МЕТОД И ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАРКОВСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ УКРУПНЕННЫМИ ЦЕПЯМИ МАРКОВА

Б.Ф. Эминов, В.М. Захаров, М.А. Хуссейн

Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева, Казань, Россия

Предложен метод вычисления предельного распределения марковских функций из класса укрупненных цепей Маркова, уменьшающий вычислительную сложность по сравнению с известным методом. Дана сравнительная оценка вычислительной сложности.

Ключевые слова: марковские функции, укрупнение цепи Маркова, метод вычисления предельного вектора, оценка сложности.

Введение

Укрупнение случайного процесса в общем виде рассматривается как замена стохастического процесса с большим числом состояний на процесс с укрупненными состояниями [1-3]. К числу востребованных в различных приложениях укрупненных стохастических процессов относятся функции цепей Маркова [1,2] с конечным числом состояний (марковские функции). Общий подход к построению данных функций ЦМ (ФЦМ) состоит в следующем: множество состояний исходной цепи Маркова (ЦМ) разбивается на непересекающиеся классы, и исследуется поведение ЦМ при условии, что состояния, принадлежащие одному классу, не различаются [1, 2].

В ФЦМ связь состояний во времени, в общем случае, нельзя представить в виде простой ЦМ [1, 2]. В другом случае, ФЦМ позволит изучать укрупненный процесс методами ЦМ.

Задаче укрупнения ЦМ и ее приложению, начиная с [2], посвящено большое число работ, в частности значительный список подобных работ представлен в статьях [4-7]. В работе [2]: определены свойства регулярной стохастической матрицы (РСМ), наличие которых при заданном разбиении множества состояний на непересекающиеся классы интерпретируется как возможность укрупнения ЦМ; функции ЦМ, обладающие марковским свойством, названы укрупненными ЦМ; дано аналитическое представление укрупненной ЦМ на основе РСМ исходной ЦМ.

Задачи, связанные с укрупнением цепей актуальны и по сегодняшний день. В области укрупнения цепей можно выделить следующие направления исследований: 1) алгоритмы укрупнения цепей и задачи снижения вычислительной сложности данных алгоритмов с сохранением марковского свойства цепей [2, 4, 8-10]; 2) вычисление вероятностных характеристик укрупненной цепи [5-7]: предельного вектора, матрицы времен попадания и времени блуждания до попадания в поглощающее состояние; 3) укрупнение с сохранением свойств исходной стохастической матрицы цепи [2, 4] (например, регулярности [2], энтропии [4]); 4) расширение приложений задачи укрупнения [11-15].

Целью работы является представление метода вычисления асимптотической характеристики ФЦМ, из класса укрупненных цепей Маркова, уменьшающего вычислительную сложность.

1. Постановка задачи

Пусть задана регулярная конечная ЦМ [2] системой

$$(S, P, \overline{\pi_0}), \qquad (1)$$

где S = {si} – конечное множество состояний ЦМ, |S| = n, P = (pij), $i, j = \overline{0, n-1}$ - регулярная СМ ЦМ размера n×n, pij - переходные вероятности ЦМ, $\overline{\pi_0}$ - вектор начального распределения вероятностей состояний ЦМ.

Выполним разбиение исходного множества состояний S ЦМ (1) на t непересекающихся подмножеств (на классы) вида A = {A0, A1, …, At-1}, где

$$\bigcup_{j=0}^{t-1} A_j = S, \quad A_j \cap A_d = 0, \text{ где}$$

$$\forall j, \forall d = \overline{0, t-1} \text{ и } j \neq d. \qquad (2)$$

Пусть каждое из подмножеств Aj , $j = \overline{0, t-1}$, будет новым состоянием укрупненной ЦМ (по терминологии [2]), а стохастический закон укрупненной ЦМ будет задаваться стохастической матрицей $\hat{P} = (\hat{p}_{dj})$ размера t×t, $d, j = \overline{0, t-1}$.

Пусть вероятность попасть из состояния sk в множество Aj за один шаг исходной ЦМ (1) задается как

$$p_{kA_j} = \sum_{s_i \in A_j} p_{ki}, \quad i, k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, t-1}. \qquad (3)$$

<u>Теорема 1</u> [2]. Для того чтобы состояния ЦМ можно было укрупнить посредством разбиения на классы $A = \{A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух классов A_d и A_j и для $\forall s_k \in A_d$, $k = \overline{0, n-1}$, $d, j = \overline{0, t-1}$, вероятности p_{kA_j} имели одно и то же значение. Вероятности { $\hat{p}_{dj}$ } переходов между классами образуют СМ $\hat{P}$ укрупненной ЦМ.

<u>Определение 1</u>. Цепь Маркова с регулярной стохастической матрицей *P*, удовлетворяющая условию теоремы 1, будем называть *укрупняемой*.

<u>Определение 2</u>. Цепь Маркова со стохастической матрицей $\hat{P}$, полученную укрупнением цепи Маркова (1) по разбиению (2), будем называть *укрупненной*.

Введем матрицы V и U в соответствии с [2]. Пусть матрица V = (vij), $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, t-1}$ –

булева матрица размера n×t, единичное значение элемента vij которого определяет, что состояние si исходной ЦМ входит в укрупненное состояние Aj: $v_{ij} = \begin{cases} 1, s_i \in A_j \\ 0, s_i \notin A_j \end{cases}$.

Зададим матрицу U = (uji), $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, t-1}$, размера t×n, j-ая строка (стохастический вектор, $\sum_{i=0}^{n-1} u_{ji} = 1$) которой отражает информацию о классе Aj :

- элемент uji > 0 показывает, что укрупненное состояние Aj содержит состояние si из исходной цепи, и равен $u_{ji} = {1}\Big/{\sum_{i=0}^{n-1} v_{ij}}, s_i \in A$, иначе нулю.

Тогда стохастическая матрица $\hat{P}$ укрупненной ЦМ задается формулой [2]

$$\hat{P} = UPV \,. \tag{4}$$

Справедливо равенство [2]

$$\hat{P}^k = UP^k V \,, \tag{5}$$

где k – натуральное число.

Обозначим:

- $\overline{\pi_{np}} = (\pi_0^{np}, \pi_1^{np}, ..., \pi_{n-1}^{np})$ - стохастический предельный вектор СМ P;
- $\overline{\hat{\pi}_{np}} = (\hat{\pi}_0^{np}, \hat{\pi}_1^{np}, ..., \hat{\pi}_{t-1}^{np})$ - стохастический предельный вектор СМ $\hat{P}$;
- $\overline{\pi_{np}^{(y)}} = (\pi_0^{np(y)}, \pi_1^{np(y)}, ..., \pi_{t-1}^{np(y)})$ - укрупненный стохастический предельный вектор, полученный на основе разбиения (2), примененного к вектору $\overline{\pi_{np}}$.

Замечание 1. Стохастический вектор $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$ можно вычислить по формуле

$$\overline{\pi_{np}^{(y)}} = \overline{\pi_{np}} \cdot V \,. \tag{6}$$

Утверждение 1. Если исходная регулярная ЦМ укрупняема по разбиению (2) и матрицы *U* и *V* определены как выше, то результатом ее укрупнения также будет регулярная ЦМ.

Доказательство. У регулярной ЦМ существует предельная матрица Рпр. Тогда очевидно, что заданная стохастической матрицей Рпр ЦМ при любом разбиении (2) является укрупняемой. Тогда из соотношения (4) следует справедливость формулы $\hat{P}_{np} = UP_{np}V$, где $\hat{P}_{np}$ - СМ укрупненной ЦМ, полученной на основе ЦМ с СМ Рпр.

Из равенства (5) следует, что $\hat{P}^k_{np} = UP^k_{np}V$. Т.к. матрица Рпр - предельная, то Рпр = P^k_{np}. Соответственно при неизменности Рпр, U, V, значение $\hat{P}^k_{np}$ будет равно $\hat{P}_{np}$. Т.е. $\hat{P}_{np}$ не изменяется и является предельной. Тогда согласно теореме 4.1.2 из работы [2, стр. 93] полученная укрупненная ЦМ со стохастической матрицей $\hat{P}$ является регулярной. Утверждение доказано.

Утверждение 1 устанавливает, что у ЦМ, полученной укрупнением регулярной ЦМ, существуют предельный вектор $\overline{\hat{\pi}_{np}} = (\hat{\pi}_0^{np}, \hat{\pi}_1^{np}, ..., \hat{\pi}_{t\text{-}1}^{np})$ и предельная матрица $\hat{P}_{np}$.

Далее решим следующие две задачи:

1. докажем справедливость равенства $\overline{\hat{\pi}_{np}} = \overline{\pi^{(y)}_{np}}$;

2. оценим сложность вычисления вектора $\overline{\hat{\pi}_{np}}$ в зависимости от параметров n и t.

2. Решения задач

Теорема 2. Если: 1) матрица P_s при заданном разбиении (2) удовлетворяет условию укрупнения в соответствии с теоремой 1; 2) укрупненная матрица $\hat{P}$ построена по матрице P_s и разбиению (2) то

$$\overline{\hat{\pi}_{np}} = \overline{\pi^{(y)}_{np}} \qquad (7)$$

Доказательство. С учетом замечания 1 заменим $\overline{\pi^{(y)}_{np}}$ в доказываемом равенстве на правую часть формулы (6): получим $\overline{\hat{\pi}_{np}} = \overline{\pi_{np}} \cdot V$. Докажем верность этого равенства. Матрицу $\hat{P}_{np}$ можно вычислить через предел от $\hat{P}$: $\hat{P}_{np} = \lim_{k\to\infty} \hat{P}^k$. По формуле (5) распишем $\hat{P}^k$: $\hat{P}_{np} = \lim_{k\to\infty} \hat{P}^k = \lim_{k\to\infty} UP^kV = U \lim_{k\to\infty} P^kV$. Т.к. $P_{np} = \lim_{k\to\infty} P^k$, то $\hat{P}_{np} = UP_{np}V$.

Матрицу $\hat{P}_{np}$ можно представить как произведение $\hat{P}_{np} = \xi_{t\times1} \times \overline{\hat{\pi}_{np}}$, где $\xi_{t\times1}$ - единичный вектор-столбец из t элементов. Матрицу P_{np} можно представить как произведение $P_{np} = \xi_{n\times1} \times \overline{\pi_{np}}$, где $\xi_{n\times1}$ - единичный вектор-столбец из n элементов. Тогда равенство $\hat{P}_{np} = UP_{np}V$ можно расписать как $\xi_{t\times1} \times \overline{\hat{\pi}_{np}} = U \times \xi_{n\times1}\overline{\pi_{np}} \times V$.

Результатом умножения $U \times \xi_{n\times1}$ будет единичный вектор-столбец $\xi_{t\times1}$ из t элементов. С учетом вышесказанного основное равенство можно записать как $\xi_{t\times1} \times \overline{\hat{\pi}_{np}} = \xi_{t\times1}\overline{\pi_{np}} \times V$. Сократив в обеих частях равенства вектор $\xi_{t\times1}$, получим $\overline{\hat{\pi}_{np}} = \overline{\pi_{np}} \times V$. Теорема доказана.

На основе теоремы 2, обосновывающей альтернативную формулу (7), предложим следующий метод вычисления вектора $\overline{\pi^{(y)}_{np}}$.

Пусть задана укрупняемая стохастическая матрица P исходной регулярной ЦМ (1) по заданному разбиению (2).

Шаг 1. Вычисляем по матрице P и разбиению (2) алгоритмом [8], матрицу $\hat{P}$ укрупненной ЦМ.

Шаг 2. Вычисляем по матрице $\hat{P}$ на основе системы линейных уравнений ее предельный вектор $\overline{\hat{\pi}_{np}}$, удовлетворяющий равенству (7).

Оценим сложность вычисления вектора $\overline{\hat{\pi}_{np}}$.

1) вычисление матрицы $\hat{P}$ укрупненной ЦМ - алгоритм укрупнения ЦМ - O(8n2) [8];

2) вычисление стохастического предельного вектора $\overline{\hat{\pi}_{np}}$ матрицы $\hat{P}$ - методом Крамера [16] - O(t3), где t - длина вектора $\overline{\hat{\pi}_{np}}$.

Т.е. сложность равна

$$O(8n2 + t3). \tag{8}$$

Теперь оценим вычислительную сложность укрупненного предельного вектора $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$, полученного на основе разбиения (2), примененного к вектору $\overline{\pi_{np}}$:

- для нахождения $\overline{\pi_{np}}$ решение системы (13) из n линейных уравнений методом Крамера [16] - O(n3) [16];

- применение разбиения (2) к вектору $\overline{\pi_{np}}$ - (n−t) сложений.

Т.е. сложность равна

$$O(n3). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что при $n > 8$ с уменьшением величины t сложность вычисления предельного вектора $\overline{\hat{\pi}_{np}}$ становится меньше, чем у вектора $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$.

Заключение

Предложен метод вычисления предельного распределения марковских функций из класса укрупненных цепей Маркова, уменьшающий вычислительную сложность по сравнению с известным методом. Представлены сравнительные оценки вычислительной сложности. Показаны соотношения между величинами n и t, при которых предлагаемые схемы вычисления предельных характеристик имеют меньшую вычислительную сложность.

Литература

1. Романовский В.Дискретные цепи Маркова.М.:Гостехиздат, 1949.436 с.
2. Kemeny J., Snell L. Finite Markov chains. Princeton: Van Nostrand Company. 1960. 210 pp. Кемени Д., Снелл Д. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. 272 с.
3. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1976. 184 с.
4. Geiger B., Temmel C. Lumpings of Markov chains, entropy rate preservation, and higher-order lumpability // Advances in Applied Probability, 51(4), 2014. pp. 1114-1132.
5. Gambin, A., Pokarowski, P. A new combinatorial algorithm for large Markov chains. Proc. Computer Algebra in Scientific Computing, CASC'01, Springer, Berlin 2001, pp. 195-212. http://bioputer.mimuw.edu.pl /papers /aggr.pdf
6. Bolch G., Greiner S. Queuing Networks and Markov Chains Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Application. Wiley. 2006. 896 p.
7. Katehakis M., Smit L. A Successive Lumping Procedure for a Class of Markov Chains // Probability in the Engineering and Informational Sciences 26 (4), 2012. pp 483-508.
8. Захаров В.М., Эминов Б.Ф. Алгоритмы укрупнения цепей Маркова // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, №2 (выпуск 1), 2013. С.125-133.
9. Derisavi, S., Hermanns, H., Sanders, W. H.: Optimal State-Space Lumping in Markov Chains. Information Processing Letters 87 (6), 2003. pp.309–315.
10. Hillston J. Compositional Markovian modelling using a process algebra // Computations with Markov Chains, 1995, pp. 177-196.
11. Деундяк В.М., Жданова М.А. Полиномиальное представление скрытой полумарковской модели фергнесовского типа // Вестник ВГУ: системный анализ и информационные технологии, 2013, №2. С. 71-78.
12. Погорелов Б.А., Пудовкина М.А. Об обобщениях марковского подхода при изучении алгоритмов блочного шифрования // Прикладная дискретная математика. Приложение. Сентябрь 2014. № 7, 2014. С. 51-52.
13. Пономаренко Л.А., Меликов А.З., Нагиев Ф.Н. Анализ системы обслуживания с различными уровнями пространственных и временных приоритетов // Информационно-управляющие комплексы и системы, № 2(18), 2006. С. 80-89.
14. Рожков М.И. Суммирование марковских последовательностей на конечной абелевой группе//Дискретная математика, №3, т.22, 2010. С.44-62.
15. Максимов Ю.И. Некоторые результаты для задачи укрупнения состояний цепей Маркова // Труды по дискретной математике, №8. М.: Физматлит, 2004. С. 148-154.
16. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с.