara memutar f pada sumbu-x dapat dihitung melalui

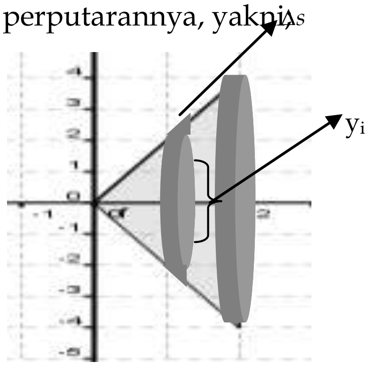
$S = 2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$ dimana r adalah jarak f terhadap sumbu putar. Jika $x = g(y)$ pada interval [c,d] maka luas permukaannya adalah $S = 2\pi\int_c^d r(y)\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy$

Contoh 1

Tentukan luas permukaan benda putar yang terjadi, bila daerah yang dibatasi oleh, y = 2x, x =2, dan y = 0 diputar mengelilingi sumbu-x.

Penyelesaian

Untuk lebih mudah, kita terlebih dulu gambar daerah hasil perputarannya, yakni,



Jadi, luas permukaannya adalah

$$A_i = 2\pi . y_i . \Delta s$$

$$A_i = 2\pi . 2x_i . \sqrt{1 + (2)^2}\, dx$$

$$A_i = 4\sqrt{5}\pi x_i\, dx$$

Sehingga luasnya adalah

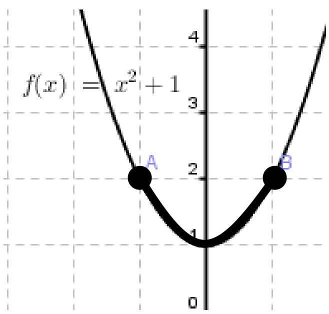
$$L = \int_0^2 4\pi\sqrt{5}x\,dx = 2\pi\sqrt{5}\left[x^2\right]_0^2 = 8\sqrt{5}\pi$$

Contoh 2

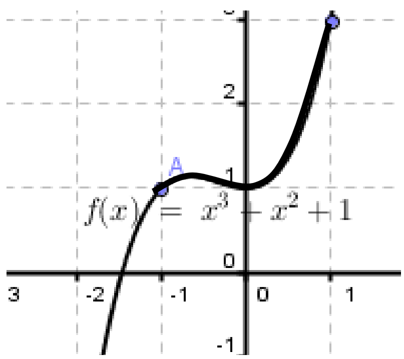
Soal Latihan 3.3

Tentukan panjang kurva dari 2 titik yang diketahui pada kurva yang yang diberikan

1. $f(x) = x^2 + 1$

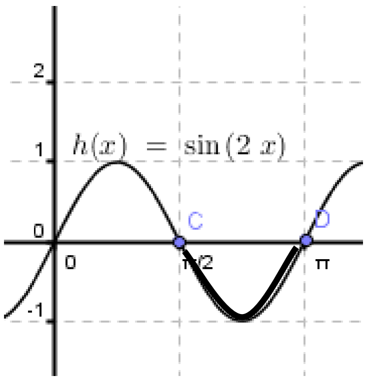


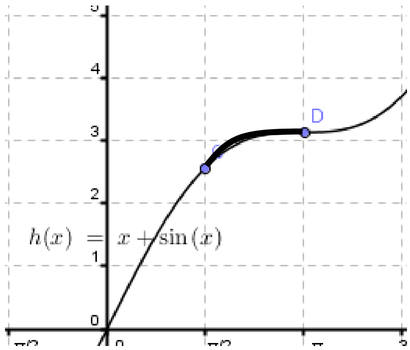
2. $f(x) = x^2 + x^2 + 1$



3. $f(x) = \sin(2x)$

4. $f(x) = x + \sin(x)$





Tentukan panjang kurva pada fungsi dan selang yang diberikan berikut;

5. $y = 4 - x^2, \quad 0 \le x \le 2$
6. $y = x^2 + x - 2 ;-2 \le x \le 1$
7. $y = \dfrac{1}{x+1};0 \le x \le 1$
8. $y = \sin x; \quad 0 \le x \le \pi$
9. $y = \cos x; \quad -\pi \le x \le \pi$
10. $y = \ln x; \quad 1 \le x \le 5$

Tentukan luas permukaan apabila daerah yang dibatasi oleh R, dan diputar mengelilingi sumbu-x

11. $R : y = x+1, x = 1, x = 3, y = 0;$
12. $R : y = 2\sqrt{x}, x = 4, x = 9, y = 0;$
13. $R : y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, x = 1, x = 3, y = 0;$
14. $R : y = \sqrt{9 - x^2}, x = -2, x = 2, y = 0;$

Tentukan luas permukaan apabila daerah yang dibatasi berikut diputar mengelilingi sumbu-y

15. $R : y = 2x+5, x = 1, x = 4, x = 0;$
16. $R : y = 1 - \dfrac{x^2}{4}, x = 0, x = 2,;$

17. hitunglah luas permukaan yang terjadi apabila daerah $y = \sqrt{r^2 - x^2}; 0 \le x \le a$ diputar mengelilingi sumbu-y

18. Misalkan R adalah sebuah daerah yang dibatasi oleh $y = 1/x$, sumbu-x, $x = 1$ dan $x = b$, dimana $b > 1$. Misalkan D adalah benda hasil perputaran terhadap sumbu-x.

    a. tentukanlah volume dari D

    b. tulislah luas permukaan S sebagai bentuk integral

    c. selidiki nilai V bila $b \to \infty$

    d. tunjukkan bahwa $S \to \infty$ apabila $b \to \infty$

BAB IV

FUNGSI TRANSENDEN

Pendahuluan

Sepanjang pembahasan kita, kita hanya berhubungan dengan fungsi-fungsi rasional dan polinom, dan trigonometri. Bahkan kita juga masih memiliki pekerjaan tentang pengintegralan untuk variable yang berpangkat -1 (ingat kembali aturan pangkat).

Banyak jenis fungsi dalam matematika yang kita kenal. Fungsi eksponen dan logaritma dan fungsi invers merupakan jenis fungsi yang banyak digunakan dan kita kenal. Fungsi hiperbolik yang mempertemukan antara trigonometri dengan eksponen juga merupakan fungsi yang menarik untuk dikaji.

Pada bagian ini, kajian kita akan difokuskan pada jenis-jenis fungsi tersebut yang dalam kalkulus dikenal dengan nama **fungsi transenden**. Tentu saja, kajian kita berkaitan dengan ide besar dalam kalkulus, yaitu limit, turunan dan integral.

Ketrampilan dalam menganalisis karakteristik fungsi transenden, menentukan limit, turunan dan integral dari fungsi transenden merupakan kemampuan yang diharapkan setelah kita mengkaji bagian ini dengan indikator seperti pada gambar berikut;

INDIKATOR

- menjelaskan definisi fungsi logaritma dan eksponen
- menjelaskan hubungan eksponen dengan logaritma
- menentukan turunan fungsi logaritma dan eksponen
- menentukan hasil integrasi fungsi logaritma dan eksponen

- menjelaskan definisi trigonometri invers dan sifat-sifatnya
- menentukan turunan dan integral trigonometri invers
- Mengidentifikasi karakteristik fungsi hiperbolik

4.1 Fungsi Logaritma Asli

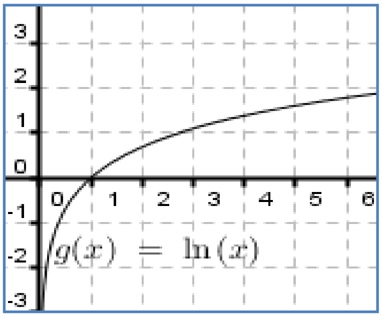
Tentu kita masih ingat, tentang integral dari x^n, dimana $n \neq -1$. Apa yang terjadi apabila $n = -1$. Definisi berikut akan sangat membantu;

Definisi

Fungsi logaritma asli dinyatakan dengan ln , yang menyatakan

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \text{ dimana } x > 0$$

Grafik fungsi ln(x) dapat dilihat dibawah. Bisa kita lihat bahwa domain ln(x) adala untuk setiap x > 0. Selain itu,



(i) ln(x) < 0, 0 < x < 1

(ii) ln(x) > 0, x > 1

Amati grafik dengan seksama dan yakinkan bahwa fungsi logaritma asli memiliki sifat-sifat seperti dinyatakan dalam teorema berikut;

Teorema

Fungsi logaritma asli memiliki sifat-sifat berikut;

1. domain fungsi (0, ∞) dan range (-∞,∞)
2. fungsi kontinu, naik dan satu-satu
3. grafik fungsi terbuka kebawah

Bukti

Berdasarkan definisi domainnya adalah (0, ∞). Karena memiliki turunan untuk setiap x di domainnya, maka **fungsi kontinu**.

Diketahui berdasarkan teorema dasar kalkulus I, maka turunannya adalah

$f'(x) = \frac{1}{x}$, karena domainnya x > 0, maka $f'(x) > 0$ yang berarti fungsi naik pada domainnya.

Turunan kedua, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, tentu saja $f''(x) < 0$ yang berarti grafik terbuka kebawah.

Turunan fungsi $y = \ln x$, dapat dilihat dari teorema dasar kalkulus I. Dimana,

$$D_x[\ln x] = D_x\left[\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{1}{x}\ .$$

Bagaimana dengan turunan dari $f(x) = \ln(x^2 + x)$? sebelum menentukan turunannya, kita akan coba kaji kasus berikut,. Misalkan F(x) = $\int_1^{x^2} 2t\,dt$ kita akan menentukan turunanya. Dengan menggunakan integral tentu, kita peroleh,

$$F(x) = \int_1^{x^2} 2t\,dt = \left[t^2\right]_1^{x^2} = \left(x^2\right)^2 - 1 = x^4 - 1,$$

maka dengan $F'(x)$ dapat ditentukan bahwa $f'(x) = 4x^3 = 2(x^2).(2x)$. Ingat kembali aturan rantai, untuk melihat hubungan antara x^2 dan $2x$. dengan memisalkan $u = x^2$, maka $du = 2x$.

Jadi, untuk mencari turunan $F(x) = \int_1^{x^2} 2t\,dt$ kita bisa memisalkan $u = x^2$ kita bisa peroleh bahwa $F'(x) = f(x^2).2x$. Secara umum, kita dapat dituliskan dengan,

Jika $F(x) = \int_1^{u(x)} 2t\,dt$, maka $F'(x) = f(u(x)).u'(x)$ dengan $f(t)$ fungsi integran.

$$F'(x) = f(t).du = 2(u(x))^2.u'(x) = 2.x^2.2x = 4x^3$$

Selanjutnya kita sampai pada sifat logaritma asli yang sangat membantu untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan logaritma asli.

Sifat-sifat fungsi logaritma;

(i) Ln 1 = 0

(ii) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

(iii) $\ln ab = \ln a + \ln b$

(iv) $\ln a^r = r \ln a$

Bukti sifat dapat dilihat sebagai berikut;

(i) Berdasarkan definisi, $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt$, berdasarkan sifat integral tentu, kita dapatkan $0 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt$,. Jadi, ln 1 = 0

(ii) $\ln a = \int_1^a \frac{1}{t} dt$, maka $-\int_1^a \frac{1}{t} dt = -\ln a$.

Jadi, ln 1 = 0 = ln a – ln a = $\int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^1 \frac{1}{t} dt$

Dengan kata lain, $\ln 1 = \ln(a.\frac{1}{a}) = \ln a - \ln a$ dengan mengganti a menjadi b, kita dapatkan bahwa $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

(iii) Bukti ln($a.b$) = ln a + ln b, dari (ii) dengan mengganti a = 1, akan diperoleh ln (1/b) = - ln b, b = 1/(1/b). jadi,

ln($a.b$) = ln (a. (1/(1/b))) = ln a – ln(1/b) = ln a + ln b

Bukti ke iv silahkan Anda coba sendiri.

Contoh berikut akan lebih meningkatkan pemahaman kita tentang fungsi logaritma asli. Selain itu, kita juga bisa menentukan turunan logaritma asli dan kegunaannya dalam proses integrasi.

Contoh 1 penyederhanaan bentuk berdasarkan sifat

a. $\ln \dfrac{8}{7} = \ln 8 - \ln 7$

b. $\ln \sqrt{3x+2} = \ln(3x+2)^{1/2}$

$$= \frac{1}{2}\ln(3x+2)$$

c. $\ln \dfrac{6x}{5} = \ln(6x) - \ln 5$

$$= \ln x + \ln 6 - \ln 5$$

d. $\ln \dfrac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \ln \dfrac{(3x+2)^{1/2}}{(x^2+1)^{1/3}}$

$$= \ln(3x+2)^{1/2} - \ln(x^2+1)^{1/3}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3x+2) - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$$

Contoh 2 tentukanlah (a) $D_x[\ln (x^2 - 2x)]$ dan (b) $\int \left(\dfrac{2x+1}{x^2+x} \right) dx$

Penyelesaian

(a) misalkan u = x^2 - 2x , maka du = 2x – 2 , sehingga berdasarkan aturan rantai kita peroleh,

$$D_x\left[\ln(x^2-2x)\right] = D_u\left[\ln u\right].D_x\left[x^2-2x\right]$$

$$= \frac{1}{u}.(2x-2) = \frac{2x-2}{x^2-2x}$$

(b) misalkan $u = x^2 + x$, $du = (2x + 1)\, dx$. Jadi,

$$\int \left(\frac{2x+1}{x^2+x} \right) dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln\left|x^2+x\right| + C$$

Contoh berikut menarik bagaimana sifat logaritma sangat membantu untuk menyelesaikan persoalan berikut;

Contoh 3

Tentukan turunan dari $f(x) = \ln \dfrac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$

Penyelesaian

Tentu saja, kita bisa menyelesaikan turunan dengan menggunakan aturan rantai dengan memisalkan

$$u = \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$$

maka $u' = \dfrac{(x^2+1)^2 + 4x^2(x^2+1) - \dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3-1}}x(x^2+1)^2}{2x^3-1}$

sehingga,

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)^2 + 4x^2(x^2+1) - \dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3-1}}x(x^2+1)^2}{2x^3-1} \cdot \frac{\sqrt{2x^3-1}}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1) + 4x^2 - \dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3-1}}x(x^2+1)}{x\sqrt{2x^3-1}} = \frac{5x^2+1}{x\sqrt{2x^3-1}} - \frac{6x^3(x^2+1)}{2x(2x^3-1)}$$

Tentu kita sepakat, ini sangat merepotkan.

Sekarang kita gunakan sifat logaritma asli

$$f(x) = \ln\frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}} = \ln\left(x(x^2+1)^2\right) - \ln\left(\sqrt{2x^3-1}\right)$$

$$= \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1}$$

Jauh lebih mudah bukan? Selain itu, logaritma juga dapat digunakan sebagai bantuan untuk menentukan turunan sebuah fungsi

Contoh 4 tentukan turunan dari $y = \dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, x \neq -2$

Penyelesaian

Karena y > 0 untuk semua x ≠ -2, maka kita bisa misalkan

$$y = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, x \neq -2 \Rightarrow \ln y = \ln \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Dimana

$$\ln y = 2\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \frac{2}{x+2} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2-2x+2}{(x+2)(x^2+1)} \Rightarrow y' = \frac{x^2-2x+2}{(x+2)(x^2+1)}\left(\frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{(x+2)(x^2-2x+2)}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Soal Latihan 4.1

Buatlah sketsa grafik dan tentukan domain dari fungsi berikut

1. $f(x) = -3 \ln x$
2. $f(x) = \ln 3x$
3. $f(x) = \ln |x|$
4. $f(x) = \ln (x - 2)$
5. $f(x) = \ln (x - 2) + 2$
6. $f(x) = \ln (x^2 - 2)$

Tentukan persamaan garis singgung pada grafik logaritma di titik (1,0) pada persamaan berikut

7. $y = \ln x^3$
8. $y = \ln x^{1/2}$

tentukan turunan dari fungsi berikut;

9. $f(x) = \ln (3x + 2)$
10. $f(x) = \ln (x^2 - 2)$
11. $f(x) = \ln (x^4)$
12. $f(x) = (\ln x)^4$
13. $f(x) = x^2 \ln (x^4)$
14. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$
15. $f(t) = \ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)$

16. $h(x) = \dfrac{\ln x^2}{x^2}$

17. $f(x) = \ln(\ln x)$

18. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+1}}\right)$

19. $f(x) = \ln\sqrt{2+\cos 2x}$

20. $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} \left(t^2+1\right)dt$

21. $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x^2} \left(t+1\right)dt$

Gunakan logaritma untuk mencari turunan dari fungsi berikut

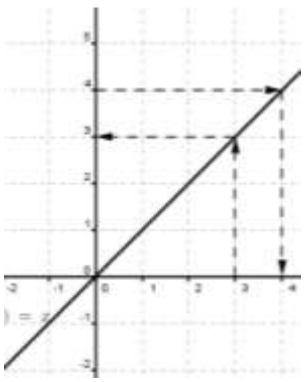
22. $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

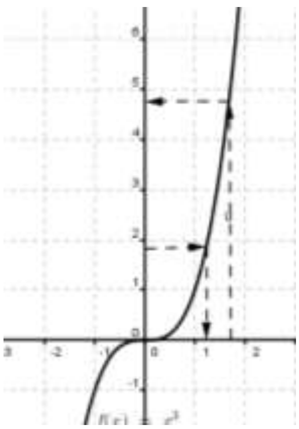
23. $y = \dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x+1)^2}$

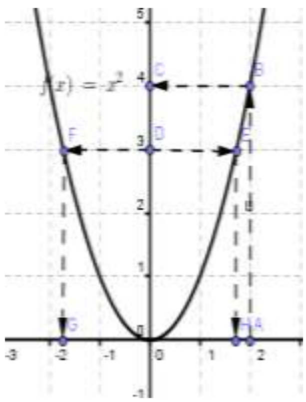
24. $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

4.2 Fungsi Invers dan Turunannya

Perhatikan grafik dari fungsi-fungsi berikut







Gambar 1 Gambar 2 Gambar 3

Grafik pada gambar (1) merupakan grafik dari fungsi linier. Setiap x berpasangan tepat dengan satu *y* tertentu dimana *y* = *f*(*x*). kalau proses kita balik, makasetiap *y* memiliki tepat satu pasangan x tertentu, fungsi yang demikian dalam matematika dinyatakan sebagai

invers fungsi, f^{-1}, dimana $x' = f^{-1}(y)$. Bagaimana dengan gambar (2) dan gambar (3)?

Tentunya tidak sulit menyatakannya. Fungsi pada gambar (2) memiliki invers fungsi karena setiap x berpasangan dengan tepat satu y tertentu, begitu pula sebaliknya. Akan tetapi, fungsi pada gambar (2) tidak memiliki invers, karena pada proses kebalikannya, setiap nilai y akan berpasangan dengan 2 nilai x.

Lalu, Apa syarat sebuah fungsi memiliki invers?

Perhatikan kembali gambar (1) dan (2). Amati dan yakinkan bahwa keduanya merupakan fungsi naik untuk setiap x nya, jadi kedunya merupakan **fungsi monoton** (ingat kembali kemonotonan fungsi pada kalkulus I). Sedangkan grafik fungsi pada gambar (3), fungsi turun bila $x < 0$ dan naik pada $x > 0$ yang berimplikasi bahwa fungsinya **bukan fungsi monoton.**

Ilustrasi grafik diatas membantu kita untuk memahami teorema berikut ini;

Teorema

Jika f monoton murni pada domainnya, maka f memiliki invers, f^{-1}

Sebuah fungsi f dikatakan monoton murni apabila $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in R$ atau $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in R$. Fungsi yang memiliki turunan positif untuk setiap x dikatakan fungsi naik, sedangkan fungsi yang turunannya negative untuk setiap x dikatakan fungsi turun.

Contoh 1

Tentukan nilai dari $n \in N$ sehingga fungsi $f(x) = x^n$ adalah

(a) monoton naik (b) monoton turun

Jawab

Pertama kita turunkan fungsinya, $f'(x) = nx^{n-1}$karena n bilangan asli, maka

(a) $f'(x) > 0$, apabila $x^{n-1} > 0$ atau n – 1 adalah bilangan genap. Jadi, $n - 1 = 2k$ atau $n = 2k + 1$ yang berarti n ganjil.

(b) $f'(x) < 0$, yang berarti $x^{n-1} < 0$. Tentunya akan dipenuhi apabila x < 0 dan n – 1 ganjil.

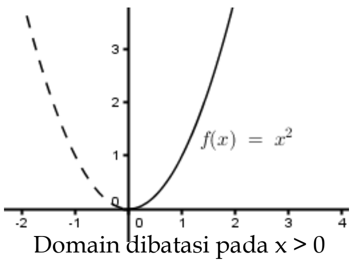
Contoh 2 selidikilah apakah fungsi $f(x) = 2x^3 + 3$ memiliki invers

Penyelesaian

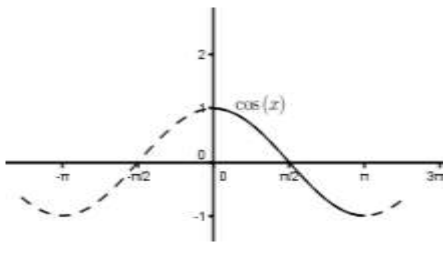
Karena $f'(x) = 6x^2$, maka $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in R$, maka f monoton naik. Jadi, f memiliki invers, dimana fungsi inversnya adalah

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$$

Bagaimana dengan fungsi $f(x) = x^2$, apakah memiliki invers? Dengan menentukan turunan pertamanya kita bisa mengenali apakah fungsi tersebut memiliki invers. Karena $f'(x) = 2x$, maka $f'(x) < 0$ untuk $x < 0$ dan $f'(x) > 0$ untuk x > 0. Hal ini berarti $f(x) = x^2$ tidak memiliki invers pada domainnya. Akan tetapi, bila kita batasi domainnya pada x > 0, maka $f(x) = x^2$ memiliki invers dimana $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Dengan cara yang sama kita bisa menentukan invers dari $f(x) = \cos x$, untuk $0 \le x \le \pi$.



Domain dibatasi pada x > 0

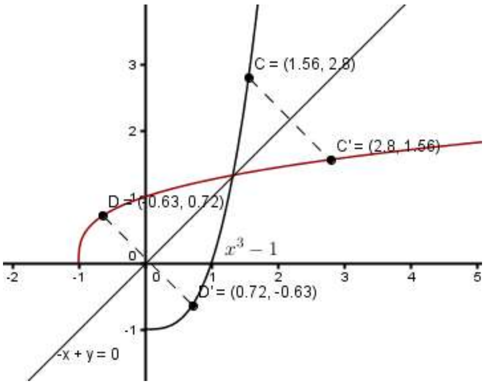


Domain dibatasi pada 0<x<π

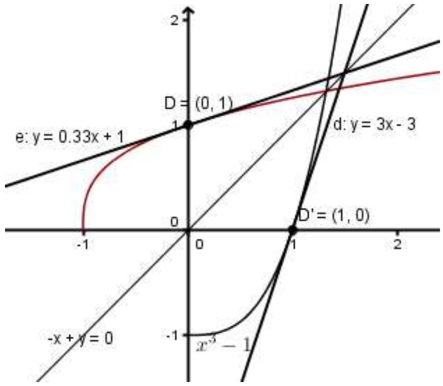
Salah satu hubungan antara fungsi dan inversnya adalah

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{dan} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Lalu bagaimana dengan grafik fungsi invers? Grafik fungsi invers dapat kita cari dengan mencerminkan grafik *f*(*x*) terhadap garis *y* = *x*



Gambar 1



gambar 2

Pada gambar 1 jelas bahwa grafik fungsi invers merupakan pencerminan fungsi *f*(*x*) terhadap garis *y* = *x*. Titik sampel C(1.56, 2.8) dan D(-0.63,0.72) dengan hasil pencerminan terhadap garis *y* = *x* C′(2.8,1.56) dan D′(0.72.-0.63) menambah keyakinan kita akan proses tersebut.

Gambar 2 menunjukkan dua garis singgung pada titik D dan D′. Persamaan garis singgung yang melalui D adalah *y* = 0.33x + 1 dan persamaan garis singgung yang melalui D′ adalah *y* = 3*x* – 3. Bila kita amati gradient keduanya, maka m_D = 1/3 dan $m_{D'}$ = 3. Dengan kata lain,

$$m_{D'} = \frac{1}{m_D}$$

Tentu kita masih ingat bukan hubungan gradient dengan turunan pertama? Tepat sekali, gradient merupakan nilai turunan pertama dari fungsi pada sebuah titik tertentu. Kesimpulan ini merujuk kita pada teorema turunan fungsi invers.

Teorema B

Misalkan f terdeferensialkan dan monoton murni pada interval I. jika $f'(x) \neq 0$ di x tertentu dalam I, maka f^{-1} dapat dideferensialkan dititik tersebut yang berpadanan dengan $y = f(x)$ dimana

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Contoh 3

Misalkan $y = x^3 + x$ tentukanlah $(f^{-1})'(2)$

Penyelesaian

Tentu tidak mudah kita menentukan f^{-1} pada kasus ini. Karena y = 2 berpadanan dengan x = 1, dan $f'(x) = 3x^2 + 1$, maka

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3.1+1} = \frac{1}{4}$$

Contoh 4

Carilah rumus dari f^{-1} apabila $y = f(x) = \frac{-x}{2x+1}$

Penyelesaian

Kita dapat menyelesaikannya melalui langkah-langkah berikut;

Langkah 1:

$$y = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow (2x+1)y = x$$

$$2xy + y = x$$

$$2xy - x = -y$$

$$x(2y-1) = -y$$

$$x = \frac{-y}{2y-1}$$

Langkah 2: $f^{-1}(y) = \frac{-y}{2y-1}$

Langkah 3 : $f^{-1}(x) = \frac{-x}{2x-1}$

Soal Latihan 4.2

Tunjukkan bahwa fungsi berikut memiliki invers

1. $f(x) = x^3 - x$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$
3. $f(x) = x^3 - x^2, x > 1$
4. $f(x) = x^2 - x, x < \frac{1}{2}$
5. $f(x) = x + \sin(x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Tentukan rumus dari $f^{-1}(x)$ dan tunjukkan bahwa $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

6. $f(x) = 3x - 1$
7. $f(x) = \dfrac{x}{2} - 1$
8. $f(x) = x^3 + 2$
9. $f(x) = 3\sqrt{x} - 1$
10. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$
11. $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^3$
12. $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^3+1}$

Tentukan turunan dari $(f^{-1})'(2)$ dari fungsi yang diberikan berikut

13. $f(x) = 3x^5 + x - 2$
14. $f(x) = \sqrt{3x-2}$
15. $f(x) = 2\sin 2x, -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$

16. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$

17. Misalkan $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ dan anggap bc – ad ≠ 0

    a. Tentukan rumus untuk f^{-1}

    b. Mengapa syarat bc – ad ≠ 0diperlukan

    c. Apa syarat *a,b,c,d* agar $f = f^{-1}$

4.3 Fungsi Eksponen Asli

Banyak operasi dalam matematika yang memiliki pasangan. Fungsi ln juga memiliki pasangan. Pasangan operasi ini dalam matematika sering kita kenal dengan nama **invers**. Demikian pula ln, tentu memiliki fungsi invers. Invers dari fungsi ln dikenal dengan nama **fungsi eksponen asli.**

Definisi berikut akan mengawali kajian kita tentang fungsi eksponen.

Definisi

Invers dari fungsi ln dinamakan **fungsi eksponen asli** dan dinyatakan dengan **exp.** Jadi,

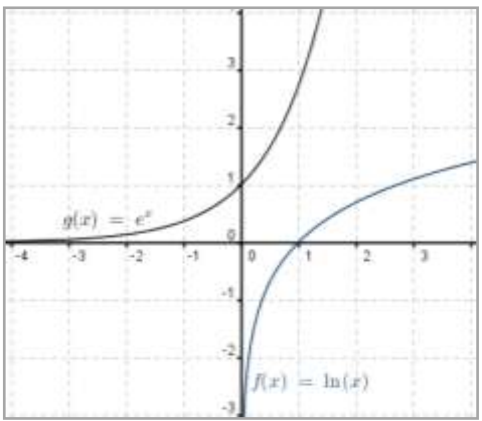
$$x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x$$

Dua hal dapat kita simpulkan dari hubungan tersebut. Perhatikan bahwa;

(i) exp (ln x) = x, x > 0

(ii) ln (exp y) = y, untuk semua y

Grafik berikut akan lebih memahami tentang fungsi eksponen asli dan ln.



dari grafik disamping kita bisa katakana bahwa keduanya monoton murni pada domainnya. Fungsi ln(x) memiliki domain pada x > 0. Sedangkan fungsi e^x memiliki domain untuk setiap x di real.

Definisi

Huruf *e* menunjukkan bilangan real positif yang unik sehingga ln *e* = 1

Sehingga,

(i) $e^{\ln x} = x, x > 0$

(ii) $\ln e^{y} = y, \forall y \in R$

dari dua definisi di atas kita bisa menurunkan sebuah teorema yang berkaitan dengan sifat eksponen.

Teorema

Misalkan a dan b bilangan real sebarang, maka

$$e^a e^b = e^{a+b} \text{ dan } e^a / e^b = e^{a-b}$$

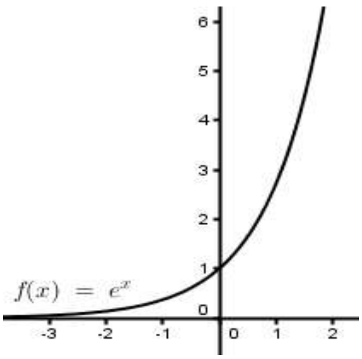
Bukti

Untuk membuktikannya kita dapat gunakan definisi dari *e*

$$\ln\left(e^a e^b\right) = \ln e^a + \ln e^b = a \ln e + b \ln e = (a+b)\ln e = \ln e^{(a+b)}$$

Jadi, $e^a e^b = e^{a+b}$

bukti lainnya silahkan dicoba sebagai latihan.



kita juga bisa melihat beberapa sifat dari fungsi eksponen asli

1. Domain dari f(x) = e^x adalah (-∞,∞) dan range (0, ∞)
2. Fungsi kontinu, naik dan satu-satu
3. Grafik terbuka keatas

4. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ dan $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

Bagaimana dengan turunan fungsi eksponen? Kita misalkan y = e^x melalui sifatnya kita bisa tuliskan menjadi ln y = x. Dengan menggunakan konsep turunan implicit kita dapatkan;

$$\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y$$

Jadi, turunannya adalah

$$y' = e^x$$

Secara umum dinyatakan bahwa **turunan eksponen asli,** $D_x e^x = e^x$.

Apabila pangkat dari e berbentuk fungsi, kita bisa perluas dengan aturan rantai, yakni

Jika $u = f(x)$, maka $D_x e^u = e^u . D_x u$

Teorema

Misalkan u fungsi dari x yang memiliki turunan

1. $\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$
2. $\frac{d}{dx}\left[e^u\right] = e^u . \frac{du}{dx}$

Contoh 1 Tentukan turunan dari $y = e^{x^2 \ln x}$

Penyelesaian

Misalkan u = x^2 lnx

$$
\begin{aligned}
D_x e^{x^2 \ln x} &= e^{x^2 \ln x} D_x\left(x^2 \ln x\right) \\
&= e^{x^2 \ln x}\left(x^2 . \frac{1}{x} + 2x \ln x\right) \\
&= x e^{x^2 \ln x}\left(1 + \ln x^2\right)
\end{aligned}
$$

Contoh 2

Tentukan titik ekstrim relative dari $f(x) = x\ e^x$

Penyelesaian

Turunan dari f

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= xe^x + e^x \\
&= e^x(x+1)
\end{aligned}
$$

Karena e^x tidak pernah 0, maka f′ bernilai 0 pada x = -1; jadi titik ekstrim terjadi pada $(-1, -e^{-1})$.

Tentu, integral dari fungsi eksponen juga kita pelajari. Integral sebagai sebuah anti turunan dari eksponen tentu menghasilkan eksponen yang sama, karena turunan dari eksponen adalah eksponen itu sendiri.

Teorema

Misalkan u fungsi dari x yang memiliki turunan

1. $\int e^x du = e^x + C$
2. $\int e^u du = e^u + C$

Integral untuk fungsi eksponen secara umum dinyatakan dengan

$$\int e^u du = e^u + C$$

Untuk lebih memahami kita kaji contoh-contoh berikut ini;

Contoh 2 Tentukan $\int_1^3 xe^{-3x^2} dx$

Penyelesaian

Misal u = $-3x^2$, jadi du = $-6x\ dx$. Sehingga

$$\int_1^3 xe^{-3x^2}dx = -\tfrac{1}{6}\int_1^3 e^{-3x^2}\left(-6xdx\right) = -\tfrac{1}{6}\int_1^3 e^u du$$

$$= -\tfrac{1}{6}\left[e^u\right]_1^3 = \left[-\frac{1}{6}e^{-3x^2}\right]_1^3 = -\tfrac{1}{6}\left[e^{-27} - e^{-3}\right] = \frac{e^{-27} - e^{-3}}{6}$$

Contoh 3 tentukanlah $\int \frac{(2x+1)e^{-\ln(x^2+x)}}{x^2+x}dx$

Penyelesaian

Misalkan u = ln (x^2 + x), maka

$$du = \frac{(2x+1)}{x^2+x}dx$$

Sehingga

$$\int \frac{(2x+1)e^{-\ln(x^2+x)}}{x^2+x}dx = \int e^{-u}du = -e^{-u} + C$$

$$= -e^{-\ln(x^2+x)} + C$$

Soal Latihan 4.3

Sketsa grafik dari

1. $y = e^{-x}$

2. $y = 2e^{-x}$

3. $y = e^{-x} + 2$

4. $y = e^{-x+1}$

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva berikut di titik (0,1)

5. $y = e^{2x}$

6. $y = e^{-2x}$

7. $y = 2 - e^{2x}$

8. $y = 3 - 2e^{2x}$

Tentukan turunan dari fungsi berikut

9. $y = e^{-3x}$

10. $y = e^{-x^2}$

11. $y = x^2e^{-2x}$

12. $y = e^{-2x}\ln x$

13. $y = \ln(1 + e^{-2x})$

14. $y = \frac{e^{-2x} + 1}{e^x}$

15. $y = e^x(\sin x + \cos x)$

16. $F(x) = \int_x^{\ln x} \cos e^t \, dt$

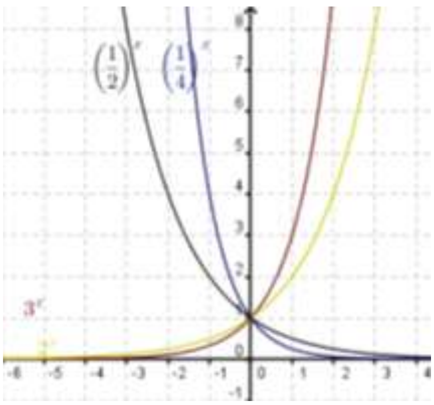
17. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva y =xe^x – e^x di titik (1,0)

Tentukanlah hasil dari integral berikut;

18. $\int e^{2x-1} dx$
19. $\int x^2 e^{x^3} dx$
20. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
21. $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx$
22. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$
23. $\int_0^1 e^{-2x} dx$
24. $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$
25. $\int_0^1 \frac{e^x}{5-e^x} dx$

4.4 Fungsi eksponen dan logaritma umum

Pada kajian sebelumnya, fungsi ln dan eksponen, merupakan bentuk khusus dari fungsi eksponen dan logaritma. Secara umum, fungsi eksponen umum dapat dinyatakan dengan,



Definisi

Untuk a > 0 dan sebarang bilangan real x, $a^x = e^{x \ln a}$

Tentu *e* adalah sebuah kasus dari bilangan *a*. Sifat-sifat dalam eksponen asli juga akan berlaku dalam eksponen umum. Pada eksponen umum sifat ini dinyatakan dalam sebuah teorema yang seringkali kita gunakan pada SMA/MA/SMK dulu.

Teorema a

Jika $a > 0.b > 0$ dan x, y bilangan real, maka

$a^x a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

$(ab)^x = a^x b^x$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Bukti

Kita gunakan definsi untuk membuktikan sifat ini, $a^x = e^{x \ln a}$. Sehingga

$$\begin{aligned} a^x . a^y &= e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{(x+y)\ln a} \\ &= a^{x+y} \end{aligned}$$

Bukti (iii) dapat kita tunjukkan dengan mudah yakni

$$\left(a^x\right)^y = e^{y \ln a^x} = e^{yx \ln a} = a^{xy}$$

Bukti (iv) kita lakukan berikut;

$$(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = a^x b^x$$

Bukti lain dapat anda coba sebagai bahan latihan.

Selanjutnya, mari kita kaji tentang turunan dn integral dari fungsi eksponensial umum tersebut. Tentunya akan semakin menarik dan menantang. Fungsi ini tentunya memiliki turunan dan integral yang hampir sama dengan fungsi eksponen asli dan ln. Perhatikan teorema berikut ini;

Teorema B (aturan fungsi eksponensial)

$$D_x a^x = a^x \ln a$$

$$\int a^x dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + C, a \neq 1$$

Bukti

Misalkan $y = a^x$, maka $\ln y = x \ln a$. Jadi, dengan aturan implicit kita peroleh,

$$\frac{dy}{y} = dx \ln a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a$$

Bukti dari integral dapat anda lakukan dengan menurunkan ruas bagian kanannya. Selamat mencoba.

Contoh 1 tentukanlah $D_x\left[x^2.3^{x^3+x}\right]$

Penyelesaian

Karena memiliki bentuk perkalian dua fungsi, maka

$$\begin{aligned} D_x\left[x^2.3^{x^3+x}\right] &= D_x\left[x^2\right]3^{x^2+x} + x^2 D_x\left[3^{x^3+x}\right] \\ &= 2x.3^{x^3+x} + x^2.3^{x^3+x}.\ln 3.(2x+1) \\ &= x.3^{x^3+x}\left(2+(2x^2+x)\ln x\right) \end{aligned}$$

Contoh 2 tentukanlah nilai dari $\int_1^3 x3^{x^3}\,dx$

Penyelesaian

Misalkan u = x², sehingga du = 2xdx. Jadi,

$$\begin{aligned} \int_1^3 x3^{x^3}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^3 3^u\,du = \frac{1}{2}\left[3^u \ln 3\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\left[3^{x^2}\ln 3\right]_1^3 = \frac{1}{2}\ln 3\left[3^9 - 3\right] \end{aligned}$$

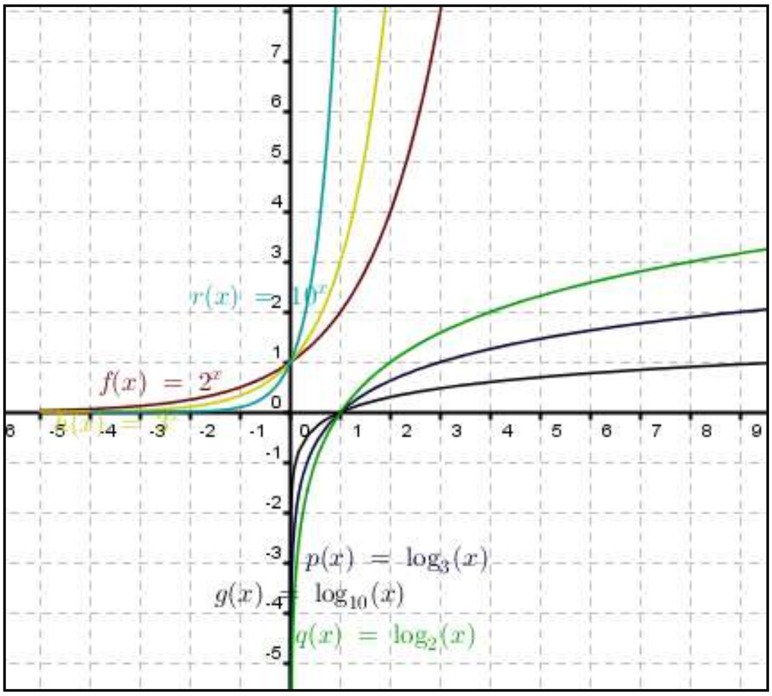
Sebagaimana fungsi eksponen asli, maka fungsi eksponen umum juga memilik invers. Invers eksponen asli dinamakan ln, sedangkan invers eksponen umum dinamakan logaritma, yang kita kenal dengan "log". Berikut diberikan definisi logaritma

Definisi

Misalkan *a* adalah bilangan positif yang berbeda dengan 1, maka

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Untuk lebih jelas, perhatikan beberapa fungsi logaritma dan eksponen umum,



Kita bisa amati dari grafik diatas, fungsi eksponen a^x akan mendekati 0 untuk x yang mendekati -∞ dan melalui titik (0,1). Sedangkan fungsi $\log_a(x)$ akan mendekati -∞ apabila x mendekati 0 dan melalui titik (1,0).

Analisis turunan dari a^x, x^a dan x^x

Ketiga bentuk tersebut merupakan bentuk eksponen. Bagaimana dengan turunan atau hasil turunan dari ketiganya.

Bila kita gunakan dengan cara yang sama, maka kita akan lihat perbedaan turunan dari ketiganya;

$$\ln y = x \ln a$$
$$\frac{dy}{y} = dx \ln a$$
$$\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a$$

$$\ln y = a \ln x$$
$$\frac{dy}{y} = a \frac{dx}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x} = \frac{a.x^a}{x} = ax^{a-1}$$

$$\ln y = x \ln x$$
$$\frac{dy}{y} = dx \ln x + x.\frac{dx}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$$
$$= x^x(\ln x + 1)$$

Contoh 3 tentukan turunan dari

(a) $5^{\ln(x^2+x)}$ (b) $\left(\ln(x^2-2x)\right)^4$ (c) $\left(2x^3+x^2\right)^{e^{(x^2+x)}}$

Penyelesaian

(a) Karena bilangan pokok berupa bilangan dan pangkatnya berupa fungsi, maka

Misalkan $u=\ln(x^2+x)$, maka $du=\dfrac{2x+1}{x^2+x}dx$, sehingga

$$D_x\left[5^{\ln(x^2+x)}\right]=D_u\left[5^u\right]D_x u=5^u\ln 5\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)=5^{\ln(x^2+x)}\ln 5.\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)$$

(b) Misalkan $u=\ln(x^2-2x)$, maka $du=\dfrac{2x-2}{x^2-2x}dx$, sehingga

$$D_x\left(\ln(x^2-2x)\right)^4=D_u\left(u^4\right)D_x u=4u^3.\frac{2x-2}{x^2-x}$$
$$=4\left(\ln(x^2-2x)^3\right)\frac{2x-2}{x^2-x}$$

(c) Misalkan $y=\left(2x^3+x^2\right)^{e^{(x^2+x)}}$ maka

$\ln y=e^{(x^2+x)}\ln\left(2x^3+x^2\right),$

$$\frac{dy}{y}=\left[e^{(x^2+x)}(2x+1).\ln\left(2x^3+x^2\right)+\frac{6x^2+2x}{\left(2x^3+x^2\right)}e^{(x^2+x)}\right]dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(2x^3+x^2\right)^{e^{(x^2+x)}}e^{(x^2+x)}\left[(2x+1)\ln\left(2x^3+x^2\right)+\frac{6x^2+2x}{\left(2x^3+x^2\right)}\right]$$

Soal Latihan 4.4

Tentukan turunan dari

1. $f(x)=4^x$
2. $f(x)=4^{2x}$
3. $f(x)=x4^{2x-1}$
4. $f(x)=x(6^{-2x})$

5. $f(t) = \dfrac{3^{2t}}{t}$

6. $y = x^{2/x}$

7. $y = x^{x-1}$

8. $y = (x-2)^{x+1}$

9. $y = (1+x)^{1/x}$

10. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = (\sin x)^{2x}$ di titik $(\pi/2, 1)$
11. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^{1/x}$ di titik (1,1)

Tentukan integral dari fungsi berikut;

12. $\int 2^x\, dx$

13. $\int (x^3 + 3^{-x})dx$

14. $\int (x-3)2^{(x-3)^2}\, dx$

15. $\int \dfrac{2^{2x}}{1+2^{2x}}\, dx$

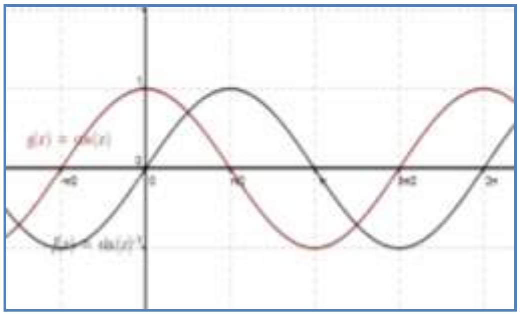
16. $\int 2^{\sin x} \cos x dx$

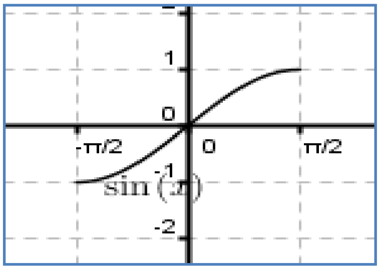
17. $\int_{-2}^{2} 4^{x/2}\, dx$

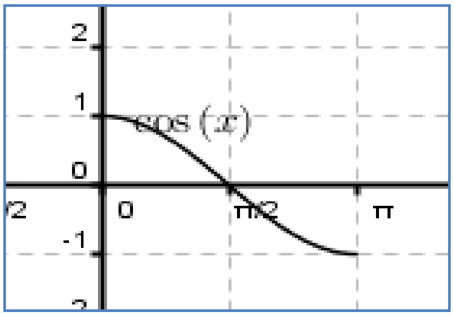
18. $\int_{1}^{e} (6^x - 2^x)dx$

4.5 Fungsi invers trigonometri dan turunannya

Tentu masih ingat tentang fungsi trigonometri. Trigonometri dengan bentuk dasar sinus dan cosinus memiliki beberapa identitas yang telah kita kaji pada perkuliahan kalkulus I. Demikian pula dengan turunan dan integralnya sudah kita kaji. Sebagai suatu fungsi, trigonometri menjadi menarik untuk dikaji lebih dalam. Pertanyaannya adalah apakah trigonometri juga memiliki invers? Sebelum mengkaji tentang ada tidaknya invers trigonometri ilustrasi grafik berikut akan membantu kita. Perhatikan grafik sinus dan cosinus berikut ini;







Bila kita potong pada interval tertentu, maka kita bisa dapatkan invers fungsi dari sinus dan cosinus. Sebagaimana definisi berikut ini;

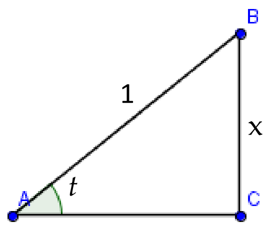
Definisi

$x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$

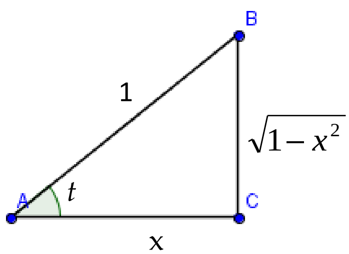
$x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$x = \sec^{-1} y \Leftrightarrow y = \sec x, 0 \leq x \leq \pi, x \neq \frac{\pi}{2}$



x = sin t, maka t = sin^{-1}x

$$\cos t = \cos\left(\sin^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2}$$



x = cos t, maka t = cos^{-1}x

$$\sin t = \sin\left(\cos^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2}$$

Ilustrasi di atas membantu kita untuk memahami teorema berikut ini;

Teorema

(i) $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$

(ii) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$

(iii) $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$

(iv) $\tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \\ -\sqrt{x^2-1} \end{cases}$

Contoh 1

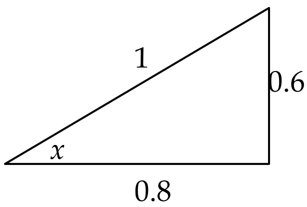
Diketahui nilai dari sin x = 0,6 tentukanlah

(a) $\cos(\sin^{-1}(0{,}6))$ (b) $\sin(\cos^{-1}(0{,}6))$

(c) $\mathrm{Sec}(\tan^{-1}(0.75))$ (d) $\tan(\sec^{-1}(1{,}75)$

Penyelesaian

Diketahui sin x = 0.6, maka x = $\sin^{-1}(0{,}6)$



(a) $\cos(\sin^{-1}(0{,}6))=\cos(\sin^{-1}(x))= \cos(x) = 0{,}8$

(b) $\mathrm{Sin}(\cos^{-1}(0{,}6)) = \sin(90-x) = \cos (x) = 0{,}8$

(c) $\mathrm{Sec}(\tan^{-1}(0{,}75))=\sec(x) = 1/0{,}8 = 1{,}5$

(d) $\mathrm{Tan}(\sec^{-1}(1{,}75))=\tan(x) = 0{,}75$

Turunan invers fungsi trigonometri

Invers trigonometri merupakan sebuah fungsi. Fungsi tentu memilliki turunan pada domain dari inversnya. Kita awali kajian turunan invers trigonometri dengan fungsi sin x.

Misalkan $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$

$$dx = \cos y dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Jadi, $D_x\left[\sin^{-1} x\right] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Misalkan $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$dx = -\sin y dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sin(\cos^{-1} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Jadi, $D_x\left[\cos^{-1} x\right] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Misalkan $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$dx = \sec^2 y dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Jadi, $D_x\left[\tan^{-1} x\right] = \dfrac{1}{1+x^2}$

Contoh 2 Tentukan turunan dari $\sin^{-1}\left(x^2 + x\right)$

Penyelesaian

Misalkan u = x^2 + x, maka du = (2x+1)dx

Jadi,

$$D_x\left[\sin^{-1}\left(x^2 + x\right)\right] = D_u\left[\sin^{-1} u\right]D_x u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\left(2x+1\right)$$

$$= \frac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}} = \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^4-2x^3-x^2}}$$

Contoh 3 Tentukan turunan dari $\cos\left(\sin^{-1}\left(x^2 + x\right)\right)$

Penyelesaian

Dengan menggunakan metode substitusi, misalkan $u = \sin^{-1}(x^2 + x)$ dan $v = x^2 + x$, sehingga kita dapatkan;

$$D_x(U) = D_v(U).D_x(V) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}.(2x+1))$$

$$D_x[\cos u] = D_u[\cos u]D_x u = -\sin(\sin^{-1}(x^2+x)).\frac{2x+1}{\sqrt{1-x^4-2x^3-x^2}}$$

$$= \frac{(x^2+x)2x+1}{\sqrt{1-x^4-2x^3-x^2}}$$

Tentu Kita sepakat bahwa rumus turunan akan berkaitan dengan rumus integralnya. Sedikit kita singgung pada bagian ini, karena akan secara khusus dikaji pada bab berikutnya.

Perhatikan rumusan integral berikut

Bentuk Dasar	Bentuk Umum
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + C$	$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1} x + C$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Contoh 4 carilah $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

Penyelesaian

Karena $4x^2 = (2x)^2$, maka $\int \frac{1}{\sqrt{9-(2x)^2}}dx$ selanjutnya misalkan u = 2x, dimana du = 2dx. Oleh karena itu

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-(2x)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{3^2-u^2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\sin^{-1} u + C = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

Soal latihan 4.5

Tentukanlah nilai dari

1. $\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$
2. $\cos\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$
3. $\operatorname{cosec}\left(\tan^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$
4. $\sec\left(\tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

Buktikan identitas berikut

5. $\operatorname{cosec}(x)=\sin^{-1}\frac{1}{x}$
6. $\tan(x)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

Tentukan turunan dari fungsi berikut

7. $f(x)=2\sin^{-1}(x+2)$
8. $f(t)=2\sin^{-1}(t^2)$
9. $f(x)=\tan^{-1}(e^{x+2})$
10. $g(x)=x^2\tan^{-1}(5x+2)$
11. $y=\ln(x^2-2)-2\sin^{-1}(x+2)$
12. $y=x\tan^{-1}2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$
13. $y=\tan^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}$

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva dan titik yang diberikan berikut;

14 $y=\tan^{-1}\frac{x}{2},(2,\frac{\pi}{4})$

15 $y=t\sec^{-1}4x,(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\pi}{4})$

Gunakan aturan implicit untuk menentukan persamaan garis singgung pada kurva dan titik yang diberikan;

16. $x^2+x\tan^{-1}y=y-1,(-\frac{\pi}{4},1)$
17. $\tan^{-1}xy=\sin^{-1}(x+y),(0,0)$
18. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(y)=\frac{\pi}{2},(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$
19. Buktikan bahwa $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), xy\neq 1$
20. Buktikan $\left(\sin^{-1}\right)^2x+\left(\cos^{-1}\right)^2y=1$

BAB V

TEKNIK PENGINTEGRALAN DAN BENTUK TAKTENTU

Pendahuluan

Pada awal kajian integral kita mengenal beberapa aturan dasar pengintegralan, seperti aturan pangkat, aturan sinus, cosinus, dan aturan pangkat yang diperumum. Akan tetapi, seringkali kita bisa langsung menggunakan teorema dasar tersebut. Integran yang berbeda tentunya memerlukan cara penyelesaian yang berbeda. Pada bagian ini, kita akan mencoba mengkaji beberapa teknik pengintegralan yang biasa kita gunakan.

Pada berbagai kasus, nilai fungsi untuk x mendekati ∞ atau $-\infty$, atau pada titik tertentu bernilai ∞. Demikian pula, pada batas integral atau fungsi integrannya. Bentuk-bentuk ini dikenal dengan bentuk taktentu atau takwajar.

Setelah mengkaji bagian ini, kita diharapkan trampil dalam menentukan teknik pengintegralan yang tepat untuk menyelesaikannya. Kita juga diharapkan mampu mengidentifikasi dan menentukan kekonvergenan atau kedivergenan dari sebuah bentuk taktentu. Kemampuan ini ditandai dengan ketercapaian indikator-indikator berikut;

Indikator

- trampil dalam menggunakan metode substitusi untuk menentukan hasil integrasi
- trampil dalam menentukan substitusi fungsi yang

- Trampil dalam menggunakan metode parsial untuk menentukan hasil integrasi
- Trampil dalam merasionalkan penyebut menjadi faktor-faktornya
- Trampil menentukan hasil integrasi fungsi rasional merasionalkan

- Trampil mengidentifikasi bentuk taktentu
- Menentukan nilai limit bentuk taktentu
- Menentukan hasil integral tak wajar dengan batas tak hingga
- Menentukan hasil integral tak wajar dengan integran tak-hinggamerasionalkan

5.1 Metode Substitusi dan Manipulasi Integran

Perhatikan tiga bentuk integral berikut;

(1) $\int \frac{2}{x^2+4}\,dx$ (2) $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$ (3) $\int \frac{2x^2}{x^2+4}\,dx$

Kalau kita coba selesaikan, maka

(1) Aturan invers tangent tampaknya bisa kita gunakan dengan memisalkan $u = x$ dan $a = 2$

$$\int \frac{2}{x^2+4}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx = 2\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

(2) Karena pembilang memuat turunan dari penyebut, maka misalkan $u = x^2 + 4$, maka $du = 2x\,dx$, sehingga

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln\left|x^2+4\right| + C$$

(3) Karena pembilang dan penyebut memiliki derajat yang sama, maka kita bisa memanipulasi dengan cara pembagian polinom, dimana

$$\frac{2x^2}{x^2+4} = 2 - \frac{8}{x^2+4}$$

Sehingga,

$$\int \frac{2x^2}{x^2+4}\,dx = \int\left(2 - \frac{8}{x^2+4}\right)dx = \int 2dx - \int \frac{8}{x^2+2^2}\,dx$$
$$= 2x - \frac{8}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$
$$2x - 4\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Metode (1) dan (2) dikenal dengan metode substitusi merupakan satu metode yang banyak digunakan dalam menyelesaikan pengintegralan. Metode ini didasarkan pada aturan rantai dalam turunan (ingat kembali kajian kalkulus I). Metode ini sebenarnya tidaklah terlalu sulit untuk dipahami. Metode ini berguna apabila integran memuat sebuah fungsi dan turunannya, atau kelipatan turunannya.

Secara umum, metode ini dinyatakan dengan;

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Tentunya sudah banyak kita gunakan pada bab-bab sebelumnya. Untuk lebih meningkatkan ketrampilan kita mari, kita perhatikan contoh-contoh berikut ini;

Contoh 1 tentukanlah hasil dari

(a) $\int \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{(x^3 - 2x)}} dx$

(b) $\int \sin^n x \cos x dx$

(c) $\int \cos(x^2 + 1) x dx$

(d) $\int (2x - 1) 3^{(x^2 - x)} dx$

Penyelesaian

(a) Identifikasi fungsi yang memiliki pangkat lebih tinggi, misalkan u = $x^3 - 2x$, u' = $3x^2 - 2$

Sehingga,

$$\int \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{(x^3 - 2x)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x^3 - 2x} + C$$

(b) Tentu kita masih ingat bahwa jika u = sinx, maka du = cosx dx

Sehingga,

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$
$$= \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$$

(c) Dengan mudah kita misalkan $u = x^2 + 1$, $du = 2x\ dx$, sehingga

$$\int \cos(x^2 + 1) x dx = \int \cos u \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin\left(x^2 + 1\right) + C$$

(d) Misalkan $u = x^2 - x$, maka $du = (2x - 1)dx$

$$\int (2x-1)3^{(x^2-x)}\, dx = \int 3^u\, du = 3^u \ln 3 + C$$
$$= 3^{x^2-x} \ln 3 + C$$

Metode untuk menyelesaikan (3) lebih dikenal dengan manipulasi integran. Ada kalanya kita tidak bisa menggunakan teorema dasar integral dan metode substitusi secara langsung. Bentuk seperti $\int \frac{3}{x^2 + 2x + 5} dx$ tidak bisa kita gunakan teorema dasar ataupun metode substitusi. Akan tetapi, dengan sedikit **manipulasi pada integrannya** kita bisa dapatkan hasil dengan mudah.

Mari kita perhatikan beberapa contoh berikut;

Contoh 2 tentukan $\int \frac{3}{x^2 + 2x + 5} dx$

Penyelesaian

$$\int \frac{3}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{3}{(x+1)^2 + 4} dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2 + 2^2} dx$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx$$

Dengan menggunakan invers trigonometri, maka kita dapatkan,

$$\int \frac{3}{x^2+2x+5}dx = \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

Contoh 3 Tentukan $\int \frac{x^2-x}{x+1}dx$

Penyelesaian

Dengan pembagian kita peroleh,

$$\frac{x^2-x}{x+1} = x-2+\frac{2}{x+1}$$

Sehingga,

$$\int \frac{x^2-x}{x+1}dx = \int (x-2)dx + \int \frac{2}{x+1}$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C$$

Bagaimana dengan contoh berikut

Contoh 4 carilah (a) $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}dx$ (b) $\int \frac{1}{1+e^t}dt$

Tampaknya metode-metode substitusi dan manipulasi kurang bekerja untuk menyelesaikannya. Bentuk ini, secara umum dinyatakan dalam bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$. Untuk menyelesaikannya, kita mesti merasional bentuk akarnya. Oleh karena itu, metode ini dikenal dengan nama **substitusi yang merasionalkan.**

Penyelesaian contoh 4 (a)

Misalkan $u = \sqrt{x}, u^2 = x$,
Dengan turunan implisit , kita dapatkan $2u.du = dx$

Sehingga,

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}dx = \int \frac{2u}{u^2-u}du = \int \frac{2}{u-1}du = 2\ln|u-1| + C$$

Penyelesaian contoh 4 (b)

Tampaknya persoalan ini tidak bisa menggunakan substitusi biasa dan juga invers trigonometri. Oleh karena itu, sedikit manipulasi diberikan pada penyebut dan pembilangnya.

Misalkan $u = 1 + e^t$, maka $du = e^t\, dt$, dan juga $1 = 1 + e^t - e^t$ sehingga;

$$\int \frac{1}{1+e^t}dt = \int \frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}dt = \int 1dt - \int \frac{e^t}{1+e^t}dt$$

$$= t - \int \frac{du}{u} = t - \ln\left|1+e^t\right| + C$$

Contoh 5 carilah $\int x\sqrt{x+2}dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = \sqrt{x+2}$, maka $u^2 = x+2$ dimana $2u.du = dx$

Sehingga

$$\int x\sqrt{x+2}dx = \int \left(u^2-2\right)u.2u.du = \int \left(2u^4-4u^2\right)du$$

$$= \frac{2u^5}{5} - \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{2(x+2)^2\sqrt{x+2}}{5} - \frac{4(x+2)\sqrt{x+2}}{3} + C$$

$$= (x+2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2(x+2)}{5} - \frac{4}{3}\right] + C = (x+2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2x}{5} - \frac{8}{15}\right) + C$$

Mari kita lanjutkan, bagaimana dengan integran yang memuat bentuk, $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$, dan $\sqrt{u^2+a^2}$. Untuk menyelesaikannya kita bisa gunakan substitusi trigonometri, seperti disajikan pada table berikut;

Integran	**Substitusi**
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\csc t$

Contoh-contoh berikut akan lebih memahami bagaimana substitusi ini bekerja.

Contoh 6 tentukanlah

(a) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ (d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx$

Penyelesaian

(a) Misalkan x = 2 sin$t$, maka dx = 2cos$t.dt$ sehingga

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4(1-\sin^2 t)}.2\cos tdt = \int 2\cos t.2\cos tdt = 4\int \cos^2 tdt$$

Dengan identitas trigonometri kita peroleh

$$= 4\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = 4\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]+C$$

Jadi,

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2t+\sin 2t + C = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

(b) Dengan cara yang sama kita peroleh,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{2\cos tdt}{2\cos t} = \int dt = t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

(c) Misallkan x = 2 tan$t$, maka dx = 2 sec^2t dt sehingga;

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{2\sec^2 tdt}{2\sec^2 t} = \int dt = t = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

(d) Silahkan Anda Coba sendiri

5.2 Metode Parsial

Pada subbab sebelumnya, integran hanya memuat fungsi berupa bentuk aljabar atau fungsi transenden. Lalu bagaimana jika integran memuat perkalian antara bentuk aljabar dan fungsi transenden, seperti

$$\int x\ln x dx, \int e^x \sin x dx, \int x^2 e^x dx$$

Sebuah teknik yang sangat berguna akan kita kaji pada bagian ini. Teknik ini dikenal dengan nama **Integral Parsial.**

Integral parsial didasarkan pada aturan perkalian dalam turunan yang telah kita kaji pada kalkulus I. Aturan ini menyatakan;

$$D_x[u.v] = D_x[u].v + u.D_x[v] \text{atau} [\text{uv}]' = vu' + v'u$$

Karena kedua fungsi terdeferensialkan, maka kita bisa mengintegralkan kedua ruasnya, maka diperoleh;

$$\int d(uv) = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx$$
$$uv = \int vdu + \int udv$$

Dengan menyusun ulang bagian terakhir kita kan peroleh teorema berikut:

Teorema Integral Parsial

Jika u dan v merupakan fungsi dari x yang kontinu dan terdeferensialkan, maka

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Bagian terpenting dalam integral parsial adalah menentukan komponen fungsi *u* dan *dv*. Karena keduanya sangat menentukan keberhasilan penggunaan integral parsial.

Contoh 1 tentukanlah $\int x\ln x dx$

Penyelesaian

Pertama coba perhatikan kemungkinan berikut;

$$\int \underbrace{x}_{u}.\underbrace{\ln x dx}_{dv} \qquad \int \underbrace{\ln x}_{u}.\underbrace{x dx}_{dv} \qquad \int \underbrace{x\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv},$$

Tentunya kita mesti mencari *dv* yang mudah kita integralkan untuk mendapatkan *v*-nya. Sehingga, kita pilih bentuk kedua, dimana

u = ln x sehingga $du = dx/x$ dan $dv = xdx$ sehingga $v = x^2/2$

Jadi,

$$\int x \ln x dx = \ln x\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Contoh 2 carilah $\int e^x \sin x dx$

Penyelesaian

Misalkan $dv = e^x\, dx$ maka $v = e^x$, dan

$u = \sin x$, maka $du = \cos x dx$, sehingga

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \text{ ......(1)}$$

Lakukan integrasi pada bentuk terakhir;

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

Substitusi hasil ini terhadap (1), akan didapat

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right)$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$$

sehingga

$$2\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}$$

5.3 Integral Trigonometri

Berbagai teknik sudah kita kaji. Tentunya akan semakin menarik dengan teknik integrasi yang khusus berkaitan dengan trigonometri. Mari kita perhatikan

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \int \sec^m x \tan^n x dx$$

Langkah awal kita mulai dengan mengintegralkan $\int \sin^4 x \cos x dx$ dan $\int \cos^4 x \sin x dx$.

Bila kita misalkan $u = \sin x$, maka $du = \cos x.dx$ sehingga

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Dengan cara yang sama, kita akan dapatkan

$$\int \cos^4 x \sin x dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

Untuk menyelesaikan bentuk seperti di awal bagian ini, kita memerlukan identitas trigonometri berikut;

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1 - \sin 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Perhatikan contoh berikut ini;

Contoh 1 carilah $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

Penyelesaian

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \cos^2 x dx$$

$$= \int \sin x \cos^2 x dx - \int \sin x \cos^4 x dx$$

$$= -\int \cos^2 x d(\cos x) + \int \cos^5 d(\cos x)$$

Dengan menggunakan substitusi, $u = \cos x$, dan du = - sin$x$ dx.

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} dx + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

Contoh 2 tentukan $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

Penyelesaian

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

Dengan menggunakan substitusi cos$x$ dx= d(sin$x$), kita peroleh;

Kedua contoh diatas memuat pangkat dari sin dan cos merupakan bilangan ganjil dan genap. Bagaimana kalau keduanya berpangkat genap? Contoh berikut akan membantu kita;

Contoh 3 tentukan hasil dari $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

Penyelesaian

Dengan menggunakan identitas,

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ dan $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, kita akan peroleh

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx \quad \text{n}$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C$$

Bisa kita simpulkan bahwa, bentuk $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Memiliki penyelesaian sebagai berikut;

Untuk m ganjil, maka $\sin^{2k+1}(x) = \sin^{2k}(x) \sin(x) = (1- \cos^2 x)^k \sin(x)$

Untuk n ganjil, maka $\cos^{2k+1}(x) = \cos^{2k}(x) \cos(x) = (1- \sin^2 x)^k \cos(x)$

Untuk m dan n genap, maka

$$\sin^{2k} x.\cos^{2i} x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^i$$

Bagaimana dengan bentuk trigonometri untuk

$$\int \sin(mx)\sin(nx)dx$$

$$\int \sin(mx)\cos(nx)dx$$

$$\int \cos(mx)\cos(nx)dx$$

Untuk menyelesaikan integral bentuk di atas, kita perlu identitas berikut;

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right]$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

Untuk lebih memahami, perhatikan contoh berikut;

Contoh 1
Tentukanlah

$$\int \sin 3x \sin x dx$$

Penyelesaian

$$\int \sin 3x \sin x dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos(3-1)x - \cos(3+1)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

Contoh 2 Carilah $\int \sin 5x \cos 3x dx$

Penyelesaian

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin(5-3)x + \sin(5+3)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x dx - \frac{1}{2}\int \sin 8x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

5.4 Metode Pemecahan Rasional

Beberapa teknik pengintegralan telah kita lakukan pada kajian diatas. Ketiga metode yang kita kaji tentu sangat bergantung pada fungsi dari integrannya. Bagaimana dengan fungsi yang integrannya berbentuk rasional? Sebagai contoh $\int \frac{3x+1}{x^2+3x+2} dx$. Integral ini tidak bisa kita selesaikan dengan substitusi karena tidak memuat fungsi f(g(x))g′(x). Metode parsial juga tampaknya akan mengalami kesulitan untuk menyelesaikan bentuk ini.

Salah satu cara yang bisa kita lakukan adalah dengan mengubah integrannya, seperti berikut;

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

Berdasarkan sifat bilangan pecahan, maka

$Ax + 2A + Bx + B = x + 1$ sehingga kita peroleh 2 persamaan

$(A + B)x = x$ atau $A + B = 2$…..(1)

$2A + B = 1$………………………(2)

Dengan menyelesaikan (1) dan (2), maka kita dapatkan A = - 1 dan B = 3. Jadi,

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{-1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

Sehingga,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx$$
$$= -\ln|x+1| + 3\ln|x+2| + C$$

Penyelesaian diatas kita namakan pemecahan pecahan menjadi faktor pecahan linier yang berbeda. Bagaimana kalau kita memiliki faktor pecahan linier yang berulang? Untuk itu, mari kita lihat contoh berikut;

Contoh 1

tentukan $\int \frac{x^2+x-3}{x^3+2x^2+x}\,dx$

Penyelesaian

Kita lihat $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$ sehingga,

$$\frac{x^2+x-3}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x^2+x-3=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

$$=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

Persamaan di atas akan menghasilkan A = -3, B = 4, dan C = 4

Jadi,

$$\int\frac{x^2+x-3}{x^3+2x^2+x}dx=\int\left(\frac{-3}{x}+\frac{4}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{-3}{x}dx+\int\frac{4}{x+1}dx+\int\frac{4}{(x+1)^2}dx$$

$$=-3\ln|x|+4\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}+C$$

Atau berdasarkan sifat ln kita bisa susun ulang menjadi;

$$\ln\left|\frac{(x+1)^4}{x^3}\right|-\frac{4}{x+1}+C$$

Bentuk lain dari pemfaktoran integran mungkin memiliki faktor pecahan yang berpangkat 2 (kuadrat). Contoh berikut akan sedikit memberikan gambaran akan hal ini;

Contoh 2 tentukan $\int\frac{x-3}{x^3+x^2+x+1}dx$

Penyelesaian

Pertama kita faktorkan bentuk integrannya

$$\frac{x-3}{x^3+x^2+x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + C = x - 3$$

$A + B = 0$, $B = 1$, $A + C = -3$, jadi $A = -1$, $C = -2$

$$\frac{x-3}{x^3+x^2+x+1}=\frac{-1}{x+1}+\frac{x-2}{x^2+1}$$

dengan demikian kita tulis ulang bentuk integralnya menjadi;

$$\int\frac{x-3}{x^3+x^2+x+1}dx=\int\left[\frac{-1}{x+1}+\frac{x-2}{x^2+1}\right]dx$$

$$= \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{x-2}{x^2+1}dx$$
$$= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

Bentuk pecahan yang lebih kompleks mungkin memiliki faktor berpangkat 2 yang berulang. Penyebut seperti $(x^2 + 1)^2$, $(x^2 + 2)^3$ mengindikasikan adanya pecahan yang memilliki faktor kuadrat berulang. Seperti halnya dalam faktor linier berulang, untuk menyelesaikannya kita bisa menggunakan cara yang serupa. Perhatikan contoh berikut;

Contoh 3 carilah $\int \frac{x^3+4x}{(x^2+1)^2}dx$

Penyelesaian

$$\frac{x^3+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Sehingga dapat kita susun persamaan berikut;

$$x^3 + 4x = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)$$
$$= Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Cx + D$$

Jadi, kita peroleh B = D = 0, A = 1, C = 3 hal ini mengakibatkan

$$\int \frac{x^3+4x}{(x^2+1)^2}dx = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{3x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{3}{2}(x^2+1)^{-1} + C$$

Soal Latihan

Gunakan metode substitusi untuk menyelesaikan soal-soal berikut

1. $\int \frac{2t+1}{t^2+t-4}dt$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})}dx$
3. $\int \frac{2}{(2t-1)^2+4}dt$
4. $\int \frac{-2x}{\sqrt{x^2-4}}dx$
5. $\int t\sin t^2 dt$

6. $\int \sec 5u \tan 5u.du$
7. $\int (\sin t) e^{\cos t} dt$
8. $\int \frac{e^{1/t}}{t^2} dt$
9. $\int \frac{1+\sin x}{\cos x} dx$
10. $\int \frac{\ln t^2}{t} dt$

Gunakan metode parsial untuk menyelesaikan soal-soal berikut

11. $\int (\ln x)^2 dx$
12. $\int x^2 \cos x dx$
13. $\int x^3 (\ln x) dx$
14. $\int (4x+7)e^x dx$
15. $\int x \cos 4x dx$
16. $\int e^{2x} \sin x dx$
17. $\int 4 \cos^{-1} x dx$
18. $\int e^{-x} \cos 2x dx$
19. $\int_1^2 \sqrt{x} \ln x dx$
20. $\int_0^1 \ln(4+x^2) dx$

Gunakan integral trigonometri untuk menyelesaikan soal-soal berikut;

21. $\int \cos^5 x \sin x dx$
22. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$
23. $\int \sin^3 x dx$
24. $\int \sin^7 2x \cos 2x dx$
25. $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}} dx$
26. $\int x^2 \sin^2 x dx$
27. $\int \cos 5x \cos 2x dx$
28. $\int \sin 4x \cos 2x dx$
29. $\int \sin 4x \cos 3x dx$
30. $\int \sin 2\theta \sin 4\theta . d\theta$

Gunakan teknik pemecahan pecahan parsial untuk menyelesaikan soal-soal berikut;

31. $\int \frac{1}{x^2-4} dx$
32. $\int \frac{2}{x^2+5x+4} dx$
33. $\int \frac{x+2}{x^2+11x+18} dx$
34. $\int \frac{5x^2-12x-12}{x^3-4x} dx$
35. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+4x} dx$
36. $\int \frac{4x^2}{x^3+x^2-x-1} dx$
37. $\int \frac{x^2-1}{x^3+x} dx$
38. $\int \frac{x^2}{x^4-4x^2-8} dx$
39. $\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2} dx$

40. $\int \frac{x}{16x^4 - 1} dx$

5.5 Bentuk Taktentu dan Aturan L'Hopital

Ingat kembali bentuk 0/0 dan ∞/∞. Bentuk ini muncul pada saat kajian tentang limit dalam kalkulus I. Bentuk ini dinamakan taktentu, karena tidak ada yang menjamin kepastian nilai dari limit tersebut. Pemfaktoran dan pembagian dengan penyebut merupakan salah satu teknik aljabar yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya.

Kita bisa memperluas teknik ini pada fungsi transenden, seperti berikut;

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$$

Hasil dari bentuk ini merupakan bentuk taktentu 0/0. Dengan sedikit manipulasi aljabar kita peroleh

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^2 - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0}(e^x + 1) = 2$$

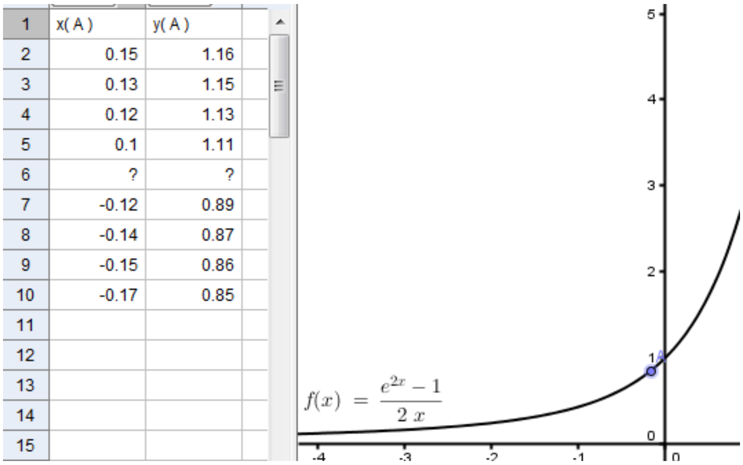
Lalu, bagaimana dengan bentuk

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}$$

Apakah teknik manipulasi aljabar dapat kita gunakan? Tentu saja kita sepakat bahwa teknik ini tidak dapat digunakan. Bila kita tulis ulang bentuk ini akan kita dapatkan;

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{2x}\right)$$

Akan muncul bentuk taktentu baru, yakni ∞ - ∞.
Grafik berikut bisa mengilustrasikan tentang nilai yang dituju oleh limit di atas,



1	x(A)	y(A)
2	0.15	1.16
3	0.13	1.15
4	0.12	1.13
5	0.1	1.11
6	?	?
7	-0.12	0.89
8	-0.14	0.87
9	-0.15	0.86
10	-0.17	0.85
11		
12		
13		
14		
15		

Bila kita lihat grafik maka sepertinya nilai limit tersebut akan menuju ke-1. Akan tetapi, nilai fungsi pada titik x = 0 tidak dapat dihitung (lihat table sebelah kirinya.

Untuk menentukan nilai limit bentuk di atas, aturan **L'Hopital** sangat membantu kita. Aturan ini menyatakan bahwa nilai limit dari $f(x)/g(x)$ akan ditentukan oleh nilai limit dari $f'(x)/g'(x)$. Aturan ini dinyatakan dalam teorema berikut;

Teorema L'Hopital

Misalkan f dan g adalah fungsi kontinu dan dapat diturunkan pada selang buka (a,b) yang memuat c, kecuali pada c. Asumsikan bahwa $g'(x) \neq 0$ untuk setiap x di (a,b) kecuali di c. Jika limit dari f(x)/g(x) untuk x mendekati c menghasilkan bentuk taktentu 0/0, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dijamin keberadaanya meskipun menghasilkan ∞. Dapat digunakan untuk bentuk taktentu lainnya seperti ∞/∞, -∞/∞, ∞/-∞, dan -∞/-∞.

Untuk lebih memahami mari kita kaji contoh-contoh berikut

Contoh 1 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}$

Penyelesaian

Kalau kita substitusikan maka akan menghasilkan 0/0 yang merupakan bentuk taktentu. Dengan menerapkan aturan L'Hopital kita peroleh

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{D_x\left[e^{2x} - 1\right]}{D_x\left[2x\right]} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Hasil ini tentunya akan sama seperti grafik dari fungsi tersebut.

Contoh 2 (bentuk ∞/∞)

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln x}$

Penyelesaian

Karena substitusi langsung menghasilkan ∞/∞, maka kita gunakan aturan L'Hopital sehingga

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

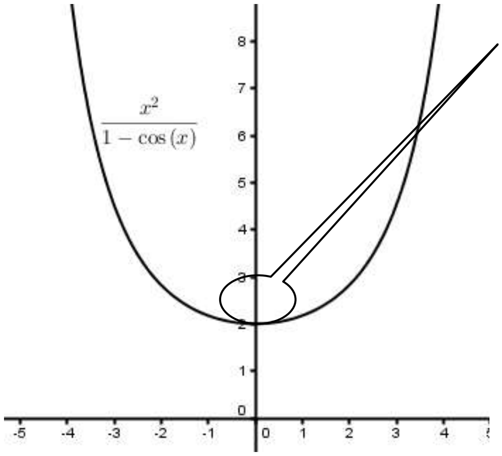
Terkadang kita melakukan aturan ini lebih dari satu kali. Contoh berikut salah satunya.

Contoh 3 carilah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

Penyelesaian

Dengan L'Hopital kita peroleh, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sin x}$, akan tetapi kalau kita substitusikan akan memberikan hasil 0/0. Untuk kasus ini, kita dapat menggunakan aturan tersebut kembali sehingga,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$



Jadi, $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = 2$

Untuk menyakinkan mari perhatikan grafik dari fungsi disamping.

Bentuk taktentu semakin menarik kita kaji. Tabel berikut akan memperlihatkan berbagai bentuk yang mungkin

Bentuk limit	Nilai limit	Kategori	Penyelesaian
$\lim_{x \to 0}(x^2 + x)$	$0 \pm 0 = 0$	Tentu	Substitusi langsung
$\lim_{x \to \infty}(x + e^x)$	$\infty + \infty = \infty$	Tentu	Substitusi langsung
$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$	0/0. ∞ / ∞	Taktentu	L'Hopital
$\lim_{x \to \infty}(x)\frac{1}{e^x}$	0. ∞	Taktentu	Susun ulang
$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	1^∞	Taktentu	Gunakan ln pada kedua ruas
$\lim_{x \to 0^+}(\sin x)^x$	0^0	Taktentu	Gunakan ln pada kedua ruas
$\lim_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$	∞-∞	Taktentu	Manipulasi aljabar

Untuk lebih memahami mari kita pelajari contoh-contoh berikut;

Contoh 4 (0.∞) Carilah $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$

Penyelesaian

Bila kita substitusikan, maka akan menghasilkan bentuk 0.∞. bentuk ini dapat kita susun ulang sehingga berbentuk 0/0 atau ∞/∞ yang selanjutnya kita gunakan aturan L'hopital.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}.e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Contoh 5 (1^∞) Carilah $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Penyelesaian

Bentuk taktentu berpangkat dapat kita, misalkan terlebih dulu dengan

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$

Karena ln fungsi kontinu, maka

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-1/x^2\right)/\left(1+1/x\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\left(1/x\right)} = 1$$

Jadi, kita peroleh ln y = 1, maka y = e. Kita simpulkan bahwa

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

Contoh 6 (0^0) Carilah $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$

Penyelesaian

Bentuk ini dapat kita dekati seperti pada contoh 5 di atas,

$$y = \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left[\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x\right]$$

Karena ln kontinu, maka persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk,

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+}\ln\left[(\sin x)^x\right] = \lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x)$$

Bila kita substitusikan kita akan peroleh bentuk 0.∞, sehingga bisa kita tulis ulang menjadi;

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x}$$

Bentuk terakhir masih menghasilkan 0/0, sehingga

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = \frac{0}{1} = 0$$

Jadi, ln y =0, y = 1

Contoh 7 (∞-∞)

Carilah $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

Penyelesaian

Kalau kita substitusikan akan menghasilkan bentuk ∞-∞, sehingga manipulasi aljabar diperlukan untuk menyelesaikannya

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)$$

Bentuk terakhir menjadi bentuk 0/0, sehingga kita bisa gunakan L'Hopital

$$\lim_{x\to 1^=}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^=} \frac{1-1/x}{\ln x + 1 - 1/x} = \lim_{x\to 1^=} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1}$$

Karena bentuk terakhir berbentuk 0/0, maka terapkan kembali L'Hopital, sehingga didapat;

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

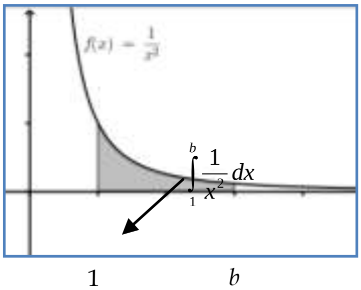
Jadi,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

5.6 Integral Takwajar

Tentunya kita ingat betul tentang definisi integral tentu yang didefinisikan dengan $\int_a^b f(x)dx$. Integrasi pada selang [a,b] akan menghasilkan nilai berhingga yang menurut Teorema Dasar Kalkulus disyaratkan f(x) kontinu. Lalu, bagaimana apabila pada selang [a,b] memuat titik dimana *f* tidak kontinu?

Kajian bagian ini berkaitan dengan perhitungan integral yang memuat titik takkontinu atau batas integral yang tidak terbatas. Sebagai kajian awal, mari kita lihat integrasi berikut;



$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b}+1 = 1-\frac{1}{b}$$

Lihat ilustrasi grafik disamping. Integral tersebut dapat dinyatakan sebagai luas daerah yang dibatasi oleh $f(x)$, $x = 1$, $x = b$ dan sumbu-x. Bagaimana untuk $b \to \infty$? tentu saja ini merupakan luas daerah takterbatas antara kurva $f(x)$ dan sumbu-x untuk $x > 1$. Bila kita hitung akan diperoleh;

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1$$

Mari kita lihat definisi integral tak wajar berikut;

Definisi

1. Jika *f* kontinu pada selang $[a,\infty)$, maka $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$
2. Jika *f* kontinu pada selang $[-\infty,b)$, maka $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)dx$
3. Jika *f* kontinu pada selang $[-\infty,\infty)$, maka

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

Kasus (1) dan (2), integral dikatakan **konvergen** apabila limitnya ada dan **divergen** apabila tidak ada limitnya. Kasus (3), integral dikatakan divergen apabila salah satu atau keduanya, pada bagian kanannya divergen.

Mari kita kaji contoh-contoh berikut;

Contoh 1 carilah $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx$

Penyelesaian

Karena batas atas adalah ∞, maka

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln 2x\right]_1^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln 2b - \ln 2)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln b) = \infty$$

Contoh 2 hitunglah integral berikut

(a) $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ (b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx$

Penyelesaian

(a) Bentuk ini juga memiliki batas atas ∞, sehingga

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_0^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-2b}+1\right]$$

$$= \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

(b) Dengan cara yang sama, kita dapatkan

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\left(\frac{b}{2}\right) - \tan^{-1}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Contoh 3 hitunglah $\int_1^\infty (1-x)e^{-x}dx$

Penyelesaian

Dengan menggunakan integral parsial, dimana dv = $e^{-x}dx$, dan u = (1-

$$\int (1-x)e^{-x}dx = -e^{-x}(1-x) - \int e^{-x}dx$$
$$= -e^{-x}(1-x) + e^{-x} + C$$
$$= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C$$
$$= xe^{-x} + C$$

Jadi,

$$\int_1^\infty (1-x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[xe^{-x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[be^{-b} - e^{-1}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e}\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{e^b}\right) - \frac{1}{e} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^b}\right) - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa,

$$\int_1^\infty (1-x)e^{-x}dx = \frac{-1}{e}$$

Contoh 4 hitunglah $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Penyelesaian

Sifat penambahan selang tampaknya berguna untuk menyelesaikan persoalan ini, dimana

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_{c}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$
$$= \lim_{b\to-\infty}\left[\tan^{-1} e^x\right]_b^c + \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} e^x\right]_c^b$$
$$= \lim_{b\to-\infty}\left[\tan^{-1} e^c - \tan^{-1} e^b\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} e^b - \tan^{-1} e^c\right]$$
$$= \tan^{-1} e^c - \tan^{-1} 0 + \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1} e^c$$
$$= -0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Kajian dan contoh-contoh di atas memberikan pemahaman bagi kita tentang integral takwajar pada batasnya. Lalu, bagaimana dengan fungsi yang bernilai takhingga pada selang tertentu, termasuk pada ujung selangnya? Misalkan *f* bernilai takhingga pada *b*, takhingga pada *a*, atau takhingga pada $c \in (a,b)$.
Definisi berikut akan menuntun kita untuk lebih memahami hal ini.

Definisi

1. Misalkan f kontinu pada selang (a,b), takkontinu pada b dengan nilai ∞, maka
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

2. Misalkan f kontinu pada selang (a,b), takkontinu pada a dengan nilai ∞, maka
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

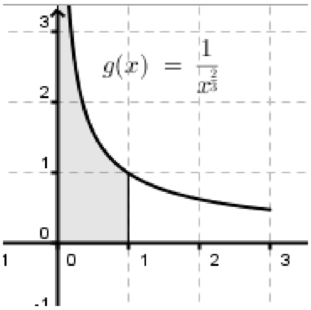
3. Misalkan f kontinu pada selang (a,b), kecuali pada titik c, f takkontinu dan bernilai ∞, maka
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Selanjutnya, mari kita gunakan definisi tersebut untuk menyelesaikan contoh-contoh berikut.

Contoh 1 hitunglah nilai dari $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Penyelesaian

Integran memiliki titik takkontinu takhingga pada batas bawahnya, sehingga kita bisa menghitungnya seperti berikut;

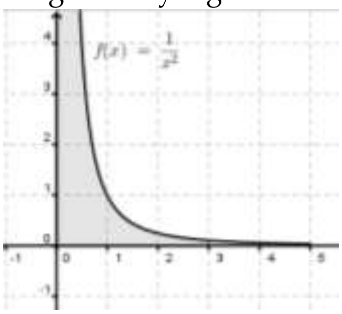


$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{b\to 0^+} \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_b^1$$
$$= \lim_{b\to 0^+} \left[3 - b^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$= 3$$

Contoh 2 hitunglah $\int_0^3 \frac{dx}{x^2}$

Penyelesaian

Integran memiliki titik takkontinu takhingga pada titik 0, sehingga dengancara yang sama kita dapatkan,



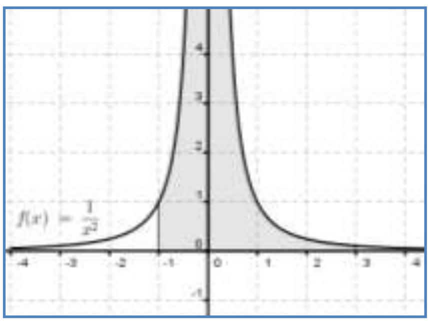
$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0^+} \int_b^3 x^{-2} dx = \lim_{b\to 0^+} \left[\frac{-1}{x}\right]_b^3$$
$$= \lim_{b\to 0^+} \left[\frac{-1}{3} + \frac{1}{b}\right]$$
$$= -\frac{1}{3} + \infty$$
$$= \infty$$

Anda dapat katakana bahwa integral di atas adalah divergen.

Contoh 3 carilah $\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2}$

Penyelesaian

Integran memiliki titik takkontinu dan takhingga pada 0 $\in$[-1,3]. Lebih



jelas perhatikan grafik berikut ini: oleh karena itu, untuk menyelesaikannya kita bagi menjadi dua bagian dengan penambahan selang, sehingga

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}\frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{3}\frac{dx}{x^2}\\ &= \lim_{b\to 0^-}\left[\int_{-1}^{b}\frac{dx}{x^2}\right]+\lim_{b\to 0^+}\left[\int_{b}^{3}\frac{dx}{x^2}\right]\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}\frac{dx}{x^2} &= \lim_{b\to 0^-}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{b}+\lim_{b\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{b}^{3}\\ &= \lim_{b\to 0^-}\left(-\frac{1}{b}-1\right)+\lim_{b\to 0^+}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{b}\right)\\ &= \infty+\infty\end{aligned}$$

Hasil tersebut menunjukkan bahwa integral yang dicari adalah divergen.

Contoh 4 hitunglah $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}+\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\\ &= \lim_{b\to 0^+}\left[2\tan^{-1}\sqrt{x}\right]_{b}^{1}+\lim_{b\to\infty}\left[2\tan^{-1}\sqrt{x}\right]_{1}^{b}\\ &= 2\left(\frac{\pi}{4}\right)-0+2\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \pi\end{aligned}$$

Soal Latihan

Gunakan teknik penghitungan limit biasa dan aturan L'Hopital untuk menentukan hasil limit berikut, apa yang dapat disimpulkan

1. $\lim_{x\to 4}\frac{3(x-4)}{x^2-16}$
2. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-6}{x+2}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x}$
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2-5}$

Hitunglah nilai limit berikut, bila perlu gunakan aturan L'Hopital

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{25-x^2}-5}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-(1-x)}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2}{x^2-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{11}-1}{x^4-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a-1}{x^b-1}, a,b\neq 0$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}, a,b\neq 0$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+3x-1}{4x^2+5}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{4x^2+x+5}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^{x/2}}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^{x^2}}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^4}{x^3}$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sin \pi x}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_1^x \ln(e^{4t-1})dt}{x}$

20. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\int_1^x \cos\theta d\theta}{x-1}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\sin(\frac{1}{x}) \right)$

22. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^x+x\right)^{2/x}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{1/x}$

26. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{3}{\ln x} - \dfrac{2}{x-1} \right)$

27. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4} \right)$

28. Selidikilah apakah $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ dapat diselesaikan dengan aturan L'Hopital?jelaskan
29. Selidikilah apakah $\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\tan x}{\sec x}$ dapat diselesaikan dengan aturan L'Hopital?jelaskan
30. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ untuk sembarang n > 0.

Selidikilah apakah integral berikut divergen atau konvergen, jika konvergen tentukanlah nilainya

31 $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{3/2}}dx$

32 $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

33 $\int_1^\infty \frac{4}{x^5}dx$

34 $\int_1^\infty \frac{4}{\sqrt[3]{x}}dx$

35 $\int_{-\infty}^0 e^{3x}dx$

36 $\int_0^\infty e^{-4x}dx$

37 $\int_{-\infty}^\infty e^{-4x}dx$

38 $\int_{-\infty}^0 xe^{-4x}dx$

39 $\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$

40 $\int_0^\infty e^{-x}\cos x dx$

41 $\int_4^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}dx$

42 $\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^x}dx$

43. Tentukan semua nilai p agar integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ dan $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ konvergen?
44. Buktikan bahwa $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ untuk sembarang bilangan positif n.
45. Misalkan $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ konvergen dan misalkan a dan b bilangan real, dimana $a \neq b$. Tunjukkan bahwa

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$