



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

Facultad de Educación

**Análisis y procesos de transformación de recursos pedagógicos relacionados con
el pensamiento variacional**

**Alexander Castrillón-Yepes
Daniel Andrés Quiroz-Vallejo**

INFORME TÉCNICO DE INVESTIGACIÓN

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
CENTRO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS Y PEDAGÓGICAS
MEDELLÍN
2020**

1 8 0 3



1. Introducción

En el contexto de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, los programas de Formación Inicial de Profesores de matemáticas, hasta el 2018 se denominaban como Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física. Sin embargo, siguiendo las orientaciones del MEN (2014), estos programas se han reformado y sus nuevas versiones son Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Física, respectivamente. Uno de los requisitos de grado para cada uno de estos programas de formación es completar un ciclo de prácticas profesionales, regularmente en una institución de educación básica y media, y presentar un trabajo de grado. Se espera que este trabajo involucre un proceso de investigación en relación con las experiencias de la práctica profesional. Posteriormente, se presenta un informe sobre el desarrollo de la investigación que usualmente es alojado en el Centro de Documentación de la Facultad de Educación (CEDED).

En algunos de los trabajos de grado, los futuros profesores identifican problemáticas específicas del contexto en el que están inmersos los estudiantes que acompañan; además, se ponen en escena discusiones teóricas y con base en ellas se pueden proponer tareas, unidades didácticas, talleres y otras acciones que son implementadas en los grupos en los que llevan a cabo su práctica profesional. Se espera que dichas acciones den cuenta del desarrollo de habilidades, actitudes o conocimientos de los estudiantes en relación con un tópico o referente particular en el cual tenían dificultades. Una vez aprobados los trabajos de grado, se almacenan en la base de datos del CEDED para la consulta por parte de la comunidad universitaria y demás actores educativos interesados en la información que se encuentra en estos informes. Sin embargo, parte del material propuesto en estos trabajos no es aprovechado por profesores o investigadores debido al formato en el que se presentan y los propósitos con los que se estructuran.

Los recursos presentes en los trabajos de grado usualmente son construidos para contextos y propósitos específicos en función de la naturaleza del trabajo de investigación, las preguntas que busca responder, las teorías usadas y los diseños metodológicos empleados. Además, estos recursos son usualmente discutidos en los grupos de práctica y con los profesores asesores, y algunos han sido divulgados en eventos académicos nacionales e internacionales. Si bien las maneras de usar las tareas en estos trabajos pueden ser oportunas para el desarrollo de la investigación, no lo son para hacer uso de ellas en otros espacios de formación, pues las adaptaciones necesarias no son inmediatas; no se consideran el conjunto de acciones que proyectan, anticipan, y planifican la acción docente. Además, en ocasiones las tareas se presentan de manera fragmentada en los resultados de investigación con el fin de resaltar los aspectos relevantes para atender a los objetivos. Con ello, se genera una dificultad para identificar los recursos y adaptarlos a las clases de matemáticas.

Teniendo en cuenta lo anterior, la investigación sobre los procesos de transformación de este tipo de recursos posibilita extender su uso a otros escenarios educativos y reconocer el aporte de este tipo de trabajos. Así, la noción de recursos pedagógicos permite tener una visión sobre este material que



trasciende los enunciados y procura interacciones entre el saber, los profesores, los estudiantes y la mediación de instrumentos o herramientas para la acción de docentes y estudiantes (Haspekian y Artigue, 2007; Guin y Trouche 2007; Garzón, Pabón y Vega, 2013).

En el caso particular del material alojado en el CEDED, se ha identificado que en el contexto de los programas de formación inicial de profesores de matemáticas hay alojados recursos relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional en los procesos de la educación básica secundaria (desde sexto hasta noveno grado en Colombia). Este pensamiento es uno de los que destaca el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) para la formación de ciudadanos *matemáticamente competentes*, y su desarrollo es necesario en todos los grados de educación básica y media.

Frente al desarrollo del pensamiento variacional, investigaciones como las de Tavera y Villa-Ochoa (2013), y Ayola, Orozco y Osorio (2016), se han dedicado a analizar el contenido y el tipo de tareas propuestas en los libros de matemáticas. Los primeros autores reportan que los textos de matemáticas suelen distanciarse de los planteamientos del MEN y “parecen desaprovechar los contextos de los ejercicios y problemas allí planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen” (p. 3). Además, mencionan la importancia de promover el uso de herramientas de visualización para el desarrollo de este pensamiento. Por su parte, los otros autores indican que las actividades exploradas tienen mayor incidencia en el desarrollo del pensamiento numérico y no en el variacional, hay pocos sistemas de representación y no se profundiza en el reconocimiento del cambio y la variación. Estas investigaciones dan cuenta de la necesidad de contar con recursos pedagógicos de calidad enfocados en este tipo de pensamiento y que se configuren en programas, unidades didácticas y otros materiales en educación (Vasco, 2003).

Considerando lo planteado anteriormente, ampliar la evidencia empírica sobre la transformación de los recursos pedagógicos a partir del material reportado en Trabajos de Grado en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se constituye como un aspecto de interés para ser ampliado en investigación. Este estudio se enfocó en los recursos pedagógicos que promueven el pensamiento variacional, en correspondencia con los requerimientos del MEN y los desarrollos de investigación en Educación Matemática. Los objetivos que se propuso este trabajo son:

Objetivo general

Indagar por los procesos de transformación de recursos pedagógicos a partir del material reportado en Trabajos de Grado en la Facultad de Educación de la UdeA.

Objetivos específicos

- Categorizar los tipos de recursos presentes en los trabajos de grado registrados en el CEDED frente al desarrollo del pensamiento variacional.



- Identificar las posibilidades y limitaciones que pueden tener los recursos pedagógicos registrados en el CEDED para el desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica.

2. Aspectos teóricos

El pensamiento variacional y el razonamiento algebraico

La Educación Matemática busca el desarrollo de un conocimiento necesario para adoptar una postura crítica frente al mundo que ayude a la toma de decisiones (MEN, 2006). Para cumplir con este propósito, el MEN propone que una meta central para el sistema educativo colombiano es la formación de un ciudadano matemáticamente competente, sobre la base del desarrollo del pensamiento matemático. Este, tiene como uno de sus ejes el pensamiento variacional, el cual pone el centro de atención en el estudio sistemático de la variación y el cambio en diferentes contextos, tanto en las disciplinas científicas (ciencias naturales, sociales, las matemáticas, etc.) como en situaciones de la vida cotidiana. En este sentido, Vasco (2003) expresa que el pensamiento variacional se puede entender como sigue:

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 70)

Bajo esa perspectiva, el pensamiento variacional no se refiere al reconocimiento de fórmulas o expresiones matemáticas estáticas, sino que trata de identificar aspectos como qué varía (y qué no), cómo varía, en relación con qué lo hace y sobre cómo variaciones en una magnitud puede producir cambios en otra. El MEN (1998) menciona que tanto en la vida práctica como en la actividad científica, la variación está presente en la dependencia de variables o en contextos donde cambia una misma cantidad, aspectos que promueven la observación, el registro y el uso de lenguaje matemático en los estudiantes.

Por otra parte, el Pensamiento Variacional está relacionado con los otros tipos de pensamiento matemático propuestos por el MEN (1998): numérico, espacial, métrico y aleatorio; esto, al menos por dos razones: la primera porque el estudio de situaciones de variación y cambio pueden estar enmarcadas en un contexto que requiere de conocimientos y habilidades propias de los otros pensamientos. De otro lado, porque todos los pensamientos matemáticos ofrecen herramientas para modelar matemáticamente situaciones como resultado de la cuantificación de la variación.

Otro aspecto que vale la pena resaltar es que el pensamiento variacional tiene una relación estrecha con algunos procesos propuestos por el MEN (1998) y reportados ampliamente en la literatura. Entre ellos se ha destacado su particular importancia en el proceso de modelación matemática (Vasco, 2003; Torres y Torres, 2019) debido a su relación con la cuantificación de magnitudes, la



identificación y el reconocimiento del cambio y la variación en fenómenos y situaciones de diferentes contextos. En este sentido, el pensamiento variacional está relacionado con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diversos contextos (Vasco, 2003). Otros procesos que pueden estar involucrados en el pensamiento variacional son: la resolución de problemas, la descripción y la representación.

El desarrollo del pensamiento variacional también tiene que ver con la incorporación de diferentes sistemas de representación (gráfico, tabular, corporal, verbal, algebraico o geométrico) en los cuales se pueda reconocer el cambio y la variación. Adicionalmente, el estudio de este pensamiento desde edades tempranas permite construir algunos elementos propios del álgebra, tales como la relación de igualdad en sus múltiples significados, el concepto de variable, de parámetro, de incógnita, de ecuación e inecuación, entre otros. Las anteriores reflexiones muestran que el desarrollo de este pensamiento no discrimina niveles educativos específicos sino que debe procurar brindar un carácter dinámico a través del cual se desarrollen un conjunto de procesos orientados a las construcciones de los aprendizajes propios del cambio.

Si bien en la literatura internacional se reportan pocos desarrollos alrededor del Pensamiento Variacional, existe una perspectiva que comparte algunas características con este, conocida como Razonamiento Algebraico, la cual ha sido ampliamente estudiada (Kaput y Blanton, 1999, 2005; Kieran, 2011; Godino et al., 2012; Blanton, 2018). Posada et al. (2006) plantean que “el razonamiento algebraico alude al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional” (p. 16). En esta línea de ideas es posible identificar el pensamiento variacional como uno de los elementos que constituyen el razonamiento algebraico. Por su parte, Godino et al. (2012) proponen como elementos constitutivos del Razonamiento Algebraico tanto los procesos de generalización como los medios utilizados para simbolizar las situaciones donde esta se ve inmersa. Adicionalmente, el razonamiento algebraico puede implicar el uso de la aritmética y la modelación para la expresión y formalización de generalizaciones, y la generalización sobre sistemas matemáticos abstractos o sobre patrones numéricos para describir relaciones funcionales (Kaput y Blanton, 1999; 2005).

Lo expresado anteriormente pone de manifiesto algunos puntos de encuentro entre el pensamiento variacional y el razonamiento algebraico. En principio, hay una preocupación común por los procesos de generalización y comprensión de los variables e invariantes en los sistemas matemáticos. Sin embargo, también existen diferencias en tanto el razonamiento algebraico propone abarcar conceptos propios de la aritmética para hacer la transición al aprendizaje del álgebra escolar. Además, abarca la comprensión de conceptos estructurales del álgebra (grupos, campos, espacios, entre otros), de los cuales el pensamiento variacional no se encarga, a menos que se aborden desde una perspectiva de cambio.

Considerando las relaciones existentes entre el Razonamiento Algebraico y el Pensamiento Variacional, para el desarrollo de este trabajo, se incluyeron aspectos como: pensar lo general en lo particular, pensar en reglas sobre patrones, pensar relacionamente sobre la cantidad, el número y las operaciones numéricas; pensar de manera representativa sobre las relaciones en situaciones



problemáticas; pensar conceptualmente sobre el procedimiento; anticipar, conjeturar y justificar; y la visualización y el lenguaje (Kieran, 2011) presentes en los trabajos de grado siempre y cuando se enmarquen en situaciones de variación y cambio.

Recursos pedagógicos

La manera en que se desarrollan los procesos educativos en los diferentes contextos y niveles de formación dependen, en gran medida, de las herramientas, dispositivos y materiales que se emplean en el aula. En este sentido, la investigación sobre las oportunidades, limitaciones y usos de estos recursos son pertinentes en Educación Matemática. En particular, la noción de recurso pedagógico busca resaltar las correlaciones entre las herramientas o el material educativo empleado con el saber, el contexto, la práctica de los profesores y los estudiantes (Garzón et al., 2013). Así, la idea de recurso pedagógico trasciende la visión del material que se emplea en el aula y que, en sí mismo, puede posibilitar el desarrollo de competencias o la comprensión de conceptos (Posada y Taborda, 2013).

El uso de talleres, actividades y guías (entre otros) no garantiza que los estudiantes aprendan; sin embargo, su uso es recurrente tanto en la planeación de las clases como en la práctica de los profesores y en la actividad de los estudiantes. Por ello, es importante estudiar la manera en que se configuran estos recursos pedagógicos en el escenario educativo y en la práctica de los profesores (Santacruz y Garzón, 2015). Al respecto, Garzón et al. (2013) destacan la existencia de al menos tres perspectivas en el desarrollo de la noción de recurso pedagógico:

- La primera tiene que ver con el trabajo de Guin y Trouche (2007), donde los recursos pedagógicos son descritos bajo tres componentes: 1) un compendio de documentos, 2) la situación matemática a la que se enfrentarán los estudiantes y 3) el aprovechamiento didáctico que de ella hacen los profesores. Para estos autores, es necesario considerar en los escenarios de uso de recursos pedagógicos, que las secuencias de situaciones estén mediadas por un artefacto u objeto que medie la relación entre profesores y estudiantes. Además, es necesario que los recursos pedagógicos sean susceptibles de evolucionar a través de la valoración que hacen los profesores del mismo.
- La segunda perspectiva refiere al trabajo de Haspekian y Artigue (2007) sobre los recursos pedagógicos, quienes, por medio de artefactos informáticos (hojas de cálculo), proponen que es posible, a través del análisis que los profesores hacen de los recursos profesionales, importarlos a contextos educativos.
- Finalmente, los planteamientos de Hegedus y Moreno-Armella (2010) se basan en la génesis instrumental para ampliar la idea de artefacto con base en medios tecnológicos y el uso de sistemas de álgebra computacional. En coherencia con ello, se plantea la noción de co-acción que permite entender las relaciones entre los usuarios y los entornos donde se desenvuelven (en ese caso, los estudiantes son los usuarios y el software refiere al entorno). Además, los autores buscaron diferenciar entre instrumentación (cómo las



herramientas dan forma al pensamiento) e instrumentalización (cómo las herramientas son adaptadas y moldeadas por los usuarios para atender a una situación).

A pesar de lo anterior, Garzón y sus colegas (2013) proponen otra perspectiva donde se destaca el Contexto de Clase (CC), la Práctica del Profesor (PP), el Recurso Pedagógico (RP) y lo que podría denominarse un Saber Específico (SE, en el caso de los investigadores el saber específico refería al geométrico), donde se presentan los procesos de orquestación, toma de decisiones, práctica discursiva y Enseñanza en Acto tal y como se representa en la Figura 1. Adicionalmente, estos autores destacan la importancia de la gestión didáctica y de la adaptación, diseño o ajuste de este tipo de recursos en el aula.

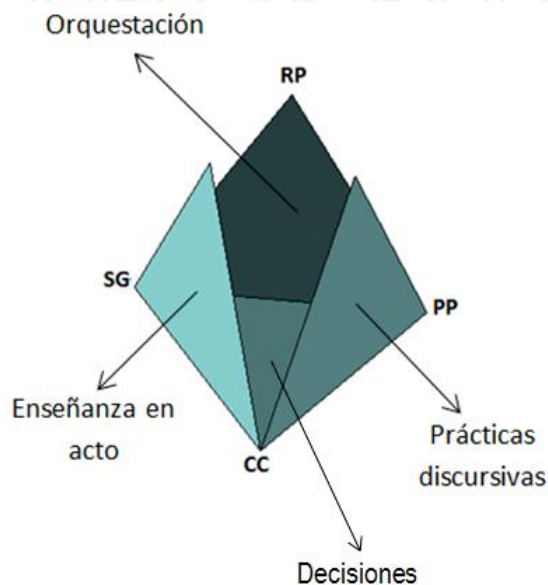


Figura 1. Procesos Según Garzón et al. (2013).

Los recursos pedagógicos, en este trabajo, consisten en construcciones intencionadas que tienen implicaciones en el desarrollo de la actividad de los estudiantes y los profesores. En el proceso de diseñar, compartir, apropiar y adaptar los recursos se dan transformaciones tanto en el saber matemático, como en el saber didáctico y pedagógico. Bajo esa perspectiva, el recurso pedagógico no es estático, sino que cambia y se transforma constantemente en función de los propósitos de formación y la mediación docente. Así, la transformación de los recursos pedagógicos no consiste en prescribir unos tiempos y acciones en el aula, sino que requiere considerar las condiciones de uso y las experiencias emergentes que pueden transformar el actuar de los estudiantes y los profesores en el aula.



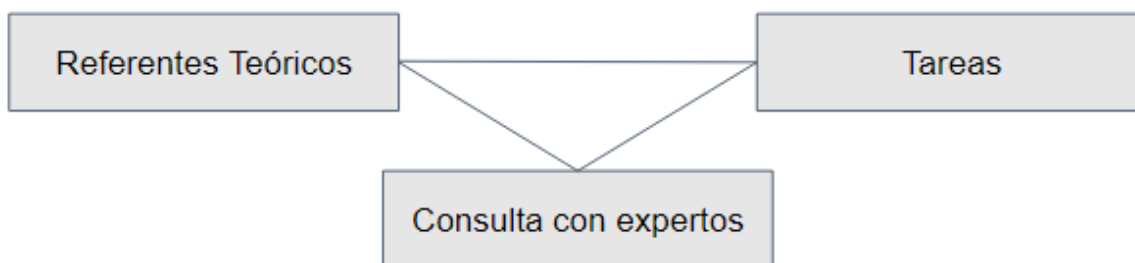
Finalmente, se resalta que los recursos pedagógicos pueden ser diversos y abarcan tanto herramientas físicas y tangibles como ideas, estrategias o recursos digitales (ejemplos de algunos recursos son los softwares, las simulaciones y las tareas propuestas en libros de texto) que posibilitan la actividad de los estudiantes en las clases. Es por ello que el uso de los recursos pedagógicos implica la selección de material de calidad en correspondencia con el conocimiento matemático de interés y las características de los estudiantes, la adaptación o re-diseño del recurso y la intervención del maestro (Santacruz y Garzón, 2015). En particular, este trabajo consideró los diferentes recursos relacionados con el Pensamiento Variacional puestos a disposición en los trabajos de grado de los estudiantes de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

3. Aspectos metodológicos

En coherencia con los propósitos de esta investigación, el enfoque metodológico adoptado se caracteriza por ser cualitativo. Como técnica se optó por el análisis cualitativo de contenido, entendido como una aproximación empírica de textos, bien controlada y considerando sus contextos, siguiendo reglas analíticas y modelos paso a paso (Mayring, 2000). Esta técnica es pertinente en este trabajo dado que posibilitó reestructurar los datos recogidos, categorizando la información a través de pasos sucesivos hasta llegar a la conceptualización o regla descriptiva que justifique esa categorización (Cáceres, 2003).

En busca de documentar los procesos de transformación de los recursos pedagógicos en relación con el pensamiento variacional en la educación básica, este trabajo se desarrolló en cuatro fases basados en los planteamientos de Cáceres (2003): selección del objeto de análisis, desarrollo del pre análisis, y desarrollo de categorías.

3.1. Selección del objeto de análisis.



En esta fase, los investigadores hicieron una revisión de antecedentes, que consiste en el proceso de rastreo, selección y lectura de investigaciones y documentos relacionados con la conceptualización del pensamiento variacional y los recursos pedagógicos. En esta fase se revisaron principalmente algunos documentos derivados de investigación y los planteamientos del MEN.

Posteriormente, los investigadores accedieron en Junio del 2019 al repositorio institucional y de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia para identificar cuáles trabajos de grado



estaban centrados en el pensamiento variacional. Para ello, se construyó una base de datos donde se diferenció el tipo de trabajo, el programa al cual estaban adscritos, la relación explícita con el pensamiento variacional, los grados donde se implementaron las tareas y que fueran de libre acceso para la consulta.

A partir de la base de datos construida, cada investigador revisó el resumen, las palabras clave, las conclusiones y los anexos de los trabajos para identificar su pertinencia en esta investigación. Luego, los investigadores realizaron un consenso que permitió seleccionar 16 trabajos de pregrado.

La importancia de esta fase radica principalmente en identificar trabajos relacionados con este tipo de estudios, elementos teóricos clave para el posterior análisis de los recursos pedagógicos presentes en los trabajos de grado; y enlazar los planteamientos ministeriales con las tendencias nacionales e internacionales en Educación Matemática.

3.2. Desarrollo del preanálisis

Para el análisis de los recursos y la identificación de los aspectos involucrados en los procesos de transformación de estos fue preciso elaborar dos fichas; una para estudiar las principales características del recurso propuesto en los trabajos de grado; otra para el proceso de transformación a recursos utilizables en las aulas. Estas fichas fueron construidas a partir de la revisión de los antecedentes y un primer acercamiento a los trabajos de grado; y se modificaron a partir de las discusiones generadas con algunos participantes en el Semillero de Investigación MATHEMA y en eventos académicos. Este proceso se puede resumir como una triangulación entre los referentes teóricos utilizados en este trabajo, las tareas presentes en los trabajos de grado y la consulta con expertos en el área Ver Figura 2.

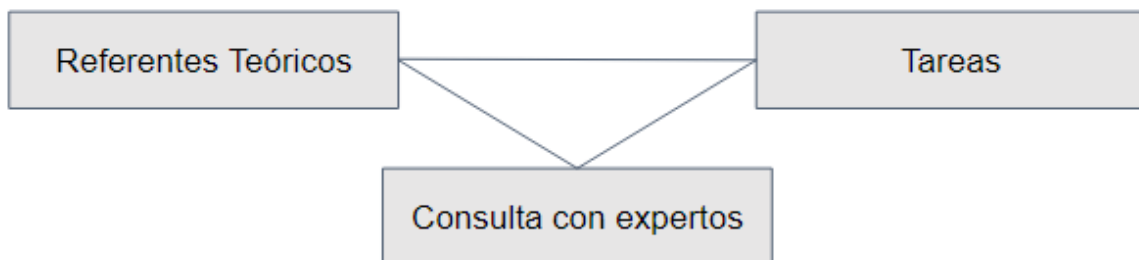


Figura 2. Proceso de Triangulación.

Fuente: elaboración propia.

La primera ficha, la cual se consideró para el análisis de los recursos, contempló tres apartados generales, uno para detallar los aspectos técnicos y curriculares del recurso, y otro para los soportes teóricos y metodológicos del recurso empleado. Esta adopción se realizó debido a que los recursos



que se analizaron hacen parte de un proceso de investigación que condiciona y soporta el recurso usado. A continuación se describen con mayor detalle los aspectos que consideró cada apartado:

- **Aspectos técnicos y curriculares:** Incluyó aspectos como la ubicación del trabajo, los autores, el grado donde se aplicó, las temáticas involucradas, la pregunta del trabajo de investigación (o sus objetivos), los aspectos curriculares (por ejemplo, los Estándares Básicos, Lineamientos curriculares o Derechos Básicos de Aprendizaje), una síntesis de los procedimientos para los estudiantes, objetivos o propósitos declarados frente al uso del recurso, preguntas que orientan la tarea o situación, tiempo requerido, habilidades previas, herramientas o artefactos necesarios para desarrollar las tareas (software, materiales físicos, etc.) entre otros.
- **Soporte conceptual y metodológico de la tarea:** Contempló la relación con el pensamiento variacional y el razonamiento algebraico, relación con otras áreas del conocimiento, teorías o conceptos que soporten el recurso, metodología del trabajo de investigación, materiales necesarios (físicos o digitales), entre otros.
- **Categorización y posibilidades de ampliación:** Incluye la categorización del tipo de recursos según las categorías presentadas en la siguiente fase, la descripción sobre posibilidades de ampliación a partir de otros recursos disponibles en diferentes medios o formatos (algunos estipulados en otros trabajos de grado) de tal manera que se cuente con diferentes alternativas para tomar decisiones y actuar en el aula (Garzón et al., 2013). Así mismo, este apartado contempló la inclusión de los aspectos curriculares (en caso de que el recurso no contara con ellos), propósitos y otros aspectos necesarios para su inclusión en los escenarios educativos.

Para fortalecer el análisis, cada investigador revisó todos los trabajos de grado a partir de las fichas y posteriormente se reunieron para discutir sus hallazgos, identificar convergencias y divergencias, y construir un plan de acción para la posible sistematización de los recursos pedagógicos. Para ello, usaron la ficha para la transformación del recurso en un entregable que se pudiese usar por profesores en sus clases, el cual consideró aspectos curriculares y teóricos sobre el pensamiento variacional y el razonamiento algebraico; también fue necesario considerar el rol del profesor y los estudiantes para su posterior uso. En ese sentido, fue necesario definir objetivos para cada recurso, orientaciones metodológicas sobre su implementación y una diversidad de medios que permitieran a los maestros tomar decisiones con base en su contexto.

3.3 Desarrollo de categorías

A partir del análisis de los recursos, se lograron identificar algunas tendencias en el contenido, la estructura, las acciones que deberían desarrollar los estudiantes y la manera en que se promueve el pensamiento variacional. Esto permitió a los investigadores caracterizar el tipo de recursos tal y como se presenta en la Tabla 1:



Tabla 1.
Categorización de los Tipos de Recursos

Categorías	Recursos estáticos o aplicativos	Recursos pseudo variacionales	Recursos variacionales	Recursos co-variacionales
Descripción	Incluye los recursos en los cuales se pide a los estudiantes hallar ciertos valores numéricos frente a una situación o donde se presentan situaciones donde no se debe estudiar el cambio, ni la correlación entre magnitudes que covarían.	En este caso hay situaciones que se presentan en contextos dinámicos, pero las preguntas o problemas que deben resolver los estudiantes tienen una perspectiva estática al centrarse en valores específicos.	El foco de atención se centra en cómo cambia una magnitud de un estado a otro. Generalmente se usa el tiempo para la comparación, pero no se le considera una magnitud susceptible de variación.	La variación se da a partir de la relación entre cantidades. Si una cambia, produce cambios en la otra y el foco se centra en estudiar esta correlación en la variación y no en la variación de una sola cantidad.

Fuente: elaboración propia

3.4. Sistematización de recursos pedagógicos

Finalmente, a partir de las fases anteriores, los investigadores procuraron sistematizar un recurso pedagógico para ampliar la discusión sobre los procesos de transformación. Para ello se utilizaron los recursos planteados en diferentes trabajos de grado que podrían verse como complementarios y se diseñaron otros que buscaban ampliar las posibilidades de los propuestos en los trabajos. Aunque solo fue posible elaborar un recurso pedagógico, el proceso de construcción permitió identificar aspectos fundamentales para la transformación de los recursos y su adaptación para el uso en las aulas, algunos de estos planteamientos se presentan en el apartado de resultados.

Las cuatro fases descritas permitieron reconocer las posibilidades y limitaciones de los recursos que se encuentra en el CEDED frente al desarrollo del pensamiento variacional. Así mismo, brindaron argumentos a favor de la necesidad de ampliar el uso de estos recursos a las aulas y algunos de los aspectos que se deben contemplar para su adaptación. En este sentido, en el siguiente apartado se



presentan algunos de los resultados sobre la revisión de los trabajos de grado, los recursos disponibles en su interior y sobre consideraciones que profesores e investigadores pueden tener en cuenta a la hora de adaptar recursos pedagógicos para sus clases y proyectos.

4. Resultados

En este apartado se presentan parte de los resultados de este proyecto de investigación en relación con algunas de las categorías presentadas en el numeral anterior. En particular, se ilustran ejemplos de los tipos de recursos analizados, se comparten posibilidades y limitaciones y se sugieren algunos elementos para la transformación de este tipo de recursos para su uso en el aula, mediante la adaptación curricular, el uso de diferentes artefactos y la mediación del profesor.

Recursos pseudo variacionales

En el trabajo de Vásquez (2014), por ejemplo, se presenta una propuesta alrededor del movimiento en el grado noveno, la cual se estructuró en tres laboratorios y la aplicación de actividades intermedias para reforzar en los estudiantes los conceptos vistos y prepararlos para los siguientes. En el primer laboratorio se propuso una actividad de exploración donde se hicieron preguntas abiertas, se pidió analizar una gráfica de posición vs tiempo en un applet y se solicitó completar la tabla que se presenta en la figura 3. Como se observa en la tabla, este tipo de actividades promueven una visión estática del movimiento, donde hay que hallar valores específicos desconocidos como el espacio o el tiempo en correspondencia con otras cantidades dadas.

VELOCIDAD	ESPACIO	TIEMPO
2 m/s		15 seg
2 m/s	70 metros	
7 m/s		5 seg
7 m/s	70 metros	
9 m/s	40 metros	

Figura 3. Relación entre velocidad, espacio y tiempo para una situación de movimiento.

Fuente: Vásquez (2014)



En el laboratorio 2, centrado en la introducción de nuevos conocimientos, los autores piden a los estudiantes ingresar al applet: http://www.educaplus.org/movi/3_3et1.html y leer el texto que allí aparece; luego, se les pide responder a los siguientes enunciados:

- De acuerdo a la información anterior, ¿qué significa la pendiente de la gráfica desplazamiento contra tiempo?
- Dentro del simulador, modifica la velocidad hasta 2 m/s y dale clic en inicio ¿Qué tipo de función se modela?
- Si el motociclista siguiera su recorrido, ¿Cuál sería su velocidad en el tiempo 8s y por qué?
- Ahora, modifica la velocidad a 4 m/s y acciona el simulador, ¿en qué se diferencia esta gráfica con la gráfica anterior?
- ¿Por qué crees que las gráficas son diferentes? ¿Cuáles son los factores que hacen que las gráficas sean distintas?
- Luego, modifica nuevamente la velocidad del movimiento hasta 5 m/s, cuál es la posición aproximada de la motocicleta?
- ¿Qué relación puedes establecer entre la velocidad de la motocicleta y el tiempo teniendo en cuenta las situaciones que se enunciaron en las preguntas anteriores?, explica por qué

En ellos se puede observar la misma tendencia para encontrar valores desconocidos en una situación que involucra el movimiento. No obstante, el análisis sobre la variación de las cantidades no se presenta. En ese sentido, en este tipo de situaciones las magnitudes involucradas se presentan como incógnitas y no como variables, aunque se encuentren en un contexto dinámico. A continuación se presentan algunas de las posibilidades y limitaciones identificadas en este tipo de recursos.

Posibilidades:

- Reconocimiento de las magnitudes o cantidades involucradas en una situación de movimiento.
- Uso de diferentes sistemas de representación.
- Se promueven procedimientos como la algoritmia y el cálculo.
- Se promueve la argumentación.

Limitaciones:

- Se razona sobre incógnitas y no sobre variables.



- Se desaprovecha el contexto dinámico para analizar el cambio y la variación.
- No se estudian las correlaciones entre las magnitudes y los efectos que la variación de una de ellas produce sobre otras.

Las posibilidades y limitaciones descritas anteriormente, brindan una oportunidad para extender las situaciones propuestas en este tipo de recursos y fortalecer algunos aspectos de la variación y el cambio en correspondencia con la situación que se estudia, en este caso, el movimiento.

Recursos variacionales

En el caso del trabajo de Arboleda (2014), se presentan una serie de situaciones relacionadas con el comportamiento de las funciones lineales en el noveno grado, las cuales se desarrollaron a través de pruebas diagnósticas y retos presentados a los estudiantes. En una de las actividades de la prueba diagnóstica se propuso pensar en una situación que pueda representarse a través de la función lineal para una tabla dada previamente (Véase la Figura 4).

Como se observa en la figura, la actividad parte invitando a los estudiantes a desarrollar una situación matemática, conociendo solamente el comportamiento de la variable independiente. Esta actividad supone dos asuntos: por un lado, los estudiantes deben construir una situación matemática con unos elementos específicos, por el otro, se vuelve necesario identificar cómo deben variar los valores de y en función de los de x . Lo anterior son rasgos característicos del pensamiento variacional, en su fase de descripción y representación (Vasco, 2003).

En esta actividad de la prueba diagnóstica, se presenta a los estudiantes de forma escrita, una actividad relacionada con la función lineal, buscando que construya una situación, que le permita articular lo que conoce de dicha temática.

Construya y represente gráficamente una situación que determine la función lineal para la siguiente tabla.

X	10	40	80	90	100	150	200
Y							

Figura 4. Situación Propuesta por Arboleda (2014)



Si bien la tarea puede considerarse aparentemente simple, involucra al estudiante en un proceso de creación condicionado por los valores dados y, en consecuencia, lo invita a considerar los patrones de variación, en este caso lineal, que se dan en la situación que representa. A continuación, se presentan algunas posibilidades y limitaciones de este tipo de recursos.

Posibilidades:

- Reconocimiento de variable independiente y variable dependiente.
- Uso de diferentes sistemas de representación.
- Se promueve la construcción de situaciones matemáticas.
- Posibilita que los estudiantes exploren los conceptos matemáticos de manera creativa y trasciende la idea de tareas en la cual se presenta una situación y el único deber del estudiante es presentar una respuesta.

Limitaciones:

- Poco aprovechamiento del contexto co-variacional que se presenta en la actividad, dado que solo se enfoca en la variación de una variable.
- Las situaciones matemáticas representadas pueden carecer de contexto, concentrándose solo en las expresiones algebraicas.
- Falta de artefactos para mediar la actividad entre profesor y estudiante.

Las limitaciones identificadas en esta categoría son un potencial insumo para fortalecer situaciones empleadas en búsqueda del desarrollo del pensamiento variacional. Por ejemplo, Rueda y Parada (2016) reportan una experiencia con el uso de artefactos tecnológicos con la finalidad de promover habilidades relacionadas con el desarrollo de habilidades relacionadas con situaciones de co-variación. En este sentido, es posible trascender los recursos variacionales a situaciones que implican el reconocimiento de la co-variación entre cantidades a través del uso de diferentes artefactos tecnológicos que median la interacción entre el estudiante y el profesor (o investigador).

Recursos co-variacionales

Como se mencionó anteriormente este tipo de recursos promueve el análisis de la correlación entre cantidades de co-varian. En ese sentido, se ven implicadas al menos dos cantidades que dan cuenta de una dependencia y que son susceptibles de analizar a partir del cambio y la variación. Un ejemplo en esta línea es el trabajo de Orozco (2018), donde se presentan algunas situaciones y preguntas que requieren del análisis de la co-variación para su resolución. Se propone, por ejemplo, la siguiente situación:



Después de realizar exitosamente la limpieza de ratones en el centro comercial, la agencia fue contratada por una empresa para acabar con la plaga de ratones que esta tiene. La empresa calcula que hay aproximadamente 300 ratones en toda su planta. A pesar que 2 gatos pueden atrapar 5 ratones en 10 minutos, es posible que atrapen menos o más ratones, pero para hacer las cuentas, aceptaremos estos datos:

- La agencia determinó que dos gatos cazan cinco ratones cada 10 minutos.
- Además, la agencia calcula que cuando utilizan a un gato para atrapar ratones, este tiene un costo de 20000 por cada 60 minutos (Esto es porque cada gato necesita cuidado veterinario, alimentación y salubridad) y cada ratón atrapado es pagado a 6300 pesos.

Algunas preguntas propuesta por el autor son:

- La agencia quiere saber si obtiene las mismas ganancias al atrapar los 300 ratones utilizando 2 gatos, 3 gatos, 4 gatos, 5 gatos, etc. ¿Es posible que siempre se esté ganando el mismo valor? Justifica tu respuesta.
- Construye una tabla de 11x2 en la cual se muestre como cambia el tiempo que se demoran para atrapar los 300 ratones aumentando cada vez la cantidad de gatos.
- ¿Qué relación de proporcionalidad hay entre el número de gatos utilizados para atrapar los 300 ratones y la cantidad de tiempo necesario para atrapar dichos ratones?

En este tipo de preguntas se evidencia la necesidad de establecer relaciones entre las variables *cantidad de gatos* y *tiempo requerido para atrapar los ratones* o *ganancias*. La construcción de una tabla en este tipo de recursos no se realiza a partir de una serie de datos presentados en otro sistema de representación, como una gráfica, sino que se debe realizar analizando la variación sobre las cantidades. Además, se debe considerar implícitamente la cantidad de ratones como una constante que condiciona los valores posibles para la cantidad de gatos. A continuación, se presentan algunas posibilidades y limitaciones en este tipo de recursos:

Posibilidades:

- Permiten identificar la correlación entre cantidades que co-varían.
- Posibilitan realizar procesos de generalización a partir de las relaciones entre esas cantidades y extender el comportamiento de una situación a otras similares.
- Se promueven procesos como la resolución de problemas y la modelación de situaciones, usualmente, a partir de las funciones.

Limitaciones:



- Las situaciones suelen ser recreadas y poco contextualizadas.
- Se usan pocos artefactos o instrumentos que posibiliten caminos diversos para aproximarse al estudio del cambio y la variación.

Estos resultados coinciden con los planteamientos de Villa-Ochoa y Tavera (2019) en relación con las posibilidades y limitaciones que tienen ciertos enunciados en el desarrollo del pensamiento variacional y sus posibilidades de ampliación. Al respecto, es necesario enunciar que en este trabajo se identificaron otras posibilidades y limitaciones en los recursos estudiados que debieron ser considerados en el desarrollo del proyecto de investigación tales como: errores conceptuales (principalmente presentes en los artefactos utilizados; por ejemplo, en un applet, se aseguraba que el tiempo es una magnitud vectorial), problemas de digitación, mala calidad en las imágenes o representaciones, oportunidades de usar diferentes recursos físicos y tecnológicos, entre otras. Al respecto, Rueda y Parada (2016) destacan las posibilidades de la resolución de problemas mediante el uso de recursos tecnológicos para promover habilidades cognitivas involucradas en fenómenos de variación. Esta investigación también muestra cómo la interacción entre el profesor (o investigador) y los estudiantes hace que emerjan argumentos, posiciones e ideas de estos frente al estudio de una situación y, a partir de estos aspectos, enfocar la atención en el proceso de co-variación.

La interacción entre docentes y estudiantes, como se plantea en el estudio de Rueda y Parada (2016), está condicionada por el recurso empleado y los usos que se le dan para atender a una situación. En el caso de este proyecto, fue necesario considerar diferentes aspectos para transformar los recursos pedagógicos presentes en los trabajos de grado para que su uso se extendiera a las aulas. A modo de ejemplo, en la Tabla 2 se presentan algunas limitaciones y oportunidades de los recursos, se describen elementos considerados en el análisis y otros necesarios para el proceso de transformación.

Tabla 2. Aspectos Considerados en el Análisis y Rediseño de Recursos.

<u>Limitaciones y oportunidades de los recursos</u>	<u>Análisis de los recursos</u>	<u>Proceso de transformación</u>
Algunas tareas parecen estar orientadas a la ejecución de algoritmos y a seguir instrucciones.	En algunos trabajos no hay problemas para resolver o tareas que emerjan de la actividad de los estudiantes	Considerar los problemas como orientadores de la actividad de los estudiantes y de la mediación del profesor
Falta de claridad sobre la relación entre pensamiento	Faltan criterios específicos para analizar las tareas	Propuesta de criterios para el análisis de tareas



variacional y razonamiento
algebraico

relacionadas con el
pensamiento variacional

El papel del pensamiento
variacional y de las tareas en
el trabajo de grado es
diferente

Las tareas se presentan en
los anexos o en los
resultados

Estructurar los recursos
pedagógicos de manera
secuencial y gradual

Hay diversidad de recursos
involucrados en la tarea o su
solución

Validar el uso de algunos
simuladores e instrumentos

Reconstruir algunas tareas con
el uso de diversos registros de
representación y con diferentes
artefactos de manera que
permitan al profesor tomar
decisiones.

Hay situaciones que evocan
un contexto real, pero los
datos que se brindan para
estudiarla no corresponden a
algo que pueda ocurrir
físicamente.

Analizar la correspondencia
entre la situación planteada
y los datos brindados.

Brindar valores oportunos para
la situación propuesta.

Consideraciones finales

Este trabajo presenta algunas oportunidades de extender el uso de los recursos utilizados por los futuros profesores en sus procesos de investigación a las aulas de matemáticas. Para ello, es necesario considerar tanto los aspectos técnicos y curriculares del contexto en el cual se propusieron dichos recursos como los aspectos metodológicos y teóricos que los soportan de tal suerte que posibiliten procesos de transformación que brinden alternativas a otros profesores e investigadores en Educación Matemática.

Con relación a la noción de recurso pedagógico es importante trascender la idea de que un material o instrumento favorece en sí mismo los procesos de formación o que son meros objetos ajenos al proceso de construcción de conocimiento; por el contrario, esta noción permite reconocer el recurso como mediador del proceso de construcción de conocimiento, en relación con las acciones de los estudiantes y de los profesores. En ese sentido, los recursos pueden dar forma al pensamiento (y promover el pensamiento variacional), pero también pueden ser adaptados y transformados por los profesores para promover la actividad matemática de los estudiantes.

Por otro lado, la categorización de los tipos de recursos propuestos en los trabajos de grado permitió identificar tanto posibilidades y limitaciones para expandir sus usos a las aulas y posibles acciones



para transformarlos a situaciones que involucren el uso de diferentes instrumentos y sistemas de representación. Curiosamente, algunos de los recursos que implican un mayor grado de análisis frente al cambio y la variación de cantidades presentan menor uso de artefactos o instrumentos que brinden alternativas diferentes de identificar la variación como simulaciones, dibujos o esquemas. En este sentido, en el proceso de transformar estos recursos para su uso en el aula es necesario considerar al menos los siguientes aspectos: brindar diferentes alternativas de instrumentos que posibiliten a profesores la toma de decisiones sobre cuál emplear a partir de su contexto y las condiciones de uso, validar dichos instrumentos, usar diferentes sistemas de representación y relacionarlos, sugerir acciones para la mediación didáctica del profesor a partir de los resultados de otras experiencias o investigaciones, diseñar o adaptar tareas de variación y co-variación a partir de problemas o situaciones susceptibles de ser modeladas matemáticamente.

Referencias

- Arboleda Patiño, C. (2014). Desarrollo de la competencia comunicativa y el pensamiento variacional a través de la representación de funciones lineales y cuadráticas en la construcción de situaciones didácticas.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 412-446.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., ... & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 27-49). Springer, Cham.
- Cáceres, P. (2008). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas. Individuo y sociedad*, 2(1), 53-82.
- Godino, J. D., Castro, W. F., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(42B), 483-512.
- Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In *Early algebraization* (pp. 579-593). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Mayring, P. (2000, June). Qualitative content analysis forum qualitative sozialforschung. In *Forum: qualitative social research* (Vol. 1, No. 2, pp. 2-00).
- Ministerio de Educación Nacional . (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Santa Fé de Bogotá.



Ministerio de Educación Nacional. (2014). Lineamientos de calidad para las licenciaturas en educación. Bogotá.

Posada, F., Obando, G., Munera, J., & Villa, J. (2006). Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. *Medellín: Gobernación de Antioquia*.

Posada, D. M., Taborda, M. A. . Reflexiones sobre la pertinencia de las tareas escolares: acercamientos para futuros estudios. *Uni-pluriversidad*, 12(2), 22-33.

Rodríguez, M. S., & Castro, D. G. (2015, March). Recursos pedagógicos digitales para la enseñanza de la geometría en educación básica. In *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Rueda, N. J., y Parada, S. E. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por Ambientes de Geometría Dinámica. *Uni-pluriversidad*, 16(1), 51-63.

Torres, J. E. P., & Torres, L. A. (2019, February). Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática. In *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau* (Vol. 9, pp. 2009-2010).

Vázquez, D. M. (2014). El estudio y comprensión del movimiento rectilíneo uniforme a partir del pensamiento variacional mediante el uso de los laboratorios virtuales. (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

Informe de productos

El presente Pequeño Proyecto generó como productos una ponencia y, por lo tanto, una publicación en las memorias del mismo evento. A continuación, se presentan las respectivas referencias:

Quiroz-Vallejo, D. A., Castrillón-Yepes, A. (2020). Análisis y rediseño de recursos pedagógicos relacionados con el pensamiento variacional presentes en trabajos de grado y tesis de maestría y doctorado. En: X simposio de matemáticas y educación matemática y IX congreso internacional de matemáticas asistida por computador. Bogotá, Colombia.

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3