東北数学教育学会年報
2003.3.31　第34号

翻　訳

この翻訳は、東北数学教育学会年報第29号(1998.3.31, 52-69)に引き続き、現在世界で最も注目される研究団体の一つ **mathe 2000** の中心的存在である Erich Ch. Wittmann の論文を和訳したものであり、mathe 2000, Selected Papers (pp.278)のために書き下された論文です(同論文集265-278に掲載)。当方は、同氏から直接にこの論文集の送付を頂きました。なお、2001年のPME25(ユトレヒト)の mathe 2000 分科会の参加者にも配布されました。

同氏の論文の和訳は上掲の他、Wittmann, E., 湊訳(2000); 算数・数学教育を生命論的過程として発展させる, 日本数学教育学会誌, 82,12, 30-42)があります。

教師教育のΑ(アルファ)とΩ(オメガ):数学的活動の組織化

E. Ch. ビットマン (ドイツ・ドルトムント大学)

訳　湊　三　郎 (秋田大学名誉教授)

from **Developmental Research Project, mathe 2000, Selected Papers. University of Dortmund. Department of Mathematics, 265-278.**

今後の教授=学習過程では教師の主導と児童・生徒の受容とにとって代わって組織化と活動とが殊更注目させられるべきものとなる.

Johannes Kühnel (1869-1928)

1. はじめに

本論文の目的は、教員志望学生向けの数学入門科目を概観し, その背景にある理念を説明することです.

本論文は次のように構成されています. 如何なる分野の学生であろうと数学的訓練は彼等の専門職的場に位置づけて行われるべきであるとの一般的な提案から出発します. 次ぎに, 発見学習の原理を強力に奨めているドイツの初等教育の場を概観します. 第三に, 本論文の主要な部分として O 型台本・A 型台本の方法を提示します. これらは発見学習の原理に沿って教員志望学生の数学的活動を促すための独特な教授=学習方式です. 第4節においては初等教育教員養成の場における証明の観念に専ら注意を払います. 本論文はこの方法に対する教員志望学生による評価に

関する結果を幾つか述べて結論とします.

2. 場における数学

大学段階での数学の教授=学習はこれまで社会的議論の対象にはほとんどなりませんでしたが, 今日では世界的に広い関心を呼んでいることは注目すべきことです. この問題に関するICMI Study(ICMI 1997)の討議文書にはこの様変わりに対する外的な理由として五つが掲げられています。

1. 高等教育機関への進学者数の増加,
2. 大学以前の段階で行われてきた指導法や教育課程の改訂
3. 中等教育と高等教育との乖離の増大
4. 科学技術の急速な発展
5. 大学の説明責任の要求

これらに内的な理由を一つ付け加え, この理由に関して意見を述べます. その理由とは, 数学の本姓に関する見方の変化です. 20 世紀の初めの四分の三は形式主義と、完璧な数学的建築に最終的に到達するブールバキの構造主義の両者の確かな勃興を目の辺りに見てきました. しかし, この目論みは数学の分野の中には成功したところもありますが, 普遍的な目論みとしては失敗であることが 70 年代の終わりまでにわかりました. このことは, 例えば言語学や建築学などの他分野における同様な構造主義的目論みにおいても同様です. 如何なる研究分野においても意味論が構文論によってとって代わり得ないことがこの時点で広く認識されたのでした. ポストモダンの哲学は、全ての人間活動が, これには数学的活動も含まれます, 意味に充ちた場を欠くことができないことを再発見しました. 数学観の変化の詳細に関して私はDavis and Hersh(1981)及びErnest(1998)によっています.

その結果の一つに, 数学なるものを学術研究の一分野としてだけではなく, 広範な社会的事象として認めなければならないことがあります. その利用と表現様式は多様であり, 私達が大学の数学科に典型的に見出す専門的数学の類によって映し出されるのは一部分に過ぎません. 私は科学, 経済学, 工学, 商学, 工芸, 美術, 教育, などを含む広範な意味, 更にこれらの場に特化された習慣や要件をも含めてた意味, における数学的な仕事を大文字を用いて MATHEMATICS(日本語では「数学的なもの」, 訳者注 この言葉は既に湊他 5 名(1998)「設計科学としての数学教育学」. 東北数学教育学会年報第 29 号, 52-69. において訳語として使用しています)を用いることを提案しています. もちろん, 専門的数学は数学的なものの中心部分にあります. しかし, 数学者は数学的なものの全体を占有することは出来ず, 占有すると主張すべきでもありません. 数学の如何なる一片たりともそれ自体が本

来的に応用をもたらす絶対的な知識体を形成するものであるとの想定は根拠のないことです． J.T. Schwartz(1986) が彼の論文において「科学に対する致命的な悪影響」という激烈な言葉を用いて，場に対する固有な関心を払うことなしに他分野に数学を応用しようとする専門的数学者に警告を発しています．

大学における数学の教授=学習の成果を明確にすることが必要です．数学を専攻しない学生に対する数学教授において基本的かつ組織的に考えられてきたのは数学専攻的場でした．数学専攻学生の場合に専門家としての訓練は相応しいのですが，数学を専攻しない学生の訓練にそれは相応しくありません．

本論文において考察する専門職的場は初等教育(訳者注　ドイツの学校制度からすれば，これは6才入学の4年(一部の州は6年)の基礎学校を指します．なお義務教育はこれを含めて9年(一部の州では10年)です)における算数指導です．この仕事を見下す数学者もいるものです．私からすればこういった考えは根本的に間違っています．数学的なものの中における初等的な算数の重要性はいくら過大評価してもし過ぎる事はありません．つまりは，子供達が初めて数学と組織的に出会うのがこの段階ですし,それ以後の数学教育の全てが据えられるのがこの段階だからです．道教の教えを以下に引用しておきましょう．

> 難事を仕上げるには初めの易しい時が肝心である．
> 小事を育てて大事とせよ．

初等教育教員養成の場の大部分は特殊ではあるものの，本論で採り上げた一般的方法論は他の専門職的分野のための数学科目の開発に関して興味あるものでしょう．

3．教師教育の場

80 年代の初め以来，ノルトライン・ヴェストファーレン州における初等教育開発はドイツの他州に大きな影響を及ぼしてきました．ノルトライン・ヴェストファーレン州(この州の人口は千七百万人でドイツの最大の州です．)の初等数学教育のための条件は下記二点において他州と際だった違いがあります．

1．大学の前期(ドイツの初等教育教員養成では，前期の 3 年間を大学において過ごし，後期の 2 年間は学校に隣接する専門施設で過ごす．)には，初等教育教員志望学生の全員が三教科，ドイツ語，数学，及び第 3 教科(例えば環境教育，体育，美術など)を学ばなければなりません．これら三教科の一つが主専攻教科(3 年間の 120 単位のうちの 45 単位)として選択されます．残る 2 教科は副専攻教科(各 25 単位)です．これらを 120 単位から引いた 25 単位は一般教養(教授学，心理学，等) です．結果として数学は初等教育教員志望学生の必

修科目となっています．学生の凡そ 90%が数学を副専攻科目(25 単位)として選択します．

2．1985 年に採択された初等教育(1 年から 4 年)の教授細目はドイツの公教育の歴史において重要な転回点を印しました．発見学習が教授=学習の基礎的原理として初めて明確に以下のように規定されました(ノルトライン・ヴェストファーレン州文化省 1985, § 3)．

数学教育の指導と目標は，数学の学習が構成的，探求的過程であると捉えられるという着想よって最善に行われる．従って，学習指導は学習過程の全段階において可能な限り多くの自主的な学習の機会を与えるように組織されなければならない．

1. やりがいのある場面から出発する．観察すること，疑問をもつこと，推測するように促す．
2. 探求に向けて一つの問題，又は複合的問題を提示する．個別による探求を奨める．個別による解法を支援する．
3. 多様な仕方によって新結果を既知の事実と関連づける．一層簡単な方法で結果を提示させる．記憶の貯蔵を支援する．技能の個別による練習を促す．
4. 新知識の価値とそれを獲得した過程について話す．類似な新場面への転移を示唆する．

教師は子供達にとってやりがいのある場面を見出し，提供すること，本質的教材と技能の練習のための生産的方法とを用意すること，とりわけ全児童の学習過程に役立つ情報伝達の形態を作りあげ，維持することである．

既製の教材に代わって数学的過程をかくも強調することは教授細目の他の部分にもみられます．例えば，第 1 節「指導と目標」は指導に関して四つの一般的目標，数学化，探求，推論，情報伝達，を列挙しています．当然なことですが，これらの目標が全ての水準において数学することの基礎的成分を表しています．教授細目の第 4 節では，一方の数学的構造と他方の数学の応用とが何故に一つの硬貨の表裏であるか，これらの二つの側面が授業において如何に連結するかを具体的に示しています．この相補性に関する明示的な記述もドイツの基礎学校にとっては初めてのことです．

この新細目の開発には同様な開発を行っている他の西欧諸国，特にオランダから多大な影響を受けたことは確かです．しかしながら，ドイツの数学教育には活動主義的学習に対する強い方向性がこれまであったのも事実です．今世紀初頭，ドイツにおける進歩主義教育の指導的人物の一人である Johannes Kühnel は，彼の著書『算数指導の再構成』(Neubau des Rechenunterrichts, 1954, 70)において今後の教授＝学習の指導法を次のように記述しています．

学習者はもはや知識の受容者としてではなく，知識の獲得者とみなされるこ

とになるだろう．これからは教師の主導と児童・生徒の受容ではなく，組織化と活動とが教授=学習過程の重要な旗印になる．

80 年代の後半から，この新しい指導概念に向けた実践的方法論と革新的な教科書を含めた教材開発において相当な前進がなされてきました（Winter, 1987, Wittmann and Mǔller, 1994-97, Becker and Selter, 1996）．プロジェクト 'mathe 2000' はこの開発に指導的役割を演じてきました．もちろん，これらの教材の履行は，これまでの教授=学習に深く根ざしてきた主導・受容様式を捨て，組織化・活動様式を良いものとして選び得る教師の能力に決定的に依存します．だが，経験が示すところによれば新指導法を一般論として記述するだけでは充分でありません．学校という仕組みの中で必要な変化を刺激し支援するためのまともな方法は組織化・活動様式に従って教師教育を再構成することです．数学的な活動に関する自らの経験をもつ教師だけが外部からのお仕着せとしてでなく自分の授業に活動的方法を自然に適用することが期待されるのです．従って，教師養成教育，及び現職教育における全ての努力は教員志望学生と現職教師の数学的活動とを活性化することに集中すべきです．

面白いことに学生の活動に関する新しい力点は教師教育に限られるものではなく，それは大学段階における数学教授についての当今の議論の一般的状況なのです（ICMI 1997 における学生の活動の節を参照のこと）．

注記　1987 年に設立された 'mathe 2000' はドルトムント大学におけるカリキュラムプロジェクト（代表は Gerhard N. Müller, Heinz Steinbring, Erich Ch. Wittmann）の研究団体です．このプロジェクトはこれまで一連の革新的教科書を含めて基礎教育段階における算数の指導のための理論的概念と実践的教材との開発に関わってきました．しかし，このプロジェクトは数学教育の総合的視点に基づいており，近く中等教育段階にも拡大します．このプロジェクトの固有な特徴として，指導法の設計，教師養成教育，現職教育，相談活動，及び普及活動が密接に関連しており，また同時に追求されるものです．この生命論-生成的方法論に関して開発過程そのものにおいて教育制度を共にする全ての教師が手を携える理論・実践の連絡網の構築が必須です．これについては算数技能の練習の為の手引き（全２巻）が基礎的な参考図書として本質的役割を果たします．概観については Müller, Steinbring, and Wittmann, 1997 を参照のこと．

益々多くの数学者が学生の活動を励ますことに特別な注意を向けるようになっています．Bill Jacob の「線形関数と行列論」（Jacob, B.（1995）. Linear Functions and Matrix Theory. New York; Springer.）はその好例です．

４．O 型台本・A 型台本法

ドイツの大学における数学入門科目の伝統的な形式は，週２乃至４時間の講義と，

30 人程の学生群に分かれて行われる2時間の演習とを組み合わせたものです．解説的な講義では大きな刺激を受けることができ，良問に基づくグループによる演習は学生の思考を喚起し情報伝達力をも高めることは十分に承知しています．しかしながら，一般論としては講義・演習形式は主導・受容に向かう強力な傾向を内包しています．解くことのために学生に提供される課題は講義において導入された概念や技法の再生を主として要求するもの，場合によっては単にそれだけのもののことが多いのです．そこで多かれ少なかれ，学生の個別的あるいはグループによる活動は講義に従属する傾向になります．グループにおける活動が講義のつながりに矮小化されることもしばしばです．これはそのグループを受け持つ大学院生が課題や演習問題の正解を提示するからです．

講義・演習は学生数が多い科目に対して完全に共通する形式です．実際，基礎教育教員の養成におけるように学生数が400から600の科目に直面すれば，どうしても主導・受容に向かわざるを得ず，別の方法は考え難いのです．

しかし，発見学習の方向に沿った開発研究に携われば携わるほど自分の授業で従っている教授=学習の様式と、自分の担当する数学教育科目において私が推奨している教授=学習の様式との間の矛盾を次第に強く感じるようになりました(訳者注同感です)．

O型台本・A型台本法はこの認知的葛藤を和らげるものとして開発されたものです．A・Ω法の基礎的観念は至極単純です．Johannes Kühnel の言うことを教師教育においてとり上げ，主導・受容を組織化・活動，即ち講義と演習の両者に組織化・活動を用いること，によって置き換えます．

この新しい教授=学習方式の本質的成分は，黒板やOHP上へ講義者が書き下すテキストに対する個々の学生が練りあげるテキストとの間の明確な違いみられます．教授者の主な仕事は学生自身の作ったテキストの学習を組織化(Organization)することなので，O型台本と呼びます．これは完成されたテキストではなく，多くの断片をもち，ギャップが残され，多くの場合ヒントだけが与えられています．従ってこれはそれに働きかける未完成品です．学生によって練り上げられたテキストはその学生個人の学習活動を表すものであり，本人のA型台本と呼びます．

我々の教員養成課程の規定にはA型台本(の作成と提出)を義務とすることは認められていません．しかし，A型台本は学生が最終テストに不合格となった場合に追試的な資格判定に使うことができます．これまでの経験では大多数の学生は進んでA型台本を書きます．

講義の際の学生の活動の組織化をどうするのでしょう．この疑問に対する答えを見付けようとしていた時に私は次の二つの文に触発されました．

> 理論よりも問題に沿って指導すべきである．理論は問題の一定範囲を枠づけるのに必要な場合に限って展開されるべきである．(Giovanni Prodi)

全ての科学の主要な目標は，第一に観察すること，続いて現象を説明することである．数学において説明は証明である．(David Gale)

そこで，私はこの科目を二つの部分に分けました．第一の部分は A 型台本で仕上げられるべき選び抜いた 50 の一連の包括的問題を導入し，明確化を専ら行うことです．第二の組織化の部分はこれらの問題の理論的枠組みの提示，ただし A 型台本に書き出された学生の学習経験に基づいて，に充てることにしました．第二の部分は通常の講義とかわるところはありません．この方式は学習過程のこの位置に置くことが絶対に適切であると考えます．実際，代案を知りません．

この科目は，初等教育カリキュラムの内容に密接に関わる領域 (1)位置記数法，(2)初等組み合わせ論，(3)等差数列，(4)種々の数列，(5)初等数論 にわたります．

これらの領域は本物の数学的活動のための豊かな活動の場を提供しました．この科目に与えられた機会を活用して教員志望学生は彼等が基礎学校のカリキュラムでお目にかかる背景的知識をより高いところからみることを可能とさせます．さらにそれだけではなく，彼等は数学化，探求，情報伝達における自分自身による経験をも獲得します．

等差数列の領域から選び出した 10 問題は次ぎのようなものです．

1. (Butts, 1973 から) 初めの n 個の自然数の集合{1, 2, 3,..., n} を二つの部分集合に分けて二つの部分集合の要素の和が等しくなるようにしなさい．これが可能な n と不可能な n とを調べなさい．
2. 同様な問題を初めの n 個の偶数の集合{2, 4, ..., 2n}について調べなさい．
3. 同様な問題を初めの n 個の奇数の集合{1, 3, ..., 2n-1}について調べなさい．
4. 継続する自然数の和として表せるのはどんな数ですか．
5. 2 (または 3, 4, ...)個の連続する数の和として表せるのはどんな数ですか．
6. 1000 を連続した自然数の和として表す方法は何通りありますか．
7. 1000 を連続した奇数の和として表す方法は何通りありますか．
8. 月曜から金曜までの間に 60 匹の子羊が牧場で生まれましたが，火曜日は月曜日より 3 匹多く，水曜日は火曜日より 3 匹多く，以下金曜まで同様です．それぞれの日に子羊は何匹生まれましたか．
9. (Steinbring, 1997 から) 図 1 の図式において，円内の数(加数)と第一の箱の

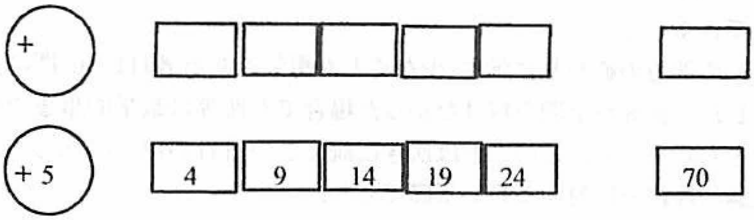

図 1

中の数(出発数)は任意に選ぶ事ができます．残る4箱の数は次の規則に従って次々と計算されます(図1の例を参照のこと)．箱の中の数はその直前の箱の中の数に加数を足す．五つの箱の数を全部加えて最終結果(目標数)を与えます．目標数として 50 を得るには出発数と加数とを幾らにとればよいか．何通りの解があるか．また，目標数としてとり得る数はどんな数か．(本問題と次ぎの問題では全数(正の整数と零)を扱う．)

10. 箱の個数を5から6に変えて同様な問題を調べなさい．

列挙した 10 個の問題は問題生成法(Wittmann, 1971)を援用して構成したものです．ですから発見的手続きの使用が保証されています．問題8は第4学年の教科書から，問題9はその問題に基づく教授実験の知見に関するある論文からとってきたものです．ですから，教員志望学生は基礎学校カリキュラムとの明確な連結を見ることができます．このような連結は以後の数学教育科目で補強されるので，全ての数学科目は教員志望学生にとって専門職的場の中で意味をもつものとなっています．(問題9に自身で取り組んだ後に教員志望学生は，12 名のグループの第4学年児童が 30 分以内で全解答を見出した授業実験ビデオを視聴させられました．)

この科目の第一の部分において毎週の講義は五つの問題を教員志望学生に調べさせるために導入しました．これらの問題は十分詳細に説明され，これらの問題が行動的，映像的，記号的な表象を用いて様々な方法で解決可能なことを示しました．Polya，Mason，Schoenfeld らが述べている主要な発見的手法をこの科目の問題に触れながら説明しました．ただし，解は与えていません．

教員志望学生が発展的考えをもった問題はほとんどありませんでした．真の困難性は筋の通ったテキストを明確に記述する方法にありました．A 型台本はどのようなものであるべきかが常に問題となりました．そこで，講義のみでなくグループによる活動においても相当部分がこの困難性に向けられました。私の講義では，幾つかの例をとり上げながら O 型台本のギャップが A 型台本を作るのにどのように補われるべきかを示しました．更に，反省材料をもらうために教員志望学生は自分たちの A 型台本の草稿を提出することが認められ，彼等が受け取った意見に沿って改訂することができました。

この科目の第一の部分の終わりに学生(少なくとも勇気のある者)は 50 問に集中して取り組みました．彼等が全問を解けなかった場合でも彼等は数学的事象の多様性に関する経験をもちました．このことは次ぎに続くこの科目の第二の部分において展開される理論的枠組みに対する良い基礎でした．

例えば，等差数列に関する問題が和の公式と有名な J.J. Sylvester の定理，一つの自然数 n を継続する自然数の和として表現する方法は n の奇の約数の個数に等しいだけある，の証明によって枠づけられました．

両者の証明は何れも先に学生達が開発してきた観念に基づいています.

面白いことに，第一の部分における問題に関する発展的な取り組みは第二の部分においてもうまくいき，普通に行う通常の様式における科目の授業の場合と同じ数学的内容の全部をこの科目はカバーしました.

5．操作的証明

初めに述べた通り，本論文の基本的立場は教員志望学生の数学的訓練が彼等の専門職的場を反映しているべきであるということです．この要件は証明に及ぶときに特に問題となります.

基礎学校の算数の目的に対して，演繹的に構造化された定理に関わる形式的証明の観念は不適当であり，算数のねらいとしての『推論』の良さを味わうための背景としても逆効果を招くことは明らかです．しかしながら，このことは証明の観念が算数に相応しくないということを言っているものではありません．その反対なのです．幸いなことに，近時の証明観は基礎学校教員養成と現場での指導との両者に知的にごまかしのない合体を認めます．数学の史的，哲学的研究は，唯一の厳密な証明が形式的証明であるとする長きにわたり保持されてきた形式主義の教義をうち砕きました．形式的証明の観念は，とりわけ数学の実践という観点から明確な限界をもつことがわかりました(例えば，Branford, 1913, Hardy, 1929, Thom, 1973, Davis and Hersh, 1981, Atiya, 1984, Long, 1986, Thurston, 1994)．Quebec での 1992 年の ICME7 における証明に関するワーキング・グループに Yuri I. Manin が提出した論文において，Manin は証明に関する彼の広範な理解を「旅としての証明」として全く素晴らしく表現しています.

> 研究活動中の数学者は自分たちの仕事が発明であるよりも発見であると感じています．私の心眼は田園風景の如きものをみます，これを数学風景と言わせて下さい．私は見晴らしのきく様々な地点に身をおき，視界の範囲を様々に変えることができます．新しい領域を探索するときに初めは鳥瞰的に見ようとし，続いて細部を更にはっきりと見ようと頑張ります．幾つかの小さな細部の混沌の中に遠大な規模の設計を推量すべく感覚の調整を試み，次ぎに小さい混沌の一小片に再び突っ込みます.
>
> どんな文献・図書も，視界と表現の不完全性の混合によってぼやけた数学風景の部分的記述です．何時の時代もこの領域に属する数学の文献・図書にはそれ自身がもつ社会的協定と美学とがありました．現代の論文(ユークリッド以来)の石積みは基礎的には公理，定義，定理と証明，それに著者が考えることができた非形式的な説明を加えたものです.
>
> 公理，定義と定理は，数学風景の中にあり，地域的魅力をもち，交通の要所である一地点です．証明は道路そのものであり，小道であり，高速道路でもあります．旅行日程はそれ自身の見学すべき事柄をもっていますが，これは A から B が導かれるといった事実よりも更に重要なことです.
>
> この隠喩によって，真理を確立すると称するものとしての証明の基礎的な目標

に関する見方は変化します．証明は数学風景に対する意識を高めるための多数の方法のうちの一つに過ぎないことになります．

推論の連鎖は無限次元の数学風景のなかの一次元的小道です．時に終着点の発見に導くことがありますが，多くの場合この終着点を予め知りません．その付近の地勢も，そこに到着する方法も知りません．

行く道が肥沃な土地を通るように我々を導いてくれるなら，また私達に続く者に魅力を与えることができるなら，私達は幸せです．

証明のこの新しい見方は数学教育において多くの論文(例えば，de Villers, 1997)に映し出されてきました。Semadeni(1974)や Kirsch(1979)による前-数学的，前-形式的証明の提案に基づいて，操作的証明(Wittmann, 1997)という概念が開発されています．操作的証明とは数学的問題場面の探求に即しており，意味にもとづいて表現された数学的対象に対して働く操作の効果に基づく証明のことです．

このことから，操作的証明はそれまでに観察された現象を説明し(上掲の Gale の記述を参照のこと)，それによって数学を理解するのに役立つものです．

更に，非-言語的表現を操作的証明において用いることができるので，操作的証明は小学校児童に，従って初等教員養成教育に極めて有用です．このことを私の数論入門科目からの二例を与えることによって論じましょう．

例 1．素数の無限性

素数の無限性の形式的証明は次のものです．素数の集合が有限であるとし，それらを $p_1, p_2, \ldots, p_r$ とします．このとき，数 $n = p_1p_2\ldots p_r + 1$ はある素数 p を約数にもちます．従って n は $p_1, p_2, \ldots, p_r$ のどれか一つで割り切れます．$p|n$ かつ $p|p_1p_2\ldots p_r$ から $p|n - p_1p_2\ldots p_r$ であり，即ち p は 1 の約数です．しかし，1 は素数 p では割り切れないことから，$p|1$ は矛盾です．よって，前提は誤りです．

次ぎに述べる素数の無限性の操作的証明は自然数の数直線上への表現に基づいています．教員志望学生が探求しておくべき問題の一つはエラトステネスの篩(ふるい)の方法による素数の決定です．そこで彼等は篩がどのように機能するかを学んで知りました．この知識を用いて素数の無限性は篩の繰り返しの使用が終わらない理由を次のように説明することによって証明できました．素数を見つけだす過程を進んできて素数 p に到達したとします．この p を丸印で囲み，p の倍数を全部消します．積

$$n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times p$$

は，篩を用いて得た全ての素数の公倍数です．そこでこの数 n は篩によるこれまでの手続きの各段階で捨てられています．素数を決めたときに続く倍数を捨てる過程ではその隣の数を捨てることはありませんから n の次の数(n+1)は未だ捨てられていません(訳注　言わずもがなですが，如何なる素数も 2 以上ですから)．したがって，何れの段階を終わった後にも捨てられない数が残っており，その最小数が新しい素数です．

例2．Sylvester の定理

この科目の第一の部分で教員志望学生は等差数列に取り組み，自然数を継続する数の和として表現することを探求します．この経験に基づき，シルベスターの定理の次のような操作的証明が自然に生起します．継続する数の和は階段として表します．階段の段数に従って各階段は一つの積を表す長方形に変型できます．段数が奇数のときは，中央の段があり，これより上にある部分の階段を切り取って下の部分に加えます(図 2)．階段の段数が偶数のときは，階段を中央から垂直に分け，二つの部分をつないで一つの長方形とします(図 3)．

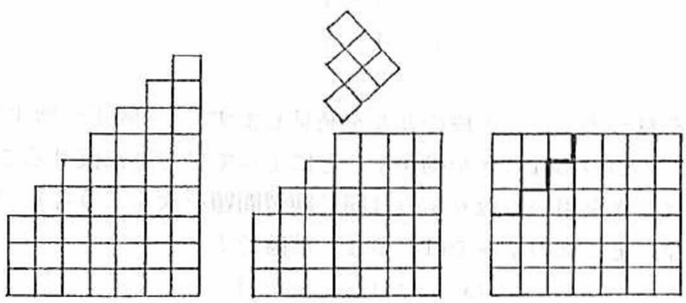

図　2

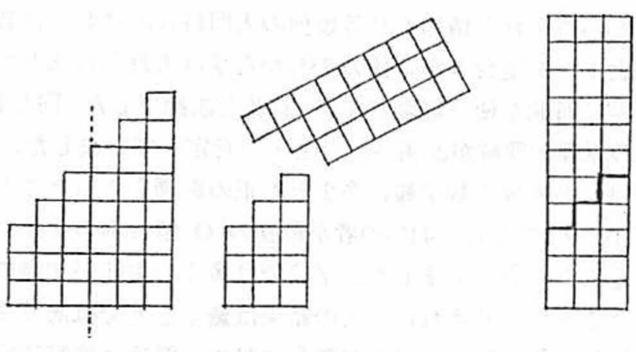

図　3

これら二つの操作の効果を注意して調べると，何れの場合も提示された数の奇数の約数が現れます．即ち，階段の数，または初めと終わりの階段の高さの和(階段が偶数の場合は奇数でなければならない)として現れます．その帰結として，一つの数の任意の階段的表現は n の奇の因数を引き起こします．この逆，奇数の辺をもつ長方形はその奇数の大きさの程度によって二つの型の階段に変型できる，も正しい．更に詳細に検討すると，数 n の階段表現と長方形表現とは一対一両連続であることが明らかになります．

もう一度述べると，この操作的証明は問題に関する先の取り組みから知り得た現象を説明します．

教師教育の場における操作的証明の利点は次のように明らかです．これらの証明はこの場と切り離されておらず，密接に関連しています．操作的証明に精通するようになると，教員志望学生は初等教育で数学することのための表現の非形式的方法の使用の良さをを知るように学びます．しばしば，教師教育におけるこのような活動の本質が初等教育の中に早速取り込まれることがあります．例えば，基礎学校 2 年生の教科書にある次のような練習問題を考えて下さい．

$$1+2+3=$$
$$2+3+4=$$
$$3+4+5=$$

子供達は結果を見つめて，3 の段の九九を発見します．(一個ずつ増す)3 列のおはじきの全体は，一つのおはじきを動かすことによって長方形に直せることは明らかです．このおはじきを用いる取り組みは同じ練習問題を次のような形で再度取り扱う為には良好な，更に私の見解では必要な，準備です．

$$(a-1)+a+(a+1)$$

6．この科目に関する諸経験

教員志望学生から得られた情報を初等幾何の入門科目の終わりに質問紙法で集めたところ，O 型台本・A 型台本が全体の 75%から受け入れられました．A 型台本における記述は非常に時間を使う経験ですが，有益な訓練でした．同じ調査において，70%が発見学習の原理の理解が改善されたことを肯定していました．

しかし，この科目が彼等の数学観に多少とも正の影響をもったことを記した教員志望学生はわずか 59%でした．41%の者が最初の O 型台本のオープン性に対して関心をもっていることを表明しました．学校では多くの生徒が知識の受容者として組み込まれていたことから考えれば，この結果は驚くことではありません．これまでの動かし難い機械論的で形式主義的な数学に対する態度は彼等に安心感を与え，受容者的態度を生き残らせるのに力を貸しています．学校や大学の仕組みでの中で機械的な決まり切ったことに心地よさを感じながら，彼等は不確定性に面と向かうことを望まないのです．

数学的経験に関する学校からもたらされた好ましくない感化は操作的証明に対する教員志望学生の先入見に極めて顕著です．このことを示す例は Wittmann and Müller(1990)に報告されています．ゼミナールで教員志望学生は図形数を学びました．(図形数は数論の揺籃期に根本的な役割を演じました．このような数が子供達

の数学的活動を促すための素晴らしい場でもあることを確信しています.ですから,'mathe 2000' では図形数は重要な役を演じています.) 特殊な台形数が正方形と三角形の図形数(図4を参照のこと)の構成のために導入されました.

型を探求する際に学生達は全ての n に対して、台形数 Tn と n とは3を法として等しいと想定しました.この関係に対して一つの操作的証明(この時は映像的証明と呼んでいた)が対応する型に基づいて与えられました.この論証の正に直後に何人かの学生がその妥当性に対して不信感を表明しました.教師はそれに介入しませんでしたが,全体の学生がこの論証は説明の地位は主張できるが,証明の地位は主張できないことに直ちに意見が一致しました.そこで教師は形式的証明を示し,これと先の操作的証明とを対決させました.学生達は二つの形ちの証明について考え,各自の意見を書くことを求められました.提出した小論文は何れも学校で獲得してきた証明に関する理解が操作的証明の良さを知ることをどれ程妨げているかを極めて明確に示していました.説明のため小論文の幾つかを引用します.

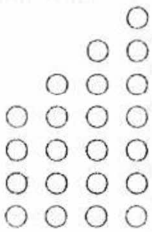

図4.台形数 $T_n = n^2 + n(n-1)/2 = (3n^2 - n)/2$

言語・記号的証明はより数学的であるが故に好ましいものである.

映像的証明は私には非常に直観的であり,問題が何であるかをよりよく説明してくれる.私にとって点の集まりの形ちから引き出された推論は証明として信用でき,十分である.不幸なことに我々はこの形の証明に学校では慣らされてこなかった.言語・記号的証明だけを教えられてきた.

映像的証明は非常に直観的である.人は命題の流れから関連を理解する.私は反例を見出す方法が想像できない.というのはどれだけの3の倍数が構成できるかを問題にしていないからである.私の考えでは証明とは決して言えず,たかだか論述である.但し,全ての n に関して行われてはいる.学校で言語・記号的証明だけを証明であると私は学んだ.

言語・記号的証明はより数学的である.この証明は,知っておらねばならず,再生しなければならない公式に関わるので随分ときつい.映像的証明は一段一段進めることができ,各段階は直ちに明らかである.しかし,映像的証明が試験の際に認められるかどうか私にはわからない.

映像的証明の妥当性を受け入れることの認知的葛藤は教員志望学生がより高度な専門職的水準に上昇するための発生学的に自然な兆候として理解すべきです．振り返ってみると教員志望学生は専門職的場に埋め込まれた教師養成の課程を意識的に高く評価しているという経験をもっています．ドルトムント大学の教師教育センターによる最近の研究では，教員養成の後期(2 年間)に在学しているノルトライン・ヴェストファーレン州の教員志望学生 2700 人が前期(3 年間)に大学で受講した数学と数学教育科目の評価を求めた(Zentrum für Lehrerbildung 1997)結果は非常に勇気づけるものです(表 1)．同一の理念を共有するパダーボムとドルトムントの両大学における教師養成教育課程の評価は，初等教員養成科目を開講しているノルトライン・ヴェストファーレン州の他の 6 大学よりも極めて高いものでした．

数　学

(1 = very little, 2 = fairly little, 3 = fairly much, 4 = very much)

Bielefeld	1.98	n = 136
Dortmund	2.70	n = 362
Essen	1.88	n = 288
Köln	1.78	n = 390
Münster	1.73	n = 659
Paderborn	2.92	n = 148
Siegen	2.12	n = 76
Wuppertal	1.62	n = 168

Average = 2.10, s = .47

表　1　(図示を省略し、表のみ表示)

16 名の著者による『過程としての算数』(Müller, Steinbring, Wittmann, 2001)を執筆し終わったところです．この図書は本論文に概括的に述べられている教師教育のための O/A 方式に基づいています．この図書は真に数学的な図書ですが，他の類書とは異なり，数学のために教育を犠牲にすることも，教育のために数学を犠牲にすることもせずに，数学を教師教育の場に置こうとしています．

(文献は省略)

Erich Ch. Wittmann
University of Dortmund, Germany
ewittmann@mathematik.uni-dortmund.de