UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

ARGUMENTACIÓN DEL PROFESOR DURANTE LA DISCUSIÓN DE TAREAS EN CLASE

Autor

Jorge Andrés Toro Uribe

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2020

Argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase

Jorge Andrés Toro Uribe

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de

Doctor en Educación

Asesor: Walter Fernando Castro Gordillo, Dr. en Didáctica de la Matemática

Línea de Investigación: Educación Matemática

Grupo de Investigación: Matemática, Educación y Sociedad

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2020

"…. When carefully documented and transcribed, even the most common of everyday conversations prove to be a complex, multifaceted phenomenon, and an inexhaustible source of wonderings. This makes us as aware as ever of the fact that our ability to analyze and explain lags behind our ability to observe and to see"

Anna Sfard, 2008

Prefacio y agradecimientos

En esta tesis doctoral, más que exhibir un tratado para especialistas en teoría de la argumentación, quise presentar un trabajo para un público más amplio. En primer lugar, es mi intención ofrecer a los profesores de matemáticas, tanto en formación como en activo, reflexiones teóricas, prácticas y metodológicas alrededor de situaciones que se presentan a diario en sus clases: ¿Cómo responder a ciertas preguntas de los estudiantes? ¿Cómo abordar los errores de los estudiantes? ¿Cómo convencer a los estudiantes de un determinado procedimiento o respuesta de una tarea? ¿Cómo ciertos elementos del discurso del profesor pueden promover oportunidades para el aprendizaje? Además de buscar posibles respuestas a estos interrogantes, me interesa invitar a asumir ciertas posturas y miradas críticas respecto a las prácticas habituales en la clase de matemáticas.

Espero que este trabajo también pueda ser de utilidad para los formadores de profesores y las facultades de educación, en donde se discutan los intereses formativos y de desarrollo profesional en los cuales la argumentación pueda ser un elemento central del conocimiento profesional docente. Y no menos importante, será motivo de satisfacción capturar el interés de la comunidad de Educación Matemática interesada en aspectos relacionados con la argumentación en la clase de matemáticas.

Por cerca de doce años, en diferentes momentos de mi experiencia como investigador en la Educación Matemática, he visto la necesidad de ampliar los horizontes clásicos del campo de la argumentación, de manera que no solo sea vista como una estructura compleja y estática, sino que pueda tener lugar en diferentes momentos de una lección de clase, incluso cuando no hay interés explicito por abordarla. Por lo cual el lector se encontrará con un trabajo que pretende ser organizado, exigente y exhaustivo en el tratamiento de la literatura y ambicioso en el tratamiento y análisis de los datos.

No está de más aclararle a los estudiosos de la argumentación que no encontrarán aquí el abordaje tradicional, esto es asumir la investigación desde una postura *lógica* en donde se analizan los *argumentos*, sino que se asume una postura más cercana a la *dialéctica* en donde la argumentación es reconocida como procedimiento y en donde interesan ciertas interacciones entre el profesor y sus estudiantes en la clase de matemáticas.

Para la construcción de un trabajo con este alcance, requerí de diferentes espacios de formación, tanto propios al programa doctoral como de oportunidades de participación en diferentes eventos y en estancias de investigación, en los cuales pude compartir con la comunidad académica, presentar avances, discutir resultados y ampliar el horizonte investigativo. Respecto a los eventos, participé en la 32° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME (Medellín, Colombia), en el 23° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (Bogotá, Colombia), en el I Congreso Iberoamericano de Argumentación (Medellín, Colombia), en el *First Regional Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (Rancagua, Chile), en el *11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME* (Utrecht, Países Bajos), en la *REASON Winter School* 2019 (Múnich, Alemania), en el *43rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (Pretoria, Sudáfrica) y en el *53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik GDM* (Ratisbona, Alemania).

Respecto a las estancias de investigación, realicé estancias cortas y de larga duración. En cuanto a las estancias de corta duración, visitas a: el grupo de investigación Enseñanza y

Aprendizaje de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), con el acompañamiento de las profesoras Dra. Leonor Camargo y Carmen Samper; a la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia), al grupo de estudio del profesor Dr. Jorge Fiallo; a la Universidad de los Lagos (Osorno, Chile), al colectivo liderado por el profesor Dr. Luis Pino; al Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Valparaíso, Chile), con el acompañamiento del profesor Dr. Manuel Goizueta; y al *Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche University of Siena* (Siena, Italia), en una visita a la profesora Dra. Maria Alessandra Mariotti. Y del lado de la estancia de larga duración, realicé una pasantía entre los meses de enero y mayo de 2019, en la *TUM School of Education* de la *Technische Universität München* (Múnich, Alemania), con la tutoría de la profesora Dra. Kristina Reiss.

Aventurarse a realizar una tesis doctoral implica, además, sortear todo tipo de imprevistos, perder el miedo a equivocarse, explorar ámbitos no conocidos e intentarlo una y otra vez. Pese a ello, conforta el saber que no se está solo y que se contó con el apoyo anímico, académico y económico. Situación por la cual hay que dar gracias.

Gracias a mi familia, quienes han sido y serán mi polo a tierra y mi compañía, incluso a kilómetros de distancia. Gracias a mis padres, a mi padre aunque no me acompaña de una forma física, inculcó en mí el gusto por la academia y la constancia en los proyectos emprendidos, a mi madre por su ejemplo y fortaleza, a mi hermana y a Julio por su apoyo y confianza, y a Julieta por sus juegos y sonrisas.

Gracias a mis amigos: Elkin, Natalia, Cristina, Milena, Lorena, Carent y Sergio por sus palabras de ánimo y motivación que sirvieron en muchos momentos de inspiración y, cómo no, por alegrarse de mis logros.

Gracias a mi asesor, profesor Dr. Walter Castro, por su guía, observaciones, sugerencias, por el tiempo invertido en la fundamentación de la investigación y por haber hecho posible, de muchos modos, la concreción de este trabajo.

Gracias a la profesora Dra. Diana Jaramillo y al grupo de investigación Matemática, Educación y Sociedad de la Universidad de Antioquia, al cual se adscribe esta investigación, por el apoyo, colaboración, consejo continuo y por las preguntas que me invitaban a la reflexión.

Gracias a los participantes del grupo de estudio de Argumentación en Educación Matemática organizado por la Universidad de Antioquia y con vinculación de investigadores colombianos, mexicanos y chilenos, a quienes presenté avances y resultados parciales de la tesis, recibiendo valiosas aportaciones que contribuyeron a revisar aspectos teóricos y metodológicos, e incorporar sus comentarios.

Gracias a los colegas y profesores del Seminario Permanente de la línea de formación en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia en la cual se inscribe el doctorado en Educación, por sus lecturas críticas y propositivas a los avances y resultados de la tesis.

Gracias a los profesores Carmen Samper, Dra. Kristina Reiss, Dr. Manuel Goizueta, Dra. Maria Alessandra Mariotti, Dr. Víctor Larios, Dra. Leonor Camargo, Dr. Jorge Fiallo, Dr. Luis Pino, Dra. Bettina Pedemonte, Dr. Horacio Solar, Dra. Lucia Zapata y Dr. John Henry Durango, por su tiempo, su colaboración desinteresada y observaciones para la cualificación de mi trabajo.

Gracias a los dos profesores que aceptaron hacer parte de la investigación, de manera desinteresada y propositiva, al permitirme grabar sus clases y cuyas transcripciones conforman el fundamento empírico de esta investigación.

Gracias al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación -Colciencias-, el cual, a través del programa de becas de doctorados nacionales en su convocatoria 757 de 2016, apoyó económicamente la consecución de esta tesis doctoral.

Y gracias a la Secretaría de Educación de Medellín, por brindarme una comisión de estudios, y poder contar con el tiempo para dedicarme de manera exclusiva a realizar mí investigación doctoral.

Resumen

El trabajo doctoral *Argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase* contribuye a la investigación en Educación Matemática en las líneas argumentación y demostración, y comunicación y lenguaje, en lo que refiere a comprender cómo es la argumentación del profesor de matemáticas en lecciones habituales de clase donde tienen lugar la discusión de una serie de tareas. Se adopta una perspectiva teórica, la cual se apoya en la articulación de dos consideraciones teóricas: la argumentación y el discurso en la clase de matemáticas. En esta tesis, de acuerdo a un enfoque interpretativo de corte cualitativo a partir de la observación de dos profesores de secundaria, se buscó responder a la pregunta: ¿cómo es la argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase? Para ello se plantearon tres preguntas auxiliares que dirigen el análisis de los datos: (*i*) ¿Cuáles son las características de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?, (*ii*) ¿Cuáles son los propósitos de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?, y (*iii*) ¿Cuáles son las condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?

La respuesta a la primera pregunta auxiliar contempló considerar elementos del análisis del discurso y de aspectos teóricos, lo cual permitió identificar características en tres dimensiones. En una de las dimensiones, la comunicativa, se reconocen aseveraciones, preguntas y gestos o expresiones; en otra dimensión, la interaccional, se reconoce la participación, medios y normas de clase, convencer y discutir; y en una última dimensión, la epistémica, se reconoce el tratamiento del objeto matemático, conceptos y definiciones, retomar otras lecciones, tratamiento de errores, procedimientos y respuestas, y justificar y/o refutar. Cada una de las dimensiones está acompañada de una serie de acciones del profesor que permiten identificarlas en situaciones de lecciones de clase.

La respuesta a la segunda pregunta requirió de la inclusión de términos como intervención argumentativa y cierre, que permitieron identificar determinados propósitos educativos en la argumentación de los profesores en los diferentes episodios seleccionados para el análisis.

La respuesta a la tercera pregunta necesitó la adaptación de un referente teórico, para poder identificar indicadores dentro de condiciones que activan la argumentación del profesor. Se identifican: preguntas y oportunidades de participación en las estrategias comunicativas e interactivas; intervenciones argumentativas y cierres en el enfoque de la lección; tipo de tarea y procedimiento de solución de la tarea en el enfoque de la tarea; y tratamiento de objetos matemáticos, retomar otras lecciones, prever lecciones futuras y maneras de justificar y refutar en el conocimiento profesional.

Además de estas respuestas, como aporte de esta investigación se plantea una ampliación a un referente teórico respecto a la tipología de reacciones del profesor, se presenta una definición que podría ser de utilidad en la consideración de la argumentación en la clase de matemáticas, se muestra un vínculo entre la argumentación y las oportunidades de participación y por ende con el aprendizaje, y se incluye la argumentación como parte del discurso matemático del profesor.

Palabras clave: Argumentación, discurso, discurso matemático del profesor, aprendizaje, formación profesional

Abstract

The doctoral *work Argumentation of the mathematics teacher during the discussion of tasks in classroom* contributes to the research in Mathematics Education in the argumentation and proof, and communication and language lines, when it comes to understanding how the mathematics teacher's argumentation is like in usual class lessons where the discussion of a number of tasks takes place. A theoretical perspective is adopted, which is based on the articulation of two theoretical considerations: argumentation and discourse in mathematics classroom. In this thesis, according to a qualitative interpretative approach based on the observation of two high school teachers, we sought to answer the question: how is the teacher's argumentation during the discussion of tasks in classroom?

For this purpose, three auxiliary questions were raised to direct the data analysis: (*i*) What the features of the mathematics teacher's argumentation are during the discussion of tasks in classroom? (*ii*) What the purposes of the mathematics teacher's argumentation are during the discussion of tasks in classroom? and (*iii*) What the conditions that activate the mathematics teacher's argumentation are during the discussion of tasks in classroom?

The answer to the first auxiliary question took into account elements of discourse analysis and theoretical aspects, which allowed identifying features in three dimensions. In one of the dimensions, the communicative, statements, questions and gestures or expressions are recognized. In another dimension, interactional, participation, means and class rules, convincing and discussing are recognized. And in a last dimension, the epistemic one, the treatment of the mathematical object, concepts and definitions, retaking other lessons, treatment of errors, procedures and answers, and justifying and/or refuting are recognized. Each of the dimensions is accompanied by a series of teacher actions that allow identifying them in class lesson situations.

The answer to the second question required the inclusion of terms such as argumentative intervention and closure, which allowed identifying certain educational purposes in the teachers' argumentation in the different selected episodes for analysis.

The answer to the third question required the adaptation of a theoretical reference, in order to identify indicators within conditions that activate the teacher's argumentation. The following are identified: questions and opportunities for participation in communicative and interactive strategies; argumentative interventions and closures in the lesson approach; type of task and task solution procedure in the task approach; and treatment of mathematical objects, retaking other lessons, anticipate future lessons and ways to justify and refute professional knowledge.

In addition to these answers, an extension to a theoretical reference regarding the typology of teacher reactions is proposed as an input of this research. A definition that could be useful in considering argumentation in the mathematics classroom is presented, a link between argumentation and opportunities for participation and therefore with learning is shown, and argumentation is included as part of the teacher's mathematical discourse.

Keywords: Argumentation, discourse, teacher's mathematical discourse, learning, professional training

Zusammenfassung

Die Doktorarbeit Argumentation des Mathematiklehrers während der Diskussion von Aufgaben im Unterricht trägt zur Forschung in der Mathematikausbildung in den Bereichen Argumentation und Beweisen, sowie Kommunikation und Sprache bei, um zu verstehen, wie die Argumentation des Mathematiklehrers im regulären Unterricht aussieht, wo die Diskussion einer Reihe von Aufgaben stattfindet. Eine theoretische Perspektive wird angenommen, die auf der Artikulation von zwei theoretischen Überlegungen basiert: Argumentation und Diskurs im Mathematikunterricht.

In dieser Arbeit, nach einem interpretativen Ansatz qualitativer Natur, ausgehend von der Beobachtung von zwei Sekundarschullehrern, versuchten wir, die Frage zu beantworten: Wie ist die Argumentation des Lehrers während der Diskussion von Aufgaben in der Klasse? Zu diesem Zweck wurden drei Hilfsfragen gestellt, die die Analyse der Daten leiten: (i) Was sind die Merkmale der Argumentation des Mathematiklehrers während der Diskussion von Klassenarbeiten, (ii) Was sind die Zwecke der Argumentation des Mathematiklehrers während der Diskussion von Klassenarbeiten, und (iii) Was sind die Bedingungen, die die Argumentation des Mathematiklehrers während der Diskussion von Klassenarbeiten aktivieren?

Die Antwort auf die erste Hilfsfrage betrachtete unter Berücksichtigung von Elementen der Diskursanalyse und theoretischen Aspekten, die es ermöglichten, Merkmale in drei Dimensionen zu identifizieren. In einer der Dimensionen werden kommunikative Aussagen, Behauptungen, Fragen und Gesten oder Ausdrücke erkannt; in einer anderen Dimension werden interaktive, partizipative, Mittel- und Klassennormen erkannt, überzeugende und diskutierende; und in einer

letzten Dimension wird epistemisch die Behandlung des mathematischen Objekts, der Konzepte und Definitionen erkannt, andere Lektionen wieder aufgenommen, Fehler, Verfahren und Antworten behandelt und begründet und/oder widerlegt. Jede der Dimensionen wird von einer Reihe von Aktionen des Lehrers begleitet, die es ermöglichen, sie in Unterrichtssituationen zu identifizieren.

Die Antwort auf die zweite Frage erforderte die Aufnahme von Begriffen wie argumentative Intervention und Schließung, die es ermöglichten, bestimmte Bildungszwecke in der Argumentation der Lehrer in den verschiedenen zur Analyse ausgewählten Episoden zu identifizieren.

Die Antwort auf die dritte Frage erforderte die Anpassung einer theoretischen Referenz, um Indikatoren innerhalb von Bedingungen zu identifizieren, die Argumentation des Lehrers aktivieren. Es identifiziert: Fragen und Möglichkeiten der Teilnahme an kommunikativen und interaktiven Strategien; argumentative Interventionen und Schließungen im Fokus der Lektion; Art der Aufgabe und Verfahren zur Lösung der Aufgabe im Fokus der Aufgaben, und Behandlung von mathematischen Objekten, Rückkehr zu anderen Lektionen, Vorhersage zukünftiger Lektionen und Wege zur Rechtfertigung und Widerlegung des Fachwissens.

Zusätzlich zu diesen Antworten, als Beitrag zu dieser Forschung, wird eine Erweiterung zu einer theoretischen Referenz über die Typologie der Reaktionen des Lehrers vorgeschlagen, eine Definition wird vorgestellt, die nützlich sein könnte bei der Berücksichtigung der Argumentation in der Mathematikklasse, eine Verbindung zwischen Argumentation und Möglichkeiten der Teilnahme und damit mit dem Lernen gezeigt,und Argumentation ist als Teil des mathematischen Diskurses des Lehrers aufgenommen.

Schlüsselwörter: Argumentation, Diskurs, Mathematischer Diskurs des Lehrers, Lernen, Berufsausbildung

Tabla de contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Lista de transcripciones

Capítulo 1. Introducción

Coles *International Journal of STEM Education* (2019) 6:5
https://doi.org/10.1186/s40594-018-0155-y
International Journal of STEM Education

RESEARCH

Facilitating the use of video with teachers of mathematics: learning from staying with the detail

Alf Coles

Journal of Mathematics Teacher Education (2019) 22:227–230
https://doi.org/10.1007/s10857-019-09435-2

What mathematics teachers do and know: looks from inside and outside of the classroom to the mathematic-specificity of teacher work

Salvador Llinares[1]

Int J of Sci and Math Educ (2019) 17:943–963
https://doi.org/10.1007/s10763-018-9907-x

Professional Noticing of Mathematics Teachers: a Comparative Study Between Germany and China

Xinrong Yang[1,2] · Gabriele Kaiser[2,3] · Johannes König[4] · Sigrid Blömeke[5]

Int J of Sci and Math Educ (2019) 17:1009–1029
https://doi.org/10.1007/s10763-018-9897-8

Modeling Chilean Mathematics Teachers' Instructional Beliefs on Problem Solving Practices

Farzaneh Saadati[1] · Gamal Cerda[1,2] · Valentina Giaconi[3] · Cristian Reyes[1,4] · Patricio Felmer[1,4]

Int J of Sci and Math Educ (2019) 17:153–172
DOI 10.1007/s10763-017-9859-6

What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views

Thorsten Scheiner[1,2,3] · Miguel A. Montes[4] · Juan D. Godino[5] · José Carrillo[4] · Luis R. Pino-Fan[6]

International Journal of Science and Mathematics Education
https://doi.org/10.1007/s10763-019-09967-2

High School Mathematics Teachers' Beliefs About Assessment in Mathematics and the Connections to Their Mathematical Beliefs

Gustavo Martínez-Sierra[1] · Javier García-García[1] · María Valle- Crisólogo Dolores-Flores[1]

Int J of Sci and Math Educ (2019) 17:591–611
https://doi.org/10.1007/s10763-018-9879-x

Daily Emotional Experiences of a High School Mathematics Teacher in the Classroom: a Qualitative Experience-Sampling Method

Gustavo Martínez-Sierra[1] · Yurdia Arellano-García[1] · Antonia Hernández-Moreno[1] · Cristian Nava-Guzmán[2]

Educational Studies in Mathematics (2019) 100:177–191
https://doi.org/10.1007/s10649-018-9869-5

On the making of a new mathematics teacher: professional development, subjectivation, and resistance to change

Luz Valoyes-Chávez[1]

Figura 1: Artículos recientes sobre investigaciones relacionadas con el profesor de matemáticas. Elaboración propia.

La Figura 1 refleja un panorama de la investigación actual en Educación Matemática, en donde diferentes autores y a partir de diferentes espectros investigativos, intentan aportar reflexiones teóricas y metodológicas respecto a un tema en común: el profesor de matemáticas. Tema que es también motivo de estudio en esta investigación y cuya fundamentación se presenta en este primer capítulo. De manera específica, se expone por qué es pertinente indagar acerca de la argumentación del profesor de matemáticas en clase, para ello se destinan tres apartados. En el primero, se explicita la justificación y la problemática; en el segundo, se enuncia la pregunta y el objetivo de la investigación; y en el tercero, se indica la forma como está estructurada esta disertación.

Justificación y problemática

El interés del autor en este estudio resulta de la experiencia tanto como profesor de matemáticas en secundaria, como de investigador en trabajos preliminares (Parra, Zapata, Toro y Durango, 2010; Samper y Toro, 2017). Específicamente, durante la práctica educativa e investigativa, surgieron inquietudes referentes a cuándo, cómo y por qué argumenta el profesor de matemáticas en clase.

Referirse a la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase como objeto de investigación, requiere precisar aspectos acerca del profesor de matemáticas, de la participación y discusión en la clase de matemáticas, y de la argumentación en la clase de matemáticas. Cada uno de estos elementos, aunque suelen marcar líneas independientes de trabajo en la comunidad investigativa, son abordados e integrados en esta investigación, con el fin de aportar reflexiones y construcciones teóricas y metodológicas.

La investigación acerca de y con profesores de matemáticas ha crecido de manera significativa en las últimas dos décadas (Ponte, 2013; Superfine, 2019), la cual además de multifacética (Llinares, 2018), tiene un amplio alcance para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Chapman, 2016). En la literatura se pueden distinguir al menos tres líneas de trabajo (Potari, 2019), tanto para profesores en formación como en activo, en las cuales se ha buscado: (1) promover la reflexión de los profesores, (2) comprender las prácticas en clase y de formación, y (3) diseñar programas de formación y desarrollo profesional. Esta investigación, se sitúa en la segunda línea, pues a partir del análisis de lecciones de clase se pretende comprender cómo los profesores argumentan.

La preocupación por la discusión y la participación en la clase de matemáticas, en particular por la discusión de tareas, está asociada a la manera cómo se concibe el aprendizaje en esta investigación, esto es, a partir de una perspectiva participacionista (Krummheuer, 2011; Sfard, 2008), con la cual el aprendizaje se conceptualiza como la participación en el discurso de clase, donde las personas pasan de la participación en actividades implementadas de manera colectiva a formas similares realizadas sin ayuda. El interés en este trabajo radica en el profesor, en lo que algunos autores han denominado *discurso matemático del profesor*[1] (Boukafri, 2017; Planas, Fortuny, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2016; Planas, García-Honrado y Arnal-Bailera, 2018), es decir, considerar la comunicación del profesor de contenidos matemáticos en su interacción con sus estudiantes. Además de indagar por las oportunidades de aprendizaje que pueden promover estas consideraciones pragmáticas, interesa reconocer vínculos entre la argumentación del profesor y la participación de los estudiantes.

[1] En este trabajo se presentan diferentes términos técnicos o clave en cursivas, que cuentan con una connotación especial, los cuales son traídos de los autores referentes. Para el caso puntual del trabajo se busca conservar su connotación, sin embargo por temas de practicidad en el manejo de los términos, serán presentados en cursivas solo la primera vez.

Y hacer alusión a la argumentación, por supuesto en la clase de matemáticas, implica reconocer posturas teóricas y métodos, que cuentan con cierto grado de validez y vigencia en la comunidad de esta línea de investigación (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016). De manera general, se puede reconocer un interés por presentar estrategias para hacer de la clase de matemáticas un espacio donde los estudiantes construyan argumentos y, eventualmente, demostraciones[2], lo cual está en sintonía con los programas de política pública (ej. *Common Core State Standards Initiative* (CCSSI), 2010). Es reconocido el papel del profesor en la concreción de estrategias, tanto en el diseño como en la gestión y la implementación de tareas en la clase, y es considerado el conocimiento del profesor como elemento clave, pues puede limitar o ampliar la presencia de *prácticas argumentativas* en sus objetivos instruccionales.

Ahora bien, respecto a *la argumentación del profesor* puede afirmarse que ha sido estudiada, aunque no de manera precisa, a partir de diferentes puntos de vista y perspectivas teóricas, valiéndose de diferentes métodos de análisis. Se resaltan estudios durante procesos de demostración (Knipping y Reid, 2015), en el marco de la *argumentación colectiva* (Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014a), en la orientación e interpretación de las discusiones de clase (Forman, Larreamendy-Joerns, Stein y Brown, 1998), en las estrategias utilizadas para preguntar a los estudiantes (Kosko, Rougee y Herbst, 2014), en el análisis de la estructura utilizando elementos del *modelo de Toulmin* y vínculos con la teoría de los *esquemas de argumentació*n (Metaxas, Potari y Zachariades, 2016), con la perspectiva del *noticing* (Potari y Psycharis, 2018) o con la propuesta de *argumentos globales* (Erkek y Bostan, 2019), en cómo ciertos conocimientos del profesor influyen en la discusión y el razonamiento de los estudiantes

[2] Aunque la demostración no será estudiada en este trabajo, salvo en un episodio motivo de análisis, es reconocida aquí como una argumentación que incluye un proceso deductivo, incluidos tanto el proceso *proving* como el producto *proof*.

(Mueller, Yankelewitz y Maher, 2014), o en las respuestas de los profesores en escenarios hipotéticos de clase (Nardi, Biza y Zachariades, 2012). Sin embargo, se considera que poco se conoce aún acerca de la comprensión de la argumentación del profesor mientras discute tareas en clase, intención que va más allá de indicar un rol, de estudiar el tipo de preguntas que hace, de seguir un modelo para mostrar la estructura de los argumentos o de orquestar la discusión en clase.

De acuerdo con las consideraciones expuestas en las líneas anteriores, el problema es enunciado de la siguiente manera: si se reconoce la clase de matemáticas como un espacio de interacción entre profesor y estudiantes en donde tiene lugar la discusión de tareas y se ubica la argumentación en un espacio social y discursivo de manera que pueda hacer parte del discurso de clase y no solo vinculada con cierta estructura de un argumento; vale la pena indagar por cómo es, cuándo y por qué ocurre la argumentación del profesor de matemáticas mientras discute tareas en un ambiente habitual de clase, es decir, sin tareas diseñadas de antemano y sin una participación directa del investigador en el diseño y gestión de las lecciones.

Se considera que, al abordar esta situación, se aporta a la comunidad de Educación Matemática en aspectos metodológicos, prácticos y teóricos no abordados hasta el momento o que requieren ser considerados a la vista de otra perspectiva. Y en tanto que se alude a un fenómeno educativo puntual, se pueda favorecer e involucrar no solo al colectivo de investigadores interesados en estas reflexiones, sino también a los profesores en formación y en activo, a los formadores de profesores, a las facultades de educación y a las entidades al frente del diseño del currículo.

Pregunta y objetivo de la investigación

A partir de la situación descrita en el apartado anterior, se presenta la pregunta de investigación y las respectivas preguntas auxiliares:

¿Cómo es la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?

En tanto que la pregunta de investigación parece ser muy amplia, se considera oportuno especificar el *cómo*, por lo cual se plantean las siguientes preguntas auxiliares:

¿Cuáles son las características de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?

¿Cuáles son los propósitos de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?

¿Cuáles son las condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?

Estás preguntas están situadas en un momento específico, esto es la discusión de tareas en la clase de matemáticas y refieren de manera precisa al protagonista de la investigación, el profesor de matemáticas. Las preguntas están encadenadas y son secuenciales, es decir la consecución de la primera pregunta auxiliar permite abordar la segunda y tercera pregunta auxiliar, y como será profundizado en el Método (Capítulo 3), cada pregunta está asociada a un momento específico del análisis de los datos y refiere a una unidad de análisis puntual.

Los términos clave en la formulación de la pregunta son *argumentación* y *discurso* cuyo desarrollo teórico se presenta en el segundo capítulo. Los términos *características de la argumentación del profesor de matemáticas*, *propósitos de la argumentación del profesor de matemáticas* y *condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas,* son los productos esperados y por ende parte del aporte teórico de esta tesis doctoral. El término *característica* refiere a las cualidades de la argumentación del profesor, *propósito* a los objetivos educativos de la argumentación del profesor y *condición* a una determinada situación o circunstancia especial donde el profesor argumenta en la clase.

Para responder a la pregunta de investigación y a las preguntas auxiliares se plantea el siguiente objetivo de investigación y sus respectivos objetivos auxiliares:

Comprender la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase.

Este objetivo es coherente además con el problema de investigación, la comprensión de la argumentación requiere indagar no sólo en cómo es dicha argumentación, sino también en cuándo y por qué ocurre mientras discuten tareas en un ambiente habitual de clase. En este sentido se estima conveniente plantear los siguientes objetivos auxiliares:

Identificar características de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase.

Identificar propósitos de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase.

Identificar condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase.

De igual manera a como se indicó en las preguntas auxiliares, los objetivos auxiliares están en estrecha relación con las preguntas auxiliares, siguen un orden cronológico y encadenado, en tanto que el logro de los dos primeros posibilita la consecución del tercero, y como se verá en el tercer capítulo, direccionan el análisis de los datos.

Estructura de la disertación

En el primer capítulo se presentó la introducción, en el cual se describió la justificación y la problemática de la investigación, así como la pregunta y el objetivo de la misma. En el segundo capítulo se abordará el marco teórico de la investigación en dos apartados, revisión de la literatura y fundamentación teórica. De acuerdo con la pregunta y el objetivo de la investigación, en el tercer capítulo se describirá el método y el tratamiento de los datos. El análisis de los datos configura el cuarto capítulo, en el cual se presentará la clase de Emma, la clase de Daniel y los respectivos resultados. Finalmente, las conclusiones, en el quinto capítulo, mostrarán la concreción de los objetivos de la investigación y abrirán nuevos interrogantes referentes a la argumentación del profesor en la clase de matemáticas.

Capítulo 2. Marco teórico

Figura 2: Situación en la clase de matemáticas. Elaboración propia.

Hay preguntas de los estudiantes en la clase de matemáticas, como la recreada en la Figura 2, que requieren de un cierto tratamiento por parte del profesor. Preguntas que podrían abrir el espacio para que el profesor argumente el porqué de cierta respuesta o procedimiento. Situaciones como estas, y otras, motivo de estudio en esta investigación, requieren de un sustento teórico, lo cual es descrito en este capítulo. En primer lugar, se muestra la revisión de la literatura en dos niveles, en el primer nivel investigaciones relacionadas con la argumentación en clase de matemáticas, y en el otro nivel, investigaciones dirigidas al discurso en clase de matemáticas, en las cuales es el *profesor de matemáticas* el término articulador para ambos niveles. En segundo lugar, se presenta la fundamentación teórica dividida en dos secciones: consideraciones acerca de la argumentación en clase de matemáticas y consideraciones acerca del discurso en clase de matemáticas.

Revisión de literatura

En este apartado se exponen los trabajos revisados en la literatura que, de alguna u otra manera, aportan reflexiones teóricas y metodológicas con respecto a la argumentación del profesor de matemáticas. Se ha decidido dividir la revisión en dos niveles, los cuales, pese a que son planteados de manera independiente, son complementarios pues están dirigidos al mismo interés investigativo. En el primero, si bien está dedicado a la argumentación en clase de matemáticas, los antecedentes están concentrados en aspectos relacionados con la argumentación del profesor de matemáticas en clase. Y, en el segundo, se muestran los antecedentes referidos al discurso en clase de matemáticas, pero solo en los cuales el profesor sea aludido de manera explícita.

Argumentación en clase de matemáticas. Dado que la literatura que aborda la argumentación es extensa y diversa, se decidió plantear tres temas: estudios que enfatizan la estructura de la argumentación del profesor de matemáticas, estudios que enfatizan el papel del profesor de matemáticas en la promoción de la argumentación en clase, y estudios que enfatizan el conocimiento del profesor de matemáticas para promover la argumentación en clase. Además, en cada tema se pudieron reconocer subtemas, es decir, aspectos de convergencia para determinado conjunto de documentos. En la Tabla 1 se muestra la clasificación de los documentos por tema y subtema.

Tabla 1: Clasificación de documentos por tema y subtema. Elaboración propia.

Tema	***Subtema***	***Documentos***
Estructura de la argumentación del profesor de matemáticas	Modelo de Toulmin	Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007); Metaxas et al. (2009, 2016); Giannakoulias, Mastorides, Potari y Zachariades (2010); Nardi et al. (2012); Whitenack, Cavey y Ellington (2014).
Papel del profesor de matemáticas en la promoción de la argumentación en clase.	Apoyar la argumentación colectiva	Yackel (2002); Conner (2008, 2017); Yopp (2012); Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco (2014a); Brown (2017).
	Orquestar	Boero, Consogno, Guala y Gazzolo (2009); Boero (2011); Hershkowitz, Tabach, Rasmussen y Dreyfus (2014).
	Guiar	Ubuz, Dinçer y Bülbül (2013).
	Brindar oportunidades para involucrar a estudiantes	Bleiler, Thompson y Krajcevski (2014); Staples y Newton (2016).
	Construir andamiaje	Makar, Bakker y Ben-Zvi (2015).
	Diseñar tareas	Prusak, Hershkowitz y Schwarz (2012).
Conocimiento del profesor de matemáticas para promover la argumentación en clase.	Vínculo con la argumentación colectiva	Conner et al. (2014a); Conner et al. (2014b); Wagner, Smith, Conner, Singletary y Francisco (2014).
	Interpretaciones de la argumentación por parte del profesor	Goizueta y Planas (2013a); Goizueta y Planas, (2013b); Kosko et al. (2014).
	Competencias y habilidades del profesor	Krummheuer (2007, 2012); Solar y Deulofeu (2016); Vogel, Kollar y Fischer (2012); Vogel, Reichersdorfer, Kollar, Ufer, Reiss y Fischer, (2013); Kollar, Ufer, Reichersdorfer, Vogel, Fischer y Reiss (2014).

	Vínculo con el conocimiento pedagógico del contenido	Metaxas et al. (2009).
	Creencias del profesor	Giannakoulias et al. (2010); Žalská (2017).
	Relación con el planteamiento de aserciones	Yopp (2015).

Estudios que enfatizan la estructura de la argumentación del profesor de matemáticas. En este tema se reporta cómo el modelo de Toulmin (2007) ha sido usado por diferentes autores para analizar la estructura de la argumentación del profesor de matemáticas, el cual está centrado en la estructura de un argumento, donde las relaciones entre los diferentes componentes de un argumento, datos, garantía, aserción, refutador, calificador modal y soporte, son importantes (Pedemonte y Balacheff, 2016).

Inglis et al. (2007) critican la reducción del modelo de Toulmin, que muchos investigadores han acogido, en tanto que solo consideran los datos, las garantías y la aserción; por lo que proponen considerar el calificador modal como un elemento central en el modelo. Informan del uso frecuente de garantías no deductivas para deducir aserciones y afirman que la omisión del calificador modal obliga a considerar solo los argumentos con conclusiones absolutas y, en consecuencia, a ignorar las garantías no deductivas. Si bien el propósito de este documento no fue analizar cuestiones relativas a la clase, la exploración de la naturaleza de los argumentos sugiere centrar la atención a cualquier rastro de razonamiento inductivo o intuitivo de los argumentos que presenta el profesor.

Metaxas et al. (2009, 2016) utilizan el modelo de Toulmin y el análisis de esquemas de argumentación, para analizar la estructura de la argumentación de profesores de matemáticas. Metaxas et al. (2009) presentan un estudio de caso en lo tocante a un profesor de secundaria, quien cursaba un posgrado y participó en la solución de tareas en escenarios hipotéticos de clase, de ocurrencia probable en la práctica docente. Respecto a la clasificación de argumentos, identifican esquemas de argumentación como: argumento de ilustración, argumento de analogía, argumento de clasificación, argumento abductivo de efecto a causa y argumento de oposición. El estudio de los elementos argumentales que usa un profesor podría ofrecer información acerca de la estructura de su discurso y, por lo tanto, de su posición respecto a la enseñanza. Metaxas et al. (2016) retoman el estudio de caso analizado en Metaxas et al. (2009) y aplican la noción de *esquemas de argumentación* junto con el modelo de Toulmin para analizar los argumentos del profesor. La correspondencia entre estos dos enfoques, para cada esquema, las premisas pueden considerarse como datos y garantías, la conclusión como la aserción, y las posibles respuestas a preguntas críticas como respaldo y refutación, enriquece la caracterización de los argumentos empleados y busca una herramienta analítica que podría contribuir a la comprensión del conocimiento del profesor.

Nardi et al. (2012) propusieron un enfoque que implicó una adaptación del modelo de Toulmin con el refinamiento hecho por Freeman (2005), respecto a la clasificación de garantías. Freeman (2005) propuso clasificar las garantías en a priori, empíricas, institucionales y evaluativas. Para analizar los argumentos de los profesores, los autores proponen distinguir entre: garantías a priori epistemológicas y pedagógicas, garantías empíricas profesionales y personales, garantías institucionales epistemológicas y curriculares y garantías evaluativas. Se analizan las respuestas de profesores de secundaria que cursaban cálculo en una maestría en Educación Matemática, y se recurre a escenarios hipotéticos de clase. Los autores concluyen que, en contextos de Educación Matemática, se debería reconocer las garantías más amplias que los profesores emplean cuando determinan y justifican sus acciones.

Giannakoulias et al. (2010) indagan en cuanto a la argumentación de profesores de matemáticas, con el propósito de convencer a los estudiantes de la invalidez de las aserciones e identificar el razonamiento subyacente. Para ello proveen con escenarios hipotéticos de clase a profesores de matemáticas de secundaria, quienes participan de un curso en un programa de maestría en Educación Matemática. Se les solicitó a los profesores tanto identificar posibles errores en la demostración desarrollada por un estudiante, como presentar la refutación a las aserciones inválidas del estudiante. Los resultados reportan que los profesores utilizaron dos enfoques principales para refutar las aserciones inválidas: el uso de la teoría y de contraejemplos. Los autores distinguen tres tipos de razonamientos que indican la estructura de la argumentación en el caso de la refutación: el razonamiento implícito, referido por los profesores como la inexistencia de un teorema relevante o la implementación inapropiada de un teorema conocido; el razonamiento que alude a la *argumentación matemáticamente correcta* donde se justifica la conclusión valiéndose de contraejemplos; y el razonamiento que integra argumentos teóricos y contraejemplos, bien sea cuando el contraejemplo justifica un argumento teórico o cuando el argumento es una propiedad en la cual la aserción es válida.

Whitenack et al. (2014) examinan la estructura de los argumentos de profesores de primaria, quienes asisten a un curso de posgrado, para identificar oportunidades para el aprendizaje. Para cumplir con ese propósito, usan ideas asociadas con la argumentación colectiva (que será abordada en el siguiente tema) para caracterizar los *encuadres* de las garantías y los respaldos. Los resultados sugieren que la forma cómo se establece los respaldos, da razón de las dificultades de los participantes para establecer discusiones matemáticas productivas. También, ilustran cuán importante es para los formadores de profesores promover discusiones en situaciones problemáticas que sean familiares, así como identificar y examinar los encuadres cualitativamente, de manera que las discusiones en clase brinden oportunidades para el aprendizaje.

Respecto a los estudios interesados en inquirir por la estructura de la argumentación del profesor de matemáticas, se pueden hacer varias afirmaciones. De un lado, las construcciones teóricas de otras ciencias no pueden ser utilizadas en la manera en que fueron elaboradas, sino que deben ser interpretadas y adaptadas para atender a las necesidades de la Educación Matemática. Póngase por caso el interés de los estudios por considerar diferentes elementos del modelo de Toulmin, como el calificador modal (Inglis et al., 2007), los tipos de garantías (Nardi et al., 2012) y el encuadre de garantías y respaldos (Whitenack et al., 2014). De otro lado, la combinación de enfoques teóricos podría ser útil para sugerir posibles relaciones entre la estructura de la argumentación y el conocimiento del profesor (Metaxas et al., 2009, 2016). Este tema, además, propone implicaciones para el aprendizaje y para el diseño de tareas (Giannakoulias et al., 2010) y el papel que tienen los formadores de profesores (Giannakoulias et al., 2010; Whitenack et al., 2014). Respecto a cuestiones metodológicas, es reiterativo el trabajo con profesores en activo a partir de situaciones hipotéticas de clase, para observar por ejemplo acciones específicas de estos (Nardi et al., 2012; Metaxas et al., 2009, 2016; Giannakoulias et al., 2010).

Estudios que enfatizan el papel del profesor de matemáticas en la promoción de la argumentación en clase. Este tema refiere a estudios que proporcionan una descripción del papel del profesor de matemáticas para promover la argumentación en clase. Dada la diversidad de trabajos en esta dimensión, se han planteado los siguientes subtemas: papel del profesor al apoyar la argumentación colectiva, papel del profesor como *orquestador*, profesor como guía, brindar oportunidades para involucrar a los estudiantes, construir el *andamiaje* en donde se regula la argumentación y papel en el diseño de tareas.

Basados en el modelo de Toulmin, un primer grupo de investigadores han utilizado la propuesta de Krummheuer (1995), para examinar la argumentación colectiva en clase de matemáticas, tanto para prestar atención al aprendizaje (Conner, 2008), como para describir roles y acciones del profesor en situaciones donde se busca favorecer la argumentación, o incluso en las clases donde no hay un objetivo explícito de promoverla. La argumentación colectiva puede ser definida como “la instancia en la que estudiantes y profesor realizan una aserción matemática y proporcionan evidencia para respaldarla” (Conner et al., 2014a, p. 404, traducción propia).

Yackel (2002) utiliza la argumentación colectiva como un medio para explicar el papel del profesor en clase de matemática y para mostrar implicaciones en Educación Matemática, mediante el análisis de una clase de ecuaciones diferenciales en la universidad y de episodios de una clase de primaria. Concluye que, para ser eficaces, los profesores deben comprender a fondo posibilidades y limitaciones conceptuales matemáticas de sus estudiantes, y conceptos matemáticos subyacentes. La importancia de este trabajo es doble, por un lado los profesores deben entender cómo sus estudiantes dan sentido a ideas matemáticas, deben poder emitir juicios, basados en sus interacciones en la clase, y por otro el papel de los programas de formación de profesores, donde se reflexione acerca del desarrollo de conceptos matemáticos.

Conner (2008) propone una expansión a la argumentación colectiva con apoyo de diagramas, de manera que se pueda analizar el papel del profesor; analiza, también, la práctica de tres profesores, los cuales no tenían como objetivo promover la argumentación en su clase. Informa que fue necesario distinguir entre las partes de los argumentos aportados por el profesor y las partes de los argumentos aportados por los estudiantes, además de disponer de herramientas para distinguir entre estructuras y *patrones de argumentación*. En los resultados discute cómo estos diagramas y las extensiones de análisis que los acompañan, permiten la investigación de preguntas complejas, donde el papel del profesor está relacionado con concepciones, creencias, conocimiento de las matemáticas y experiencias de la práctica.

Conner et al. (2014a) proponen un marco para estudiar la argumentación colectiva, para examinar la promoción de la argumentación por parte del profesor de secundaria, con el fin de identificar las contribuciones directas del profesor a los argumentos, las acciones y los tipos de preguntas que hace. Reportan que este marco puede ayudar al profesor a monitorear el progreso de sus estudiantes, como una vía hacia la promoción del razonamiento deductivo y, eventualmente, hacia la demostración. Este marco permitiría, también, el estudio de normas socio-matemáticas a modo particular en la justificación y en la explicación, ya que el profesor puede observar cómo los estudiantes contribuyen con partes de los argumentos, por ejemplo, en las garantías, con y sin su apoyo. Incluyen color, estilo de líneas y burbujas de diálogo, para indicar si el profesor, los estudiantes, o el profesor y los estudiantes, contribuyeron con cada componente de un argumento. También incluyeron partes de argumentos que no son establecidos, de manera explícita, por el profesor o sus estudiantes y, por lo tanto, deben inferirse del contexto de clase y del contenido del argumento.

Conner (2017) explora las diferencias en la argumentación colectiva que se observan en la clase de matemáticas. Sostiene que los componentes de racionalidad epistémica, teleológica y comunicativa (Habermas, 1999), proporcionan información acerca de las diferencias en el apoyo que los profesores brindan a la argumentación colectiva en sus interacciones con los estudiantes. Define el apoyo como cualquier gesto del profesor que provoca o responde a un componente de argumento. Incluye tres tipos de acciones de apoyo: contribuciones directas de componentes argumentales, preguntas y otras acciones de apoyo tales como gestos o diagramas. Sugiere que los profesores deben apoyar el desarrollo de los componentes de la racionalidad mediante la formulación de preguntas.

Yopp (2012) utiliza un episodio de clase con profesores de matemáticas quienes tomaban un curso de algebra lineal, para indagar por aspectos en el marco de la argumentación colectiva, en relación con el papel del profesor: cómo puede promover el paso a argumentos más *sofisticados* sin desmeritar argumentos *informales*, cómo puede ayudar a los profesores a desarrollar argumentos más sofisticados y qué tipos de garantías o respaldos son necesarios para plantearlos. En respuesta a estas cuestiones, el autor informa que los profesores proponían argumentos poco sofisticados al comienzo de la argumentación colectiva y necesitaban una considerable orientación para producir argumentos más sofisticados. El formador (profesor del curso) desempeñó un papel central al ayudar a los profesores a evaluar sus argumentos, al estimular la necesidad del uso de garantías y respaldos, y al solicitar a los profesores conceptos matemáticos y herramientas para proponer argumentos más sofisticados.

Brown (2017) exploró las posibilidades y limitaciones de utilizar la argumentación colectiva para enriquecer el compromiso estudiantil con las matemáticas. Con la ayuda de un experimento de enseñanza, buscó identificar la influencia de procesos sociales y culturales en el aprendizaje. Los hallazgos sugieren cuáles aspectos de la argumentación colectiva- los estudiantes explican, justifican y presentan ideas - pueden ser utilizados por los profesores para promover el compromiso de los estudiantes con las matemáticas.

Respecto al papel del profesor como orquestador, Boero et al. (2009) describen la preparación, planeación, realización, revisión y experimentación de una secuencia didáctica con estudiantes de primaria, la cual resalta la argumentación durante el estudio de la probabilidad. La secuencia didáctica se diseñó bajo la hipótesis de que las actividades argumentativas orquestadas por el profesor podrían promover avances sustanciales en el conocimiento de los estudiantes. Boero (2011), estudia un episodio de clase, donde los participantes discuten una tarea de probabilidad, cuyo propósito era desarrollar conciencia respecto de las reglas de argumentación. Los resultados indican que la discusión debe estar orquestada por el profesor, quien de acuerdo con el grado escolar y los objetivos de la tarea, podría introducir algunos términos técnicos y conceptos matemáticos para llevar a los estudiantes de un conocimiento inicial e informal a un conocimiento más formal, de manera que la *cultura de la argumentación*, pueda hacer parte del contexto de clase.

Hershkowitz et al. (2014) indagaron por los mecanismos en los cambios de conocimiento en el proceso de aprendizaje matemático y por los roles del profesor y los estudiantes en su realización. En los análisis informan cómo el profesor adoptó el papel de orquestador del proceso de aprendizaje y asumió la responsabilidad de proporcionar un entorno que promoviera argumentación e interacción. Destacan el papel del profesor en la creación de consenso, al motivar a sus estudiantes a proponer ideas, conclusiones o justificaciones (en el sentido del modelo de Toulmin, proporcionar datos o garantías), y es intencional en sus esfuerzos por aclarar si un estudiante está o no de acuerdo con otro estudiante.

En otro subtema, en el cual se reconoce al profesor como guía, Ubuz et al. (2013) a través de observaciones en un curso de cálculo a profesores en formación analizan la argumentación en las conversaciones de clase. Los autores mencionan cómo el profesor puede actuar como un guía que conoce el camino a seguir, es decir, dónde comenzar y finalizar la argumentación. Durante la argumentación, si los estudiantes siguen el camino equivocado, obtienen una conclusión no pertinente o no hay avance, el profesor interviene para ponerlos en el camino que deben seguir. Los resultados sugieren que el profesor juega un papel crucial, como guía-respaldo (al aprobar garantías, respaldar o intermediar en las conclusiones dadas por los estudiantes) y guíaredireccionando (al proponer ejemplos o sugerencias cuando los estudiantes no avanzan o no empiezan la argumentación en un buen punto).

En tanto que, Bleiler et al. (2014) y Staples y Newton (2016) indagan acerca de cómo el profesor puede brindar oportunidades para involucrar a los estudiantes. Bleiler et al. (2014) afirman que los profesores de matemáticas desempeñan un papel único como expertos que brindan oportunidades para que los estudiantes participen. Los autores describen los resultados de un estudio exploratorio que examina la validación del profesor de argumentos de los estudiantes, antes y después de la implementación de un conjunto de tareas, por futuros profesores de matemáticas de secundaria. Los resultados sugieren que los formadores de profesores deberían favorecer la participación en la validación de argumentos, además de brindar oportunidades donde los futuros profesores puedan leer los argumentos de los estudiantes, reflexionar acerca de las fortalezas y debilidades de los argumentos, y discutir ideas relacionadas con la validación de argumentos.

Mientras que Staples y Newton (2016), comentan las dificultades que pueden tener los profesores para involucrar a los estudiantes en la argumentación, por eso indagan por tipos de oportunidades para intentar superarlo. Los autores documentan cómo la argumentación, como práctica fundamental para el trabajo de la comunidad matemática, puede contextualizarse en clases de matemáticas en secundaria para diferentes propósitos. Atender esos propósitos puede ayudar a los profesores a ser estratégicos con sus elecciones, aprovechar la argumentación como práctica profesional y ofrecer a los estudiantes oportunidades para desarrollar una comprensión de la argumentación como una práctica de aprendizaje.

Se incluye también el trabajo de Makar et al. (2015), quienes aseveran que el desarrollo de prácticas de investigación basadas en la argumentación, requiere que profesores y estudiantes sean explícitos respecto a las normas de la clase que respaldan estas prácticas. Los autores buscan responder cómo puede un profesor proponer un *andamiaje* en el desarrollo de normas y prácticas de investigación, basadas en la argumentación en la clase de matemáticas. Valiéndose de las características del andamiaje (diagnóstico, capacidad de respuesta, traspaso a la independencia), analizaron las estrategias que el profesor usó para establecer las normas y prácticas requeridas. El análisis mostró cómo el profesor diagnosticaba de manera constante las normas de la clase y utilizaba estrategias que cambiaban a medida que las normas surgían, se desarrollaban y se estabilizaban. Se resalta en la emergencia y posterior fluidez de normas por parte de los estudiantes el papel cambiante del profesor para diagnosticar y responder al andamiaje de los estudiantes durante el surgimiento, desarrollo y estabilización de las normas, y la relación entre la investigación basada en la argumentación y el andamiaje de las normas de la clase.

Por último, el subtema centrado en el diseño de tareas está representada por Prusak et al. (2012), quienes intentan ejemplificar cómo un diseño meticuloso puede llevar a los profesores en formación a participar en una argumentación productiva no guiada. Para ello proponen una tarea, recreada en un software de geometría dinámica, a estudiantes que se preparan para ser profesores en primaria. Consideran tres principios a ser tenidos en cuenta para diseñar este tipo de tareas: crear una situación de conflicto, crear una situación de colaboración, y proporcionar un dispositivo para verificar conjeturas. En los resultados afirman que, aunque las prácticas argumentativas son de ayuda para el aprendizaje, son difíciles de sostener; si bien la ayuda de los profesores para facilitar la argumentación puede ser beneficiosa, es un gran desafío para ellos y deberían, primero, experimentar la argumentación como aprendices para luego asumir el rol de facilitador.

A manera de cierre de este tema, se presentan una serie de consideraciones acerca del papel del profesor. Podría hablarse de un papel de apoyo a la argumentación colectiva, donde aquel pueda comprender las posibilidades y limitaciones conceptuales de sus estudiantes (Conner et al., 2014a; Yackel, 2002), y se valga de la participación, explicación y justificación que brindan estos, de manera que se pueda hablar de una construcción conjunta en la clase (Brown, 2017). Al igual que en el tema anterior, el papel del profesor también está relacionado con componentes de su conocimiento, además de sus creencias y experiencias de su propia práctica (Conner, 2008; Yopp, 2012), lo cual ratifica la importancia que se debe prestar a la formación de profesores y a los programas de desarrollo profesional. También podría remitirse a un papel afín con la orquestación, donde el profesor adquiera el rol de proporcionar entornos adecuados para la argumentación y la participación (Boero, 2011; Boero et al., 2009). La orquestación ubica al profesor como experto (Bleiler et al., 2014), quien establece las normas de clase (Makar et al., 2015), diseña tareas adecuadas (Prusak et al., 2012) y dirige el camino a seguir (Ubuz et al., 2013), para brindar oportunidades a sus estudiantes de participar en la argumentación.

Estudios que enfatizan el conocimiento del profesor de matemáticas para favorecer la argumentación en su clase. En este tercer tema se encuentran trabajos que plantean un vínculo entre el conocimiento del profesor de matemáticas con la argumentación. Al igual que en los temas precedentes, en un subtema se considera el marco de la argumentación colectiva, esta vez para mostrar vínculos con el conocimiento del profesor. Las otros subtemas se focalizan en: presentar las interpretaciones de la argumentación realizadas por el profesor, indicar las competencias y habilidades del profesor, exponer el vínculo con el conocimiento pedagógico del contenido, dejar ver las creencias del profesor, y mostrar la relación entre el conocimiento y el planteamiento de aserciones.

Respecto al primer subtema, Conner et al. (2014a) advierten que la argumentación colectiva se puede utilizar para informar la formación del profesor y el tipo de tareas en programas de desarrollo profesional. En los hallazgos señalan cómo los educadores de profesores de matemáticas pueden utilizar este marco para participar en diálogos referentes a las experiencias de clase, y los profesores en formación pueden reflexionar acerca de los tipos de apoyo en tanto que construyen su identidad como profesores de matemáticas. Además, la comprensión de los diferentes tipos de acciones de apoyo podría proporcionarles a los profesores en activo constructos significativos para examinar y reflexionar sobre su práctica; por ejemplo, el conocimiento de los diferentes componentes del argumento puede inducir a un profesor en ejercicio a examinar el grado de contribución estudiantil a los componentes de los argumentos.

Conner et al. (2014b) ilustran el tipo de razonamiento en episodios de argumentación colectiva valiéndose de ejemplos de la práctica de un profesor. Los autores indican cómo la validación de diferentes tipos de razonamiento (inductivo, abductivo y un avance en el deductivo) en la argumentación colectiva pueden mostrar cómo los estudiantes se involucran en la generación y comprobación de conjeturas. Los profesores pueden aprovechar su comprensión de estos tipos de razonamiento para ayudar a los estudiantes a razonar de manera productiva.

Wagner et al. (2014) presentaron el marco de argumentación colectiva a futuros profesores de matemáticas de secundaria y les pidieron analizar los argumentos usados. Encontraron que los futuros profesores desarrollaron una comprensión adecuada de cómo se concibe la argumentación colectiva en la clase, y el modelo les proporcionó una herramienta para analizar la práctica del profesor. Esto sugiere que el uso de este marco podría ayudar a los futuros profesores a desarrollar sus concepciones de la argumentación colectiva.

A su vez, en otros documentos se sugiere acerca de la interpretación del profesor respecto la argumentación. Goizueta y Planas (2013b) estudian las discusiones en cuanto a la argumentación, en clase de matemáticas, de un grupo de profesores de secundaria. Examinaron discusiones a las respuestas de un cuestionario referente a episodios hipotéticos de clase. En las respuestas, los profesores discutieron cuestiones relacionadas con el: sobre, dónde y cómo se produjo la argumentación, es decir privilegiaron tanto el desarrollo de la tarea matemática como los aspectos semánticos implicados, lo cual puede ser un indicio de la complejidad de explicar por qué una afirmación es una argumentación. Aseveran que los profesores deben ser capaces de identificar, considerar y evaluar las *producciones argumentativas* de sus estudiantes, incluso más allá del desarrollo de conceptos estrictamente matemáticos.

Goizueta y Planas (2013a) estudiaron las interpretaciones de la argumentación de profesores de matemáticas de secundaria. Señalan cómo a diferencia de lo que sucede en el ámbito matemático profesional, las interpretaciones acerca de la argumentación de estos profesores sugieren la incorporación de rasgos semánticos comunes y distintivos, relativos a contenidos matemáticos. Los resultados exhiben que los profesores dan importancia al papel de las reformulaciones en el desarrollo de las prácticas argumentativas, y a la presencia de conectivos y marcas estructurales. Sin embargo, a menudo omiten las referencias al valor epistémico de los argumentos.

Kosko et al. (2014) exploran las interpretaciones de los profesores acerca de lo que significa animar a sus estudiantes a justificar sus conclusiones, comunicarlas y responder a los argumentos de los demás. En los hallazgos, muestran cómo la mayoría de los participantes representaron acciones que no respaldaron la participación del estudiante. El hecho de que continúen acciones como el silencio del profesor y la escasa promoción de la discusión, sugiere que la argumentación matemática puede ocurrir con poco andamiaje por parte del profesor. Encontraron que incluso cuando se pidió a los profesores participar en argumentación, muchos representaban acciones que no ofrecían oportunidades para la argumentación, dejaban esta tarea a los estudiantes, o formulaban preguntas generales, lo cual podría estar justificado por la falta de experiencia para promover la argumentación en clase.

Por otro lado, en relación con las competencias y habilidades del profesor, Krummheuer (2007) se refiere a las competencias que un profesor necesita en clase. Comenta que invita a los futuros profesores a revisar transcripciones de clases hipotéticas, para familiarizarlos con las diferentes formas de interacción en el aula y, al mismo tiempo, para aumentar su competencia en los procesos de interpretación en clase. Resalta que la argumentación no debe ser solo un objetivo de la enseñanza, en el sentido de diseñar tareas y aprender a argumentar matemáticamente de manera sofisticada, sino que debe ser una característica principal de la clase. Y en un documento posterior, Krummheuer (2012) ratifica cómo la noción de la argumentación como objetivo de enseñanza apunta a lo que podría llamarse *aprender a argumentar*. Pero si se piensa en términos de escenarios interacciónales propios de las situaciones cotidianas de la clase de matemáticas, la argumentación también debe ser vista como una característica principal de esos escenarios.

Solar y Deulofeu (2016) presentan condiciones para promover el desarrollo de *competencias argumentativas* en la clase de matemáticas. Entre estas: estrategias comunicativas del profesor como las oportunidades de participación, la gestión del error y el tipo de preguntas; las características de las tareas matemáticas que se plantean en clases, en particular las tareas abiertas; y una planificación de clase que promueva la argumentación, no solo basta con una tarea matemática abierta sino con una gestión del profesor.

Kollar et al. (2014), Vogel et al. (2012) y Vogel et al. (2013) reportan avances y resultados de un proyecto desarrollado en un entorno para el Aprendizaje Colaborativo Asistido por Computador -ACAC-, para investigar el efecto que ciertos tipos de apoyo, en la instrucción a profesores en formación, pueden ayudar en la adquisición de *habilidades argumentativas.* Los resultados del primer estudio mostraron que los ejemplos heurísticos trabajados y los libretos ACAC fueron efectivos para la adquisición de la competencia de argumentación matemática. Los otros dos reportes investigan si estos efectos podrían optimizarse al favorecer que los profesores en formación adapten el apoyo instruccional de acuerdo con sus necesidades. Los resultados muestran que los profesores en formación utilizan activamente la oportunidad de adaptar el soporte de instrucción a sus propias necesidades. Sin embargo, para beneficiarse de la adaptabilidad del soporte de instrucción, necesitan habilidades de autorregulación.

De otro lado, se retoma a Metaxas et al. (2009) y a Giannakoulias et al. (2010), esta vez para presentar hallazgos referentes al contenido de la argumentación del profesor. Metaxas et al. (2009) observan que el profesor, por lo general, tiende a aplicar algún tipo de regla general, meta-ejemplo o comentario como apoyo a sus argumentos, es decir podría afirmarse que confía demasiado en su conocimiento empírico personal, mientras que es bastante reservado respecto a sus aseveraciones pedagógicas generales. Acerca de la línea creencias del profesor, Giannakoulias et al. (2010) indican que el papel de contraejemplos para refutar las aserciones no válidas parecía estar desestimado por los profesores, pues la mayoría de profesores no los usaron, pero intentaron refutar un argumento desarrollando argumentos basados en la teoría. Una creencia docente emergente fue que la refutación mediante el uso de teoremas proporciona conclusiones más fuertes y más generales que el uso de contraejemplos. Este estudio indica que se deben plantear tareas donde la refutación, la teoría y los contraejemplos, puedan ser efectivos para el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores.

Žalská (2017) informa que las creencias específicas del profesor podrían determinan el papel de las contribuciones de los estudiantes. Este artículo presenta hallazgos de un estudio de caso de un profesor de secundaria que posee creencias tradicionales acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En términos de la influencia del profesor, pareciera que impone sus propias creencias o la elección de métodos de solución. Además, la elección del profesor de no justificar matemáticamente puede ser causada por sus creencias. Al final, las contribuciones de los estudiantes son evaluadas por el profesor en términos de *corrección matemática*. Y por último, Yopp (2015) aborda los tipos de aserciones de los profesores en formación cuando abordan una generalización falsa o un contraejemplo. El autor encontró que los profesores en formación pueden ser influenciados por el conocimiento de la argumentación, conocimiento y por la práctica matemática, percepciones de la tarea, uso del lenguaje natural, conocimiento, uso y habilidad del registro de matemáticas, y capacidades para usar conceptos.

Así pues, diferentes elementos apuntan a reconocer la influencia del conocimiento del profesor para promover la argumentación en clase. Podría decirse que el conocimiento profesional puede resultar de gran ayuda para gestionar, por ejemplo, la argumentación colectiva y las discusiones de clase (Conner et al., 2014a; Conner et al., 2014b, Wagner et al., 2014). El conocimiento también podría estar relacionado con competencias (Krummheuer, 2007, 2012), interpretaciones (Goizueta y Planas, 2013a), significados (Goizueta y Planas, 2013b), creencias (Žalská, 2017) y concepciones (Solar y Deulofeu, 2016) del profesor, haciendo tal vez, de la clase de matemáticas un sitio donde se favorecen tanto las actividades argumentativas como la motivación del aprendizaje.

Los temas y subtemas permiten identificar una serie de aspectos que han estado asociados a la argumentación del profesor de matemáticas y sirve de ilustración para converger o tomar distancia en la presente investigación. De un lado, los aspectos relativos a la estructura de la argumentación marcan una línea ampliamente desarrollada, en donde el modelo de Toulmin se ha convertido en una herramienta útil para analizar la producción del profesor; sin embargo, dados los objetivos del estudio no se considera pertinente remitirse a tal modelo y por ende se hace una exploración por otros marcos teóricos que logren estar en coherencia con el propósito investigativo. De otro lado, es también extensa la literatura acerca de los aspectos asociados al papel y al conocimiento del profesor para promover la argumentación en clase, no obstante, no está dentro de los intereses del estudio analizar cómo se podría promover la argumentación en clase, aunque no puede desconocerse que una posible interpretación desde otro lente podría hacerlo. Algunos resultados de Solar y Deulofeu (2016) son adaptados en la fundamentación teórica.

Discurso en clase de matemáticas. Aunque ha habido una mayor participación en el estudio del discurso en el campo de la Educación Matemática (Ryve, 2011), no es frecuente encontrar trabajos dedicados a indagar por aspectos asociados al profesor. No obstante, pueden citarse algunos trabajos que, de manera precisa o tangencial, han cuestionado el papel del profesor. La Tabla 2 presenta la clasificación de documentos por temas respecto a la literatura alusiva al discurso en clase de matemáticas.

Tabla 2: Clasificación de documentos por tema. Elaboración propia.

Tema	***Documentos***
Ventajas para el aprendizaje	Sfard (2007).
Interacción profesor y estudiantes	Barwell (2016).
Prácticas de discusión	Rodrigues, Menezes y Ponte (2018).
Acciones del profesor	Cengiz, Kline y Grant (2011); Ponte, Mata-Pereira y Quaresma (2013).
Movimientos del profesor	Herbel-Eisenmann, Steele y Cirillo (2013); Mueller et al. (2014).
Discurso matemático del profesor	Planas et al. (2016); Planas et al. (2018).
Revoicing	Boukafri (2017) ; Enyedy et al. (2008); Forman et al. (1998); Moschkovich (1999).

Orquestación	Drageset (2014); Ferrer, Morera y Fortuny (2014); Forman y Ansell (2002).
Conversación	Drageset (2015).
Orientar e interpretar discusiones	Forman et al. (1998); Wood (1999); Schwarz, Hershkowitz y Azmon (2006); Ayalon y Even (2016); Azmon, Hershkowitz y Schwarz (2011).

De un lado, Sfard (2007) realiza un estudio en el marco del enfoque *commognitive*, el cual permite estudiar el aprendizaje, donde se supone que pensar es una forma de comunicación y, que aprender matemáticas equivale a modificar y extender el discurso. Este trabajo busca responder a las maneras en que el profesor y los estudiantes pueden transformar su discurso, y el efecto de este en los procesos de aprendizaje y enseñanza. La autora afirma que el líder en el discurso, el profesor en este caso, debe ser aceptado y comprendido, no solo obedecido sin pensar, pues asevera que se debe confiar en el profesor y se debe valorar el discurso que él o ella representa.

Barwell (2016) centra su discusión en la relación entre el lenguaje matemático formal e informal y el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Ilustra esta discusión con un episodio que tuvo lugar en la interacción en una clase de matemáticas de escuela primaria. Basándose en algunas ideas de Bakhtin, sostiene que el significado matemático emerge a través de relaciones dialógicas situadas localmente, que se producen entre múltiples discursos, voces e idiomas, en la interacción en la clase de matemáticas. A través de esta perspectiva, la interacción entre los estudiantes y el profesor no se entiende en términos del profesor que guía a los estudiantes hacia el lenguaje matemático formal, más bien, es un ejemplo de cómo todos los participantes están influenciados por la tensión que significa el lenguaje.

Rodrigues et al. (2018) presentan las prácticas de discusión de dos profesores de matemáticas de octavo grado en Portugal, con el objetivo de comprender cómo conducen discusiones en álgebra. Los resultados muestran que los profesores estructuran la discusión matemática en tres momentos principales: presentación; comparación, evaluación y filtrado; y conclusión; y generan el discurso para la generalización de ideas algébricas. Mencionan que es importante estudiar las prácticas de discusión matemática con el objetivo de comprenderlas mejor y proporcionar momentos productivos para el aprendizaje de los estudiantes, ya que es fundamental que el profesor consiga decidir cuándo debe continuar la discusión de una idea o cuándo pedir aclaraciones o usar ideas de los estudiantes para hacer determinadas observaciones en lo tocante a las matemáticas.

Respecto a las acciones del profesor, algunos autores (Cengiz et al., 2011; Ponte et al., 2013), indican que durante el momento de la discusión se presentan una serie de acciones. Ponte et al. (2013) consideran que la organización y conducción de discusiones colectivas podría ser importante para el aprendizaje de los estudiantes, al constituir una faceta de la práctica profesional del profesor; estos autores buscan comprender la conducción de discusiones como aspectos de la práctica del profesor, al identificar problemas que emergen durante su desarrollo. Para ello, proponen un marco que busca clarificar la naturaleza de las acciones del profesor: las acciones de *invitar*, que introducen al estudiante en la discusión; las acciones de *apoyar* o *guiar* que promueven su continuidad en la discusión; las acciones de *informar* o *sugerir*, que permiten presentar información y argumentos o validar respuestas; y las acciones de *desafiar*, que llevan al estudiante a introducir representaciones, interpretar y establecer conexiones, a razonar, a argumentar y a evaluar. Mientras que para Cengiz et al. (2011), estas acciones son de tres tipos: las de *elicitar* que presuponen invitar a los alumnos a compartir sus estrategias; las de apoyar que permiten recordar el objetivo de la discusión o del problema, repetir un argumento, reforzar el pensamiento del estudiante e introducir diferentes representaciones y contextos; y las de *ampliar* que llevan a los estudiantes a evaluar un argumento u observación, a ofrecer un razonamiento para un argumento, a comparar diferentes estrategias, a usar la misma estrategia en nuevos problemas y a presentar argumentos. Puede observarse que ambos marcos se complementan y convergen en el mismo propósito, con la salvedad que en el marco de Cengiz et al. (2011) las acciones de apoyar incluyen lo que Ponte et al. (2013) nombran como acciones de apoyar o guiar e informar o sugerir.

En consideración a los *movimientos* del profesor, Herbel-Eisenmann et al. (2013) en un proyecto con profesores de secundaria nombran una serie de movimientos del discurso del profesor: esperar, usar el *tiempo de espera* para proporcionar a los estudiantes tiempo para procesar las preguntas del profesor y pensar en la respuestas; invitar a los estudiantes a participar; *revoicing*, pedir a los estudiantes *revoicing*; dar seguimiento a la solución, estrategia o pregunta de un estudiante; crear oportunidades para comprometerse con el razonamiento de otro. Por su parte, Mueller et al. (2014) utilizan datos de un curso de sexto grado que participa de un estudio longitudinal para indagar por los movimientos específicos del profesor, por las intervenciones intencionales y verbales hechas por el profesor después de presentar una tarea; cuándo anima a los estudiantes a colaborar, compartir ideas sin darles restricciones, cuestionar ideas y soluciones de los demás y construir argumentos para las soluciones planteadas. Estos movimientos tienen la intención de influir en la discusión y el razonamiento de los estudiantes, pues los alientan a verbalizar y a hacer públicas sus ideas, y a justificar sus soluciones a sus compañeros. Como resultado del estudio, clasifican los movimientos del profesor en tres tipos: en donde se hacen públicas las ideas de los estudiantes, los que aportaron y extendieron las ideas de los estudiantes, y los que alentaron explicaciones y justificaciones. Juntos, estos tres tipos de movimientos fueron cruciales para el establecimiento de normas sociales, para escuchar, compartir y promover justificaciones estudiantiles, caracterizadas por varias formas de razonamiento. Junto con la presentación de tareas abiertas y la escucha atenta, estos movimientos guiaron la creación de una *comunidad matemática* en la clase.

Moschkovich (1999) examinó una lección de una discusión en clase matemáticas de tercer grado acerca de las formas geométricas, para ilustrar cómo un profesor puede apoyar la discusión matemática y describir cómo los estudiantes participaron de situaciones matemáticas de diferentes maneras. En particular, el profesor no se centró en el desarrollo del vocabulario, sino en el contenido y los argumentos matemáticos, ya que interpretó, aclaró y reformuló lo que los estudiantes decían. Durante esta lección, *las estrategias de instrucción del profesor* incluyeron: (1) usar varias expresiones para el mismo concepto, (2) usar gestos y objetos para aclarar el significado, (3) aceptar y desarrollar las respuestas de los estudiantes, (4) utilizar el *revoicing* (estrategia discursiva que consiste en re-expresar la intervención de un estudiante, oral o escrita, por parte de otro participante) a las aseveraciones de los estudiantes valiéndose de términos más técnicos, y (5) centrarse no solo en el desarrollo del vocabulario sino también en el contenido matemático y en las prácticas de argumentación. Concluye que, un enfoque discursivo para aprender matemáticas significa considerar las diferentes maneras de hablar de los objetos matemáticos y los puntos de vista de las matemáticas en las discusiones.

De manera específica algunos investigadores (Boukafri, 2017; Enyedy et al., 2008; Forman et al., 1998) han analizado el *revoicing*, no en el sentido de Moschkovich (1999) centrado en los estudiantes, sino en el profesor. Boukafri (2017) se vale del análisis de dos clases y de aspectos de la perspectiva sociocultural, del interaccionismo simbólico y de la perspectiva discursiva, para proponer una conceptualización de *revoicing* del profesor, la cual es descrita como “repetir, refrasear, relatar o ampliar expresiones de ideas matemáticas expresadas en intervenciones de participantes y con efectos discursivos en el desarrollo de ideas matemáticas en lo que a contenido y enseñanza se refiere" (p. 108). Por su parte Enyedy et al. (2008) examinan el *revoicing* en una clase de álgebra en una escuela secundaria multilingüe en Estados Unidos, con la intención de saber si el profesor utiliza el *revoicing*, y cuándo y dónde lo utiliza. Concluyen que el *revoicing* podría estar estrechamente relacionado con la argumentación en la clase, que las interacciones discursivas en la clase abren oportunidades y preparan el escenario para que el profesor lleve a que sus estudiantes sean personas que hacen matemáticas y, que dado el contexto donde tuvo lugar la investigación, encontraron diferencias en las maneras en que el profesor utiliza el *revoicing* en una clase multilingüe. Forman et al. (1998) describieron el *revoicing* como una estrategia que los profesores pueden utilizar para promover el debate académico, al mostrar cómo las ideas de los estudiantes se relacionan con las ideas de otros, también ilustraron cómo los profesores pueden ampliar las expresiones de los estudiantes al reformular las ideas en un lenguaje más formal y matemático, y discutir cómo esta expansión puede cambiar la comprensión de los estudiantes.

Planas et al. (2016) y Planas et al. (2018) examinan el discurso matemático del profesor en discusiones de clase, con inspiración en el marco MDI –*Mathematical Discourse in Instruction* (Venkat y Adler, 2012). En Planas et al. (2016) se interpretan momentos de selección y secuenciación de ejemplos y explicaciones durante la resolución de un problema. Para ello, aplican una noción de *coherencia local,* la cual alude al cumplimiento de condiciones con relación a la selección, la secuenciación y la conexión de ejemplos y explicaciones. Concluyen que la coherencia local del discurso es mayor en los momentos en los cuales se aportan ejemplos con una función hacia la refutación y, que de cierta manera, desestabilizan el razonamiento utilizado en un principio por los estudiantes. En Planas et al. (2018), se cuestiona cómo se podría evaluar si el discurso del profesor en clase de matemáticas es efectivo para comunicar una cultura de la matemática escolar y producir oportunidades para el aprendizaje. Para responder a ello, presentan, también, la noción de coherencia local, la cual, según los autores, es aplicable al estudio del discurso hablado del profesor en clase. Utilizan datos de dos profesores quienes interactúan con sus estudiantes durante la resolución de una tarea de probabilidad. Centran el análisis en momentos de enseñanza de las matemáticas con ejemplos, en los cuales crean indicadores de coherencia y los relacionan con la generación de oportunidades para el aprendizaje.

Tanto en el trabajo de Planas et al. (2016) como en el de Planas et al. (2018), plantean el término discurso matemático del profesor, el cual surge del marco del MDI, donde se considera al profesor de matemáticas como un agente con tareas escolares, las cuales debe realizar para comunicar a los estudiantes modos de hablar dentro del discurso matemático. El MDI considera cuatro componentes (Adler y Ronda, 2015) en la enseñanza de una lección de matemáticas: ejemplificación, a través de una secuencia de ejemplos y tareas; charla explicativa, en la cual se nombra y legitima el contenido matemático; participación del estudiante, con favorecimiento de la interacción; y el objeto de aprendizaje, que indica el objetivo de la lección.

Algunos autores conceptualizan y utilizan el MDI con varios propósitos. De un lado, Venkat y Adler (2012) examinan la coherencia en un ejemplo o tarea y su explicación adjunta. De otro lado, Adler y Venkat (2014) exploran el MDI de un profesor en una lección de álgebra, en los ejemplos y las explicaciones que ofrece para elaborar ideas matemáticas en su clase. Afirman que, un enfoque en ejemplos y explicaciones no solo es útil para el análisis en una variedad de lecciones para los profesores, sino que también se conecta con el discurso de las matemáticas de la escuela, de una manera que pueda tener una relación más directa con la práctica. Así mismo, Adler y Ronda (2015) utilizan el MDI para analizar lecciones de un profesor durante dos momentos del año escolar, lo cual les permite ilustrar los diferentes aspectos del marco e interpretar las diferencias en la enseñanza de las matemáticas a lo largo del tiempo.

En los trabajos de Drageset (2014), Ferrer et al. (2014) y Forman y Ansell (2002), se alude al concepto de *orquestación*. Drageset (2014) considera que, para describir y analizar la orquestación del discurso de los profesores en el aula, las descripciones detalladas de los comentarios y las preguntas de los profesores son fundamentales. Encontró herramientas y técnicas que utilizan estos profesores para hacer visibles las estrategias de los estudiantes, para que los estudiantes justifiquen, apliquen y evalúen, para asegurar el progreso hacia una conclusión, o para redirigir a los estudiantes a enfoques alternativos.

Ferrer et al. (2014) buscan determinar cómo afecta la actuación del profesor en la generación de oportunidades de aprendizaje. Realizan un estudio de dos casos, para caracterizar el tipo de actuación de dos profesores en la orquestación de discusiones en grupo, con relación a un problema geométrico con estudiantes de 14 y 15 años. Mediante el estudio de las acciones (de gestión, de discusión o de contenido) que se producen en los episodios de clase realizan el análisis, lo cual les permite concluir que dichas acciones podrían posibilitar la determinación de oportunidades de aprendizaje, hecho que permite constatar una relación directa entre la preparación de la discusión en grupo y la generación de oportunidades de aprendizaje. Pudieron determinar, además, dos tipos de actuación del profesor: la magistral, en donde la orquestación está centrada en el profesor; y la participativa, donde la orquestación es equilibrada entre la figura del profesor y los estudiantes.

Forman y Ansell (2002) consideran la orquestación de discusiones en clase, para ello retoman dos episodios en los cuales pudieron observar que tanto el profesor como los estudiantes se involucraban en el *revoicing*, en escuchar, reflexionar, aclarar, ampliar, traducir, evaluar e integrar las explicaciones de los demás. Encontraron, además, que el profesor y los estudiantes desempeñaban funciones complementarias y similares: los profesores tendían a solicitar argumentos a los estudiantes, mientras que los estudiantes tendían a presentar explicaciones a sus compañeros de clase. Encontraron no solo que los argumentos permitieron especular acerca del discurso de profesores y estudiantes en el aula, sino, también, que los argumentos de algunos estudiantes eran privilegiados por los profesores, mientras que la participación de algunos estudiantes se reconocía en algunos momentos y se desconocía en otros.

Drageset (2015) estudia las intervenciones del profesor y los estudiantes a través de un marco para analizar el discurso matemático por turnos en la clase. Se valió de un método de análisis de la conversación, en el cual se estudian giros individuales y se caracterizan de acuerdo con su rol en la conversación. La investigación fue desarrollada con cinco profesores, a quienes se les observaron y grabaron en video diferentes clases. Para el análisis de los datos, las lecciones se dividieron en segmentos, se analizaron por separado las intervenciones de profesores y estudiantes pero nunca de forma aislada, ya que cada intervención se consideró como parte del discurso para ver de dónde surgía y qué efecto tenía en el siguiente turno. En los hallazgos, plantea cómo pudo encontrar conexiones que demuestran cómo las diferentes intervenciones de los estudiantes, a través de explicaciones, respuestas dirigidas por el profesor, respuestas no explicadas, respuestas parciales e iniciativas, son seguidas por diferentes tipos de acciones del profesor. Este estudio sugiere además que, al desarrollar conceptos capaces de describir las cualidades de un discurso paso a paso, se hace posible analizar cuándo la conversación matemática podría fomentar la argumentación, el debate o la crítica, en lugar de la mera entrega de información.

Por último, otro grupo de autores convergen en el papel del profesor en la orientación e interpretación de las discusiones de clase. Wood (1999) reporta con respecto a las acciones de un profesor, durante las discusiones en clase con estudiantes de segundo grado, en las cuales el desacuerdo de los estudiantes se resolvió mediante la argumentación. La sensibilidad del profesor para favorecer la participación de los estudiantes fue importante durante la discusión y el desacuerdo, además participó para promover la interacción y la discusión. Sin embargo, lo que caracteriza intelectual y socialmente a esta clase, es la manera en que el profesor creó un ambiente en el que los estudiantes esperaban participar, criticar y validar su conocimiento matemático a través del discurso. Los hallazgos indican que la creación de un ambiente de clase como este, requiere que los profesores entiendan la relación compleja entre los procesos sociales que se establecen y las oportunidades creadas para el desarrollo conceptual, donde la argumentación sea central para el pensamiento y la construcción del conocimiento.

Schwarz et al. (2006) se refieren a las acciones y roles de los profesores mientras interactúan con estudiantes de secundaria en actividades de construcción del conocimiento. El objetivo fue indagar cómo los profesores dirigieron discusiones con sus estudiantes, cómo motivaron explicaciones y cómo ayudaron a integrarlas en argumentos coherentes. Identificaron algunos patrones en dos profesores que enseñaron la misma secuencia de actividades, con los mismos objetivos didácticos para construir conceptos de probabilidad, refieren a cómo los profesores desencadenan explicaciones y las expanden para convertir las afirmaciones en argumentos. De manera similar, aunque con el empleo de conceptos de álgebra y con el análisis de dos clases del mismo profesor, Ayalon y Even (2016) examinan cómo la actividad argumentativa es compartida no solo por el profesor, sino también por la clase y el tema matemático en estudio. En los resultados, señalan cómo la interacción entre estos tres aspectos puede contribuir a brindar oportunidades a los estudiantes para participar y a tomar parte activa en la actividad argumentativa.

Azmon et al. (2011), exploraron la relación entre los procesos argumentativos de dos profesores y sus estudiantes. Encontraron que las explicaciones de los estudiantes en las dos clases no diferían en términos de corrección, sino en términos de riqueza, con explicaciones más ricas ofrecidas en la clase de uno de los profesores. Una interpretación de estos hallazgos es que en la clase de este profesor había aspectos socio-matemáticos y normas respecto a la responsabilidad de los estudiantes en la elaboración de sus explicaciones y su participación en la construcción del conocimiento. El estudio destaca la importancia del papel mediador del profesor y sugiere la importancia de educar a los profesores para que puedan gestionar de manera eficiente las discusiones en sus clases.

Forman et al. (1998) aseguran que, si se espera que los profesores cambien su práctica en atención a las propuestas de las reformas educativas, entonces se necesitan ejemplos de la gestión y dinámica en la clase de matemáticas. Informan acerca de la clase de una profesora, quien fue capaz de lograr sus objetivos educativos a pesar de no ser normativa y consiguió que sus estudiantes se involucraran de manera activa en la explicación de sus ideas y en la discusión de conceptos matemáticos, con la condición de respetar los turnos de habla y evaluar sus propios argumentos y los de los demás. La profesora fue capaz de organizar la discusión mediante la captación de la atención y la participación de su clase, alineando a los estudiantes con posiciones argumentativas a través del habla indirecta o destacando posiciones a través de la repetición. Los autores creen que el análisis de las discusiones de clase tiene el potencial de convertirse en una poderosa herramienta para evaluar el impacto de las reformas educativas en la escuela.

Respecto al discurso en la clase de matemáticas y los aspectos asociados al profesor, se consideran algunas ideas que sirven de referente teórico o metodológico y otras con las cuales se asume una posición distinta. Aunque promover o favorecer el aprendizaje, no es un objetivo de este trabajo, se converge con los autores en que aprender matemáticas equivale a extender y modificar el discurso (Sfard, 2007), en estudiar las *prácticas de discusión* ya que podrían proporcionar momentos productivos para el aprendizaje (Rodrigues et al., 2018), en la importancia de las discusiones colectivas en el aprendizaje de los estudiantes (Ponte et al., 2013), y en el vínculo entre la preparación de la discusión y la generación de oportunidades para el aprendizaje (Ferrer et al., 2014). Los marcos de Cengiz et al. (2011) y Ponte et al. (2013) respecto a las acciones del profesor, aunque no son tomados de una manera literal, inspiran algunos aspectos en el análisis de los datos. Tanto la teorización de *revoicing*, movimientos del profesor, orquestación, *conversación* y del MDI, no serán profundizados en este estudio pues se desbordaría el objetivo de la investigación. El discurso matemático del profesor, es retomado y ampliado en la fundamentación teórica.

Fundamentación teórica

El propósito de este apartado es describir la fundamentación teórica para el desarrollo de esta investigación. Está dividido en dos secciones: (1) consideraciones referentes a la argumentación y (2) consideraciones referentes al discurso. Para las consideraciones referentes a la argumentación, se expone la concepción de argumentación en la cual se inscribe este trabajo y se describen elementos asociados a dicha concepción. Respecto a las consideraciones referentes al discurso, se presenta la concepción de discurso asumido en la investigación, acompañada de observaciones respecto al discurso en clase de matemáticas.

Consideraciones referentes a la argumentación. Para crear una base teórica, se debe exponer y precisar el concepto de argumentación que es asumido en este trabajo, para ello se retoma una línea que ha sido por diferentes teóricos en investigación educativa (Asterhan y Schwarz, 2016; Ayalon y Hershkowitz, 2018; Schwarz y Asterhan, 2010 y Schwarz, Hershkowitz y Prusak, 2010). De esta forma, en este trabajo se asume la definición de argumentación presentada por van Eemeren et al. (2014):

> La argumentación es un acto complejo comunicativo e interaccional, destinado a resolver una diferencia de opinión con el destinatario, presentando una constelación de proposiciones por las que se puede responsabilizar al argumentador, para hacer que el punto de vista en cuestión sea aceptable para un juez racional que juzgue razonablemente (p. 7, traducción propia).

Esta consideración respecto a la argumentación busca atender a las *interacciones complejas* en la clase de matemáticas, donde el profesor y sus estudiantes discuten durante el desarrollo de una lección con respecto a una determinada tarea. Implica, además, que el objeto de esta investigación, la argumentación del profesor de matemáticas, intenta aislarse de la postura clásica, en la cual la argumentación es asumida como un conjunto de premisas y conclusiones formuladas con la ayuda de símbolos formales cuyo significado se establece de antemano, para asumir una postura más cercana a la *teoría de la argumentación* (van Eemeren, Grootendorst y Snoeck, 2006).

En esta investigación no se pretende abordar una determinada perspectiva dentro de dicha teoría de la argumentación, sino retomar aspectos que puedan ser útiles. Es así, como según Wenzel (2006), interesa de la *perspectiva retórica* la atención dirigida a la ocurrencia de discusiones como un proceso de comunicación natural, es decir, sin proponer tareas específicas o direccionar el comportamiento del profesor en la clase y de la *perspectiva dialéctica* se toma en consideración los métodos que se utilizan para poner bajo cierto control los procesos naturales de argumentación por parte del profesor. No obstante, en coherencia con el objeto de investigación, podría afirmarse que en este trabajo se toma distancia de la *perspectiva lógica*, pues el foco no son los *argumentos* como productos textuales, ni el interés es la validez según ciertos criterios lógicos. Tampoco se busca aplicar o validar la teoría de la cual se desprende esta definición, la llamada *teoría pragmadialéctica* (van Eemeren y Grootendorst, 2011), sino retomar el abordaje teórico del concepto, pues se considera más próximo al propósito de este trabajo.

Considerar la argumentación bajo este supuesto teórico, consiste en ver la argumentación como un tipo de *actividad* con propósito o intencionada, de modo que la actividad es reconocida como un proceso cuya representación es el uso del lenguaje y, por lo tanto, asevera Santibáñez (2015), la estructura de la constelación de los productos específicos debe analizarse como actos de habla que hacen parte de la resolución de diferencias de opinión. En lugar de ser solo una entidad estructural (Toulmin, 2007), la argumentación es un acto complejo comunicativo e interaccional, que ocurre por medio del uso del lenguaje y puede manifestarse en forma oral o escrita (van Eemeren et al., 2006). El *argumentador* y el *destinatario*, en este caso el profesor y sus estudiantes en clase de matemáticas, usan ciertas palabras y oraciones para expresar, cuestionar o negar, para responder a afirmaciones o a preguntas. Pero el lenguaje no solo puede concebirse como un *acto locutivo*, es decir producir sonidos, palabras u oraciones. Searle (1994) distingue además un *acto proposicional*, referirse a algo o a alguien y declarar algunas propiedades de ese algo o alguien; un *acto ilocutivo*, la intención y finalidad de lo que se dice; y un *acto perlocutivo*, los efectos o consecuencias causadas.

Cuando una persona habla (o escribe) usa diferentes palabras o expresiones que le permiten comunicarse y a la vez interactuar con sus interlocutores, realizando de esta forma varios tipos de *actos de habla* (van Eemeren y Grootendorst, 2006; Searle, 2014). Existen, según Searle (2014), cinco posibles tipos de actos de habla: asertivos (enunciados, aserciones, descripciones, etc.), directivos (ordenes, solicitudes, etc.), compromisorios (promesas, juramentos, etc.), expresivos (disculpas, agradecimientos, etc.) y declaraciones (en donde se hace que algo sea declarándolo ser algo[3]).

La argumentación, contrario a otros actos como afirmar, solicitar, prometer o predecir, es considerada un *acto de habla complejo* (van Eemeren y Grootendorst, 2006; 2013), por varias razones: consta en principio de más de una oración; los enunciados que constituyen la argumentación tienen dos funciones comunicativas, la función comunicacional de la argumentación dada por el conjunto de enunciados, y la función comunicacional de cada enunciado, ya que puede ser una afirmación, una declaración, etc.; y la constelación de actos de habla que constituyen la argumentación, deben estar conectados con el acto de habla en el cual se expresa el punto de vista que es apoyado por la argumentación.

La argumentación surge en respuesta a, o en anticipación a, una *diferencia de opinión*, la cual no necesariamente toma la forma de un desacuerdo, disputa o conflicto, sino que hay una parte que tiene una postura y otra parte que duda si aceptar o no dicha postura (van Eemeren et al., 2014). En la clase de matemáticas es factible que se presenten dudas respecto a una aseveración, indicación o explicación del profesor, dudas de una respuesta o procedimiento diferente al presentado por el profesor, o diferentes respuestas a una tarea en el trabajo de los estudiantes, en donde se requiere de la argumentación del profesor. Se podría afirmar que no se requiere de la argumentación del profesor, tan solo de una explicación, sin embargo, en ese caso se requiere de la puesta en escena de recursos discursivos del profesor que son asimilables a la definición de argumentación que se presenta.

Esta postura referente a la argumentación, además, requiere considerar el *proceso de la argumentación* como un acto complejo comunicativo e interaccional dirigido a resolver una

---

[3] Las declaraciones responden a actos legales y jurídicos, por ejemplo cuando un sacerdote dice: "los declaro marido y mujer", lo cual convierte lo dicho en algo con un poder específico y con repercusiones permanentes.

diferencia de opinión, y el *producto de la argumentación* como una constelación de proposiciones diseñadas para hacer aceptable el punto de vista en cuestión. Para van Eemeren et al. (2014), en la argumentación, interesa la *aceptabilidad* a diferencia de otros actos de habla complejos como los de aclarar o explicar, es decir, el argumentador defiende un punto de vista por medio de la argumentación ante un destinatario que tiene dudas respecto a la aceptabilidad o que tiene un punto de vista diferente. La argumentación considera al destinatario como un *juez racional* que juzga razonablemente, y su objetivo no es hacer que se acepte un punto de vista, sino convencerlo de la aceptabilidad de este. *Convencer* al destinatario se basa en la idea de que la otra parte abordará la argumentación de manera constructiva, y juzgará razonablemente su validez. Para justificar o refutar el punto de vista, la *constelación de proposiciones* consiste en una o más expresiones: en el caso de un punto de vista positivo, la argumentación tiene el propósito de justificar la proposición expresada en el punto de vista; y en el caso del punto de vista negativo, es usada para refutarla. Los *enunciados* presentados en el progreso de la argumentación son razones, o en palabras de van Eemeren y Grootendorst (2006) *argumentos* relacionados con una opinión particular o *punto de vista*. Mediante un punto de vista se asume y se defiende una posición. La discusión tiene sentido solo si hay destinatario que tiene dudas respecto a una opinión o tiene una opinión diferente (van Eemeren et al., 1996).

En esta investigación se considera tanto el proceso como el producto de la argumentación. El proceso es analizado con base en las dimensiones, que acorde con la postura teórica incluye: la *dimensión comunicativa*, que refiere a qué dice el profesor y para qué lo dice, es decir se involucra el acto locutivo, ilocutivo y proposicional; la *dimensión interaccional*, que refiere al sitio dónde lo dice y a quién lo dice, es decir se retoma el acto perlocutivo; y dado que la argumentación tiene lugar en un contexto educativo, con propósitos instruccionales de educar en matemáticas, se considera una tercera dimensión, la *dimensión epistémica*, que refiere a cómo lo dice y por qué lo dice. El producto es asumido como la constelación de proposiciones, en lo que respecta a esta investigación cada uno de los episodios seleccionados para el análisis, el cual inicia con una *intervención argumentativa*, en la cual se hace explícita la diferencia de opinión por parte del profesor o de un estudiante, y termina con el *cierre*, cuando se concluye la diferencia de opinión por parte del profesor. En el episodio, el profesor busca convencer a sus estudiantes a partir de su punto de vista, para lo cual recurre a su conocimiento y a su experiencia profesional; los estudiantes actúan como el juez racional, pues se supone que poseen cierto conocimiento matemático.

Si bien este trabajo está centrado en la argumentación, no se puede desconocer la estrecha relación de esta con los términos *argumentar* y *argumento*. Respecto a argumentar, se entiende como “la manera de dar cuenta y razón de algo a alguien con el propósito de lograr su comprensión y asentimiento” (Vega-Reñón, 2011), es decir el profesor argumenta en clase de matemáticas para resolver ciertas diferencias de opinión en clase. Y en relación al término argumento, aunque como ya se dijo antes no será tema de análisis, podría ser reconocido como aquellas acciones o movimientos de un determinado *juego* de argumentación, que podría corresponder a actos de habla, imágenes, gestos u otros elementos que tendrían lugar en un escenario argumentativo (Vega-Reñón, 2011).

Adicional a lo anterior, dado el objetivo de esta investigación, se retoman las condiciones que deberían darse en la clase de matemáticas para el desarrollo de la argumentación según Solar y Deulofeu (2016). A través de análisis de clases de profesores, estos autores concluyen que como mínimo deberían darse tres condiciones: estrategias comunicativas, tarea matemática y plan de clase. Respecto a las estrategias comunicativas, refieren a las oportunidades de participación, la gestión del error y el tipo de preguntas. Referente a la tarea matemática, comentan la importancia de tareas abiertas, en las cuales no consideran necesario que haya un único resultado o que el procedimiento de solución requiera del manejo de diferentes estrategias, no únicamente formales, de manera que se puedan promover distintos puntos de vista y la discusión entre los estudiantes; difieren con las tareas cerradas, pues al haber un algoritmo estándar, se podría dificultar la aparición de la argumentación. Y en cuanto al plan de clase, exponen que no solo basta con una tarea matemática abierta, sino que se hace necesario la gestión del profesor, el cual debe prever la discusión e intervenir a través de acciones específicas y preguntas; la anticipación de respuestas, los procedimientos o posturas de los estudiantes, la anticipación de procesos argumentativos y las acciones del profesor, hacen parte de los indicadores de esta condición.

Dado el propósito y objeto investigativo del presente estudio, con una postura respecto a la argumentación en la clase de matemáticas y unos objetivos auxiliares puntuales, se retoma la idea general de la propuesta de Solar y Deulofeu (2016), pero se llevan a cabo una serie de adaptaciones y se incluye una cuarta condición. De esta manera, se reconocen las siguientes condiciones que activan la argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase: estrategias comunicativas e interactivas, abordaje de la lección, abordaje de la tarea y conocimiento profesional. Los indicadores de cada dimensión, emergen del análisis respectivo.

Consideraciones referentes al discurso. Dado que la argumentación se expresa principalmente en forma oral y por un grupo de participantes (Knipping y Reid, 2015), es pertinente considerar algunos elementos del discurso en clase.

El discurso y los términos relacionados con este, son usados con frecuencia en estudios en Educación Matemática (Lim, Lee, Tyson, Kim y Kim, 2019); sin embargo, el término discurso suele estar relacionado con diferentes enfoques y tradiciones, lo cual implica que no se utiliza una interpretación única del término (Ryve, 2011). No obstante, al igual que algunos investigadores (Barwell, 2016; Boukafri, 2017; Moschkovich, 1999) y dada la perspectiva social en la cual se inscribe este trabajo, se adopta la noción de discurso[4] presentada por Gee (2008):

> Un Discurso es una asociación socialmente aceptada entre las formas de usar el lenguaje y otras expresiones simbólicas, de pensar, sentir, creer, valorar y actuar, así como el uso de diversas herramientas, tecnologías o accesorios que pueden usarse para identificarse como miembro de un grupo socialmente significativo o "red social", para señalar (que uno está jugando) un "papel" socialmente significativo, o para indicar que se está llenando un nicho social de una manera distintivamente reconocible (p. 161, traducción propia).

Es decir, se resalta al discurso como algo más que hablar o escribir (Moschkovich, 2003), para considerarlo como la lengua en uso, ya que puede interpretarse de diferente manera según el contexto (Boukafri, 2017). El discurso refiere a múltiples procesos mediante los cuales las personas se comunican entre ellas (Planas et al., 2018), lo cual implica, considerarlo como un medio y como un objetivo (Gee, 2008). Un medio del discurso del profesor en clase es el habla en torno a la discusión y resolución de tareas y un objetivo es el de la enseñanza de unos ciertos objetos de aprendizaje (Planas et al., 2018). Esta postura es coherente con el propósito de la investigación, pues no solo interesa conocer lo que dice el profesor, sino que también interesa la manera en que lo dice, la identidad que toma cuando lo dice y los actos que acompañan a lo que dice.

De manera específica, en este trabajo se hace alusión al discurso matemático en clase, el cual es entendido como las intervenciones en voz alta de toda la clase o en pequeños grupos, donde

---

[4] El término 'discurso' es presentado por el autor con mayúscula inicial. Sin embargo, por asuntos de convención, en el trabajo se presenta con minúscula inicial sin eliminar con ello la connotación otorgada.

el profesor y sus estudiantes discuten tareas matemáticas, de manera tal que se ponen en consideración la comprensión de conceptos, operaciones, procedimientos y sus interrelaciones (Boukafri, 2017; Shilo y Kramarski, 2018; Walshaw y Anthony 2008). El discurso matemático incluye, además, "no solo formas de hablar, actuar, interactuar, pensar, creer, leer, escribir, sino también valores matemáticos, creencias y puntos de vista" (Moschkovich, 2003, p. 326).

Aunque no se pretende dejar a un lado las intervenciones de los estudiantes, en este estudio interesa profundizar lo que algunos autores han llamado discurso matemático del profesor, el cual es considerado como un componente importante de la práctica educativa en la clase de matemáticas (Planas et al., 2016), es entendido como los procesos de selección, secuenciación, explicación, adaptación y *argumentación* de múltiples situaciones, mediante los cuales el profesor se comunica con sus estudiantes, durante la solución de una tarea en clase para plantear una generalidad matemática [cursivas añadidas] (Planas et al., 2018).

No es posible caracterizar el discurso como una serie de acciones individuales, sino como una práctica social, en donde cada intervención está relacionada con las intervenciones anteriores (Drageset, 2014). Por lo tanto, se utiliza la tipificación de reacciones del profesor ante la intervención de los estudiantes propuesta por Ruthven y Hofmann (2016). Estos autores retoman algunos aspectos del IRF *Initiation-Response-Feedback* para teorizar y analizar el discurso en la clase a partir de reacciones. Una reacción puede ser entendida como la intervención del profesor ante la respuesta o intervención de un estudiante, la cual puede darse tanto luego de la iniciación como de la retroalimentación.

En la Tabla 3 se presentan las diferentes reacciones que un profesor puede manifestar (Ruthven y Hofmann, 2016). Se ha ampliado la caracterización de las diferentes reacciones incluyendo sinónimos, y se ha incluido un código que facilita el análisis de los datos. El uso de este marco permite en un primer momento organizar los datos y, en un segundo momento, identificar características en la dimensión comunicativa.

Tabla 3: Tipos de reacciones del profesor ante la intervención de un estudiante. Adaptación de Ruthven y Hofmann (2016).

Tipo de reacción	***Caracterización***	***Código***
Aprobar	Indicar explícitamente la aprobación de la intervención del estudiante.	Apr
Desaprobar	Indicar explícitamente la desaprobación de la intervención del estudiante.	Des
Repetir	Repetir (parte clave de) la intervención del estudiante en las mismas palabras.	Rep
Replantear	Replantear (parte clave de) la intervención del estudiante en diferentes palabras.	Rel
Traducir	Traducir (parte clave de) la intervención del estudiante a una forma o idea equivalente.	Tra
Redireccionar	Redireccionar el conocimiento mostrado en la intervención del estudiante.	Red
Averiguar	Averiguar (sondear, explorar, examinar) la intervención del estudiante.	Ave
Expandir	Expandir (ampliar) la intervención del estudiante o construir sobre ella.	Exp
Retomar	Retomar (volver a plantear, referirse a) la pregunta o intervención anterior.	Ret
Transferir	Transferir la consideración de la intervención del estudiante a otro estudiante o a la clase.	Trn

Capítulo 3. Método

Figura 3: Situación en la clase de matemáticas. Elaboración propia.

¿Qué consideraciones metodológicas deberían tenerse en cuenta para abordar situaciones en la clase de matemáticas como la presentada en la Figura 3? Responder a esta pregunta, requiere precisar la manera cómo es abordada la investigación, e indicar el proceso de recolección, selección y análisis de los datos, lo cual será descrito de manera detallada en este capítulo.

El estudio y participantes

Esta investigación corresponde a un estudio con un enfoque interpretativo de corte cualitativo (Bisquerra, 2009). El enfoque interpretativo es considerado, pues el propósito no es explicar, controlar o predecir, ni se pretende transformar la realidad, más bien se busca comprender y describir la argumentación en la clase de matemáticas, a través del análisis de las argumentaciones de los participantes de la investigación. Dada esa intención de descubrir, comprender e interpretar la realidad, se considera pertinente una investigación de corte cualitativo, esto significa "estudiar las cosas en su entorno natural, tratando de dar sentido o interpretar los fenómenos en términos de los significados que las personas les aportan" (Denzin y Lincoln, 2013, p. 7). Y además porque se trata de construir un trabajo que favorezca un conocimiento cualificado, pertinente y significativo de la compleja y dinámica realidad de la clase de matemáticas, no un conocimiento que excluya las dimensiones de dicha realidad.

Dado el objetivo de la investigación: *Comprender la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase,* se utiliza la observación como herramienta para la recolección de los datos (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Utilizar esta herramienta significa que se pretende explorar y describir ambientes y situaciones en la clase de matemáticas, así como producir interpretaciones en profundidad, de manera que se puedan analizar las acciones individuales y colectivas del profesor de matemáticas. La Figura 4 precisa los momentos llevados a cabo en el diseño de la investigación.

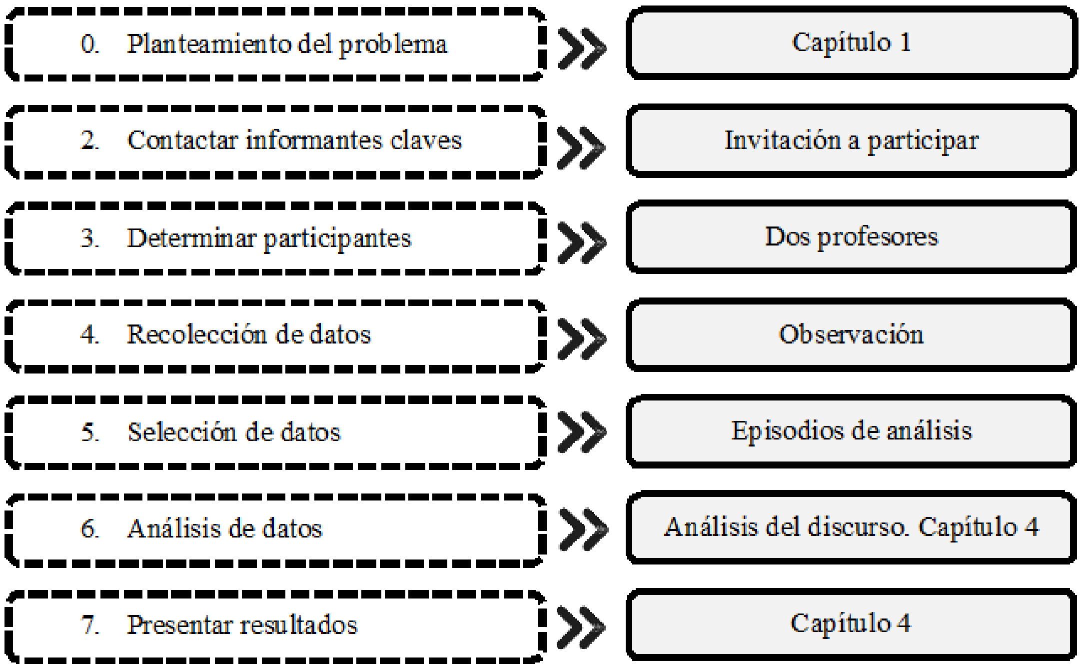


Figura 4: Momentos del diseño de la investigación.

Inicialmente se delimitó el planteamiento del problema, lo cual fue descrito en el capítulo uno. Para determinar los participantes se hizo una invitación a través de correo electrónico a miembros del grupo de investigación Matemática, Educación y Sociedad, que fueran profesores de secundaria. Algunos profesores manifestaron su intención y disponibilidad para participar en este estudio. Es prudente anotar que, en el momento de la recolección de datos, se tenía el contacto con tres profesores, los cuales conocían aspectos generales de la investigación, habían accedido a hacer parte de la investigación y habían seleccionado un grupo en el cual se llevaría a cabo la observación. Además, se habían concertado pautas con los directores de las instituciones educativas y se había realizado el proceso del consentimiento informado, con profesores, directivas y responsables legales de los estudiantes. Sin embargo, con uno de los profesores solo se pudo observar una sola lección de clase por dificultades de logística y diferentes actividades planteadas en la institución, por lo que fue necesario desestimar su participación.

Así pues, los participantes de la investigación son Emma y Daniel (seudónimos), ambos profesores cuentan con diez años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas, ostentan un título de Licenciado(a) en Matemáticas y cuentan con formación posgraduada en Educación Matemática. La clase de Emma corresponde a 32 estudiantes (grupo femenino) de décimo grado (edades entre 15 y 17 años), de una institución de carácter público de la ciudad de Medellín (Colombia) y fue observada durante seis lecciones. Por directrices de la institución educativa, la clase de matemáticas de Emma, en este grado, se compone de cuatro horas semanales (hora de 55 minutos), de las cuales dos horas corresponden a trigonometría, una hora a geometría y otra hora a estadística. La clase de Daniel corresponde a 18 estudiantes (grupo mixto) de noveno grado (edades entre 14 y 16 años), de una institución de carácter público del municipio de El Retiro (Colombia). La institución donde labora Daniel no hace la distinción de Emma, por lo que las 4 lecciones corresponden a la clase de matemáticas, también compuesta por 4 horas semanales (hora de 55 minutos).

En la preparación de sus lecciones, tanto Emma como Daniel, se rigen por el plan curricular diseñado por cada institución, el cual es coherente con las declaraciones de los Estándares Curriculares Colombianos. La ubicación de los profesores en el salón de clase suele ser al frente justo al lado del tablero y los estudiantes suelen estar en hileras, salvo cuando hay un trabajo en equipo; sin embargo, tanto Emma como Daniel, se movilizan por todo el salón cada cierto espacio de tiempo. El salón de Emma cuenta con computador y *video beam*, y aunque el espacio es pequeño, es confortable e iluminado. Por su parte, el salón de Daniel, solo cuenta con el tablero, pues la institución se encontraba en remodelación en el momento de la observación. Los estudiantes de las dos clases, son participativos y por lo general suelen estar atentos a las indicaciones del profesor.

La observación se hizo durante diez lecciones de clase, seis para Emma (dos de geometría, dos de estadística y dos de trigonometría) y cuatro para Daniel, durante los meses de septiembre y octubre de 2018. La observación, por parte del investigador, del individuo no participante, estuvo apoyada por grabaciones de audio y video de todas las lecciones y por notas de campo. La grabación fue realizada en compañía de un auxiliar de investigación, quien operó la cámara de vídeo, la cual siempre fue ubicada en la parte posterior del salón de clase y enfocó en todo momento el trabajo del profesor, bien cuando se dirigía a todos los estudiantes o bien cuando trabajaba con un grupo reducido. El grupo de Emma ya había participado en otra investigación, por lo que la cámara, el investigador y el auxiliar de investigación, no se convirtieron en un elemento distractor; pero para el grupo de Daniel era la primera vez que este tipo de situaciones se presentaba en el salón de clase, por lo que algunos estudiantes solían estar callados y con cierto temor a participar.

Recolección de datos

Para realizar la observación, hubo algunos aspectos relacionados con la recolección de datos a tener en cuenta. Dado que el propósito del estudio era la argumentación del profesor mientras discutía tareas en clase, en su ambiente habitual, es decir con un buen número de estudiantes y con unos propósitos instructivos que se esperaba cumplir, se hizo uso de la grabación en audio y video, como se indicó en líneas anteriores, la cual es adecuada para capturar una interacción, incluidos los datos no verbales (Cohen, Manion y Morrison, 2011). Posterior a la grabación de las lecciones se realizó las respectivas transcripciones, lo cual permitió organizar y tener control de los datos. Para ello se empleó un formato, el cual contó con la descripción general de la lección y con una tabla de tres columnas, en este se incluyó: turno, participante e intervención. Los estudiantes se nombran con una S mayúscula y si es solo un estudiante el que interviene se le agrega un número, el cual depende del orden de aparición de la intervención en cada lección. En la Figura 5 se muestra un ejemplo de un fragmento de dicho formato.

Fecha		Septiembre 17 de 2018
Profesor		Emma
Número de lección		1
Duración		55 min
Descripción		La profesora asigna la tarea E1., las estudiantes trabajan de manera individual en su cuaderno. La profesora pasa por cada uno de los puestos revisando la construcción de la figura y responde a preguntas de las estudiantes.
Turno	**Participante**	**Intervención**
49.	Emma:	[…] 60°. Entonces los tres tienen que medir 60°, si no miden 60° es porque se están equivocando en la construcción o en la medición. Hermosas hay algunas que se saltan el paso de abrir el compás del mismo tamaño del segmento que están dibujando, si usted lo abre de cualquier forma lo que le va a quedar es un triángulo isósceles no equilátero...Vamos a empezar a medir los ángulos... [La profesora pasa entre los puestos de las estudiantes para ayudarlas con la construcción del triángulo equilátero y el uso del transportador]. ¿Listo?...Listo, señoritas…
50.	S1:	¿Uno puede medir 59°?
51.	Emma:	Uno puede medir 59°. Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medir 60°, sin embargo recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de error ¿cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?
52.	S:	De dos…
53.	Emma:	¿De dos qué?
54.	S2:	Adelante y atrás.
55.	Emma:	¿Pero de dos qué?... ¿Centímetros? ¿Milímetros?
56.	S3:	¡Centésimas!
57.	Emma:	¿Centésimas?

Figura 5: Ejemplo de un fragmento del formato de transcripción de una lección.

Selección de datos

Luego de tener las transcripciones de todas las lecciones, se procedió a identificar las tareas que habían sido desarrolladas y alrededor de las cuales giró la discusión en cada lección. Es importante aclarar en este punto que fueron consideradas solo aquellas tareas en las cuales se distinguiera la argumentación del profesor, es decir que algunas tareas aunque fueron abordadas en las lecciones de clase por ambos profesores, no fueron consideradas en el análisis. Luego, se hizo una revisión detallada de cada lección identificando situaciones en las cuales el profesor podría haber efectuado una argumentación. Para delimitar los episodios que serían analizados, se retomó la definición de argumentación y las implicaciones de esta para los intereses de la investigación. Es decir, cuando se encontraba evidencia explicita de dudas de los estudiantes respecto a una aseveración, una indicación o una explicación del profesor, dudas en una respuesta o en un procedimiento diferente al presentado por el profesor, o cuando el profesor se percatara de diferentes respuestas a una tarea en el trabajo de los estudiantes. Es necesario aclarar que los episodios fueron seleccionados, además, por su poder de aclaración y explicación, pero no pretenden ser ejemplares ni reflejar la práctica ideal en la clase de matemáticas (Yackel y Cobb, 1996). Como fue anotado en el apartado fundamentación teórica (Capítulo 2), cada episodio inicia con una intervención argumentativa y termina con el cierre. En algunos casos, la intervención argumentativa es precedida de turnos que la contextualizan. No siempre hay una intervención argumentativa y un cierre, puede presentarse más de una intervención argumentativa o más de un cierre en algunos episodios.

La clase de Emma. En la clase de Emma se identificaron 7 tareas, a las cuales se les asignó un código precedido por la E mayúscula y un número; y 19 episodios de análisis, los cuales tienen el mismo código de la respectiva lección acompañado de un segundo número. En la Tabla 4 se presenta de manera detallada la relación de lecciones, tareas y episodios en la clase de Emma.

Tabla 4: Lecciones, tareas y episodios en la clase de Emma.

Fecha	***Lección***	***Tarea***	***Episodios analizados***

17.09.2018	Lección 1 Geometría	**E1.** Construir con regla y compás un triángulo equilátero, luego verificar con el transportador si en realidad es un triángulo equilátero.	E1.1
17.09.2018	Lección 2 Trigonometría	**E2.** Encontrar el valor de las razones trigonométricas en ángulos notables.	E2.1 E2.2 E2.3
25.09.2018	Lección 3 Trigonometría	**E2.** Encontrar el valor de las razones trigonométricas en ángulos notables.	E2.4 E2.5 E2.6
		E3. Con ayuda de la calculadora y con el círculo unitario calcula el seno, coseno, tangente de 70° y 80°	E3.1 E3.2 E3.3 E3.4
27.09.2018	Lección 4 Estadística	**E4.** Una clase consta de 5 niñas y 7 niños. Si se quiere escoger un comité en el que haya tres integrantes (relator, líder y organizador), hallar la probabilidad de: (a) Seleccionar tres niños, (b) Seleccionar por lo menos dos niños.	E4.1
		E5. Se sabe que el 50% de la población fuma y que el 10% fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a un fumador y que este sea hipertenso?	E5.1 E5.2
04.10.2018	Lección 5 Estadística	**E6.** Una caja contiene 3 monedas, una moneda es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada de modo de que la probabilidad de obtener cara es de 1/3. Se selecciona una moneda al azar y se lanza al aire, hacer la probabilidad de que salga cara.	E6.1 E6.2 E6.3 E6.4
04.10.2018	Lección 6 Geometría	**E7.** Graficar la parábola, cuya ecuación es $y = \frac{x^2}{8}$. Luego determinar el vértice, el foco y la directriz.	E7.1

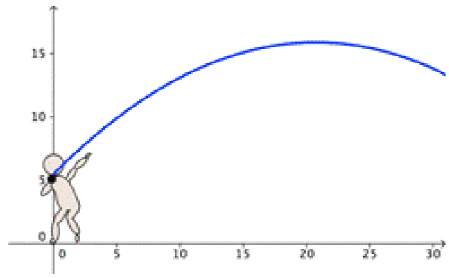
En la Lección 1, Emma verifica al inicio de la lección que sus estudiantes tengan los instrumentos geométricos (regla, compás y transportador). Luego asigna la Tarea E1, para que sea trabajada de manera individual en el cuaderno. Algunas estudiantes tienen dificultades con el manejo de los instrumentos, por lo que Emma pasa por cada puesto y brinda ayuda con el manejo de estos. Luego de que la profesora garantizó que todas las estudiantes tuvieran la construcción del triángulo equilátero, en la Lección 2 indica a las estudiantes que deben encontrar el punto medio de uno de los segmentos, para poder trazar la perpendicular y tener así el triángulo equilátero dónde uno de sus ángulos es de 30°. La medida del lado del triángulo inicial es $1u$, que en el triángulo rectángulo equivaldría a la hipotenusa, el de uno de los catetos es $\frac{1}{2}u$ y con la ayuda del teorema de Pitágoras encuentran el valor del otro cateto $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Con esto pueden encontrar el valor de las razones trigonométricas del ángulo respectivo, como se enuncia en la Tarea E2. En la Lección 3, Emma revisa algunos resultados que habían quedado pendientes de la Tarea E2, algunas estudiantes manifiestan tener dudas o respuestas diferentes, por lo que la profesora retoma algunos procedimientos de solución. Luego, de manera conjunta, solucionan la Tarea E3.

En la Lección 4, la profesora entrega los exámenes que había realizado en la lección anterior, la cual no fue observada, pues la profesora manifestó que sólo llevaría a cabo dicha actividad, en la cual las estudiantes trabajarían única y exclusivamente en la solución del examen de manera individual y sin participación de la profesora. El propósito de esta lección es corregir el examen, en el cual debían resolverse las Tareas E4 y E5; las estudiantes que obtuvieron la nota máxima (5) en el examen conforman equipos de trabajo con las estudiantes que no aprobaron el examen o que tuvieron algún error. Las estudiantes atienden a la indicación de Emma y ella acompaña un equipo de 4 estudiantes. En la Lección 5 y 6, Emma junto con sus estudiantes discuten el procedimiento de solución de la Tarea E6 y E7, respectivamente.

La clase de Daniel. En la clase de Daniel se identificaron 3 tareas, a las cuales se les asignó un código precedido por la D mayúscula y un número, y 3 episodios de análisis, los cuales tienen el mismo código de la respectiva lección acompañado de un segundo número. En la Tabla 5 se presenta de manera detallada la relación entre lecciones, tareas y episodios en la clase de Daniel.

Tabla 5: Lecciones, tareas y episodios en la clase de Daniel.

Fecha	***Lección***	***Tarea***	***Episodios analizados***
19.10.2018	Lección 1	N.A	N.A

22.10.2018	Lección 2	**D2.** Grafique la función $y = 0.5^{x+7} - 4$. Luego indique los tramos crecientes y decrecientes, así como los máximos y mínimos.	D2.1
26.10.2018	Lección 3	**D3.** Un lanzador de bala normalmente describe una parábola en el recorrido del objeto como se muestra en la siguiente gráfica.  La trayectoria exacta de este lanzamiento es descrito por la expresión $y = -0.024x^2 + x + 5.5$. Teniendo en cuenta que la distancia se toma en pies a. Calcula la altura máxima de la bala. b. Calcula la longitud que recorre la bala.	D3.1
31.10.2018	Lección 4	**D4**. La cantidad de bacterias en cierto cultivo aumenta de 600 a 1800 entre las 7 a.m. y las 9 a.m. suponiendo un crecimiento exponencial, la cantidad f (t) de bacterias t horas después de las 7 am está dada por $f(t) = 600(3)^{t/2}$. a. Calcula la cantidad de bacterias en el cultivo a las 8 a.m., 10 am y 11 a.m. b. Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$	D4.1

Durante las cuatro lecciones, Daniel abordó la solución de lo que nombró *"Guía de aprendizaje sobre funciones"*, en donde los estudiantes, en equipos de tres y cuatro personas, abordaron la solución de un conjunto de tareas, las cuales estuvieron precedidas por una discusión grupal. En lecciones anteriores, Daniel había presentado explicaciones, solución de problemas aplicados, definición de conceptos, construcciones en el plano cartesiano y manejo de la calculadora, respecto al tema funciones, el cual, según su planeación, correspondía a la época del año en la cual se hizo la observación. No en todas las tareas de la guía se identificó que el profesor efectúe alguna argumentación, solo se indican en la Tabla 5, aquellas que cumplen con tal intención.

En la Lección 1, no fue posible identificar situaciones en las cuales Daniel argumentara, ello debido a la manera como transcurrió la lección, esto es, Daniel dividió a los estudiantes en equipos de trabajo, entregó las copias y dio indicaciones generales. Durante los 45 minutos restantes, los estudiantes trabajaron en la solución de las tareas, Daniel estuvo en su escritorio y en algunos momentos respondió preguntas sobre dudas en la construcción de las gráficas de las funciones propuestas.

Durante las Lecciones 2, 3 y 4, Daniel dedicó espació para discutir algunas dificultades y errores en el procedimiento de solución de las diferentes tareas. Los estudiantes trabajaron en los mismos grupos y atentos a las indicaciones del profesor. Se pudieron identificar tres episodios de análisis: D2.1, D3.1 y D4.1, uno para cada lección. A diferencia de la clase de Emma, los estudiantes de la clase de Daniel suelen distraerse con mayor facilidad, les cuesta estar atentos y dispuestos a las indicaciones por un espacio considerable de tiempo, y la presencia del celular se convierte en un elemento distractor durante las cuatro lecciones.

Análisis de datos

El análisis es abordado a partir de un análisis del discurso (Keller, 2011), el cual no se asume como método sino como perspectiva de investigación respecto a un objeto particular de investigación, en lo que aquí compete *argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase*. Los análisis se centran en la investigación empírica del discurso matemático del profesor, de manera específica en la argumentación. El análisis del discurso es trabajado en dos acciones: fragmentar y conectar (Boukafri y Planas, 2018). Se fragmenta para obtener unidades más manejables y se conecta para discutir los datos y resultados que han sido tratados de manera separada. En línea con Boukafri y Planas (2018) las reiteraciones de fragmentar y conectar, llevan a considerar tres unidades de análisis: turno, episodio y lección. La unidad más pequeña corresponde a la intervención o turno del profesor, la cual está precedida de una intervención de otro participante; la segunda unidad compete a grupos de turnos, aquí llamados episodios; y la tercera unidad corresponde al conjunto de episodios, que forman la discusión en grupo de una lección de clase.

Antes de indicar las unidades de análisis, se identificaron los episodios de análisis en cada una de las lecciones, para ello se hizo un rastreo en cada uno de los turnos, tanto del profesor como de los estudiantes, de las intervenciones argumentativas y de los respectivos cierres a estas, dados por el profesor, lo cual indica el inicio y el fin de la argumentación. Las notas de campo fueron de gran ayuda, pues se habían reconocido posibles intervenciones argumentativas en la observación. Las intervenciones argumentativas se marcan con color azul y los cierres con color verde, como se observa en la Figura 6.

50.	S1:	¿Uno puede medir 59°?
51.	Emma:	Uno puede medir 59°. Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medir 60°, sin embargo recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de error ¿cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?
52.	S:	De dos...
53.	Emma:	¿De dos qué?
54.	S2:	Adelante y atrás.
55.	Emma:	¿Pero de dos qué?... ¿Centímetros? ¿Milímetros?
56.	S3:	¡Centésimas!
57.	Emma:	¿Centésimas?
58.	S:	[Risas]
59.	Emma:	¿Qué es lo que estamos midiendo?
60.	S:	Grados.
61.	Emma:	Lo que estamos midiendo...
62.	S2:	De dos grados.
63.	Emma:	Sería de dos grados, ¿por qué lo que estamos midiendo que son?
64.	S:	Grados.
65.	Emma:	¡No!
66.	S3:	¿Triángulos?...
67.	S:	¡Ángulos!
68.	Emma:	[Asienta con la cabeza] Entonces si estamos midiendo ángulos, recordemos que los ángulos se miden son en grados, no se miden en centímetros, ni milímetros... Porque los ángulos... Eh... nos están mostrando es la amplitud, estamos midiendo es la amplitud que hay entre un segmento y otro, cuando estamos midiendo una longitud esa sí la estamos midiendo en centímetros, milímetros, metros [...]

Figura 6: Ejemplo de la caracterización de intervenciones argumentativas y cierres en uno de los episodios.

En la unidad turno, aquí representada por cada intervención del profesor, se identifican las reacciones ante las intervenciones de los estudiantes, utilizando el marco de Ruthven y Hofmann (2016). Al final de cada reacción, la cual está en cursiva, se incluye un marcador de posición con letras minúsculas, así como el código de la reacción respectiva, como se observa en la Figura 7. Algunas reacciones no lograron ser asociadas con este marco, por ello solo aparecen precedidas de una letra minúscula. Las reacciones son tomadas tanto cuando el turno del profesor inicia el episodio o cuando lo inicia un estudiante. Los sinónimos incluidos en las diferentes reacciones son usados de acuerdo a lo que puede interpretarse de acuerdo al contexto del episodio, sin embargo se conserva el código respectivo de cada reacción.

50. S1: ¿Uno puede medir 59°?

51. Emma: *Uno puede medir 59°* $_{aRet}$. *Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medi 60°* $_{bExp}$, *sin embargo recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de erro* $_{cRed}$ *¿cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?* $_{dAve}$

52. S: De dos...

53. Emma: *¿De dos qué?* $_{Ave}$

54. S2: Adelante y atrás.

55. Emma: *¿Pero de dos qué?... ¿Centímetros? ¿Milímetros?* $_{Red}$

56. S3: ¡Centésimas!

57. Emma: *¿Centésimas?* $_{Des}$

58. S: [Risas]

59. Emma: *¿Qué es lo que estamos midiendo?* $_{Ave}$

60. S: Grados.

61. Emma: *Lo que estamos midiendo* $_{Ret}$...

62. S2: De dos grados.

63. Emma: *Sería de dos grados* $_{aApr}$, *¿por qué lo que estamos midiendo que son?* $_{bAve}$

64. S: Grados.

65. Emma: *¡No!* $_{Des}$

66. S3: ¿Triángulos?...

67. S: ¡Ángulos!

68. Emma: [*Asienta con la cabeza* $_{aApr}$] *Entonces si estamos midiendo ángulos, recordemos que lc ángulos se miden son en grados, no se miden en centímetros, ni milímetros... Porque lc ángulos... Eh... nos están mostrando es la amplitud, estamos midiendo es la amplitu que hay entre un segmento y otro, cuando estamos midiendo una longitud esa sí l estamos midiendo en centímetros, milímetros, metros* $_{bExp}$ [...]

Figura 7: Ejemplo de la caracterización de reacciones en uno de los episodios.

Estos turnos son analizados en las tres dimensiones que fueron presentadas en la fundamentación teórica: (1) la dimensión comunicativa: qué dice el profesor y para qué lo dice; (2) la dimensión interaccional: en dónde lo dice y a quién lo dice; y (3) la dimensión epistémica:

cómo lo dice y por qué lo dice. Para ello, se identifican una serie de acciones asociadas a cada dimensión. Las acciones de la dimensión comunicativa están conectadas con el marco de Ruthven y Hofmann (2016). No siempre se distinguen las mismas acciones, estas varían en cada uno de los episodios. Al final de cada posición se incluye un marcador en corchetes, este indica en cual o cuales turnos se identifica la acción. La Figura 8 muestra un ejemplo de este proceso.

Características de la dimensión comunicativa

- Plantear aseveración para retomar y expandir intervención de un estudiante. [51a-b]
- Plantear aseveración para redireccionar la intervención del estudiante. [51c]
- Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [61]
- Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [63a]
- Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [68b]
- Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante. [55]
- Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [51d]
- Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante. [53a, 63b]
- Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante. [65]
- Aprobar con un gesto la intervención de un estudiante. [68a]

Características de la dimensión interaccional

- Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por el mismo o por un estudiante. [51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 68]
- Atender a duda presentada por un estudiante. [51]
- Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por ella misma. [51c]
- Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por el mismo o un estudiante. [51b-c, 68]

Características de la dimensión epistémica

- Plantear propiedades del objeto matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [51b, 68b]
- Solicitar claridad en el uso de un determinado objeto matemático. [53, 55, 59, 61, 63b]
- Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [51c]
- Refutar la intervención de un estudiante. [57, 65]
- Presentar justificación sobre el uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta. [68b]

Figura 8: Ejemplo de la caracterización de acciones en cada dimensión en uno de los episodios.

Posteriormente, dichas acciones fueron agrupadas en características utilizando una serie de tablas, como se observa en la Figura 9. Estas características permiten dar cuenta del primer objetivo auxiliar de la investigación. Las características varían en cada uno de los episodios, no siempre fue posible destacar las mismas. Se conserva el artículo en masculino al plantear las acciones.

Características de la dimensión comunicativa

Característica	*Acciones*
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para retomar y expandir intervención de un estudiante. [51a-b] ▪ Plantear aseveración para redireccionar la intervención del estudiante. [51c] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [61] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [63a] ▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [68b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante. [55] ▪ Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [51d] ▪ Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante. [53a, 63b]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante. [65] ▪ Aprobar con un gesto la intervención de un estudiante. [68a]

Características de la dimensión interaccional

Característica	*Acciones*
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por el mismo o por un estudiante. [51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 68] ▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [51]
Normas de clase	▪ Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por ella misma. [51c]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por el mismo o un estudiante. [51b-c, 68]

Características de la dimensión epistémica

Característica	*Acciones*
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [51b, 68b] ▪ Solicitar claridad en el uso de un determinado objeto matemático. [53, 55, 59, 61, 63b]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [51c]
Justificar o refutar	▪ Refutar la intervención de un estudiante. [57, 65] ▪ Presentar justificación sobre el uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta. [68b]

Figura 9: Ejemplo de organización de las dimensiones en características en uno de los episodios.

Respecto a la unidad episodio, se retoman las intervenciones argumentativas y cierres, para identificar propósitos de la argumentación del profesor, y así poder dar cuenta del segundo objetivo auxiliar. Esto es presentado a manera de párrafo luego de las tablas de las características, en donde se señalan los respectivos propósitos de la argumentación de ambos profesores en los diferentes episodios de análisis.

En la unidad lección, se retoman las tareas, las intervenciones argumentativas, los cierres y las tablas de las características para identificar las condiciones que activaron la argumentación en los diferentes episodios dentro una lección específica, y así abordar el tercer objetivo auxiliar, lo cual es presentado a manera de párrafo al final de cada lección.

Finalmente, luego de tener el análisis de los datos de las lecciones de clase de Emma y de Daniel, se procedió a recopilar las diferentes acciones, características, dimensiones, propósitos y condiciones en las lecciones. Las dimensiones son consideradas desde la fundamentación teórica, las acciones, las características y los propósitos son emergentes, y las condiciones son una ampliación de referentes teóricos. De esta manera, se elaboraron una serie de tablas que permiten tener una visión general de los resultados de la investigación, resultados que atienden a los tres objetivos propuestos. Además de estas tablas, se propone una ampliación a la tipología de Ruthven y Hofmann (2016) y al marco de Solar y Deulofeu (2016), así como una construcción teórica respecto al término *argumentación en la case de matemáticas*, que aunque no estaban consideradas como objetivos de la investigación, surgen como resultado, como se verá en el siguiente capítulo.

Capítulo 4. Análisis y resultados

Figura 10: Situación en la clase de matemáticas. Elaboración propia.

Situaciones como la ambientada en la Figura 10 serán motivo de discusión en este capítulo, en el cual se presenta el análisis y los resultados de la investigación. La clase de Emma y la clase de Daniel corresponden a dos secciones independientes, seguida por una tercera en que se exponen los resultados. En cada clase se presentan las lecciones, las tareas y los episodios seleccionados para el análisis. Al final de cada episodio se muestra el análisis del primer objetivo auxiliar relacionado con las características de la argumentación del profesor y del segundo objetivo auxiliar relacionado con los propósitos de la argumentación del profesor. Al final de cada lección se muestra el análisis del tercer objetivo auxiliar, acerca de las condiciones que activan la argumentación del profesor.

La clase de Emma

Como se indicó de manera detallada en el tercer capítulo, la clase de Emma corresponde a un curso de décimo grado, en donde se observaron seis lecciones, en las cuales se identificaron siete tareas y se seleccionaron diecinueve episodios de análisis. A continuación, se presenta el análisis de cada uno de los objetivos, relacionado en las diferentes lecciones.

Lección 1.

En esta lección se analiza la Tarea E1 mostrada en la Figura 11 y el Episodio E1.1 señalado en la Transcripción 1.

Tarea E1. Construir con regla y compás un triángulo equilátero, luego verificar con el transportador si en realidad es un triángulo equilátero.

Figura 11: Tarea E1.

Transcripción 1: Episodio E1.1

50.	S1:	¿Uno puede medir 59°?
51.	Emma:	*Uno puede medir 59°* $_{aRet}$. *Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medir 60°* $_{bExp}$, *sin embargo recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de error* $_{cRed}$ *¿cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?* $_{dAve}$
52.	S:	De dos...
53.	Emma:	*¿De dos qué?* $_{a}$
54.	S2:	Adelante y atrás.
55.	Emma:	*¿Pero de dos qué?... ¿Centímetros? ¿Milímetros?* $_{Red}$
56.	S3:	¡Centésimas!
57.	Emma:	*¿Centésimas?* $_{Des}$
58.	S:	[Risas]
59.	Emma:	*¿Qué es lo que estamos midiendo?* $_{Ave}$
60.	S:	Grados.
61.	Emma:	*Lo que estamos midiendo* $_{Ret}$...
62.	S2:	De dos grados.
63.	Emma:	*Sería de dos grados* $_{aApr}$, *¿por qué lo que estamos midiendo que son?* $_{b}$
64.	S:	Grados.
65.	Emma:	*¡No!* $_{Des}$
66.	S3:	¿Triángulos?...
67.	S:	¡Ángulos!
68.	Emma:	[*Asienta con la cabeza* $_{aApr}$] *Entonces si estamos midiendo ángulos, recordemos que los ángulos se miden son en grados, no se miden en centímetros, ni milímetros... Porque los ángulos... Eh... nos están mostrando es la amplitud, estamos midiendo es la amplitud que hay entre un segmento y otro, cuando estamos midiendo una longitud esa sí la estamos midiendo en centímetros, milímetros, metros* $_{bExp}$ [...]

Este episodio que tiene lugar en una lección de geometría, muestra como la argumentación de la profesora intenta vincularse con preguntas de las estudiantes y con dificultades al nombrar objetos matemáticos. A continuación, en las Tablas 6, 7 y 8, se enuncian las características correspondientes a cada una de las dimensiones.

Tabla 6: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E1.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para retomar y expandir intervención de un estudiante. [51a-b] ▪ Plantear aseveración para redireccionar la intervención del estudiante. [51c] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [61] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [63a] ▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [68b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante. [55] ▪ Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [51d] ▪ Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante. [53a, 63b]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante. [65] ▪ Aprobar con un gesto la intervención de un estudiante. [68a]

Una pregunta de una estudiante en [50], considerada acá como la diferencia de opinión, desencadena una intervención de Emma en [51], la cual es precedida de aseveraciones y preguntas, en donde además de intentar dar respuesta a la estudiante, Emma pretende comunicar las matemáticas y que las estudiantes se expresen de una manera acorde, o al menos esperada, al grado en el cual se encuentran. En particular, en este episodio, dos aspectos llaman la atención, el primero en cómo los actos verbales son acompañados de expresiones y gestos [65, 68a], con los cuales Emma aprueba o desaprueba intervenciones de las estudiantes y, el segundo, en un tipo de reacción que no se encuentra en la tipología de Ruthven y Hofmann (2016) y debería ser incorporado, *solicitar*, pues las reacciones estipuladas no alcanzar a abordar este aspecto señalado en [53a y 63b].

Tabla 7: Características de la dimensión interaccional. Episodio E1.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 68] ▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [51]
Normas de clase	▪ Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por él mismo. [51c]

Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o un estudiante. [51b-c, 68]

Se identifican como características de orden interaccional en este episodio: participación, normas de clase y convencer, las cuales permiten afirmar que Emma considera importante vincular a sus estudiantes para dar respuesta a una pregunta, y busca plantear una justificación que logre convencer de la respuesta a la pregunta inicial y de la situación que esta desencadenó.

Tabla 8: Características de la dimensión epistémica. Episodio E1.1

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [51b, 68b] ▪ Solicitar claridad en el uso de un determinado objeto matemático. [53, 55, 59, 61, 63b]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [51c]
Justificar o refutar	▪ Refutar la intervención de un estudiante. [57, 65] ▪ Presentar justificación para el uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta. [68b]

El tratamiento del objeto matemático, al plantear propiedades y al solicitar claridad, retomar otras lecciones y justificar y refutar, conforman características de la dimensión epistémica en este episodio. Estas características permiten reconocer no solo elementos discursivos en la argumentación de Emma, sino también elementos que permiten dar cuenta de una intención de educar en matemáticas.

Desde la intervención argumentativa en [50] hasta el cierre en [68] se pueden señalar, al menos, tres propósitos de la argumentación de Emma: resolver preguntas de los estudiantes [51, 68], aclarar el procedimiento de solución de la tarea [51, 59, 63, 68] y puntualizar en las propiedades de los objetos matemáticos involucrados en el procedimiento de solución de la tarea [55, 57, 59, 61, 63, 68], en este caso ángulo y triángulo. Los tres propósitos señalados permiten identificar cómo Emma, además de presentar la solución de una determinada tarea en la que se abordan aspectos matemáticos propios de la lección y del curso, está interesada en que sus estudiantes participen del discurso de clase.

La pregunta de la estudiante S1 en [50] corresponde en este episodio a la condición que activó, inicialmente, la argumentación en Emma. La estudiante tiene dudas respecto a la figura que ha construido, observa que su triángulo no cumple de manera exacta con la indicación de la tarea, por lo cual recurre a una validación por parte de la profesora. Además de la pregunta de S1, Emma plantea una pregunta en [51d], para involucrar a las demás estudiantes en la respuesta. Pregunta que pareciera solo de seguimiento al discurso, es decir la profesora esperaba que las estudiantes respondieran: 'de dos ángulos'. Por lo cual, la manera como Emma aborda la tarea a partir de la intervención de las estudiantes en [52], se convierte en una segunda condición que activó su argumentación, es decir no fue la tarea misma la que exigió una argumentación por parte de Emma, sino la manera como Emma aborda el desarrollo y comprensión de la misma.

Lección 2.

En esta lección se analiza la Tarea E2 mostrada en la Figura 12 y los Episodios E2.1, E2.2 y E2.3 señalados en las Transcripciones 2, 3 y 4 respectivamente.

Tarea E2. Encontrar el valor de las razones trigonométricas en ángulos notables.

Figura 12: Tarea E2.

Transcripción 2: Episodio E2.1

234.	S1:	Profe ella no entendió [señala a su compañera].
235.	Emma:	*¿Qué cómo así 2 raíz de 3?* ***Trad***
236.	S2:	¡Si!

237.	Emma:	*Hermosas... listo... entonces, recordemos algo. La vez pasada, yo no sé si fue en este grupo, alguna dijo que 2 raíz de 3 es raíz de 6. Eso no se puede hacer, nosotros acá tenemos un número entero y tenemos un número irracional, entonces si yo quisiera multiplicar como tal 2 por raíz de 3 y poner un número, solo tendría que* ***aRedExp****... ¿Cuánto era raíz de 3?... ¿me dijeron que era 1 punto, qué?* ***bAve****... 80 y algo...81, o sea que sería 2 por 1,81... supongamos... y poner esa respuesta. Sino, esta es la respuesta que es válida: 2 por raíz de 3* ***cExp****. Si yo tengo por ejemplo 9 por raíz de 10 ¿eso cuánto me da?* ***dRed***
238.	S3:	9 raíz de 10.
239.	Emma:	*9 raíz de 10* ***aApr****. Entonces, siempre que tengamos una raíz que no es exacta y la estemos multiplicando por un número entero, la podemos dejar así. Por eso acá nos queda 2 raíz de 3, listo* ***bRetExp****.*

Luego que Emma presenta la explicación del procedimiento para calcular el valor de $tan30°$, tiene lugar este episodio, en el cual una estudiante actúa como vocera de su compañera, quien tiene dudas respecto a la expresión $2\sqrt{3}$, dudas que advierten una diferencia de opinión y por lo tanto una situación en donde puede analizarse la argumentación de la profesora. En las Tablas 9, 10 y 11, se indican las respectivas características asociadas a las diferentes dimensiones de la argumentación de Emma en este episodio.

Tabla 9: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E2.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para redireccionar y expandir la intervención de un estudiante. [237a] ▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [237c] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [239a] ▪ Plantear aseveración para referirse a la intervención inicial del estudiante y construir sobre ella. [239b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para traducir la intervención de un estudiante. [235] ▪ Plantear pregunta para averiguar procedimiento que fue abordado en lecciones anteriores. [237b] ▪ Plantear pregunta para redireccionar en otros términos la situación que originó la intervención inicial del estudiante. [237d]

Las características de la dimensión comunicativa en este episodio, en particular, están representadas por aseveraciones, con las cuales Emma redirecciona [237a], expande [237a, 237c] o aprueba [239a] intervenciones, y por preguntas, bien para traducir [235], averiguar [237b] o redireccionar [237d] la intervención de las estudiantes. Lo cual permitiría afirmar que la dimensión comunicativa de la argumentación del profesor está relacionada, entre otros aspectos, con una intención, es decir un para qué y se refiere a alguien o algo, en este caso referida a los estudiantes atendiendo a ciertos hechos de la clase de matemáticas.

Tabla 10: Características de la dimensión interaccional. Episodio E2.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [235] ▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [237]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o un estudiante. [237,239]

Acciones asociadas a la participación y convencer son reconocidas en este episodio. Emma hace una pausa en su explicación para atender a la duda que presenta una estudiante, su argumentación se ve reflejada en cómo en las intervenciones [237, 239] logra convencer no solo a la estudiante que manifestó la duda sino a todo el grupo, del porqué de la notación de la expresión en discusión.

Tabla 11: Características de la dimensión epistémica. Episodio E2.1

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [237a, 239b]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [237a]
Tratamiento de errores	▪ Indicar error en el procedimiento de solución de la tarea. [237a]
Procedimientos y respuestas	▪ Plantear procedimiento de solución de la tarea. [237, 239]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación para el procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [237, 239]

En cuanto a las características de la dimensión epistémica, se refiere en este episodio: tratamiento del objeto matemático *número irracional*, retomar otras lecciones a manera de apoyo a la justificación, tratamiento de errores en el procedimiento de solución de la tarea, plantear el procedimiento de solución de la tarea y plantear la justificación para un determinado proceso utilizado en la solución de la tarea.

Respecto a los propósitos de la argumentación, se destacan: resolver preguntas de los estudiantes [235, 237, 239], tratar con errores en el procedimiento de solución de la tarea [237] y orientar procedimientos de solución en tareas similares [239]. Propósitos en los cuales Emma parece advertir posibles dificultades en el desarrollo de esta lección, por lo que expresa de manera enfática el manejo de expresiones con raíces.

Transcripción 3: Episodio E2.2

253.	Emma:	[...] *¿En qué momento es que nosotras racionalizamos? ¿Por qué tenemos que racionalizar?* $_{Ave}$
254.	S:	Porque hay una raíz abajo.
255.	Emma:	*Porque no puede quedar la raíz abajo* $_{aAprTra}$*, y ¿cómo se llaman eso abajo?* $_{b}$
256.	S:	Denominador.
257.	Emma:	*Denominador* $_{aRepApr}$*. Bueno, entonces sería tangente de 30°... acá sería igual a 1 por raíz de 3*$_{bExp}$*, ¿cuánto me da eso?* $_{cRet}$
258.	S:	Raíz de 3.
259.	Emma:	*Raíz de 3 sobre raíz de 3 por raíz de 3* $_{AprRel}$.
260.	S4:	3 raíz de 3.
261.	S3:	Raíz de 6 ¿no?
262.	Emma:	*Bueno miremos ¿qué decíamos la clase pasada?* $_{aRet}$ *Devuélvanse en el cuaderno* $_{bRet}$.
263.	S5:	Raíz de 3 a la 2.
264.	Emma:	*Raíz de 3 a la 2, raíz de 3 por raíz de 3 me da raíz de 3 al cuadrado* $_{aAprExp}$ *¿y qué pasa acá?* $_{bAve}$
265.	S:	Se cancelan.
266.	Emma:	*¿Qué se cancela?* $_{aRel}$
267.	S6:	El exponente en la raíz
268.	Emma:	*¿El exponente en la raíz?* $_{aRepDes}$*... El exponente con la raíz* $_{bTra}$*. Me queda tangente de 30° es igual a raíz de 3 sobre 3* $_{cRetExp}$.

En este episodio hay dos situaciones que ameritan atención dentro de la argumentación de la profesora. La primera de ellas, la anticipación a una diferencia de opinión a través de las preguntas de Emma en [253], considerada además como la primera intervención argumentativa. Las respuestas de las estudiantes en las intervenciones [254, 256] permiten a Emma identificar cierto nivel de apropiación en dicho procedimiento, su intervención en [225, 257] consiste en apoyar la justificación de las estudiantes y por ende presentar un cierre parcial. Y la segunda situación, a partir de las intervenciones [260, 261] de S4 y S5 respectivamente, dan cuenta de una diferencia de opinión y por lo tanto corresponden a la segunda intervención argumentativa, pues además de presentar diferentes respuestas, advierten errores, ante lo cual Emma no declara de manera explícita el error, sino que dirige la justificación para que las estudiantes se percaten del mismo y se convenzan de la respuesta esperada, presentando el cierre en [268]. A continuación, en las Tablas 12, 13 y 14, se enuncian las características de la argumentación correspondientes a cada una de las dimensiones en este episodio.

Tabla 12: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E2.2

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para aprobar y traducir la intervención de un estudiante. [255a] ▪ Plantear aseveración para repetir y aprobar la intervención de un estudiante. [257a] ▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [257b] ▪ Plantear aseveración para aprobar y replantear la intervención de un estudiante. [259] ▪ Plantear aseveración para referirse a procedimiento realizado antes. [262b] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [264a] ▪ Plantear aseveración para retomar y expandir la intervención de un estudiante. [268c]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para sondear la apropiación de un determinado concepto asociado a la solución de la tarea. [253] ▪ Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante. [255b]

	▪ Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido antes en la misma lección. [257c] ▪ Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido en la lección anterior. [262a, 264b] ▪ Plantear pregunta para replantear la intervención de un estudiante. [266a] ▪ Plantear pregunta para repetir y desaprobar la intervención de un estudiante. [268a] ▪ Plantear pregunta para traducir la intervención de un estudiante. [268b]

Una pregunta de Emma, con la que busca sondear la apropiación de lo que significa e implica racionalizar una expresión, marca el inicio del episodio. Dicha pregunta es precedida de intervenciones de las estudiantes, ante las cuales Emma plantea aseveraciones con las cuales aprueba, traduce, replantea o retoma. Pese a que en los turnos [237 y 239] del episodio E2.1, parecía haber quedado claro la notación de expresiones irracionales, tiene lugar en el turno [257] el paso $\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, ante lo cual las estudiantes expresan en [258] $\sqrt{3}$ como respuesta, Emma interviene en [259] para replantearla así: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$, ante lo cual S4 plantea $3\sqrt{3}$ como respuesta, y S3 $\sqrt{6}$ como respuesta. En las siguientes intervenciones Emma se vale de preguntas y aseveraciones, con las cuales, precisamente, retoma procedimientos que ya han sido discutidos, que le permitan plantear la respuesta de la tarea. Además de lo anterior, en la intervención [255b] se distingue otro tipo de reacción: *solicitar*, lo cual, dado el propósito de esta investigación, hace que sea necesario continuar la ampliación de la tabla propuesta de Ruthven y Hofmann (2016).

Tabla 13: Características de la dimensión interaccional. Episodio E2.2

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [253, 255, 257, 259, 262, 264, 266] ▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [257, 259, 264] ▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [262]
Medios y normas de clase	▪ Señalar una indicación para que sea seguida por todos los estudiantes. [262b]

Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [255a, 257a, 264a, 268a-b]
Discutir	▪ Percatarse de las dudas en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [262]

Sobresalen en la dimensión interaccional de este episodio la participación, medios y normas de clase, convencer y discutir, como características. Parece ser interesante la intervención [262], en la que Emma remite a lecciones anteriores invitando a las estudiantes a revisar su cuaderno, pues además de involucrarlas en la respuesta a una pregunta, atiende a una duda de las estudiantes en el manejo con raíces, valiéndose de una indicación para que sea seguida por todas, pues ella sabe que es una cuestión que ha sido discutida, de hecho en la misma lección.

Tabla 14: Características de la dimensión epistémica. Episodio E2.2

Característica	*Acciones*
Tratamiento del objeto matemático	▪ Solicitar claridad en el uso de un determinado objeto matemático. [253a] ▪ Solicitar claridad respecto al abordaje de un determinado objeto matemático. [255b]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [262] ▪ Comprobar la utilización de un procedimiento de solución que fue abordado en lecciones anteriores. [253, 259, 266]
Tratamiento de errores	▪ Percatarse de un error en la respuesta de la tarea de un estudiante. [262]
Procedimientos y respuestas	▪ Verificar procedimiento de solución de la tarea. [253, 255, 257, 264, 266, 268a-b] ▪ Retomar procedimientos realizados antes para dar continuidad a la solución de la tarea. [262, 264b] ▪ Presentar y validar respuesta de la tarea. [268c]

Son características en esta dimensión: tratamiento del objeto matemático al solicitar claridad, retomar otras lecciones para comprobar la utilización de un determinado procedimiento, tratamiento de errores y, procedimientos y respuestas para verificar y validar una determinada respuesta. Las acciones de Emma descritas en esta dimensión, permiten sugerir cómo su experiencia en este grado de escolaridad, le permite justificar a las estudiantes la utilización de un determinado procedimiento, insistir en cuándo y por qué debe hacerse y adelantarse a prever posibles dificultades con el tratamiento del mismo.

Antes de describir los propósitos de la argumentación de la profesora en este episodio, se resalta lo particular del mismo, en él se identifica una intervención argumentativa [257b] durante un proceso de explicación, lo cual alude a que dentro del discurso matemático del profesor además de explicaciones también hay argumentación, y reafirma el considerar a la explicación como un proceso diferente a la argumentación. Emma busca justificar el procedimiento de solución de la tarea, para lograrlo plantea una pregunta [253], considerada aquí como una intervención argumentativa auxiliar, la cual es precedida de intervenciones de las estudiantes, en las cuales se indican respuestas a la pregunta [255 y 257a] y por lo tanto un primer cierre. Sin embargo, el episodio no termina ahí, es solo hasta la intervención [268] que puede reconocerse el cierre del episodio, cuando Emma enuncia la respuesta a la tarea. De esta manera, se subrayan como propósitos en este episodio: puntualizar en las propiedades del objeto matemático, la raíz, involucrado en el procedimiento de solución de la tarea [253, 255, 257, 264, 266], aclarar procedimiento de solución de la tarea [255, 257, 262, 264, 266, 268], y tratar con puntos de vista diferentes y que no coinciden con la respuesta esperada de la tarea [262]. En este último propósito, se resalta la manera en que Emma aborda esas respuestas que no coinciden con la respuesta esperada, máxime cuando algunas intervenciones habían sido tema de discusión en intervenciones anteriores, analizadas en el Episodio E2.1. Emma intenta aprovechar esos errores y dificultades en las estudiantes para vincularlas con la justificación o refutación de aseveraciones presentadas por ellas mismas.

Transcripción 4: Episodio E2.3

276.	Emma:	*Hermosas van a prestar atención un momentico, que hay algunas que se están confundiendo en lo siguiente, pilas con esto* ***a*** *¿tener 1 sobre 2 es lo mismo que tener 2 sobre 1?* ***b***
277.	S:	No.
278.	Emma:	*No, porque esto es tener 1 unidad y dividirlo en 2 partes mientras que esto es tener 2 unidades y hacer una sola división, esto me da 0,5 y esto me da 2* ***aAprExp****. Entonces, porqué les estoy volviendo a decir esto, porque ustedes están confundiendo 1 sobre raíz de 3, con raíz de 3. Si, esa raíz de 3 abajo pues parece que no tuviera nada… es ¿por qué yo le puedo poner?... ¿qué?... Yo le puedo poner un 1 abajo. Pero estas dos cosas son diferentes, si la raíz está en el numerador usted por qué están inventando que está en el denominador…lo que están es inventando. Entonces, pilas que eso son dos cosas diferentes, si me da la primera ahí yo sí tengo que racionalizar, pero si es la segunda no, porque ahí la raíz está en el numerador* ***bRed*** [Se desplaza por el salón observando cómo las estudiantes resuelven la tarea en su cuaderno]. *Hermosas pilas con esta parte, voy a hacer la secante por una razón… ¿la secante de cualquier ángulo es qué?... hipotenusa sobre cateto adyacente. Eso quiere decir, que la secante de 30 va ser igual a 1 sobre raíz de 3 sobre 2. Resulta que ahí hace falta poner un 1 ¿a quién se lo voy a poner?* ***cRetExp***
279.	S:	Al de arriba.
280.	Emma:	*Yo se lo tengo que poner es al de arriba porque es que el de abajo ya está el fraccionario completo, listo* ***aAprExp****. Aquí es donde está la división del fraccionario pero este ya es un fraccionario [refiriéndose a raíz de 3 sobre 2] entonces no lo puedo separar, si yo a este le pongo un 1 acá es como si yo estuviera dividiendo 1 sobre raíz de 3 dividido 2 y esa no es la operación que estamos haciendo, entonces pilas con eso porque ahí alguien se están equivocando* ***bExpRed****.*

La profesora ha terminado de discutir y de presentar la solución de $tan\,30°$, ahora las estudiantes, en equipos, realizan el procedimiento para calcular el valor de $sec\,30°$, Emma se desplaza por el salón observando el trabajo de las estudiantes, momento en el cual tiene lugar este episodio. La diferencia de opinión que permite reconocer en este episodio la argumentación de la profesora, es declarada por Emma en las intervenciones [276] y [278c], en donde parece percatarse de dudas y errores de las estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. A continuación, en las Tablas 15, 16 y 17, se enuncian las características correspondientes a cada una de las dimensiones en este episodio.

Tabla 15: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E2.3

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para señalar error en el procedimiento de solución de la tarea. [276a] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [278a] ▪ Plantear aseveración para redireccionar y expandir la situación que originó la intervención inicial del profesor. [278b] ▪ Plantear aseveración para retomar intervención anterior y construir sobre ella. [278c] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [280a] ▪ Plantear aseveración para expandir y redireccionar la situación que originó la intervención del profesor. [280b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para percatar a los estudiantes de un posible error en la respuesta de la tarea. [276b]

Se distinguen en este episodio acciones que aducen a aseveraciones y preguntas como se muestra en la Tabla 15. La profesora ha observado el procedimiento para calcular $sec\ 30°$, en el cual las estudiantes deben realizar la división entre 1 y $\frac{\sqrt{3}}{2}$, pero el tratamiento a estas expresiones no parece animar a la profesora, por lo tanto llama la atención de las estudiantes con una pregunta en [276b], con la cual busca *percatar* de un posible error, reacción que también requiere un tratamiento diferencial en la tipología seguida. Luego de las intervenciones de las estudiantes en [277 y 279], Emma plantea aseveraciones, bien para señalar un error, para aprobar, ampliar, expandir o redireccionar la intervención, o bien para redireccionar y expandir la situación que originó la intervención inicial.

Tabla 16: Características de la dimensión interaccional. Episodio E2.3

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Invitar a las estudiantes a participar en la discusión de posibles respuestas a la tarea. [276a]
Convencer	▪ Persuadir a las estudiantes de errores en el proceso de solución de la tarea. [278b] ▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea. [280]

Discutir	▪ Percatarse de errores en algunas estudiantes y discutirlos con las demás estudiantes. [276a, 278c]

Además de acciones asociadas a la participación y discutir, que han sido recurrentes, se destaca en este episodio no solo convencer, que suele estar al final, sino también persuadir como se muestra en la Tabla 16. En este caso, en [278b], Emma trata de persuadir a las estudiantes de un error, parece que para algunas de ellas las expresiones $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\sqrt{3}$ tienen la misma significación, a lo cual Emma manifiesta dicha confusión. Pese a esta declaración, no todas las estudiantes parecen haber estado atentas o comprendido la situación, pues Emma en [76c] retoma de nuevo la misma dificultad.

Tabla 17: Características de la dimensión epistémica. Episodio E2.3

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Solicitar claridad respecto al abordaje de un determinado objeto matemático. [278c] ▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [280b]
Utilización de conceptos y definiciones	▪ Retomar definición de conceptos involucrados en la solución de la tarea. [278c]
Tratamiento de errores	▪ Percatarse de un error en la respuesta de la tarea de un estudiante. [74a, 76c] ▪ Asegurarse de que el error en el proceso de solución de la tarea haya sido superado. [280b]
Procedimientos y respuestas	▪ Solicitar claridad respecto al uso de un determinado procedimiento en la solución de la tarea. [276b] ▪ Plantear procedimiento de solución de la tarea. [280b]
Justificar o refutar	▪ Contrastar dos posibles soluciones a la tarea y justificar por qué una no puede ser posible. [278a-b]

La dimensión epistémica en este episodio está representada en cinco características como se precisa en la Tabla 17: tratamiento del objeto matemático al solicitar claridad o al plantear propiedades específicas, utilización de conceptos y definiciones, tratamiento de errores, procedimientos y respuestas, y justificar o refutar al contrastar posibles soluciones. Hay una acción que merece atención especial en este episodio, cómo la profesora contrasta posibles soluciones a la tarea y a partir de su justificación les muestra a las estudiantes por qué una no puede ser posible, acción que parece ser un pretexto para indicar o prever un error de las estudiantes al solucionar la tarea.

En lo que refiere a los propósitos de la argumentación, cabe resaltar lo particular de este episodio en el cual se identifican dos intervenciones argumentativas [276b y 278c] y dos cierres [278a y 280], que aluden a la misma situación, y que visto de manera general podría hablarse de una intervención argumentativa. La profesora luego de pasar por los diferentes equipos de trabajo, se percata de una confusión al realizar la división entre 1 y $\frac{\sqrt{3}}{2}$, y un cierre, Emma señala el error indicando la manera de proceder y ratifica la diferencia entre las expresiones $\frac{1}{1} \div \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{2}{1}$. De esta manera se pueden referir los siguientes propósitos: puntualizar en las propiedades del objeto matemático fracción asociado al procedimiento de solución de la tarea [276b, 278a, 280], prever posibles errores en el procedimiento de solución de la tarea [276, 278b-c], discutir las diferentes respuestas de los estudiantes cuando resuelven la tarea [276a, 278b, 280b] y los errores recurrentes en el procedimiento de solución de la tarea [278, 280].

En esta lección, en la cual se nombraron tres episodios que resaltan la argumentación de Emma, se pueden enunciar tres condiciones que activaron la argumentación en ella: (1) las estrategias comunicativas e interactivas, llama la atención las preguntas asociadas al procedimiento de solución de la tarea, en las cuales Emma busca retomar procedimientos, tanto que fueron tratados en la misma lección o en lecciones anteriores [257c, 262a, 264b], lo cual parece estar relacionado con el enunciado de la tarea *"Encontrar el valor de las razones trigonométricas"*. Parece ser que las estudiantes aún tienen dificultades en el manejo de procedimientos: racionalización, manejo de raíces y operaciones con fraccionarios, necesarios para dar respuesta a la tarea. (2) El abordaje de la lección, las intervenciones argumentativas en esta lección son referentes a comprensión, es decir Emma se encuentra con intervenciones de las estudiantes, en las cuales manifiestan no entender el porqué de una determinada respuesta [234], o a partir de lo que ella observa en el trabajo de sus estudiantes, inicia la argumentación preguntando el porqué de un procedimiento [253], o por qué una respuesta no es válida [276b, 278b, 278c]. Y (3) el conocimiento profesional, Emma busca vincular todo el tiempo el trabajo realizado en lecciones anteriores [237a, 262a], pues parece ser consciente que, para dar respuesta a este tipo de tarea, las estudiantes deberían estar en la capacidad de manejar diferentes conceptos y procedimientos. Es reiterativo, además, la acción de invitar a sus estudiantes a nombrar de una manera adecuada los objetos matemáticos [255, 266, 276b, 278b]. Podría afirmarse que la experiencia con tareas de este tipo y con estudiantes en este grado de escolaridad, se ve reflejado en cómo Emma se anticipa a prever y abordar posibles errores [276, 278].

Lección 3.

En esta lección se analiza la Tarea E2 mostrada en la Figura 13 y los Episodios E2.4, E2.5 y E2.6 señalados en las Transcripciones 5, 6 y 7 respectivamente, así como la Tarea E3 mostrada en la Figura 14 y los Episodios E3.1, E3.2, E3.3 y E3.4 señalados en su orden en las Transcripciones 8, 9, 10 y 11.

Tarea E2. Encontrar el valor de las razones trigonométricas en ángulos notables.

Figura 13: Tarea E2.

Transcripción 5: Episodio E2.4

1.	Emma:	[....] *Tenemos entonces la cotangente de 30°, raíz de 3. La secante de 30°, es 2 raíz de 3 sobre 3 y la cosecante de 30°* [a]... ¿cuánto es? [b]
2.	S:	2 […]

6.	S1:	¿Profe si me dio ½ está malo?
7.	Emma:	*Aquí te dio un medio [señala la respuesta que está proyectada]* $_{aAve}$, *¿a quién más le dio ½?* $_{bAve}$
8.	S:	[Algunas levantan la mano]
9.	Emma:	*Listo, entonces vamos a verificar que fue lo que sucedió* $_{aAve}$. *Recordemos que estas razones trigonométricas están saliendo del triángulo que construimos* $_{bExp}$ *¿qué triángulo hicimos?* $_{cAve}$.
10.	S:	Equilátero.
11.	Emma:	*El triángulo equilátero es el que tiene todos los lados iguales* $_{aAprExp}$. *Entonces, teníamos un triángulo equilátero y de ese triángulo cogimos un triángulo, la mitad del triángulo, ese triángulo tiene un ángulo de 90°, de 60° y un ángulo de 30° [esto lo dice mientras hace la construcción en el tablero]* $_{bExp}$ *¿cuánto medía la hipotenusa de ese triángulo?* $_{cAve}$
12.	S:	1 unidad.
13.	Emma:	*1 unidad* $_{aApr}$, *¿cuánto medía este lado del triángulo? [Señala uno de los catetos]* $_{bAve}$
14.	S:	Media unidad.
15.	Emma:	*Media unidad* $_{aApr}$. *¿Y el otro cateto?* $_{bAve}$
16.	S:	Raíz de 3 sobre 2.
17.	Emma:	*[Asienta]* $_{aApr}$ *Entonces vamos a devolvernos a la cosecante* $_{bRet}$: *¿Qué es la cosecante de cualquier ángulo?* $_{cAve}$
18.	S2:	Hipotenusa sobre cateto opuesto.
19.	Emma:	*Hipotenusa, dividido el cateto opuesto* $_{aAprTra}$. *Entonces, yo voy a hacer la cosecante de 30°…Esto va a ser igual a* $_{bRet}$*… ¿Cuánto mide la hipotenusa?* $_{cAve}$
20.	S3:	1 unidad.
21.	Emma:	*Vale 1 unidad* $_{aApr}$. *Este es el ángulo de 30°* $_{bExp}$. *¿Cuál es el cateto opuesto?... ¿El qué mide raíz de 3 sobre 2 o ½?* $_{cAve}$.
22.	S:	½
23.	Emma:	*½, o sea que sería dividido ½* $_{aAprTra}$ *¿En qué se equivocaron las que les dio ½? Bueno pueden presentarse diferentes dificultades, acá tenemos una división entre números fraccionarios* $_{bRet}$. *¿Cómo se dividen los números fraccionarios? ¿Qué tendríamos que hacer?* $_{cAve}$
24.	S1:	Ley de internos y externos.
25.	Emma:	*Aplicar la ley de internos por externos, cierto* $_{aAprTra}$. *Sin embargo, nos hace falta poner un número* $_{bExp}$. *¿Dónde ponemos ese 1 que nos hace falta?* $_{cAve}$
26.	S:	[Unas dicen abajo, otras dicen arriba]
27	Emma:	*Entonces, recordemos que eso también lo mencionamos la clase pasada. El fraccionario que ya nos están dando es el de abajo, o sea que el que nos falta completar es el de arriba* $_{aRel}$. *O sea que este quedaría sobre 1. Acá tendríamos internos por externos [lo señala en el tablero], o sea que la cosecante de 30° va a ser igual* $_{bExp}$*… Cuando yo multiplicó los externos ¿dónde queda el producto de esa multiplicación?, ¿dónde queda el resultado?, ¿en él numerador o en el denominador?* $_{cAve}$
28.	S:	[Unas dicen arriba y otras numerador]
29.	Emma:	*En el numerador* $_{aAprDes}$. *Entonces 2 x 1... 2, dividido 1 x 1... 1* $_{bExp}$, *¿y cualquier cosa dividido 1?* $_{cAve}$
30.	S:	Cualquier cosa.
31.	Emma:	*La misma cualquier cosa* $_{aAprTra}$. *Entonces, me quedaría la cosecante de 30°, va a ser igual a 2*$_{bExp}$. *De pronto, el error estuvo fue donde se puso el 1 o como se hizo la multiplicación de internos por externos, listo* $_{cRet}$.

Este episodio, en el cual Emma da continuidad a la tarea de la Lección 2, se muestra la discusión entre Emma y sus estudiantes, a partir de la intervención de una estudiante, que tiene una respuesta diferente. La argumentación se puede reconocer en este episodio, porque hay una diferencia de opinión, en este caso enunciada por una estudiante que indica tener una respuesta diferente a la presentada por la profesora. Dicha respuesta diferente advierte un posible error, pero ¿cómo indicar el error?, ¿cómo justificarle a la estudiante que su respuesta no es correcta?, es precisamente ahí donde interviene la profesora quien resuelve la inquietud de la estudiante, para lo cual recurre a la justificación valiéndose del procedimiento de solución de la tarea, en donde no solo ella es quien habla, sino que trata de involucrar a las demás estudiantes. Es este procedimiento el que permite hacer caer en cuenta a la estudiante del error y por lo tanto convencerse de que la respuesta a la Tarea no es ½ sino 2. A continuación, se enuncian las características correspondientes a cada una de las dimensiones en las Tablas 18, 19 y 20.

Tabla 18: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E2.4

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para averiguar la respuesta de la tarea. [1a] ▪ Plantear aseveración para examinar la intervención de un estudiante. [7a] ▪ Plantear aseveración para explorar la intervención de estudiante. [9a] ▪ Plantear aseveración para ampliar intervención de un estudiante. [9b, 25b] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [11a] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante con la ayuda de apoyos visuales. [11b, 21b, 27b, 29b] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [13a, 15a, 21a, 29a] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención de un estudiante. [17b, 19b] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la pregunta inicial. [31c] ▪ Plantear aseveración para aprobar y traducir la intervención de un estudiante. [19a, 23a, 25a, 31a] ▪ Plantear aseveración para replantear la intervención de un estudiante. [27a] ▪ Plantear aseveración para desaprobar la intervención de un estudiante. [29a] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante y presentar la respuesta de la tarea. [31b]

Preguntas	▪ Plantear pregunta para verificar respuesta de un estudiante. [1b] ▪ Plantear pregunta para sondear otras (posibles) respuestas de la tarea. [7b] ▪ Plantear pregunta para averiguar procedimiento que fue abordado en lecciones anteriores. [9c, 11c, 13b, 15b, 19c, 23c, 25c, 27c, 29c] ▪ Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [17c, 21c] ▪ Plantear pregunta para retomar intervención anterior y presentar posibles respuestas. [23b]
Gestos o expresiones	▪ Aprobar con un gesto la intervención de un estudiante. [17a]

Las aseveraciones realizadas por la profesora con la intención de averiguar, examinar, explorar, ampliar, aprobar, desaprobar, retomar o replantear, se corresponden con diversas acciones que conllevan intenciones tanto vinculadas con el contenido matemático como vinculadas con la participación de las estudiantes. La pregunta planteada en [1b], revela un nuevo tipo de reacción, *verificar* y es reiterativo la presencia de gestos, en este caso para aprobar la intervención de una estudiante.

Tabla 19: Características de la dimensión interaccional. Episodio E2.4

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de la tarea. [1] ▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29]
Medios y normas	▪ Utilizar los medios disponibles en clase (tablero, computador) para apoyar justificación. [11, 13, 27]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por un estudiante. [9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31]
Discutir	▪ Percatarse de errores de algunos estudiantes y discutirlos con los demás estudiantes. [7a-b]

En el núcleo de la práctica de la profesora está el aprendizaje por parte de las estudiantes, lo cual parece verse reflejado en esta dimensión, en donde incluye el tratamiento del objeto matemático bajo estudio, junto con otras acciones que retoman conocimientos previos. Sigue advirtiéndose lo importante que es para Emma involucrar a sus estudiantes en el discurso de la clase y se distingue una nueva característica, esto es el cómo utiliza los medios disponibles en clase para apoyar su justificación.

Tabla 20: Características de la dimensión epistémica. Episodio E2.4

Característica	*Acciones*
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto matemático asociado con la solución de la tarea. [1] ▪ Plantear propiedades del objeto matemático asociado con la respuesta de una determinada pregunta. [9b, 11, 13, 15, 17, 19, 21]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. ▪ Comprobar la utilización de procedimientos de solución que han sido abordados en lecciones anteriores. [23c, 25, 27, 29]
Tratamiento de errores	▪ Percatarse de un error en la respuesta de la tarea de un estudiante. [7, 9a] ▪ Asegurarse de que el error en el procedimiento de solución de la tarea haya sido superado. [21b, 31c]
Justificar o refutar	▪ Presentar justificación para el uso de conceptos asociados con la solución de una determinada pregunta. [23b, 27a, 31b-c]

En la Tabla 20 se distinguen acciones relacionadas con el tratamiento del objeto matemático, retomar otras lecciones, tratamiento de errores, justificar o refutar. Estas acciones dejan ver el conocimiento y experiencia profesional de la profesora. Se conjetura que sin el conocimiento matemático y sin la experiencia, el episodio hubiese concluido en [7], cuando se precisa el error y se indica la respuesta correcta. Concluir la interacción en este punto pudiera verse como el desperdicio de una buena oportunidad para cerrar la argumentación, pues es en este punto donde la argumentación de Emma empieza a tener otro tipo de interpretaciones, ya no solo en relación con el análisis del discurso de clase, sino con las implicaciones para las oportunidades de aprendizaje.

Las acciones de Emma en este episodio y la manera cómo afronta la intervención argumentativa y cómo da el cierre a la misma, permiten referir los siguientes propósitos de su argumentación: resolver preguntas de los estudiantes o sus propias preguntas [7, 9, 11, 19, 21, 23, 25, 29, 31], tratar con errores en el procedimiento de solución de la tarea [7, 9, 27, 31], tratar con puntos de vista diferentes (respuestas diferentes) y que no coinciden con la respuesta esperada de la tarea [7], validar aseveraciones presentadas por los estudiantes [13, 17, 19, 21, 23, 25, 27], verificar respuestas de la tarea [1] y revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea, abordados en lecciones anteriores [9, 11, 17, 21, 23, 27].

Transcripción 6: Episodio E2.5

31.	Emma:	*Vamos a revisar el de 60°, el seno daba raíz de 3 sobre 2* ***a***. [Una estudiante dice algo a la profesora]. *Pero S4 me está diciendo por acá, que a ella le dio al contrario, entonces vamos a hacer la verificación* ***bRet*** *¿a quién más le dio al contrario el seno y el coseno? A S4 y ¿a quién más?* ***c***
32.	S5:	¿La raíz abajo?
33.	Emma:	*¿La raíz abajo o el resultado al contrario?* ***aRel*** [Preguntándole a S4]
34.	S4:	¡No!... El resultado, pues el coseno me quedó en el seno y seno me quedó en el coseno.
35.	Emma:	*Entonces vamos a verificar que fue lo que sucedió* ***aAve***. *¿El seno de cualquier ángulo es igual a qué?* ***bAve***
36.	S:	Cateto opuesto sobre hipotenusa.
37.	Emma:	*¿Cuál es el ángulo que voy a ver?* ***Ave***
38.	S6:	El de 60°.
39.	Emma:	*El de 60°* ***aApr***. *Entonces el seno de 60° es igual… me voy a ubicar en el triángulo, este es el ángulo de 60° [Muestra la figura en el tablero]* ***bExp***, *¿Cuál es el cateto opuesto al ángulo de 60°?* ***cAve***
40.	S:	Raíz de 3 sobre 2.
41.	Emma:	*Raíz de 3 sobre 2* ***aApr***. *Ahí fue donde te equivocaste, sería raíz de 3 sobre 2 dividido la hipotenusa* ***bRet***, *que ¿cuánto es?* ***cAve***
42.	S:	1.
43.	Emma:	*1* ***aApr***. *Ahí tengo que hacer una división entre fraccionarios* ***bRet***, *¿a quién le voy a completar el fraccionario?* ***cAve***
44.	S:	Al 1 de abajo.
45.	Emma:	*Al 1* ***aApr***. *Este quedaría sobre un 1… internos por externos… el seno de 60° es igual a... ¿1 por raíz de 3? Raíz de 3, sobre 2 por 1, 2* ***bRetExp*** *¿Hay que racionalizar?* ***cAve***
46.	S:	No.
47.	Emma:	*¿Por qué?* ***aRet***
48.	S:	Porque la raíz quedo arriba.
49.	Emma:	*Porque la raíz está en el numerador* ***aAprRel***. *Recodemos que solamente se racionaliza cuando la raíz me queda en el denominador* ***bExp***. *Una forma de verificar… ¿cómo podemos verificar que estos resultados si son los correctos?* ***cRet***
50.	S7:	En la calculadora.

51. Emma:		*¿Y cómo lo hacemos en la calculadora?* ***aAve*** *Hacer por ejemplo el seno de 60° y nos debe dar un resultado, o hacer esta división raíz de 3 dividido 2 y nos tiene que dar el mismo resultado, bueno* ***bExp.*** *¿Alguna tiene una respuesta diferente?* ***cAve***
52. S:		[Silencio]
53. Emma:		*Entonces, S4 ¿ya entendió cuál fue el error que tuvo?* ***aRet***
54. S4:		[Asiente]

Este episodio al igual que el anterior, E2.4, tiene lugar por una respuesta de una estudiante que no coincide con la presentada por la profesora, pero en este caso es ella quien la comparte con las demás estudiantes. En la argumentación de Emma logra distinguirse, entre otras, la intención de verificar las respuestas de la tarea, de manera que sus estudiantes hagan parte de manera consciente, o tal vez inconsciente, de procesos de justificación y validación en la clase de matemáticas como puede observarse en las Tablas 21, 22 y 23.

Tabla 21: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E2.5

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [31a] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención de un estudiante. [31b, 43b] ▪ Plantear aseveración para examinar la intervención de un estudiante. [34a] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [39a, 41a, 43a, 45a] ▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [39b, 49b, 51b] ▪ Plantear aseveración para referirse a la intervención inicial del estudiante y construir sobre ella. [41b] ▪ Plantear aseveración para retomar y expandir la intervención de un estudiante. [45b] ▪ Plantear aseveración para aprobar y replantear la intervención de un estudiante. [49a]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para contrastar posibles soluciones a la tarea. [31c, 51c] ▪ Plantear pregunta para replantear la intervención a un estudiante. [33a] ▪ Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [35b] ▪ Plantear pregunta para averiguar procedimiento que fue abordado en lecciones anteriores. [37a, 39c, 41c, 43c, 45c] ▪ Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante. [47a]

	▪ Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido en la lección anterior. [49c] ▪ Plantear pregunta para sondear la intervención de un estudiante. [51a] ▪ Plantear pregunta para retomar intervención inicial del estudiante. [53a]

Una intervención de Emma [31b], en la que se refiere a una duda de una estudiante, marca el inicio y al mismo tiempo la intervención argumentativa del episodio. Dicha intervención está acompañada de una serie de aseveraciones y preguntas, las cuales permiten a la profesora asegurarse que la estudiante ha logrado identificar su error y que la duda ha sido resuelta. Dos reacciones son advertidas en [31a, 31c y 51c]: *ubicar* y *contrastar*, las cuales tampoco estaban consideradas en la tipología inicial, y dado el desarrollo del episodio merecen un tratamiento puntual.

Tabla 22: Características de la dimensión interaccional. Episodio E2.5

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [31b] ▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [31c, 33a, 34b, 37a, 39c, 41c, 43c, 45c, 47a, 49c, 51a] ▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [35, 37, 39, 41, 43, 45, 49, 51] ▪ Invitar a los estudiantes a participar en la discusión de posibles respuestas de la tarea. [51c]
Medios y normas	▪ Utilizar los medios disponibles en clase (tablero, computador) para apoyar justificación. [39b] ▪ Sugerir a los estudiantes la utilización de diferentes instrumentos (calculadora, trasportador) para verificar la respuesta de la tarea. [49c, 51]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea. [39, 41, 43, 45, 49, 51, 53]
Discutir	▪ Percatarse de las dudas en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [31b] ▪ Percatarse de errores en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [41b]

Cuatro características son destacadas en esta dimensión: participación, en la cual se reconocen acciones en las que se atiende a dudas, se invita a participar, se involucra a las estudiantes en la respuesta a preguntas y en el procedimiento de solución de la tarea; medios y normas de clase, al utilizar los medios de clase para apoyar la justificación y al sugerir la utilización de calculadora a manera de verificación; convencer y discutir. Se subraya cómo la profesora en lugar de indicar un error, lo utiliza para generar la discusión de la tarea, permitiendo la participación de las estudiantes.

Tabla 23: Características de la dimensión epistémica. Episodio E2.5

Características	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [35b, 41b, 45b]
Conceptos y definiciones	▪ Retomar definición de conceptos involucrados en la solución de la tarea. [31b]
Retomar otras lecciones	▪ Comprobar la utilización de un procedimiento de solución que fue abordado en lecciones anteriores. [39c, 41c, 45c]
Tratamiento de errores	▪ Percatarse de un error en la respuesta de la tarea de un estudiante. [31a, 37b]
Procedimientos y respuestas	▪ Verificar procedimiento de solución de la tarea. [31b, 35, 37, 39, 41]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. 37b-c, 39, 41, 45a-b] ▪ Solicitar justificación ante una intervención de un estudiante. [43]

En lo que respecta a la dimensión epistémica, se advierten acciones relacionadas con el tratamiento de los objetos matemáticos razón trigonométrica y fracción, con retomar la definición de un determinado concepto o procedimiento abordado en otras lecciones, con el tratamiento de los errores, con verificar procedimientos, y con plantear o solicitar justificación. Como ha sido reseñado en otros episodios, es característico en Emma, el apoyar su justificación haciendo alusión a las lecciones anteriores y el tomarse el tiempo para ocuparse del tratamiento de los errores como una oportunidad de aprendizaje.

A partir de la intervención argumentativa enunciada en [31], en un primer cierre presentado en [41] en donde se enuncia el error y en un segundo cierre en [53] en donde Emma se asegura que la dificultad haya sido superada, se pueden designar los siguientes propósitos de la argumentación de la profesora: verificar respuestas de la tarea [31b, 35a, 49c], aclarar procedimiento de solución de la tarea [33, 43b-c, 45b-c] , tratar con errores en el procedimiento de solución de la tarea [41b, 53] y revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea, abordados en lecciones anteriores [35b, 49b].

Transcripción 7: Episodio E2.6

69.	Emma	[...] *¿Qué pasa con este 2 y este otro 2?*$_{Ave}$
70.	S	Se cancelan.
71.	Emma	*¿Cuándo yo canceló que me queda?* $_{aAprAve}$*... Me queda un 1, cancelo este con este y esto, me queda igual a 1 sobre raíz de 3 y ahí era donde tenía que racionalizar* $_{bExp}$ *[Mientras lo resuelve se percata de que S8 está inquieta por la respuesta] ¿Cuál fue tu error S8?* $_{cAve}$
72.	S8	Que racionalice antes y entonces eso me daba como una multiplicación de 2 por 3.
73.	Emma	*Sin embargo, si no hubieras cancelado... supongamos, no cancelaste* $_{aRed}$*, entonces queda 2 sobre 2 raíz de 3, si vas a racionalizar, entonces… pues igual puedes racionalizar ahí por raíz 3 sobre raíz de 3, me queda 2 por raíz de 3* $_{bExp}$*...*
74.	S	2 raíz de 3.
75.	Emma	*2 raíz de 3, sobre 2 por raíz de 3 por raíz de 3* $_{AprRel}$*.*
76.	S	2 raíz de 3 a la 2.
77.	Emma	*2 por raíz de 3 al cuadrado* $_{aAprRel}$*, ¿qué pasa con esta raíz y este 2?* $_{bRet}$
78.	S	Se cancelan.
79.	Emma	*Se cancelan* $_{aApr}$*. Entonces me quedarían 2 raíz de 3 sobre 2 por 3* $_{bRetExp}$*. Ustedes pueden hacer la multiplicación 2 por 3 me da 6, pero obligatoriamente tienen que simplificar, o sea igualmente llegaríamos a lo mismo, entonces me quedaría 2 raíz de 3 sobre 6* $_{cRetRed}$*. Pero tenemos que simplificar, ¿el 2 y el 6 que tienen?* $_{dRet}$
80.	S	Mitad.
81.	Emma	*Mitad de 2, 1 y mitad de 6, 3* $_{aAprExp}$*. Entonces me queda raíz de 3 sobre 3* $_{bRet}$*. Me tiene que dar lo mismo, independiente que racionalices primero o racionalices después, listo* $_{cRet}$*.*
82.	S8	[Asiente]

Emma continúa con la verificación de las respuestas de la tarea, en particular encuentra el valor de $cot\ 60°$. Junto con las estudiantes ha indicado la expresión $\frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2}$, es en este momento donde inicia el episodio. En [69 y 71] puede reconocerse cómo Emma sugiere la expresión simplificada $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e invita a racionalizar, pero la estudiante S8 parece sentirse inquieta pues ella primero racionalizó y al final simplificó. La argumentación de Emma en este episodio, descrita en las Tablas 24, 25 y 26, muestra cómo dos procedimientos permiten llegar a la misma respuesta de la tarea.

Tabla 24: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E2.6

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [71b, 73b] ▪ Plantear aseveración para redireccionar la intervención de un estudiante. [73a] ▪ Plantear aseveración para aprobar y replantear la intervención de un estudiante. [75a, 77a] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [79a] ▪ Plantear aseveración para retomar intervención anterior y construir sobre ella. [79b] ▪ Plantear aseveración para retomar y redireccionar intervención anterior. [79c] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [81a] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la tarea. [81b] ▪ Plantear aseveración para retomar y dar respuesta a la situación que originó la pregunta inicial del estudiante. [81c]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para averiguar procedimiento que fue abordado en lecciones anteriores. [69] ▪ Plantear pregunta para aprobar y explorar la intervención de un estudiante. [71a] ▪ Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante. [71c] ▪ Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido antes en la misma lección. [77b] ▪ Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido antes en la misma lección. [79d]

Se distinguen en este episodio acciones que refieren a aseveraciones y preguntas. Del lado de las aseveraciones, se destacan aquellas cuya intención es retomar la intervención de las estudiantes, bien sea para construir sobre esta, para redireccionar el conocimiento, o para dar respuesta a la situación que originó la intervención inicial. Respecto a las preguntas, se resalta el retomar procedimientos discutidos en la misma lección o en lecciones anteriores.

Tabla 25: Características de la dimensión interaccional. Episodio E2.6

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [64, 71a-b, 73, 75, 77, 79, 81] ▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [71c]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de que diferentes procedimientos de solución permiten llegar a la respuesta de la tarea. [73, 75, 77, 79, 81]
Discutir	▪ Percatarse de las dudas en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [71c, 73, 75, 77, 79, 81]

Hacen parte de este episodio acciones vinculadas con la participación, convencer y discutir. Emma utiliza la duda en una estudiante para abrir un espacio a la discusión de la tarea, y utiliza el procedimiento de solución de la tarea para convencer a todas las estudiantes de cómo es posible llegar a la misma respuesta tomando diferentes caminos.

Tabla 26: Características de la dimensión epistémica. Episodio E2.6

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [71, 79]
Retomar otras lecciones	▪ Comprobar la utilización de un procedimiento de solución que fue abordado en lecciones anteriores. [69, 77b, 79d]
Tratamiento de errores	▪ Percatarse de un posible error en la respuesta de un estudiante. [71c]
Procedimientos y respuestas	▪ Utilizar la intervención de un estudiante para mostrar diferentes procedimientos de solución de la tarea. [73, 81b-c]
Justificar o refutar	▪ Contrastar dos posibles procedimientos de solución a la tarea y justificar por qué ambos son posibles. [73, 79c, 81c]

A fin de justificar a las estudiantes que dos procedimientos permiten llegar a la misma respuesta, Emma declara acciones alusivas a las propiedades del objeto matemático raíz e indica procedimientos de solución asociados a expresiones con raíces. De lo anterior, se puede inferir que un aspecto importante del discurso matemático de Emma en lo concerniente a la argumentación, es la atención y disposición a situaciones de clase que pueden invitar a las estudiantes la toma de decisiones cuando se enfrentan a la solución de una determinada tarea.

Este episodio inicia con intervenciones que remiten a un proceso de explicación, es decir las intervenciones de Emma [69, 71] no tienen el fin de convencer, sino que son parte del discurso de clase mientras se resuelve la tarea. Sin embargo, dichas intervenciones sirven de contexto para la intervención [71c] que sí podría ser considerada argumentativa, desde esta intervención hasta el cierre en [81c], se identifican los siguientes propósitos de la argumentación de Emma: tratar con procedimientos de solución diferentes, donde ambos permiten llegar a la repuesta esperada de la tarea [73, 79c, 81c], resolver preguntas de los estudiantes o sus propias preguntas [77, 79d, 81], puntualizar en las propiedades del objeto matemático involucrado en el procedimiento de solución de la tarea [79c], y revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea, abordados en lecciones anteriores [77b, 79d].

Tarea E3. Con ayuda de la calculadora y con el círculo unitario calcula el seno, coseno, tangente de 70° y 80°.

Figura 14: Tarea E3

Transcripción 8: Episodio E3.1

81.	Emma:	*S9 me lees por favor el cuarto punto de la actividad, que es lo que nos falta por hacer… Devolvámonos a la actividad todas* $_a$ *¿Qué es lo que nos hace falta por hacer?* $_b$ *Ya completamos la tabla, hicimos la construcción de los dos triángulos* $_c$*, ¿qué es lo que nos hace falta?* $_d$
82.	S9:	Con ayuda de la calculadora y con el círculo unitario calcula el seno, coseno, tangente de C y D [la tarea es respectivamente 70° y 80°]
83.	Emma:	*Listo, entonces por acá S9 nos ayudó* $_{aApr}$*, vamos a hacer todas un plano cartesiano* $_b$.
84.	S1:	¿De cuánto?
85.	Emma:	*Cada una dice de cuánto lo quiere hacer, pero la idea es que por todos lados mida lo mismo. Usted lo va hacer del tamaño que quiera, vas hacer un plano cartesiano del tamaño que quieras, ¿tú quieres que llegue hasta 5? Que llegue*

hasta 5… que llegue hasta 6…o sea del tamaño que tú lo desees ***aRedExp***. [Procede a realizar la construcción en el tablero]

Este episodio ocurre mientras la profesora da indicaciones respecto a la manera de proceder en la tarea, hay una pregunta de una estudiante que parece sorprenderla, y es interesante la manera cómo reacciona a la misma. En lo que sigue se presentan las Tablas 27, 28 y 29, las cuales están precedidas de un párrafo que las vincula y de los respectivos propósitos de la argumentación.

Tabla 27: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E3.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para señalar el paso a seguir en el procedimiento de solución de la tarea. [81a-c, 83b] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [83a] ▪ Plantear aseveración para redireccionar y expandir la intervención de un estudiante. [85a]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el siguiente paso a realizar en el procedimiento de solución de la tarea. [81b-d]

Tabla 28: Características de la dimensión interaccional. Episodio E3.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [81, 83b, 85] ▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [85]
Medios y normas	▪ Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por él mismo. [85]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [85]

Tabla 29: Características de la dimensión epistémica. Episodio E3.1

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [85]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea.

Las acciones representadas en las tres dimensiones en este episodio, aluden a un aspecto que representa la argumentación de Emma, esto es vincular la respuesta a una pregunta de una estudiante con una justificación que convoca a la toma de decisiones, valiéndose de las normas de clase y de aseveraciones. Lo anterior, además de ser una característica de la argumentación, puede interpretarse como un propósito educativo en la clase de matemáticas, animar a los estudiantes a tomar sus propias decisiones cuando resuelven una tarea.

Transcripción 9: Episodio E3.2

106.	Emma:	[...] *Lo que pasa en que yo entiendo la confusión de algunas, hay algunas que esta línea, este lado del triángulo no les está coincidiendo con la cuadrícula, eso no quiere decir que el triángulo este malo, todas van a tener medidas diferentes* $_{a}$*, ¿lo único que vamos a tener todas en común qué es?* $_{b}$
107.	S:	El triángulo [Risas]
108.	Emma:	*Todas estamos construyendo un triángulo* $_{aAprRel}$*, pero ¿qué cosas del triángulo?* $_{bAve}$*… El ángulo, todas vamos a tener en común el ángulo porque partimos fue del ángulo de 70°, ya algunas van a tener el triángulo más grande, más pequeñito, algunas les va a coincidir con la cuadrícula y a otras no* $_{cExp}$*.*

Este episodio ilustra una situación que suele ser común en la clase de matemáticas, *"mi figura no es igual a la de la profesora"*, que puede agobiar a algunas estudiantes. Las Tablas 30, 31 y 32, presentan un análisis de las características de la argumentación de Emma en las tres dimensiones.

Tabla 30: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E3.2

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración alusiva al procedimiento que puede resultar confuso en la solución de la tarea. [106a] ▪ Plantear aseveración para aprobar y replantear la intervención de un estudiante. [108a]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [106b] ▪ Plantear pregunta para sondear la apropiación de un determinado concepto asociado a la solución de la tarea. [108b]

Tabla 31: Características de la dimensión interaccional. Episodio E3.2

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [106a] ▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [106, 108]
Medios y normas	▪ Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por él mismo. [108]
Discutir	▪ Percatarse de las dudas en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [106, 108]

Tabla 32: Características de la dimensión epistémica. Episodio E3.2

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [106, 108] ▪ Solicitar claridad respecto al abordaje de un determinado objeto matemático. [106, 108]
Justificar o refutar	▪ Presentar justificación del uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta. [198c]

En este episodio, en el cual Emma se percata de una cierta *confusión* en las estudiantes, que alude a posibles dificultades de medición y de construcción de figuras, se pueden evidenciar características de la argumentación de Emma muy particulares para esta situación. Las aseveraciones y preguntas, acompañadas de acciones relacionadas con la participación y la discusión, tienen la intención de atenuar dicha confusión, para ello nombra propiedades del objeto triángulo y en su justificación hace hincapié de que el mismo ángulo, no es condición para obtener el mismo triángulo, y lo cual, no interfiere en la solución de la tarea. En el caso de los propósitos de la argumentación, se esboza el aclarar procedimiento de solución de la tarea y el tratar con dificultades en la representación del objeto matemático triángulo asociado al procedimiento de solución de la tarea.

Transcripción 10: Episodio E3.3

108.	Emma:	[...]...*Listo muy bien, así rápido sin pensar mucho ¿cuánto tiene que medir este ángulo?*
109.	S6:	90°
110.	Emma:	*¡Oigan!* ***Des***
111.	S:	[Risas]
112.	S:	[Unas dicen 45°, otras 70°, otras 30°]
113.	S5:	20°
114.	Emma:	*20°* ***aApr*** *¿Por qué?* ***bAve***
115.	S5:	Porque 70° más 90° serían 160° y 20° es 180°
116.	Emma:	*Muy bien, estás lúcida se merece la bonificación* ***Apr***.

Una respuesta de una estudiante que no es la esperada por la profesora enmarca este episodio. En las Tablas 33, 34 y 35, se exponen las acciones asociadas a las dimensiones de análisis.

Tabla 33: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E3.3

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [114a, 116a]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el siguiente paso a realizar en el procedimiento de solución de la tarea. [108a] ▪ Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante. [114b]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante. [110a]

Tabla 34: Características de la dimensión interaccional. E3.3

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de la tarea. [108]
Discutir	▪ Indicar error en la respuesta de un estudiante y alentar a los demás estudiantes a presentar respuestas alternativas. [110]

Tabla 35: Características de la dimensión epistémica. Episodio E3.3

Característica	***Acciones***
Justificar o refutar	▪ Solicitar justificación ante una intervención (correcta o incorrecta) de un estudiante. [114b] ▪ Validar justificación presentada por una estudiante. [116]

Las acciones representadas en las tres dimensiones en este episodio, advierten otro rasgo de la argumentación de Emma, cómo utiliza expresiones para desaprobar una determinada intervención y, al mismo tiempo, para alentar a las estudiantes a presentar respuestas alternativas. En cuanto a los propósitos de la argumentación, se identifica refutar respuestas que los estudiantes presentan de la tarea y validar una respuesta presentada por las estudiantes.

Transcripción 11: Episodio E3.4

138.	Emma:	*Listo, entonces voy a suponer el siguiente caso. Resulta que, en mi construcción yo voy hacer... entonces... el seno de 70°. En mi construcción con mi regla a mí me midió 3.8 centímetros, supongamos, el lado opuesto y la hipotenusa que en este caso sería el radio…sería 4. Con mis medidas, entonces, yo me voy a mirar el seno de 70°, va hacer igual... ¿qué tengo que hacer?... La división entre 3.8 y 4, entonces hacemos las divisiones, 3.8 divido 4. Lo vamos a convertir a números enteros* $_{a}$ *¿entonces me quedaría cuánto?* $_{b}$
139.	S1:	38 dividido 40.
140.	Emma:	*38 dividido 40* $_{aApr}$. *¿Cuántas veces está el 40 en el 38?* $_{bAve}$... *Tengo que agregarle un 0, pero eso me genera el 0 en el cociente y la coma* $_{cExp}$, *entonces ¿el 40 cuantas veces está en el 380?* $_{dAve}$… *Ya cada una tiene que hacer las operaciones con los datos que tienen* $_{eExp}$.
141.	S4:	Profe ¿y si los dos me dan lo mismo? O sea cateto opuesto y la hipotenusa
142.	Emma:	*Debes ser muy precisa, medir exactamente, porque aquí el milímetro hace la diferencia* $_{aRet}$. *Muéstrame [Emma se acerca a S4 a verificar su procedimiento y las demás continúan haciendo la tarea] Ahí la diferencia es de 2 milímetros [le dice Emma a S4]* $_{bRet}$... *Hermosas, pilas con esto, porque acá tenemos que ser muy precisas, no es que ‘ah es que la diferencia es 1 milímetro’, el milímetro hay que contarlo, listo* $_{cRed}$. [...] *Hermosas, ¿cómo sabemos que si está bien hecha la operación?* $_{dAve}$
143.	S:	Con la calculadora.
144.	Emma:	*Con la calculadora* $_{aApr}$, *¿qué vamos a poner en la calculadora?* $_{bAve}$... *El seno de 70°* $_{cRet}$ [...] *¿Cuánto les dio la operación en la calculadora?* $_{dAve}$
145.	S:	[Unas dicen 0.91, otras 0.95 y otras 0,97]
146.	Emma:	[Si dirige al puesto de algunas estudiantes] [...] *Hermosas, tengan en cuenta lo siguiente, la calculadora me da a mí un valor... pues no es un valor exacto, porque ese es un decimal infinito no periódico, es un número irracional. Sin embargo, ustedes lo están haciendo a partir de las aproximaciones, estamos aproximando los números a partir de lo que les muestran a ustedes los instrumentos de medida. Pues la idea es que el resultado de esta división a usted le dé algo cercano a lo que aparece en la calculadora, si la calculadora a usted le está mostrando que es 0,94 [respecto al valor exacto de Sen70°]... si hacemos la aproximación y a usted le dio 0,70 ¿será que lo tienes bueno? No, está malo,*

entonces hay que devolverse a ver cuáles fueron las operaciones que se hicieron malas o las mediciones ***Exp***.

Este episodio es particularmente interesante, la profesora parece adelantarse a una situación que podría presentarse en el procedimiento de solución de la tarea, pues ella ha observado que las estudiantes se confunden cuando no obtienen la misma figura o un resultado exacto, como ya fue expuesto en los episodios E1.1, E3.1, E3.2 y E3.3. Pero durante el desarrollo de la lección ocurren situaciones no previstas por Emma, las cuales son motivo de análisis y que se indican en las Tablas 36, 37 y 38.

Tabla 36: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E3.4

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para señalar procedimiento que puede resultar confuso en la solución de la tarea. [138a] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [140a, 144a] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante. [140c-e, 146] ▪ Plantear aseveración para referirse y dar respuesta a la intervención de un estudiante. [142a-b] ▪ Plantear aseveración para redireccionar y expandir la situación que originó la intervención inicial del profesor. [142c] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [144c]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para averiguar procedimiento que fue abordado en lecciones anteriores. [138b, 140b-d, 142d, 144b, 144d]

Las características de la dimensión comunicativa en este episodio, están representadas por aseveraciones, con las que Emma además de aprobar, ampliar, redireccionar, expandir y retomar, busca señalar un procedimiento que puede resultar confuso en la solución de la tarea.

Tabla 37: Características de la dimensión interaccional. Episodio E3.4

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de la tarea. [138, 140, 142, 144]

	▪ Invitar a los estudiantes a participar en la discusión de posibles respuestas de la tarea. [138]
Medios y normas	▪ Orientar a los estudiantes en la utilización de los diferentes instrumentos de clase (transportador, calculadora). [144b-c, 146] ▪ Sugerir a los estudiantes la utilización de diferentes instrumentos (calculadora, trasportador) para verificar la respuesta de la tarea. [142d, 144d]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por el mismo o por un estudiante. [146]

Sobresalen en este episodio dos acciones relacionadas con los medios de clase. La primera, en la que Emma orienta a las estudiantes en el manejo de la calculadora y, la segunda, en la cual sugiere el uso de la calculadora como medio para verificar respuestas.

Tabla 38: Características de la dimensión epistémica. Episodio E3.4

Característica	***Acciones***
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [140b-d, 142c, 144c]
Procedimientos y respuestas	▪ Plantear procedimiento de solución de la tarea. [138, 140, 142, 144, 146]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación para el procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [146]

Respecto a la dimensión epistémica, tres características son identificadas: retomar otras lecciones para dar respuesta a una determinada pregunta, utilizar procedimientos y respuestas, y plantear una justificación de un determinado procedimiento utilizado en la solución de la tarea.

Para identificar los propósitos, hay que indicar varios aspectos puntuales del episodio con relación a las intervenciones argumentativas y los cierres, ya que no se presenta uno solo. Inicialmente hay una primera intervención argumentativa [138] declarada por Emma, quien ambienta una situación hipotética y en la siguiente intervención [140] presenta un primer cierre a dicha intervención; pero a partir de dicho cierre hay una pregunta de una estudiante [142], a la cual Emma presenta un nuevo cierre [142]; y luego hay una tercera intervención argumentativa por parte de las estudiantes [145] que origina un tercer cierre [146], el cual recoge los cierres e intervenciones anteriores. De esta manera se distinguen como propósitos: presentar y justificar suposiciones respecto a las posibles respuestas de la tarea [138], resolver preguntas de las estudiantes o sus propias preguntas [138b, 140, 142, 144], tratar con errores de procedimiento en la solución de la tarea, tratar con procesos de solución diferentes, donde ambos permiten llegar a la repuesta esperada de la tarea [140, 146], y verificar respuestas de la tarea, presentadas por las estudiantes [146].

Finalmente, en cuanto a las condiciones que activaron la argumentación de Emma en esta lección, en donde se abordaron dos tareas, se pueden indicar de manera general dos condiciones: en los episodios E2.4, E2.5 y E2.6, dentro de las estrategias comunicativas, ciertas preguntas de las estudiantes con las cuales manifiestan dudas o aseguran tener respuestas diferentes; en los episodios E3.1, E3.2, E3.3 y E3.4, dentro del abordaje de la tarea, dificultades enunciadas por las estudiantes y la profesora respecto al procedimiento de solución de la tarea.

Lección 4.

En esta lección se analiza la Tarea E4 mostrada en la Figura 15 y el Episodio E4.1 señalado en la Transcripción 12, así como la Tarea E5 mostrada en la Figura 16 y los Episodios E5.1, y E5.2 señalados en su orden en las Transcripciones 13 y 14.

Tarea E4. Una clase consta de 5 niñas y 7 niños. Si se quiere escoger un comité en el que haya tres integrantes (relator, líder y organizador), hallar la probabilidad de: (a) Seleccionar tres niños, (b) Seleccionar por lo menos dos niños.

Figura 15: Tarea E4

Transcripción 12: Episodio E4.1

3.	Emma:	[...] *Listo, entonces vamos hacer la corrección* $_{a}$. *El primer punto ¿cómo fue que lo hicieron?* $_{b}$
4.	S1:	Adivinando.
6.	S2:	7 sobre 12.
7.	Emma:	*¿Y por qué 7 sobre 12?* ***AprAve***
8.	S:	[Silencio]
9.	Emma:	*Entonces, recordemos que siempre que se toma un evento de probabilidad ¿qué se debe tener presente?* ***Red***
10.	S:	[Silencio]
11.	Emma:	*¿Cómo se calcula la probabilidad de un evento?* ***Red***
12.	S:	[Buscan en su cuaderno]
13.	S2:	[Leyendo de su cuaderno] La probabilidad de un evento es casos favorables sobre casos posibles.
14.	Emma:	*¡Exacto!* ***aApr***. *Entonces que sucede, si ustedes pusieron acá 7 sobre 12, es porque los casos favorables de que sean niños son 7 sobre 12, que es el total, porque ahí ya se cuentan los niños y las niñas* ***bExp*** [...]

En este episodio, Emma discute con un equipo de estudiantes la tarea, parece ser que no hay mucha comprensión sobre el procedimiento de solución de la misma. La diferencia de opinión se puede intuir de las intervenciones [4,6] de las estudiantes, en dónde parecen manifestar dudas con la respuesta de la tarea. A continuación, en las Tablas 39, 40 y 41, se enuncian las características correspondientes a cada una de las dimensiones, seguido de un párrafo que las conecta y los correspondientes propósitos.

Tabla 39: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E4.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [3a] ▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [14b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido en la lección anterior. [3b] ▪ Plantear pregunta para aprobar y explorar la intervención de un estudiante. [7a] ▪ Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante. [9a, 11a]

Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para aprobar la intervención de un estudiante. [14a]

Tabla 40: Características de la dimensión interaccional. Episodio E4.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Invitar a los estudiantes a compartir el procedimiento de solución de la tarea. [3] ▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [7, 9, 11]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [14b] ▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea. [14b]
Discutir	▪ Percatarse de las dudas en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [7, 9, 11, 14] ▪ Discutir respuesta de una determinada tarea con los estudiantes. [3, 7, 9, 11, 14]

Tabla 41: Características de la dimensión epistémica. Episodio E4.1

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Solicitar claridad respecto al abordaje de un determinado objeto matemático. [9, 11]
Utilización de conceptos y definiciones	▪ Retomar definición de conceptos involucrados en el procedimiento de solución de la tarea. [11]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para solucionar la tarea. [9, 11, 14] ▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [9, 11, 14]
Procedimientos y respuestas	▪ Presentar y validar respuesta de la tarea. [7, 9, 11, 14] ▪ Verificar procedimiento de solución de la tarea. [7, 9, 11]
Justificar o refutar	▪ Solicitar justificación ante una intervención (correcta o incorrecta) de un estudiante. [7] ▪ Solicitar justificación para el procedimiento realizado para resolver la tarea. [9, 11]

Es relevante en el episodio, cómo, al parecer, las estudiantes parecen haber encontrado la respuesta pero no están seguras de sí en realidad es y cómo justificarle a la profesora el procedimiento de solución de la misma. Emma insiste en preguntar el porqué de la respuesta e intenta ubicarlas en el procedimiento de solución, lo cual es seguido de silencios [8, 10], que pueden reflejar bien el temor a equivocarse o que no recuerdan cómo abordar la tarea. Dada esta situación, Emma las invita a retomar las notas de clase para, a partir de la definición del concepto involucrado en el procedimiento de solución de la tarea, en este caso probabilidad, poder justificar que en efecto la respuesta sí es $\frac{7}{12}$.

Entre la intervención argumentativa enunciada por Emma en [7] y el cierre en [14], se identifica como propósitos de la argumentación: justificar el procedimiento de solución y la respuesta de una tarea, la cual fue abordada en la clase anterior y revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea, abordados en lecciones anteriores.

Tarea E5. Se sabe que el 50% de la población fuma y que el 10% fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a un fumador y que este sea hipertenso?

Figura 16: Tarea E5

Transcripción 13: Episodio E5.1

20.	Emma:	[...] *¿Cómo se lee esto?* $_{a}$ [La profesora señala un párrafo del examen, las estudiantes no saben cómo leerlo] *Devolvámonos al cuaderno; ¿cuál es la forma de mencionar una condicional?* $_{b}$*... Entonces, se lee: 'la probabilidad de A dado B'* $_{c}$*. Si a mí me dicen de A dado B es ¿por qué? ¿cuál de los dos eventos ya ocurrió?* $_{d}$
21.	S:	A.
22.	Emma:	*¡No!* $_{aDes}$*, es B, 'A dado B'* $_{bDesRel}$*. O sea, dándose B, o sea que ya ocurrió B* $_{cRel}$*.*
23.	S3:	Pero B no se ha dado.
24.	Emma:	*Exactamente* $_{aApr}$*, si no se ha dado B entonces tampoco se podría dar A, listo* $_{bAprExp}$*. Entonces en esta condición, el evento que ya ocurrió es el evento B, entonces vamos a identificar en el ejercicio quién es el evento A y quién es el evento B* $_{cExpRed}$*, ¿quién es el evento A? ¿Los fumadores?* $_{dAve}$*...Volvamos a leer el esquema* $_{eRet}$*.*
25.	S:	[Leen cada una la tarea]
26.	Emma:	*Pilas con esto, no necesariamente a usted le dan en los ejercicios o en las situaciones problema las cosas en orden. Si a ti te mencionan primero los fumadores, eso no quiere decir que ahí los fumadores sean el evento A, yo tengo que reasignar, obviamente yo esto le puedo cambiar las letras no poner A si no poner F o poner H yo puedo poner las letras que quiera la cuestión es identificar cuál es el evento que ya ocurrió, si a mí me preguntan esta fórmula* $_{aRedExp}$ *¿cuál es el evento que ya ocurrió?* $_{bAve}$

27.	S1:	¿Los fumadores?
28.	Emma:	*¡No!* ***aDes****. En la fórmula, ¿cuál es el evento que ya ocurrió?* ***bRel***
29.	S2:	B.
30.	Emma:	*Y en la situación que yo les estoy preguntado ¿quién es el evento que ya ocurrió?* ***AprRed***
31.	S3:	Fumar.
32.	Emma:	*Fumar* ***aApr****. Entonces los fumadores ¿van a ser la A o van a ser la B?* ***bRetAve***
33.	S3:	La B.
34.	Emma:	*Los fumadores van a ser la B* ***aApr****, porque a mí lo que me están presentando acá es la probabilidad de A dado B, o sea la probabilidad de que B ya haya ocurrido. Ahí es donde tienen que poner mucha atención, la fórmula por sí sola no les va a dar la respuesta. La cuestión es identificar estos eventos en la situación. En nuestra situación el evento que ya ocurrió es ser fumador, o sea que ser fumador no puede ser el A, tiene que ser el B, listo. Entonces vamos a escribir todo eso, el evento que ya ocurrió es el B, es la probabilidad de A dado B o sea que sería la probabilidad de ser hipertenso dado que ya es fumador, así es como se traduciría a la situación que estamos presentando* ***bExp*** [...]

Emma continua la discusión con el mismo equipo de estudiantes del episodio anterior (E 4.1), pero, en este caso, respecto a la lectura de ciertas expresiones. La diferencia de opinión es expresada por las estudiantes en [21], en donde se evidencia un error. A continuación, en las Tablas 42, 43 y 44 se enuncian las características correspondientes a cada una de las dimensiones.

Tabla 42: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E5.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para señalar el paso a seguir en el procedimiento de solución de la tarea. [20c] ▪ Plantear aseveración para desaprobar y replantear la intervención de un estudiante. [22b] ▪ Plantear aseveración para replantear intervención anterior. [22c] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [24b] ▪ Plantear aseveración para expandir y redireccionar la situación que originó la intervención del profesor. [24c] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la pregunta inicial. [24d] ▪ Plantear aseveración para redireccionar y expandir la situación que originó la intervención inicial del profesor. [26a] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [32a, 34a] ▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [34b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [20a-b-d]

	▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [24d, 26b, 28b] ▪ Plantear pregunta para aprobar y redireccionar la intervención de un estudiante. [30a] ▪ Plantear pregunta para retomar y explorar intervención anterior.[32b]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante. [22a, 28a] ▪ Utilizar expresión para aprobar la intervención de un estudiante. [24a]

Las aseveraciones y preguntas realizadas por Emma con la intención de aprobar, ampliar, expandir, retomar, desaprobar o replantear, se corresponden con intenciones educativas, en este caso el interés explícito de que las estudiantes comprendan el enunciado de la tarea. La presencia de las expresiones “¡No!”, a manera de desaprobación y, “¡Exactamente!”, como aprobación, indica que la dimensión comunicativa refiere a diferentes actos comunicativos, además de las aseveraciones o preguntas.

Tabla 43: Características de la dimensión interaccional. Episodio E5.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [20, 22, 24, 26, 28, 30, 32]
Convencer	▪ Persuadir a los estudiantes de errores en el procedimiento de solución de la tarea. [22b-c, 26a-b, 28b] ▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea. [34b]
Discutir	▪ Percatarse de errores en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [22, 26, 28]

Acciones asociadas a la participación al involucrar a las estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea, convencer en un primer momento persuadiéndolas de errores y luego ratificar la respuesta de la tarea, y discutir errores de las estudiantes, designan las características de la dimensión interaccional en este episodio.

Tabla 44: Características de la dimensión epistémica. Episodio E5.1

Característica	***Acciones***

Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [20b-c-d, 22b-c, 24b-c-d, 26, 34]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [20b, 28b, 34b]
Tratamiento de errores	▪ Indicar error en el procedimiento de solución de la tarea. [22, 26a, 28] ▪ Asegurarse de que el error en el procedimiento de solución de la tarea haya sido superado. [26a, 34b]
Procedimientos y respuestas	▪ Plantear procedimiento de solución de la tarea. [34b] ▪ Solicitar claridad respecto al uso de un determinado procedimiento en la solución de la tarea. [22b-c, 26a, 30]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [34b] ▪ Solicitar justificación para el procedimiento realizado para resolver la tarea. [26c, 28b, 32b] ▪ Refutar la intervención de un estudiante. [22a, 28a]

Las características de la dimensión epistémica se ven influenciadas por la forma como transcurre el episodio, hay respuestas de las estudiantes [21, 23, 27] que le exigen a Emma argumentarles por qué no son procedentes; argumentación en donde sobresalen acciones relacionadas con justificar, tanto al plantear como al solicitar justificación para el procedimiento utilizado en la solución de la tarea.

En este episodio, en el cual la intervención argumentativa es un error en la respuesta a una pregunta [21] y donde el cierre es la justificación de la profesora de la respuesta de la misma pregunta [34], se reseñan los siguientes propósitos de la argumentación de Emma: puntualizar en las propiedades del objeto matemático involucrado en el procedimiento de solución de la tarea, revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea, abordados en lecciones anteriores, justificar el procedimiento de solución y la respuesta de una tarea, la cual fue abordada en la clase anterior y discutir tareas en las cuales puede haber dificultades en su comprensión.

Transcripción 14: Episodio E5.2

34. Emma: [...] *A mí me están diciendo que el 10% de los que fuman son hipertensos, o sea que cumplen las dos condiciones* $_{a}$. *Si a mí me ponen la 'y' ¿cómo se representa?* $_{b}$

35. S1: Una intersección.

36. Emma: *La 'y' es una intersección porque se da este evento y este otro evento* $_{AprExp}$.

37. S3: ¿Todos los fumadores son hipertensos?

38. Emma: *Ah bueno me estás haciendo una pregunta muy importante. No es lo mismo, porque yo me puedo encontrar un fumador y al mismo tiempo no ser hipertenso, pero otra cosa es encontrarme un fumador y que este a la vez sea hipertenso. O sea, ahí es un juego de palabras porque es que tú puedes encontrar que alguien…o sea aquí por lo que te están preguntado es por la probabilidad... Por ejemplo, somos un club de fumadores, cierto, y resulta que ya de por sí somos fumadores y entre nosotros puede haber unos que sean hipertensos, entonces el juego de palabras es que si yo mencionó la 'y' es que estoy diciendo los que son fumadores y que al mismo tiempo son hipertensos, pero es que yo puedo encontrar fumadores que no sean hipertensos, que son fumadores y ya, que tendrán otros tipos de enfermedades, pero no son hipertensos. Entonces ahí cuando tú vas a responder, tú tendrías que decir es 'la probabilidad de encontrar un fumador que al mismo tiempo sea hipertenso o que siendo fumador sea hipertenso' porque es que puede haber fumadores que no son hipertensos. Entonces ahí es un juego de palabras en realidad la confusión…yo entiendo la confusión por ejemplo entre la 'y' y esa parte condicional, pero por eso cuando yo veo en un ejercicio la condicional, es porque a mí me están diciendo que ya hay un evento que ocurrió, cuál es la probabilidad de que ocurra el otro evento. Entonces algo que puede ayudar mucho es hacer un diagrama de Venn [toma el cuaderno de una estudiante y hace el diagrama]. Entonces está es la bolita de ser fumador y está de ser hipertenso, si yo ubico los datos cuando yo estoy en un diagrama de Venn* $_{aAveExp}$, *¿qué es lo primero que debo hacer?* $_{bAve}$

39. S1: La intersección.

40. Emma: *Muy bien* $_{aApr}$, *lo primero que yo debo hacer es ubicar la intersección [ubica el 10% en la intersección] listo* $_{bExp}$. *Me dicen que los fumadores son el 50%, o sea que me faltaría el 40%, porque recordemos el 50% son fumadores y de ese 50%, 10% son fumadores y son hipertensos, listo* $_{cRetExp}$. *Entonces resulta que tengo lo siguiente, ¿a mí me están diciendo cuántos son hipertensos? ¿Me están pidiendo que diga cuáles son los hipertensos?¿a mí me están pidiendo el porcentaje de hipertensos?* $_{dAve}$

41. S2: La probabilidad.

42. Emma: *Pero ¿cuál probabilidad?... De que los fumadores sean hipertensos* $_{aRel}$. *Entonces, ¿qué pasa?... Como a mí me están preguntando es por él conjuntos de los fumadores, yo solamente me voy a fijar en este conjunto de fumadores [señala el diagrama de Venn] porque me están hablando solamente de los fumadores, yo me voy a encontrar con fumadores, ¿cuál es la probabilidad que estando en un grupo de fumadores esos sean hipertensos?... Entonces ¿qué pasa?... A mí no me están diciendo cuantos son hipertensos, no me interesa, pues el ejercicio no me lo está pidiendo, pero puede haber personas que no sean fumadores y tampoco sean hipertensas, que este es el otro porcentaje de la población ¿o acá todas son fumadoras o son hipertensas o son las dos cosas? Hay unas que no son ninguna, entonces a mí no me están preguntando ni por*

		este valor ni por los que son totalmente sanos, en esta pregunta no solamente me están preguntado es por el conjunto de los fumadores, no me están preguntado por el que no sea fumador [...] Están los diabéticos, están los hipertensos, están los que sufren de gastritis, esos no están acá, pero entonces a mí me están diciendo ya es fumador, o sea yo solamente estoy buscando a los fumadores, solamente me voy a fijar en el conjunto de los fumadores, de ese conjunto de los fumadores ¿cuál es la probabilidad de que ya siendo fumadores yo me encuentre a alguien que también sea hipertenso? Entonces por eso les dije que es un juego de palabras y es muy importante mencionar lo que tú decías al principio, tener en cuenta el espacio muestral, a mí cuando me están hablando en esa pregunta no me están preguntando cuánto por todo lo que está por fuera de este conjunto, porque solamente me están preguntado por los fumadores, listo. Entonces si yo voy a utilizar la fórmula sería la probabilidad de ser hipertenso siendo fumador, eso es igual a la probabilidad de la intersección, de ser fumador y ser hipertenso ***bRetExp****, ¿o sea de cuánto?* ***cAve***
43.	S2:	0,1
44.	Emma:	*¿Por qué no pongo el 10%?* ***AprAve***
45.	S2:	Porque está en porcentaje y necesitábamos sacar con la probabilidad.
46.	Emma:	*Necesitamos trabajar con la probabilidad* ***aAprRet*** [...]

Este episodio inicia en el mismo turno [34] del episodio E5.1, en el que tiene lugar una intervención por parte de Emma, quien plantea una pregunta con el fin de comprobar la comprensión de la tarea y del procedimiento de solución de la misma en sus estudiantes, sin embargo, hay una pregunta de una estudiante [37], considerada acá como intervención argumentativa, que requiere que Emma recurra a diferentes recursos para responderle. Aunque hay un cierre en [42], puede interpretarse cómo Emma ha observado que la manera cómo responde a la pregunta de la estudiante, a partir de su argumentación, no ha logrado el propósito de convencerla, razón por la cual indica que la discusión debe seguir siendo abordada en otras lecciones de clase. En lo siguiente, se presenta el análisis de las características de la argumentación en las Tablas 45, 46 y 47.

Tabla 45: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E5.2

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para referirse a la descripción de la tarea. [34a]

	▪ Plantear aseveración para explorar y expandir la intervención de un estudiante. [38a] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante. [40b] ▪ Plantear aseveración para retomar intervención anterior y construir sobre ella. [40c] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la tarea. [42b] ▪ Plantear aseveración para replantear la intervención de un estudiante. [42a] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante y retomar la intervención inicial. [46a]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [34b, 38b, 42c] ▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [40d] ▪ Plantear pregunta para aprobar y explorar la intervención de un estudiante. [44a]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para aprobar la intervención de un estudiante. [40a]

Tabla 46: Características de la dimensión interaccional. Episodio E5.2

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [34, 40] ▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [38]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [38] ▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea. [40, 42]

Tabla 47: Características de la dimensión epistémica. Episodio E5.2

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [36, 40, 42] ▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [38]
Retomar otras lecciones	▪ Comprobar la utilización de un procedimiento de solución que fue abordado en lecciones anteriores. [34b, 38b, 40d]
Procedimientos y respuestas	▪ Plantear procedimiento de solución de la tarea. [34, 36, 40, 42] ▪ Presentar y validar respuesta de la tarea. [40, 42, 44, 46]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [42] ▪ Solicitar justificación para el procedimiento realizado para resolver la tarea. [34b, 40d, 44]

Respecto a las características de orden comunicativo, se identifica de manera especial en este episodio tres tipos de preguntas, las asociadas a la intervención del estudiante, las asociadas al procedimiento de solución de la tarea y las asociadas a la apropiación de conceptos, las cuales parecen estar relacionadas con diferentes intenciones del orden epistémico, en donde se retoman del objeto matemático, se retoman otras lecciones y se justifica.

Entre la intervención argumentativa de la estudiante y el cierre presentado por Emma, se distinguen propósitos de la argumentación tales como: resolver preguntas de los estudiantes o sus propias preguntas [38, 40, 42], aclarar procedimiento de solución de la tarea [38, 40, 42, 44], puntualizar en las propiedades del objeto matemático involucrado en el procedimiento de solución de la tarea [38, 40, 42, 44], discutir acerca de las respuestas diferentes de las estudiantes cuando resuelven la tarea [38, 40, 42], verificar respuestas de la tarea presentadas por las estudiantes [40], revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea, abordados en lecciones anteriores [38, 40, 42, 44] y discutir tareas, en las cuales puede haber dificultades en su comprensión [38, 40, 42].

Cada episodio tiene una intervención argumentativa interesante. En [4.1] Emma observa que las estudiantes tienen la respuesta correcta de la tarea, pero no las observa muy convencidas de esta, lo cual puede evidenciarse en los silencios de las estudiantes, por lo que su argumentación tuvo los propósitos, entre otros, de revisar la apropiación de conceptos y procedimientos, así como de justificar el procedimiento la respuesta de la tarea. En [5.1] hay una respuesta diferente de una estudiante, por lo que Emma se pone en el trabajo de convencer a la estudiante por qué no es esa la respuesta. Y en [5.2] Emma analiza el enunciado de la tarea pues, al parecer, ha observado que las estudiantes aún tienen dificultades en la comprensión de la misma. Aunque el cierre parece darse en [36], una pregunta de una estudiante en [37] hace que Emma deba recurrir a presentar de otra forma la tarea, para ello utiliza elementos discursivos y gráficos, como puede observarse en [38], lo cual parece servir de manera ilustrativa para las estudiantes; pero parece que Emma, aunque presentó la respuesta y observó cierta comprensión en las estudiantes, se da cuenta que su argumentación no sirvió, en este caso, para convencer a las estudiantes.

Con relación a las condiciones que activaron la argumentación en la lección, puede afirmarse que corresponden al abordaje de la lección. En esta lección, quizás influenciada por la manera en cómo tienen lugar los episodios de análisis, esto es la revisión de la solución de las tareas de un examen, donde Emma discute en un grupo reducido, se observa su intención de convencer a sus estudiantes no solo de la respuesta correcta, sino también convencerlas de la forma de solucionar la tarea y de la manera de llegar a la respuesta de la misma. Además de convencer, lo cual suele estar al final del episodio, en [5.1] hay una serie de acciones en [22, 26, 28] en las cuales Emma, primero, trata de persuadir a las estudiantes de errores en los procedimientos que presentaban de la tarea, para más adelante en [34b] convencerlas de la respuesta de la tarea.

Lección 5.

En esta lección se analiza la Tarea E6 mostrada en la Figura 17 y los Episodios E6.1, E6.2, E6.3 y E6.4 señalados en las Transcripciones 15, 16, 17 y 18 respectivamente.

Tarea E6. Una caja contiene 3 monedas, una moneda es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es de 1/3. Se selecciona una moneda al azar y se lanza al aire, hacer la probabilidad de que salga cara.

Figura 17: Tarea E6

Transcripción 15: Episodio E6.1

3.	Emma:	*Listo, entonces recordemos que yo les había dicho que hay diferentes formas de representar la información, cierto. Cuando yo tengo una situación y de esa situación se derivan otras situaciones y a su vez esas derivan otras situaciones, una forma de representar es el diagrama de árbol. Entonces yo tengo una caja, dentro de la caja tengo 3 monedas, tengo la primera moneda, tengo la segunda moneda y tengo la tercera moneda [mientras dice esto realiza el diagrama de árbol en el tablero], listo. Me están diciendo... una moneda que podríamos llamar... que esa sea la primera moneda, es corriente, o sea es una moneda como todos la conocemos... ¿cómo es una moneda?... ¿qué tiene una moneda?... Tiene cara y sello, cierto. Que ahí es donde está el valor de la moneda. Entonces esta moneda tiene cara y tiene sello, listo. Entonces, empecemos a identificar la parte de la probabilidad. La probabilidad de un evento A siempre va a ser igual a los casos favorables de A sobre los casos posibles* $_{a}$*, que serían en total, ¿cuál es la probabilidad de sacar... si yo tengo 3 monedas? ¿Cuál es la probabilidad de sacar la primera moneda?... ¿Cómo sería?... Entonces recordemos casos favorables sobre casos posibles* $_{b}$.
4.	S1:	Es 1 sobre 3.
5.	Emma:	*Sería 1 sobre 3* $_{aApr}$*. Esta sería 1 sobre 3, porque la primera moneda es apenas 1 ¿De cuántas opciones?... de 3* $_{bExp}$, [en la medida que hace las probabilidades las escribe en el diagrama de árbol] *¿cuál es la probabilidad de sacar la segunda moneda?* $_{cAve}$
6.	S2:	½
7.	Emma:	*¿Y por qué ½?* $_{Ave}$
8.	S2:	Porque se quiere sacar una moneda, pero ya sacamos una, entonces…
9.	Emma:	*Pero es que ese razonamiento podría ser, si a mí me dicen que yo voy a sacar dos monedas, entonces ya la probabilidad no sería la misma, porque entonces yo ya saque una moneda, entonces el espacio muestral cambio* $_{RelExp}$...
10.	S2:	[Asiente]
11.	Emma:	*Acá, ¿qué pasaría? ¿Cuál sería la probabilidad?* $_{aRet}$ *Sigue siendo 1/3, ¿por qué? Porque es que a mí me dicen que solamente voy a sacar una moneda, listo* $_{bExp}$.

Antes de la intervención argumentativa, que es declarada por una estudiante en [6], el episodio corresponde a una explicación, pues no hay la presencia de una diferencia de opinión ni la aceptabilidad es puesta en consideración, hay preguntas de la profesora en [3b] con una respuesta de una estudiante en [4] la cual es aceptada por Emma. Este episodio al igual que el Episodio E2.2, permite señalar el discurso matemático del profesor que alude inicialmente a una explicación pero que ante cierta intervención de una estudiante alude a una argumentación. Las Tablas 48, 49 y 50 reúnen las características de las diferentes dimensiones en este episodio.

Tabla 48: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E6.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [3a] ▪ Plantear aseveración para aclarar la intervención de un estudiante. [5a] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante. [5b] ▪ Plantear aseveración para replantear y expandir la intervención de un estudiante. [9] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención anterior. [11b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [3b] ▪ Plantear pregunta para sondear la apropiación de un determinado concepto asociado a la solución de la tarea. [5c] ▪ Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante. [7] ▪ Plantear pregunta para retomar intervención anterior y presentar posibles respuestas. [11a]

Tabla 49: Características de la dimensión interaccional. Episodio E6.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [7] ▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [3, 5, 9, 11]
Medios y normas de clase	▪ Utilizar los medios disponibles en clase (tablero, computador) para apoyar justificación. [5c]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [9, 11]
Discutir	▪ Percatarse de errores en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [7, 9]

Tabla 50: Características de la dimensión epistémica. Episodio E6.1

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [3, 5, 9, 11]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para solucionar la tarea. [3]
Tratamiento de errores	▪ Percatarse de un error en la respuesta de la tarea de un estudiante. [7]
Procedimientos y respuestas	▪ Plantear procedimiento de solución de la tarea. [3, 5, 11] ▪ Presentar posibles variaciones a la tarea para sugerir procedimientos de solución. [9]
Justificar o refutar	▪ Solicitar justificación ante una intervención (correcta o incorrecta) de un estudiante. [7]

	▪ Solicitar justificación para el procedimiento realizado para resolver la tarea. [11b]

En este episodio se distinguen diferentes acciones en las cuales se ven representadas cada una de las dimensiones de análisis. Se subraya cómo la profesora reacciona a la intervención de la estudiante S2, utilizando lo que ella dice para ubicarla en otra situación donde esa respuesta sí sería posible. Se destaca de nuevo, el tratamiento del error por parte de Emma, la cual no expresa desaprobación, sino por el contrario le plantea una pregunta a la estudiante para explorar por qué ella considera que esa es la respuesta.

Hacen parte de los propósitos de la argumentación en este episodio: discutir y justificar un error en la intervención de una estudiante [7, 9, 11], mostrar la forma de acercarse a la comprensión de la tarea y al procedimiento de solución de esta [11], aclarar procedimiento de solución de la tarea [9, 11], prever posibles errores en el procedimiento de solución de la tarea [3], revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea abordados en lecciones anteriores [9], y tratar con dificultades en la representación del objeto matemático asociado al procedimiento de solución de la tarea [3].

Transcripción 16: Episodio E6.2

15.	Emma:	*¿Cuál es la probabilidad de la tercera moneda?* $_{a}$
16.	S:	1 sobre 3.
17.	Emma:	*1 sobre 3* $_{aApr}$*, porque la tercera moneda es apenas 1* $_{bExp}$ *¿y cuántas monedas en total son?* $_{cAve}$
18.	S:	3.
19.	Emma:	*3* $_{aApr}$*. Listo, acá, si yo ya me fijo solamente en la primera moneda* $_{bRet}$*…, ¿cuál es la probabilidad máxima de un evento?* $_{cAve}$
20.	S4:	1.
21.	Emma:	*1* $_{aApr}$*. Entonces, cuando tú estés acá poniendo las probabilidades de cada una de las monedas, si yo sumó esas probabilidades me va a dar 1. Vamos hacer la demostración. La probabilidad de la primera moneda es 1/3, más la probabilidad de la segunda moneda que es 1/3, más la probabilidad de la tercera moneda que es 1/3* $_{bExp}$*. Estas fracciones cómo son ¿homogéneas o heterogéneas?* $_{cAve}$

22.	S:	Homogéneas.
23.	Emma:	*¿Y cómo se suman las fracciones homogéneas?* ***AprAve***
24.	S5:	Derecho.
25.	Emma:	*¿Derecho?* ***Des***
26.	S5:	Ah no, se suman los de arriba y se pone el mismo denominador.
27.	Emma:	*Como son homogéneas se pone el mismo denominador y sumo los numeradores, o sea que esto me da* ***AprExp****…*
28.	S:	1.
29.	Emma:	*3 sobre 3 es igual a 1* ***aRel****, recordemos que esa es la probabilidad máxima, 1* ***bRet*** [...]

La expresión “vamos a hacer la demostración” nombrada en el discurso de Emma en este episodio, merece un trato especial dada la posición asumida en este trabajo en cuanto a la demostración. En las Tablas 51, 52 y 53 se indican las características de la argumentación de la profesora.

Tabla 51. Características de la dimensión comunicativa. Episodio E6.2

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [17a, 19a, 21a] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante. [17b, 19b, 21b] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [27a] ▪ Plantear aseveración para replantear la intervención de un estudiante. [29a] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la situación que originó la intervención del profesor. [29b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el siguiente paso a realizar en el procedimiento de solución de la tarea. [15a, 17c] ▪ Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [19c, 21c] ▪ Plantear pregunta para aprobar y explorar la intervención de un estudiante. [23a]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante. [25a]

Tabla 52: Características de la dimensión interaccional. Episodio E6.2

Característica	***Acciones***

Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [15, 17, 19, 21, 23, 25, 27] ▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [15, 17, 19, 21, 23, 25, 27]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [17b, 19b, 21b-c, 27, 29] ▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea. [21b-c, 27a, 29]

Tabla 53: Características de la dimensión epistémica. Episodio E6.2

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [21, 23, 27, 29]
Retomar otras lecciones	▪ Comprobar la utilización de un procedimiento de solución que fue abordado en lecciones anteriores. [23]
Procedimientos y respuestas	▪ Valerse de una prueba (demostración) para verificar el procedimiento de solución de la tarea. [21b-c, 23, 25, 27, 29] ▪ Solicitar claridad respecto al uso de un determinado procedimiento en la solución de la tarea. [23]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [17b, 19b, 21b, 27] ▪ Solicitar justificación para el procedimiento realizado para resolver la tarea. [23] ▪ Refutar la intervención de un estudiante. [25]

Un episodio que pareciera ser representativo de un proceso explicativo hasta la intervención [19], es decir preguntas de la profesora con respuestas esperadas donde no hay diferencia de opinión declarada, es acompañada por una *demostración* que parece permitirle a la profesora convencer a las estudiantes que en efecto la probabilidad máxima de un evento es 1. Es decir, la intervención argumentativa puede reconocerse de manera implícita en la intervención [21b] de Emma, quien ha obtenido respuestas válidas de las estudiantes, considera que es importante, dado quizás las dificultades expresadas en la Lección 4, presentar una justificación para verificar el procedimiento de solución de la tarea. Llama la atención la manera como Emma vincula e involucra a las estudiantes en dicha demostración y cómo se vale del objeto matemático fracción, conocido y discutido por las estudiantes, el cual es requerido en el procedimiento.

Cuatro propósitos son referidos en este episodio: validar respuesta presentada por las estudiantes [19, 21a], refutar respuestas que las estudiantes presentan de la tarea [25], aclarar proceso de solución de la tarea [21] y validar aseveraciones presentadas por las estudiantes [29].

Transcripción 17: Episodio E6.3

35.	Emma:	[...] *¿Cuál es la probabilidad entonces de sacar sello?*
36.	S6:	2 sobre 4.
37.	Emma:	*¿2 sobre 4?* $_{Des}$
38.	S7:	Pero profe ¿contando con solamente una moneda o con todas?
39.	Emma:	*¡No!* $_{aDes}$*, estoy mirando solamente en la primera moneda* $_{bRed}$.
40.	S:	[Unas dicen ‘1 sobre 2’, otras ‘1 sobre 6’, otras ‘1 sobre 4’ y otras ‘1 sobre 5’]
41.	Emma:	*¡No!* $_{aDes}$ *Estoy solamente la primera moneda* $_{bRep}$.
42.	S:	1 sobre 2.
43.	Emma:	*1 sobre 2* $_{aApr}$ [...] *En la primera moneda ¿cuántos sellos hay? 1 y ¿cuántos lados de la moneda hay? 2, listo* $_{bTrad}$. *Entonces ahí sigue siendo lo mismo, en una moneda corriente tanto cara como sello tienen la misma probabilidad de salir, listo* $_{cExp}$. *Ahora, vámonos para el caso de la segunda moneda* $_{cRet}$, *¿qué pasa en la segunda moneda? Entonces, ¿qué me dice la instrucción de la segunda moneda?* $_{eRetAve}$
44.	S7:	1 sobre 4.
45.	Emma:	*¿Y de dónde sale ese 4?* $_{aAve}$
46.	S7:	Porque es el total de lados, ¿no?
47.	Emma:	*¿Cuántos lados tiene la moneda? ¿4 lados?* $_{Red}$
48.	S7:	No, pero si son 2 monedas.
49.	Emma:	*No, es que esto no es dos monedas es la segunda moneda* $_{aDesRel}$. *Entonces ¿cómo sería?* $_{bRet}$
50.	S8:	Profe quedaría 2 sobre 2.
51.	Emma:	*Quedaría 2 sobre 2, eso dice S8* $_{aRep}$, *¿quién dice otro?* $_{bTrn}$
52.	S3:	Profe pero ¿sería otra vez el procedimiento anterior?
53.	Emma:	*Exactamente* $_{Apr}$.
54.	S3:	Es lo mismo.
55.	Emma:	*¿Lo mismo? ¿O sea 1/2?* $_{RepRet}$
56.	S3:	Si [varias estudiantes responden con ella]
57.	Emma:	*¿Qué dice la instrucción?* $_{aRet}$ *Devolvámonos a la instrucción, volvamos a leer la instrucción* $_{bRedRet}$.
58.	S9:	[Leyendo] Esa moneda tiene dos caras.
59.	Emma:	*¿Cuántos lados tiene una moneda? 2 y me está diciendo que tiene dos caras o sea ¿Que tiene sello?, no* $_{aRet}$. *La respuesta es la que dijo S8, será 2 sobre 2* $_{bRet}$ *¿Por qué? Porque es que tiene dos lados la moneda y me están diciendo que de esos dos lados los dos lados son caras* $_{cExp}$. *¿Hay probabilidad de sacar sello? No, entonces esta sería 0* $_{dExpRet}$. *O sea ¿qué es un evento...?* $_{eAve}$

60.	S2:	Seguro.
61.	Emma:	*¿Seguro?* $_{Des}$
62.	S2:	Pues no va a sacar sello.
63.	S:	¡Imposible!
64.	Emma:	*Ahh o sea es seguro que no va a sacar sello* $_{Ret}$.
65.	S:	[Risas]
66.	S7:	Profe yo no entendí.
67.	Emma:	*Voy a volver a decir, recuerden que estamos mirando moneda por moneda, entonces si miramos la primera moneda* $_{aRepRel}$, *¿qué pasaba con la primera moneda?* $_{bRet}$
68.	S3:	Es corriente.
69.	Emma:	*Es una moneda corriente* $_{aApr}$, *o sea que tiene cara y sello como cualquier moneda* $_{bExp}$. *Ahora vamos a mirar la segunda moneda* $_{cRet}$.
70.	S3:	[Indica que ya entendió]
71.	Emma:	*Entonces, en la segunda moneda la instrucción me estaba diciendo la situación, que la segunda moneda tiene dos caras, no tiene sello, eso quiere decir que hay dos lados de la moneda, cierto. Pero resulta que esos dos lados de la moneda, los dos son cara, entonces por eso es 2 sobre 2, ¿qué pasa con el sello? La probabilidad es 0 ¿por qué? No hay sello en la moneda, listo* $_{Ret}$.

Dado lo particular del enunciado de la tarea “Una caja contiene 3 monedas, una moneda es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es de 1/3…”, este episodio ilustra cómo la profesora, en su argumentación, intenta no solo dar respuesta a una pregunta, sino también permitir cierta comprensión de la tarea. Las características de la dimensión comunicativa, interaccional y epistémica son presentadas en las Tablas 54, 55 y 56.

Tabla 54: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E6.3

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para redireccionar la intervención de un estudiante. [39b, 41b] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [43a, 69a] ▪ Plantear aseveración para traducir la intervención de un estudiante. [43b] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención anterior. [43c, 59c, 69b] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [43d, 49b, 69c] ▪ Plantear aseveración para desaprobar y replantear la intervención de un estudiante. [49a] ▪ Plantear aseveración para repetir la intervención de un estudiante. [51a]

	▪ Plantear aseveración para redireccionar y retomar la indicación de la tarea. [57b] ▪ Plantear aseveración para retomar intervención anterior y construir sobre ella. [59a, 64] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la situación que originó la intervención del profesor. [59b] ▪ Plantear aseveración para ampliar y retomar la intervención de un estudiante. [59d] ▪ Plantear aseveración para repetir y replantear intervención anterior. [67a] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la tarea. [71]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el siguiente paso a realizar en el procedimiento de solución de la tarea. [35] ▪ Plantear pregunta para desaprobar la intervención de un estudiante. [37, 61] ▪ Plantear pregunta para retomar y explorar intervención anterior. [43e] ▪ Plantear pregunta para aprobar y explorar la intervención de un estudiante. [45] ▪ Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante. [47] ▪ Plantear pregunta para transferir la intervención de un estudiante a los demás estudiantes. [51b] ▪ Plantear pregunta para repetir y retomar intervención anterior. [55] ▪ Plantear pregunta para retomar indicación de la tarea. [57a] ▪ Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores. [59e] ▪ Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido antes en la misma lección. [67b]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante. [39a, 41a] ▪ Utilizar expresión para aprobar la intervención de un estudiante. [53]

En este episodio, las acciones de Emma responden a las intervenciones realizadas por las estudiantes, con las cuales ellas no llegaban a la respuesta que la profesora esperaba, referentes a una pregunta inicial suya, en [35]. Aunque Emma intenta orientar a las estudiantes a través de diferentes aseveraciones, preguntas y expresiones, no es sino hasta el cierre, esto es la intervención [71], que logra presentar y convencer a las estudiantes de por qué la probabilidad es 0. Emma parece percatarse de que los errores de las estudiantes, están referidos al grado de dificultad de la tarea y a lo complejo que puede resultar para las estudiantes el imaginarse una situación de este tipo, que es alejada de su realidad.

Tabla 55: Características de la dimensión interaccional. Episodio E6.3

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 55, 57, 59, 61] ▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [35, 43, 45, 47, 49, 51, 55, 57, 59, 61, 64, 67, 69, 71] ▪ Invitar a los estudiantes a participar en la discusión de posibles respuestas de la tarea. [51b] ▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [67, 69]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [43, 59, 71] ▪ Persuadir a los estudiantes de errores en el procedimiento de solución de la tarea. [37, 57, 61]
Discutir	▪ Percatarse de errores en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [37, 39, 41, 49, 57, 61]

La dimensión interaccional en este episodio está representada en tres características: participación, convencer y discutir. El episodio hubiese podido terminar en [37] en una intervención de Emma en la cual exponga el error y justifique por qué no es correcto y presente la respuesta esperada, sin embargo es reiterativo en Emma cómo involucra, durante el desarrollo de las lecciones, a las estudiantes en la respuesta a preguntas; no es un discurso solo de ella, sino que está vinculado con su propósito de educar en matemáticas.

Tabla 56: Características de la dimensión epistémica. Episodio E6.3

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [59e, 71]
Tratamiento de errores	▪ Indicar error en el procedimiento de solución de la tarea. [37, 39, 41, 47, 49, 61] ▪ Asegurarse de que el error en el procedimiento de solución de la tarea haya sido superado. [43, 59, 71]
Procedimientos y respuestas	▪ Plantear procedimiento de solución de la tarea. [43, 49, 51, 55, 59, 67, 69, 71] ▪ Volver a expresar en otras palabras la respuesta de la tarea para responder a dudas de los estudiantes. [67, 69]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [43, 59, 71] ▪ Solicitar justificación ante una intervención (correcta o incorrecta) de un estudiante. [45, 49b]

	▪ Refutar la intervención de un estudiante. [39, 41, 49, 55, 61]

El tratamiento del objeto matemático al indicar un error, procedimientos y respuestas, y justificar y refutar, dan cuenta de las características de la dimensión epistémica en este episodio. Llama la atención el tratamiento del error durante el episodio, con el cual Emma se tomó el trabajo para que fueran las estudiantes mismas quienes se percataran del mismo.

Se nombran como propósitos de la argumentación de Emma en este episodio: refutar intervenciones de las estudiantes, asociadas al procedimiento de solución de la tarea [37, 39, 41], buscar la comprensión de la tarea utilizando afirmaciones o refutaciones [41, 43, 45, 47, 57, 59, 69], resolver preguntas de las estudiantes o sus propias preguntas [39, 41, 43, 53, 67, 71], aclarar procedimiento de solución de la tarea [39, 41], puntualizar en las propiedades del objeto matemático involucrado en el procedimiento de solución de la tarea [51] y discutir tareas en las que pueda haber dificultades en su comprensión [43, 47, 51, 57, 69].

Transcripción 18: Episodio E6.4

99.	S8:	Profe como dice que la segunda moneda tiene dos caras, entonces esa S del sello no se cambiaría por otra C y entraría en lo que se tiene que contar.
100.	S:	¿Qué?
101.	Emma:	*Lo que S8 está mencionado es que yo podría dejar acá en la segunda moneda [señala el diagrama de árbol en la segunda rama] que tiene cara y tiene cara, esto sería ½ y esta sería ½* ***Rel***.
102.	S9:	O sea que la S de abajo si se cambiaría por la C y entraría en lo que se tiene que contar.
103.	Emma:	*Si lo puedes hacer* ***aApr****, esta forma de representar [Ps=0/2, Pc=2/2] y esta [Pc=1/2, Pc= ½] son válidas, en las dos el sello no tiene cabida es un evento imposible, entonces lo puedes representar de cualquiera de las dos formas* ***bExp****, muchas gracias S8 por tu apreciación* ***cRet*** [...]

La intervención de una estudiante, que parece no ser comprendida por las demás estudiantes, marca el inicio de este episodio, en el cual Emma debe argumentarles por qué es posible lo que la estudiante afirma. Las Tablas 57, 58 y 59 dan cuenta de las características de la argumentación en este episodio.

Tabla 57: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E6.4

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para replantear la intervención de un estudiante. [101] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [103a] ▪ Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante. [103b] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención de un estudiante. [103c]

Tabla 58: Características de la dimensión interaccional. Episodio E6.4

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [101, 103]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la intervención de un estudiante. [101, 103]

Tabla 59: Características de la dimensión epistémica. Episodio E6.4

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [103b]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [101, 103]

Llama la atención en este episodio la acción de convencer a las estudiantes de la intervención de una estudiante y cómo el validar aseveraciones presentadas por los estudiantes es el propósito educativo de Emma en esta situación puntual.

Dado el contexto en el cual tiene lugar la lección, esto es una clase habitual en la cual la profesora explica y discute una tarea con sus estudiantes, se observan en algunos turnos, intervenciones de las estudiantes y de la misma profesora que activan la argumentación y que han sido catalogadas como intervenciones argumentativas. En [6.1] y [6.3] la respuesta *equivocada* de una estudiante; en [6.2] preguntas y respuestas de las estudiantes, seguidas por la justificación de

Emma; y en [6.4] la validación de una aseveración de una estudiante. Llama la atención en esta lección, que en [6.2] Emma declara explícitamente en el turno [21b] que hará la *demostración* de por qué la probabilidad máxima de un evento es 1; se reconoce como valioso el intento que hace Emma por incluir en su discurso y en su práctica de clase dicho aspecto. Además de lo anterior, las oportunidades de participación también podrían ser reconocidas como condición que activó la argumentación, ya que es reiterativa la acción de convencer, en este caso de la respuesta a una pregunta o tarea. Se resalta, también, cómo Emma trata los errores, discutiéndolos con sus estudiantes, dejando ver la intención educativa y, por supuesto, una condición que activa la argumentación: tratar los errores de manera que puedan ser superados y tratar de que no vuelvan a presentarse.

Lección 6.

En esta lección se analiza la Tarea E7 mostrada en la Figura 18 y el Episodio E7.1 señalado en la Transcripción 19.

Tarea E7. Graficar la parábola, cuya ecuación es $y = \frac{x^2}{8}$. Luego determinar el vértice, el foco y la directriz.

Figura 18: Tarea E7

Transcripción 19: Episodio E7.1

53.	Emma:	[…] *Ese punto F me está indicando el foco, que era una de las cosas que me estaban pidiendo en el ejercicio, luego me dicen que tengo que ubicar la recta y = -2* ***a***
54.	S1:	¿Se le agregaría un 0?
55.	Emma:	*¿Se le agregaría un 0?* ***aRep*** *¿dónde?... Un 0, pero no entiendo ¿dónde? ¿cómo así?* ***bRetAve***

56.	S:	[Murmullos]
57.	Emma:	*¡Ah!* $_{aRet}$ Es que tenemos que dar una distinción. *Esto es una coordenada y esto es una recta [lo indica en el tablero]* $_{bRed}$. *Esta recta como tal yo la tengo que graficar. Nosotras en trigonometría, al principio del año graficamos 21 funciones y resulta que en esas funciones encontramos también este tipo de gráficas* $_{cExp}$, *¿dónde estaría esta gráfica?* $_{dAve}$ *[haciendo referencia a* $y = -2$*]. Si yo voy a graficar, a mí me dicen que grafique esto [señala y = -2], yo tengo que tabular* x *y* y. *Si yo tengo que* x *vale... supongamos -3, si yo remplazo -3 acá [señala y = -2]* $_{eExp}$ *¿qué pasa?* $_{fAve}$
58.	S:	[Se muestran confundidas]
59.	Emma:	*Cuando* x *es igual a -3 ¿qué pasa con* y*?* $_{aRetAve}$ *Esta es la función entonces* $_{bRet}$…
60.	S:	[Siguen confundidas]
61.	S2:	Ah… en paréntesis por… No, no mentiras… mentiras…así no es
62.	Emma:	*A ver, devolvámonos a algo. Cuando yo estoy tabulando, yo cojo la función que me están dando y empiezo a remplazar los números que estoy escogiendo. Entonces, esto es lo mismo que tener* $y = \frac{x^2}{8}$, *si yo digo que* x *es igual a -5, entonces yo pongo* $y =$*...* $_{aRed}$ *¿en vez de poner* x *que voy a poner?* $_{bAve}$
63.	S:	-5.
64.	Emma:	*-5 a la 2 sobre 8*$_{aRel}$. *Hago las operaciones y esto me dio 3,1. Acá, yo estoy diciendo que voy a graficar esto [señala y=-2] voy a graficar esta parte. Cuando yo tengo que graficar, siempre voy a escoger unos números en X, que es mi variable independiente y voy a mirar qué pasa entonces con Y. Aquí me dice que lo que tengo que graficar es* $y = -2$, *resulta que yo escogí en* x *el -3 ¿dónde voy a remplazar el -3 acá? ¿Tengo dónde remplazarlo? ¿Entonces qué va a pasar con* y*? ¿Cuánto me da? Me da -2, si no tengo donde remplazarla, o sea que cuando* x *vale -3* y $_{bExpRed}$ *¿cuánto vale?* $_{cAve}$
65.	S:	-2.
66.	Emma:	*Me da -2* $_{aApr}$, *¿Qué pasa si yo pongo 4?*$_{bAve}$
67.	S:	-2.
68.	Emma:	*Me da -2* $_{aApr}$. *Lo que me está diciendo esto, es que yo escojo unos números, así como lo hago acá y esos números los estoy remplazando en la función* $_{bRed}$, *¿acá tengo donde remplazar?* $_{cAve}$
69.	S1:	Porque no hay donde remplazarlos en la función…
70.	Emma:	*No tengo donde remplazarlo* $_{aApr}$, *porque mira que acá no me están poniendo la variable de* x, *me están diciendo que* y *siempre va a ser igual a -2, no importa el número que pongas* y *siempre es -2* $_{bExp}$. *Entonces, recuerden que nosotras lo vimos, esta gráfica daba así [hace la recta en el plano cartesiano] ¿si recuerdan?... Que había unas que nos daban de manera horizontal y otras que nos daban de manera vertical. Si a mí me dicen ¿cuáles serían de manera vertical? Si a mí me dicen por ejemplo* $x = -5$, *entonces ¿por dónde va a pasar la línea recta?... por el -5, cierto. Acá, en este caso nos están diciendo que* $y = -2$, *o sea que no importa el valor de* x, y *siempre va a ser -2. Entonces ya hice la recta que me están pidiendo* $_{cRet}$.

Llama la atención, cómo un episodio que pareciera fuera de explicación, logra convertirse en un episodio donde puede reconocerse la argumentación de la profesora. Una posible respuesta de Emma en [55] pudo haber sido el expresar a la estudiante el error, pues la recta remite a un crecimiento constante, pero Emma no asume esa posición y, por el contrario, utiliza esa intervención para abrir el espacio a la participación de las estudiantes. Las características de las dimensiones de análisis son especificadas en las Tablas 60, 61 y 62.

Tabla 60: Características de la dimensión comunicativa. Episodio E7.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [53] ▪ Plantear aseveración para redireccionar la intervención de un estudiante. [57b, 68b] ▪ Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [57c-e, 70b] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [59b, 62a] ▪ Plantear aseveración para expandir y redireccionar la situación que originó la intervención del profesor. [64b] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [66a, 68a, 70a] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la tarea.
Preguntas	▪ Plantear pregunta para repetir la intervención de un estudiante. [55a] ▪ Plantear pregunta para retomar y examinar la intervención de un estudiante. [55b] ▪ Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante. [57d-f, 62b, 64c, 66b, 68c] ▪ Plantear pregunta para retomar y explorar intervención anterior. [59a]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para referirse a intervención del estudiante. [57a]

Tabla 61: Características de la dimensión interaccional. Episodio E7.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [55, 57a-b] ▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por el mismo o por un estudiante. [57c-d-e-f, 59, 62, 64, 66, 68, 70] ▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [53, 57, 59, 62, 64, 66, 68, 70]
Medios y normas de clase	▪ Utilizar los medios disponibles en clase (tablero, computador) para apoyar justificación. [57b-c-e, 70b]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por el mismo o por un estudiante. [57b-c, 64, 70b]

Tabla 62. Características de la dimensión epistémica. Episodio E7.1

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [57b-c, 62, 64b, 68b, 70b] ▪ Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea. [70b]
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [62, 64, 68b]
Procedimientos y respuestas	▪ Plantear procedimiento de solución de la tarea. [57d-e, 62a, 64b, 68b, 70b]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [57b-c-e, 62a, 64b, 68b, 70b]

En este episodio, mientras Emma invita a sus estudiantes a graficar la recta $y = -2$, tiene lugar una intervención de una estudiante que parece ver extraña y tal vez no tan familiar la ecuación de la recta con las que han sido trabajadas en lecciones anteriores. Parece ser que la estudiante se percata de la ausencia de la x, por ello sugiere agregarle un cero, el cual podría, en palabras de la estudiante, “reemplazar esa x”. En un primer momento la pregunta desconcierta a Emma, pues no logra entender qué quiere decir la estudiante con esa intervención, sin embargo, en el turno siguiente, Emma se percata de la dificultad manifestada en la pregunta y se vale de su argumentación para justificar y convencer a sus estudiantes de la diferencia entre los objetos recta y coordenada.

Es precisamente esta pregunta de la estudiante la que activa la argumentación en Emma en el episodio y en este caso en la Lección 6. Es interesante observar cómo Emma no asume la pregunta como un error sino como una oportunidad de participación, con la cual logra vincular a sus estudiantes en la discusión de esa pregunta y convencerlas de la distinción entre dos objetos matemáticos, que al parecer son confusos.

En lo que respecta a los propósitos de la argumentación, en el episodio se distinguen: resolver preguntas de los estudiantes o sus propias preguntas [55, 70], puntualizar en las propiedades del objeto matemático involucrado en el procedimiento de solución de la tarea [57, 62, 64], tratar con dificultades en la representación del objeto matemático asociado al procedimiento de solución de la tarea [57, 59, 62, 64, 68], discutir tareas en las cuales puede haber dificultades en su comprensión [57, 59, 62, 64], y buscar la comprensión de la tarea utilizando afirmaciones o refutaciones [64a, 66a, 70a-b].

La clase de Daniel

Como ya se precisó en el Capítulo 3, la clase de Daniel corresponde a un curso de noveno grado, en donde se observaron cuatro lecciones, en las cuales se identificaron tres tareas y se seleccionaron tres episodios de análisis. A continuación se presenta el análisis de cada uno de ellos.

Lección 2.

En esta lección se analiza la Tarea D2 mostrada en la Figura 19 y el Episodio D2.1 señalado en la Transcripción 20.

Tarea D2. Grafique la función $y = 0.5^{x+7} - 4$. Luego indique los tramos crecientes y decrecientes, así como los máximos y mínimos.

Figura 19: Tarea D2.

Transcripción 20: Episodio D2.1

83.	Daniel:	[…] *¿Y qué indica que esto sea decimal?* ***aAve*** *[Señala la base de la función exponencial que es 0.5]* ***bAve*** *¿Hacia dónde va? ¿Hacia allá o hacia acá?* ***cAve*** [Haciendo referencia a la derecha o a la izquierda]
84.	S:	[Hacen diferentes gestos con sus manos, indicado la posible dirección]
85.	S1:	Profe, de derecha a izquierda, ¿no?
86.	Daniel:	*¿S1 así?* ***Tra*** [El profesor hace la gráfica en el tablero]
87.	S:	[Algunos manifiestan estar a favor de la intervención de S1]
88.	Daniel:	*¿Todos de acuerdo ahí?* ***Ave***

89.	S:	Sí.
90.	Daniel:	*Pues no* $_{aDes}$*, ¿por qué?* $_{bAve}$
91.	S:	[Algunos estudiantes] Es menor que 1.
92.	Daniel:	*Cuando es mayor que 1 es de esta manera [Señala el tablero] que sería creciente y cuando es un número decimal entre 0 y 1 sería me vengo pegadito por la asíntota pego en el punto y subo. Entonces esa [La gráfica] la corrigen* $_{AprExp}$ […]

La intervención argumentativa que marca el inicio de este episodio es expresada por Daniel, quien adelanta la solución de una tarea que había sido abordada por los estudiantes en la lección anterior. Daniel hace una pregunta con la intención de explorar el grado de apropiación de procedimientos que habían sido abordados en lecciones anteriores. Los estudiantes presentan algunas respuestas, a las cuales Daniel insiste si en verdad están seguros, dada la respuesta afirmativa, declara el error y en el cierre justifica por qué la respuesta no es la correcta. Las Tablas 63, 64 y 65 presentan las características en cada una de las dimensiones.

Tabla 63: Características de la dimensión comunicativa. Episodio D2.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para desaprobar la intervención de un estudiante. [90a] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [92]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante. [83a-c, 88, 90b] ▪ Plantear pregunta para traducir la intervención de un estudiante. [86]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar gesto para explorar la intervención de un estudiante. [83b]

En esta lección se reconocen diferentes preguntas, de un lado una asociada a la apropiación de conceptos [83c], que de hecho marca el inicio del episodio, Daniel parece estar interesado en observar el grado de comprensión y apropiación de los conceptos que ha trabajado en clase; de otro lado, las asociadas a la intervención del estudiante [86, 88], Daniel no indica de manera inmediata el error en la intervención del estudiante, espera tal vez que algún otro estudiante se percate de la situación, lo cual no sucede.

Tabla 64: Características de la dimensión interaccional. Episodio D2.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Invitar a los estudiantes a participar en la discusión de posibles respuestas de la tarea. [83, 86, 88] ▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [83, 86]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante. [92]
Discutir	▪ Discutir respuesta de una determinada tarea con los estudiantes. [83, 86, 88, 90, 92]

Acciones como invitar a participar, convencer de la respuesta a una pregunta y discutir una respuesta, hacen parte de las características de índole interaccional de Daniel en este episodio. Parece ser, además, una característica de Daniel no indicar un error de manera automática, sino que da el espacio para que tal vez otro estudiante lo haga explícito, lo cual es precedido de la respectiva refutación y justificación.

Tabla 65: Características de la dimensión epistémica. Episodio D2.1

Característica	***Acciones***
Tratamiento del objeto matemático	▪ Plantear propiedades del objeto matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [83, 92]
Procedimientos y respuestas	▪ Verificar procedimiento de solución de la tarea. [83, 86, 88, 90, 92]
Justificar o refutar	▪ Solicitar justificación ante una intervención (correcta o incorrecta) de un estudiante. [90b] ▪ Presentar justificación para el uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta. [92] ▪ Refutar la intervención de un estudiante. [90a]

En cuanto a las características de la dimensión epistémica, se refiere en este episodio: tratamiento del objeto matemático *función*, los procedimientos y respuestas, así como justificar y refutar. Daniel parece estar interesado en que los estudiantes se percaten del error, pero no es hasta la intervención [90] que los estudiantes parecen haber darse dato cuenta de ello.

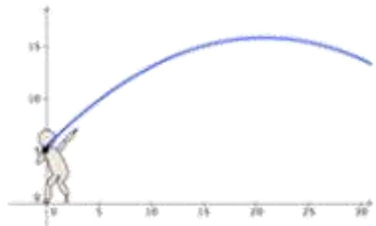
Prever posibles errores en el procedimiento de solución de la tarea en [83], revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea abordados en lecciones anteriores en [83], tratar con dificultades en la representación del objeto matemático asociado a la tarea en [86 y 92] y refutar respuestas que los estudiantes presentan de la tarea en [90], son reconocidos como los propósitos de la argumentación en este episodio.

Con relación a las condiciones que activaron la argumentación en la lección, se distingue de un lado una pregunta de Daniel y las intervenciones que esta desencadena, y de otro, el conocimiento profesional de Daniel, quien intenta poner en discusión conceptos ya trabajados en lecciones anteriores. Aunque realiza un trabajo de verificar respuestas, parece adelantarse a posibles dificultades que podrían enfrentar los estudiantes con conceptos involucrados en la solución de la tarea.

Lección 3.

En esta lección se analiza la Tarea D3 mostrada en la Figura 20 y el Episodio D3.1 señalado en la Transcripción 21.

Tarea D3. Un lanzador de bala normalmente describe una parábola en el recorrido del objeto como se muestra en la siguiente gráfica.



La trayectoria exacta de este lanzamiento es descrito por la expresión $y = -0.0241x^2 + x + 5.5$. Teniendo en cuenta que la distancia se toma en pies:

a. Calcula la altura máxima de la bala.
b. Calcula la longitud que recorre la bala

Figura 20: Tarea D3

Transcripción 21: Episodio D3.1

16.	Daniel:	[…] *Bueno muchachos vamos hacer el de la bala, porque hay varios resultados diferentes* $_{\mathbf{Ave}}$.
17.	S1:	El de nosotros está bueno.
18.	Daniel:	*Y aparentemente lo están haciendo bien* $_{\mathbf{aApr}}$. *Entonces miremos a ver… Aparentemente pues… puede que se equivoquen en el uso de la calculadora o en los signos. Entonces vamos a mirar, listo. Atentos allá S2 pues para que comparemos los resultados y miremos. Ojo ahí S3 pues. Entonces, ¿qué dice el problema? Inicialmente teníamos que hay alguien, que va a lanzar una bala, cierto [Mientras habla hace un dibujo de la trayectoria de la bala en el tablero], y va a lanzar esta bala, que va a hacer un recorrido parabólico, cierto. No está terminado [Se refiere al recorrido de la bala en el plano cartesiano que él está dibujando], y le están preguntando por la parte más alta y donde vendría a pegar la bala sobre el piso [Termina de dibujar el recorrido de la bala mientras dice esto], que sería el intercepto con* x. *Para la parte del vértice ¿cómo lo hicieron?... Ah, primero díctenme la ecuación. La ecuación que haya acá, esa del ladito* $_{\mathbf{bRetRed}}$, *¿y es igual a qué?* $_{\mathbf{cAve}}$
19.	S1:	$-0.0241x^2 + x + 5.5$
20.	Daniel:	*Ese 5.5 es en pies y es la altura de la persona cuando va a lanzar la bala, cierto* $_{\mathbf{aRet}}$. *Entonces para la altura máxima de la bala ¿que tenemos? … ¿Hallar el vértice en* x*?* $_{\mathbf{bRet}}$*… Entonces, ya tenemos la fórmula para el vértice [Escribe la formula en el tablero* $V_x = -\frac{b}{2a}$*].Sabemos que, el que está acompañando al término cuadrático es a, el que está acompañando al termino lineal es b y el*

		independiente es c. Entonces remplazo, vértice en x seria menos b , que en este caso es 1, dos $_{\textbf{cRetExp}}$ *¿por?* $_{\textbf{d}}$
21.	S1:	-0.0241
22.	Daniel:	*Listo* $_{\textbf{aApr}}$*. Y, ¿cuánto les da ese resultado en la parte de abajo?* $_{\textbf{b}}$
23.	S1:	-0.0482
24.	Daniel:	*¿Y la división de estos dos?* $_{\textbf{a}}$ [Haciendo referencia a 1 y -0.0482]
25.	S1:	20.74
26.	Daniel:	*S4, ¿a ustedes les dio ese número?* $_{\textbf{Ave}}$
27.	S4:	¿Cuál?
28.	Daniel:	*20.74* $_{\textbf{a}}$
29.	S4-S:	[La estudiante dice que sí y los demás estudiantes también afirman tener el mismo resultado]
30.	Daniel:	*Entonces, hasta ahí todos vamos iguales. Ojo pues* $_{\textbf{aRet}}$*. Para el vértice en y ¿qué hay que hacer S5? ¿Qué hay que hacer con el vértice en y?* $_{\textbf{b}}$
31.	S5:	Reemplazar.
32.	Daniel:	*Reemplazar* $_{\textbf{Apr}}$*.*
33.	S5:	Entonces $-0.0241(20.74)^2 + 1(20.74) + 5.5$
34.	Daniel:	*¿Y cuánto les dio ese vértice en Y? ¿15 punto qué?* $_{\textbf{aAve}}$ *S4 el suyo* $_{\textbf{bAve}}$*…*
35.	S4:	15.87
36.	Daniel:	*15.87. Esta es la altura máxima que alcanzo la bala, cierto* $_{\textbf{aApr}}$*. ¿Y después que les estaban pidiendo?* $_{\textbf{b}}$ *La distancia que recorre la bala, o sea este punto [Indica un punto en el dibujo del tablero]. Este punto es el intercepto, listo* $_{\textbf{c}}$*. ¿Cómo lo vamos hallar?* $_{\textbf{d}}$ *Con la fórmula del bachiller, cierto* $_{\textbf{eRet}}$*. Entonces [Escribe la fórmula del bachiller en el tablero], ¿cómo sería la remplazada ahí, S3?* $_{\textbf{f}}$
37.	S3:	-1
38.	Daniel:	*1 más o menos* $_{\textbf{aAprExp}}$*… ¿Cuál?* $_{\textbf{bAve}}$
39.	S3:	1 a la 2.
40.	Daniel:	*1 a la 2* $_{\textbf{Apr}}$*.*
41.	S3:	-4 por -0.0241 por 5.5
42.	Daniel:	*Listo, ¿hasta aquí todos lo llevan así?* $_{\textbf{Ave}}$
43.	S:	Si.
44.	Daniel:	*Sobre 2 por a , ¿a qué es?* $_{\textbf{bAve}}$
45.	S3:	-0.0241
46.	Daniel:	*Listo, menos por más, menos* $_{\textbf{aAprExp}}$*. O sea que, ese 1 es negativo, más o menos 1 al cuadrado, 1* $_{\textbf{b}}$ *¿Cuánto me da la multiplicación de esto? [Habla de los factores que están en la cantidad subradical de la formula] ¿Cuánto le da a S6?* $_{\textbf{cAve}}$
47.	S6:	0.5
48.	S7:	0.53
49.	Daniel:	*Por eso es que difieren los resultados, porque uno lo tomo 0.5, otro 0.53* $_{\textbf{aRet}}$*… Pero ustedes [Señala a un grupo que no ha dado la respuesta] ¿qué les dio? ¿0.53? [No recibe respuesta]* $_{\textbf{bAve}}$ *Ahí S8 es donde no les está cuadrando ese dato, hicieron mal esa multiplicación* $_{\textbf{c}}$*. ¿Y en la parte de abajo cuanto les da?* $_{\textbf{dAve}}$
50.	S8:	-0.04
51.	Daniel:	*Listo, ¿van bien hasta ahí?* $_{\textbf{aAve}}$*... Ustedes no, ustedes si, ustedes si, ustedes si* $_{\textbf{bRet}}$ *[Indica con la mano]* $_{\textbf{cRet}}$*. ¿Cuál es la cosa entonces? ¿Cuánto me da la parte de adentro de la raíz?* $_{\textbf{d}}$
52.	S:	1.53
53.	Daniel:	*1,53, en uno positivo y en el otro negativo [Escribe en el tablero: $x1 = \frac{-1+1.53}{-0.04}$ $x2 = \frac{-1-1.53}{-0.04}$] listo* $_{\textbf{aAprExp}}$*. ¿Cuánto les da esta parte? ¿S3? ¿No lo tienes? ¿S6?* $_{\textbf{bAve}}$

54. S6: -5

55. Daniel: *¿Y ese de allá?* $_{Ave}$

56. S6: 55

57. Daniel: *55* $_{aApr}$. *S2, ¿cuánto les dio a ustedes?* $_{bAve}$

58. S2: No, lo tenemos malo.

59. Daniel: *¡No!* $_{aRet}$*… puede que no esté malo, eso es lo que les estoy mostrando* $_{bRetRed}$. *Pero, ¿fue que se equivocaron o lo hicieron mal? o ¿qué paso ahí?* $_{cAve}$

60. S2: No, profe nos equivocamos.

61. Daniel: *¡Ah! Pero, ¿si les da 1.53? listo. ¿Y ustedes S3? ¿No lo habían terminado?* $_{bAve}$

62. S1. Profe, nosotros no tenemos esos números.

63. Daniel: *¿Cuáles números tienen ustedes?* $_{a}$*... Entonces verifiquen, porque entonces S2 lo está cambiando y puede que esté bueno* $_{bRet}$ *¿Cuánto es la raíz cuadrada de 1.53?* $_{cAve}$

64. S: 1.23

65. Daniel: *Listo, 1.23 o 1.2, cierto. Sino que unos se están robando esos decimales y otros no, esa es la única diferencia* $_{aAprExp}$. *S2, ¿cuánto les había dado a ustedes acá?* $_{bAve}$

66. S2: 4.7

67. Daniel: *4.7* $_{aApr}$*… ¿pero negativo o qué?* $_{bAve}$

68. S2: Negativo.

69. Daniel: *Negativo, listo* $_{aApr}$. *¿Y en esta cuánto?* $_{bAve}$

70. S2: 46.2

71. Daniel: *46.2, positivo, listo* $_{aAprExp}$. *¿Algún otro equipo le dio algo diferente? [Pasa por los equipos verificando los procedimientos]* $_{bAve}$ *Miren que estos dos resultados no son iguales, pero ustedes están tomando todos los decimales y ustedes no. Entonces, es aceptable por la toma de los decimales, ustedes estaban enredados desde antes [Se lo dice a un equipo] y ustedes terminen a ver qué resultados les da [Refiriéndose a otro equipo]. A ustedes puede que varíe un poquito pero más o menos debe estar por el lado de -5 y por el lado más o menos de 50 y algo… -5.75 [Lo dice a un tercer equipo]* $_{cRet}$ *¿Y a ustedes cuanto les dio? [A un cuarto equipo]* $_{dAve}$ *Miren pues, tres resultados diferentes* $_{eRet}$ *¿Cómo escogemos cual está bueno o cuál esta malo? o ¿por qué todos están buenos?* $_{fRet}$ *Ojo pues muchachos, miren que son resultados muy cercanos, relativamente cercanos* $_{gRet}$. *¿Cuál es la diferencia?* $_{hAve}$*... Acostúmbrense a estandarizar las cifras en la calculadora, ustedes normalmente cogen una cifra después del punto [Refiriéndose al equipo de S1]* $_{iRet}$, *¿S2 ustedes cuantas?* $_{jAve}$

72. S2: 2

73. Daniel: 2 y ¿ustedes? [Pregunta al equipo de S8]

74. S8: 2

75. Daniel: *¿2?* $_{aRet}$ *Pero acá hay una diferencia entre estos dos [Señala los resultados que hay en el tablero], o en algunos les metieron más. Normalmente 2, pero en algunos tomaron más. Entonces miren, entre más cifras decimales tome usted, más cercana va a ser a la realidad de donde cayó, porque miren que más o menos está diciendo que cayó como por acá, entre 46.2… entre 55.75, o sea que más o menos la bala si cayó por ahí. ¿Cuál es la cuestión ahí? Entre más cifras decimales mejor la aproximación, listo* $_{bRetExp}$.

Este episodio es bien particular, Daniel se percata de respuestas diferentes a la tarea, lo cual marca el inicio del episodio, esto es precedido de diferentes aspectos que son resaltados en la Tablas 66, 67 y 68. La diferencia de opinión es enunciada por el profesor en [16] quien al parecer ha observado respuestas diferentes en el trabajo de los estudiantes.

Tabla 66: Características de la dimensión comunicativa. Episodio D3.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para examinar la intervención de un estudiante. [16] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [18a, 32, 40, 57a, 67a, 69a] ▪ Plantear aseveración para retomar y redireccionar intervención anterior. [18b, 59b] ▪ Plantear aseveración para referirse a la descripción de la tarea. [20a] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y construir sobre ella. [20c] ▪ Plantear aseveración para referirse a procedimiento realizado antes. [30a, 36e] ▪ Plantear aseveración para examinar la intervención de un estudiante. [34b] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención del estudiante y dar la respuesta a la tarea. [36a] ▪ Plantear aseveración para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [36c] ▪ Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante. [38a, 46a, 53a, 65a, 71a] ▪ Plantear aseveración para señalar el paso a seguir en el procedimiento de solución de la tarea. [44a, 46b, 51d] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención de un estudiante y señalar una posible respuesta a la situación que originó la intervención inicial. [49a] ▪ Plantear aseveración para señalar error en el procedimiento de solución de la tarea. [49c] ▪ Plantear aseveración para referirse a la respuesta de un estudiante. [51b] ▪ Plantear aseveración para referirse a la intervención anterior y sugerir un posible error. [63b] ▪ Plantear aseveración para retomar las diferentes respuestas y presentar la solución a la situación que originó la intervención inicial. [71c] ▪ Plantear aseveración para referirse a procedimiento realizado antes. [71i] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [71e-g] ▪ Plantear aseveración para retomar y expandir la intervención de un estudiante. [75b]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante. [18c, 38b, 44b, 46c, 49b-d, 51a, 53b, 55, 57b, 59c, 61b, 63c, 65b, 67b, 69b, 71b-d-h-j] ▪ Plantear pregunta para retomar indicación de la tarea. [20b]

	▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el siguiente paso a realizar en el procedimiento de solución de la tarea. [20d, 36b-d] ▪ Plantear pregunta para verificar respuestas de los estudiantes. [22b, 24] ▪ Plantear pregunta para sondear la intervención de un estudiante. [26, 30b] ▪ Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [30b, 36f] ▪ Plantear pregunta para sondear el procedimiento de solución de la tarea. [42] ▪ Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante. [63a] ▪ Plantear pregunta para retomar intervención anterior y presentar posibles respuestas. [71f]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para aprobar la intervención de un estudiante. [22a] ▪ Utilizar gesto para referirse a la respuesta de un estudiante. [51c] ▪ Utilizar expresión para referirse a intervención del estudiante. [59a, 61a, 75a]

En este episodio pueden reconocerse diferentes aseveraciones y preguntas, con las cuales Daniel parece estar interesado en llevar a los estudiantes poco a poco a identificar errores en el procedimiento de solución de la tarea. Además de ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea, Daniel intenta llamarles la atención en el siguiente paso a seguir o en hacer notar un paso específico. Es un episodio donde la perspectiva participacionista del aprendizaje es observable, pues no es solo el profesor o los estudiantes quienes discuten la solución de una determinada tarea, sino que es una labor conjunta; y donde las acciones de Daniel apuntan a que los estudiantes adquieran cierta práctica, que les permita enfrentarse a otras tareas de este tipo.

Tabla 67: Características de la dimensión interaccional. Episodio D3.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Invitar a los estudiantes a compartir el procedimiento de solución de la tarea. [18b-c, 20d, 22b, 24, 26, 30b, 34b, 36b-d-f, 38b, 42, 46c, 49b-d, 51, 53b, 55, 57b, 59c, 61b, 63c, 65b, 67b, 69b, 71b-d-j] ▪ Invitar a los estudiantes a participar en la discusión de posibles respuestas de la tarea. [18b, 49, 51, 59, 63, 65a, 71, 75] ▪ Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [16, 18, 20, 22, 24, 26, 30, 34, 36, 38, 42m 44, 46, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73] ▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de la tarea. [16, 18b, 36a-b-e, 71, 75]
Medios y normas de clase	▪ Utilizar los medios disponibles en clase (tablero, computador) para apoyar justificación. [18b, 20c, 24, 36c-f, 46c, 53a, 75b]

	▪ Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por él mismo. [75b]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea. [71, 75] ▪ Persuadir a los estudiantes de errores en el procedimiento de solución de la tarea. [49c, 59, 65a]
Discutir	▪ Discutir respuesta de una determinada tarea con los estudiantes. [16, 18b, 49a-b-c, 71] ▪ Percatarse de errores en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [16, 18b, 49c, 51b, 63b, 65, 71c]

Las preguntas, aunque están dirigidas a todos los estudiantes, son planteadas para un equipo de estudiantes [26, 49d, 53b, 57b, 61b, 65b, 71j, 73] o para un estudiante en particular [30b, 34b, 36f, 46c], lo cual permite relacionar las preguntas con las características de la dimensión interaccional; parece ser que a Daniel, no solo le importa que los estudiantes corrijan respuestas erróneas, sino que todos sus estudiantes sean partícipes del procedimiento de solución de la tarea. Es interesante además, notar cómo Daniel trata de persuadir en tres intervenciones antes de convencer: (1) indicando un posible error [49c], (2) declarando la no posibilidad de un error [59] y (3) advirtiendo diferencias en los procedimientos empleados [65a]; logra convencer al final del episodio [71, 75], justo cuando señala de manera puntual los errores e indica la respuesta esperada de la tarea.

Tabla 68: Características de la dimensión epistémica. Episodio D3.1

Característica	***Acciones***
Retomar otras lecciones	▪ Retomar temas ya vistos para solucionar la tarea. [20c, 30b, 36c-e-f, 46c, 53b]
Tratamiento de errores	▪ Percatarse de un error en la respuesta de la tarea de un estudiante. [16, 65a, 63b] ▪ Percatarse de un posible error en la respuesta de un estudiante. [49a-b] ▪ Indicar error en el procedimiento de solución de la tarea. [71i, 75b] ▪ Asegurarse de que el error en el procedimiento de solución de la tarea haya sido superado. [75]
Procedimientos y respuestas	▪ Retomar procedimientos realizados antes para dar continuidad a la solución de la tarea. [18b, 20b, 30b, 36b-c-d-e-f, 53a] ▪ Presentar y validar respuesta de la tarea. [36a, 71, 75]

	▪ Verificar procedimiento de solución de la tarea. [18, 20, 22, 24, 26, 30, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71a]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [71, 75]

En este episodio se reconocen cuatro tipos de características dentro de la dimensión epistémica: retomar otras lecciones, tratamiento de errores, procedimientos y respuestas, y justificar o refutar. Se resalta cómo Daniel además de percatarse de un error en las respuestas de los estudiantes, se toma el tiempo necesario para asegurarse de que el error pueda ser superado, para ello durante el transcurso del episodio pregunta por las respuestas de momentos específicos del procedimiento, y es él quien al resolver la tarea en el tablero, actúa como fuente de verificación del procedimiento esperado.

La intervención argumentativa enunciada por Daniel en [16], quien encuentra diferentes respuestas a la tarea en los equipos de trabajo, es seguida de una serie de intervenciones, tanto de Daniel como de los estudiantes. En un cierre parcial [49], Daniel se da cuenta y expresa a los estudiantes el causante de las respuestas diferentes: continúa como inconveniente que los estudiantes tomen un mismo número de decimales, lo cual no permite tener una buena aproximación a la respuesta esperada. Lo anterior es ratificado en un segundo cierre parcial [71], en el cual, además, Daniel intenta llevar a sus estudiantes a la toma de una decisión que sea válida y cumpla con el propósito de dar respuesta a la tarea. Finalmente, en [75] Daniel presenta el cierre de la argumentación, expresando una conclusión respecto a la situación que originó la dificultad en la respuesta de la tarea y el episodio mismo.

De esta manera, entre el turno [16] y [75] se distinguen como propósitos de la argumentación de Daniel: aclarar procedimiento de solución de la tarea [16, 18, 20, 26, 36, 46], tratar con errores en el procedimiento de solución de la tarea [16, 49, 59], tratar con puntos de vista diferentes (respuestas diferentes) y que no coinciden con la respuesta esperada de la tarea [49, 51, 65, 71], discutir las respuestas diferentes de los estudiantes cuando resuelven la tarea [18, 30, 36], verificar respuestas de la tarea presentadas por los estudiantes [49, 63], presentar y justificar suposiciones respecto a las posibles respuestas de la tarea [49, 71], y mostrar la forma de acercarse a la comprensión de la tarea y al procedimiento de solución de la misma [71, 75].

En cuanto a las condiciones que activaron la argumentación, se advierten dos: el abordaje de la tarea y el conocimiento profesional. Aunque es una tarea cerrada con una respuesta esperada, llama la atención la manera cómo Daniel se vale de un aspecto particular en el procedimiento de solución de la tarea para retomar la solución de la misma de manera conjunta con los estudiantes, y así no señalar de manera lacónica un error, sino tomarse el tiempo para que sean los estudiantes mismos quienes se percaten de ello. Y, en cuanto al conocimiento profesional, se destaca que Daniel parece buscar la comprensión no solo de los conceptos asociados a la tarea, sino prever posibles dificultades en futuras tareas que requieran, en este caso, del uso de la calculadora y la aproximación en resultados. Es decir, parece ser un rasgo del conocimiento del profesor prever lecciones futuras, no solo está interesado en indicar un error en la respuesta de una tarea específica, sino que es consciente que la dificultad puede volver a presentarse, por ello se toma el trabajo de, paso a paso, resolver la tarea e indicar errores de los estudiantes en los diferentes equipos de trabajo.

Lección 4.

En esta lección se analiza la Tarea D4 mostrada en la Figura 21 y el Episodio D4.1 señalado en la Transcripción 22.

Tarea D4. La cantidad de bacterias en cierto cultivo aumenta de 600 a 1800 entre las 7 am y las 9 am suponiendo un crecimiento exponencial, la cantidad $\mathrm{f(t)}$ de bacterias t horas después de las 7 am está dada por $\mathrm{f(t)} = 600(3)^{\mathrm{t}/2}$. (A). Calcula la cantidad de bacterias en el cultivo a las 8 am, 10 am y 11 am. (B). Traza la gráfica de f para $0 \leq \mathrm{t} \leq 4$

Figura 21: Tarea D4

Transcripción 22: Episodio D4.1

7.	Daniel:	*Listo, y a la hora uno, cuando ustedes remplazaron ahí* $_{a}$*, ¿cuánto les dio?* $_{bAve}$
8.	S1:	¿En cuál?... ¿En 8?
9.	Daniel:	*Si* $_{Ret}$.
10.	S1:	1038
11	Daniel:	*1038* $_{aRep}$*… ¿A alguien le dio algo diferente?* $_{bAve}$
12.	S:	[Algunos responden 1039]
13.	Daniel:	*¿1039?* $_{Rep}$
14.	S:	[Aseveran]
15.	Daniel:	*Bueno, ¿1039 que?* $_{Ave}$
16.	S2:	Punto 23 [Haciendo referencia a 0.23]
17.	Daniel:	*En la hora dos* $_{Ave}$*…*
18.	S2:	1800
19.	S1:	Profe, pero por ejemplo a nosotros no nos daba que 1039 punto tatata… nos daba el número exacto.
20.	Daniel:	*¿Si? ¿Solamente así? ¿Será que la calculadora está configurada para aproximar?* $_{RetAve}$
21.	S:	[Lucen confusos]
22.	Daniel:	*¿Cuál es el resultado que sigue?* $_{Ave}$
23.	S:	[Todos excepto S1 dicen 3117.69. S1 dice 3114]
24.	Daniel:	*¿Y la última? [Haciendo referencia a las 11 am]* $_{Ave}$
25.	S:	[Todos excepto S1 dicen 5400]
26.	Daniel:	*5400, listo* $_{Apr}$. […]
31.	S1:	Profe vea, vea… [La estudiante llama a Daniel para mostrarle que la respuesta a uno de los valores en la función es 1038]. Mire que 1038…
29.	Daniel:	[Observa el procedimiento hecho en la calculadora, el cual, al parecer, está bien hecho. Luego pregunta a otro equipo] *¿Y a ustedes por qué les dio 1039?* $_{Ave}$ [A S2]
30.	S3:	Profe yo creo que es la misma respuesta, porque vea que dio punto 23 [Hace alusión a 0.23] entonces seria aproximado a 38.
31.	Daniel:	*Pero, no* $_{aDes}$*… ¡Ojo! ¡Ojo con eso!* $_{bDes}$ *Muéstreme el cálculo de ustedes [Se dirige al equipo de S2]* $_{cRet}$ *¿El cálculo a ustedes cuanto les dio? [Se lo pregunta a otro equipo]* $_{dAve}$
32.	S4:	600
33.	S:	[Lucen molestos ante la respuesta de S3]

34. Daniel: *No, pues sí, la primera da 600, pero, cuando calcularon la primera hora, o sea esta [Señala las 8 am]… Bueno, ojo pues acá* $_{aAprRed}$*, ¿cuál es otro valor?* $_{bAve}$
35. S1: A mí me dio 1038.
36. Daniel: *1038, listo* $_{aRep}$*. ¿Qué había que aproximar ahí?* $_{bAve}$
37. S: Nada.
38. Daniel: *¿Entonces qué paso ahí?* $_{RetAve}$
39. S5: Ellas la hicieron mal [Refiriéndose al equipo que tiene como respuesta 1038]
40. S1: Profe hágalo usted.
41. Daniel: *Hagámoslo entre todos pues otra vez* $_{aRet}$*. A ver, es 600 que multiplica a 3… Cuando son las 8 horas voy a remplazar a 1 en* t*, o sea que queda a la ½, sí o que* $_{bRel}$*. ¿Cuánto es ½ en equivalencia?* $_{cAve}$
42. S: 0.5
43. Daniel: *0.5, listo* $_{aApr}$*. Entonces, quiere decir, que esto es, 600 por 3 a la 0.5* $_{bRetExp}$*. Hágalo usted [a S1], hágalo usted [A S2] y hágalo usted [A S3], a ver qué fue lo que paso* $_{cAve}$ [Regresa al equipo de S1 y está atento que estén ingresando los datos bien en la calculadora] *¡Ah, fueron ustedes!* $_{d}$… [Se lo dice al equipo de S1]
44. S1: ¡Fue S6! [Su compañera de equipo]
45. Daniel: *Ya sabemos que fue los que paso, era un error de calculadora, que no elevo a la 0.5 la última parte lo dejo a la 1* $_{a}$*.*
46. S6: ¡Yo si lo eleve!
47. Daniel: *Hágalo pues como usted lo hizo, pero nos muestra no lo vaya a borrar, nos muestra que fue lo que hizo* $_{Ret}$*.*
48. S6: [Realiza la operación en la calculadora]
49. Daniel: *Bueno, eleve 3 a la 0.5* $_{a}$ *¿y que más hay que hacer ahí?* $_{bAve}$ *Eso es esta parte* $_{b}$ *[Indica en el tablero]* $_{c}$, por 600. *Multiplique pues por 600* $_{d}$*.*
50. S6: Pero, es que, ¿hay que poner todo ese número?
51. Daniel: *No necesariamente. Pero, usted sabe que la calculadora igual está cuadrando esa respuesta* $_{aDesRel}$*. Entonces por 600* $_{bRet}$*… [Observa la expresión de la estudiante y se ríe pues al parecer ya obtuvo el resultado]* $_{c}$*. La cosa fue que ella hizo esto [Señala el* $3^{1/2}$*] y le dio un decimal y se robó un montón de decimales, sí o qué* $_{d}$*.*
52. S6: Yo cogí el primero y los dos que siguen.
53 Daniel: *Aproximo a dos* $_{aApr}$*, pero ¿cuántos decimales tiene ese que acabo de hacer?* $_{bRetAve}$
54. S6: No, pues …
55. Daniel: *Igual la diferencia no era mucha, pues. Listo, niñas, ya igual estaba bien solo que te robaste decimales, pues* $_{Ret}$ […]

En este episodio se muestra la intervención de una estudiante quien insiste en asumir una posición respecto a la respuesta que ha obtenido de la tarea y la reacción de Daniel a esta situación. Las Tablas 69, 70 y 71, exponen las características de la argumentación en este episodio. La diferencia de opinión que permite considerar la argumentación en este episodio es presentada por una estudiante, quien actúa como la vocera de su equipo y que manifiesta tener una respuesta diferente a la presentada por sus demás compañeros y validada por el profesor, donde según ella no debe haber un error pues siguió la indicación del profesor.

Tabla 69: Características de la dimensión comunicativa. Episodio D4.1

Característica	***Acciones***
Aseveraciones	▪ Plantear aseveración para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea. [7a, 49c] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [9] ▪ Plantear aseveración para repetir la intervención de un estudiante. [11a, 36a] ▪ Plantear aseveración para explorar la intervención de estudiante. [17] ▪ Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [26, 43a] ▪ Plantear aseveración para desaprobar la intervención de un estudiante. [31a] ▪ Plantear aseveración para referirse a la respuesta de un estudiante. [31c, 47] ▪ Plantear aseveración para aprobar y redireccionar la intervención de un estudiante. [34a] ▪ Plantear aseveración para retomar el procedimiento de solución de la tarea. [41a] ▪ Plantear aseveración para replantear la intervención anterior. [41b] ▪ Plantear aseveración para retomar y expandir la intervención de un estudiante. [43b] ▪ Plantear aseveración para sondear respuestas en los estudiantes. [43c] ▪ Plantear aseveración para señalar error en el procedimiento de solución de la tarea. [45, 51d] ▪ Plantear aseveración para señalar el paso a seguir en el procedimiento de solución de la tarea. [49a-d] ▪ Plantear aseveración para desaprobar y replantear la intervención de un estudiante. [51a] ▪ Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la pregunta inicial. [51b] ▪ Plantear aseveración para retomar y dar respuesta a la situación que originó la pregunta inicial del estudiante. [55]
Preguntas	▪ Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante. [7b, 11b, 15, 22, 24, 29, 31d, 34b, 36b, 41c, 49d] ▪ Plantear pregunta para repetir la intervención de un estudiante. [13] ▪ Plantear pregunta para retomar y examinar la intervención de un estudiante. [20, 38, 53b]
Gestos o expresiones	▪ Utilizar expresión para señalar un posible error en un estudiante. [43d] ▪ Utilizar gesto para ubicar a los estudiantes en un paso del procedimiento de solución de la tarea. [49c] ▪ Utilizar gesto para percatarse del error de un estudiante. [51c]

Tabla 70: Características de la dimensión interaccional. Episodio D4.1

Característica	***Acciones***
Participación	▪ Atender a duda presentada por un estudiante. [20, 29]

	▪ Involucrar a los estudiantes en la respuesta de la tarea. [7, 11b, 29, 31d, 34a, 36b, 38, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55]
Normas de clase	▪ Utilizar los medios disponibles en clase (tablero, computador) para apoyar justificación. [34a, 49c, 51d] ▪ Sugerir a los estudiantes la utilización de diferentes instrumentos (calculadora, trasportador) para verificar la respuesta de la tarea. [29, 31b, 43, 45, 49]
Convencer	▪ Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea. [51, 53, 55]
Discutir	▪ Percatarse de las dudas en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes. [11, 13, 20, 29, 31]

Tabla 71: Características de la dimensión epistémica. Episodio D4.1

Característica	***Acciones***
Tratamiento de errores	▪ Percatarse de un error en la respuesta de la tarea de un estudiante. [11, 29, 36a, 41a] ▪ Indicar error en el procedimiento de solución de la tarea. [51d, 53, 55]
Procedimientos y respuestas	▪ Verificar procedimiento de solución de la tarea. [7, 11b, 17, 20, 22, 24, 31, 34, 36, 41, 43]
Justificar o refutar	▪ Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea. [51, 53, 55]

Este episodio es bien particular, la estudiante S1 está segura de haber hecho bien el procedimiento de solución de la tarea, pero su respuesta no coincide con la de sus compañeros, la cual es respaldada por el profesor. Aunque Daniel en un primer momento atiende a su duda y trata de persuadirla de posibles dificultades en el manejo de la calculadora, no logra responder a su inquietud. Daniel continua con la discusión de la tarea, pero la estudiante insiste en asumir una posición, su respuesta no tiene por qué estar mala, a lo cual Daniel responde retomando el procedimiento de solución, y a partir de un trabajo orientado por él y seguido por todos los estudiantes, acompañado de acciones que aluden a aseveraciones, preguntas, gestos, normas de clase y a generar oportunidades de participación, logra justificarle a la estudiante la situación que originó su error, de manera que logra convencerse que su respuesta, aunque muy cercana a la esperada, tenía ciertos problemas en la aproximación de cifras decimales.

Entre las diferentes intervenciones argumentativas enunciadas por la estudiante S1 en [10, 19, 23, 25, 31] y los cierres presentados por Daniel en [51, 53, 55] se distinguen como propósitos de la argumentación del profesor: aclarar procedimiento de solución de la tarea [11, 20, 34, 41], tratar con errores en el procedimiento de solución de la tarea [31, 45], tratar con puntos de vista diferentes (respuestas diferentes) y que no coinciden con la respuesta esperada de la tarea [29, 47], discutir las respuestas diferentes de los estudiantes cuando resuelven la tarea [20, 31, 34], y verificar respuestas de la tarea presentadas por los estudiantes [31, 51, 55].

En lo que refiere a las condiciones que activaron la argumentación, se subraya el abordaje de la tarea, pues mientras Daniel discute el procedimiento de solución de la misma se ve enfrentado a responder a preguntas de los estudiantes, y el conocimiento profesional, en cómo debe plantear y presentar justificaciones que le permitan a sus estudiantes percatarse de un error y convencerse de la respuesta a una determinada tarea.

Resultados

Luego de exponer los análisis de los datos, en este apartado se presentan los resultados de la investigación. Como fue mencionado al final del Capítulo 3, los resultados son mostrados en una serie de tablas, así: Tabla 72, características y acciones de la dimensión comunicativa; Tabla 73, características y acciones de la dimensión interaccional; y Tabla 74, características y acciones de la dimensión epistémica. Estas dan cuenta de las características de la argumentación que pudieron ser reconocidas en las clases de Emma y Daniel, y por ende dan cuenta del primer objetivo auxiliar de la investigación. La Tabla 75 revela los propósitos encontrados en los 22 episodios motivo de análisis, informando acerca del segundo objetivo auxiliar de la investigación; la Tabla 76 presenta las condiciones que activaron la argumentación en las nueve lecciones de análisis; la Tabla 77 expone la ampliación de la tipología de reacciones del profesor. Estas tablas son acompañadas de una construcción teórica propia referente la argumentación en la clase de matemáticas, la cual se presenta en la Figura 22.

Tabla 72: Características y acciones de la dimensión comunicativa

Dimensión comunicativa
Preguntas
Plantear pregunta para aprobar y explorar la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para aprobar y redireccionar la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores.
Plantear pregunta para averiguar procedimiento que fue abordado en lecciones anteriores.
Plantear pregunta para contrastar posibles soluciones de la tarea.
Plantear pregunta para desaprobar la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para explorar la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para percatar a los estudiantes de un posible error en la respuesta de la tarea.
Plantear pregunta para redireccionar en otros términos la situación que originó la intervención inicial del estudiante.
Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para repetir la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para repetir y retomar intervención anterior.
Plantear pregunta para replantear la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para replantear la intervención a un estudiante.
Plantear pregunta para retomar indicación de la tarea.
Plantear pregunta para retomar intervención anterior y presentar posibles respuestas.
Plantear pregunta para retomar intervención inicial del estudiante.
Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido antes en la misma lección.
Plantear pregunta para retomar procedimiento que fue discutido en la lección anterior.
Plantear pregunta para retomar y examinar la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para retomar y explorar intervención anterior.
Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para sondear la apropiación de un determinado concepto asociado a la solución de la tarea.
Plantear pregunta para sondear la intervención de un estudiante.

Plantear pregunta para sondear el procedimiento de solución de la tarea.
Plantear pregunta para sondear otras (posibles) respuestas de la tarea.
Plantear pregunta para traducir la intervención de un estudiante.
Plantear pregunta para transferir la intervención de un estudiante a los demás estudiantes.
Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea.
Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en el siguiente paso a realizar en el procedimiento de solución de la tarea.
Plantear pregunta para ubicar a los estudiantes en un punto específico del procedimiento de solución de la tarea.
Plantear pregunta para verificar respuestas de los estudiantes.

Aseveraciones
Plantear aseveración para ampliar la intervención anterior.
Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante con la ayuda de apoyos visuales.
Plantear aseveración para ampliar la intervención de un estudiante y presentar la respuesta de la tarea.
Plantear aseveración para ampliar y retomar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para aprobar la intervención del estudiante y retomar la intervención inicial.
Plantear aseveración para aprobar la intervención del estudiante y dar la respuesta a la tarea.
Plantear aseveración para aprobar y ampliar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para aprobar y explorar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para aprobar y redireccionar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para aprobar y replantear la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para aprobar y traducir la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para averiguar la respuesta de la tarea.
Plantear aseveración para desaprobar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para desaprobar y replantear la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para examinar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para explorar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para explorar y expandir la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para expandir la intervención inicial.
Plantear aseveración para expandir y redireccionar la situación que originó la intervención del profesor.
Plantear aseveración para redireccionar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para redireccionar y expandir la intervención de un estudiante.

Plantear aseveración para redireccionar y expandir la situación que originó la intervención inicial del profesor.
Plantear aseveración para redireccionar y retomar la indicación de la tarea.
Plantear aseveración para referirse a la descripción de la tarea.
Plantear aseveración para referirse a la intervención inicial del estudiante y construir sobre ella.
Plantear aseveración para referirse a la intervención anterior y sugerir un posible error.
Plantear aseveración para referirse a la respuesta de un estudiante.
Plantear aseveración para referirse a procedimiento realizado antes.
Plantear aseveración para referirse y dar respuesta a la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para repetir la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para repetir y aprobar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para repetir y replantear intervención anterior.
Plantear aseveración para repetir y retomar intervención anterior.
Plantear aseveración para replantear la intervención anterior.
Plantear aseveración para replantear la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para replantear y expandir la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para retomar el procedimiento de solución de la tarea.
Plantear aseveración para retomar la intervención anterior.
Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y construir sobre ella.
Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la pregunta inicial.
Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la situación que originó la intervención del profesor.
Plantear aseveración para retomar la intervención anterior y dar respuesta a la tarea.
Plantear aseveración para retomar la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para retomar y dar respuesta a la situación que originó la pregunta inicial del estudiante.
Plantear aseveración para retomar y expandir la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para retomar y redireccionar intervención anterior.
Plantear aseveración para retomar las diferentes respuestas y presentar la solución a la situación que originó la intervención inicial.
Plantear aseveración para retomar la intervención de un estudiante y señalar una posible respuesta a la situación que originó la intervención inicial.
Plantear aseveración para señalar el paso a seguir en el procedimiento de solución de la tarea.
Plantear aseveración para señalar error en el procedimiento de solución de la tarea.
Plantear aseveración para señalar error en la respuesta de la tarea.
Plantear aseveración para sondear respuestas en los estudiantes.
Plantear aseveración para traducir la intervención de un estudiante.
Plantear aseveración para ubicar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea.

Plantear aseveración para señalar procedimiento que puede resultar confuso en la solución de la tarea.

Gestos o expresiones
Aprobar con un gesto la intervención de un estudiante.
Utilizar expresión para aprobar la intervención de un estudiante.
Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante.
Utilizar expresión para indicar error en la intervención de una estudiante.
Utilizar expresión para referirse a intervención del estudiante.
Utilizar expresión para señalar un posible error en un estudiante.
Utilizar gesto para explorar la intervención de un estudiante.
Utilizar gesto para referirse a la respuesta de un estudiante.
Utilizar gesto para percatarse del error de un estudiante.
Utilizar gesto para ubicar a los estudiantes en un paso del procedimiento de solución de la tarea.

Tabla 73: Características y acciones de la dimensión interaccional

Dimensión interaccional
Participación
Atender a duda presentada por un estudiante.
Invitar a los estudiantes a compartir el procedimiento de solución de la tarea.
Invitar a los estudiantes a participar en la discusión de posibles respuestas de la tarea.
Involucrar a los estudiantes en el procedimiento de solución de la tarea.
Involucrar a los estudiantes en la respuesta de la tarea.
Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante.

Medios y normas de clase
Orientar a los estudiantes en la utilización de los diferentes instrumentos de clase (transportador, calculadora).
Señalar una indicación para que sea seguida por todos los estudiantes.
Sugerir a los estudiantes la utilización de diferentes instrumentos (calculadora, trasportador) para verificar la respuesta de la tarea.
Utilizar los medios disponibles en clase (tablero, computador) para apoyar justificación.
Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por él mismo.

Convencer
Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o por un estudiante.

Convencer a los estudiantes de la respuesta a la tarea.
Convencer a los estudiantes de la intervención de un estudiante.
Convencer a los estudiantes de que diferentes procedimientos de solución permiten llegar a la respuesta de la tarea.
Persuadir a los estudiantes de errores en el procedimiento de solución de la tarea.

Discutir
Discutir respuesta de una determinada tarea con los estudiantes.
Indicar error en la respuesta de un estudiante y alentar a los demás estudiantes a presentar respuestas alternativas.
Percatarse de errores en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes.
Percatarse de las dudas en un estudiante y discutirlos con los demás estudiantes.

Tabla 74: Características y acciones de la dimensión epistémica

Dimensión epistémica
Tratamiento del objeto matemático
Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la solución de la tarea.
Plantear propiedades del objeto (u objetos) matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta.
Solicitar claridad en el uso de un determinado objeto matemático.
Solicitar claridad respecto al abordaje de un determinado objeto matemático.
Conceptos y definiciones
Retomar definición de conceptos involucrados en el procedimiento de solución de la tarea.
Retomar otras lecciones
Comprobar la utilización de un procedimiento de solución que fue abordado en lecciones anteriores.
Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta.
Retomar temas ya vistos para solucionar la tarea.
Tratamiento de errores
Asegurarse de que el error en el procedimiento de solución de la tarea haya sido superado.
Indicar error en el procedimiento de solución de la tarea.
Percatarse de un error en la respuesta de la tarea de un estudiante.
Percatarse de un posible error en la respuesta de un estudiante.

Procedimientos y respuestas
Plantear procedimiento de solución de la tarea.
Presentar posibles variaciones a la tarea para sugerir procedimientos de solución.
Presentar y validar respuesta de la tarea.
Retomar procedimientos realizados antes para dar continuidad a la solución de la tarea.
Solicitar claridad respecto al uso de un determinado procedimiento en la solución de la tarea.
Utilizar la intervención de un estudiante para mostrar diferentes procedimientos de solución de la tarea.
Valerse de una prueba (demostración) para verificar el procedimiento de solución de la tarea.
Verificar procedimiento de solución de la tarea.
Volver a expresar en otras palabras la respuesta de la tarea para responder a dudas de los estudiantes.

Justificar y/o refutar
Contrastar dos posibles procedimientos de solución a la tarea y justificar por qué ambos son posibles.
Plantear justificación del procedimiento utilizado en la solución de la tarea.
Presentar justificación para el uso de conceptos asociados a la solución de la tarea.
Presentar justificación para el uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta.
Refutar la intervención de un estudiante.
Solicitar justificación ante una intervención (correcta o incorrecta) de un estudiante.
Solicitar justificación para el procedimiento realizado para resolver la tarea.
Validar justificación presentada por un estudiante.

Tabla 75: Propósitos de la argumentación del profesor

Propósitos de la argumentación
Resolver preguntas de los estudiantes o sus propias preguntas.
Aclarar procedimiento de solución de la tarea.
Puntualizar en las propiedades del objeto(s) matemático(s) involucrado(s) en el procedimiento de solución de la tarea.
Puntualizar en las propiedades del objeto(s) matemático(s) involucrado(s) en el abordaje de una pregunta presentada por un estudiante.
Orientar procedimientos de solución en tareas similares.
Tratar con errores en el procedimiento de solución de la tarea.
Tratar con puntos de vista diferentes (respuestas diferentes) y que no coinciden con la respuesta esperada de la tarea.
Prever posibles errores en el procedimiento de solución de la tarea.
Discutir las respuestas diferentes de los estudiantes cuando resuelven la tarea.

Discutir acerca de errores recurrentes en el procedimiento de solución de la tarea.
Validar aseveraciones presentadas por los estudiantes.
Verificar respuestas de la tarea presentadas por los estudiantes.
Revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la tarea, abordados en lecciones anteriores.
Revisar la apropiación de conceptos, definiciones o procedimientos de solución relacionados con la respuesta a una determinada pregunta.
Tratar con procedimientos de solución diferentes, donde ambos permiten llegar a la repuesta esperada de la tarea.
Animar a los estudiantes a tomar sus propias decisiones.
Tratar con dificultades en la representación del objeto matemático asociado a la tarea.
Refutar respuestas que los estudiantes presentan de la tarea.
Validar respuesta de la tarea presentada por los estudiantes.
Presentar y justificar suposiciones respecto a las posibles respuestas de la tarea.
Justificar el procedimiento de solución y la respuesta de una tarea, la cual fue abordada en la clase anterior.
Discutir tareas en las cuales puede haber dificultades en su comprensión.
Mostrar la forma de acercarse a la comprensión de la tarea y al procedimiento de solución de la misma.
Discutir y justificar un error en la intervención de un estudiante.
Refutar intervenciones de los estudiantes, asociadas al procedimiento de solución de la tarea.
Buscar la comprensión de la tarea utilizando afirmaciones o refutaciones.

Tabla 76: Ampliación de la tipología de las reacciones del profesor

Tipo de reacción	***Caracterización***
Aprobar	Indicar explícitamente la aprobación de la intervención del estudiante.
Desaprobar	Indicar explícitamente la desaprobación de la intervención del estudiante.
Repetir	Repetir (parte clave de) la intervención del estudiante en las mismas palabras.
Replantear	Replantear (parte clave de) la intervención del estudiante en diferentes palabras.
Traducir	Traducir (parte clave de) la intervención del estudiante a una forma o idea equivalente.
Redireccionar	Redireccionar el conocimiento mostrado en la intervención del estudiante.
Averiguar	Averiguar (sondear, explorar, examinar) la intervención del estudiante.
Expandir	Expandir (ampliar) la intervención del estudiante o construir sobre ella.
Retomar	Retomar (volver a plantear, referirse a) la pregunta o intervención anterior.
Transferir	Transferir la consideración de la intervención del estudiante a otro estudiante o a la clase.

Verificar	Verificar (parte clave de) la intervención del estudiante.
Ubicar	Ubicar (parte clave de) la intervención del estudiante en el contexto de clase.
Señalar	Señalar (parte clave de) las dificultades o errores de la intervención del estudiante.
Solicitar	Solicitar al estudiante aclaración ante determinada intervención.
Contrastar	Contrastar intervenciones que aluden al contexto de clase.
Percatarse	Percatarse de dificultades en la intervención del estudiante.

Tabla 77: Condiciones que activan la argumentación del profesor

Condiciones	***Indicadores***
Estrategias comunicativas e interactivas	Preguntas y aseveraciones. Oportunidades de participación.
Abordaje de la lección	Intervenciones argumentativas. Cierres.
Abordaje de la tarea	Tipo de tarea. Procedimiento de solución de la tarea.
Conocimiento profesional	Tratamiento de objetos matemáticos. Retomar otras lecciones. Prever lecciones futuras. Formas de justificar y refutar.

Construcción teórica respecto a la argumentación

La *argumentación en la clase de matemáticas* es un acto complejo destinado a resolver una diferencia de opinión, en donde interesa convencer de la aceptabilidad de un punto de vista a través de la justificación o refutación. Advierte una dimensión comunicativa, una interaccional y una epistémica, y tiene lugar cuando profesor y estudiantes discuten tareas durante el desarrollo de una lección.

Figura 22: Propuesta de construcción teórica de la argumentación en la clase de matemáticas

Capítulo 5. Conclusiones

Figura 23: Situación en la clase de matemáticas. Elaboración propia.

Luego de presentar en el capítulo anterior el análisis de situaciones de clase como la de la Figura 23, se desvelan ahora las conclusiones de la investigación. En primer lugar, se responde la pregunta que ha guiado esta investigación, para ello se retoman los resultados presentados en el apartado anterior y se discuten otros resultados desencadenados del tratamiento y análisis de los datos. Y, en segundo lugar, se exponen las prospectivas de investigación que dan continuidad al estudio mediante la consideración de nuevas preguntas.

Acerca de la pregunta de investigación

Para dar respuesta a la pregunta de investigación: *¿Cómo es la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?*, se retoman las preguntas auxiliares mostrando cómo cada una aporta aspectos en el abordaje de dicha cuestión.

Respecto a la primera pregunta auxiliar: *¿Cuáles son las características de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?*, se presentaron en las Tablas 72, 73 y 74 las diferentes características de la argumentación reconocidas en los dos profesores que hicieron parte del estudio. Dichas características corresponden a tres dimensiones: comunicativa, interaccional y epistémica, señaladas en la fundamentación teórica, y se ven representadas en la clase de matemáticas en una serie de acciones particulares de cada profesor.

A propósito de la dimensión comunicativa, se identificaron tanto aseveraciones, preguntas, como expresiones y gestos en la argumentación del profesor. Se destaca como un acierto la utilización de la tipología de reacciones del profesor para la identificación de las acciones propias en cada característica, y como valioso el aporte de esta investigación al ampliar dicha tipología, como se indicó en la Tabla 76. Es importante señalar cómo las diferentes acciones de orden comunicativo permiten observar la perspectiva participacionista del aprendizaje, a la cual alude la investigación, con la cual no solo es reconocible la intervención del profesor sino también la de los estudiantes. Tanto Emma como Daniel parecieron estar interesados en que sus estudiantes adquirieran cierta experticia en las diferentes tareas propuestas, que les permitiera tener la capacidad para enfrentarse al procedimiento de solución de otras tareas del mismo tipo o diferentes.

En relación con la dimensión interaccional, se identifica como características: participación, medios y normas de clase, convencer y discutir. Se pudo reconocer en ambos profesores, cómo vinculan a sus estudiantes en la respuesta a preguntas o situaciones de una lección de clase, cómo plantean justificaciones para convencer a los estudiantes de una determinada respuesta a una tarea o pregunta, cómo utilizan las inquietudes de los estudiantes para abrir el espacio a la discusión y a la participación, y cómo parecen estar interesados en que los estudiantes no solo corrijan una respuesta sino que sean partícipes y conscientes de los errores al momento de realizar un procedimiento de solución de una tarea.

En cuanto a la dimensión epistémica se identificaron características como tratamiento del objeto matemático, conceptos y definiciones, retomar otras lecciones, tratamiento de errores, procedimientos y respuestas, y justificar y/o refutar. Dichas características sugieren una serie de aspectos importantes. Primero, el vínculo de esta dimensión con el conocimiento profesional, tanto las acciones de Emma como Daniel indican su experiencia en los grados en que se hizo la observación, pues se identificó cómo plantean justificaciones de determinados procedimientos, insistiendo en cuándo, cómo y por qué deben hacerse, adelantándose incluso en varias de sus intervenciones a prever posibles dificultades o errores. Segundo, la manera de abordar los errores, pues en lugar de indicarlos o hacerlos explícitos en el momento en el que ocurren, son utilizados para generar la discusión en torno a la tarea, para que sean reconocidos por los mismos estudiantes y para tratarlos de manera que se conviertan en una oportunidad para el aprendizaje. Tercero, el tratamiento de los objetos matemáticos, en este aspecto fue característico en la argumentación nombrar o referirse de una manera apropiada a los objetos propios de cada tarea, e insistir constantemente en la claridad requerida para tratarlos.

Referente a la segunda pregunta auxiliar: *¿Cuáles son los propósitos de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?*, se mostraron, en la Tabla 75, propósitos de la argumentación en Emma y Daniel tales como el tratamiento de preguntas, plantear las propiedades de los objetos matemáticos, orientar procedimientos de solución de tareas, prever o tratar los errores, validar aseveraciones o respuestas, verificar o refutar intervenciones o respuestas, discutir respuestas de tareas, entre otros. Estos propósitos advierten cómo los profesores, además de presentar la solución de una determinada tarea, están interesados en que sus estudiantes participen de la lección de clase y, por supuesto, están interesados en favorecer el aprendizaje de los conceptos, definiciones o propiedades referidos en las diferentes tareas. Fue útil el reconocimiento de las intervenciones argumentativas y de los cierres en cada episodio, lo cual, además de delimitar dichos episodios, permitió reconocer situaciones en lecciones de clase de matemáticas donde el profesor argumenta.

En relación con la tercera pregunta auxiliar: *¿Cuáles son las condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?*, en la Tabla 76 se identificaron diferentes indicadores referentes a las condiciones que activan la argumentación del profesor, estas fueron: preguntas y oportunidades de participación en las estrategias comunicativas e interactivas; intervenciones argumentativas y cierres en el enfoque de la lección; tipo de tarea y procedimiento de solución en el enfoque de la tarea; y tratamiento de objetos matemáticos, retomar otras lecciones, prever lecciones futuras y formas de justificar y refutar en el conocimiento profesional. Estas condiciones se reconocen tanto en intervenciones de los estudiantes como de los profesores, son particulares para cada lección y dan cuenta de momentos específicos de una lección de clase en donde el profesor debería estar atento y preparado para afrontarlas.

Otros resultados

Acerca de la construcción teórica presentada en la Figura 23, se busca aportar una definición de la argumentación en la clase de matemáticas en la cual se consideran aspectos que emergen del análisis, para lo cual se toma como punto de partida la definición presentada en el capítulo del marco teórico, pero se toma distancia de ciertos elementos que suelen resultar problemáticos y se opta por una concepción que logre dar cuenta de un proceso complejo en la clase de matemáticas.

En lo relativo al método, se considera que el enfoque interpretativo, el diseño de la investigación y el análisis del discurso permitieron abordar la problemática y dar cuenta de la pregunta de investigación. No se desconocen los limitantes como, por ejemplo, la interpretación, es muy seguro que otro investigador podría presentar otro tipo de tratamiento y análisis de los datos; dado lo amplio de los estudios que remiten a un análisis del discurso, podrían haberse empleado otro tipo de referentes que delimitarán otras unidades de análisis; y es posible que con otros participantes se obtuvieran otro tipo de respuestas. No obstante, son las decisiones del investigador, tomadas con base en la lectura comprensiva y critica de los referentes teóricos y metodológicos, las que procuraron tener una armonía y precisión textual, que eviten sesgos en la investigación y dificultades a partir del punto de vista epistemológico.

Respecto a los aportes de esta disertación a la línea argumentación y demostración, se focalizó el interés en el primero, a pesar de que en un episodio Emma intento hacer un acercamiento a una demostración y sin desconocer que ambos términos parecen tener una estrecha relación. El principal aporte radica en la mirada teórica y diseño de la investigación, en donde se cuestionó la mirada que suele ser común en un trabajo sobre argumentación, esto es remitir al modelo de Toulmin para caracterizar o analizar argumentos de profesor o estudiantes en lecciones de clase. Se marcó distancia al no intentar tener control de las situaciones que ocurrieran en las lecciones de clase y al no considerar a la argumentación ligada a la estructura de un argumento. Para ello se hizo uso de la observación de lecciones habituales de clases de matemáticas, en donde fueron los profesores quienes prepararon sus lecciones y propusieron las tareas, y de una fundamentación teórica que permitió considerar a la argumentación dentro del discurso de clase.

En relación al aporte a la línea comunicación y lenguaje, se destaca como un acierto el haber considerado los diferentes actos comunicativos que tienen lugar en lecciones de clase cuando profesor y estudiantes discuten una determinada tarea. El interés estuvo centrado en el discurso matemático del profesor, y se pudo evidenciar como además de presentar ejemplos o explicaciones, el profesor argumenta en diferentes situaciones de clase, que como se advirtió al seleccionar los episodios no ocurre siempre y como se informó en la tercera pregunta auxiliar, son ciertas condiciones las que deberían darse para que pueda presentarse. Es importante insistir en la diferencia entre una explicación y una argumentación, pues a diferencia de la explicación en la argumentación interesa la aceptabilidad y el convencimiento, en donde términos como la diferencia de opinión y la intervención argumentativa permiten reforzar la presencia de situaciones argumentativas y no explicativas.

Y a propósito de la relación entre argumentación y oportunidades de participación, se intuyen una serie de aspectos en los análisis y resultados. De un lado, como las situaciones en una lección de clase en las que el profesor argumenta pueden convertirse no solo en oportunidades de participación sino también oportunidades para el aprendizaje, en donde si el profesor es consciente de ello puede abrir el espacio para que los estudiantes se vean en la necesidad de justificar o refutar y no solo atender a las indicaciones del profesor o adquirir ciertas destrezas en conceptos y procedimientos. De otro lado, el ambiente de confianza que debería darse en la clase, para que el profesor permita la participación de sus estudiantes en la discusión de tareas, en donde hay preguntas, errores o dudas, y donde cada intervención sea importante tanto del profesor como de los estudiantes. Y el hecho de que no solo se reconozca al profesor como quien presenta de ejemplos y explicaciones, sino también argumentaciones, puede introducir a los estudiantes a cuestionarse y a la toma de decisiones.

Contribuciones a la comunidad

Además de la respuesta a la pregunta y de los otros resultados, se citan a continuación los trabajos académicos realizados, que son también un aporte de esta investigación a la comunidad de Educación Matemática:

Toro, J. (2019). ¿Cómo argumenta el profesor de matemáticas? Reflexiones en clase de geometría. En C., Samper y L., Camargo (Eds.), *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 24,* (pp. 213-221). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Toro, J. y Castro, W. (2018). Features of mathematics teacher argumentation. En D. M., Gómez, (Ed.), *Actas del First PME Regional Conference: South América,* p. 167. Rancagua, Chile: PME.

Toro, J. y Castro, W. (2019). Purposes of mathematics teacher argumentation during the discussion of tasks in the classroom. En M., Graven, H., Venkat, A., Essien & P., Vale (Eds.), *Actas del 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, (pp. 109). Pretoria, Sudáfrica: PME.

Toro, J. y Castro, W. (En prensa). Features of mathematics' teacher argumentation in classroom. *Actas del 11th CERME.* Utrecht, Países Bajos: ERME.

Toro, J. y Castro, W. (En evaluación). Argumentación del profesor de matemáticas en clase: una revisión sistemática de literatura. *Revista Perfiles Educativos.*

Toro, J. y Castro, W. (En evaluación). Características de la argumentación del profesor de matemáticas mientras discute tareas en clase. *Revista Educación Matemática.*

Toro, J. y Castro, W. (En evaluación). Condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase. *Revista Chilena de Educación Matemática SOCHIEM.*

Toro, J. y Castro, W. (En evaluación). Comprender la argumentación del profesor de matemáticas: consideraciones durante la discusión de tareas en clase. *Revista Enseñanza de las Ciencias.*

Toro, J. y Castro, W. (En evaluación). Argumentación en clase de matemáticas: una iniciativa para considerar opciones en la investigación. *Revista PNA.*

Prospectivas de investigación

El estudio de la argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase requiere considerar las intervenciones tanto del profesor como de los estudiantes. Dada la pregunta de investigación, se ha centrado la atención en los profesores, aunque se podría considerar como continuidad la investigación con los estudiantes, planteando una pregunta como: ¿Cómo es la argumentación de los estudiantes durante la discusión de tareas en clase? Otra alternativa es considerar tanto al profesor como a los estudiantes: ¿Cómo es la argumentación de profesor y estudiantes durante la discusión de tareas en clase? Aquí podrían considerarse otras decisiones respecto al método, por ejemplo considerar un enfoque cuantitativo de manera que se tenga un mayor alcance, o seleccionar solo un profesor con sus estudiantes y realizar un estudio longitudinal durante un año escolar.

El interés en esta investigación estuvo en los profesores de matemáticas en secundaria, pero podrían plantearse otras preguntas: ¿Cómo es la argumentación de los profesores que enseñan matemáticas en educación primaria? ¿Cómo es la argumentación de los profesores en formación? Dichas preguntas implicarían otro tipo de posición respecto al método y la selección de los participantes.

Como se precisaba en la revisión de literatura, en el Capítulo 2, está reportado cómo la gestión y la orquestación del profesor favorecen los procesos argumentativos en la clase de matemáticas, pero hay preguntas que podrían ser objeto de interés: ¿Cómo la gestión de la discusión de tareas puede favorecer la argumentación en la clase de matemáticas? ¿Qué condiciones deben darse en la clase de matemáticas para que el profesor pueda orquestar discusiones y favorecer la argumentación?

Otros marcos teóricos también ser utilizados, por ejemplo, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos o el Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático, si se consideran otros objetos de estudio como por ejemplo el conocimiento que debe tener el profesor para argumentar en clase o las competencias argumentativas que debería tener el profesor de matemáticas para diseñar y llevar a cabo tareas en la clase de matemáticas.

Y dada la perspectiva del aprendizaje donde tiene lugar la discusión de una serie de tareas, valdría la pena preguntarse por: ¿Qué tipo de tareas permiten la argumentación del profesor? ¿Cómo diseñar tareas para que se pueda favorecer la argumentación en la clase de matemáticas? Lo cual llevaría a considerar estudios comparativos entre dos profesores o a plantear una investigación dentro de un programa de desarrollo profesional.

Referencias bibliográficas

Adler, J. y Venkat, H. (2014). Teachers' mathematical discourse in instruction: Focus on examples and explanations. En M. Rollnick, H. Venkat, J. Loughran, & M. Askew (Eds.), *Exploring content knowledge for teaching science and mathematics* (pp. 132–146). Londres, Reino Unido: Routledge.

Adler, J. y Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19(3),* 237–254. doi: 10.1080/10288457.2015.1089677

Asterhan, C. y Schwarz, B. (2016). Argumentation for Learning: Well-Trodden Paths and Unexplored Territories. *Educational Psychologist, 51,* 164-187 doi:10.1080/00461520.2016.1155458

Ayalon, M. y Even, R. (2016). Factors shaping students' opportunities to engage in argumentative activity. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14,* 575–601.

Ayalon, M. y Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior, 49,* 163-173. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Azmon, S., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2011). The impact of teacher-led discussions on students' subsequent argumentative writing. *Actas PME 35, 2,* 73-80.

Barwell, R. (2016). Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic. *Educational Studies in Mathematics, 92,* 331–345. doi: 10.1007/s10649-015-9641-z

Bleiler, S., Thompson, D. y Krajcevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17,* 105–127. doi: 10.1007/s10857-013-9248-1

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa.* Madrid, España: La Muralla.

Boero, P. (2011). Argumentation and proof: Discussing a "successful" classroom discussion. En M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.). *Actas 7° Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 120-130). Rzeszów, Polonia: ERME.

Boero P., Consogno V., Guala E. y Gazzolo T. (2009). Research for innovation: a teaching sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in grades i-v and some related basic research results. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29 (I) 59-96.

Boukafri, K. (2017). *Revoicing. Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Boukafri, K. y Planas, N. (2018). Métodos para el análisis de la lengua del profesor de matemáticas en clase. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 171-180). Gijón, España: SEIEM

Brown, R. (2017). Using collective argumentation to engage students in a primary mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal, 29 (2),* 183–199 doi: https://doi.org/10.1007/s13394-017-0198-

Cengiz, N., Kline, K. y Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 355–374

Chapman, O. (2016). Approaches and challenges in supporting mathematics teachers' change. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19 (1),* 1-5.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education.* Londres, Reino Unido: Routledge.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* Recuperado de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Conner, A. (2008). Expanded Toulmin diagrams: A tool for investigating complex activity in classrooms. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Actas Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, *2,* 361-368. México: Cinvestav-UMSNH.

Conner, A. (2017). An application of Habermas' rationality to the teacher's actions: Analysis of argumentation in two classrooms. En Durand-Guerrier (Presidencia). *Actas 10° Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Institute of Education, Dublin City University, Dublin, Irlanda. Recuperado de https://keynote.conference-services.net/programme.asp?conferenceID=5118&action=prog_categories

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. y Francisco, R. (2014a). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401–429. doi: 10.1007/s10649-014-9532-8

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. y Francisco, R. (2014b). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16(3),* 181-200. doi: 10.1080/10986065.2014.921131

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2013). The discipline and practice of qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds). *The landscape of qualitative research.*. (pp. 1-41). California, USA: Sage

Drageset, O.G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions—a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 85,* 281–304. doi: 10.1007/s10649-013-9515-1

Drageset, O.G. (2015). Student and teacher interventions: a framework for analysing mathematical discourse in the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18,* 253–272. doi: 10.1007/s10857-014-9280-9

van Eemeren, F., Grassen, B., Krabbe, E., Snoeck Henkemans, F., Verheij, B. y Wagemans, J. (2014). *Handbook of Argumentation Theory.* Dordrecht, Países Bajos: Springer

van Eemeren, F. y Grootendorst, R. (2006). *Argumentación, Comunicación y Falacias. Una perspectiva Pragma-Dialéctica.* Santiago de Chile, Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.

van Eemeren, F. y Grootendorst, R. (2011). *Una teoría Sistemática de la Argumentación. La Perspectiva Pragmadialéctica.* Buenos Aires, Argentina: Editorial Biblos.

van Eemeren, F. y Grootendorst, R. (2013). *Los actos de habla en las discusiones argumentativas.* Santiago de Chile, Chile: Ediciones Universidad Diego Portales.

van Eemeren, F., Grootendorst, R. y Snoeck, F. (2006). *Argumentación. Análisis, evaluación, presentación.* Buenos Aires, Argentina: Biblos.

van Eemeren, F., Grootendorst, R., Snoeck, F., Blair, J., Johnson, R., Krabbe, E., Plantin, C., Walton, D., Willard, C., Woods, J. y Zarefsky, D. (1996). *Fundamentals of argumentation theory. A handbook of historical and contemporary developments*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Enyedy, N., Rubel, L., Castellón, V., Mukhopadhyay, S., Esmonde, I. y Secada, W. (2008). Revoicing in a Multilingual Classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 10 (2),* 134-162. doi: 10.1080/10986060701854458

Erkek, Ö. y Bostan, M. (2019). Prospective Middle School Mathematics Teachers' Global Argumentation Structures. *International Journal of Science and Mathematics Education 17 (3),* 613–633. doi: https://doi.org/10.1007/s10763-018-9884-0

Ferrer, M., Morera, L. y Fortuny, J. M. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias, 32 (3),* 385–405. doi: http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1231

Forman, E. y Ansell, E. (2002). Orchestrating the Multiple Voices and Inscriptions of a Mathematics Classroom. *Journal of the Learning Sciences, 11 (2-3),* 251-274. doi: https://doi.org/10.1080/10508406.2002.9672139

Forman, E., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. y Brown, C. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8 (6),* 527–548.

Freeman, J. B. (2005). Systematizing Toulmin's warrants: An epistemic approach. *Argumentation, 19 (3),* 331-346. doi: https://doi.org/10.1007/s10503-005-4420-0

Gee, J. P. (2008). *Social linguistics and literacies: Ideologies in discourses*. Nueva York, E.U.A: Routledge.

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D. y Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *Journal of Mathematical Behavior, 29,* 160–168. doi:10.1016/j.jmathb.2010.07.001

Goizueta, M. y Planas, N. (2013a). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 31 (1),* 61-78. doi: https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n1.835

Goizueta, M. y Planas, N. (2013b). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA, 7(4),* 155-170.

Habermas, J. (1999). *Teoría de la acción comunicativa I.* Madrid, España: Grupo Santillana de Ediciones.

Herbel-Eisenmann, B., Steele, M. y Cirillo, M. (2013). (Developing) Teacher Discourse Moves: A Framework for Professional Development. *Mathematics Teacher Educator, 1(2),* 181-196. doi:10.5951/mathteaceduc.1.2.0181

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* Ciudad de México, México: McGrawHill.

Hershkowitz, R., Tabach, M., Rasmussen, C. y Dreyfus, T. (2014). Knowledge shifts in a probability classroom: a case study coordinating two methodologies. *ZDM Mathematics Education, 46,* 363–387. doi: 10.1007/s11858-014-0576-0

Inglis, M., Mejía-Ramos, J. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66* (1), 3-21.

Keller, R. (2011). *Diskursforschung. Eine Einführung Für Sozialwissenschaftlerlnen*. Wiesbaden, Alemania: VS-Verl.

Knipping, C. y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.) *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 75-101). NY: Springer.

Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F. y Reiss, K. (2014). Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. *Learning and Instruction, 32(1),* 22–36. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.01.003

Kosko, K., Rougee, A. y Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal, 26,* 459–476. doi: 10.1007/s13394-013-0116-1

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. En H. B. P. Cobb (Ed.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). New York, E.U.A: Hillsdale.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior, 26(1),* 60-82. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion ‘‘learning-as-participation’’ in everyday situations of mathematics classes. *ZDM Mathematics Education, 43,* 81–90. doi: 10.1007/s11858-010-0294-1

Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N, Planas (Ed.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 61-78). Recuperado de https://www.casadellibro.com/

Lim, W., Lee, JE., Tyson, K., Kim, H.J. y Kim, J. (2019). An Integral Part of Facilitating Mathematical Discussions: Follow-up Questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education.* doi: https://doi.org/10.1007/s10763-019-09966-3

Llinares, S. (2018). Mathematics teacher's knowledge, knowledge-based reasoning, and contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21 (1),* 1-3.

Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education, 47*, 1107-1120. doi: 10.1007/s11858-015-0732-1

Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2009). Studying teachers' pedagogical argumentation. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Actas 33° conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n, *4,* 121–128. Thessaloniki: PME. Recuperado de http://www.lettredelapreuve.org/pdf/PME33/nikolaos.pdf

Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics, 93,* 383–397. doi 10.1007/s10649-016-9701-z

Moschkovich, J. N. (1999). Supporting the participation of English language learners in mathematical discussions. *For the Learning of Mathematics, 19(1),* 11–19.

Moschkovich, J. (2003). What counts as mathematical discourse? En N. Pateman, B. Dougherty, and J. Zilliox (Eds.) *Actas Joint Meeting of the International Group for the Psychology of* *mathematics Education (PME) and the North American Chapter of PME (PME-NA),*. CRDG, College of Education, University of Hawaii: Honolulu, HI.

Mueller, M., Yankelewitz, D. y Maher, C. (2014). A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. *Educational Studies in Mathematics, 80,* 369–387. doi: 10.1007/s10649-011-9354-x

Nardi, E., Biza, I. y Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics,* 79(2), 157-173. doi: 10.1007/s10649-011-9345-y

Parra, M., Zapata, M., Toro, J. y Durango, J. (2010). Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 29,* 66-81.

Pedemonte, B. y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior, 41,*104–122. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.008

Planas, N., Fortuny, J.M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor: Explicaciones, ejemplos y coherencia local. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). Málaga: SEIEM.

Planas, N., García-Honrado, I. y Arnal-Bailera, A. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las ciencias, 36(1),* 45-60

Ponte, J. (2013). Theoretical frameworks in researching mathematics teacher knowledege, practice, and development. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16 (5),* 319-322.

Ponte, J., Mata-Pereira, J. y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22 (2),* 55-81

Potari, D. (2019). Theoretical and methodological tools in designing and analyzing mathematics teacher education practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22 (4),* 327-330.

Potari, D. y Psycharis, G. (2018). Prospective mathematics teacher argumentation while interpreting classroom incidents. En M. E. Strutchens, R. Huang, D. Potari, & L. Losano (Eds.), *Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers, ICME-13 Monographs* (pp. 169-187). Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-319-91059-8_10

Prusak, N. Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics, 79 (1),* 19–40. doi: https://doi.org/10.1007/s10649-011-9335-0

Rodrigues, C., Menezes, L. y Ponte, J. (2018). Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32(61),* 398-418. doi: https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a05

Ruthven, K. y Hofmann, R. (2016). A case study of epistemic order in mathematics classroom dialogue. *PNA, 11(1),* 5-33.

Ryve, A. (2011). Discourse Research in Mathematics Education: A Critical Evaluation of 108 Journal Articles. *Journal for Research in Mathematics Education, 42, (2),* 167–198. doi: 10.5951/jresematheduc.42.2.0167

Samper, C. y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentacıón en un ambıente de geometría dınámıca. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 50,* 367-382.

Santibáñez, C. (2015). Función, funcionalismo y funcionalización en la teoría pragma-dialéctica de la argumentación. *Universum, 30(1)*, 233-252. doi: https://dx.doi.org/10.4067/S0718-23762015000100014

Shilo, A. y Kramarski, B. (2018). Mathematical-metacognitive discourse: how can it be developed among teachers and their students? Empirical evidence from a videotaped lesson and two case studies. *ZDM Mathematics Education, 51 (4),* 625–640. doi: https://doi.org/10.1007/s11858-018-01016-6

Schwarz, B. y Asterhan, C. (2010). Argumentation and Reasoning. En K. Littleton, C. Wood, & J. Kleine Staarman (Eds.), *International Handbook of Psychology in Education.* (pp. 137-176) Bingley, Reino Unido: Emerald Group Publishing.

Schwarz, B., Hershkowitz, R. y Azmon, S. (2006). The role of the teacher in turning claims to arguments. En J. Novotná et Al. (Eds.), *Actas PME 30* (vol. 5, pp. 65-72). Praga, República Checa: PME

Schwarz, B., Hershkowitz, R. y Prusak, N. (2010). Argumentation and mathematics. En K. Littleton, & C. Howe (Eds.). *Educational dialogues: Understanding and promoting productive interaction* (pp. 103–127). Londres, Reino Unido: Taylor & Francis, Routledge.

Searle, J. (1994). *Actos de habla. Ensayo de filosofía del lenguaje.* Ciudad de México, México: Editorial Planeta Mexicana.

Searle, J. (2014). *Creando el mundo social. La estructura de la civilización humana*. Ciudad de México, México: Editorial Paidós.

Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *The journal of the learning sciences, 16 (4),* 565–613

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema, 30,* 1092-1112. doi: http://dx.doi.org//10.1590/1980-4415v30n56a13

Staples, M. y Newton, J. (2016). Teachers' Contextualization of Argumentation in the Mathematics Classroom. *Theory into Practice, 55 (4),* 294-301. doi: 10.1080/00405841.2016.1208070

Stylianides, A., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En Á. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315-351). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Superfine, A.C. (2019). Reconceptualizing ways of studying teacher learning; working with teachers rather than conducting research on teacher. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22 (1),* 1-4.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona, España: Ediciones Península.

Ubuz, B., Dinçer, S. y Bülbül, A. (2013). Argumentation in undergraduate math courses: a study on definition construction. *Actas PME 37, 4,*313-320. Recuperado de http://www.lettredelapreuve.org/pdf/PME37/Ubuz.pdf

Vega-Reñon, L. (2011). Argumento/Argumentación. *Compendio de lógica, argumentación y retórica*. Madrid, España: Trota.

Venkat, H. y Adler, J. (2012). Coherence and connections in teachers' mathematical discourses in instruction. *Pythagoras, 33(3),* 1-8. doi: http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v36i1.281

Vogel, F., Kollar, I. y Fischer, F. (2012). Effects of Computer-Supported Collaboration Scripts on domain-general learning outcomes: a meta-analysis. En J. van Aalst, K. Thompson, M. J. Jacobson & P. Reimann (Eds.). The future of learning, *Actas 10º International Conference of the Learning Sciences (ICLS 2012).* Vol. 2: Short Papers, Symposia, and Abstracts (pp. 446-450). Sydney: International Society of the Learning Sciences.

Vogel, F., Reichersdorfer, E., Kollar, I., Ufer, S., Reiss, K. y Fischer, F. (2013). Learning to argue in mathematics: effects of heuristic worked examples and CCSL scripts on transactive argumentation. En N. Rummel, M. Kapur, M. Nathan & S. Puntambekar (Eds.), *To see the world and a grain of sand: Learning across levels of space, time and scale. Actas the International Conference on Computer-Supported Collaborative Learning (CSCL) (Vol 1. Full Papers and Symposia)* (pp. 526-533). International Society of the Learning Sciences.

Wagner, P., Smith, R., Conner, A., Singletary, L. y Francisco, R. (2014). Using Toulmin's Model to Develop Prospective Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Collective Argumentation. *Mathematics Teacher Educator, 3(1),* 8-26. doi:10.5951/mathteaceduc.3.1.0008

Walshaw, M. y Anthony, G. (2008). The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research into Mathematics Classrooms. *Review of Educational Research, 78(3),* 516–551. doi: https://doi.org/10.3102/0034654308320292

Wenzel, J. (2006). Three perspectives on argumnent. En R. Trapp (Ed). *Perspectives on argumentation*. (pp. 9-26). Nueva York, Estados Unidos: Idebate Press.

Whitenack, J., Cavey, L. y Ellington, A. (2014). The role of framing in productive classroom discussions: A case for teacher learning. *Journal of Mathematical Behavior 33,* 42– 55, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.003

Wood, T. (1999). Creating a Context for Argument in Mathematics Class. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30,* 171-191. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/749609

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*, 21, 423–440. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458–477.

Yopp, D. (2012). Valuing Informal Arguments and Empirical Investigations during Collective Argumentation. *PRIMUS, 22(8),* 643–663 doi: 10.1080/10511970.2011.621164

Yopp, D. (2015). Prospective elementary teachers' claiming in responses to false generalizations. *Journal of Mathematical Behavior 39,* 79–9. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.003

Žalská, J. (2017). Looking for the roots of an argument: textbook, teacher, and student influence on arguments in a traditional Czech classroom. En Durand-Guerrier (Presidencia). *Actas 10° Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Institute of Education, Dublin City University, Dublin, Irlanda. Hal-01865640f