

走性に関する生物行動の数理モデルとその解析

著者	上道 賢太
学位名	博士（理学）
学位授与機関	関西学院大学
学位授与番号	34504甲第717号
URL	http://hdl.handle.net/10236/00029094

走性に関する生物行動の数理モデルとその解析

上道 賢太

2020年3月

目次

第1章 序論	4
第2章 基本事項	8
2.1 基本的な表記	8
2.2 Routh-Hurwitz の判定基準	8
2.3 1階微分方程式系の局所的安定性	9
2.4 Hopf 分岐と周期解	11
2.5 定常解の追跡	12
2.5.1 ニュートン法 (Newton method)	13
2.5.2 ニュートン法のアルゴリズム	14
2.5.3 擬似弧長法 (Pseudo-arclength continuation method)	15
2.5.4 擬似弧長法のアルゴリズム	17
2.6 分岐点の検出	19
2.6.1 単純特異点	19
2.6.2 分岐候補点 (potential bifurcation point)	19
2.6.3 ブランチの切り替え (branch switching)	20
2.6.4 Hopf 分岐点の検出	21
2.7 反応拡散系に対する大域的分岐構造の数値解法	22
2.7.1 差分方程式	22
第3章 大腸菌の分布形成の数理モデルとその分岐解析	23
3.1 モデル方程式	23
3.2 線形化解析	23
3.3 大域的分岐構造	27

第4章	シロアリの蟻塚形成の数理モデルとその解析	44
4.1	準備	49
4.2	時間局所解	52
4.3	アприオリ評価と時間大域解	56
4.4	グローバルアトラクターと空間一様解に対するリャプノフ関数	68
4.5	空間一様解の安定性	74
4.6	補題とその証明	77
第5章	ミツバチの営巣初期段階の数理モデルとその解析	80
5.1	はじめに	80
5.2	手法	83
5.2.1	概要	83
5.2.2	時間単位	83
5.2.3	供給エージェント	84
	供給エージェントと蜜蟻の成長	84
5.2.4	掘削エージェント	85
	掘削エージェントの形状と大きさ	87
	掘削エージェントの運動	91
5.2.5	掘削領域 (EZ)	92
	掘削領域 (EZ) のダイナミクス	92
5.2.6	シミュレーション結果	94
	パラメータ設定	94
	蜜蟻の等方的成長モデル	96
	蜜蟻の異方的成長モデル	97
5.3	考察	99
5.4	結論	100
第6章	総括	102
	謝辞	105

第1章 序論

自然界には私たちが目を見張るような様々なパターンが存在する。多くの研究者が、これらのパターンがどのような数理的法則あるいはルールに従って生み出されるのかという問題に関心を持っている。これまでの研究成果の代表的なものの一つにシマウマやキリン、ヒョウなどに見られる表皮模様が発生するメカニズムについて考え出された理論がある。これは、チューリング・パターンと呼ばれ活性因子 u と抑制因子 v による反応拡散系:

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + f(u, v), \\ v_t = D_v \Delta v + g(u, v) \end{cases}$$

において拡散係数 D_u, D_v がある条件を満たすときに動物の模様にそっくりな縞模が発生することが知られている。実際、この系において拡散速度に差がない場合、解は空間一様解に落ち着くが、抑制因子の拡散速度が活性因子より十分速い ($D_u \ll D_v$) と様々な波数の解が発生する。このような拡散速度の差によって生まれる空間一様解の不安定化のメカニズムはチューリング不安定性 (拡散誘導不安定性) と呼ばれる。

一方、チューリング・パターンとは異なるメカニズムを持つパターン形成も存在する。その一つに、皿に入ったゲルの中で育てられた大腸菌のコロニーに現れる模様がある。このパターン形成は、栄養分の不足といった環境条件による集団的な反応で、大腸菌自身が出す化学物質に対する走性 (走化性) によって生み出される。このような走性を含むメカニズムに対してもモデルが提案されている。このモデルは三村・辻川系 [6] と呼ばれ、走化性大腸菌の個体密度 u と大腸菌が分泌

する化学物質の濃度 v の時空的变化を記述しており,

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - b\nabla \cdot (u\nabla v) + cu(1 - u), \\ v_t = d\Delta v + fu - gv. \end{cases}$$

と表される. ここで, 第 1 式右辺第 2 項 $-b\nabla \cdot (u\nabla v)$ は大腸菌が化学物質の濃度勾配 ∇v の高い方向に引き寄せられる走化性 (chemotaxis) の作用を表している. この項が含まれていることによって, 拡散速度の差ではなく走化性の強度によって不安定化が起こる. 第 3 項は, 大腸菌の増殖と死滅を表す項で, 2 次のロジスティック型となっている. この三村・辻川系においては解が時間大域的に存在することが理論的に示されており, 数値シミュレーションによって様々なパターンが発生することも確認されている.

また, 異なる走化性モデルとしてシロアリが蟻塚を構築する初期段階をモデル化した Deneubourg モデルがある. このモデルは反応移流拡散方程式, 反応拡散方程式, 常微分方程式の 3 つの連立系として以下のように記述される.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla \cdot (u\nabla w) + 1 - \mu u, \\ \delta w_t = \Delta w - w + v, \\ \tau v_t = -v + u. \end{cases}$$

ここで, u , v はそれぞれシロアリの密度および巣の建築材の密度で, w は建築材から放たれる化学物質の濃度を表している. 第 1 式右辺第 1 項はシロアリが領域内をランダムに動き回る拡散, 第 2 項は化学物質に対する走化性, 第 3 項はシロアリの増殖と死滅を表している. 第 2 式については, 第 1 項が化学物質の拡散, 第 2 項が堆積物が化学物質を放出する作用, 第 3 項が化学物質の自然崩壊を表している. 第 3 式については, 第 1 項が社会性昆虫による堆積物質の運搬, 第 2 項が堆積物の風化を表している.

シロアリ以外にも走化性を有する昆虫は多数存在し, その中でもミツバチはハニカム構造と呼ばれる極めて美しいパターンを形成する. セイヨウミツバチとしても知られる *Apis mellifera* の巣は, 自らロウ腺から分泌したミツロウで作られており正六角形をなす面が表裏はり合わさった板型の構造をしている. これが複数枚平行に並んだものがミツバチの巣であり, このような巣構造の複雑さがどのよ

うにして生み出されるのかは未だに未解決の問題である。

本研究では上述したような走化性に関する生物行動の数理モデルについて考察しその解析を行った。以下で本論文の概要を説明する。第3章では走化性菌類・大腸菌の分布形成の数理モデルとその解析について記述する。前述した三村・辻川系においては解が時間大域的に存在することが理論的に示されており、発生する様々なパターンも数値シミュレーションによって示されている。空間1次元については、Hopf分岐が発生し周期解が存在することが倉田ら [4] によって示されており、カオティックな振る舞いをする解が存在することも Painter-Hillen [8] によって示されている。この章では、倉田ら [4] の研究を受け、空間1次元に現れる解とその分岐構造についての追跡研究の結果を示す。さらに、[4] では示されていない周期解の安定性についても記述する。それらの追跡には分岐解析ソフトウェア AUTO [2] を用いた。AUTO が行なっている定常解の追跡法、分岐点の検出、分岐枝の切り替えなどについても述べる。第4章では走化性昆虫・シロアリの蟻塚形成の数理モデルとその解析について記述する。解の時間局所的存在と時間大域的存在を初期値のある種の小ささの下に示す。さらに、線形化解析を用いて空間一様解が不安定化する条件を調べ、走化性係数が十分小さい時には、解空間全域的に解が指数収束することをリャプノフ関数を構成することによって示す。第5章では走化性昆虫・ミツバチの造巣過程の観察とエージェントモデルの解析について記述する。ミツバチは巣を造る際に、自らの腹部にあるロウ腺から分泌されるミツロウを用いて、コームと呼ばれる半円板状の巣板を造る。前述したようにコームの両面には正六角形の巣穴が整然と並んでいる。コームは上部で天井や壁に接着しており、その接着部分より下方にセルが形成される。したがって、造巣過程のメカニズムを知るためにはこの接着部分がどのように造られるのかということが重要であると考えられる。本研究では、実際にミツバチを飼育し、営巣過程を観察した結果、営巣の初期段階のメカニズムが自己組織化の観点から理解できるという考えを、供給掘削モデルと名づけたエージェントベースモデルで説明する。

本論文では、章が進むごとに生物のスケールは大きくなる。一方、対象となるパターン自体は、生物のスケールから見ると小さくなっていく。生物のスケールが大きくなっても対象パターンが大きければ、生物を連続量と見ることができ、連

続モデル，すなわち反応拡散系でモデル化が可能となるが，ミツバチの営巣初期のパターンは，反応拡散系でのモデル化が難しい．そこで本研究ではエージェントを用いた離散的なモデルを提案した．

第2章 基本事項

2.1 基本的な表記

本論文において使用するいくつかの表記についてまとめておく．非線形連立方程式

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = (G_1, G_2, G_3, \dots, G_n) = \mathbf{0}$$

の解を,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

とする．ここで, λ は, フリーパラメータを表す．また,

$$\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \lambda)$$

として,

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

と書くこともある．さらに, 1階導関数は, $\mathbf{G}_{\mathbf{w}}$ とする．

2.2 Routh-Hurwitz の判定基準

Routh-Hurwitz の判定基準は, 固有方程式のすべての根が, 負であるかまたは負の実部をもつための必要十分条件を与える．

Theorem 1. 係数 $a_i (i = 1, \dots, n)$ が実定数である次の固有多項式

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

に対して，固有多項式の係数 a_i を用いて作られる n 個の Hurwitz 行列を定義する：

$$\begin{aligned}
 H_1 &= (a_1), \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \\
 H_3 &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \\
 &\vdots \\
 H_n &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ただし $j > n$ のとき $a_j = 0$ とする．このとき，固有方程式 $P(\lambda) = 0$ の全ての根が負であるかまたは負の実部を持つための必要十分条件は，

$$\det H_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つことである．

2.3 1階微分方程式系の局所的安定性

ここでは，簡単のため2変数 u, v に関する1階の自励系の微分方程式：

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= f(u, v) \\
 \frac{dv}{dt} &= g(u, v)
 \end{aligned}$$

を考える．この系において， $f(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ と $g(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ を同時に満たすような解 (\bar{u}, \bar{v}) を定常解 (平衡解，不動点) という．次に，定常解の安定性を考える．関数

f と g を定常解 (\bar{u}, \bar{v}) の周りで、テイラー展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= f(\bar{u}, \bar{v}) + f_u(\bar{u}, \bar{v})\xi + f_v(\bar{u}, \bar{v})\eta \\ &\quad + f_{uu}(\bar{u}, \bar{v})\frac{\xi^2}{2} + f_{uv}(\bar{u}, \bar{v})\xi\eta + f_{vv}(\bar{u}, \bar{v})\frac{\eta^2}{2} + \dots \\ \frac{d\eta}{dt} &= g(\bar{u}, \bar{v}) + g_u(\bar{u}, \bar{v})\xi + g_v(\bar{u}, \bar{v})\eta \\ &\quad + g_{uu}(\bar{u}, \bar{v})\frac{\xi^2}{2} + g_{uv}(\bar{u}, \bar{v})\xi\eta + g_{vv}(\bar{u}, \bar{v})\frac{\eta^2}{2} + \dots\end{aligned}$$

となる。ここで ξ, η はそれぞれ、 $\xi = u - \bar{u}$ 、 $\eta = v - \bar{v}$ とおいた。また、 $f(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ 、 $g(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ なので、定常解 (\bar{u}, \bar{v}) の周りでの線形化方程式は、

$$\frac{d\xi}{dt} = J\xi \tag{2.1}$$

となる ($\xi = (\xi, \eta)$)。 J は定常解におけるヤコビ行列

$$J = \begin{bmatrix} f_u(\bar{u}, \bar{v}) & f_v(\bar{u}, \bar{v}) \\ g_u(\bar{u}, \bar{v}) & g_v(\bar{u}, \bar{v}) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

である。上記線形化方程式は、定数係数線形方程式であるので簡単に解くことができる。解が0に収束するのは、全ての固有値の実部が負のときであるから、Routh-Hurwitz の判定基準が使える。よって、固有方程式は、

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \tag{2.3}$$

であり、全ての固有値の実部が負であるための必要十分条件は、

$$\text{Tr}(J) < 0 \text{ かつ } \det(J) > 0 \tag{2.4}$$

である。また、もし、

$$\text{Tr}(J) > 0 \text{ または } \det(J) < 0 \tag{2.5}$$

のどちらか一方でも成り立てば、定常解は不安定である。

2.4 Hopf分岐と周期解

周期解と Hopf 分岐は密接な関係にあり，Hopf 分岐が存在するとき周期解が存在することが保証されている．方程式系の共役な複素固有対は複素平面の虚軸を左から右（負の実部から正の実部）に横切るとき，系のダイナミクスが安定スパイラルから不安定スパイラルへと変化する．これらの適当な条件の下で，周期解が存在する．また，このような固有値の実部が符号を変えるような解の不安定化を Hopf 分岐という．

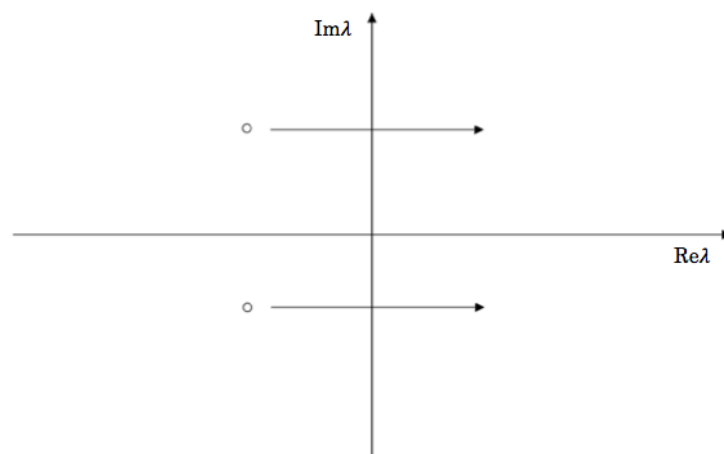


図 2.1: 固有値は複素数で，負の実部から実部零，そして正の実部へと変わること
で安定スパイラルが不安定スパイラルに変化する．

また，Hopf 分岐には 2 つの種類がある．ひとつは，supercritical Hopf 分岐と呼ばれ振幅が連続的に変化する．もうひとつは，振動の振幅が不連続に変化する subcritical Hopf 分岐と呼ばれる分岐である．(図 2.2)

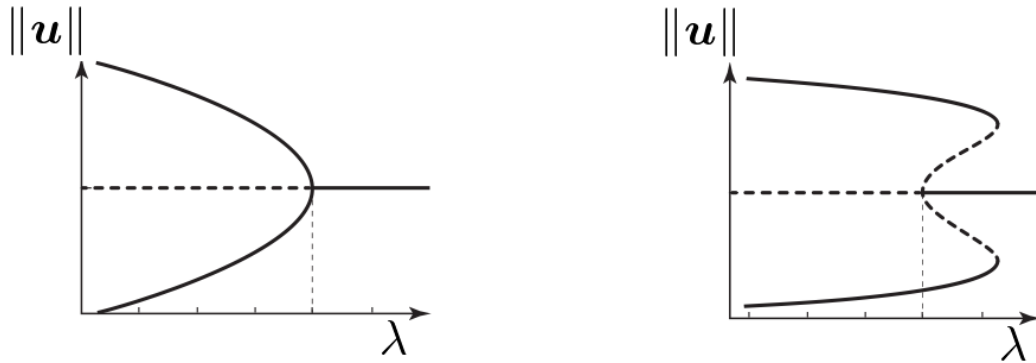


図 2.2: 左:supercritical Hopf 分岐, 右:subcritical Hopf 分岐, 実線は安定を破線は不安定を表している.

2.5 定常解の追跡

ここでは, パラメータ λ を変化させながら定常解の枝を追いかける方法を考える. これは, 定常解を \mathbf{u} とすると非線形連立方程式

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (2.6)$$

を解く問題に帰着される. まずは, 最も簡単な方法のひとつを紹介する. それは, $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$ を式 (2.6) の解とし, λ_2 を $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ と考えて, 解 \mathbf{u}_2 を Newton 法を用いて求めるというものである. この方法では, パラメータの変化量を小さくすれば Newton 法により収束することが期待できる. しかし, サドル・ノード分岐点や解の枝が図 2.3 のようにターンしている場合にそれ以上解の枝を追跡することができないという問題がある.

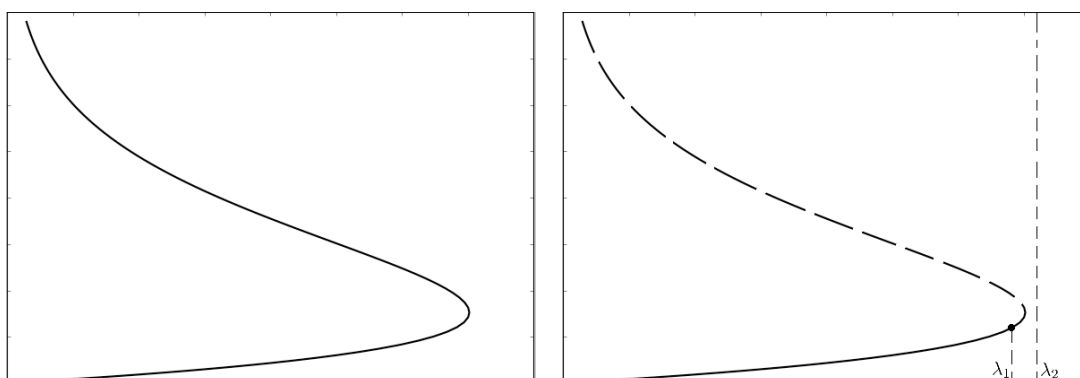


図 2.3: 上記方法で失敗する例

この問題を解決するひとつの方法として、ニュートン法を説明後、疑似弧長法を紹介する。

2.5.1 ニュートン法 (Newton method)

連立非線形方程式:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

をニュートン法で解くことを考える。上式をベクトル表記すると、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

と書ける。 k ステップ目の近似値を \mathbf{x}^k として、 \mathbf{x}^k の周りでテイラー展開すると、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + J(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) + \dots$$

となる。ここで J は、ヤコビ行列を表す。2次以上の項を無視すると、非線形連立方程式は、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + J(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$$

となる。 $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$ とし、線形連立方程式:

$$J(\mathbf{x}^k)\boldsymbol{\delta} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

を解くことで、 $\boldsymbol{\delta}$ が得られる。これを用いて、 \mathbf{x}^{k+1} を計算すると、

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \boldsymbol{\delta}$$

となる。これを例えば収束条件、

$$\frac{|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k|}{|\mathbf{x}^k|} < \varepsilon$$

を満たすまで繰り返し行なうことで解を求める。

2.5.2 ニュートン法のアルゴリズム

- ① 適切な初期値 \mathbf{x}^0 を与える。
- ② ヤコビ行列 $J(\mathbf{x}^0)$ を求める。ここでは、ヤコビ行列を差分法で求める。十分小さい Δd を考え、

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{f_1(x_1^0 + \Delta d, x_2^0, \dots, x_n^0) - f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta d} & \frac{f_1(x_1^0, x_2^0 + \Delta d, \dots, x_n^0) - f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta d} \\ \frac{f_2(x_1^0 + \Delta d, x_2^0, \dots, x_n^0) - f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta d} & \frac{f_2(x_1^0, x_2^0 + \Delta d, \dots, x_n^0) - f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta d} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{f_n(x_1^0 + \Delta d, x_2^0, \dots, x_n^0) - f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta d} & \frac{f_n(x_1^0, x_2^0 + \Delta d, \dots, x_n^0) - f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta d} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right]$$

を計算する。

③ 得られたヤコビ行列を用いて、

$$J(\mathbf{x}^0)\delta = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$$

から δ を計算する。

④ 以上より、 \mathbf{x}^1 は、

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \delta$$

と求めることができる。②に戻り、これを収束条件を満たすまで繰り返す。

2.5.3 擬似弧長法 (Pseudo-arclength continuation method)

定常問題に対して、パラメータ λ を変えながら解を追跡する方法を解説する。様々な方法があるが、ここでは、サドル・ノード分岐点がある場合でも解の追跡が可能である擬似弧長法 (Pseudo-arclength continuation method) を紹介する。

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$, $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = (G_1, G_2, G_3, \dots, G_n)$ として、非線形連立方程式、

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0} \tag{2.8}$$

の解を求める。疑似弧長法の原理は、図 2.5 のように接線ベクトル \mathbf{b} に対して垂直な方向へ解を取束させるというものである。そのため、初期値として接線ベクトルが必要となる。今、初期値 $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ を与えたとすると、その接線ベクトルは近似的に次のように求めることができる。はじめに、 λ_1 を例えば $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta s$ として与え、 \mathbf{u}_1 を Newton 法を用いて求める。また、

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0}{\Delta s}, \quad \dot{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\Delta s} \quad (2.9)$$

として、接線ベクトルを求める。また、 $\Delta s = s_2 - s_1$, $\dot{\cdot} = d/ds$ とする。これで、 $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$, $(\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\lambda}_1)$ を得ることができる。次は、 $(\mathbf{u}_2, \lambda_2)$, $(\dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\lambda}_2)$ を求める方法を考える。

疑似弧長法は接線方向を座標系 s にとり、 \mathbf{u}, λ を s に依存する関数として与える。 \mathbf{a} と \mathbf{b} は、 $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \lambda_2 - \lambda_1)$, $\mathbf{b} = (\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\lambda}_1)$ で、 θ は \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角である。また、 \mathbf{b} は正規化ベクトル $\|\mathbf{b}\| = \|\dot{\mathbf{u}}\| + |\dot{\lambda}| = 1$ とする。このとき、関係式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ と、 $\|\mathbf{b}\| = 1$, $\|\mathbf{a}\| \cos \theta = \Delta s$ より、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \Delta s$$

さらに、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \dot{\mathbf{u}}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \dot{\lambda}_1$$

よって、

$$K(\mathbf{u}_2(s), \lambda_2(s)) = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \dot{\mathbf{u}}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \dot{\lambda}_1 - \Delta s = 0 \quad (2.10)$$

が成り立つ。ただし、 Δs はパラメータの変化量を調整するもので適当な値を与える。以上より、非線形連立方程式、

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{u}_2(s), \lambda_2(s)) = \mathbf{0}, \\ K(\mathbf{u}_2(s), \lambda_2(s)) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

がつくられる。これを Newton 法を用いて解き、 $(\mathbf{u}_2, \lambda_2)$ を求める。さらに、 $(\mathbf{u}_2, \lambda_2)$ から次の接線方向 $(\dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\lambda}_2)$ を求める。これは、式 (2.11) を s_2 で微分を行うことで

得られる接線方程式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_u(\mathbf{u}_2, \lambda_2) & \mathbf{G}_\lambda(\mathbf{u}_2, \lambda_2) \\ \mathbf{u}_1 & \dot{\lambda}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

を解くことで得られる。以上の操作を繰り返す行なうことでパラメータ λ を変化させながら定常解を追跡することができる。

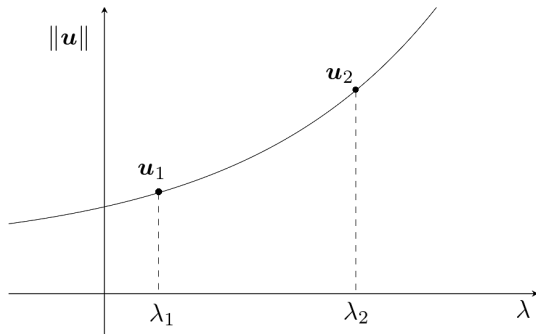


図 2.4: Newton 法

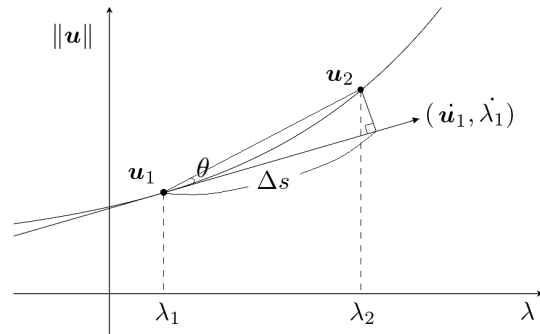


図 2.5: 疑似弧長法

2.5.4 擬似弧長法のアルゴリズム

① 与えられた初期値 (u_0, λ_0) から (u_1, λ_1) を求める。例えば,

$$\lambda_1 = \lambda_1^* = \lambda_0 + \Delta s$$

とし (既知の値には*をつけている), u_1^0 を初期値として, ニュートン法を用いて解く。つまり, 連立1次方程式:

$$\mathbf{G}_u(\mathbf{u}_1^k, \lambda_1^*)\delta = -\mathbf{G}(\mathbf{u}_1^k, \lambda_1^*)$$

を解き, 求めた δ を用いて,

$$\mathbf{u}_1^{k+1} = \mathbf{u}_1^k + \delta$$

と値を更新し次の初期値とする。この操作を,

$$\frac{|\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_1^k|}{|\mathbf{u}_1^k|} < \varepsilon$$

となるまで繰り返す (相対誤差評価)。求めた \mathbf{u}_1^{k+1} を \mathbf{u} とする。

② $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ と $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$ から近似的に接線方向 $(\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\lambda}_1)$ を求める。

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0}{\Delta s}, \quad \dot{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\Delta s}$$

③ この時点で, $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$, $(\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\lambda}_1)$ が求められている。次にこれらの値を使って, $(\mathbf{u}_2, \lambda_2)$ を計算する。 $(\mathbf{u}_2, \lambda_2)$ は, 式 (2.11) を解けば求まるので, Newton 法を用いると, 以下のように計算することができる。初期値を $\mathbf{u}_2^0 = \mathbf{u}_1$, $\lambda_2^0 = \lambda_1$ とし, 連立 1 次方程式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_u(\mathbf{u}_2^k, \lambda_2^k) & \mathbf{G}_\lambda(\mathbf{u}_2^k, \lambda_2^k) \\ \dot{\mathbf{u}}_1^* & \dot{\lambda}_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}_2^k, \lambda_2^k) \\ (\mathbf{u}_2^k - \mathbf{u}_1^*) \cdot \dot{\mathbf{u}}_1^* + (\lambda_2^k - \lambda_1^*) \dot{\lambda}_1^* - \Delta s \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

を解き,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2^{k+1} &= \mathbf{u}_2^k + \delta \\ \lambda_2^{k+1} &= \lambda_2^k + \gamma \end{aligned}$$

と, 値を更新する。この操作を,

$$\frac{|\mathbf{u}_2^{k+1} - \mathbf{u}_2^k|}{|\mathbf{u}_2^k|} < \varepsilon, \quad \frac{|\lambda_2^{k+1} - \lambda_2^k|}{|\lambda_2^k|} < \varepsilon$$

となるまで繰り返す (相対誤差評価)。求めた \mathbf{u}_2^{k+1} , λ_2^{k+1} を \mathbf{u}_2 , λ_2 とする。

④ 次に, これまで求めた値から次の接線方向 $(\dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\lambda}_2)$ を求める。それは, 接線方

程式 (連立 1 次方程式):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_u(\mathbf{u}_2^*, \lambda_2^*) & \mathbf{G}_\lambda(\mathbf{u}_2^*, \lambda_2^*) \\ \mathbf{u}_1^* & \lambda_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

を解くことで得られる.

⑤ $(\mathbf{u}_2, \lambda_2)$, $(\dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\lambda}_2)$ が求められているので ③ に戻り同じ操作を繰り返す.

2.6 分岐点の検出

2.6.1 単純特異点

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

で, もし,

$$\mathbf{G}_w(\mathbf{w}_0) \text{ の階数が } n-1$$

のとき,

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}_0) = \mathbf{0} \text{ の解 } \mathbf{w}(s_0)$$

は, 単純特異点と呼ばれる.

2.6.2 分岐候補点 (potential bifurcation point)

分岐候補点を検出する方法を考える. 分岐点の検出においては, 次の定理が成り立つ [3].

Theorem 2. 定常解における分岐点では疑似弧長法を考慮して, 以下の評価が成り立つ.

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}; s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^* \dot{\mathbf{w}}_0 - s \end{bmatrix}$$

このとき、 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(0)$ が、 $\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ の解 $\mathbf{w}(s)$ において単純特異点であるとする

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{判別式 } \Delta_0 > 0 \text{ (} \mathbf{G}_w(\mathbf{w}_0)\dot{\mathbf{w}}_0 = 0 \text{ で } \dot{\mathbf{w}}_0 \text{ が 2 つの実解を持つ)} \\ \cdot \mathbf{F}_w^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_w(\mathbf{w}_0) \\ \dot{\mathbf{w}}_0^* \end{bmatrix} \text{ の固有値が 0} \end{array} \right.$$

であれば、

$$\det \mathbf{F}_w(\mathbf{w}(s)) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{G}_w(\mathbf{w}(s)) \\ \dot{\mathbf{w}}_0^* \end{bmatrix}$$

は、 \mathbf{w}_0 で符号を変える。□

定理 2 から、定常解を擬似弧長法で追跡している間、行列式 $q(s) = \det(\mathbf{F}_w)$ の符号を観察し、もし符号が変わったらその前の値との間に分岐点の候補があることが分かる。さらに、 $q(s) = 0$ となる s を求めることで、分岐点候補点 (*potential bifurcation point*) を見つけることができる。

2.6.3 ブランチの切り替え (branch switching)

上記方法で、追跡していたブランチより検出した分岐点から次のブランチへの切り替えを考える。分岐点の $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \lambda)$ の値を \mathbf{w}_0 、切り替えたブランチの初期値を \mathbf{w}_1 とする。また、切り替える前後のブランチの方向ベクトルを $\phi_1 = \dot{\mathbf{w}}_0$ 、 ϕ_2 とし、

$$\phi_1 \perp \phi_2$$

とする。これらは、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_w(\mathbf{w}_0) \\ \dot{\mathbf{w}}_0 \end{bmatrix} \phi_2 = \mathbf{0}, \quad \|\phi_2\| = 1$$

を満たす。ここで、

$$\mathbf{F}_w^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_w(\mathbf{w}_0) \\ \dot{\mathbf{w}}_0 \end{bmatrix}$$

とする (\mathbf{F}_w^0 の零空間は, 1次元であることに注意する). この ϕ_2 を用いて, 擬似弧長法の式,

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{w}_1) = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0)\phi_2 - \Delta s = 0 \end{cases}$$

を解くことで, 切り替えたブランチの解を求める.

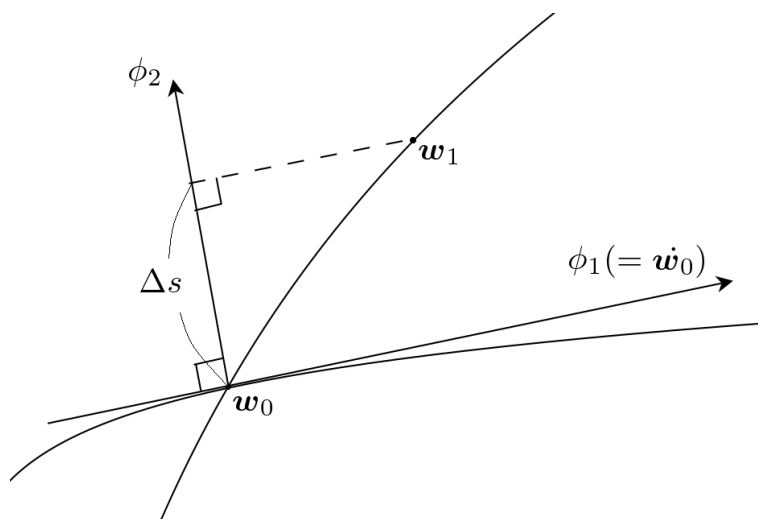


図 2.6: 垂直方向を用いたブランチの切り替え

2.6.4 Hopf分岐点の検出

Δs が十分に小さく, Hopf 分岐点が縮退していないとき,

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}$$

の定常解 $\mathbf{u}(\lambda)$ において, $\mathbf{G}_w(\mathbf{u}, \lambda)$ の固有値を $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ とし, $\lambda = \lambda_0$ のとき虚軸を横切るとする. つまり,

$$\alpha(\lambda_0) = 0, \beta(\lambda_0) \neq 0, \dot{\alpha}(\lambda_0) \neq 0$$

のとき,

$$\mathbf{u}' = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda)$$

の定常解において Hopf 分岐が起きる。具体的には，虚軸付近の負固有値の個数をチェックし，その個数が減った場合には，虚軸を横切ったとして Hopf 分岐点を見つけることができる。

2.7 反応拡散系に対する大域的分岐構造の数値解法

2.7.1 差分方程式

ここでは反応拡散系に対する大域的分岐構造の数値解法を考える。反応拡散系:

$$\mathbf{u}_t = \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda)$$

の定常解の追跡には，

$$\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}$$

として，擬似弧長法を用いる。ここで，拡散項 $\Delta \mathbf{u}$ には，2階の中心差分法を用い，

$$\frac{\mathbf{u}_{k+1} - 2\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}}{\Delta x^2} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

と差分化する ($\Delta x = 1/N$)。これで，擬似弧長法が適用できる形となり，分岐点の検出などの数値解法も同様に反応拡散系に対して用いることができる。

第3章 大腸菌の分布形成の数理モデルとその分岐解析

3.1 モデル方程式

今回扱った三村・辻川方程式 [6] は、走化性大腸菌の個体密度 $u(x, t)$ と大腸菌が分泌する化学物質の濃度 $v(x, t)$ の時空間的变化を記述しており、

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - b\nabla(u\nabla v) + cu(1 - u), \\ v_t = d\Delta v + fu - gv \end{cases}$$

と表される。ここで、第1式は大腸菌の密度 u の速度方程式で、右辺第1項は大腸菌のランダムな運動、第2項 $-b\nabla(u\nabla v)$ は大腸菌が化学物質の濃度勾配 ∇v の高い方向に引き寄せられる走化性 (chemotaxis) の作用、第3項は、大腸菌の増殖と死滅を表す項で、2次のロジスティック型となっている。第2式は大腸菌が分泌する化学物質の濃度 v の速度方程式で、右辺第1項は、化学物質の拡散、第2項は化学物質の分泌、第3項は化学物質の自然崩壊を表している。以下では、定数定常解の周りでの線形化解析による分岐点の計算と、数値計算による大域的分岐構造の解析を行なう。

3.2 線形化解析

線形化解析によって反応拡散走性系における不安定化のメカニズムを考える。三村・辻川系においては、走化性の強度が強くなると不安定化が起こることが知られており、その強度 b は定数定常解のまわりで線形化することにより求めることができる。以下、空間1次元における区間 $\Omega = (0, L)$ を考え、境界には反射壁

の条件 (斉次ノイマン境界条件) を課す.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + cu(1-u) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + fu - gv & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases} \quad (3.1)$$

(\bar{u}, \bar{v}) を平衡点とし, (ξ, η) を摂動とすると, 線形化方程式は次のようにして求めることができる. $(u, v) = (\bar{u} + \xi, \bar{v} + \eta)$ を式 (3.1) に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u} + \xi)}{\partial t} &= a \frac{\partial}{\partial x^2}(\bar{u} + \xi) - b \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\bar{u} + \xi) \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v} + \eta) \right\} + c(\bar{u} + \xi)(1 - \bar{u} - \xi) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - b \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (\bar{u} + \xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right\} + c(\bar{u} + \xi)(1 - \bar{u} - \xi) \\ &= a \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - b \left(\bar{u} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + c(\bar{u} - \bar{u}^2 - \bar{u}\xi + \xi - \xi\bar{u} - \xi^2) \\ &\approx a \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - b\bar{u} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + c(\bar{u} - \bar{u}^2 - 2\bar{u}\xi + \xi), \\ \frac{\partial(\bar{v} + \eta)}{\partial t} &= d \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bar{v} + \eta) + f(\bar{u} + \xi) - g(\bar{v} + \eta) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + f(\bar{u} + \xi) - g(\bar{v} + \eta). \end{aligned}$$

それぞれに, 式 (3.1) 式の定数定常解 $(\bar{u}, \bar{v}) = (1, f/g)$ を代入して,

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - c\xi, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = d \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + f\xi - g\eta \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで, 斉次のノイマン境界条件を考慮し, $l = \frac{\pi}{L}$ とすると線形化方程式 (3.2) の解は,

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{bmatrix} e^{\lambda t} \cos(klx). \quad (3.3)$$

と表せる (k は余弦関数のモード). 式 (3.2) に代入すると,

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \xi_k e^{\lambda t} \cos(klx) = \sum_{k=0}^{\infty} \{-a(kl)^2 \xi_k + b(kl)^2 \eta_k - c \xi_k\} e^{\lambda t} \cos(klx), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \eta_k e^{\lambda t} \cos(klx) = \sum_{k=0}^{\infty} \{-d(kl)^2 \eta_k + f \xi_k - g \eta_k\} e^{\lambda t} \cos(klx). \end{cases} \quad (3.4)$$

よって同次方程式,

$$\begin{bmatrix} \lambda + a(kl)^2 + c & -b(kl)^2 \\ -f & \lambda + d(kl)^2 + g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

が非自明な解をもつための必要十分条件は行列式が 0 のときであるから,

$$\begin{vmatrix} \lambda + a(kl)^2 + c & -b(kl)^2 \\ -f & \lambda + d(kl)^2 + g \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + \{c + g + (a + d)(kl)^2\} \lambda + ad(kl)^4 + (ag + cd)(kl)^2 + cg - bf(kl)^2 = 0.$$

Routh-Hurwitz の判定基準より,

$$ad(kl)^4 + (ag + cd)(kl)^2 + cg - bf(kl)^2 < 0.$$

となる. よって, 走化性係数の不安定化の条件として,

$$b > \frac{(dk^2l^2 + g)(ak^2l^2 + c)}{fk^2l^2}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

が得られる. 条件式 (3.5) を用いることで, 定数定常解から第 1 分岐として何モードの余弦関数解 (以下, モード解) が分岐してくるのかを調べることができる. ここで, 走化性係数 b と増殖項の係数 c 以外のパラメータを固定し, 1 モード解, 2 モード解のそれぞれが定数定常解からの第 1 分岐となるような場合を例として考

える。固定するパラメータの値と領域，初期値は，

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0.0625 \\ d = 1.0 \\ f = 1.0 \\ g = 32.0 \\ L = 1.0 \\ u_0(x) = 1.0 \\ v_0(x) = f/g + \text{摂動} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

とする。このとき，増殖項の係数 c の値を $c = 0.1$ とすると 1 モード解が， $c = 4.8$ とすると 2 モード解が第 1 分岐となるように走化性係数 b を推定することができる。実際，条件式 (3.5) をモード数 k に関する 2 次方程式とみると図 3.1 のようにグラフが書ける。

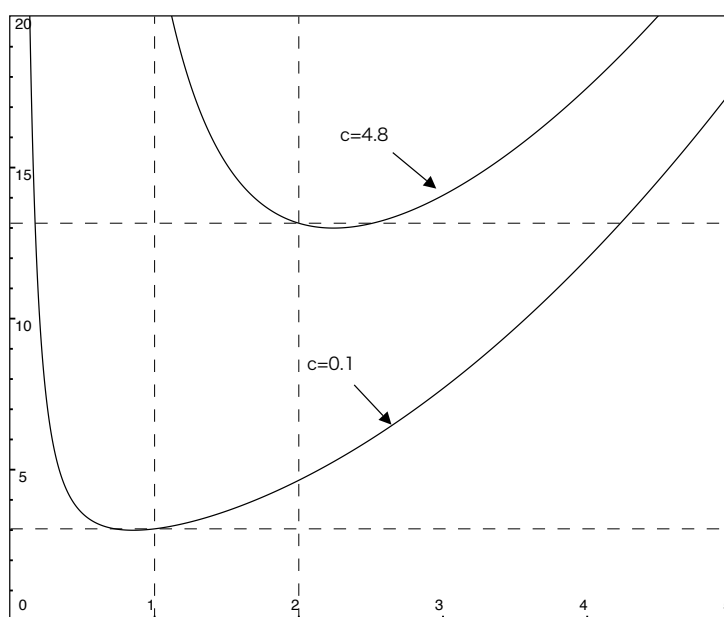


図 3.1: 横軸:余弦関数の波数 k ，縦軸:走化性強度 b ，実線は，条件式 (3.5) の右辺 $=0$ のグラフ

このグラフと条件式 (3.5) より, $c = 0.1$ のとき, $b > 3.04107\dots$ で定数定常解から 1 モード解が第 1 分岐として安定的に発生することが分かる. 同様にして, $c = 4.8$ のとき, $b > 13.158\dots$ で定数定常解から 2 モード解が第 1 分岐として安定的に発生することが分かる. また, 同様にして各モード解を得ることも可能である.

3.3 大域的分岐構造

上記の線形化解析においては, 定数定常解からの分岐について調べることができる. しかし, 定数定常解から分岐した枝の上で起こる分岐については, 全てを線形化解析によって調べることは非常に大変な作業となる. そこで, 本論文では, 分岐解析ソフトウェア AUTO [2] を用いて空間 1 次元における三村・辻川系の大域的分岐構造を調べた. さらに, その分岐図が正しいことを数値実験により確かめた.

まずは, 分岐解析ソフトウェア AUTO を用いて, 空間 1 次元三村・辻川系の大域的分岐構造について調べる. AUTO は Doedel ら [2] によって開発されたソフトで, その汎用性から多方面に渡って研究に利用されている. 先に説明した擬似弧長法は, AUTO でも使用されている. 三村・辻川系に対して差分法を適用することで, AUTO によって分岐図を調べることが可能となる. 実際に以下のようなプログラムを組み AUTO で分岐図を調べた.

mt.f90

```
!-----  
!Mimura-Tsujikawa equation  
!-----  
!----USER SUPPLIED ROUTIEN-----  
!user supplied global constant  
module const  
  implicit none  
  integer,parameter :: ne = 2 !number of equation  
end module const  
!----AUTO ROUTINE-----  
! right-hand side function  
subroutine func(ndim,u,icp,par,ijac,f,dfdu,dfdp)  
  use const  
  implicit none  
  integer,intent(in) :: ndim, icp(*), ijac  
  double precision,intent(in) :: u(ndim/ne,ne), par(*)  
  double precision,intent(out) :: f(ndim/ne,ne)  
  double precision,intent(inout) :: dfdu(ndim,ndim),dfdp(ndim,*)  
  
  double precision u_tmp(ndim/ne),v_tmp(ndim/ne)  
  double precision u1x(ndim/ne),u2x(ndim/ne),v1x(ndim/ne),v2x(ndim/ne)  
  double precision a,b,c,f,g,hx  
  integer i  
  
  a = par(1)  
  b = par(2)  
  c = par(3)  
  g = par(4)  
  f = par(5)  
  hx = par(7)  
  
  do i=1,ndim/ne  
    u_tmp(i) = u(i,1) !tmp u  
    v_tmp(i) = u(i,2) !tmp v  
  end do  
  
  call ux(ndim/ne,hx,u_tmp,u1x)  
  call uxx(ndim/ne,hx,u_tmp,u2x)  
  
  call ux(ndim/ne,hx,v_tmp,v1x)  
  call uxx(ndim/ne,hx,v_tmp,v2x)
```

mt.f90 の続き

```
do i=1,ndim/ne
    f(i,1) = a*u2x(i)-b*(u1x(i)*v1x(i)+u_tmp(i)*v2x(i))
+c*u_tmp(i)*(1.0-u_tmp(i)) !u
    f(i,2) = v2x(i)+f*u_tmp(i)-g*v_tmp(i) !v
enddo

return
end subroutine func

! initialisation routine
subroutine stpnt(ndim,u,par)
    use const
    implicit none
    integer,intent(in) :: ndim
    double precision,intent(inout) :: u(ndim/ne,ne),par(*)

    double precision pi
    integer i

    par(1) = 0.0625          !a
    par(2) = 60.0           !b
    par(3) = 48.0           !c
    par(4) = 32.0           !g
    par(5) = 1.0            !f

    par(6) = 1.0            !L
    par(7) = par(6)/(ndim/ne-1) !h

    do i=1,ndim/ne          !initial value
        u(i,1) = 1.0
        u(i,2) = par(5)/par(4)
    end do

    return
end subroutine stpnt

subroutine pvls
    return
end subroutine pvls

subroutine bcnd
    return
end subroutine bcnd
```

mt.f90 の続き

```
subroutine icnd
  return
end subroutine icnd

subroutine fopt
  return
end subroutine fopt

!-----
! differentiation routines for ux and uxx
subroutine ux(nx,hx,u,u1x)
  implicit none
  integer i
  integer nx
  double precision u(nx),u1x(nx),hx

  !neumann boundary condition
  u1x(1) = 0.0
  u1x(nx) = 0.0

  !central second order finite differences
  do i = 2,nx-1
    u1x(i) = (u(i+1) - u(i-1))/(2*hx)
  enddo

  return
end subroutine ux

!-----
subroutine uxx(nx,hx,u,u2x)
  implicit none
  integer i
  integer nx
  double precision u(nx),u2x(nx),hx,hx2

  hx2 = hx*hx

  !neumann boundary condition
  u2x(1) = (u(2) - 2*u(1) + u(2))/hx2
  u2x(nx) = (u(nx-1) -2*u(nx) + u(nx-1))/hx2
```


mt.f90 の続き

```
!central second order finite differences
do i = 2,nx-1
  u2x(i) = (u(i+1) - 2*u(i) + u(i-1))/hx2
enddo

return
end subroutine uxx
!-----
```

c.mt

```
NDIM= 90, IPS= 1, IRS= 0, ILP= 1
ICP= [2]
NTST= 20, NCOL= 4, IAD= 3, ISP= 2, ISW= 1, IPLT= 0, NBC= 0, NINT= 0
NMX= 1000, NPR= 100, MXBF= 10, IID= 3, ITMX= 8, ITNW= 5, NWTN= 3, JAC= 0
EPSL= 1e-07, EPSU= 1e-07, EPSS= 1e-05
DS= 0.1, DSMIN = 0.01, DSMAX= 0.02, IADS= 1
UZSTOP= {2:200.0}
RLO= -1e+08, RL1= 1e+08, A0= -1e+08, A1= 1e+08
```

c.mt-n

```
NDIM= 90, IPS= 2, IRS= 32, ILP= 1
ICP= [2]
NTST= 20, NCOL= 4, IAD= 3, ISP= 2, ISW= 1, IPLT= 0, NBC= 0, NINT= 0
NMX= 500, NPR= 100, MXBF= 10, IID= 3, ITMX= 8, ITNW= 5, NWTN= 3, JAC= 0
EPSL= 1e-07, EPSU= 1e-07, EPSS= 1e-05
DS= 0.1, DSMIN= 0.1, DSMAX= 0.02, IADS= 1
UZSTOP= {2:100.0}
RLO= -1e+08, RL1= 1e+08, A0= -1e+08, A1= 1e+08
```

ここで、mt.f90 は AUTO においてユーザーが指定するメインのプログラムになる。また、c.mt は、AUTO に最初に渡す定数を指定したファイルになっている。さらに、c.mt-n は、Hopf 分岐点を検出したときに、そこから分岐している周期解の枝を追跡したいときに用いる。ここに記載した c.mt-n は、Label32 が Hopf 分岐点であった場合を例にしている (IPS, IRS など異なるパラメータを与えているものもあるので注意)。これらのプログラムを AUTO で実行すると図 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 の結果が得られた。それぞれのパラメータ c は、定数定常解からの第 1 分岐が何モード解であるかを手計算によって計算して選んだ。ここでは、1 から 4 モード解が第 1 分岐になるような値をとって、それぞれの分岐図がどのようなになっているかを調べた。

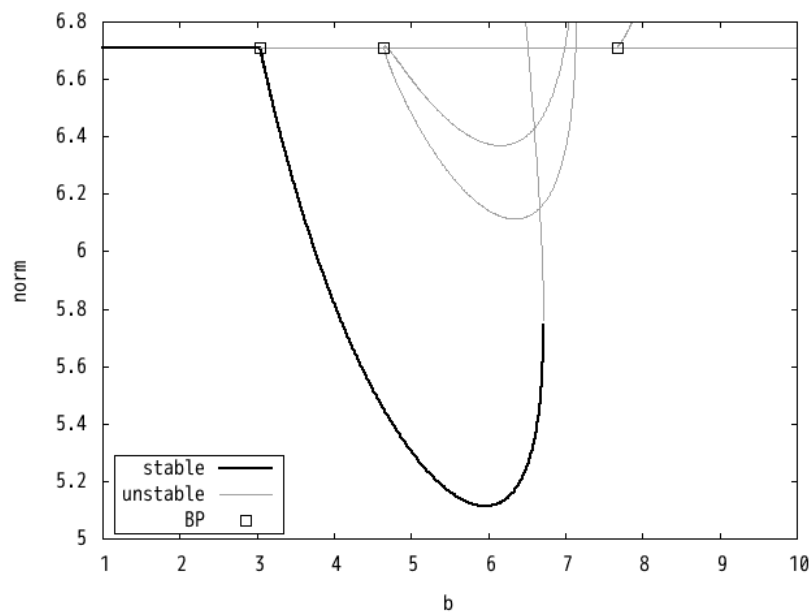


図 3.2: $c = 0.1$, 定数定常解からの第 1 分岐が 1 モード解. BP:分岐点

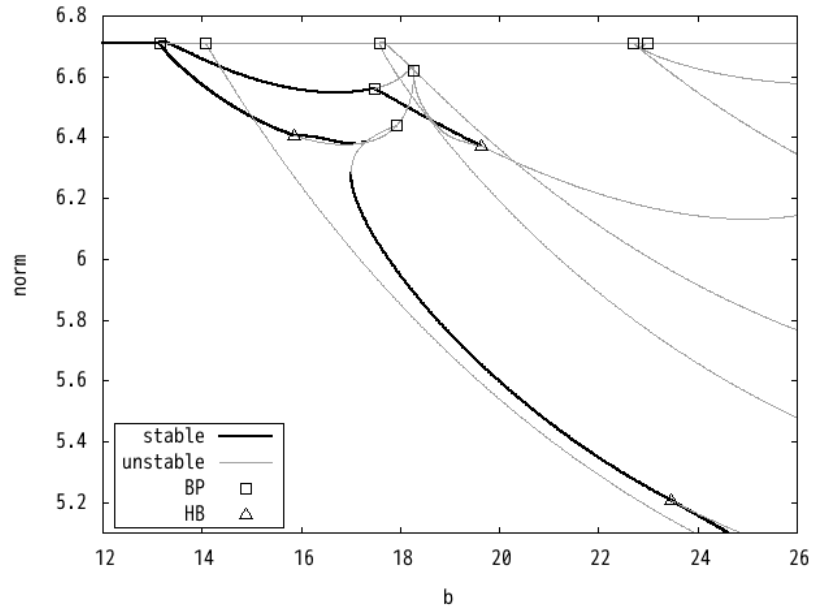


図 3.3: $c = 4.8$, 定数定常解からの第1分岐が2モード解. HB:Hopf 分岐点

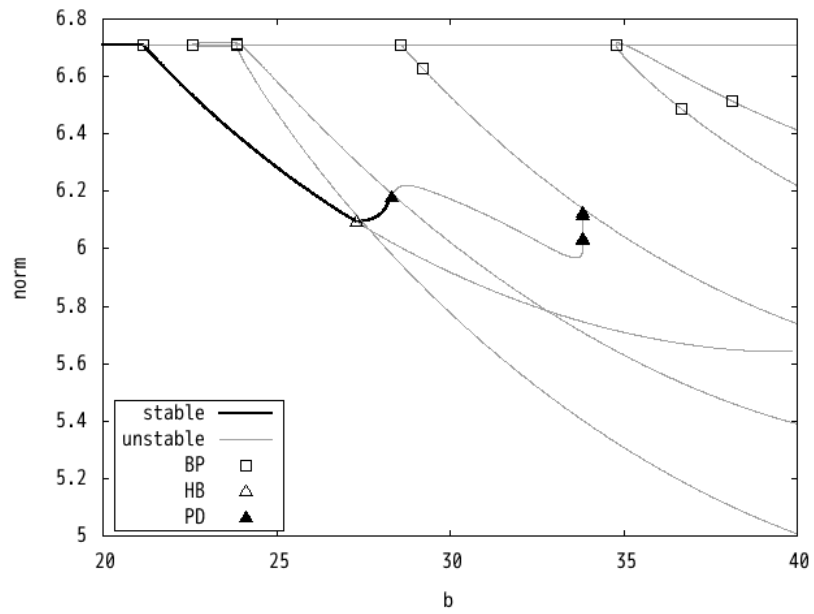


図 3.4: $c = 10$, 定数定常解からの第1分岐が3モード解. PD:周期倍分岐点

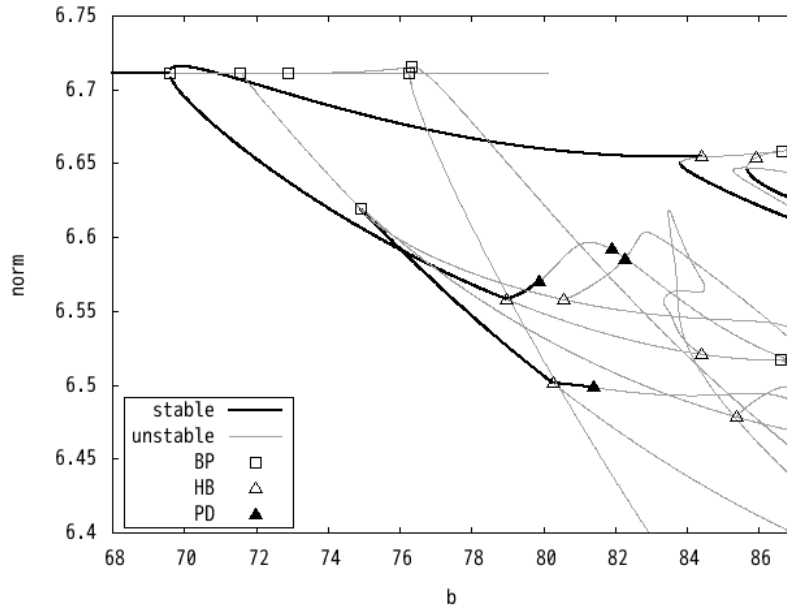


図 3.5: $c = 48$, 定数定常解からの第1分岐が4モード解

これらの分岐図の横軸は、走化性の強度 b を表しており、縦軸は、AUTO が計算するノルムとなっている。この分岐図において AUTO によるノルムの計算方法は、

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{NDIM} (u_k^2 + v_k^2)} \quad (3.7)$$

である。また、黒色太線は安定な分岐枝を表しており、灰色細線は不安定な分岐枝を表している。分岐図左下枠内に書かれている BP, HB, PD, はそれぞれ、分岐点, Hopf 分岐点, 周期倍分岐点を表している。図 3.2 を見てみると第1分岐に1モード解が分岐するパラメータでは、示した範囲のパラメータ領域において1モード解のみが安定的に存在することが分かる。次に、第1分岐として2モード解が分岐するパラメータの図 3.3 を見ると、より複雑な分岐が起こっていることが分かる。定数定常解から2モード解が分岐するが、 $b \approx 15.86$ において、Hopf 分岐が発生している。さらに、Hopf 分岐点より分岐した周期解の枝は安定であることも分かる。また、同様にして、 $b \approx 23.44$ においても安定な周期解の枝を持つ Hopf 分

岐点が検出されていることが分かる。これらはともに、先に紹介した supercritical Hopf 分岐であることも分かる。一方、 $b \approx 19.63$ で検出された Hopf 分岐点からは、不安定な周期解の枝が伸びており、安定的に周期解が存在しないことが分かる。図 3.4 では、 $b \approx 27.30$ において、Hopf 分岐点が検出され安定な周期解の枝が分岐し、さらに、そこで周期倍分岐点 $b \approx 28.30$ が検出されている。これは、周期解の周期が 2 の解が発生する可能性を示唆している。分岐図 3.5 では、 $b \approx 84.39$ において、subcritical Hopf 分岐点が検出されている。

次に、これらの AUTO によって出力された分岐図が正しいことを数値実験によって検証した。数値実験は、走化性係数 b を 0.1 ずつ増やしていき、各値それぞれ 10 回ずつ初期値に与える摂動をランダムに変えて計算を行った。計算結果は、以下の図のように AUTO で出力された分岐図と重ねて表示した。ノルムは AUTO と同じ計算方法を用いており、分岐図に表示されている + 記号は、ノルムの最大値を表している。また、× 記号は、ノルムの最小値を表している。* 記号に見えている部分は、+ と × が重なっており、ノルムの最大値と最小値が同じであることを示している。一方、同じ b の値に対して、+ と × が離れている場合は、周期解が現れていることが考えられる。以下に、それぞれの結果を示す。

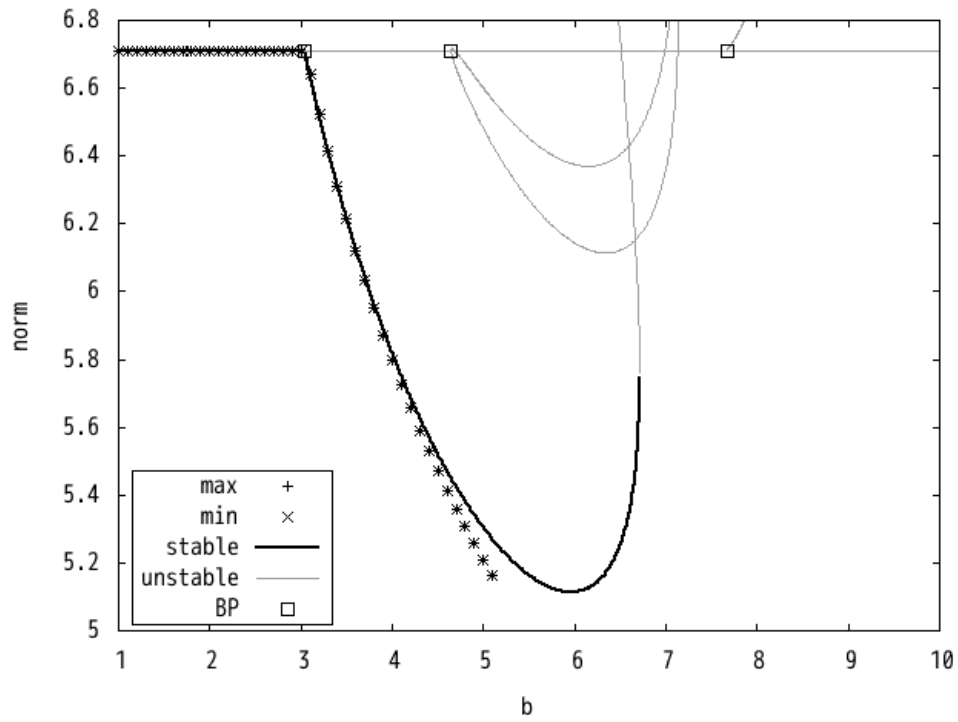


図 3.6: $c = 0.1$, 定数定常解からの第1分岐が1モード解. max, min は式 (3.7) の最大値, 最小値を表しており, *記号に見えている部分はそれらが重なっている.

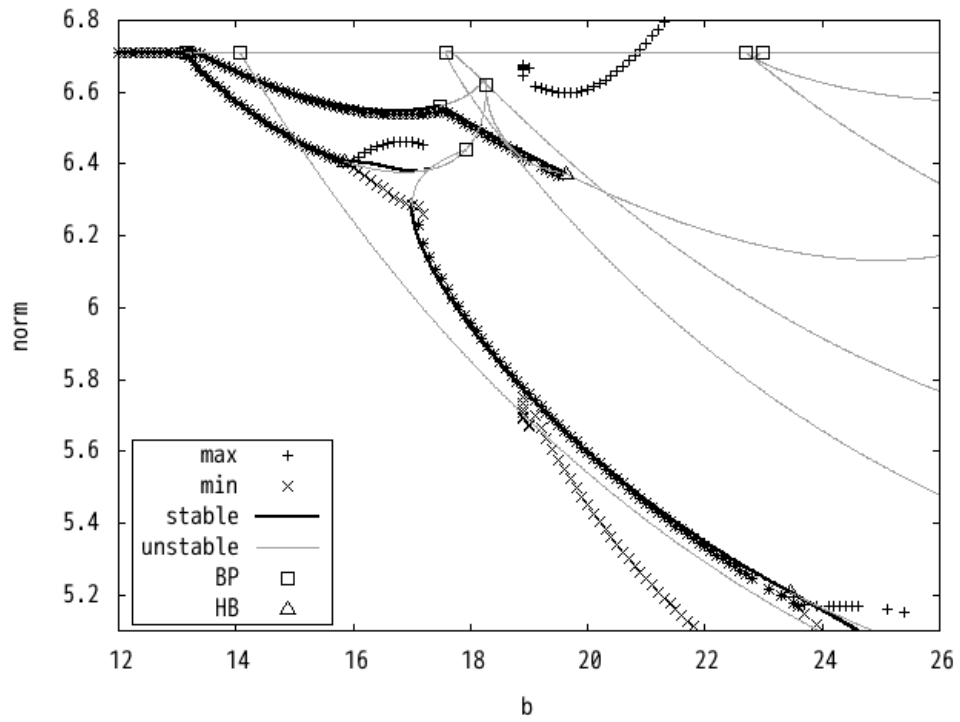


図 3.7: $c = 4.8$, 定数定常解からの第 1 分岐が 2 モード解. Hopf 分岐点以降 max と min の値に差が現れ周期解が発生したことを示唆する.

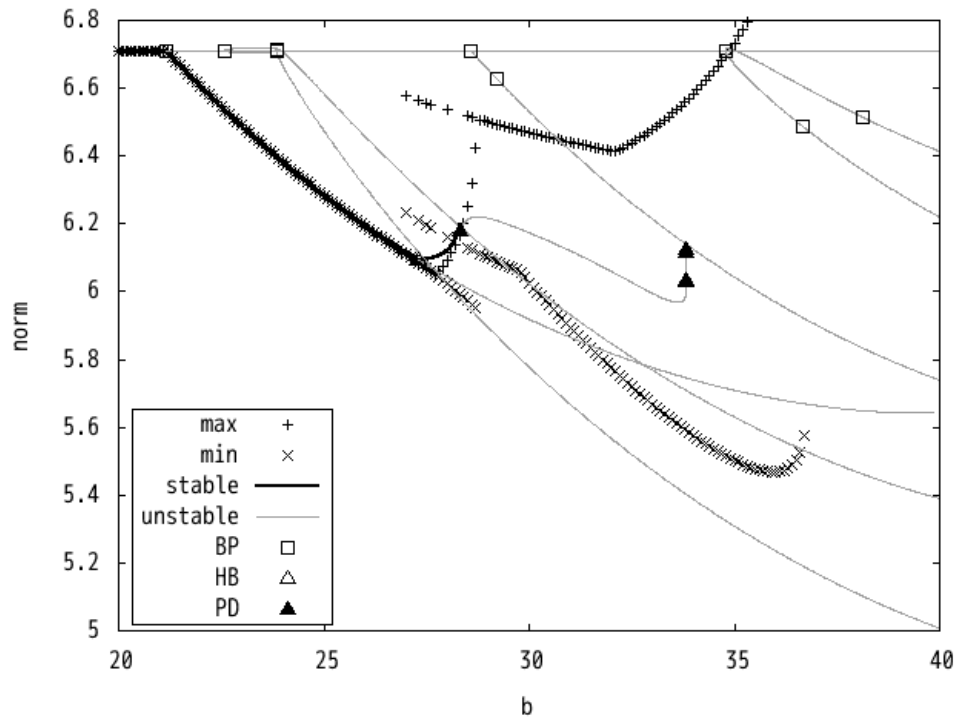


図 3.8: $c = 10$, 定数定常解からの第 1 分岐が 3 モード解

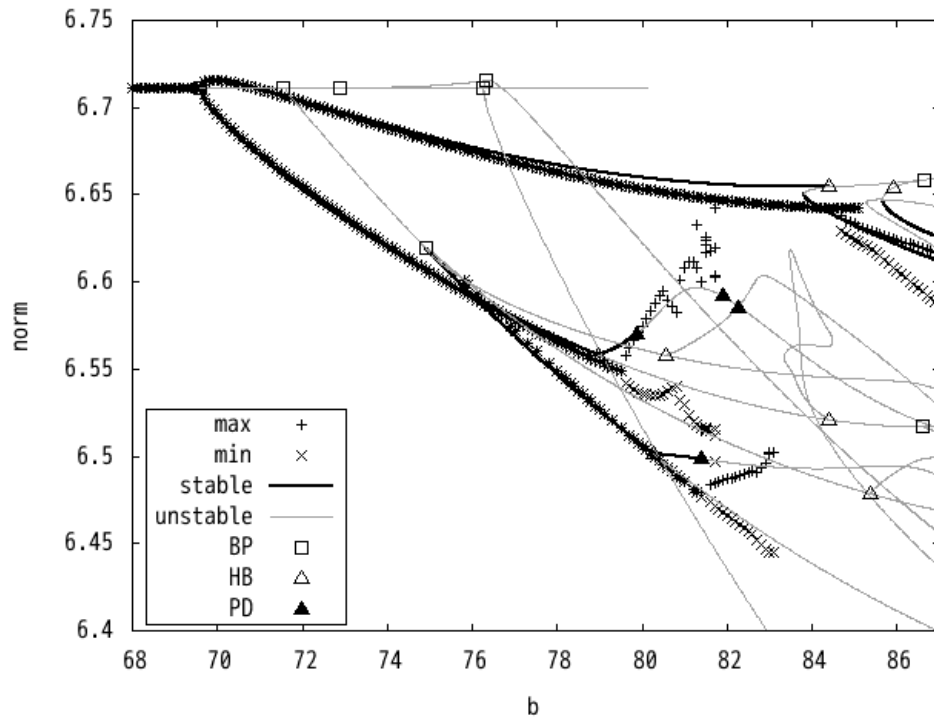


図 3.9: $c = 48$, 定数定常解からの第 1 分岐が 4 モード解

数値実験の結果，AUTO によって出力された結果がおおよそ一致していることが分かった．図 3.6 については， $b \approx 4.5$ までは，ほぼ一致していた．図 3.7 については，ほとんど AUTO の結果と一致しており，supercritical Hopf 分岐についても正確に出力されていることが分かった．ただし， $b \approx 19.63$ で AUTO によって検出された Hopf 分岐点は，数値実験の結果 subcritical Hopf 分岐点である可能性があることが分かった（この Hopf 分岐点以外が存在することも考えられる）．図 3.8，3.9 については，周期倍分岐点を持つ周期解の安定性までは調べられていないため詳しく分からない部分はあるが，ほぼ一致していることが分かった．次に，図 3.7，3.9 に対応する時空間パターンと振幅，ポアンカレ断面 ($c = 4.8$ については空間座標 $x = 0.5$ ， $c = 48$ については空間座標 $x = 0.25$ における振幅とポアンカレ断面) を特徴的なパターンのみ以下に示す．時空間パターンの縦軸は時刻を表しており，十分時間がたってからの状態を表示している．横軸は空間座標を表している．さらに振幅は，色で表現している．振幅の図は縦軸が振幅で横軸は時刻（時間ステッ

ブ数)を表している。ポアンカレ断面を表示した図は、横軸が u のノルム、縦軸が v のノルムを表している。

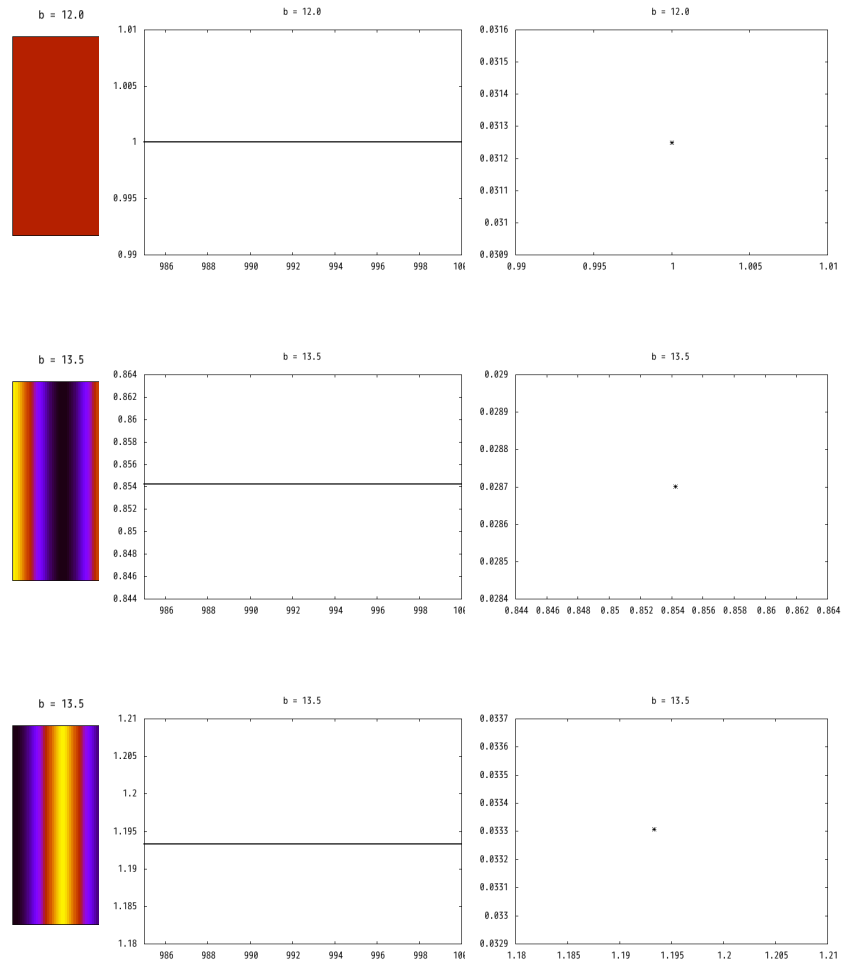


図 3.10: $c = 4.8$ のときの数値計算。他のパラメータは、式 (3.6)。左から時空間パターン、振幅、ポアンカレ断面。

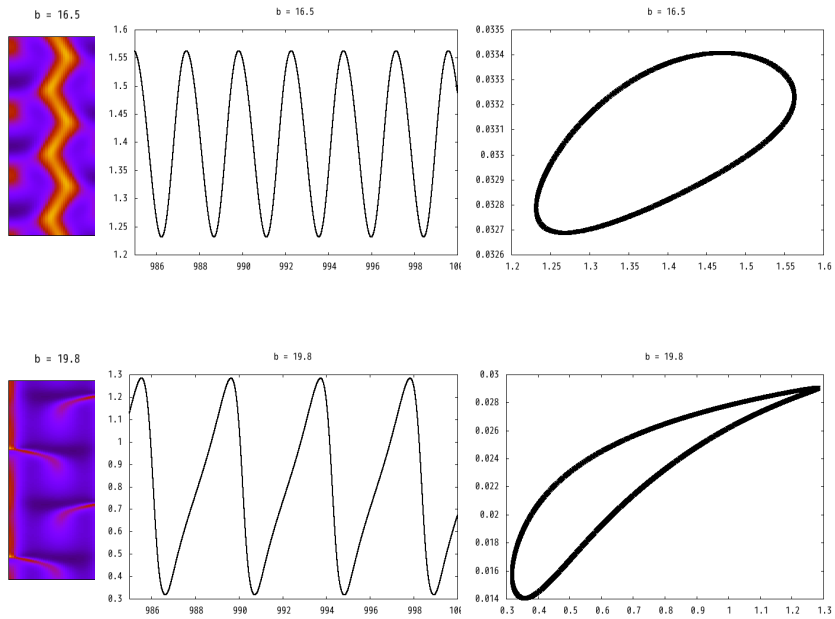
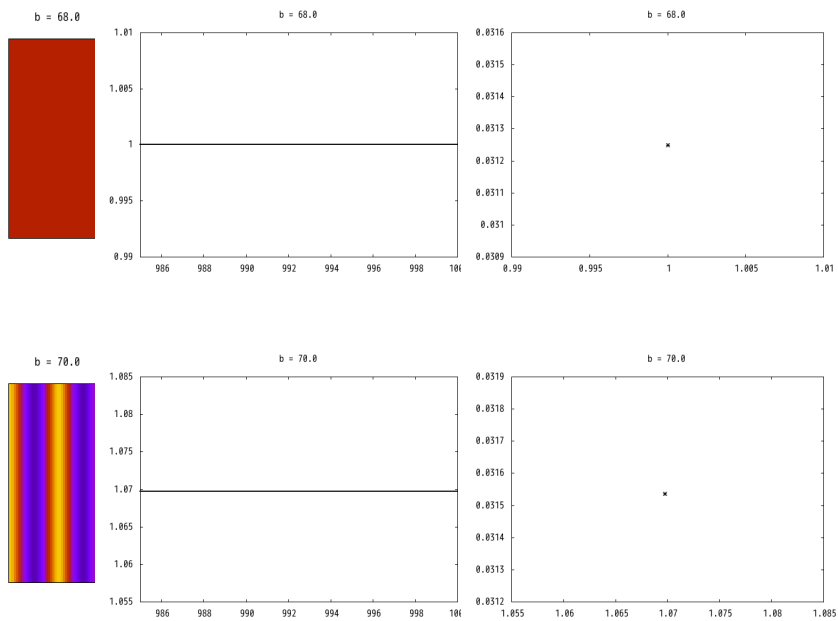


図 3.11: $c = 4.8$ の続き.



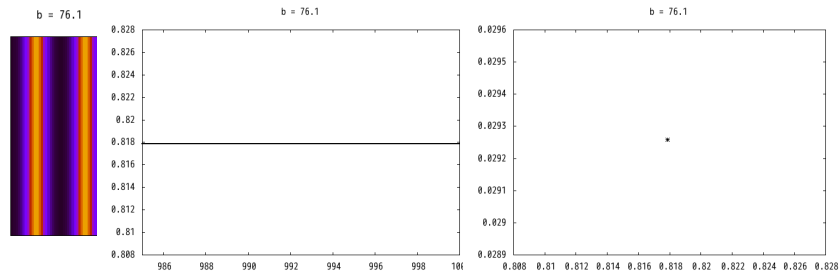
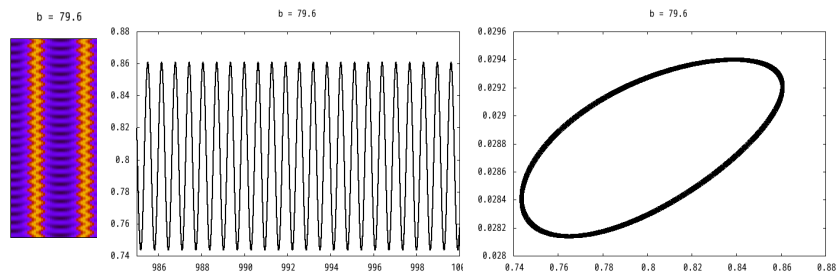
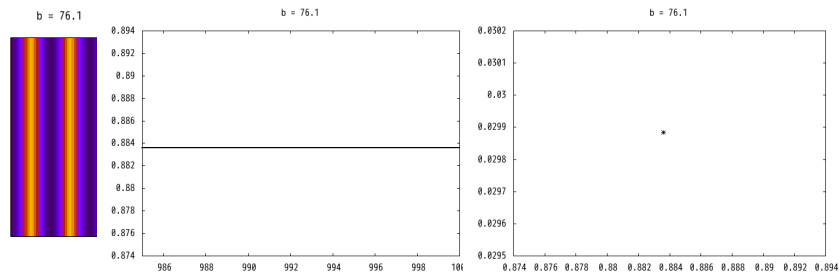
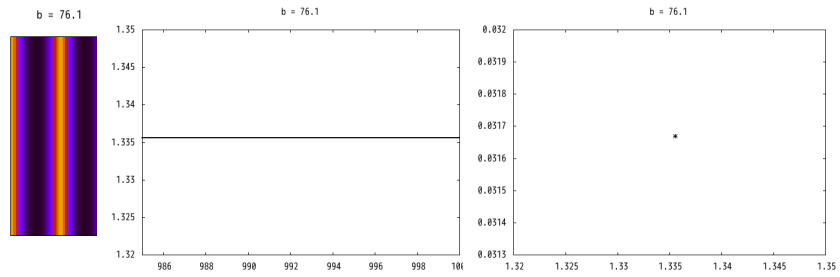


図 3.12: $c = 48$ のときの数値計算. 他のパラメータは, 式 (3.6). 左から時空間パターン, 振幅, ポアンカレ断面.



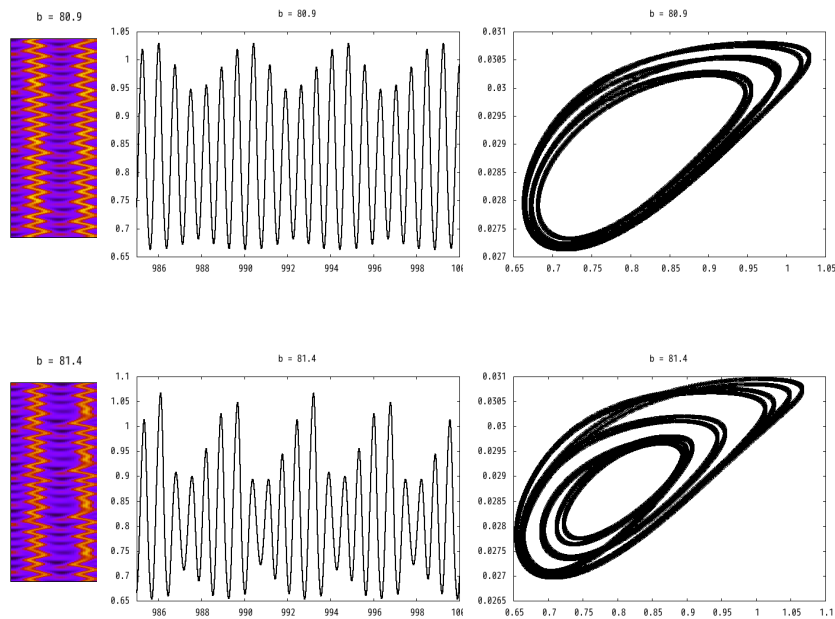


図 3.13: $c = 48$ の続き

数値実験を行い時空間パターンを調べた結果、確かに周期解が存在し、AUTO による分岐図が正しいことが示された。また、ポアンカレ断面を調べることで何周期の解であるかを調べることができた。ただし、AUTO によって検出できた安定周期解の周期は単周期のものだけであるので、それ以上の周期については、数値実験の結果と分岐図の対応を確認することはできなかった。しかし、分岐点、Hopf 分岐点、周期倍分岐点までは検出することができているので、発生したパターンがどの分岐から現れているものなのかおおよそ確かめることができた。

第4章 シロアリの蟻塚形成の数理モデルとその解析

本章では、次の3因子走化性系を考える:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla w) + f(u) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \delta \frac{\partial v}{\partial t} = -v + u & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \tau \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w - w + v & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (\text{E})$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は2次元有界領域であり、滑らかな境界を有するとする。方程式系 (E) は、シロアリの蟻塚形成過程に対する数理モデルとして、J. L. Deneubourg [16] によって提案された ([15, 36] も参照のこと)。ここで、3つの未知関数 $u(x, t)$, $v(x, t)$ および $w(x, t)$ はそれぞれ、働きアリの密度、巣の堆積物質の密度および誘引化学物質の濃度を表す。働きアリは堆積物質を作業領域において堆積させる。これは方程式系 (E) の第2式右辺第2項に対応している。働きアリは巣の材料と化学物質を混ぜ合わせて堆積物質とする。この化学物質が他の働きア리를誘引する。この誘引化学物質の分泌は、方程式系 (E) の第3式右辺第3項で表現されている。この誘引化学物質は空間内において拡散し、濃度勾配 ∇w を形成する。この濃度勾配に応じて働きアリたちが引き寄せされる。この運動は走化性とよばれ、方程式系 (E) では、第1式における $-\chi \nabla \cdot (u \nabla w)$ という項で表現されている。係数 χ は正定数とし、走化性強度を表す。関数 $f(u)$ は働きアリの営巣作業への参加と休息

を表す。方程式系 (E) の第 2 式右辺第 1 項および第 3 式右辺第 2 項は、それぞれ堆積物質の風化と化学物質の崩壊を表している。係数 $\delta > 0$ および $\tau > 0$ は、右辺の反応に関する時間スケールを表す定数である。Deneubourg [16] は関数 f を次式にて設定した：

$$f(u) = 1 - \mu u, \quad u \geq 0. \quad (4.1)$$

ここで、 μ は働きアリが休息状態へと移行する割合を表す正定数である。一方、営巣作業への参加は正規化して 1 となっている。我々は本研究でもこの線形減衰関数 (4.1) を走化性系 (E) に導入する。ここで以下のことに注意する。方程式系 (E) において、その走化性は直接生物から分泌された化学物質によって引き起こされるのではなく、堆積物質という媒介物を通じて非直接的 (indirect) に引き起こされている。

Deneubourg [16] は方程式系 (E) を、著名な走化性系である (放物・放物型) Keller-Segel 系 [25] をもとに構成した。Keller-Segel 系はバクテリア分布の集中化現象に対する数理モデルである。特に、方程式系 (E) において $\delta = 0$ ならびに $f(u) \equiv 0$ とすれば、これは平衡状態 $v = u$ を意味することから、この仮定のもとで方程式系 (E) は放物・放物型 Keller-Segel 系に一致する。Keller-Segel 系は $f(u) \equiv 0$ という仮定から得られたが、これは α 次の減衰関数 $f(u) = 1 - \mu u^\alpha$ における $\alpha = 0$ かつ $\mu = 1$ の場合に対応するため、0 次減衰の 2 因子走化性系であると考えることができる。一方、先に述べたように、線形関数 (4.1) は 1 次減衰に相当する ($\alpha = 1$)。空間 2 次元放物・放物型 Keller-Segel 系については、解の時間大域存在と爆発の臨界値が存在することが知られている [18, 20, 22, 33, 42]。この臨界値は、生物の初期総量 $\|u_0\|_{L_1}$ と走化性強度 χ の積 $\chi\|u_0\|_{L_1}$ の関数である。このことは、十分小さい初期総量 $\|u_0\|_{L_1}$ ないし走化性強度 χ のもとでは、解の時間大域存在が保証され、逆にそうでなければ解の爆発が起こることを示唆する。空間次元が 3 以上の Keller-Segel 系については、Winkler [53] によって、臨界値が退化する、すなわち、いかに制御パラメータ $\chi\|u_0\|_{L_1}$ を小さく取ろうとも、解が爆発しうることが球領域の場合において証明されている。

減衰項を有する ($\alpha > 1$) 走化性系については、大崎等 [39] による 2 次減衰を有する 2 因子走化性系に関する結果 (空間 2 次元) がある。この系は方程式系 (E) に

おいて, $f(u) = u(1 - \mu u)$ および $\delta = 0$ と設定したときに対応する. 大崎等 [39] は走化性係数 χ および生物初期総量 $\|u_0\|_{L_1}$ がいかなる値をとろうとも, 解の時間大域存在が保証されることを示し, さらに, 指数アトラクターが存在することも示している. 一方, 久藤等 [26] は, グローバルアトラクターがストライプや六角形状の振幅を有するフーリエモード解を含むことを示した ([17, 24, 41] も参照). Winkler [54] はこれらの空間 2 次元という制限を取り去り, 任意次元の凸領域においては, 関数 f が $f(0) \geq 0$ ならびに $f(u) \leq 1 - \mu u^2$ をみたした上で, 減衰係数 μ が適切に大きいとき, 解の時間大域存在が保証されることを示した. Winkler [54] はさらに, $\tau = 1$ の場合に限れば, 解の時間大域存在が保証されるような μ の範囲を $\mu > (n\chi)/4$ と見積もった. Lin-Mu [28] ならびに Xiang [58] は最近, 非凸領域の場合に踏み込み, 特に, Xiang [58] は $\tau = 1$ ならびに空間 3 次元非凸領域の場合で, 解の時間大域存在が保証されるような μ の範囲を $\mu > \frac{9}{\sqrt{10}-2}\chi = (7.743\cdots)\chi$ と広げた. 以上の結果は, 2 因子 2 次減衰走化性系においては, (χ と比して) 適度に大きな μ の下では, 解の時間大域存在が, χ および $\|u_0\|_{L_1}$ に何らかのスムールネスを課すことなく, 任意次元において保証されるということを示唆する ([59] も参照). 一方, Xiang [60] は $f(u) = u - \frac{\mu u^2}{\log^\gamma(1+u)}$, $\gamma \in (0, 1)$, とした劣 2 次減衰の場合において, 空間 2 次元であれば, いかなる爆発も起きないことを示した. *Very weak solution* (極弱解とでも訳するのが適切か) という概念 [52] を導入すると, 時間大域存在が, 任意次元における劣 2 次減衰 ($\alpha < 2$) の場合においても保証される. 実際に, Vigliani [50, 51] は, 任意次元凸領域において, 減衰オーダーが $\alpha \in (2 - (1/n), 2)$ の場合に, 有界な弱解が時間大域的に存在することを示している. この方向の研究は, 最近, 非線形分泌項を導入することによって進展を遂げている [34, 35, 57, 61]. その他, この周辺の話はレビュー論文 [13] に詳しい ([21] も参照).

1 次減衰項 (4.1) を有するオリジナルの Deneubourg 系 (E) に対する解析については, 野田・大崎 [37] が空間 1 次元の場合において, 時間大域解ならびにグローバルアトラクターの存在を示している. さらに野田・大崎 [37] は適当に大きな μ/χ の下では, 時間大域解は一意的な空間一様解 $(1/\mu, 1/\mu, 1/\mu)$ へと収束するという示した. リャプノフ関数を構成することによって示した. 本節では, この結果 [37] を空間 2 次元の場合へと拡張する. Hu-Tao [23] は, Strohm 等 [43] が提案した松

食い虫 (mountain pine beetle) の分布に関する数理モデルを単純化した 3 因子 (非直接) 走化性系の研究を行なった. このモデルは, 2 次減衰項 $f(u) = \mu u(1 - u)$ を有する Deneubourg 系 (E) に一致する. Hu-Tao [23] は, この系の空間 3 次元の場合を考え, $\mu > 0$ に制限を加えることなく, 解の時間大域存在を示した. これは, 同じ減衰作用を有する 2 因子 (直接) 走化性系においては, 解の時間大域存在には, 現在のところ μ が適当に大きいことが必要である状況と照らして興味深い. さらに Hu-Tao [23] は, この場合において, μ が適当に大きければ, すべての時間大域解が一意空間一様解へと収束することも示し, その 1 つの下限も示した. Li-Tao [29] は, Hu-Tao [23] の結果を, 一般次元かつ α -次の減衰を有する関数 $f(u) = u - u^\alpha$, $\alpha > n/2$, $n \geq 2$, の場合へと一般化した.

八木 [56] は, 方程式系 (E) において, 関数 v に対して飽和作用を導入した. 具体的には, 方程式系 (E) における第 2 式を $\delta v_t = -v + (1 - \frac{v}{K})u$ と取り換えた系を空間 3 次元の場合において考えた. そのことによって, 八木 [56] は空間次元が 3 の場合でも, 時間大域解ならびに指数アトラクターが構成できることを示した. Tello-Wrzosek [47] は, 方程式系 (E) の別の修正版を $f(u) \equiv 0$ の下で考えた. Tello-Wrzosek [47] はまた, その系の時間大域存在を示した上で, 定常解の安定性についても一般次元の下で研究を行った. 特に, 少なくとも空間 1 次元の場合であれば, その非直接系は非自明な定常解を有することが示された. 1 つの時間スケールの極限 $\tau \rightarrow 0$ を考えたとき, 方程式系 (E) は放物・楕円型 Keller-Segel 系に類似した非直接走化性系に帰着する. Tao-Winkler [45] は, その非直接走化性系においては, 初期関数が十分な正則性を有する場合, 解の時間大域存在が示される上, 解の有限時刻爆発が決して起こらないことを示した. その上, 空間 2 次元円板領域における回転対称解に限ったときの, 解の一様有界存在と解の無限時刻爆発に関する臨界値を明示した [45].

Deneubourg 系 (E) に対する解析の第一歩として, 本章で我々は, 空間 2 次元におけるオリジナルの Deneubourg 系 (E) を考え, χ , $\|u_0\|_{L_1}$ および $1/\mu$ に対するスモールネス (4.29) (もしくは同値な条件として (4.30)) を課すことによって解の時間大域存在を示す (Theorem 13). スモールネスを課さない場合の解の時間大域存在については引き続き未解決問題となってしまいが, 我々の解析においてスモールネスは解の一様評価を得ること (節 4.3) や吸収集合とグローバルアトラクター

を構成すること (Theorem 16 および Theorem 18) に活用するため, 現在のところ外せない条件である.

また我々は, 無限次元力学系を構成することによって, 解の漸近挙動を研究する. 解の様評価は有界な吸收集合を基礎空間 $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ において導く. 一方, Theorem 13 によれば, 時間大域解でコンパクト集合へと収束できないものがあることが分かる. 実際, 方程式系第 2 式の解作用素におけるコンパクト性の欠如により, 解の第 2 成分 v は初期値 v_0 と同じ関数空間に留まり続ける. このことは, Deneubourg 系 (E) が部分散逸系 (*partly dissipative system*) に分類されることを意味する [30, 48]. グローバルアトラクターは, 基礎空間におけるコンパクトで不変な集合である. したがって今述べたような非コンパクトな解作用素を直接用いてもグローバルアトラクターは構成できない. しかしながら我々は元来系が有するグローバルアトラクターを引き出すため, 解作用素をコンパクトな部分とその摂動とみなせる部分へと分解して, この摂動が $t \rightarrow \infty$ の極限において 0 へと収束することを示す.

我々はまた基礎空間 \mathcal{H} において相対コンパクトな不変集合 \mathcal{X} を構成する. さらなる仮定を加えることによって我々は空間一様解 $(1/\mu, 1/\mu, 1/\mu)$ に対するリャプノフ関数を構成する. 2 次減衰を有する 2 因子走化性系 (方程式系 (E) において $\delta = 0, \tau = 1, f(u) = u(1 - \mu u)$) に対しては, He-Zheng [19] が条件 $\mu > \chi/4$ の下で空間一様解に対するリャプノフ関数を構成している. さらにこの条件 ($\mu > \chi/4$) は次の意味で最適である: 空間一様解周りの線形化作用素は, 領域を長方形領域に取る必要はあるが, $\mu < \chi/4$ という条件下で正実部を有する固有値を持ちうる. He-Zheng [19] はまた, 空間 3 次元においてもこのことを考察し, μ が十分大きいときのリャプノフ関数を得ている (空間 3 次元の場合は, 現在までに μ が適当に大きい場合しか解の時間大域存在が示されていないことに注意する [28, 54, 58]. また, [27, 28, 55, 62] についても参照のこと).

方程式系 (E) の第 1 式が $f(u) = u^{\alpha-1}(1 - \mu u)$ という型の α 次減衰を有するとす

ると, He-Zheng [19] と同様の手法は, 次式を導く :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [\mu u - 1 - \log(\mu u)] dx &= \int_{\Omega} \left(\mu - \frac{1}{u} \right) \cdot u_t dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} dx + \int_{\Omega} \chi \frac{\nabla u \nabla w}{u} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{u^{2-\alpha}} (1 - \mu u)^2 dx. \end{aligned}$$

この式は, 2次減衰 $\alpha = 2$ であれば, L_2 の意味での吸収項が導かれることを意味し, 一方, (4.1) における1次減衰 $\alpha = 1$ の場合は, L_1 の意味での吸収項しか得られないことを示唆している. 1次減衰の場合におけるこの困難に対して, 我々は解が最終的に行き着く正不変集合である \mathcal{X} という状態空間に着目し, この状態空間に限れば, $u(t)$ に対する最大値ノルムの一様有界性 ($\|u(t)\|_c \leq r, (u(t), v(t), w(t)) \in \mathcal{X}$) を導くことができ, その結果, L_2 の意味での吸収項 $-\frac{1}{r} \int_{\Omega} (1 - \mu u)^2 dx$, が得られることを示す. この工夫によって, 1次減衰の場合でも同様のリャプノフ関数を構成することができる.

4.1 準備

本節では, 関数空間ならびに線形作用素に関する既知の結果を列挙する [39, 46, 49, 56]. 領域 Ω は \mathbb{R}^2 において有界で, 滑らかな境界を有するとする.

Sobolev 空間における補間 $0 \leq s_0 < s < s_1 < \infty$ に対して, $H^s(\Omega)$ は, $H^{s_0}(\Omega)$ と $H^{s_1}(\Omega)$ の間の補間空間 $[H^{s_0}(\Omega), H^{s_1}(\Omega)]_{\theta}$ を表す. ここで, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$. また次の補間不等式が成り立つ:

$$\|w\|_{H^s} \leq C \|w\|_{H^{s_0}}^{1-\theta} \|w\|_{H^{s_1}}^{\theta}, \quad w \in H^{s_1}(\Omega). \quad (4.2)$$

Sobolev 空間における埋め込み定理

$0 \leq s < 1$ のとき, $H^s(\Omega) \subset L_r(\Omega)$, $2 \leq r \leq 2/(1 - s)$, であり, 埋め込み作用素は連続. また, 次の不等式が成り立つ:

$$\|w\|_{L_r} \leq C_s \|w\|_{H^s}, \quad w \in H^s(\Omega). \quad (4.3)$$

$s = 1$ のとき, $H^s(\Omega) \subset L_r(\Omega)$, $2 \leq r < \infty$, であり, 埋め込み作用素は連続. また, 次の不等式が成り立つ:

$$\|w\|_{L_r} \leq C_s \|w\|_{H^s}, \quad w \in H^s(\Omega). \quad (4.4)$$

$1 < s < \infty$ のとき, $H^s(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ であり, 埋め込み作用素は連続. また, 次の不等式が成り立つ:

$$\|w\|_C \leq C_s \|w\|_{H^s} \quad \text{for } w \in H^s(\Omega). \quad (4.5)$$

Gagliardo-Nirenberg の不等式 $1 \leq q \leq r < \infty$ とする. このとき, 埋め込み $H^1(\Omega) \cap L_q(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ が成り立つ. また, 次の不等式が成り立つ:

$$\|w\|_{L_r} \leq C_{q,r} \|w\|_{H^1}^{1-(q/r)} \|w\|_{L_q}^{q/r}, \quad w \in H^1(\Omega). \quad (4.6)$$

論文 [34, 39] と同様, $0 \leq w \in L^2(\Omega)$ に対して, 次のノルムを導入する:

$$N_{\log}^1(w) = \|(w+1) \log(w+1)\|_{L_1} = \int_{\Omega} (w+1) \log(w+1) dx.$$

またこのとき, $w \in H^1(\Omega)$ に対して, 次の不等式が任意の正数 $\eta > 0$ に対して成り立つ [14, p.1199]:

$$\|w\|_{L_3}^3 \leq \eta \|w\|_{H^1}^2 N_{\log}^1(w) + \psi(\eta^{-1}) \|w\|_{L_1}. \quad (4.7)$$

ここで, $\psi(\cdot)$ はある連続増加関数である.

関数の積のノルム評価 $s > 1$ のとき, 式 (4.5) より,

$$\|uv\|_{L_2} \leq C \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_\infty} \leq C_s \|u\|_{L_2} \|v\|_{H^s}, \quad u \in L_2(\Omega), v \in H^s(\Omega), \quad (4.8)$$

が成り立つ。また直ちに,

$$\begin{aligned}
\|\nabla \cdot (u\nabla v)\|_{L_2} &\leq \|\nabla u \cdot \nabla v\|_{L_2} + \|u\Delta v\|_{L_2} \\
&\leq \|\nabla u\|_{L_2} \|\nabla v\|_{L_\infty} + \|u\|_{L_\infty} \|\Delta v\|_{L_2} \\
&\leq C_s(\|u\|_{H^1} \|v\|_{H^{1+s}} + \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^2}), \\
&\quad u \in H^s(\Omega), v \in H^{1+s}(\Omega), \quad (4.9)
\end{aligned}$$

が得られる。 $0 < \xi < 1$ に対して,

$$\|uv\|_{L_2} \leq C_\xi \|u\|_{H^\xi} \|v\|_{H^{1-\xi}}, \quad u \in H^\xi(\Omega), v \in H^{1-\xi}(\Omega), \quad (4.10)$$

が成り立つ。また, $s > 1$ に対して,

$$\|uv\|_{H^1} \leq C_s \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^s}, \quad u \in H^1(\Omega), v \in H^s(\Omega), \quad (4.11)$$

が成り立つ。式 (4.8) と式 (4.11) を補間することにより, $s > 1$ および $0 \leq \xi \leq 1$ に対して,

$$\|uv\|_{H^\xi} \leq C_{s,\xi} \|u\|_{H^\xi} \|v\|_{H^s}, \quad u \in H^\xi(\Omega), v \in H^s(\Omega), \quad (4.12)$$

が成り立つ。また特に, $s > 1$ に対して, 空間 $H^s(\Omega)$ は Banach 代数となり, 不等式

$$\|uv\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}, \quad u, v \in H^s(\Omega), \quad (4.13)$$

が成り立つ。

分数べき作用素の定義域と $L_2(\Omega)$ におけるラプラス作用素のシフト性 線形作用素 $A = -\Delta + 1$ を斉次ノイマン境界条件下で考える。ここで, Δ は $L_2(\Omega)$ における Laplace 作用素とする。定義域は $H_N^2(\Omega)$ である。また, 次の評価が成り立つ:

$$\|w\|_{H^2} \leq C \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2} \leq C(\|\Delta w\|_{L_2} + \|w\|_{L_2}), \quad w \in H_N^2(\Omega). \quad (4.14)$$

作用素 A の分数べきにおける定義域は,

$$\mathcal{D}(A^\theta) = \begin{cases} H^{2\theta}(\Omega), & 0 \leq \theta < \frac{3}{4}, \\ H_N^{2\theta}(\Omega), & \frac{3}{4} < \theta < \frac{7}{4}, \end{cases} \quad (4.15)$$

と定義でき、ノルムも同値である。ここで、 $H_N^s(\Omega)$, $s > 3/2$, は $H^s(\Omega)$ の閉部分空間で,

$$H_N^s(\Omega) = \left\{ w \in H^s(\Omega); \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\} \quad s > \frac{3}{2}.$$

例えば、 $Aw \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ であることは、 w が斉次ノイマン境界条件をみたす上、 $\Delta w \in H^1(\Omega)$ であることを意味するが、いま、境界 $\partial\Omega$ は滑らかであることから、 $w \in H^3(\Omega)$ が導かれて、次の評価が成り立つ:

$$\|w\|_{H^3} \leq C(\|Aw\|_{H^1} + \|w\|_{H^1}) \leq C(\|\nabla\Delta w\|_{L_2} + \|w\|_{H^1}), \quad w \in H_N^3(\Omega). \quad (4.16)$$

その上、式 (4.3), (4.15) および (4.2) より、次式が成り立つ:

$$\|\Delta w\|_{L_3} \leq C\|\Delta w\|_{H^{1/3}} \leq C\|w\|_{H^{7/3}} \leq C\|w\|_{H^1}^{1/3}\|w\|_{H^3}^{2/3}, \quad w \in H^3(\Omega). \quad (4.17)$$

4.2 時間局所解

我々はまず時間局所解の存在に関する一般的な定理 [56, Chap. 4] (also [40]) をはじめにレビューする。 X を Banach 空間とし、そのノルムを $\|\cdot\|_X$ とする。我々は X における次の半線形抽象放物型発展方程式に対する Cauchy 問題を考える:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

ここで線形作用素 A は X における角域作用素であり、そのスペクトルは次の領域に含まれるとする: $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| \leq \phi\}$, $0 \leq \phi < \pi/2$. またレゾルベントのノルムについて、次の評価が成り立つとする: $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M/(|\lambda| + 1)$, $\lambda \notin \Sigma$, ただし M は定数. 非線形作用素 F は $\mathcal{D}(A^\eta)$ から X , $0 < \eta < 1$, の作用素

であり，次の Lipschitz 条件をみたすとする：

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(\tilde{U})\|_X &\leq \psi \left(\|A^\gamma U\|_X + \|A^\gamma \tilde{U}\|_X \right) \\ &\quad \times \left[\|A^\eta(U - \tilde{U})\|_X + \left(\|A^\eta U\|_X + \|A^\eta \tilde{U}\|_X \right) \|A^\gamma(U - \tilde{U})\|_X \right], \\ &\quad U, \tilde{U} \in \mathcal{D}(A^\eta). \end{aligned} \quad (4.19)$$

ここで， γ は $0 < \gamma \leq \eta < 1$ であるような指数であり，また $\psi(\cdot)$ はある連続増加関数である．初期値 U_0 は $\mathcal{D}(A^\gamma)$ に属するとする．以上の仮定の下，[56, Theorem 4.1](ないし [40, Theorem 3.1]) より，Cauchy 問題 (4.18) に対する次の局所解の存在定理が得られる：

Proposition 3. ([56, Theorem 4.1]) 上の設定の下，任意の $U_0 \in \mathcal{D}(A^\gamma)$ に対して，方程式 (4.18) に対する局所解が，次の関数空間の中に一意的に存在する：

$$\begin{cases} U \in \mathcal{C}^1((0, T_{U_0}); X) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(A^\gamma)) \cap \mathcal{C}((0, T_{U_0}); \mathcal{D}(A)), \\ t^{1-\gamma}U \in \mathcal{B}((0, T_{U_0}); \mathcal{D}(A)). \end{cases}$$

また次の評価が成り立つ：

$$t^{1-\gamma} \|AU(t)\|_X + \|A^\gamma U(t)\|_X \leq C_{U_0}, \quad 0 < t \leq T_{U_0}.$$

ここで， T_{U_0} および C_{U_0} は初期値のノルム $\|A^\gamma U_0\|_X$ のみに依存する正定数である．また，写像 $U_0 \mapsto U(t)$ は $\mathcal{D}(A^\gamma)$ において連続である．

Proposition 3 を適用することにより，方程式系 (E) に対する時間局所解の存在を示すことができる．

Theorem 4. 任意の初期関数 $(u_0, v_0, w_0) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^2(\Omega)$ に対して，方程式系 (E) は時間局所解 (u, v, w) を次の関数空間の中に一意的にもつ：

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^1((0, T]; L_2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0, T]; H_N^2(\Omega)), \\ v \in \mathcal{C}^1((0, T]; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; H^1(\Omega)), \\ w \in \mathcal{C}^1((0, T]; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; H_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0, T]; H_N^3(\Omega)). \end{cases}$$

さらに、次の評価が成り立つ：

$$t^{\frac{1}{2}}(\|u(t)\|_{H^2} + \|w(t)\|_{H^3}) + (\|u(t)\|_{H^1} + \|v(t)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^2}) \leq C, \quad 0 < t \leq T. \quad (4.20)$$

ここで、 T および C はノルム $\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2}$ のみに依存する正定数である。さらに、写像 $(u_0, v_0, w_0) \mapsto (u(t), v(t), w(t))$ は $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^2(\Omega)$ において連続である。

Proof. 方程式系 (E) は $X = L_2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ における次の半線形放物型発展方程式として表すことができる：

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0 = {}^T[u_0 \ v_0 \ w_0]. \end{cases} \quad (4.21)$$

ここで、線形作用素 A は次式で定義する：

$$A = \begin{bmatrix} -\Delta + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{-1}(-\Delta + 1) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}(A) = H_N^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^3(\Omega).$$

非線形作用素 F は

$$F(U) = \begin{bmatrix} -\chi \nabla \cdot (u \nabla w) + \bar{f}(u) + u \\ \delta^{-1} u \\ \tau^{-1} v \end{bmatrix},$$

$$U = {}^T[u \ v \ w] \in \mathcal{D}(A^\eta) = H^{\frac{5}{4}}(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^{\frac{9}{4}}(\Omega),$$

と定義する。ここで、 $\eta = \frac{5}{8}$ であり、 $\bar{f}(u) = 1 - \mu u$, $u \in \mathbb{C}$, である。初期値 U_0 は関数空間 $\mathcal{D}(A^\gamma) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^2(\Omega)$, $\gamma = \frac{1}{2}$, より選ぶ。この設定の下、時間局所解の存在を示すには、Lipschitz 条件 (4.19) を示すだけでよい。

$U = {}^T[u \ v \ w], \tilde{U} = {}^T[\tilde{u} \ \tilde{v} \ \tilde{w}] \in \mathcal{D}(A^\eta)$ としよう. このとき, 次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(\tilde{U})\|_X &\leq \chi \|\nabla \cdot (u \nabla w - \tilde{u} \nabla \tilde{w})\|_{L_2} + (\mu + 1) \|u - \tilde{u}\|_{L_2} \\ &\quad + \delta^{-1} \|u - \tilde{u}\|_{H^1} + \tau^{-1} \|v - \tilde{v}\|_{H^1}. \end{aligned}$$

さらに, 右辺第1項について, 式(4.9)を適用すると,

$$\|\nabla \cdot (u \nabla w - \tilde{u} \nabla \tilde{w})\|_{L_2} \leq C(\|\tilde{u}\|_{H^1} + \|w\|_{H^2})(\|u - \tilde{u}\|_{H^{\frac{5}{4}}} + \|w - \tilde{w}\|_{H^{\frac{9}{4}}})$$

と評価できる. ゆえに,

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(\tilde{U})\|_X &\leq [1 + \mu + \delta^{-1} + \tau^{-1} + \chi C(\|\tilde{u}\|_{H^1} + \|w\|_{H^2})] \\ &\quad \times (\|u - \tilde{u}\|_{H^{\frac{5}{4}}} + \|v - \tilde{v}\|_{H^1} + \|w - \tilde{w}\|_{H^{\frac{9}{4}}}). \end{aligned}$$

これはリプシッツ条件(4.19)が成り立つことを示す. \square

解の非負値性も次の命題によって示される.

Proposition 5. *Theorem 4* と同じ仮定の下, もし, $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0, w_0 \geq 0$ であれば, 時間局所解 (u, v, w) についても, $u(t) \geq 0, v(t) \geq 0, w(t) \geq 0$ が $0 \leq t \leq T$ に対して成り立つ.

Proof. はじめに局所解 (u, v, w) は実数値であることに注意しよう. 実際, この共役複素 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ もまた方程式系(E)の解である. いま解は一意的であるから, $(u, v, w) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ である. 非負値性を確認する. Theorem 4 より, $w \in \mathcal{C}([0, T]; H_N^2(\Omega))$ であり, また評価 $\|w(t)\|_{H^2} \leq C_{U_0}, 0 \leq t \leq T$, が成り立つ. ただし, C_{U_0} はある正定数. 関数 $H(u)$ を $C^{1,1}$ -級の関数であり, 次をみたすものとしよう: $H(u) = \frac{1}{2}u^2, -\infty < u < 0; H(u) = 0, 0 \leq u < \infty$. このとき,

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} H(u(x, t)) dx, \quad 0 \leq t \leq T,$$

は非負の C^1 -級関数となり、その導関数について、

$$\varphi'(t) = \int_{\Omega} H'(u) [\Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla w) + \bar{f}(u)] dx$$

が成り立ち、さらに、

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= - \int_{\Omega} \nabla H'(u) \cdot \nabla u dx + \chi \int_{\Omega} u \nabla H'(u) \cdot \nabla w dx + \int_{\Omega} H'(u) \bar{f}(u) dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla H'(u)|^2 dx - \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} \{H'(u)\}^2 \Delta w dx + \int_{\Omega} H'(u) \bar{f}(u) dx. \end{aligned}$$

ここで、 $\int_{\Omega} H'(u) \bar{f}(u) dx \leq 0$ であることに注意する。式 (4.6) を使えば、

$$\begin{aligned} - \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} \{H'(u)\}^2 \Delta w dx &\leq \frac{\chi}{2} \|H'(u)\|_{L^4}^2 \|\Delta w\|_{L^2} \\ &\leq C \|H'(u)\|_{H^1} \|H'(u)\|_{L^2} \|\Delta w\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|H'(u)\|_{H^1}^2 + C \|H'(u)\|_{L^2}^2 \|\Delta w\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

いま、 $0 \leq \{H'(u)\}^2 \leq 2H(u)$ および $\|\Delta w\|_{L^2} \leq C \|w\|_{H^2} \leq C_{U_0}$ であることより、 $\varphi'(t) \leq C_{U_0} \varphi(t)$ 成り立ち、これより、 $\varphi(t) \leq e^{C_{U_0} t} \varphi(0)$ 。ゆえに、 $u_0(x) \geq 0$ とすれば、 $\varphi(t) = 0$ が得られ、これより、 $u(x, t) \geq 0, 0 \leq t \leq T$ 。関数 $v(x, t)$ および $w(x, t)$ の非負値性は比較定理により示される。□

4.3 アプリオリ評価と時間大域解

本節では、解のアプリオリ評価を行う。記号 $\langle \varphi \rangle$ で、 L_1 -関数 $\varphi \in L_1(\Omega)$ の Ω 上での積分平均を表す：

$$\langle \varphi \rangle := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\varphi(x)| dx, \quad \varphi \in L_1(\Omega),$$

ただし、 $|\Omega|$ は Ω の面積を表す。

Proposition 6. (u, v, w) は方程式系 (E) の局所解であるとする。このとき,

$$\|u(t)\|_{L_1} = \int_{\Omega} u(x, t) dx = e^{-\mu t} \left(\|u_0\|_{L_1} - \frac{|\Omega|}{\mu} \right) + \frac{|\Omega|}{\mu}. \quad (4.22)$$

Proof. 方程式系 (E) の第 1 式を Ω 上で積分する。このとき,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} f(u) dx = |\Omega| - \mu \int_{\Omega} u dx. \quad (4.23)$$

これを $\|u(t)\|_{L_1}$ について解けば, (4.22) が得られる。□

またこれより, 次の系が得られる。

Corollary 7. K_0 は $\|u(t)\|_{L_1}$ の上限であるとする。このとき,

$$K_0 := \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{L_1} = \max \left\{ \|u_0\|_{L_1}, \frac{|\Omega|}{\mu} \right\} = |\Omega| \cdot \max \left\{ \langle u_0 \rangle, \frac{1}{\mu} \right\}. \quad (4.24)$$

Proposition 8. (u, v, w) は方程式系 (E) の局所解であるとし, また, 下で述べるスモールネス (4.29), もしくは同値な式 (4.30) を仮定する。このとき,

$$\begin{aligned} N_{\log}^1(u(t)) + \frac{\chi\delta}{2} \|v(t)\|_{L_2}^2 + \frac{\chi\tau}{4} \|w(t)\|_{H^1}^2 \\ \leq e^{-d_1 t} \left(N_{\log}^1(u_0) + \frac{\chi\delta}{2} \|v_0\|_{L_2}^2 + \frac{\chi\tau}{4} \|w_0\|_{H^1}^2 \right) \\ + 5 \int_0^t e^{-d_1(t-s)} (\|u(s)\|_{L_1} + |\Omega|) ds \\ \leq \psi \left(N_{\log}^1(u_0) + \|v_0\|_{L_2} + \|w_0\|_{H^1} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

ただし, $d_1 = \min\{\mu, 1/(2\delta), 1/\tau\}$ であり, $\psi(\cdot)$ はある連続増加関数である。

Proof. 方程式系 (E) 第 1 式に $\log(u+1)$ をかけ, それを Ω 上で積分する。この

とき,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [(u+1) \log(u+1) - u] dx \\
& \leq - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u+1} dx + \chi \int_{\Omega} u |\Delta w| dx + \int_{\Omega} (1 - \mu u) \log(u+1) dx \\
& \leq - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u+1} dx + \chi \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{\chi}{4} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + \int_{\Omega} (1 - \mu u) \log(u+1) dx. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

次に, 方程式系 (E) 第2式に v をかけ, それを Ω 上で積分する. このとき,

$$\frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx. \quad (4.27)$$

最後に, 方程式系 (E) 第3式に $-\Delta w + w$ をかけ, それを Ω 上で積分する. このとき,

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (w^2 + |\nabla w|^2) dx \\
& \leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (w^2 + |\nabla w|^2) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + \int_{\Omega} v^2 dx. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

不等式 (4.27) に 2χ をかけた式と, 不等式 (4.28) に $\chi/2$ をかけた式と恒等式 (4.23) の3つの式すべてを不等式 (4.26) に加えると,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[N_{\log}^1(u) + \chi \delta \|v\|_{L_2}^2 + \frac{\chi \tau}{4} \|w\|_{H^1}^2 \right] \\
& \leq - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u+1} dx + 2\chi \|u\|_{L_2}^2 + \int_{\Omega} (1 - \mu u) \log(u+1) dx \\
& \quad + \int_{\Omega} (1 - \mu u) dx - \frac{\chi}{2} \|v\|_{L_2}^2 - \frac{\chi}{4} \|w\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

ここで, (4.6) を使えば,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_2}^2 &\leq \|u\|_{L_1}^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L_4}^{\frac{4}{3}} \leq \|u\|_{L_1}^{\frac{2}{3}} \|\sqrt{1+u}\|_{L_8}^{\frac{8}{3}} \\
&\leq \|u\|_{L_1}^{\frac{2}{3}} \cdot C_G \|\sqrt{1+u}\|_{H^1}^2 \|\sqrt{1+u}\|_{L_2}^{\frac{2}{3}} \\
&\leq C_G \|u\|_{L_1}^{\frac{2}{3}} \|1+u\|_{L_1}^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\|\nabla \sqrt{1+u}\|_{L_2}^2 + \|1+u\|_{L_1} \right) \\
&\leq C_G \|u\|_{L_1}^{\frac{2}{3}} \|1+u\|_{L_1}^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{1+u} dx + \|1+u\|_{L_1} \right)
\end{aligned}$$

が得られる ([56, p.424] も参照). ここで, $C_G = (C_{2,8})^{\frac{8}{3}}$ であり, $C_{2,8}$ は Gagliardo-Nirenberg の不等式: $\|\varphi\|_{L_8} \leq C_{2,8} \|\varphi\|_{H^1}^{\frac{3}{4}} \|\varphi\|_{L_2}^{\frac{1}{4}}$, $\varphi \in H^1(\Omega)$, の埋め込み定数である. これより,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[N_{\log}^1(u) + \chi \delta \|v\|_{L_2}^2 + \frac{\chi \tau}{4} \|w\|_{H^1}^2 \right] \\
&\leq - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u+1} dx + 2\chi C_G K_0^{\frac{2}{3}} (|\Omega| + K_0)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{1+u} dx + \|1+u\|_{L_1} \right) \\
&\quad + \int_{\Omega} (1-\mu u) \log(u+1) dx + \int_{\Omega} (1-\mu u) dx - \frac{\chi}{2} \|v\|_{L_2}^2 - \frac{\chi}{4} \|w\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

ゆえに, $\chi, \|u_0\|_{L_1}$ ならびに $1/\mu$ を,

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{C_G}{2} \chi K_0^{\frac{2}{3}} (|\Omega| + K_0)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{C_G}{2} \chi \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L_1}, \frac{|\Omega|}{\mu} \right\}^{\frac{2}{3}} \left[|\Omega| + \max \left\{ \|u_0\|_{L_1}, \frac{|\Omega|}{\mu} \right\} \right]^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{C_G |\Omega|}{2} \chi \cdot \max \left\{ \langle u_0 \rangle, \frac{1}{\mu} \right\}^{\frac{2}{3}} \left[1 + \max \left\{ \langle u_0 \rangle, \frac{1}{\mu} \right\} \right]^{\frac{1}{3}} < 1 \quad (4.29)
\end{aligned}$$

が成り立つ程度に十分小さくとれば, このとき,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[N_{\log}^1(u) + \chi\delta\|v\|_{L_2}^2 + \frac{\chi\tau}{4}\|w\|_{H^1}^2 \right] \\
& \leq 4\zeta\|1+u\|_{L_1} + \int_{\Omega} (1-\mu u) \log(u+1) dx + \int_{\Omega} (1-\mu u) dx \\
& \quad - \frac{\chi}{2}\|v\|_{L_2}^2 - \frac{\chi}{4}\|w\|_{H^1}^2 \\
& \leq 5 \int_{\Omega} (1+u) dx - \mu N_{\log}^1(u) - \frac{\chi}{2}\|v\|_{L_2}^2 - \frac{\chi}{4}\|w\|_{H^1}^2 \\
& \leq 5(|\Omega| + \|u\|_{L_1}) - d_1 \left[N_{\log}^1(u) + \chi\delta\|v\|_{L_2}^2 + \frac{\chi\tau}{4}\|w\|_{H^1}^2 \right].
\end{aligned}$$

ここで, $d_1 = \min\{\mu, 1/(2\delta), 1/\tau\}$. この微分不等式を解き, また, 恒等式 (4.22) を用いれば, 評価式 (4.25) が得られる. \square

Remark 9. スモールネス (4.29) は, χ について解くことで, 次のように表現することもできる:

$$\begin{aligned}
\chi & < \frac{2}{C_G \max \left\{ \|u_0\|_{L_1}, \frac{|\Omega|}{\mu} \right\}^{\frac{2}{3}} \left[|\Omega| + \max \left\{ \|u_0\|_{L_1}, \frac{|\Omega|}{\mu} \right\} \right]^{\frac{1}{3}}} \\
& = \frac{2\mu}{C_G |\Omega| \max \{ \mu \langle u_0 \rangle, 1 \}^{\frac{2}{3}} [\mu + \max \{ \mu \langle u_0 \rangle, 1 \}]^{\frac{1}{3}}}. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

ここで, *Corollary 25* によれば, 定数 C_G は $|\Omega|^{-1}$ を最小値として, 下に有界である. したがって, 面積 $|\Omega|$ は値 $C_G|\Omega|$ を 0 に近づけるための制御パラメータにはなり得ない. また, スモールネス (4.29) ないし (4.30) における指数 $2/3$ は区間 $(0, 1)$ に属する任意の数に置き換えられる. 実際,

$$\|u\|_{L_2}^2 \leq C_{2,2r}^{\frac{2r}{r-1}} \|u\|_{L_1}^{\frac{r-2}{r-1}} \|1+u\|_{L_1}^{\frac{1}{r-1}} \cdot \|\sqrt{1+u}\|_{H^1}^2$$

という不等式が任意の $r > 2$ に対して成り立つことから、スモールネス (4.29) は

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{C'_G}{2} \chi K_0^{\frac{r-2}{r-1}} (|\Omega| + K_0)^{\frac{1}{r-1}} \\ &= \frac{C'_G}{2} \chi \cdot \max \left\{ \|u_0\|_{L_1}, \frac{|\Omega|}{\mu} \right\}^{\frac{r-2}{r-1}} \left[|\Omega| + \max \left\{ \|u_0\|_{L_1}, \frac{|\Omega|}{\mu} \right\} \right]^{\frac{1}{r-1}} \\ &= \frac{C'_G |\Omega|}{2} \chi \cdot \max \left\{ \langle u_0 \rangle, \frac{1}{\mu} \right\}^{\frac{r-2}{r-1}} \left[1 + \max \left\{ \langle u_0 \rangle, \frac{1}{\mu} \right\} \right]^{\frac{1}{r-1}} < 1\end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで、 $C'_G = C_{2,2r}^{\frac{2r}{r-1}}$, $r > 2$.

Proposition 10. (u, v, w) を方程式系 (E) の局所解とする。このとき、スモールネス (4.29) の下で、

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L_2}^2 + \delta \|v(t)\|_{H^1}^2 + \frac{\tau}{4} \|(-\Delta + 1)w(t)\|_{L_2}^2 \\ \leq e^{-d_2 t} \left(\|u_0\|_{L_2}^2 + \delta \|v_0\|_{H^1}^2 + \frac{\tau}{4} \|(-\Delta + 1)w_0\|_{L_2}^2 \right) \\ + \int_0^t e^{-d_2(t-s)} \psi(N_{\log}^1(u(s)) + \|w(s)\|_{H^1}) ds \\ \leq \psi(\|u_0\|_{L_2} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2})\end{aligned}\quad (4.31)$$

が成り立つ。ここで、 $d_2 = \min\{2\mu, 1/(2\delta), 1/\tau\}$ であり、 $\psi(\cdot)$ はある連続増加関数である。

Proof. 方程式系 (E) 第 1 式に u をかけ、それを Ω 上で積分すると、

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx \leq - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} u^2 |\Delta w| dx + \int_{\Omega} (u - \mu u^2) dx.\quad (4.32)$$

次に、方程式系 (E) 第 2 式に $-\Delta v + v$ をかけ、それを Ω 上で積分すると、

$$\frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{H^1}^2 \leq -\frac{1}{2} \|v\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2.\quad (4.33)$$

最後に、作用素 $-\Delta + 1$ を方程式系 (E) 第 3 式に作用させた上、 $-\Delta w + w$ をかけ

て, Ω 上で積分すると,

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^2 \leq -\frac{1}{2} \|\nabla \Delta w\|_{L_2}^2 - \frac{1}{2} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^2 + \|v\|_{H^1}^2. \quad (4.34)$$

不等式 (4.34) を 4 でわった式に, 式 (4.33) と (4.32) を加えると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u\|_{L_2}^2 + \delta \|v\|_{H^1}^2 + \frac{\tau}{4} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^2 \right] \\ & \leq -\frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} u^2 |\Delta w| dx + \int_{\Omega} (u - \mu u^2) dx + \|u\|_{L_2}^2 \\ & \quad - \frac{1}{4} \|v\|_{H^1}^2 - \frac{1}{8} \|\nabla \Delta w\|_{L_2}^2 - \frac{1}{8} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^2 \\ & \leq -\frac{1}{4} \|u\|_{H^1}^2 + \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} u^2 |\Delta w| dx + \int_{\Omega} (u - \mu u^2) dx + C_2^2 \|u\|_{L_1}^2 \\ & \quad - \frac{1}{4} \|v\|_{H^1}^2 - \frac{1}{8} \|\nabla \Delta w\|_{L_2}^2 - \frac{1}{8} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

ここで, (4.6) より, $\|u\|_{L_2}^2 \leq C_2 \|u\|_{H^1} \|u\|_{L_1}$ という式を用いた. ただし, C_2 は埋め込みに関する定数. さらに, (4.7), (4.17) ならびに (4.16) より,

$$\begin{aligned} & \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} u^2 |\Delta w| dx \leq \frac{\chi}{2} \|u\|_{L_3}^2 \|\Delta w\|_{L_3} \\ & \leq \frac{\chi}{2} N_{\log}^1(u)^{\frac{2}{3}} [\eta \|u\|_{H^1}^2 + \psi(\eta^{-1})]^{\frac{2}{3}} \cdot C_3 \|w\|_{H^1}^{\frac{1}{3}} (\|\nabla \Delta w\|_{L_2}^2 + \|w\|_{H^1}^2)^{\frac{1}{3}} \\ & \leq \frac{1}{8} (\|\nabla \Delta w\|_{L_2}^2 + \|w\|_{H^1}^2) + \frac{2}{3\sqrt{3}} (\chi C_3)^{\frac{3}{2}} N_{\log}^1(u) \|w\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} [\eta \|u\|_{H^1}^2 + \psi(\eta^{-1})] \end{aligned}$$

という評価が, 埋め込み定数 C_3 とともに成り立つ. ここで, η を

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} (\chi C_3)^{\frac{3}{2}} N_{\log}^1(u) \|w\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \eta < \frac{1}{4}$$

と選べば,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u\|_{L_2}^2 + \delta \|v\|_{H^1}^2 + \frac{\tau}{4} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^2 \right] \\
& \leq -\mu \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{4} \|v\|_{H^1}^2 - \frac{1}{8} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^2 + \psi(N_{\log}^1(u) + \|w\|_{H^1}) \\
& \leq -\frac{d_2}{2} \left[\|u\|_{L_2}^2 + \delta \|v\|_{H^1}^2 + \frac{\tau}{4} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^2 \right] + \psi(N_{\log}^1(u) + \|w\|_{H^1}),
\end{aligned}$$

ただし, $d_2 = \min\{2\mu, \frac{1}{2\delta}, \frac{1}{\tau}\}$. この微分不等式を解くことにより, 評価 (4.31) が得られる. \square

Proposition 11. (u, v, w) を方程式系 (E) の局所解とする. このとき, スモールネス (4.29) の下で, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L_2}^2 & \leq e^{-d_3 t} \|\nabla u_0\|_{L_2}^2 + \int_0^t e^{-d_3(t-s)} \psi(\|u(s)\|_{L_2} + \|w(s)\|_{H^2}) ds \\
& \leq \psi(\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2}), \quad (4.35)
\end{aligned}$$

ただし, $d_3 = 2\mu$ であり, $\psi(\cdot)$ はある連続増加関数である.

Proof. 方程式系 (E) 第 1 式に $-\Delta u$ をかけ, これを Ω 上で積分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
\leq \chi \int_{\Omega} (\Delta u)(\nabla u \cdot \nabla w + u \Delta w) dx. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

この右辺に対して, (4.3), (4.4), (4.5), (4.2), ならびに (4.14) を適用すると,

$$\begin{aligned}
& \chi \left| \int_{\Omega} (\Delta u)(\nabla u \cdot \nabla w + u \Delta w) dx \right| \\
& \leq \chi \|\Delta u\|_{L_2} (\|\nabla u\|_{L_3} \|\nabla w\|_{L_6} + \|u\|_C \|\Delta w\|_{L_2}) \\
& \leq C\chi \|\Delta u\|_{L_2} \left(\|\nabla u\|_{H^{\frac{1}{3}}} \|\nabla w\|_{H^1} + \|u\|_{H^{\frac{4}{3}}} \|\Delta w\|_{L_2} \right) \\
& \leq C\chi \|u\|_{H^2} \|u\|_{H^{\frac{4}{3}}} \|w\|_{H^2} \leq C\chi \|u\|_{H^2}^{\frac{5}{3}} \|u\|_{L_2}^{\frac{1}{3}} \|w\|_{H^2} \\
& \leq C\chi \|(-\Delta + 1)u\|_{L_2}^{\frac{5}{3}} \|u\|_{L_2}^{\frac{1}{3}} \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2} \\
& \leq \frac{1}{4} \|(-\Delta + 1)u\|_{L_2}^2 + C\chi^6 \|u\|_{L_2}^2 \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^6
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここでの C は方程式系 (E) の係数には無関係な定数である. このことと, $\|(-\Delta + 1)u\|_{L_2}^2 \leq 2(\|\Delta u\|_{L_2}^2 + \|u\|_{L_2}^2)$, $u \in H_N^2(\Omega)$, という事実により,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L_2}^2 + \mu \|\nabla u\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L_2}^2 + C\chi^6 \|u\|_{L_2}^2 \|(-\Delta + 1)w\|_{L_2}^6.$$

この微分不等式を $\|\nabla u(t)\|_{L_2}^2$ について解けば, 評価 (4.35) が得られる. \square

上の命題を組み合わせれば, 次の系が得られる:

Corollary 12. スモールネス (4.29) を仮定する. このとき, 方程式系 (E) に対する局所解 (u, v, w) は次の評価をみたす:

$$\|u(t)\|_{H^1} + \|v(t)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^2} \leq \psi(\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2}), \quad t \geq 0,$$

ただし, $\psi(\cdot)$ はある連続増加関数である.

Corollary 12 より, 解の時間大域存在を示すことができる.

Theorem 13. もし, $\chi \cdot \max\{\|u_0\|_{L_1}, |\Omega|/\mu\}^{2/3}$ が条件 (4.29), もしくは同値な条件として, (4.30) をみたす程度に小さいとする. このとき, 非負初期関数を $(u_0, v_0, w_0) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^2(\Omega)$ と選べば, 方程式系 (E) は時間大域解 (u, v, w) を関数

空間

$$\begin{cases} 0 \leq u \in \mathcal{C}^1((0, \infty); L_2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, \infty); H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0, \infty); H_N^2(\Omega)), \\ 0 \leq v \in \mathcal{C}^1((0, \infty); H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, \infty); H^1(\Omega)), \\ 0 \leq w \in \mathcal{C}^1((0, \infty); H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, \infty); H_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0, \infty); H_N^3(\Omega)) \end{cases} \quad (4.37)$$

の中に一意的にもつ。さらに、時間大域解は初期関数に関する一様評価

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{H^1} + \|v(t)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^2} \\ & \leq \psi(\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2}), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

をみtas。ここで、 $\psi(\cdot)$ はある連続増加関数である。

Proof. Theorem 4 および Proposition 5 より、任意の非負初期関数 (u_0, v_0, w_0) に対して、一意的な非負時間局所解 (u, v, w) が区間 $[0, T]$ 上で存在する。ここで、存在時間 T は、初期関数のノルム $\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2}$ に対してのみ依存する。加えて、Corollary 12 より、ノルム $\|u(t)\|_{H^1} + \|v(t)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^2}$, $0 \leq t \leq T$, は上から一様な定数 $\psi(\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2})$ で抑えられており、この定数自体もまた、ノルム $\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2}$ のみに依存している。したがって、解の存在区間は $[0, T + \tilde{T}]$ にまで延長でき、さらに解のノルム $\|u(t)\|_{H^1} + \|v(t)\|_{H^1} + \|w(t)\|_{H^2}$, $0 \leq t \leq T + \tilde{T}$, は再び同じ定数 $\psi(\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1} + \|w_0\|_{H^2})$ で評価されることが、Corollary 12 によって分かる。ゆえに、解の存在区間は再び $T + 2\tilde{T}$ にまで延長される。この操作を繰り返せば、解の時間大域存在を示すことができ、さらに解の評価 (4.38) も得ることができる。 \square

本節では最後に、次節で行う吸収集合ならびにリャプノフ関数の構成に必要な高次のノルムについてのアプリアリ評価を行う。

Proposition 14. (u, v, w) を方程式系 (E) に対する時間局所解とする。このとき、

任意の時刻 $t_0 \in (0, T]$ に対して, 次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned} \|\nabla\Delta w(t)\|_{L_2}^2 &\leq 2\tau^2 e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \|\nabla w_t(t_0)\|_{L_2}^2 \\ &\quad + \frac{4\tau}{\delta^2} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-s)} (\|\nabla u(s)\|_{L_2}^2 + \|\nabla v(s)\|_{L_2}^2) ds \\ &\quad + 4\|\nabla v(t)\|_{L_2}^2, \quad t_0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Proof. 作用素 $\partial/\partial t$ と ∇ を方程式系 (E) 第3式に作用させ, ∇w_t をかけて, それを Ω 上で積分すると,

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w_t\|_{L_2}^2 + \|\Delta w_t\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w_t\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla v_t\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{\delta^2} (\|\nabla u\|_{L_2}^2 + \|\nabla v\|_{L_2}^2).$$

この不等式を時刻 t_0 から t まで積分すると,

$$\begin{aligned} \|\nabla w_t\|_{L_2}^2 &\leq e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \|\nabla w_t(t_0)\|_{L_2}^2 \\ &\quad + \frac{2}{\tau\delta^2} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-s)} (\|\nabla u(s)\|_{L_2}^2 + \|\nabla v(s)\|_{L_2}^2) ds, \quad t_0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

次に, ∇ を方程式系 (E) 第3式に作用させ, 2乗したのち, Ω 上で積分すると,

$$\begin{aligned} \|\nabla\Delta w\|_{L_2}^2 &= \tau^2 \|\nabla w_t\|_{L_2}^2 - \|\nabla w\|_{L_2}^2 - \|\nabla v\|_{L_2}^2 \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \nabla w \nabla \Delta w \, dx - 2 \int_{\Omega} \nabla v \nabla \Delta w \, dx + 2 \int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx \\ &\leq \tau^2 \|\nabla w_t\|_{L_2}^2 - 2\|\Delta w\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla\Delta w\|_{L_2}^2 + 2\|\nabla v\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

これより, 評価 (4.39) が得られる. □

Proposition 15. (u, v, w) を方程式系 (E) に対する時間局所解とする. このとき, スモールネス (4.29) の下で,

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{L_2}^2 + \delta \|\nabla v\|_{L_2}^2 &\leq e^{-d_5(t-t_0)} (\|\Delta u(t_0)\|_{L_2}^2 + \delta \|\nabla v(t_0)\|_{L_2}^2) \\ &\quad + \int_{t_0}^t e^{-d_5(t-s)} \psi (\|u(s)\|_{H^1} + \|w(s)\|_{H^3}) \, ds, \quad t_0 < t < T, \end{aligned} \quad (4.40)$$

が成り立つ。ただし、 $d_5 = \min\{2\mu, 1/\delta\}$ であり、 $\psi(\cdot)$ はある連続増加関数である。

Proof. 作用素 ∇ を方程式系 (E) 第 1 式に作用させたのち、 $\nabla\Delta u$ をかけて、それを Ω 上で積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx &= - \int_{\Omega} \nabla[\Delta u - \chi \nabla(u \nabla w) + 1 - \mu u] \cdot \nabla \Delta u dx \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx + \frac{\chi^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla[\nabla(u \nabla w)]|^2 dx - \mu \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx. \end{aligned}$$

ここで、走化性の項に対応する部分は、

$$\frac{1}{4} |\nabla[\nabla(u \nabla w)]|^2 \leq \left(\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^2 \right) |\nabla w|^2 + 2 |\nabla u|^2 \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w|^2 + u^2 |\nabla \Delta w|^2$$

のように上から評価される。ここで、 $D^\alpha = (\partial/\partial x)^{\alpha_1} (\partial/\partial y)^{\alpha_2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. さらに、右辺の第 1 項ならびに第 2 項に対応する部分は、 $|\alpha| = 2$ とすると、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 |\nabla w|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |D^\alpha w|^2 dx \\ \leq \|D^\alpha u\|_{L^4}^2 \|\nabla w\|_{L^4}^2 + \|\nabla u\|_{\mathcal{C}}^2 \|D^\alpha w\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_{H^{\frac{5}{2}}}^2 \|w\|_{H^2}^2 \\ \leq C \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}}^{\frac{3}{2}} \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{H^2}^2 \leq \eta \|\nabla \Delta u\|_{L^2}^2 + C_\eta \|u\|_{H^1}^2 (\|w\|_{H^2}^8 + 1). \end{aligned}$$

右辺の最後の項は同様に、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2 |\nabla \Delta w|^2 dx &\leq \|u\|_{\mathcal{C}}^2 \|\nabla \Delta w\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}}^2 \|\nabla \Delta w\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \|u\|_{H^3}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \Delta w\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \|\nabla \Delta w\|_{L^2}^2 \left(\|\nabla \Delta u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \eta \|\nabla \Delta u\|_{L^2}^2 + C_\eta \|u\|_{H^1}^2 \|\nabla \Delta w\|_{L^2}^2 (\|\nabla \Delta w\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + 1) \end{aligned}$$

と評価される。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ \leq \psi(\|u\|_{H^1} + \|w\|_{H^3}). \quad (4.41) \end{aligned}$$

次に方程式系 (E) 第2式に ∇ を作用させたのち, ∇v をかけ, Ω 上で積分すると,

$$\frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (4.42)$$

ゆえに, (4.41) および (4.42) より,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \delta \|\nabla v\|_{L^2}^2] + \frac{d_5}{2} [\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \delta \|\nabla v\|_{L^2}^2] \leq \psi(\|u\|_{H^1} + \|w\|_{H^3})$$

が得られる. ただし, $d_5 = \min\{2\mu, 1/\delta\}$. この微分不等式を解けば, 評価 (4.40) が得られる. \square

4.4 グローバルアトラクターと空間一様解に対するリャプノフ関数

本節を通して, スモールネス (4.29) を課す. 本節では, Theorem 13 で得られた時間大域解の漸近挙動について調べる. 基礎空間を

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$$

に選び, 力学系を設定する. まず, 初期関数の空間を

$$\mathcal{K} = \{(u, v, w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^2(\Omega); u, v, w > 0, u \text{ は (4.29) をみたす.}\},$$

$$\|U\|_{\mathcal{K}} = \|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} + \|w\|_{H^2}, \quad U = {}^T[u \ v \ w],$$

とする. ここで, 解の正值性 (非負でなく) が, 後ほどリャプノフ関数を構成する上で (Theorem 19) 新たに必要となるが, これは Theorem 13 において強最大値原理 (例えば [31, p.331]) を適用すれば示すことができる. そのことにより, 連続半群による解作用素 $S(t) : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ が定義される. これ以降, 力学系 $(S(t), \mathcal{K}, \mathcal{H})$ を考えよう.

節 4.3 のアприオリ評価を組み合わせれば, 力学系 $(S(t), \mathcal{K}, \mathcal{H})$ に対する吸収集合 \mathcal{B} を構成することができる. ここで, 集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ が吸収集合であるとは, 任意の有

界集合 $B \subset \mathcal{K}$ に対して、そのみに依存する時刻 t_B が存在して、 $\bigcup_{t \geq t_B} S(t)B \subset B$ が成り立つときにいう。

Theorem 16. 球

$$\mathcal{B} = \{(u, v, w) \in H_N^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^3(\Omega); \|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^1} + \|w\|_{H^3} \leq r, \\ u, v, w > 0, u \text{ は (4.29) をみたます.}\} \subset \mathcal{K}$$

の半径 $r (< \infty)$ を十分大きくとると、 \mathcal{B} は力学系 $(S(t), \mathcal{K}, \mathcal{H})$ における有界な吸引集合となる。

Proof. 証明は一様 Gronwall の補題 [48, p.91] ([56, Section 1-10] も参照) を逐次的に適用することにより与えられる。しかし、上で得られたアприオリ評価であれば、最後の節で示す Lemma 26 を順次適用することで示される。具体的には、Lemma 26 を (4.22), (4.25), (4.31), (4.35), (4.39) ならびに (4.40) に対して、それぞれ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の場合に対応すると考えることで示される。 \square

Remark 17. 吸引集合 \mathcal{B} の半径 r は上で得られたアприオリ評価によって適切に決定される。特に、 r は十分大きな μ に対してオーダー $O(1)$ である。

グローバルアトラクターを構成するため、我々は、解の第2成分 v を $L_\infty(\Omega)$ において、次のように分解する： $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, $v_1(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)} u(s) ds$, $v_2(t) = e^{-\frac{1}{\delta}t} v_0$, $v_0 \in L_\infty(\Omega)$. この分解に対応して、解作用素 $S(t)$ もまた、コンパクト作用素 $S_1(t)$ とその摂動 $S_2(t)$ に分解される。ここで、 $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, $S_1(t) : (u_0, v_0, w_0) \mapsto (u(t), v_1(t), w(t))$, $S_2(t) : (u_0, v_0, w_0) \mapsto (0, v_2(t), 0)$. この分解を活用すれば、部分散逸系である Deneubourg 系に対するグローバルアトラクターを構成することができる。

Theorem 18. 力学系 $(S(t), \mathcal{K}, \mathcal{H})$ はグローバルアトラクター \mathcal{A} を有する。さらに、 \mathcal{A} は初期関数の空間 \mathcal{K} において連結である。

Proof. $\|v_2(t)\|_{H^1} = e^{-\frac{1}{\delta}t} \|v_0\|_{H^1}$ であるから、任意の有界集合 $B \subset \mathcal{K}$ に対して、 $\sup_{U_0 \in B} \|S_2(t)U_0\|_{\mathcal{K}} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) がいえる。一方、 $v_1(t)$ を第2成分とする任意の軌

道は, \mathcal{K} においてコンパクトである. 実際, Theorem 4, Corollary 12, Proposition 14 ならびに Proposition 15 より,

$$\|v_1(t)\|_{H^2} \leq \int_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)} \|u(s)\|_{H^2} ds \leq \psi(\|U_0\|_{\mathcal{K}}) \int_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)} (s^{-\frac{1}{2}} + 1) ds \leq C_B.$$

このことは, $\bigcup_{t \geq t_B} S_1(t)B$ が \mathcal{K} において相対コンパクトであることを示す. ここで, [48, p.23] (もしくは [30, Theorem 2.1]) を適用すれば, 吸収集合 B の ω -極限集合, $\mathcal{A} = \omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} S_1(s)B}$, が力学系 $(S(t), \mathcal{K}, \mathcal{H})$ に対するグローバルアトラクターであることが示される. \square

一般的にいえば, グローバルアトラクターの構造は複雑なものである. しかしながら, 力学系 $(S(t), \mathcal{K}, \mathcal{H})$ に対しては, 減衰係数 μ をさらに大きくとることによって, グローバルアトラクター \mathcal{A} が一意空間一様解

$$U^* = {}^T[u^* \ v^* \ w^*] := {}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & \mu & \mu \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

のみからなるシングルトンとなることが示される. 実際, 適当に大きな μ に対して, 我々は空間一様解に対するリャプノフ関数を構成することができる. リャプノフ関数の構成においては, u の最大値ノルムの一様有界性が肝となる. 正不変集合

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t \geq t_B} S(t)B \subset B$$

を導入しよう. このとき解の漸近挙動はすべて, 最終的な力学系 $(S(t), \mathcal{X}, \mathcal{H})$ に帰着する. 吸収集合 $B \subset \mathcal{K}$ が存在する (Theorem 16) ことより, 一様な定数 M_r が存在して,

$$\|u(t)\|_c \leq C \|U(t)\|_{H^2 \times H^1 \times H^3} \leq C \cdot r := M_r, \quad U(t) = {}^T[u(t) \ v(t) \ w(t)] \in \mathcal{X}, \quad (4.44)$$

が成り立ち, さらに定数 M_r は十分大きな μ に対して, オーダー $O(1)$ である. ここで, C は不等式 (4.5) における埋め込み定数であり, r は吸収集合 B の半径である.

以上の設定のもと，次の定理が示される：

Theorem 19. 減衰係数 μ に対して次の新たな仮定を課す： $\mu > \chi\sqrt{M_r}/4$ ，ただし， M_r は式 (4.44) をみたす定数．このとき，汎関数

$$\Phi(U(t)) = \int_{\Omega} \left[\mu u - 1 - \log \mu u + \frac{\delta \mu^2}{M_r} (v - v^*)^2 + \frac{\tau \chi^2}{8} (w - w^*)^2 \right] dx$$

は $\frac{d}{dt}\Phi(U(t)) \leq 0$ ， $\Phi(U) > 0$ ($U \neq U^*$)，および $\Phi(U^*) = 0$ をみたす．すなわち， Φ は，力学系 $(S(t), \mathcal{X}, \mathcal{H})$ において，自明な固定点 U^* に対するリャプノフ関数である．つまりこのとき，グローバルアトラクター \mathcal{A} は自明な固定点のみからなるシングルトンとなる： $\mathcal{A} = \{U^*\}$ ．

Remark 20. 十分大きな μ に対して， $M_r = O(1)$ であるから，条件 $\mu > \chi\sqrt{M_r}/4$ をみたすような $(\chi, \mu) \subset \mathbb{R}_+^2$ のなす集合は， \mathbb{R}_+^2 において空ではない．

Proof. 条件 $\Phi(U) > 0$ ($U \neq U^*$) および $\Phi(U^*) = 0$ が成り立つことは自明である．したがって， $\frac{d}{dt}\Phi(U(t)) \leq 0$ を示せばよい．従来の結果 [19, 32, 44, 58] と同様にこれを行えるため，あとは吸収項 $-\|u - u^*\|_{L_2}^2$ を構成することに注力する．特に，Xiang [58] の方法を参考にする． $\|u(t)\|_C \leq M_r$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\mu u - \log \mu u) dx &= - \int_{\Omega} \nabla \left(\mu - \frac{1}{u} \right) (\nabla u - \chi u \nabla w) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{u} (1 - \mu u)^2 dx \\ &\leq - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} dx + \int_{\Omega} \chi \frac{\nabla u \nabla w}{u} dx - \frac{\mu^2}{M_r} \int_{\Omega} (u - u^*)^2 dx. \end{aligned}$$

またこれより,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(U(t)) &\leq - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} dx + \chi \int_{\Omega} \frac{\nabla u \nabla w}{u} dx - \frac{\chi^2}{4} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\
&\quad - \frac{\mu^2}{M_r} \int_{\Omega} (u - u^*)^2 dx + \frac{2\mu^2}{M_r} \int_{\Omega} (u - u^*)(v - v^*) dx - \frac{2\mu^2}{M_r} \int_{\Omega} (v - v^*)^2 dx \\
&\quad - \frac{\chi^2}{4} \int_{\Omega} (w - w^*)^2 dx + \frac{\chi^2}{4} \int_{\Omega} (v - v^*)(w - w^*) dx \\
&\leq - \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u}{u} - \frac{\chi}{2} \nabla w \right|^2 dx - \frac{\mu^2}{M_r} (1 - \varepsilon_1) \int_{\Omega} (u - u^*)^2 dx \\
&\quad - \frac{2\mu^2}{M_r} \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2 M_r \chi^2}{16\mu^2} \right) \int_{\Omega} (v - v^*)^2 dx \\
&\quad - \frac{\chi^2}{4} \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_2} \right) \int_{\Omega} (w - w^*)^2 dx
\end{aligned}$$

が十分小さな任意定数 ε_1 と ε_2 に対して成り立つ. 条件 $\mu > \chi\sqrt{M_r}/4$ の下, 任意定数 ε_1 と ε_2 は, 以下をみたすように選ぶことができる:

$$0 < \varepsilon_1 < 1, \quad 1 - \frac{1}{2\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2 M_r \chi^2}{16\mu^2} > 0, \quad \varepsilon_2 > \frac{1}{2}. \quad (4.45)$$

実際, 任意に $s > 0$ を $\frac{16\mu^2}{M_r \chi^2} = 1 + s$ として設定すれば, ε_1 と ε_2 は

$$\varepsilon_1 = \frac{3s + 2}{2(2s + 1)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2s^2 + 7s + 4}{4(3s + 2)}$$

と表すことができる. 以下の関数を導入する:

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} [(u - u^*)^2 + (v - v^*)^2 + (w - w^*)^2] dx.$$

このとき,

$$\frac{d}{dt}\Phi(U(t)) \leq -\eta\varphi(t) \leq 0, \quad (4.46)$$

ただし, $\eta = \min \left\{ \frac{\mu^2}{M_r} (1 - \varepsilon_1), \frac{2\mu^2}{M_r} \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_1} \right), \frac{\chi^2}{4} \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_2} \right) \right\}$ がいえ, 証明が完了する. \square

Proposition 21. スモールネス (4.29) ならびに $\mu > \chi\sqrt{M_r}/4$ を仮定する. この

とき、力学系 $(S(t), \mathcal{X}, \mathcal{H})$ における各々の軌道 $U(t)$ は、指数的に自明な固定点 U^* へ収束する：

$$\|u(t) - u^*\|_C + \|v(t) - v^*\|_{H^1} + \|w(t) - w^*\|_{C^1} \leq C_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 1. \quad (4.47)$$

ただし、 $\lambda > 0$ はある定数で、 C_0 は正不変集合 \mathcal{X} に依存する定数である。

Proof. Bai-Winker [12] および Xiang [58] と同様の方法でこれを示すことができる。微分不等式 (4.46) を任意の時刻 t_0 から ∞ まで積分すると、 $\int_{t_0}^{\infty} \varphi(s) ds \leq \frac{1}{\eta} \Phi(U(t_0)) < \infty$. 関数 $\varphi(t)$ の正值性から $\varphi(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, がいえる。これは、 $U(t)$ が固定点 U^* に L_2 -ノルムで収束することを示す。いま軌道 $U(t)$ は関数空間 (4.37) に属するから、 u および w の成分の収束は、Gagliardo-Nirenberg の不等式を使って示すことができる： $\|u\|_C \leq C \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}} \leq C \|u\|_{H^2}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L_2}^{\frac{1}{4}}$, $\|w\|_{C^1} \leq C \|w\|_{H^{\frac{5}{2}}} \leq C \|w\|_{H^3}^{\frac{5}{6}} \|w\|_{L_2}^{\frac{1}{6}}$. その上、 $\lim_{u \rightarrow u^*} \frac{\mu u - 1 - \log \mu u}{(u - u^*)^2} = \frac{\mu^2}{2}$ であるから、ある時刻 t_0 が存在して、

$$\frac{\mu^2}{4} (u - u^*)^2 \leq \mu u - 1 - \log \mu u \leq \mu^2 (u - u^*)^2, \quad t \geq t_0. \quad (4.48)$$

不等式 (4.48) のうち、上からの評価によって、 $\frac{d}{dt} \Phi(U(t)) \leq -C_\eta \Phi(U(t)), t \geq t_0$. 一方、不等式 (4.48) のうち、下からの評価によって、 $\Phi(U(t)) \leq \Phi(U_0) e^{-C_\eta(t-t_0)}, t \geq t_0$. 最後に、 u の H^1 -ノルムによる収束については、ある定数 $\lambda > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} \|v(t) - v^*\|_{H^1} &\leq e^{-\frac{1}{\delta}(t-1)} \|v(1) - v^*\|_{H^1} + \frac{1}{\delta} \int_1^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-1-s)} \|u(s) - u^*\|_{H^1} ds \\ &\leq C_0 \left[e^{-\frac{1}{\delta}(t-1)} + \int_1^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-1-s)} \cdot e^{-\lambda s} ds \right] \leq C_0 t e^{-\lambda t}, \quad t \geq 1. \end{aligned}$$

定数 C_0 をとり直せば、 $\|v(t) - v^*\|_{H^1} \leq C_0 e^{-\lambda t}, t \geq 1$, が示される。 \square

4.5 空間一様解の安定性

本節では、方程式 (E) に対する空間一様解 U^* の局所安定性について考える。特に、走化性係数 χ に対して、休息係数 μ がどれくらい小さければ、 U^* の不安定化が起こるのか、すなわち、 (χ, μ) が第 1 象限 \mathbb{R}_+^2 のいかなる領域に含まれれば、もっとも単純なグローバルアトラクター $\mathcal{A} = \{U^*\}$ が不安定となり、非自明なモード解を含んでくるのかということについて考える。

方程式系 (E) を再び、 $X = L_2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ における半線形放物型方程式 (4.18) として設定する。ここで、線形作用素の定義域は $\mathcal{D}(A) = H_N^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^3(\Omega)$ であるとする。方程式 (4.18) に関する空間一様解 U^* のまわりの線形化方程式は

$$\frac{dW}{dt} + [A - F_U(U^*)]W = 0, \quad W = U - U^* := {}^T[\xi \ \eta \ \zeta],$$

と表される。ここで、 $W(0) = U_0 - U^* := {}^T[\xi_0 \ \eta_0 \ \zeta_0]$ は、 $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_N^2(\Omega)$ に属する摂動であり、記号 $F_U(U)$ は関数 $F(U)$ の Fréchet 微分を表す。

空間一様解 (4.43) の不安定化は、線形作用素

$$-A + F_U(U^*) = \begin{bmatrix} \Delta - \mu & 0 & -\chi\mu^{-1}\Delta \\ \delta^{-1} & -\delta^{-1} & 0 \\ 0 & \tau^{-1} & \tau^{-1}(\Delta - 1) \end{bmatrix}$$

が、実部が正の固有値 λ を有するとき起こる。斉次ノイマン境界条件下のラプラス作用素 $-\Delta : H_N^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ の固有値を α_k 、対応する固有関数を φ_k とする：

$$-\Delta\varphi_k = \alpha_k\varphi_k \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (4.49)$$

このとき、 $0 = \alpha_0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ であり、また $\{\varphi_k\}$ は $L_2(\Omega)$ における直交基底となる。したがって、線形方程式系は各フーリエモード k に対する可算無限個の方程式へと帰着する。対応する行列に対する固有方程式は次の 3 次方程式で

ある：

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -\alpha_k - \mu - \lambda & 0 & \chi\mu^{-1}\alpha_k \\ \delta^{-1} & -\delta^{-1} - \lambda & 0 \\ 0 & \tau^{-1} & \tau^{-1}(-\alpha_k - 1) - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{\delta\tau} \left[(\lambda + \alpha_k + \mu)(\delta\lambda + 1)(\tau\lambda + \alpha_k + 1) - \frac{\chi\alpha_k}{\mu} \right] = 0, \\
& k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.50)
\end{aligned}$$

整理すると, $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \delta\tau > 0, \\
a_1 &= \tau + \delta [\tau(\alpha_k + \mu) + \alpha_k + 1] > 0, \\
a_2 &= \delta(\alpha_k + \mu)(\alpha_k + 1) + \tau(\alpha_k + \mu) + \alpha_k + 1 > 0, \\
a_3 &= (\alpha_k + \mu)(\alpha_k + 1) - (\chi/\mu)\alpha_k.
\end{aligned}$$

不等式 $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ が成り立つことより, Routh-Hurwitz の安定性定理によって次のことがいえる: もし $a_3 = (\alpha_k + \mu)(\alpha_k + 1) - (\chi/\mu)\alpha_k > 0$ であれば, すべての (4.50) に対する解 λ に対して, $\text{Re } \lambda < 0$ がいえる. 同様に, もし $a_3 = 0$ であれば, 方程式 (4.50) は 1 つの零解 ($\lambda = 0$) と $\text{Re } \lambda < 0$ であるような 2 つの解を有し, これは線形化解析で扱える範囲を超える. 最後に, もし $a_3 < 0$, すなわち,

$$a_3 = (\alpha_k + \mu)(\alpha_k + 1) - \frac{\chi}{\mu}\alpha_k = \alpha_k^2 - \left(\frac{\chi}{\mu} - \mu - 1 \right) \alpha_k + \mu < 0 \quad (4.51)$$

であれば, 方程式 (4.50) は正の解 $\lambda > 0$ を有する. $\alpha_k > 0$ であるためには, $(\chi/\mu) - \mu - 1 > 0$ および $[(\chi/\mu) - \mu - 1]^2 > 4\mu$ であることが必要であるが, これは 1 つの (必要) 条件式

$$\chi > \mu(\sqrt{\mu} + 1)^2 \quad (4.52)$$

にまとめることができる. また, 条件 (4.52) の下で, 空間一様解 (4.43) が不安定

化するための十分条件が得られる：

$$\alpha_- < \alpha_k < \alpha_+, \quad 2\alpha_{\pm} = \frac{\chi}{\mu} - \mu - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{\chi}{\mu} - \mu - 1\right)^2 - 4\mu} > 0. \quad (4.53)$$

命題の形で述べると以下のようなになる：

Proposition 22. α_k および φ_k ($k = 1, 2, \dots$) をそれぞれ, ラプラス作用素 $-\Delta$ の固有値問題 (4.49) に関する固有値と固有関数であるとする. 条件 (4.52) を仮定する. 固有値 α_k が条件 (4.53) をみたすならば, 空間一様状態 (4.43) は十分小さな摂動の下で, 固有関数 φ_k に沿う形で不安定化する. 条件 (4.52) とは反対の条件 $\chi < \mu(\sqrt{\mu} + 1)^2$ を仮定する. このとき, 空間一様状態 (4.43) 局所漸近安定である.

空間一様解が不安定化すると, 摂動がその振幅を固有関数の方向に増幅させる. 解のパターン形成などを解析するためには, やはり解の時間大域存在が必要となる. 次の命題が成り立つ.

Proposition 23. $C_G|\Omega| < 2$ であるとき, 適当に小さな $\mu > 0$ に対して, 次の不等式が成り立つ：

$$\mu(\sqrt{\mu} + 1)^2 < \frac{2\mu}{C_G|\Omega| \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}^{\frac{2}{3}} [\mu + \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}]^{\frac{1}{3}}}.$$

したがってこのとき, スモールネス (4.29) (もしくは同値な条件として (4.30)) と不安定化条件 (4.52) を同時にみたすような領域 $(\chi, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$ が存在する. この領域においては条件 (4.53) を満足する k モードのパターン解が時間大域的に存在する. 逆に, $C_G|\Omega| \geq 2$ であるとき, 任意の $\mu > 0$ に対して, 逆の不等式が成り立つ, すなわち, スモールネス (4.29) (もしくは同値な条件として (4.30)) および不安定化条件 (4.52) を表す $(\chi, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$ に関する領域は共通部分をもたない. ここで, $C_G = C_{2,8}^{\frac{8}{3}}$ は Proposition 8 の証明中の定数であり, また $C_{2,8}$ は Gagliardo-Nirenberg の不等式: $\|\varphi\|_{L^8} \leq C_{2,8} \|\varphi\|_{H^1}^{\frac{3}{4}} \|\varphi\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}$ における埋め込み定数である.

Proof. $C_G|\Omega| < 2$ であるとき,

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow +0} \left[\mu(\sqrt{\mu} + 1)^2 / \frac{2\mu}{C_G|\Omega| \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}^{\frac{2}{3}} [\mu + \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}]^{\frac{1}{3}}} \right] \\ &= \lim_{\mu \rightarrow +0} \left[(\sqrt{\mu} + 1)^2 \cdot \frac{C_G|\Omega|}{2} \cdot \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}^{\frac{2}{3}} [\mu + \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}]^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= \frac{C_G|\Omega|}{2} < 1 \end{aligned}$$

がいえる。逆に, $C_G|\Omega| \geq 2$ であるとき, 任意の $\mu > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} & (\sqrt{\mu} + 1)^2 \cdot \frac{C_G|\Omega|}{2} \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}^{\frac{2}{3}} [\mu + \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}]^{\frac{1}{3}} \\ & \geq (\sqrt{\mu} + 1)^2 \cdot 1 \cdot \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}^{\frac{2}{3}} [\mu + \max\{\mu\langle u_0 \rangle, 1\}]^{\frac{1}{3}} \geq 1 \end{aligned}$$

が示される. □

4.6 補題とその証明

本節では上で述べた補題の証明を与える。まず始めに, Gagliardo-Nirenberg の不等式 (4.6) ($q = 2$) における埋め込み定数の下からの評価を与える。ここで, 領域 Ω は引き続き有界領域であるとするが, ここのみの仮定として, Ω は Lipschitz 境界を有するとする。

Lemma 24. 領域 Ω は有界で Lipschitz 境界を有するとする。また, $r \geq 1$ を任意の数とする。定数 $C_{2,2r}$ を次の Gagliardo-Nirenberg の不等式に関する埋め込み定数であるとする: $\|u\|_{L_{2r}} \leq C_{2,2r} \|u\|_{H^1}^{1-\frac{1}{r}} \|u\|_{L_2}^{\frac{1}{r}}$, $u \in H^1(\Omega)$ 。このとき定数 $C_{2,2r}$ に関する下からの評価が成り立つ:

$$C_{2,2r} \geq \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}}.$$

Proof. $u \in H^1(\Omega)$ とする。このとき, $r = 1$ の場合は明らか。 $r > 1$ とすると,

Gagliardo-Nirenberg の不等式より,

$$\|u\|_{L_2}^2 \leq \|1\|_{L_{\frac{r}{r-1}}} \| |u|^2 \|_{L_r} = |\Omega|^{1-\frac{1}{r}} \|u\|_{L_{2r}}^2 \leq |\Omega|^{1-\frac{1}{r}} \cdot C_{2,2r}^2 \|u\|_{H^1}^{2(1-\frac{1}{r})} \|u\|_{L_2}^{\frac{2}{r}}.$$

これより, 次式が得られる:

$$\sup_{u \neq 0} \left[\frac{\|u\|_{L_2}^2}{\|u\|_{H^1}^2} \right]^{1-\frac{1}{r}} \leq |\Omega|^{1-\frac{1}{r}} \cdot C_{2,2r}^2.$$

ここで, $u \neq 0$ のとき, $\frac{\|u\|_{L_2}}{\|u\|_{H^1}} \leq 1$ であることは明らかであり, さらに, 非零の定数関数, 例えば $u(x) = 1$ について, 等号が成り立つ. したがって, $1 \leq |\Omega|^{1-\frac{1}{r}} \cdot C_{2,2r}^2$ が得られて, これは所要の評価を意味する. \square

Lemma 24 において, $r = 4$ とすることにより, 次の系が得られる:

Corollary 25. $C_{2,8}$ を次の Gagliardo-Nirenberg の不等式の埋め込み定数であるとする: $\|u\|_{L_8} \leq C_{2,8} \|u\|_{H^1}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L_2}^{\frac{1}{4}}$, $u \in H^1(\Omega)$. このとき, $C_{2,8} |\Omega|^{\frac{3}{8}} \geq 1$ が成り立つ. またこれより, $C_G |\Omega| \geq 1$, $C_G = C_{2,8}^{\frac{8}{3}}$.

最後に, 吸収集合を構成するために用いる簡単な補題を示す.

Lemma 26. 関数 $f_k \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, を非負連続関数であるとし, 次の不等式が $k = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つとする:

$$f_k(t) \leq e^{-d_k t} f_k(0) + \int_0^t e^{-d_k(t-s)} \varphi_k(f_{k-1}(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

ただし, $d_k > 0$ は正定数で, 関数 $\varphi_k(\cdot)$ は連続増加関数. さらに, $k = 0$ においては, 一様評価式: $f_0(t) \leq r_0$, $t \geq t_0$, が正定数 $r_0 > 0$ ならびに時刻 $t_0 > 0$ に対して成り立つとする. このとき, 正定数 $r > 0$ ならびに時刻 $t_* > 0$ が存在して, 評価式 $f_k(t) \leq r$, $t \geq t_*$, が k に対して一様に成り立つ.

Proof. $M := \max_k f_k(0)$ とおく. $k-1$ のとき結論が正しいとする. このとき, 定

数 r_M および t_* が存在して, $f_{k-1}(s) \leq r_M, 0 \leq s \leq t_*$, がいえることから,

$$\begin{aligned} f_k(t) &\leq e^{-d_k t} M + \varphi_k(r_M) \cdot \frac{1}{d_k} [e^{-d_k(t-t_*)} - e^{-d_k t}] + \varphi_k(r) \cdot \frac{1}{d_k} [1 - e^{-d_k(t-t_*)}] \\ &\leq e^{-d_k t} \left[M + e^{d_k t_*} \cdot \frac{\varphi_k(r_M)}{d_k} \right] + \frac{\varphi_k(r)}{d_k}, \quad t \geq t_*. \end{aligned}$$

時刻 t_* と定数 r を改めて $\max\{t_*, (1/d_k) \cdot \log [M + e^{d_k t_*} \cdot \frac{\varphi_k(r_M)}{d_k}]\}$, $\max\{r, 1 + (\varphi_k(r)/d_k)\}$ とそれぞれ選べば, 再び $f_k(t) \leq r, t \geq t_*$ であることが示されるが, これは k のときも結論が正しいことを示す. \square

第5章 ミツバチの営巣初期段階の数理モデルとその解析

5.1 はじめに

セイヨウミツバチとも呼ばれる *Apis mellifera* は、社会性昆虫の代表的な例であり、共同で生活し協力して子育てすることが知られている。また、彼らは両側に規則的に配置された六角柱の空洞を有する構造をした巣を造ることができる。空洞の軸は地面に対してほぼ水平であるが、実際には開放端に向かってやや上方に傾斜している [63]。この構造は、ハニカム構造と呼ばれ、働きバチによって分泌される蜜蝋によって造られる。このように規則正しく並んだ六角形の構造が作られる工程は、長い間科学的な関心を集めてきた [64]。これまでの研究では、巣の空洞の縁がどのようにして六角形になるかという問題について、主に2つの有力な説がある。ひとつは、ミツバチが発する熱で蜜蝋が溶けて、表面張力によりハニカム構造が現れるという説である。もうひとつは、ミツバチ自身が「器用な建築家」としてハニカム構造を作製するという説である。Pirkら [65] は、ミツバチが体を加熱し、蜜蝋が液状になるまで空洞の近くの温度を上昇させた後、表面張力によって六角形になると主張している。一方、Karihalooら [66] は、液状の蜜蝋を用意して、表面張力によって六角形が自発的に現れることを示した。しかし、BauerとBienefeld [67] はミツバチが蜜蝋を液状に達するまで加熱することができないことを示した。さらに、OederとSchwabe [68] は、セルの形状に影響を与えるような蜜蝋の流れは発生しないと述べている。一方、もう一つの説であるミツバチ自身が「器用な建築家」であるという視点に立った研究では、OldroydとPratt [69] が、真社会性蜂が巣穴を構成する過程において、単純な行動ルールに従い、これを行なっていることについて議論した。彼らはその論文 [69] の中で、単純なルールにした

がってなされる自然な選択がわずかな変化をもたらしていき、そのことによって最終的には巣構造の多様性が生み出されるということを示した。また, Nazzi [70] は単純なルールで数値シミュレーションを行い, 成長するセルの壁に規則的に四角形のセルが並ぶことを示した。どの説がもっとも有力であるかは議論の余地があるが, 私たちはミツバチが自己組織化を利用する技術者であると考えている。そこで, 本研究ではミツバチの単純な行動規則を設定して, メカニズムの本質を理解しようと試みた。

ミツバチは, 造巣を始める前に, 樹木の空洞のような空間に半球形の蜂球を作って天井にぶら下がり, その後, 蜂球の中に巣を造り始める。最初に, 蜜蝋は天井に取り付けられ, 造巣は重力方向に進む。(図 5.1-a から c) 働きバチが連続した層に蜜蝋を付着し続けると, 3次元構造が形成される。ミツバチが巣を造るときに蜂球の中で規則的に整列していれば, 正確な秩序は容易に現れるはずである。しかしながら, 働きバチを注意深く観察すると必ずしもそうではない。実際, 私たちの観察では, 1つの空洞を造るときに, しばしば複数の働きバチが交互に蜜蝋を付着させることを確認している。

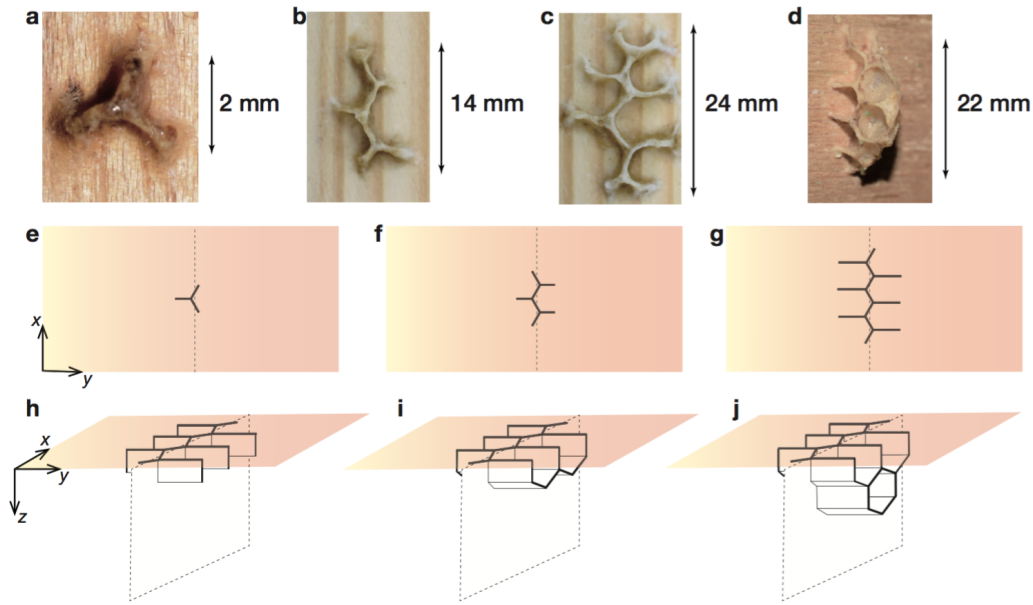


図 5.1: ハニカム構造. a から d は木製の天井に蜜蝋で作られた実際の巣, e から j は図式的に表したハニカム構造のイメージ. e から g は, 造巣過程の初期段階で現れる平面 (例えば, 天井) 上の 2 次元パターンを表し, h から j は, 3 次元パターンを表す. 本章では, 三角つまみパターン (a) を基礎構造と考える. 平面上では, いくつかの三角つまみが一方向に水平 (x 方向) に接続し (b), 次に垂直方向 (y 方向) に伸びる (c). また, 重力方向 (z 方向) にも成長する (d). e から g は, それぞれ a から c に対応する. このようにパターンは各方向に同時に成長する.

以下では, これらの規則的な構造がどのように造られるかを理解するために, 営巣の初期段階に注目する. 営巣の初期を観察してみると図 5.1 の a および e に示すようなパターンを作り始めることが分かる. この構造を以下では, 三角つまみパターンと呼ぶことにする. この構造は, ハニカム構造の基本的な営巣過程として扱うことができる. さらに, 平面上にあるいくつかの三角つまみパターンが接続されたものが巣の基礎部分となり (図 5.1-b および f), これを以下では, 魚骨パターンと呼ぶことにする. さらに, 各部は成長し (図 5.1-c および g), 図 5.1-h に示すように, 重力方向にも同時に成長する. 図 5.1-i および j において, 三角つまみパターンは, ハニカム構造の縁の一部として現れる. したがって, 三角つまみパター

ン形成のメカニズムを明確にすることが営巣初期段階の解明につながると期待できる。本章では、自己組織化の観点から三角つまみパターンがどのようにして生まれるかを明らかにするために、供給掘削モデルと名づけたエージェントベースのモデルを提案する。

5.2 手法

5.2.1 概要

供給掘削モデルは、ハニカム構造の初期構造がどのようにして生まれるのかを理解する方法として提案する。本論文では、特に営巣の初期段階に着目して研究を行った。営巣を行う働きバチには、蜜蝋を分泌して付着する供給と、下顎を使って付着した蜜蝋を掘削する掘削の2つの役割がある。モデルに含まれる供給エージェントと掘削エージェントにもそれらの役割を与えている。実際には、働きバチが両方の役割を果たすことができる可能性があるが、モデルでは役割を明確にするために分けている。以下では、2次元モデルのシミュレーションについてのみ説明するが、この概念は3次元モデルの場合にも容易に拡張できることに注意したい。三角つまみパターンは2次元空間に投影されるので、2次元三角つまみパターンの発生のための最小限の仮定を提案することを目指す。

5.2.2 時間単位

サイズが $l_x \times l_y$ の2次元系を考える。最初のモデル条件として、一定量の蜜蝋が系の中央に配置される。実際の現象でも、ハニカム構造の造巣開始時には蜜蝋が幾つかの場所に付着される。本モデルでは、他の場所の影響を受けないハニカム構造の初期段階を考えているため、そのうちの1つの成長を観察する。供給バチは系内で自由に動いて、それぞれ単位時間当たりに蜜蝋を分泌する。蜜蝋は、無作為に選択された蜜蝋の境界に加えられる。本来、働きバチは群れで働くので、2匹以上の場合、必然的に異なる点で異なる量のワックスを同時に供給することに

なるが、本モデルは、働きバチが各ステップで1つの蜜蝋を付着させることを仮定している。

5.2.3 供給エージェント

供給エージェントと蜜蝋の成長

蜜蝋の付着は無作為に行われると仮定したので、蜜蝋を付着するミツバチの存在を考慮する必要はない。代わりに、蜜蝋付着の結果として起こる巣の成長に着目している。シミュレーション領域はメッシュ分割し、大きさが $\Delta V = \Delta x \times \Delta y$ である $N_x \times N_y$ 個の小領域(セルと呼ぶ)が領域内にあるとする。ここで、 $\Delta x = \frac{l_x}{N_x}$ 、 $\Delta y = \frac{l_y}{N_y}$ である。 $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$ について、 (i, j) 番目のセルでの蜜蝋の { 存在, 非存在 } を、ブール型変数 wax_{ij} の {true, false} で対応させる。つまり、あるセルで変数 wax_{ij} が false から true に変わることによって、蜜蝋の付着を実現する。単位時間 Δt (1 ステップ) ごとに ΔV の蜜蝋が巣に付着するものとする。蜜蝋はミツバチの腹部にある分泌腺から分泌されるため、1 回に付着される蜜蝋の量はミツバチの体積に比べて小さい。そのため、蜜蝋が巣の周囲に次々と付着する状況は、バクテリアコロニーの成長に関するモデル (Eden モデル) によってシミュレートできる [73]。次に、図 5.2 の状況で蜜蝋の付着を具体的に説明する。図 5.2 では、付着の候補セルを ×記号、□記号、そして ⊠記号で表している。巣が異方的に成長する可能性を考慮して、巣の x 方向に蜜蝋が付着する確率を p_x 、巣の y 方向に蜜蝋が付着する確率を p_y とする。まず、 p_x と p_y の値に応じて、付着する方向を乱数を用いて確率的に選ぶ。次に、再び乱数を用いて候補セルから確率的に1つのセルを選び出し、そのセルの変数 wax_{ij} を false から true とする。その際、 x 方向に成長するときは□記号と⊠記号のセルから、 y 方向に成長するときは×記号と⊠記号のセルから選択する。また、全方位を蜜蝋で囲まれている空のセルを付着の候補とするかについては、2次元系では候補とするが3次元系では候補としないのが自然だろう。

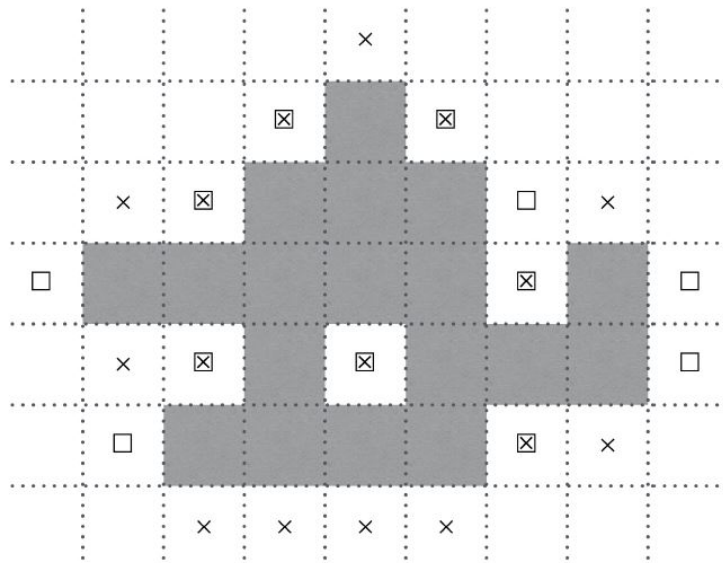


図 5.2: 蜜蝋付着セルの選択：塗りつぶされたセルは蜜蝋が存在することを表す

5.2.4 掘削エージェント

Eden モデルの蜜蝋の成長プロセスではハニカムにならないため、三角つまみパターンの発生には蜜蝋の抽出も必要である。本モデルでは、系内で自由に動いて余分に付着したワックスを掘削する掘削エージェントによって切除機構が実現されている。ここでは、掘削エージェントが規則的に並べられたハニカム構造を造る意思がないことを述べておく。エージェントは単純ないくつかのルールに基づいて蜜蝋を取り除く。

本研究で行った観察によると、切除することは三角つまみパターンの構築においてさらに基本的な役割を果たすようである。例えば、営巣中に働きバチがすでに付着された蜜蝋を、初めの付着場所から離れた他の場所に再付着されていることが観察された [74]。これは明らかに、ミツバチは余分に付着した蜜蝋を除去するだけでなく、巣を構築するために必要な場所に運ぶということである。

掘削バチは、図 5.3a と図 5.3b に示すように、2つの接続されたセグメント（ヘッドとボディ）とアンテナとしてモデル化されている。ヘッドセグメントは接続点を中心に $\pm\pi/2$ 以内で回転で切る。ヘッドセグメントは、3次元系の場合に半球的に回転することができることに留意する。頭の前端は過剰に付着したワックスを切除する顎である。掘削バチは、本体部分に沿って前後に移動する。回転すると、ボディーセグメントは接続点を中心に回転する。

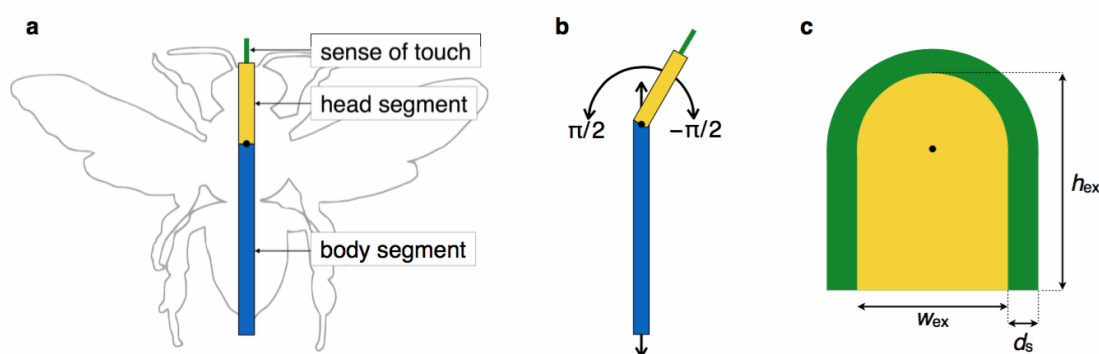


図 5.3: 掘削バチと掘削エージェント。 (a) 掘削バチと掘削エージェント。掘削エージェントは、ボディセグメント (青色)、ヘッドセグメント (黄色)、およびアンテナ (緑色) で構成されている。以下、2つの触覚は単一の器官として扱う。黒丸はセグメント間の接続点を示す。 (b) 掘削エージェントの動き。ヘッドセグメントは、接続点を中心に $-\pi/2 \sim \pi/2$ の範囲で回転することができる。掘削エージェントは、本体部分に沿って前後に移動することができる。 (c) 掘削ゾーン (EZ)。黄色の領域は、付着した蜜蝋が除去された EZ を示し、幅が d_s の緑色の領域は掘削エージェントのアンテナによって検出される領域を示す。黒丸は回転の中心を表している。

ミツバチのアンテナは物体を検出するだけでなく、温度、湿度、匂いも感知する。その正確な機能はまだ完全に解明されていないが、明らかにハニカム構造の構築に重要な役割を果たしている。例えば、Martin と Lindauer は、触覚を取り除いたミツバチが壁が二倍の厚みの空洞および (または) 穴のある壁からなる不完全な巣を造ることを発見した [63, 75]。本モデルでは、掘削エージェントのアンテ

ナは次の2つの能力を持っている。1つは近くの蜜蝋が付着している場所を認識する能力であり、これは働きバチが完全な暗闇で巣を構築することを可能にしている。もう1つは蜜蝋の塊の厚みを片側から測定する能力である。この能力により、長さ d_w よりも薄い塊に侵入することができなくなる。働きバチが測定能力を持っているかどうかはまだ実験的に証明されていないが、Martin と Lindauer は蜜蝋の壁の局所的なひずみを測定することによって、ミツバチが壁の厚みを片側から触覚で検出できることを示唆している [75]。

掘削エージェントの形状と大きさ

エージェントの形状は、ミツバチが掘削できる領域に対応させる。ミツバチは顎を使って蜜蝋を掘削するので、体を固定して顎が届く領域は、2次元系の場合は半円になると考えられる。ミツバチは前後に動きながら掘削するものとする。よって、2次元系では、半円が直径と垂直な方向に動くことができるので、エージェントは長方形と半円が結合した形状 (図 5.4) となる。

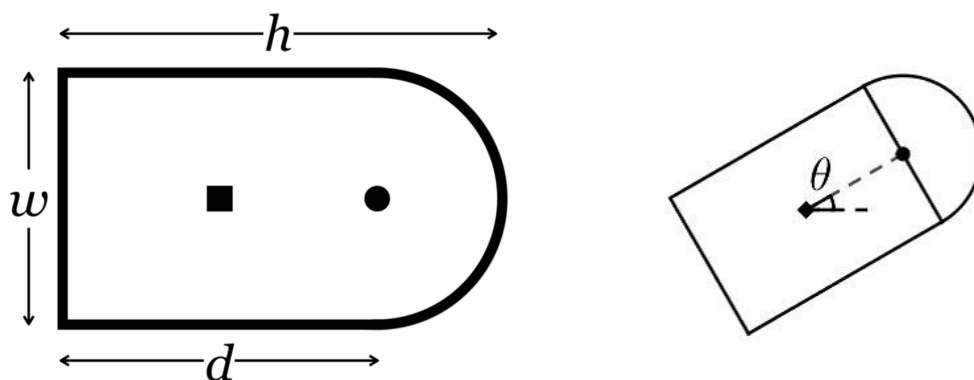


図 5.4: エージェントの形状

図 5.5: エージェントの方向

図 5.5 のように角度 θ の方向を向いている 2 次元エージェントが覆う領域を、長方形部分と半円部分に分けて数式で表す。以下では、表現を簡単にするために、長方形部分の 1 辺の長さ $d = h - \frac{w}{2}$ を h の代わりに用いる。また、角度 θ はエージェントの長方形部分の重心 ■ 及び半円部分の重心 ● の座標をそれぞれ (X_r, Y_r) ,

(X_s, Y_s) として,

$$\theta = \arccos \left(\frac{X_s - X_r}{\sqrt{(X_s - X_r)^2 + (Y_s - Y_r)^2}} \right)$$

と表される。ここで,

$$\theta = \arctan \left(\frac{Y_s - Y_r}{X_s - X_r} \right)$$

を用いないのは, プログラム上都合が悪いためである。

次に, 長方形で覆われる部分の座標 (x, y) が満たす条件を考える。半円の重心 (X_s, Y_s) は長方形の重心 (X_r, Y_r) を用いて表すと

$$(X_s, Y_s) = \left(X_r + \frac{d}{2} \cos \theta, Y_r + \frac{d}{2} \sin \theta \right) \quad (5.1)$$

となる。まず, d 方向の長方形領域を考えると, 点 (5.1) を通り, 法線ベクトルが $\vec{e}_1 = {}^t[\cos \theta, \sin \theta]$ の直線は

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x - (X_r + \frac{d}{2} \cos \theta) \\ y - (Y_r + \frac{d}{2} \sin \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = 0 \\ & (x - X_r) \cos \theta + (y - Y_r) \sin \theta - \frac{d}{2}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0 \\ & (x - X_r) \cos \theta + (y - Y_r) \sin \theta = \frac{d}{2} \end{aligned}$$

と表せる。同様にして, 長方形の d 方向における反対側の直線の方程式は,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x - (X_r - \frac{d}{2} \cos \theta) \\ y - (Y_r - \frac{d}{2} \sin \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = 0 \\ & (x - X_r) \cos \theta + (y - Y_r) \sin \theta + \frac{d}{2}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0 \\ & (x - X_r) \cos \theta + (y - Y_r) \sin \theta = -\frac{d}{2} \end{aligned}$$

と表せる。よって, 座標 (x, y) は

$$|(x - X_r) \cos \theta + (y - Y_r) \sin \theta| < \frac{d}{2}$$

を満たす。次に、 w 方向における長方形領域を考える。 \vec{e}_2 は \vec{e}_1 を $\frac{\pi}{2}$ 回転させたベクトルなので、

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

とおける。 w 方向の長方形領域も d 方向と同様に考える。 $(X_r - \frac{w}{2} \sin \theta, Y_r + \frac{w}{2} \cos \theta)$ を通り、法線ベクトルが $\vec{e}_2 = {}^t[-\sin \theta, \cos \theta]$ の直線は

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x - (X_r - \frac{w}{2} \sin \theta) \\ y - (Y_r + \frac{w}{2} \cos \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = 0 \\ & -(x - X_r) \sin \theta + (y - Y_r) \cos \theta - \frac{w}{2}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 \\ & -(x - X_r) \sin \theta + (y - Y_r) \cos \theta = \frac{w}{2} \end{aligned}$$

と表せる。同様にして、長方形の w 方向における反対側の直線の方程式は、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x - (X_r + \frac{w}{2} \sin \theta) \\ y - (Y_r - \frac{w}{2} \cos \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = 0 \\ & -(x - X_r) \sin \theta + (y - Y_r) \cos \theta + \frac{w}{2}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 \\ & -(x - X_r) \sin \theta + (y - Y_r) \cos \theta = -\frac{w}{2} \end{aligned}$$

と表せる。よって、座標 (x, y) は

$$|-(x - X_r) \sin \theta + (y - Y_r) \cos \theta| < \frac{w}{2}$$

を満たす。図 5.6 は、長方形領域の d 方向と w 方向の考え方を図に表したものである。

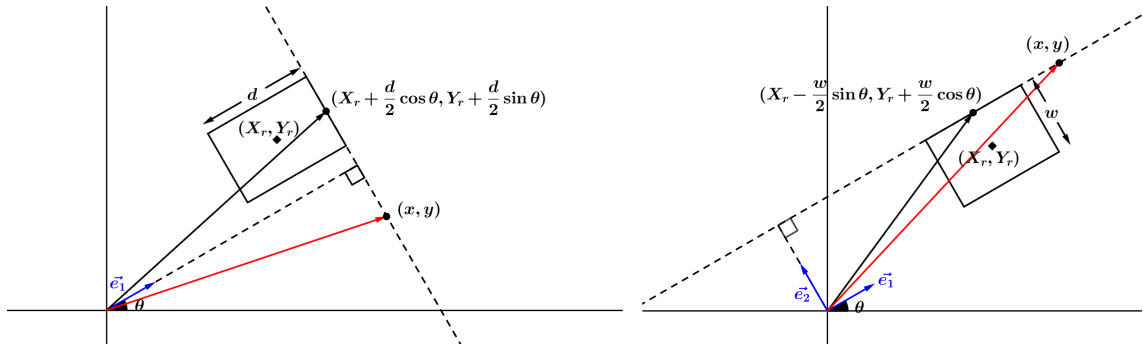


図 5.6: エージェントの長方形領域

次に、半円で覆われる部分の座標 (x, y) が満たす条件を考える。この半円は、 (X_s, Y_s) を中心とした半径 $\frac{w}{2}$ の円の一部なので、

$$(x - X_s)^2 + (y - Y_s)^2 < \left(\frac{w}{2}\right)^2 \quad (5.2)$$

を満たす。また、半円の直線部分の方程式は、

$$(x - X_r) \cos \theta + (y - Y_r) \sin \theta = 0$$

である。以上より、座標 (x, y) は不等式 (5.2) と

$$(x - X_r) \cos \theta + (y - Y_r) \sin \theta > 0$$

を満たす。

次に、エージェントの大きさとエージェントが系で占める割合 σ について説明する。エージェントの大きさは、長方形の一辺 d と縦横比 $r = w/d$ (r は ratio に注意) により決定する。ただし、エージェントは掘削可能領域に対応しているため h (もしくは d) と w の値は、ミツバチの体長とは (同程度ではあるが) 一致しないことに注意を要する。以上より、エージェントの大きさは $dw + \pi w^2/8$ であり、エージェントが系で占める割合 σ は

$$\sigma = \frac{Nd^2}{l_x l_y} \left(r + \frac{\pi}{8} r^2 \right)$$

となる。

掘削エージェントの運動

次に、エージェントの運動を考える。エージェントを剛体として扱うので、並進運動と回転運動のみを考えれば良い。並進運動に関して、簡単のため、蜜蝋の有無に関わらずエージェントは速さ v で直進するとする。そのため、長方形部分の重心の時間発展は

$$X(t + \Delta t) = X_r(t) + v \cos \theta \cdot \Delta t, \quad Y(t + \Delta t) = Y_r(t) + v \sin \theta \cdot \Delta t$$

と表せる。エージェントと重なったセルに存在する蜜蝋は全て除去されることから、速さ v が大きければ、単位時間あたりにより多くの蜜蝋が掘削されることになる。

一方、回転運動に関しては、回転の中心をどこにするかを定める必要がある。しかし、単位時間あたりの回転量 $\Delta\theta$ が大きくなければ、作製される巣の形状は回転の中心の位置に影響を受けないだろう。そこで、掘削領域の判定にかかる計算コストの削減を意図して、半円の中心を回転の中心とする。このとき、時間 Δt で角度が θ から $\theta + \Delta\theta$ まで回転するとき (図 5.7), 長方形部分の重心の時間発展は以下の式で表される:

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) &= X_r(t) + \frac{d}{2} [\cos \theta - \cos(\theta + \Delta\theta)], \\ Y(t + \Delta t) &= Y_r(t) + \frac{d}{2} [\sin \theta - \sin(\theta + \Delta\theta)]. \end{aligned}$$

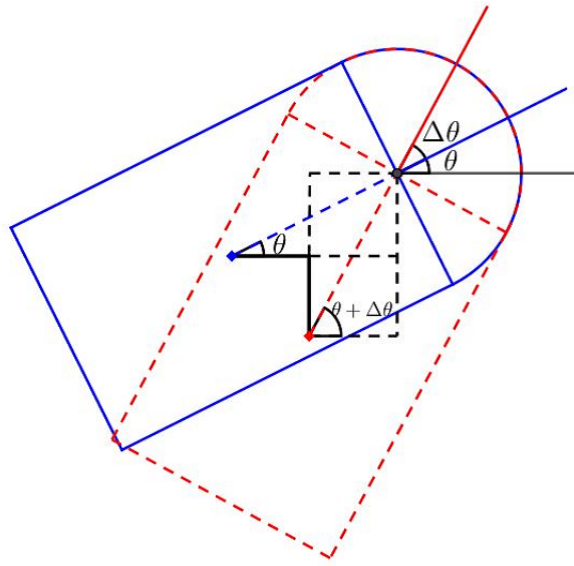


図 5.7: エージェントの回転運動

5.2.5 掘削領域 (EZ)

ここでは、掘削エージェントが過剰に付着した蜜蝋を除去する掘削領域 (EZ) の考え方を述べ、EZの動きを追跡する。各EZは、掘削エージェントのヘッドセグメントが制限された角度内で回転することができる領域であり、前後に動くときにヘッドセグメントで覆われる領域である。したがって、図 5.3c に示すように、各EZは、半円と長方形で構成されている。すべてのEZは同じサイズと形状を持ち、移動中は変更されない。 h_{ex} の長さはボディセグメントの長さとは無関係であり、掘削エージェントが掘る深さに対応する。EZが回転すると、掘削エージェントの回転に応じて、半円の中心を中心として回転する。掘削エージェントは余分な蜜蝋を直ちに除去するため、蜜蝋はそのEZ内に再付着しない。

掘削領域 (EZ) のダイナミクス

基本的に、EZは線形に前進する (図 5.8a)。このEZの運動は、掘削エージェントの運動に対応する。また、すべてのEZは同じ速度で動く。系の境界条件は周期境

界条件であると仮定する．つまり，系から出て行く EZ は反対側から出てくる．したがって，EZ の数は系内で維持される．

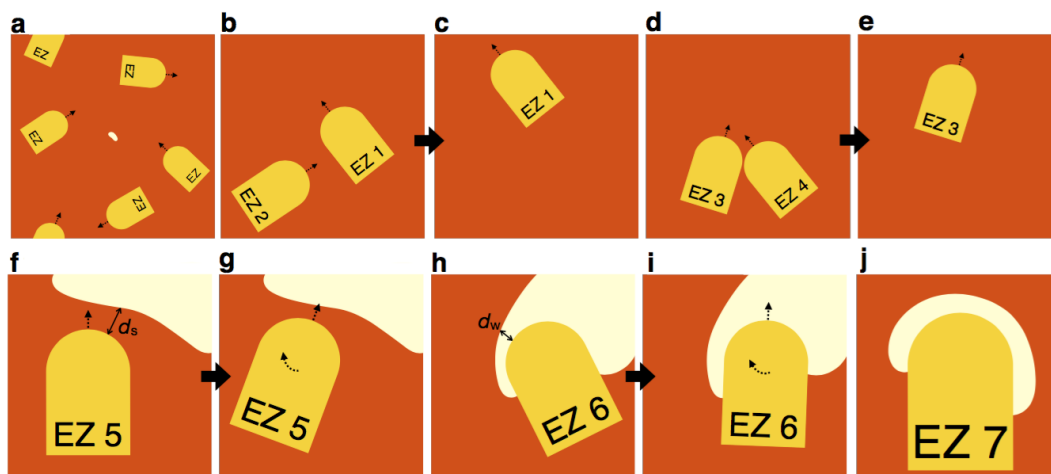


図 5.8: 掘削領域 (EZ) の動き. EZ (黄色) の動きを説明する概略図, 白い領域が蜜蝋の塊を示す. (a) EZ は, 蜜蝋から離れた系内を自由に移動することができる. すべて同じ速度で動く. (b-c) EZ が他の EZ に (EZ 2 が EZ 1 に) 先に衝突すると, 系の端に即座に送られる (この例では EZ 2 が移動する). (d-e) 2 つの EZ の頭 (EZ 3 が EZ 4 に) が衝突する, EZ のどちらか 1 つ (この例では EZ 4) が系の端に即座に送られる. (f-g) EZ (EZ 5) が d_s 内に蜜蝋の塊を検出すると, EZ は体を回転させ蜜蝋に近づく. (h-i) EZ (EZ 6) が d_w よりも薄い蜜蝋を検出すると, その位置で蜜蝋を掘るのをやめる. (j) EZ (EZ 7) が薄い蜜蝋で囲まれるとその位置で停止する (局所平衡状態).

EZ の等速直線運動は次の 3 つの場合のみ停止される. (i) 他の EZ に接触した場合 (図 5.8 の b と c) (ii) 掘削を開始する前に周辺に付着したワックスを検出した場合 (図 5.8 の f と g) (iii) 正面の蜜蝋の塊が薄さの限界であると認識した場合 (図 5.8 の h-j).

(i) が起こった場合, EZ が別の EZ に接触すると, 2 つのうちの 1 つが消えて, 系の端のランダムな点で再び現れる. EZ の頭の先が他の EZ の身体部分に衝突すると, 境界上の他の場所に移され, 移されなかった EZ の動きはそのまま継続され

る (図 5.8 の b と c). 2 つの EZ の頭が衝突すると, このうちの 1 つが移され, 移されなかった EZ の動きは継続される (図 5.8 の d と e). この移動は物理的ではないが, 取り付けられた蜜蝋から離れた動きは無関係であるため, 造巣過程には影響しないと考えている. 重要な点は, EZ が蜜蝋の塊にランダムに接触するということである.

(ii) が起こった場合, EZ が距離 d_s 内で蜜蝋を感知すると, 回転運動で蜜蝋に接近する (図 5.8 の f と g). これは上記の 2 つのアンテナ能力のうちの 1 つ目のものである.

(iii) の状況に当たる, EZ 前方の蜜蝋幅が d_w 未満であった場合, EZ は前方に移動せず, 代わりに回転して d_w よりも厚い領域を見つける (図 5.8 の h と i). しかし, 回転の結果, 横の蜜蝋の幅が d_w 未満になると回転しない. これは 2 つ目のアンテナの能力に由来する. また, この特性は, EZ が蜜蝋の塊を貫通することを防ぐ. EZ が薄い蜜蝋で囲まれている場合, EZ は停止し, その位置に留まる (図 5.8 の j). 薄い領域が安定していると仮定すると, この不活性 EZ は局所平衡状態にあるとみなされる.

5.2.6 シミュレーション結果

パラメータ設定

供給-掘削モデルの数値シミュレーションを行うためにいくつかのパラメータを設定した. 本論文で提示する結果は, 表 1 にまとめたパラメータによって得られたものである.

表 5.1: 数値シミュレーションのパラメータ. l は系の各辺の長さを表す.

パラメータ		値
EZ の幅	w_{ex}	$0.1l$
EZ の高さ	h_{ex}	$0.15l$
蜜蝋の検出距離	d_s	$0.02l$
蜜蝋の最薄値	d_w	$0.02l$
系を占める割合	σ	0.15

使用した系の形状は一辺の長さが l の正方形であり、刻みの数は $N_x = N_y = 100$ である。図 5.3c に示すように、EZ の形状は高さ h_{ex} と幅 d_{ex} によって特徴付けられる。ミツバチの体の比率はおよそ 1 : 2 で、これは $w_{ex} : h_{ex} + w_{ex}/2$ に対応する。したがって、 $h_{ex} \geq 3w_{ex}/2$ に設定する必要がある。ここでは最小値、すなわち $h_{ex} = 3w_{ex}/2$ を採用する。 h_{ex} の値は、ハニカム構造の初期段階のパターン形成にほとんど影響を与えない。さらに、蜜蝋の厚さのパラメータ d_w は、図 5.1 から $w_{ex}/5$ と設定した。簡略化のために、蜜蝋の検出距離 d_s は d_w と同じ値に設定した。

もう 1 つの重要なパラメータはエージェントが系を占める割合である。これは系の大きさに対するすべての EZ の合計面積の割合で、

$$\sigma = \frac{N_{ex}}{l^2} \left[\frac{\pi w_{ex}^2}{8} + w_{ex} \left(h_{ex} - \frac{w_{ex}}{2} \right) \right]$$

となる。割合が小さい場合、EZ は付着したワックスに頻繁に触れたり、相互に作用したりしない。したがって、このパラメータはミツバチの社会性を特徴づける指標になると考えている。ここで、付着された蜜蝋の周囲の密度は、蜜蝋からの引力のため σ よりも大きいことに留意したい。各時間ステップで付着する蜜蝋の量は、蜜蝋の一定供給下で EZ の大きさおよび数によって制御することができる。蜜蝋の供給と掘削の速度のバランスがとれるように値を決める。

各 EZ の角速度は、以下の式を用いて各格子のサイズに関連して決定される。

$$\omega_{ex} = \frac{\sqrt{2}\Delta x}{h_{ex} - w_{ex}/2}$$

係数 $\sqrt{2}$ は、正方形の対角を示す。同様に、各 EZ の速度は

$$v_{ex} = \frac{\sqrt{2}}{5}\Delta x$$

係数 $1/5$ は掘削速度の調整を簡単にするために入れた。

上記で説明したように、供給バチは異方性のある方法で蜜蝋を付着すると仮定できる。つまり、ある方向（ここでは x 方向）を認識し、その方向にワックスを加えることを好む。異方性の程度は、 x 方向に成長する蜜蝋の確率 p_x によって制御

される [73]. $p_x = 1/2$ は等方的成長を示し, $p_x = 1$ は完全な異方性成長を示し, 付着した蜜蝋が y 方向に全く成長しないことを意味する. 図 5.9 は, 掘削エージェントなしの蜜蝋の成長を示している.

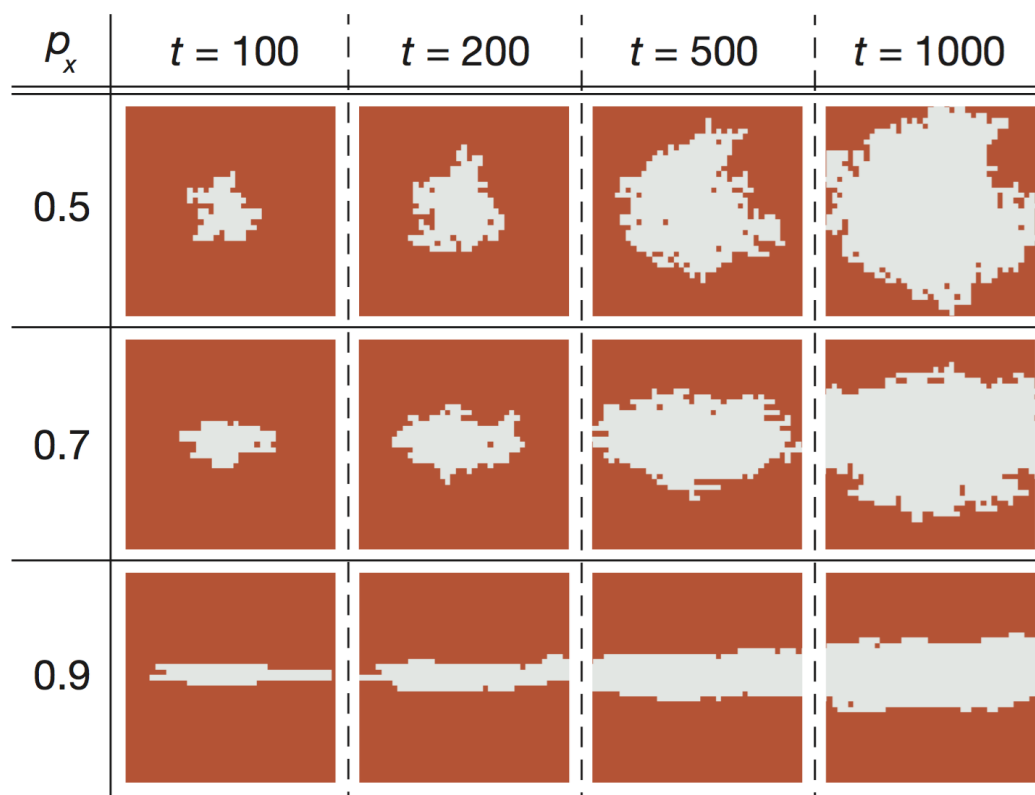


図 5.9: 掘削エージェントなしの蜜蝋の成長. 異方性パラメータ $p_x = 0.5, 0.7$, および 0.9 で行った掘削エージェントなしの蜜蝋成長のシミュレーション結果. 系表面 (オフ状態) は茶色で示され, 付着した蜜蝋 (オン状態) の部分は白色で示されている.

蜜蝋の等方的成長モデル

図 5.10 は, EZ が表示せず付着した蜜蝋の成長だけを時間発展で示している. このうち, $p_x = 0.5$ が蜜蝋の等方的成長を表す. このシミュレーションでは, 蜜蝋の供給と掘削の結果, $t = 200$ 付近で三角つまみパターンが現れることがわかる.

時間が進むにつれて，蜜蝋は三角形の各頂点から成長し，パターンは分岐していく．このパターンは，三角つまみパターンとみなすことができるが，図 5.1b に示すような異方性をもつ魚骨パターンと一致しない．

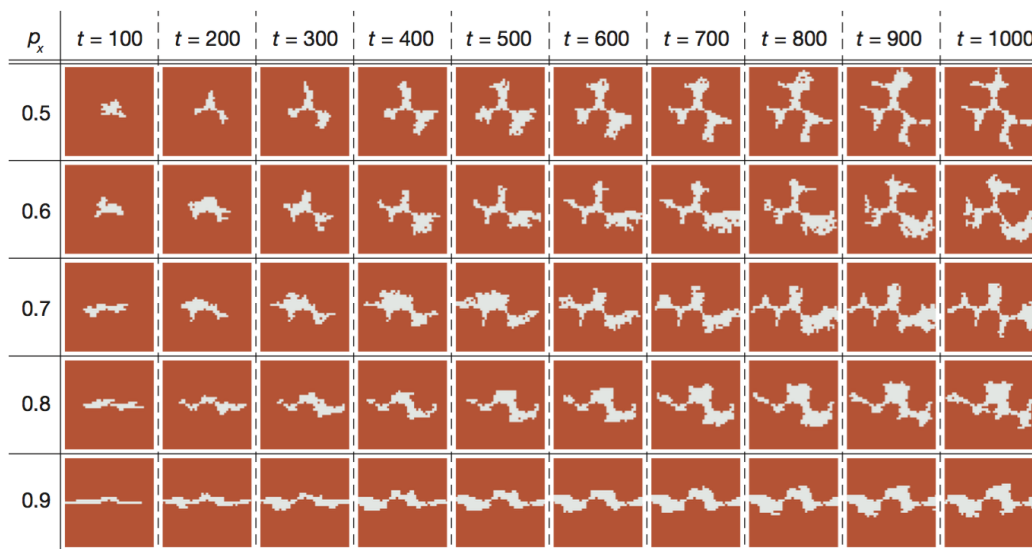


図 5.10: 供給-掘削モデルのシミュレーションで得られた蜜蝋の成長．茶色の領域は系の表面を示し，白い領域は付着した蜜蝋を示す．EZ は図には表示されていない．シミュレーションパラメータは表 5.1 にまとめている．

蜜蝋の異方的成長モデル

図 5.10 は，いくつかの異方性パラメータを与えた時の蜜蝋の時間変化を示しており， p_x は， x 方向にワックスが成長する確率を表している． $p_x = 0.6$ の結果は $p_x = 0.5$ の結果に似ているが， $p_x = 0.7$ および 0.8 の結果は $t = 1000$ 付近で魚骨パターンを示している．例として図 5.11 を使用して，供給-掘削モデルの魚骨パターンに異方性がどのように寄与するかを示す．3つのEZが取り付けられた蜜蝋の近くで出会うと，営業が始まる．3つのEZは常に同時に到着するわけではないが，平衡状態のEZが相互に侵入することはない．図 5.11a の場合，EZ1 と 2 が最初に蜜蝋に到達してから掘り始め，両方とも周囲に厚い領域がないためすぐに非アクティブになる．次に，図 5.11b に示すように，EZ3 が到着し，平衡状態に達する

まで掘る。この時点で、蜜蝋は三角つまみパターンを示し始める。その後、蜜蝋は三角の頂点から成長し続ける。図5.11の場合、異方性により蜜蝋はEZ1の左側に向、EZ2の右側に向かって成長する。各EZは、蜜蝋の成長に垂直な方向に掘削を開始するために回転する。次に、EZ4はさらなる成長部分に到達し、図5.8(f-g)に示す移動ルールに従ってそこで作業を開始する。その結果、 $t = 1000$ あたりの $p_x = 0.7$ および0.8のシミュレーションから得られるような、魚骨パターンを形成する(図5.11d)。一方、蜜蝋が等方的に成長する場合、EZはさまざまな方向を向く。したがって、 $p_x = 0.5$ および0.6のシミュレーション結果として2次元的な広がりがあるパターンが生まれる。

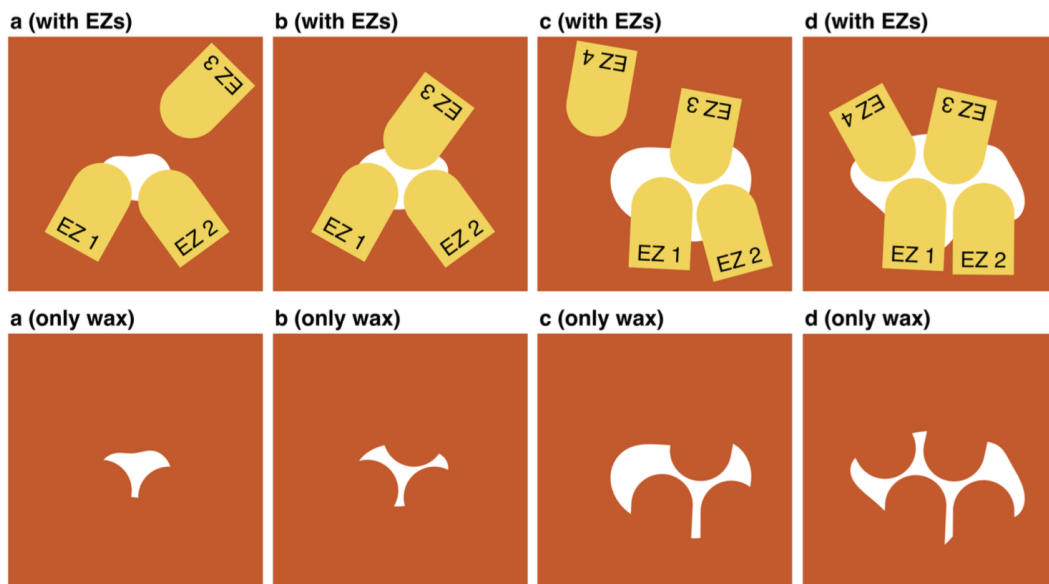


図 5.11: 異方性がある場合に作られた魚骨パターン。三角つまみパターンが接続されて魚骨パターンが構築される過程 (a-d) の概略図。EZは上の4つの図には表示されているが、下の図では蜜蝋のみが表示されている。茶色の領域は系の表面を示し、白い領域は付着した蜜蝋を示し、黄色のオブジェクトはEZを示している。

5.3 考察

本研究での結果は、ハニカムの初期構造が自己組織化から生まれることを示唆している。このモデルでの働きバチの主な役割は、蜜蝋の供給と掘削であり、これらは系での蜜蝋の流入と流出を引き起こす。つまり、系は蜜蝋に関して非平衡でオープンであり、このモデルのパターンは散逸構造であるといえる。自己組織化は、平衡状態での自己集合と非平衡状態での散逸構造の形成という2つの自己組織化現象に分類できる。ハニカム構造が作られる初期段階では、三角つまみパターンは散逸構造であり、三角つまみパターンがの一方向に整列した構造（魚骨パターン）は自己集合によって形成されたとみなすことができる。

ミツバチは自己組織化を利用する生物と考えられてきた。例えば、ミツバチの群れは、環境の変化に応じてその温度を調節することができる [76–78]。このような、ミツバチの群れにおける体温調節は、自己組織化によってモデル化されている [79,80]。さらに、ミツバチは蜜源を探した上で、採餌範囲内でより優れたものを選択しており [81]。この効率的な採餌もモデル化され、自己組織化のメカニズムとして解釈できることが示されている [82]。また、コームに卵や、花粉、蜂蜜を規則的に納めることも、自己組織化によって説明できる [83–87]。このように、ミツバチが自己組織化から様々な恩恵を受けていることが示されている [63,71,72,88–91]。ハニカム構造の初期段階が作られる過程を示した本研究でも、自己組織化の観点からこれが説明できることを明らかにした。

しかしながら、提案した供給掘削モデルにおいて重要な仮定である、触角の役割については、さらなる調査が必要である。Tautz は、触角に損傷を受けたミツバチが周囲の温度を測定できないことから、温度を測る能力が触角に備わっていることを示唆している [63]。同様に本研究では、触角を損傷したミツバチが不完全なハニカム構造を作るという現象から、触角で蜜蝋の厚さを測っていると推測した。しかしながら、ミツバチが触角で蜜蝋の厚さを測っているかについては、さらなる研究が必要である。

本シミュレーションでは、強い異方性を与えた場合に各空洞の仕切りになる壁がより厚いパターンが得られたが、これは自然界ではめったに見られない。異方性は、異方性方向の供給率を増加させるため、EZ がその周囲に集まる前に蜜蝋が

厚くなると考えられる。加えて、 p_x が高いと繋がった蜜蝋の外周が長くなるため、EZが蜜蝋に接触しやすくなり、掘削するEZがまばらに配置されることも壁が厚くなる要因である。本来のミツバチはそのような塊ができることを避けるために、本モデルの供給率が一定であるのに対して、供給率を調整できる可能性が高いと考えられる。

本モデルは、EZによって掘削された蜜蝋を再利用できる能力を追加することで改良することもできる。現モデルで蜜蝋の供給と掘削とは無関係であるが、上記の着色した蜜蝋を使用した実験により、ミツバチはある場所から切除した蜜蝋を他の場所に再付着できることが明らかになったため、この機能は重要であると考えられる [74]。また、他のモデル改善点として、EZ間の相互作用も再検討する必要がある。ただし、この作用がパターン形成にどのように影響するかは不明である。全ての働きバチが、同時にハニカム構造を作るために働いているわけではないので、他の作業をしている働きバチがいる中で蜜蝋を掘削する。そのため、EZの動きだけに焦点をあてるのではなく、他の働きバチとの相互作用を蜜蝋の成長プロセスに含める必要もある。

5.4 結論

本研究では、ハニカムの初期構造がどのようにして作られるのかという問題について、付着掘削モデルというエージェントベースモデルを提案し、そのコンピュータシミュレーションを実行した。その結果、2次元におけるハニカム構造の基本的な構成要素である三角つまみパターンが、蜜蝋の付着と掘削という互いに相反する行動ルールの競合によって生まれることが分かった。この結果から、三角つまみパターンは散逸構造と見なすことができる。また、異方性を持たせてさらに蜜蝋を付着することにより、三角つまみパターンが繋がった魚骨パターンも得られた。したがって、ハニカムの初期構造は、自己組織化、三角つまみパターンの形成（散逸構造）、およびそれらの1次元接続（自己集合）の観点から理解できると結論付けることができる。これは、ミツバチが「自己組織化をうまく活用する建築家」であることを示唆するものとなっている。また、ハニカム構造は耐久性と貯蔵性に優れており、作製に必要な材料を少なくできる利点を持つことが広

く知られており，応用面でも構造物作製における可能性が広がる．例えば，ナノスケールで動く機械を考えたとき，その機械に複雑な行動ルールを課すことは難しいが，ミツバチに倣うような単純な行動ルールを設定したナノマシンが用意できれば，ナノサイズのカム構造を作製するといったことも可能となるかもしれない．

第6章 総括

本論文では、大腸菌のコロニー形成、シロアリによる蟻塚形成、ミツバチによるハニカム構造形成の数理モデルを扱いその解析を行った。これらのモデルに共通するのは、走性に関する生物行動の結果パターンが発生するという点である。極めて複雑なパターンが、トップダウン的な影響を受けずにボトムアップ的に生じるのである。このような現象は、自己組織化と呼ばれ、様々な生物に対して数理モデルが存在し研究がなされている。生物行動に対して数理モデルを扱うことで、実際に実験することなく低コストで現象の性質を理解したり、その現象を制御したりすることが可能となる。

これまでの研究では、大腸菌のコロニー形成をモデル化した三村辻川系に対して、解の存在等が大崎ら [7] の研究で、分岐点近傍におけるパターン解の分岐解析が久藤ら [4] の研究で示されている。本研究ではさらに、分岐点から離れた解析を分岐解析ソフトの AUTO を使って行った。一方、シロアリによる蟻塚形成をモデル化した Deneubourg 系に対しては、解の存在を示した。分岐解析や AUTO による解析については今後の課題であるが、定常問題は三村辻川系に極めて近い問題に帰着されるため、同様に解析が可能と考えている。また、ミツバチのハニカム構造の形成については、これら2つのような連続モデルは存在しない。ミツバチとハニカム構造との間には、大腸菌とコロニー、シロアリと蟻塚の間のような大きなスケール差が存在しないため、本研究では離散モデルであるエージェントモデルを提案しその解析を行った。

以下に各章の内容をまとめる。

第1章では、走性に関する生物行動の紹介、それぞれに対する数理モデルの紹介、本論文の背景となる事柄について概説した。本論文で扱った数理モデルは、連続モデルで記述された、大腸菌のコロニー形成過程に対する数理モデルの三村・辻川系、シロアリと蟻塚形成過程に対する数理モデルの Deneubourg 系と、本研究で

提案したミツバチの営巣過程に対する数理モデルの供給掘削モデルと名づけた離散モデルである。

第2章では、本論文での基本的な表記、分岐解析の基本事項、分岐解析に用いた数値解法、反応拡散系の数値解法についてまとめた。ここでは、後で使用する線形化解析に必要な基本事項や分岐解析ソフトウェア AUTO で使用されている定常解の追跡方法とそのアルゴリズム、分岐点の検出方法、またそれらの反応拡散系に対する適用方法について詳しく述べた。

第3章では、大腸菌の分布形成の数理モデルを概説し、線形化解析による定数定常解からの分岐についてまとめた。また、分岐解析ソフトウェア AUTO を用いて空間1次元三村・辻川系の大域的分岐構造を調べ、その結果をまとめた。

第4章では、Deneubourg 系に対する解析の第一歩として、空間2次元におけるオリジナルの Deneubourg 系を考え、 χ , $\|u_0\|_{L_1}$ および $1/\mu$ に対するスモールネスを課すことによって解の時間大域存在を示した。さらに、無限次元力学系の理論を用いて、スモールネス条件下でのグローバルアトラクターの存在を示した。また、グローバルアトラクターが非定数定常解を含むための十分条件についても考察した。逆に、 μ が十分大きいとき、リアプノフ関数の存在を示すことによって、グローバルアトラクターが定数定常解のみからなることを示した。この場合力学系は、時間経過の中で複雑な振る舞いを見せたとしても、最終的には定数定常解のみからなる単純な力学系へと帰着することが示される。

第5章では、ミツバチの営巣過程を模擬する供給-掘削エージェントベースモデルを提案した。また、そのシミュレーションへの実装方法とシミュレーション結果を示し議論した。ミツバチの世界には、女王バチや働きバチという階級が存在するものの、リーダーの指導のもとで巣が作製されているわけでも、設計図が受け継がれているわけでもない。ミツバチの能力を踏まえると、単純かつ局所的な相互作用によるボトムアッププロセスにより営巣が行われているものと考えられ、営巣初期過程でもこのように自己組織化を活用していると考えられる。ミツバチの巣が散逸構造であるとの予想のもと、本モデルではエージェントによって蜜蝋が系へ供給され、掘削により系から蜜蝋が除去される。特徴的な点としては、蜜蝋の特徴的長さと掘削領域の特徴的長さという2つの長さスケールを持ち、それらのスケールは比較的近いことである。それらが蜜蝋の流入と流出に関わりあう

ことから、本モデルは階層性を含む非平衡開放系と言える。非平衡開放系で階層性が存在する場合、大きなスケールで流入し小さなスケールで流出することが多いが、本モデルでは、小さなスケールで蜜蝋が付着し、大きなスケールで蜜蝋が除去される。シミュレーションでは、この蜜蝋の付着と掘削という互いに相反する行動ルールの競合によって、自然界に見られるようなパターンを得ることができた。また、蜜蝋の成長に異方性を持たせることでハニカム構造の基礎となるパターンも得ることができた。これらの結果は、ハニカム構造形成のプロセスが自己組織化、散逸構造、自己集合の観点から理解できることを示唆している。

今後の研究課題としては、営巣の全過程を説明するために3次元シミュレーションによって巣の立体構造を再現することが考えられる。営巣メカニズムの解明に向けさらに研究を進め、応用面でも多くの可能性を見出したいと考えている。

謝辞

本論文は、関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻 博士課程後期課程において、大崎浩一教授の御指導の下、行った研究をまとめたものです。大崎教授は、本研究に携わる契機を与えて下さり、その遂行にあたって終始、御指導して下さいました。本論文執筆にあたりあらゆる面でご助言を頂き、励まして下さったことに深く感謝しております。

本大学大学院理工学研究科数理科学専攻 北原和明教授、昌子浩登准教授ならびに山口大学創成科学研究科工学系学域 鳴海孝之准教授には、貴重な御助言と御指導を戴きました。深く感謝の意を表します。

神戸大学医学研究科 本多久夫先生、東京医科歯科大学教養部数学分野 中口悦史准教授には、研究を進めるにあたり貴重なご意見を戴きました。心より感謝申し上げます。

本研究遂行にあたり、終始励まして下さいました方々に対して厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] M. Aida, T. Tsujikawa, M. Efendiev, A. Yagi and M. Mimura, “Lower estimate of the attractor dimension for a chemotaxis growth system.” *J. London Math. Soc.* **74**, 453-474. 2006.
- [2] E. J. Doedel and B. E. Oldeman, *AUTO-07P: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*. 2012.
- [3] E. J. Doedel, *Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations*. <http://indy.cs.concordia.ca/auto/notes.pdf>. 2010.
- [4] N. Kurata, K. Kuto, K. Osaki, T. Tsujikawa and T. Sakurai, “Bifurcation phenomena of pattern solution to Mimura-Tsujikawa model in one dimension.” *Mathematical Sciences and Applications* **29**, 265-278. 2008.
- [5] K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai and T. Tsujikawa, “Spatial pattern formation in a chemotaxis-diffusion-growth model.” *Physica D* **241**, 1629-1639. 2012.
- [6] M. Mimura and T. Tsujikawa, “Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth.” *Physica A* **230**, 499-543. 1996.
- [7] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, “Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations.” *Nonlinear Anal.* **51**, 119-144. 2002.
- [8] K. J. Painter and T. Hillen, “Spatio-temporal chaos in a chemotaxis model.” *Physica D* **240**, 363-375.,2011.

- [9] T. Hillen, J. Zielinski, K. J. Painter, “Merging-emerging systems can describe spatio-temporal patterning in a chemotaxis model.” *Discrete and continuous dynamical systems series B*, 2513-2536. 2013.
- [10] 八木厚志, 放物型発展方程式とその応用 (上・下). 岩波書店. 2011.
- [11] M. Winkler, “Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source.” *Comm. Partial Differential Equations* **35**, 1516-1537. 2010.
- [12] X. Bai and M. Winkler, “Equilibration in a fully parabolic two-species chemotaxis system with competitive kinetics,” *Indiana Univ. Math. J.* **65**, 553–583. 2016.
- [13] N. Bellomo, A. Bellouquid, Y. Tao and M. Winkler, “Toward a mathematical theory of Keller-Segel models of pattern formation in biological tissues,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **25**, 1663–1763. 2015.
- [14] P. Biler, W. Hebisch, and T. Nadzieja, “The Debye system: existence and large time behavior of solutions,” *Nonlinear Anal.* **23**, 1189–1209. 1994.
- [15] S. Camazine, J. L. Deneubourg, N. R. Franks, J. Sneyd, G. Theraulaz and E. Bonabeau, *Self-Organization in Biological Systems (Princeton Studies in Complexity)*, Princeton University Press, 2003.
- [16] J. L. Deneubourg, “Application de l’ordre par fluctuations a la description de certaines étapes de la construction du nid chez les termites,” *Insectes Sociaux* **24**, 117–130. 1977.
- [17] S. I. Ei, H. Izuhara and M. Mimura, “Spatio-temporal oscillations in the Keller-Segel system with logistic growth,” *Physica D* **277**, 1–21. 2014.
- [18] H. Gajewski and K. Zacharias, “Global behavior of a reaction-diffusion system modelling chemotaxis,” *Math. Nachr.* **195**, 77–114. 1998.

- [19] X. He and S. Zheng, “Convergence rate estimates of solutions in a higher dimensional chemotaxis system with logistic source,” *J. Math. Anal. Appl.* **436**, 970–982. 2016.
- [20] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, “A blow-up mechanism for a chemotaxis model,” *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. IV* **24**, 633–683. 1997.
- [21] T. Hillen and K. J. Painter, “A user’s guide to PDE models for chemotaxis”, *J. Math. Biol.* **58**, 183–217. 2009.
- [22] D. Horstmann and G. Wang, “Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions,” *European J. Appl. Math.* **12**, 159–177. 2001.
- [23] B. Hu and Y. Tao, “To the exclusion of blow-up in a three-dimensional chemotaxis-growth model with indirect attractant production,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **26**, 2111–2128. 2016.
- [24] H. Izuhara, K. Kuto and T. Tsujikawa, “Bifurcation structure of stationary solutions for a chemotaxis system with bistable growth,” *Jpn J. Ind. Appl. Math.* **35**, 441–475. 2018.
- [25] E. F. Keller and L. A. Segel, “Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability,” *J. Theor. Biol.* **26**, 399–415. 1970.
- [26] K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai and T. Tsujikawa, “Spatial pattern formation in a chemotaxis-diffusion-growth model,” *Physica D* **241**, 1629–1639. 2012.
- [27] J. Lankeit, “Eventual smoothness and asymptotics in a three-dimensional chemotaxis system with logistic source,” *J. Differential Equations* **258**, 1158–1191. 2015.
- [28] K. Lin and C. Mu, “Global dynamics in a fully parabolic chemotaxis system with logistic source,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **36**, 5025–5046. 2016.

- [29] H. Li and Y. Tao, “Boundedness in a chemotaxis system with indirect signal production and generalized logistic source,” *Appl. Math. Lett.* **77**, 108–113. 2018.
- [30] M. Marion, “Finite-dimensional attractors associated with partly dissipative reaction-diffusion systems,” *SIAM J. Math. Anal.* **20**, 816–844. 1989.
- [31] R. McOwen, *Partial Differential Equations: Methods and Applications, 2nd ed.*, Prentice Hall, 2002.
- [32] M. Mizukami, “Boundedness and asymptotic stability in a two-species chemotaxis-competition model with signal-dependent sensitivity,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* **22**, 2301–2319. 2017.
- [33] T. Nagai, T. Senba and K. Yoshida, “Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis,” *Funkcial. Ekvac.* **40**, 411–433. 1997.
- [34] E. Nakaguchi and K. Osaki, “Global existence of solutions to a parabolic-parabolic system for chemotaxis with weak degradation,” *Nonlinear Anal. TMA* **74**, 286–297. 2011.
- [35] E. Nakaguchi and K. Osaki, “Global solutions and exponential attractors of a parabolic-parabolic system for chemotaxis with subquadratic degradation,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* **18**, 2627–2646. 2013.
- [36] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*, Wiley, 1977.
- [37] K. Noda and K. Osaki, “Global attractor and Lyapunov function for one-dimensional Deneubourg chemotaxis system”, *Hiroshima Math. J.* **49**, in press. 2019.
- [38] K. Osaki and A. Yagi, “Finite Dimensional Attractor for One-Dimensional Keller-Segel Equations,” *Funkcial. Ekvac.* **44**, 441–469. 2001.

- [39] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, “Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations,” *Nonlinear Anal. TMA* **51**, 119–144. 2002.
- [40] K. Osaki and A. Yagi, “Global existence for a chemotaxis-growth system in \mathbb{R}^2 ,” *Adv. Math. Sci. Appl.* **12**, 587–606. 2002.
- [41] K. J. Painter and T. Hillen, “Spatio-temporal chaos in a chemotaxis model,” *Physica D* **240**, 363–375. 2011.
- [42] T. Senba and T. Suzuki, “Parabolic system of chemotaxis: blowup in a finite and the infinite time,” *Methods Appl. Anal.* **8**, 349–367. 2001.
- [43] S. Strohm, R. C. Tyson and J. A. Powell, “Pattern formation in a model for mountain pine beetle dispersal: Linking model predictions to data,” *Bull. Math. Biol.* **75**, 1778–1797. 2013.
- [44] Y. Tao and M. Winkler, “Large Time Behavior in a Multidimensional Chemotaxis-Haptotaxis Model with Slow Signal Diffusion,” *SIAM J. Math. Anal.* **47**, 4229–4250. 2015.
- [45] Y. Tao and M. Winkler, “Critical mass for infinite-time aggregation in a chemotaxis model with indirect signal production,” *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **19**, 3641–3678. 2017.
- [46] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations III*, Springer-Verlag, New York, 1996; 2nd edition, 2011.
- [47] J. I. Tello and D. Wrzosek, “Predator-prey model with diffusion and indirect prey-taxis,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **26**, 2129–2162. 2016.
- [48] R. Temam, *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1997.

- [49] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978; 2nd revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg/Leipzig, 1995.
- [50] G. Vigliani, “Very weak global solutions to a parabolic-parabolic chemotaxis-system with logistic source,” *J. Math. Anal. Appl.* **439**, 197–212. 2016.
- [51] G. Vigliani, “Boundedness properties of very weak solutions to a fully parabolic chemotaxis-system with logistic source,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **34**, 520–535. 2017.
- [52] M. Winkler, “Chemotaxis with logistic source: Very weak global solutions and their boundedness properties,” *J. Math. Anal. Appl.* **348**, 708–729. 2008.
- [53] M. Winkler, “Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model,” *J. Differential Equations* **248**, 2889–2905. 2010.
- [54] M. Winkler, “Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source,” *Comm. Partial Differential Equations* **35**, 1516–1537. 2010.
- [55] M. Winkler, “Global asymptotic stability of constant equilibria in a fully parabolic chemotaxis system with strong logistic dampening,” *J. Differential Equations* **257**, 1056–1077. 2014.
- [56] A. Yagi, *Abstract Parabolic Evolution Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [57] T. Xiang, “Boundedness and global existence in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with/without growth source,” *J. Differential Equations* **258**, 4275–4323. 2015.

- [58] T. Xiang, “How strong a logistic damping can prevent blow-up for the minimal Keller-Segel chemotaxis system?,” *J. Math. Anal. Appl.* **459**, 1172–1200. 2018.
- [59] T. Xiang, “Chemotactic aggregation versus logistic damping on boundedness in the 3D minimal Keller-Segel model,” *SIAM J. Appl. Math.* **78**, 2420–2438. 2018.
- [60] T. Xiang, “Sub-logistic source can prevent blow-up in the 2D minimal Keller-Segel chemotaxis system,” *J. Math. Phys.* **59**, 081502, 11pp. 2018.
- [61] M. Zhuang, W. Wang and S. Zheng, “Boundedness in a fully parabolic chemotaxis system with logistic-type source and nonlinear production,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **47**, 473–483. 2019.
- [62] J. Zheng, “Boundedness and global asymptotic stability of constant equilibria in a fully parabolic chemotaxis system with nonlinear logistic source,” *J. Math. Anal. Appl.* **450**, 1047–1061. 2017.
- [63] J. Tautz, *The Buzz about Bees—Biology of a Superorganism*. Springer. 2008.
- [64] C. Darwin, *On the origin of species*. 1859.
- [65] C. W. W. Pirk, H. R. Hepburn, S. E. Radloff and J. Tautz, “Honeybee combs: construction through a liquid equilibrium process?” *Naturwissenschaften* **91**(7), 350–353. 2004.
- [66] B. L. Karihaloo, K. Zhang and J. Wang, “Honeybee combs: how the circular cells transform into rounded hexagons.” *J R Soc Interface* **10**(86), 20130299. 2013.
- [67] D. Bauer and K. Bienefeld, “Hexagonal comb cells of honeybees are not produced via a liquid equilibrium process.” *Naturwissenschaften* **100**(1), 45–49. 2013.

- [68] R. Oeder and D. Schwabe, “Evidence that no liquid equilibrium process is involved in the comb building of honey bees (*Apis Mellifera*).” *Oberhess Naturwiss Zeitschr* **67**, 8–27. 2017.
- [69] B. P. Oldroyd and S. C. Pratt, “Comb Architecture of the Eusocial Bees Arises from Simple Rules Used During Cell Building.” *In: Adv. In Insect Phys. vol. 49*. 1st ed. Elsevier Ltd. p.101–121. 2015.
- [70] F. Nazzi, “The hexagonal shape of the honeycomb cells depends on the construction behavior of bees.” *Sci Rep* **6**, 1–6. 2016.
- [71] M. R. Belić, V. Škarka, J. L. Deneubourg and M. Lax, “Mathematical model of honeycomb construction.” *J Math Biol* **24**, 437–449. 1986.
- [72] V. Škarka, J. L. Deneubourg, M. R. Belić, “Mathematical Model of Building Behavior of *Apis mellifera*.” *J Theor Biol* **147**(1), 1–16. 1990.
- [73] M. Eden, “A two-dimensional growth process.” *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* **4**, 223–239. 1961.
- [74] K. Osaki, Y. Miyaki, T. Kawamori, R. Nakata and T. Ohtani, “Process of Honeycomb Construction and its Spatio-Temporal Uniformness.” *Hyogo Biol* **15**(2), 59–64., 2016.
- [75] H. Martin, M. Lindauer, “Sinnesphysiologische Leistungen beim Wabenbau der Honigbiene.” *Z Vergl Physiol* **53**(3), 372–404. 1966.
- [76] B. Heinrich, “Energetics of honeybee swarm thermoregulation.” *Science* (80-) **212**(4494), 565–566. 1981.
- [77] B. Heinrich, “The Mechanisms and Energetics of Honeybee Swarm Temperature Regulation.” *J Exp Biol* **91**, 25–55. 1981.
- [78] B. Heinrich, “The social physiology of temperature regulation in honeybees.” *In: Holldobler B, Lindauer M, editors. Exp. Behav. Ecol. Sociobiol. Sunderland: Sinauer Associates, Inc.;p.393–406*. 1985.

- [79] M. R. Myerscough, “A Simple Model for Temperature Regulation in Honeybee Swarms.” *J Theor Biol* **162**(3), 381–393. 1993.
- [80] J. Watmough and S. Camazine, “Self-Organized Thermoregulation of Honeybee Clusters.” *J Theor Biol* **176**(3), 391–402. 1995.
- [81] T. D. Seeley, *The Wisdom of the Hive*. Cambridge: Harvard University Press. 1995.
- [82] S. Camazine and J. Sneyd, “A model of collective nectar source selection by honey bees: Self-organization through simple rules.” *J Theor Biol* **149**(4), 547–571. 1991.
- [83] S. Camazine, J. Sneyd, M. J. Jenkins and J. D. Murray, “A mathematical model of self-organized pattern formation on the combs of honeybee colonies.” *J Theor Biol* **147**(4), 553–571. 1990.
- [84] S. Camazine, “Self-organizing pattern formation on the combs of honey bee colonies.” *Behavioral Ecology and Sociobiology* **28**(1), 61–76. 1991.
- [85] M. J. Jenkins, J. Sneyd, S. Camazine and J. D. Murray, “On a simplified model for pattern formation in honey bee colonies.” *J Math Biol* **30**(3), 281–306. 1992.
- [86] B. R. Johnson, “Pattern formation on the combs of honeybees: increasing fitness by coupling self-organization with templates.” *Proc Biol Sci* **276**(1655), 255–261. 2009.
- [87] K. J. Montovan, N. Karst, L. E. Jones and T. D. Seeley, “Local behavioral rules sustain the cell allocation pattern in the combs of honey bee colonies (*Apis mellifera*).” *J Theor Biol* **336**, 75–86. 2013.
- [88] H. R. Hepburn, *Honeybees and Wax: An Experimental Natural History*. Berlin: Springer. 1986.

- [89] J. L. Deneubourg and S. Goss, “Collective patterns and decision making.” *Ethol Ecol Evol* **1**(4), 295–311. 1989.
- [90] S. C. Pratt, “Collective control of the timing and type of comb construction by honey bees (*Apis mellifera*).” *Apidologie* **355**, 193–205. 2004.
- [91] H. R. Hepburn, C. W. W Pirk and O. Duangphakdee, *Honeybee Nests: Composition, Structure, Function*. Springer. 2014.