国立大学法人電気通信大学 / The University of Electro-Communications

# 六角形格子上の積符号を用いた符号化変調方式によるPAPRの低減

| | |
|---|---|
| 著者 | 北原 裕久, 森田 啓義, 眞田 亜紀子 |
| 雑誌名 | 電子情報通信学会論文誌. B, 通信 |
| 巻 | J103-B |
| 号 | 5 |
| ページ | 184-197 |
| 発行年 | 2020-05-01 |
| URL | http://id.nii.ac.jp/1438/00009596/ |

doi: 10.14923/transcomj.2019JBP3024

論　文

# 六角形格子上の積符号を用いた符号化変調方式によるPAPRの低減

北原　裕久[†a)]　　森田　啓義[††]　　眞田亜紀子[†††]

# PAPR Reduction of Coded Modulation Schemes Using Product Codes over Hexagonal Constellations

Hirohisa KITAHARA[†a)], Hiroyoshi MORITA[††], and Akiko MANADA[†††]

あらまし　小形通信機器を用いる無線通信においては，寸法や重量が制限されるため，より電力効率の良い通信方式が求められる．本論文では，電力利用効率の良い通信方式として，六角形格子上の整数符号を用いた積符号による符号化変調方式を提案する．六角形格子は信号点の密度が高いため，等方性の 19 点六角形格子のピーク対平均電力比は矩形 16 値直交振幅変調 (QAM: Quadrature Amplitude Modulation) よりも 0.56 dB 低く抑えることができる．また，整数符号は，訂正可能な誤りを近接点に設定でき，遠方の信号点へ誤る確率よりも近接点へ誤る確率の方が高いと言う実際的な通信路に適している．本検討では，19，37 及び 61 点の六角形格子上で整数符号単体及び整数符号と負巡回符号またはリード・ソロモン符号の積符号のシミュレーションを行った．その結果，整数符号とリード・ソロモン符号の積符号が，負巡回符号との積符号や各符号単体の結果と比べてビット誤り率 (BER: Bit Error Rate) の改善効果が大きいことを示すことができた．また，信号点数の近い矩形 QAM と比較して BER が $1.0\times10^{-5}$ において 0.8 dB から 1 dB の符号化利得を得ることができ，提案符号化変調方式による電力及び BER の改善効果を確認できた．

キーワード　整数符号，積符号，PAPR，六角形格子

## 1. まえがき

ワイヤレスボディエリアネットワーク (WBAN: Wireless Body Area Network) 等の小形通信機を用いる無線通信 [1], [2] では，機器の寸法や重量が制限されるため，より電力効率の良い通信方式が求められる．電力効率の良い信号の送信を行うためには，電力増幅器を飽和領域付近で用いる必要がある．そのためには，入出力間の線形性のためバックオフが必要であり，ピーク対平均電力比 (PAPR: Peak-to-Average Power Ratio) を低く抑えることが求められる．つまり，変調信号が低 PAPR であることは，電力増幅器の効率的な利用の必要条件である [3]．PAPR は，振幅方向に情報を有しない位相変調 (PSK: Phase Shift Keying) であれば 1 であるが，矩形直交振幅変調 (QAM: Quadrature Amplitude Modulation) では振幅方向にも情報を有し，多値化するにつれて PAPR は 3 に近づいていく [4]．低 PAPR を実現するための変調方式の研究として，振幅位相変調 (APSK: Amplitude Phase Shift Keying) をベースにするものと六角形格子をベースにするものがあげられる．

APSK は，位相のみに情報を有する PSK に対して，複数の振幅レベルを用いて更なる多値化を図るものである．初期の研究としては 1960 年にリング数と信号点の関係の検討が行われた例がある [5]．ここで，リングという言葉は信号空間図上の環状の信号点配置のことを指している．これは，以降においても同様である．APSK における PAPR の研究例として，ハフマン符号を用いるもの [6]，マルチレベル符号化変調を用いる

† 電気通信大学大学院情報システム学研究科，調布市
Graduate School of Information Systems, The University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan
†† 電気通信大学大学院情報理工学研究科，調布市
Graduate School of Informatics and Engineering, The University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan
††† 湘南工科大学工学部情報工学科，藤沢市
Department of Information Science, Shonan Institute of Technology, 1–1–25 Tsujido-Nishikaigan, Fujisawa-shi, 251–8511 Japan
a) E-mail: k1462002@edu.cc.uec.ac.jp
DOI:10.14923/transcomj.2019JBP3024

もの [7]，レートコンパティブル変調のマッピングを改良するもの [8] などが行われている．これらは，情報を APSK に変調する前に符号化を工夫することにより PAPR を低減させることを提案している．ただし，APSK の多値化には，複数のリング配置やリング内の信号点数及び位相等を設定する必要があり，最適な方式を決めるには慎重な検討が必要となる．

一方，六角形格子は 2 次元平面で最も密な充てんを形成することができ，同様の構造により携帯電話の基地局のカバーエリアを最大にする配置にも利用されている [9]．六角形格子に関する初期の報告としては，1973 年に 4 ビットすなわち 16 個の信号点の配置方法についての研究例がある [10]．近年では，2 のべき乗の信号点数の六角形格子と矩形 QAM を比較した例があり，矩形 QAM に対する電力利得，シンボル誤り率 (SER: Symbol Error Rate) やビット誤り率 (BER: Bit Error Rate) の比較が行われていた [11], [12]．これらにおいて，その充てん密度から平均エネルギーでは六角形格子が有利であることが示されたものの，PAPR に関しては不利であることが示されている．これは，六角形格子の信号点数を 2 のべき乗とするために，配置がリング状とならずに等方性が崩れたことが影響していると推定される．低 PAPR が課題となる分野として直交周波数分割多重方式 (OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing) があるが，この分野においても六角形格子を用いる研究が行われており，64QAM との比較が行われている [13]．ここでは，64QAM の一部の信号点を 91 六角形格子の 2 点と対応させて拡張させたコンスタレーションを用いることで OFDM の PAPR の改善が図られた．

また，六角形格子における符号化変調技術としては，格子符号の研究が活発に行われている．格子符号は，$\mathbb{R}^n$ のある格子点の部分集合であり，初期の報告例としては，Conway と Sloane による高速符号化の例がある [14]，近年では，低密度パリティ検査符号 (LDPC: Low Density Parity Check Codes) を格子構造に応用する LDLC (Low Density Lattice Codes) が提案され [15], [16]，その性能が注目されている．またこの他のアプローチとして，低次元格子とリード・ソロモン符号との組み合わせの研究例 [17]，有限インパルス応答 (FIR: Finite Impulse Response) フィルタによりよる畳み込み格子符号の研究例 [18] 等も報告されている．これらの研究においては，符号化後の信号点はピーク電力を抑えやすいリング上で無く方形領域に制限するものが多いが，電力効率の観点からではなく符号化や復号アルゴリズムについての検討が主となっている．

本論文では，整数符号を用いた積符号を用いる六角形格子上の符号化変調方式を提案する．多くの誤り訂正符号は，使用する変復調方式とは別に設計されるため，信号空間図上での距離を考慮していない．しかし，一般的に信号空間図上のある信号点に生じる誤りは，遠方へ誤る場合よりも近接点へ誤る場合の方が多く，誤りの発生確率は平等ではない．したがって，離れた信号点へ移動した誤りを訂正できると言うことは，ほとんど発生しない誤りに対処することとなり，能力に無駄が生じる．一方，整数符号は，訂正可能な誤りをある信号点の近傍に設定することができると言う利点があり，使用する信号点配置と組み合わせた効率的な符号化が期待できる [19]．また，誤り訂正符号は，幾つかの符号を組み合わせることで，その能力が高まることが知られている [20], [21]．そこで，六角形格子上で定義される整数符号 [22] に負巡回符号 [23] またはリード・ソロモン符号を組み合わせた積符号の特性を本論文で示す．

本論文では最外周の閉じた等方性のある六角形格子について検討を行うが，この場合，一般的に信号点の個数は 2 のべき乗とはならない．しかし，処理の容易さを考慮して，ビット列を配置する信号点の個数を六角形格子の信号点の個数以下となる 2 のべき乗とする．つまり，それぞれの六角形格子ではビット列を割り振らない信号点が生じる．ただし，論文中で使用する符号は，全て組織符号 [20] を用いる．そのため，符号の情報シンボルはビット割り当てのある信号点のみに対応する一方，検査シンボルは非ビット割り当て信号点含む全ての格子点に対応する．

先に示した六角形格子の研究例では，信号点数を 2 のべき乗とするために対称性を崩さざるを得ず，結果として信号点をリング状に配置できず PAPR の増加に繋がっていた．一方，六角形格子上で定義される整数符号の信号点数は，19，37 のように最外周を閉じたピーク電力を抑える構造のものとすることができる [22]．そこで，ビット割り当てのない信号点がある六角形格子において，隣接する信号点のハミング距離を抑えながらビット列を割り振るアルゴリズムを次章で示す．

本論文の構成は以下のとおりである．**2.** では，六角形格子とマッピングについて，**3.** では使用する符号に

ついて，**4.** では，積符号を用いた提案符号化変調について，**5.** では，シミュレーション結果について説明し，**6.** でまとめを行う．

## 2. 六角形格子及びマッピング

前述のとおり本論文では，最外周の閉じた等方性のある六角形格子を主として扱う．この構造において，リングの数が $r$ であるときに信号点数 $N$ は，式 (1) と表される．

$$N = 1 + 6\sum_{k=1}^{r} k \tag{1}$$

図 1 に 19 点六角形格子の例を示す．シンボル間の距離を $A$ とすると，内側のシンボルの電力は $A^2$，外周のシンボルでは，$3A^2$ と $4A^2$ の二種類が存在する．全シンボル点の平均電力を 1 とする場合，$A = \sqrt{19/48}$ となる．したがって，19 点六角形格子において，PAPR は，$4A^2 = 1.583$ (1.99 dB) となる．同様に 37 点においては，$A = \sqrt{37/186}$ であり，平均電力と原点からの最遠点の信号点電力により，PAPR は 1.79 (2.53 dB) となる．一方，矩形 16QAM において PAPR を求めると，$M^2$-QAM において PAPR が式 (2) と表されることから [4]，$M = 4$ とすると PAPR は 1.8 (2.55 dB) となる．

$$PAPR_{M^2-QAM} = 3\frac{M-1}{M+1} \tag{2}$$

したがって，信号点の密度の高さにより，19 点六角形格子は矩形 16QAM よりも PAPR が 0.56 dB 低くなる．そして，信号点数が 2 倍以上あるにもかかわらず，37 点六角形格子の PAPR が矩形 16QAM とほぼ同等の値となる．

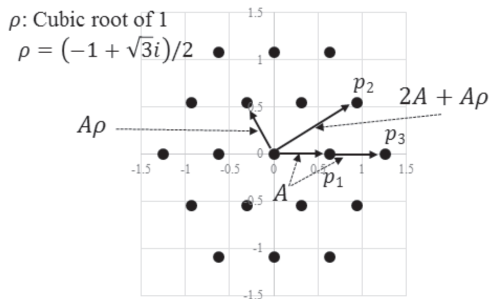


図 1　19 点六角形格子における信号点
Fig. 1　Signal points over a 19-Hexagonal constellation.

直交格子と最外周の閉じた等方性の構造をもつ六角形格子において，各信号点が等確率で出現した場合の信号点数 $N$ と PAPR の関係を図 2 に示す．この図から，六角形格子の信号点がいずれも等確率で出現する場合，信号点数 $N$ の増加に対して PAPR の増加は QAM の場合よりも抑えられたものであることが分かる．このことから，等方性の六角形格子の形状は矩形の QAM よりも電力効率的に有利な形状であることが確認できる．

先に述べたように，六角形格子の信号点数 $N$ は，2 のべき乗とならず，ビット列を割り振らない点が生じる．六角形格子には隣接する信号点が最大 6 個存在するためビット列長 $m$ によっては隣接する信号点間のハミング距離を全て 1 以下にすることはできない．

そこで，隣接する信号点間のハミング距離を許容値 $M$ 以下に抑えた割り当てを行うため，ビット割り当てアルゴリズムを提案する．この提案アルゴリズムは，信号点数が $N$ の六角形格子においてビット列を割り当てない信号点と $M$ が指定された場合に，計算量を抑えながら割り当てパターンを探索するために行い，一つのパターンが見つかった時点で探索を終了する．指定した条件で割り当て可能なパターンが存在するならば，それにヒットするまで探索を続けるが，$M$ の値が小さい場合には全探索に近い挙動を行い膨大な時間が必要となる可能性がある．そのため，隣接点とのハミング距離を抑えるため $M$ は小さい方が好ましいが，探索時間削減のために $M$ を増やす場合もあると考えられる．本論文では，$M = 2$ として探索を行った．

アルゴリズムにおいて，$N$ 個の六角形格子上の信号点数に対して $m$ を $N > 2^m$ を満たす自然数とする．

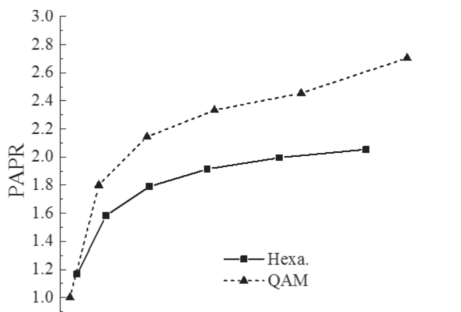


図 2　等方性六角形格子と矩形 QAM の PAPR 特性
Fig. 2　PAPR characteristics of isotropy hexagonal constellations and square QAM constellaions.

このとき，ビット列を割り振らない信号点数を $g$ とすると，$g = N - 2^m$ となる．

入力:

$\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \ldots, u_{g-1}\}$; // ビット列を割り振らない信号点の集合

$M$; // ハミング距離の最大許容値

$N$; // 信号点の数

出力:

$\phi : \{0, 1, \ldots, N-1\} \backslash \mathcal{U} \to \{0,1\}^m$; // 信号点から割り振ったビット列への全単射，初期値: NULL

内部変数:

$i (0 \leq i \leq N-1)$; // 信号点に付けたインデックス

$\mathcal{V} = \{0,1\}^m$; // 未割り当てのビット列の集合

$L_i = \{l_{i,0}, l_{i,1}, \ldots, l_{i,h-1}\}$; // インデックス $i$ の信号点における隣接点の集合 ($h \in \{3,4,6\}$)

$f$; // あるインデックス $i$ で割り当てできなかった返却値，初期値: $-1$

Step. 1　$i = 0$ とする．

Step. 2　$i \in \mathcal{U}$ ならば，$i$ を $\mathcal{U}$ に含まれない値まで $i = i + 1$，$i > N - 1$ ならば Step. 7 へ．

Step. 3　$\mathcal{V}$ 中の辞書的順序で最小のビット列を $v$ とする．($f == v$) ならば，$f$ の次に小さな値を $v$ に．$f$ が $\mathcal{V}$ 中の辞書的順序で最大のビット列ならば失敗，Step. 6 へ．

Step. 4　$L_i$ に含まれる信号点にビット列の既設定値があればその値と $v$ とのハミング距離を計算．一つでも $M$ を越えれば $f = v$ として Step. 3 へ．

Step. 5　Step. 4 で $L_i$ に含まれる信号点に既設定値がないまたはハミング距離のいずれも $M$ 以下なら $\phi(i) = v$ とし，$f = -1$，$\mathcal{V} = \mathcal{V} \backslash \{v\}$．

Step. 6　$i$ で値を設定できれば $i = i + 1$ 及び Step. 2，できなければ $i$ を $\mathcal{U}$ に含まれない値まで $i = i - 1$ とし，$f = \phi(i)$，$\phi(i) = \mathsf{NULL}$ 及び $\mathcal{V} = V \cup \{f\}$ として Step. 3 へ．$i = i - 1$ の結果 $i$ が負になるときは Step. 7 へ．

Step. 7　計算を終了する．

図 3 及び図 4 に，19 点格子及び 37 点における各信号点への提案アルゴリズムによるビット割り当て結果を示す．これらの図におけるインデックス配置は，次章の整数符号で用いる原始元に基づく．また，図中の非ビット割り当て信号点は対称性を考慮し，19 点格子では $\mathcal{U}$ は {5，16，17} の信号点，37 点格子では {0，14，18，19，23} の信号点とした．それ以外の点では，それぞれ 4 ビット及び 5 ビット値を前述のアルゴリズムにより割り振った．

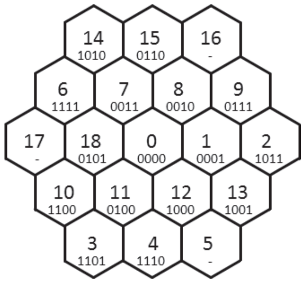


図 3　19 点格子におけるビット割り当て

Fig. 3　Bit assignment over a 19-hexagonal constellation.

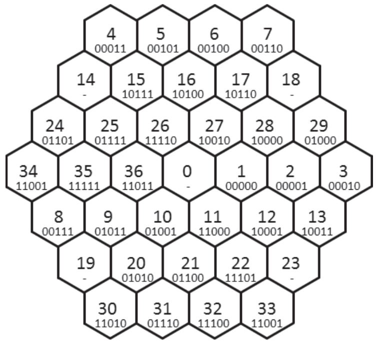


図 4　37 点格子におけるビット割り当て

Fig. 4　Bit assignment over a 37-hexagonal constellation.

図 3 に示す 19 点六角形格子では，$\mathcal{U} = \{5, 16, 17\}$ である．そのため，Step. 2 において，$i = 5$ ならば，$5 \in \mathcal{U}$ であるために，$\mathcal{U}$ に含まれることになり，$i = i + 1$ として $i = 6$ とする．また，Step. 4 において，$i = 1$ からインクリメントして $i = 2$ であるとき，インデックス 2 の隣接点集合は $L_2 = \{1, 9, 13\}$ である．このとき，既にビット列の設定があるのはインデックス 1 のみであることから，既設定値はインデックス 1 に割り当てた (0001) である．

本アルゴリズムは，事前に $\mathcal{U}$ として，非ビット割り当て信号点を指定する．そのため，指定の仕方によって符号語の平均電力が変化し，それに伴い PAPR も変化する．したがって，本アルゴリズムは BER には影響するものの，PAPR は入力の段階で決定されるため，どのように非ビット割り当て信号点を指定するかについても別途検討する必要がある．本論文では，19 点の場合の図 3 及びその非ビット割り当て信号点を変化させた場合の PAPR の変化について **5.** で示し，マッピング及び符号の影響について検討した．

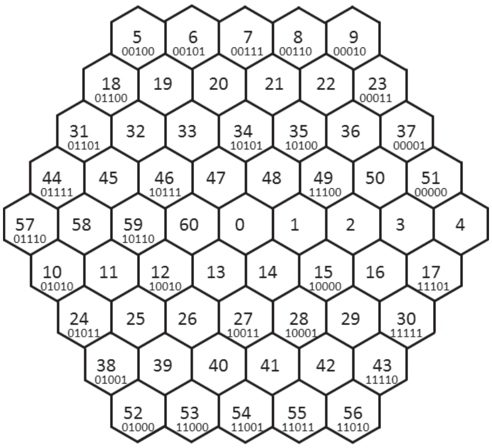


図 5　61 点格子におけるビット割り当て
Fig. 5　Bit assignment over a 61-hexagonal constellation.

61 点六角形格子では，信号点の数が 64 $(= 2^6)$ 点に満たないため，図 5 のように 32 $(= 2^5)$ 点のみにビット列を割り振った．そのため，割り振る箇所が格子中の二つのリングの一部に過ぎないためここではグレイコード順にビット列を割り振っている．インデックスの配置は，19 点格子及び 37 点格子と同様に整数符号で用いる原始元に基づく．

図 3，図 4 及び図 5 においては，情報シンボルとして使用する信号点が制限されることから，信号を送信する際には図 2 の場合から PAPR は変化する．19 点中ビット割り当て信号点に 16 点を用いた場合の非符号化時の PAPR は，最大電力 $4A^2$，平均電力 $36A^2/16$ から $4 \cdot 16/36 = 1.778$ となる．また，37 点中ビット割り当て信号点に 32 点を用いた場合の非符号化時の PAPR は，最大電力 $9A^2$，平均電力 $158A^2/32$ から $9 \cdot 32/158 = 1.823$ となる．同様に計算を行い，61 点六角形格子では，1.510 となる．16QAM の PAPR が 1.8 であることから，19 点六角形格子の場合の PAPR はそれよりも抑えられ，信号点の一部のみを用いる非符号化時においても PAPR の点から六角形格子は有利となる．それぞれのマッピングにおいて符号化を行い，検査シンボルも送信する場合には更に PAPR が変化する．これらについては，それぞれの符号のシミュレーション時に述べる．

これらの図において，隣接する信号点に割り当てられたビット列同士のハミング距離は 1 か 2 であることを確認できる．図 6 にインデックス値をそのまま 2 進数値とした場合 (Natural) とアルゴリズムを用いた場合 (Modified) の BER の比較を示す．BER$= 10^{-5}$ において比較すると，19 点六角形格子においては 0.1 dB，37 点六角形格子では 0.15 dB の符号化利得があった．

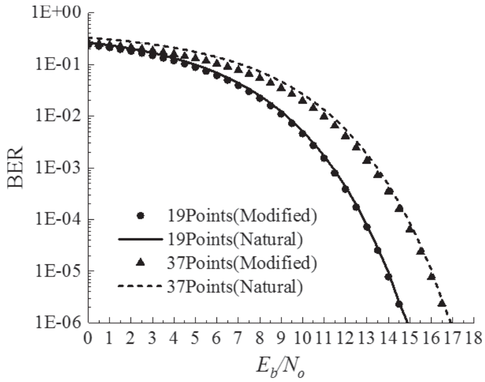


図 6　ビット割り当てによる特性の比較
Fig. 6　Comparison between natural and modified bit assignments.

## 3. 誤り訂正方式

### 3.1 整 数 符 号

整数符号 (IC: Integer Code) は，剰余類環 $\mathbb{Z}_N$ 上のパリティ検査行列 $H$ と $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}_N^m$ で定義される符号であり [24]，符号長 $n$ の整数符号 $C(H, \boldsymbol{d}) \subset \mathbb{Z}_N^n$ は次式で表される．

$$C(H, \boldsymbol{d}) = \{\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_N^n \mid \boldsymbol{c}H^T = \boldsymbol{d} \mod N\} \quad (3)$$

以降の議論においては，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ とする．整数符号は，受信語 $\boldsymbol{r}$ が受信されたとき，シンドロームベクトル $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}H^T$ を求めテーブルを利用する硬判定や，シンドロームと受信語を利用する軟判定による復号を用いることができる．これまで，8PSK や 16QAM, 64QAM, 256QAM 上の符号や 19，37，61 及び 127 点の六角形格子上の符号が提案されている．以降 19 点六角形格子においては，式 (4) で定義される単一 $(\pm1, \pm7, \pm8)$ 誤り訂正可能な符号長 $n = 3$，符号化率 $R = 2/3$ の整数符号 $C_{i19s}$ と式 (5) で定義される二重 $(\pm1, \pm7, \pm8)$ 誤り訂正可能な符号長 $n = 3$，符号化率 $R = 1/3$ の整数符号 $C_{i19d}$ を用いる [22].

$$H_{i19s} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$H_{i19d} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで，整数符号 $C_{i19s}$ と $C_{i19d}$ の誤り訂正能力と最小距離について検証する．まず，六角形格子上の距離を次のように定義する．

［定義 1］ 六角形格子上の各信号点を辺で結ぶものとし，ある信号点からある信号点までの最短経路上の辺数を格子上の距離とする．

本論文で用いる整数符号 $C_{i19s}$ と $C_{i19d}$ は，ビットを割り振る信号点を 16 個に制限している．そこで，情報シンボルの種類を制限したうえで，符号語間の最小距離を求めるために総当たりによる計算を行った．その結果，整数符号 $C_{i19s}$ では最小距離が 3，整数符号 $C_{i19d}$ では最小距離が 5 であった．このときの符号語のペアの例としては，前者では (0 0 0) と (0 1 9)，後者では (0 0 0) と (1 15 16) が存在する．以上のことから，それぞれの符号が単一誤り，二重誤りを訂正可能であることが確認できる．

次に，比較のため 16QAM において，$\mathbb{Z}_{17}$ 上で定義される 2 重誤り訂正可能な符号長 2 の整数符号 $C_{i17d}$ を用いる．この符号は，検査行列 $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ を持つ [19]．この場合，格子上へのインデックス及びビットの割り当ては，図 7 のようになる．この割り当ては，後述のリード・ソロモン符号を 16QAM 上で用いる場合も同様である．

次に，37 点六角形格子における積符号の検討においては，式 (6) で定義される $\mathbb{Z}_{37}$ 上の二重 $(\pm1, \pm26, \pm27)$ 誤り訂正可能な符号長 $n = 4$，符号化率 1/2 の整数符号 $C_{i37d}$ を用いる [22]．先ほどの場合と同様に，符号の最小距離を求めると 5 であり，二重誤り訂正可能であることを確認できる．この距離となる例として (1 1 20 22) と (1 2 23 11) の符号語ペアが存在する．

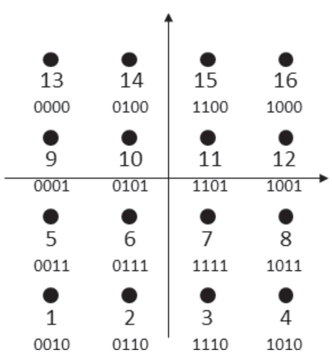


図 7 16QAM へのビット割り当て
Fig. 7 Bit assignment over a 16QAM constellation.

$$H_{i37d} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 14 \end{pmatrix} \tag{6}$$

更なる拡張として，61 点六角形格子では，式 (7) で定義される $\mathbb{Z}_{61}$ 上の二重 $(\pm1, \pm13, \pm14)$ 誤り訂正可能な符号長 $n = 6$，符号化率 2/3 の整数符号 $C_{i61d}$ を用いる [22]．この符号の最小距離を全ての符号語同士の総当たりにより求めると 4 であった．これは，通常ならば二重誤りを訂正できない距離である．しかし，最小距離が 4 となるときのシンボル間の距離を確認したところ，(1 0 0 0 0 3) と (3 0 0 0 0 1) の 2 通りのみであり，先頭または最後のシンボルの距離が 3 となっている．したがって，この符号は距離が 1 の誤りのみを想定していることから，先頭及び最後のシンボルに距離 1 の誤りが加わっても訂正できる．また，この 2 通りを除けば当然各符号語間の距離は 5 以上であることから，この符号は二重の距離 1 の誤りを訂正する能力がある．

また，61 点六角形格子と比較するために 64QAM を後で用いるが，64QAM 用の整数符号には，式 (8) で定義される $\mathbb{Z}_9$ 上の二重 $\pm1$ 誤り訂正可能な符号長 $n = 4$ の整数符号 $C_{i9d}$ を用いる [19]．

$$H_{i61d} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 7 & 49 & 38 & 22 & 32 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$H_{i9d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

### 3.2 負巡回符号

負巡回符号 (NC: Negacyclic Code) について説明する前に，Lee 重みと Lee 距離について説明する．素数 $p$ を法とする剰余類環 $\mathbb{Z}$ 上の長さ $n$ の $p$ 元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ と $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$ を定義する．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の Lee 重み $W_L(\boldsymbol{a})$ は，次式で与えられる [25]．

$$W_L(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=0}^{n-1} |\min(a_i, q - a_i)| \tag{9}$$

ベクトル $\boldsymbol{b}$ の Lee 重みについても同様である．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の Lee 距離 $D_L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ は次式で与えられる [25]．

$$D_L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = W_L(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \tag{10}$$

符号が Lee 重み $t$ 以下の誤りを訂正できるとき，

$t$ 重 Lee 誤り訂正符号と呼び，その中で重要なのが，Berlekamp によって提案された負巡回符号である [23]．

$\alpha$ を $GF(p^m)$ の原始元とし，$n = (p^m - 1)/2$ とする．また，$\alpha$ の $GF(p)$ 上の最小多項式を $G(x)$ とする．このとき，$G(x)$ を生成多項式とする符号長 $n$ の符号を負巡回符号と呼ぶ．

今，負巡回符号の符号多項式 $C(x)$ を式 (11) のように定義する．

$$C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \quad (11)$$

ここで，この $C(x)$ に対して，$-c_{n-1}+c_0x+c_1x^2+\cdots+c_{n-2}x^{n-2}$ のような操作を行った多項式について考える．この多項式は，$C(x)$ を用いて式 (12) のように表すことができる．

$$\begin{aligned}&-c_{n-1} + c_0x + c_1x^2 + \cdots + c_{n-2}x^{n-2}\\&\quad = C(x)x - c_{n-1}(x^n + 1) \qquad (12)\end{aligned}$$

先の条件から，$\alpha^n$ の 2 乗は，$(\alpha^n)^2 = \alpha^{q^m-1} = 1$ である．このとき，$\alpha^n$ は，1 にはなりえないため，$\alpha^n = -1$ である．このことから，$x^n + 1$ は，$\alpha$ を根としてもつ．また，$C(x)$ も当然 $G(x)$ で割り切れる．したがって，式 (12) の右辺は二項とも $G(x)$ で割り切れるため，左辺の多項式も $G(x)$ で割り切れる．そのため，左辺の多項式も符号多項式であることが分かる．

以上から，任意の符号語を右シフトさせ，一番右側のシンボルに $-1$ を掛けた値を一番左に挿入した語もまた符号語になると言える．このような巡回を行うため，この符号を負巡回符号と呼ぶ．

負巡回符号は，剰余類環によってその符号長に制約がある [23]．本報告では，積符号を作成するために六角形格子の信号点の一部を利用することとし，$GF(11)$ 及び $GF(17)$ 上で定義される符号を利用する．それは，格子内で信号点のインデックスを割り振る際に隣接点とのインデックスの差を小さくすることが好ましく，使用する信号点を外周の範囲内で制限するためである．

この場合，1 シンボルあたりのビット数は 19 点格子では 3 ビット，37 点格子では 4 ビットとなり，外周において図 8 及び図 9 のように割り当てを行った．図 8 においては，3 ビット，つまり $2^3$ 個のビット列を負巡回符号のインデックスの位置に割り当てる必要がある．そこで，インデックスの 3，5，9 の信号点にはビット列を割り当てないものとし，それ以外の信号点に誤り確率を低減するために隣接する信号点同士のハミング距離が 1 となるよう対称性を考慮してビット列を割り当てた．また，図 9 においては，最外周の信号点から二つの点を除いた信号点に 4 ビットのグレイコード順でビット列を割り当てた．

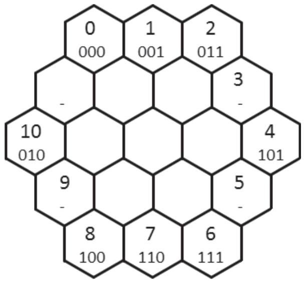


図 8　19 点格子の一部を用いた $GF(11^2)$ 上で定義される負巡回符号のインデックス及びビット割り当て

Fig. 8　Index and bit assignments of NCs defined on $GF(11^2)$ using part of 19-hexagonal constellation.

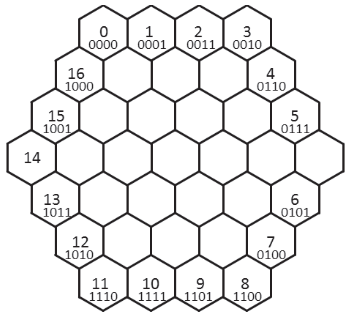


図 9　37 点格子の一部を用いた $GF(17^2)$ 上で定義される負巡回符号のインデックス及びビット割り当て

Fig. 9　Index and bit assignments of NCs defined on $GF(17^2)$ using part of 37-hexagonal constellation.

これにより，ある信号点が隣接する信号点に誤った判定が生じてもその Lee 距離が 1 に抑えられることになる．

次に，それぞれの格子上における符号の定義を行う．まず，19 点六角形格子上で用いる符号の準備として，$X^2 + X + 7$ を法とする $GF(11^2)$ 上の拡大体を考える．$X^2+X+7$ の根を $\alpha$ とすると，$\alpha^0 = 1$，$\alpha^1 = \alpha$，$\alpha^2 = -\alpha+4$，$\cdots$，$\alpha^{119} = 3\alpha+3$，$\alpha^{120} = 1$ となる．素数 $p = 11$ とすると，符号長 $n$ は，$n = (p^m - 1)/2$ から 5，15，60，665 等が存在する [23] が，ここでは計算量を考慮し $n = 60$ とした．

本報告では冗長シンボル数が 4 である 2 重以下の Lee 誤り (Lee 重みが 2 以下の誤り) 訂正可能な符号 $C_{n11d}$，冗長シンボル数が 6 である 3 重以下の Lee

誤り訂正可能な符号 $C_{n11t}$ の二種類を利用した．2 重以下の Lee 誤りを訂正可能な符号の検査行列は，式 (13)，3 重以下の Lee 誤りを訂正可能な符号の検査行列は，式 (14) で与えられる．

$$H_{n11d} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{59} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{57} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$H_{n11t} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{59} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{57} \\ 1 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \dots & \alpha^{55} \end{pmatrix} \quad (14)$$

次に，37 点六角形格子上で用いる符号のために，$X^2+X+3$ を法とする $GF(17^2)$ 上の拡大体を考える．すると，$X^2+X+3$ の根を $\beta$ とすると，$\beta^0=1$，$\beta^1=\beta$，$\beta^2=-\beta-3$，$\cdots$，$\beta^{287}=-6\beta-6$，$\beta^{288}=1$ となる．$p=17$ 上で定義可能な符号として Berlekamp は $n=8,24,72,144$ を示している [23]．ここでは，計算量と 19 点格子上で用いる符号の符号長と近いことを考慮して，$n=72$ の 4 重以下の Lee 誤り訂正可能な符号 $C_{n17q}$ を用いる．このとき，検査行列は式 (15) で定義され，冗長シンボル数は 8 となる．

$$H_{n17q} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{71} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \dots & \alpha^{213} \\ 1 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \dots & \alpha^{67} \\ 1 & \alpha^7 & \alpha^{14} & \dots & \alpha^{209} \end{pmatrix} \quad (15)$$

### 3.3 リード・ソロモン符号

リード・ソロモン符号 (RS: Reed-Solomon Code) は，1960 年に Reed と Solomon によって提案された符号であり [26]，その訂正能力の高さから身近な CD，DVD から衛星通信に至るまで幅広く活用されている．本報告では，リード・ソロモン符号が有限体上で定義することができることを利用し，六角形格子の信号点数を法とする有限体上の符号を定義する．ここで，リード・ソロモン符号の符号長 $n$ を考えると，素数 $p$ で定義される体 $\mathbb{F}_p$ において符号長 $n$ は，$n=p-1$ となる [21]．

リードソロモン符号は，$GF(2^x)$ 上の符号として用いられることが多い．しかし，六角形格子上の整数符号との積符号を作る際にシンボルマッピングが共通である方が設計しやすい．そこで，19 点，37 点及び 61 点六角形格子においては $\mathbb{F}_{19}$，$\mathbb{F}_{37}$ 及び $\mathbb{F}_{61}$ 上で定義される符号を用いる．

前述の式から，19 点格子上のリード・ソロモン符号においては符号長が 18，37 点格子上においては符号長が 36，61 点格子上においては符号長が 60 となる．以降においては，それぞれの素数に応じて $C_{r19}$，$C_{r37}$ 及び $C_{r61}$ とする．

次に，格子上におけるインデックスについて考えると，リード・ソロモン符号は負巡回符号の場合と違い，訂正可能な誤りについて信号空間図上の距離を考慮しなくても良い．したがって，格子上の全ての信号点を利用することが可能である．そのため，整数符号とインデックスを共通とし，六角形格子上ならば，図 3，図 4 及び図 5 で示されるビット割り当てを用いることができる．

また，比較のために矩形 QAM においてもリード・ソロモン符号を定義することを考える．こちらでは，一般的に広く使われる 16QAM と 64QAM を比較対象として用いる．16QAM においては，19 点格子の場合に条件を近づけるために，$\mathbb{Z}_{17}$ 上で符号長 $n=16$ のリードソロモン符号を定義し，マッピングとして図 7 を用いる．また，64QAM においては，$GF(2^6)$ 上の符号長 $n=63$ のリード・ソロモン符号 $C_{r2^6}$ を用いるものとした．

## 4. 六角形格子上の整数符号との組み合わせによる積符号の提案

### 4.1 積符号の構成

整数符号と負巡回符号またはリード・ソロモン符号を組み合わせる積符号 (PC: Product Code) の構成を図 11 に示す．まず，第 1 段階の符号化として負巡回符号またはリード・ソロモン符号を用いて符号化を行い，次に整数符号の符号化を行う．情報ビット系列を積符号へ変換し，信号空間図上の複素数値である信号点系列として出力する手順は次のとおりである．

Step. 1　入力ビット系列を負巡回符号かリードソロモン符号のマッピングに基づいて整数化
Step. 2　第 1 段階の符号化を行い検査シンボルを付加
Step. 3　負巡回符号を用いる場合，整数符号で対応する信号点のインデックスに変換
Step. 4　整数符号化を行い，検査シンボルを付加
Step. 5　信号空間図上の送信信号点系列として出力

$(n_1,k_1)$ である負巡回符号またはリード・ソロモン符号と $(n_2,k_2)$ を用いた場合，$(n_1n_2,k_1k_2)$ となる積符号が得られる．3 ステップ目のインデックスの変換は，負巡回符号では法とする素数が整数符号と異なるため行うものである．整数符号と負巡回符号の積符号

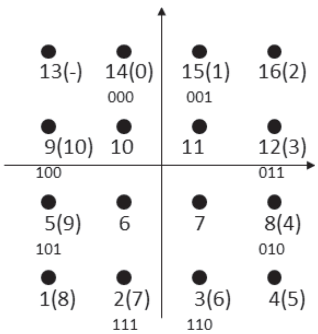


図 10　16QAM におけるインデックス及びビット割り当て
Fig. 10　Index and bit assignments of the NC over a 16QAM constellation.

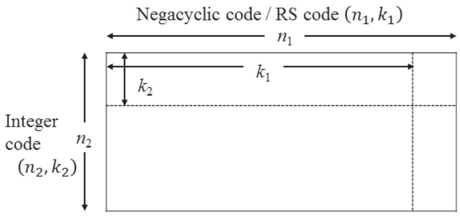


図 11　提案積符号の構造
Fig. 11　Structure of proposed the PCs.

において 3 ビット値の (101) を変換していく場合，入力ビット (101)，負巡回符号のインデックス (4)，整数符号のインデックス (2) と変換されていく．

以降においては，ある符号 $C_a$ と別の符号 $C_b$ の積符号を $C_{a*b}$ のように記述するものとする．また，比較のために 16QAM 上で整数符号と負巡回符号の積符号を作成する場合，図 10 のとおりにインデックス等を割り振った．図中において，全ての信号点に割り振っているのが整数符号のインデックス，括弧内のインデックスは負巡回符号のインデックスである．

### 4.2　復調・復号について

積符号の受信側では，次のように送信側と逆の処理を行う．

Step. 1　受信信号点系列を整数符号のシンボルに復調
Step. 2　整数符号の復号処理
Step. 3　負巡回符号の場合，インデックスを負巡回符号のインデックスに変換
Step. 4　使用した第 1 段階の符号に応じて復号処理
Step. 5　マッピングに基づき復号ビット系列を出力

整数符号の復号には，硬判定復号または軟判定復号を用いることが出来る [19]．$(\pm l_1, \pm l_2, \ldots, \pm l_s)$ 誤り訂正可能な符号長 $n$ の整数符号の軟判定復号では，復号器への入力パラメータとして，硬判定復調後の受信語 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ に加えて，信号空間図上の受信信号点系列 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を用いる．まず，$y_i$ と $r_i - \epsilon$ の距離 $\Delta^2[i, \varepsilon]$ を求める．ここで，$\epsilon \in \mathcal{L} = \{-l_s, -l_{s+1}, \ldots, -l_1 0, l_1, \ldots, l_s\}$ である．次に，受信語 $\boldsymbol{r}$ から，シンドローム $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}H^T$ を求める．更に，$E[\boldsymbol{s}]$ を $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}H^T$ であるエラーベクトル $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathcal{L}^n$ の集合とする．このとき，動的計画法を用いることによって，$E[\boldsymbol{s}]$ 上で $\sum_{i=1}^{n} = \Delta^2[i, e_i^*]$ を最小とするエラーベクトル $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ を探索する．最後に，送信推定語 $\tilde{c}$ を $\tilde{c} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{e}^*$ として出力する．

基本的に軟判定復号の方が性能が向上するため，以降では軟判定復号を用いる．また，負巡回符号やリード・ソロモン符号ではシンドロームを参照して復号を行う．本積符号を復号する際，情報シンボルでは全ての信号点を使用しないことから，復号出力の候補として，使用しない信号点を除外することで復号性能を改善することができる．

例えば，リード・ソロモン符号との積符号において，これらの符号の情報シンボルに相当する箇所の整数符号の復号を行う際には，復号後の出力をビット割り当て信号点に制限する．一方，リード・ソロモンの符号の検査シンボルは，非ビット割り当て信号点も含めた全ての格子上の信号点を使用する．そのため，相当する箇所の整数符号の復号の場合は，制限を行わないものとする．

## 5.　シミュレーション結果

図 12 に 19 点六角形格子上と 16QAM 上にて整数符号を用いた場合の BER 特性を示す．非符号化時及び符号化時ともに 16QAM の方が BER が低く，符号化時において，16QAM の方が BER= $10^{-5}$ において，$E_b/N_o$ が 1.1 dB 低かった．したがって，非符号化時や整数符号のみの場合では，信号点間の距離がより近いために，六角形格子の方が特性が低いことが確認できる．整数符号 $C_{i19d}$ を用いたときの PAPR を全ての符号語のシンボルの平均電力と最大電力から求めると 1.6 となった．ここで，非ビット割り当て信号点を図 3 の (5, 16, 17) から，(0, 1, 18)，(0, 8, 11) のように 0 とその周囲 2 点を選び PAPR を求めると 1.5 となり 0.1 下がった．これは，符号中の情報シンボルに対応する信号点の平均電力が変化したためである．積符号を用いることによる符号化率の減少により，

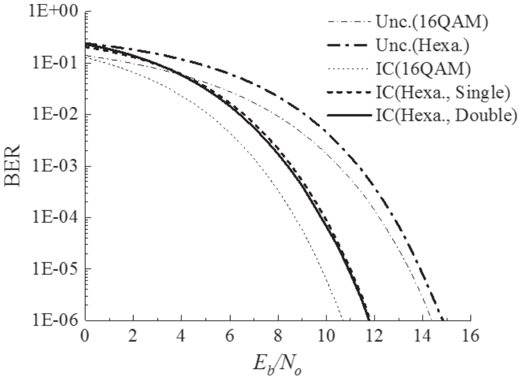


図 12　19 点六角形格子と 16QAM 上の整数符号の BER 特性

Fig. 12　BER characteristics of the ICs over a 19-hexagonal constellation and a 16QAM constellation.

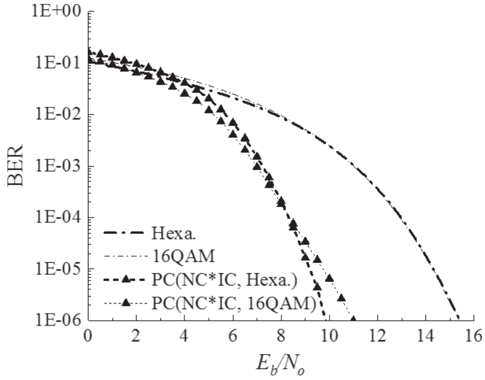


図 14　19 点六角形格子と 16QAM 上の負巡回符号を用いた積符号の BER 特性 (3bit/シンボル)

Fig. 14　BER characteristics of PCs using the NCs and the ICs over a 19-hexagonal constellation and 16QAM (3 bits / symbol).

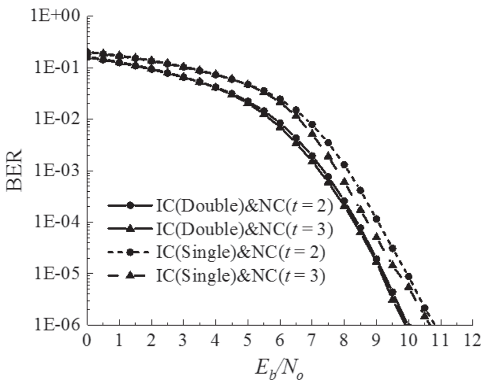


図 13　19 点六角形格子上の整数符号と負巡回符号を用いた積符号の BER 特性 (3bit/シンボル)

Fig. 13　BER characteristics of PCs using the ICs and the NCs over a 19-hexagonal constellation (3 bits / symbol).

マッピングの違いの PAPR への影響は低減されると考えられることから，以降においても図 3 のマッピングを用いるものとした．

次に，前の章で挙げた 19 点六角形格子上の整数符号と負巡回符号から積符号を作り最も特性の良いものを選択するため比較を行った．図 13 に 19 点六角形格子上で負巡回符号と整数符号による積符号の BER 特性を示す．先に，整数符号で $C_{i19s}$ 及び $C_{i19d}$ 並びに負巡回符号で $C_{n11d}$ 及び $C_{n11t}$ をあげており，その組み合わせで 4 通りの積符号が作成できる．それぞれのグラフから，二重誤り訂正可能な整数符号 $C_{i19d}$ を用いた場合に，単一誤り訂正可能な符号 $C_{i19s}$ を用いた場合よりも，BER$=10^{-5}$ において，$E_b/N_o$ が 0.4 dB から 0.7 dB 程度の符号化利得を得ることができた．また，負巡回符号には $t = 3$ である $C_{n11t}$ を用いた方が特性がよく，以降ではこれらによる積符号 $C_{i19d*n11t}$ を用いるものとする．

次に，図 14 に 19 点六角形格子と 16QAM における非符号化時と，積符号 $C_{i19d*n11t}$ を用いた場合及び 16QAM 上で負巡回符号と整数符号の積符号 $C_{i17d*n11t}$ を用いたの BER 特性を示す．どちらの変調方式を用いた場合にも，非負符号化時よりも特性が改善されているが，六角形格子上の積符号を用いた場合 16QAM 上のものと交差が生じ，BER$= 10^{-5}$ において，$E_b/N_o$ が 0.5 dB の符号化利得を得ることができた．また，六角形格子における非符号化時と比較すると，5.1 dB の符号化利得を得ることができた．そして，積符号 $C_{i19d*n11t}$ における PAPR を求めると，1.508 であった．

図 14 において，六角形格子上の積符号と 16QAM の積符号の特性に交差が生じている．低 $E_b/N_o$ において，19 点六角形格子の積符号の BER の方が高かった理由としては，次のように考えられる．まず，ビット割り当て信号点はどちらの場合も外周に設定しているが，六角形格子の信号点間の方が密である．そのため，低 $E_b/N_o$ の場合は 16QAM の BER の方が低くなったと考えられる．一方，使用した整数符号は 16QAM では符号化率 1/2 の符号長 2，19 点六角形格子では符号化率 1/3，符号長 3 である．このことから，$E_b/N_o$ が増加すると，19 点六角形格子では検査シンボルの種類や割合が 16QAM の場合より多いことから，符号化

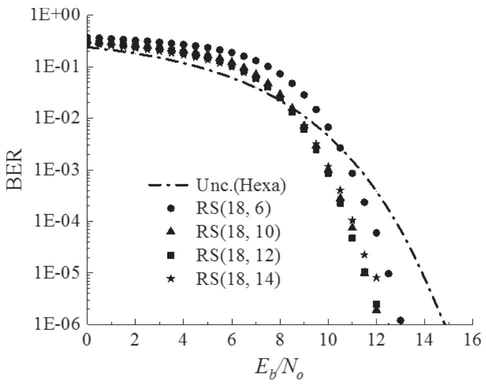


図 15　19 点六角形格子上のリード・ソロモン符号の BER 特性
Fig. 15　BER characteristics of the Reed-Solomon codes over a 19-hexagonal constellation.

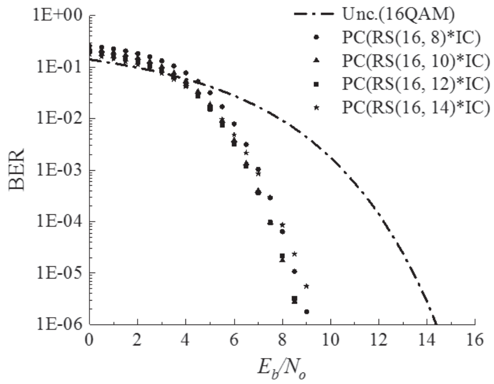


図 16　16QAM におけるリード・ソロモン符号を用いた積符号の BER 特性
Fig. 16　BER characteristics of the PCs using the Reed-Solomon codes over 16QAM.

利得を得られたと推定される．

次に，19 点六角形格子上にてリード・ソロモン符号を用いた場合の検討を行う．まず，図 15 に，符号化率を変化させた場合の BER 特性を示す．様々に符号化率を変化させた場合，BER$= 10^{-5}$ で注目したところ，(18, 10) リード・ソロモン符号符号の特性が最も低かった．したがって，この符号化率のリード・ソロモン符号 $C_{r19}$ と整数符号 $C_{i19d}$ により積符号 $C_{i19d*r19}$ を作成し，以降で特性を求めた．

次に，19 点六角形格子とそれに信号点数の近い矩形 16QAM におけるリード・ソロモン符号と整数符号の積符号の比較を行う．比較に用いるために，16QAM 上における積符号の定義を行った．まず，16QAM 上の整数符号は前述のとおり，符号長 $n = 2$ である $C_{i17d}$ を用いる．また，リード・ソロモン符号の符号化率を変化させながら整数符号との積符号を作成して BER 特性を求めた結果を図 16 に示す．BER$= 10^{-5}$ において，(16, 10) リード・ソロモン符号符号の値が最も低い結果が得られた．そのため，このリード・ソロモン符号 $C_{r17}$ と整数符号 $C_{i17d}$ の積符号 $C_{i17d*r17}$ を六角形格子上の積符号 $C_{i19d*r19}$ との比較を行った．

図 17 に，六角形格子上の積符号 $C_{i19d*r19}$ を用いた場合の特性及び 16QAM 上での積符号 $C_{i17d*r17}$ の BER 特性の比較を示す．BER$= 10^{-5}$ において 19 点六角形格子上の積符号は，16QAM 上の積符号とを比較すると 1 dB の符号化利得を得ることができた．また，非符号化時の六角形格子の特性と比較すると，6.8 dB の符号化利得を得ることができた．更に，先に示した負巡回符号を用いた積符号の結果と比較しても，

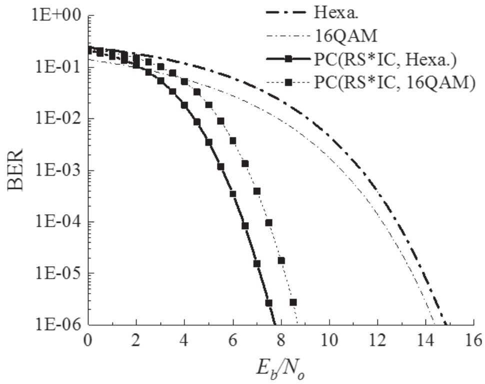


図 17　19 点六角形格子及び 16QAM における整数符号とリード・ソロモン符号を用いた積符号の BER 特性
Fig. 17　BER characteristics of the PCs using the ICs and Reed-Solomon codes over a 19-hexagonal constellation and 16QAM.

リード・ソロモン符号を用いた積符号は，BER$= 10^{-5}$ で 2 dB の符号化利得があった．これは，負巡回符号や整数符号が近接信号点の誤りを訂正するのに対し，リード・ソロモン符号は全ての距離に対して誤り訂正を行うことができ，特性の違う符号を組み合わせた効果が強く現れたためと推定される．

また，積符号 $C_{i19d*r19}$ の PAPR は，1.594 であった．整数符号の場合と同様に，非ビット割り当て信号点を (0, 1, 18) のように原点の 0 とその周囲の 2 点とすると PAPR は 1.528 と減少した．したがって，整数符号で非ビット割り当て信号点を変更した場合に PAPR が 0.1 変化したのと比べると差は小さくなった．これは，積符号とすることで符号化率が下がり，全て

の格子上の点を用いる検査シンボルの割合が増えたため，非ビット割り当て信号点の指定の影響が下がったためである．16QAM の PAPR は 1.8 であるため，19 点六角形格子における符号化変調方式の PAPR は抑えられたものとなり，電力効率の上で優位であることが確認できる．

次に 37 点六角形格子における結果を図 18 に示す．図中には，非符号化時，負巡回符号と整数符号の積符号 $C_{i37d*n17q}$，リード・ソロモン符号と整数符号の積符号 $C_{i37d*r37}$ 及びそれらの基になった符号の特性を示している．この比較では，負巡回符号とリード・ソロモン符号のどちらを用いるかにより，1 シンボルあたりのビット数が変わることに注意が必要である．ここで，リード・ソロモン符号符号は，19 点の場合と同様に最も BER 特性の良いものを探索し，(32, 22) リード・ソロモン符号を用いた．BER$=10^{-5}$ において，積符号を整数符号のみと比較した場合の符号化利得は，負巡回符号との積符号では 2.1 dB，リード・ソロモン符号との積符号では 2.8 dB であった．

また，積符号同士を比較すると，$E_b/N_o$ が 6.7 dB を超えた以降はリード・ソロモン符号を用いた場合の方が BER が低い結果となった．したがって，19 点及び 37 点六角形格子を用いた場合で共に，積符号とすることで整数符号を単体で用いる場合よりも BER の改善を確認できた．また，BER$=10^{-5}$ で比較した場合，リード・ソロモン符号を用いた積符号と負巡回符号を用いた積符号では，前者の方が BER の観点から有利であることを確認できた．

また，積符号 $C_{i37d*n17q}$ の PAPR は，1.435，積符号 $C_{i37d*r37}$ の PAPR は，1.801 となった．積符号 $C_{i37d*n17q}$ においては，外周に極端に情報シンボルが偏ったため，このように低い PAPR になったと推定される．

更なる拡張として，61 点六角形格子における積符号 $C_{i61d*r61}$ の特性を図 19 に示す．図中には比較のために，矩形 64QAM の特性を示している．これまでの特性の比較の結果に基づき，ここではリード・ソロモン符号を用いた積符号を示す．また，リード・ソロモン符号の符号化率の選定にもこれまでと同様に BER 特性を比較したうえで，61 点六角形格子において (60, 38) リード・ソロモン符号，矩形 64QAM において (63, 43) リード・ソロモン符号を用いている．BER$=10^{-5}$ において，六角形格子上の提案積符号は，非符号化時の $E_b/N_0$ と比較すると 8.6 dB，矩形 64QAM 上の積符号との比較では 0.8 dB の符号化利得が得られた．したがって，19 点六角形格子の場合と同様に，近い信号点数の矩形 QAM との積符号と比較した場合に六角形格子を用いることでより高い符号化利得を得ることが確認できた．

また，積符号 $C_{i61d*r61}$ の PAPR は符号語の種類数が多いことからシミュレーションで求めたところ，1.722 となった．

図 2 に示した QAM の PAPR と提案符号化変調方式の各信号点数の PAPR を比較すると，まず，19 点六角形格子の値は 16QAM よりも低い．そして，信号点数 $N$ が 20 以降では QAM の PAPR が 2 を超えて増加するのに対し，提案符号化変調方式の PAPR は最大でも 1.801 に抑えられた．したがって，電力効率

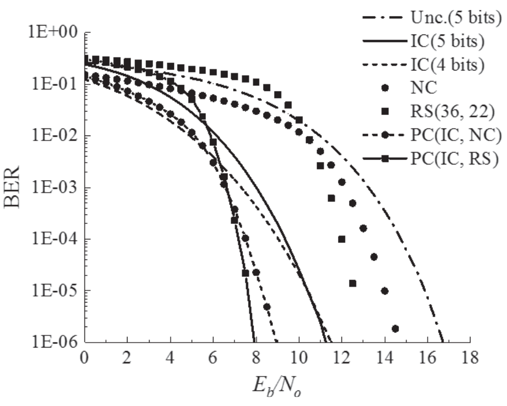


図 18　37 点六角形格子上の積符号の BER 特性
Fig. 18　BER characteristics of the PCs over a 37-hexagonal constellation.

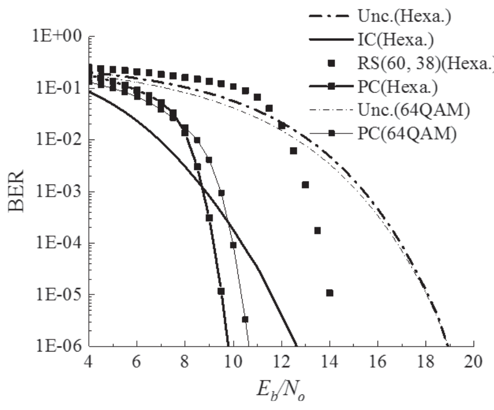


図 19　61 点六角形格子上の積符号の BER 特性
Fig. 19　BER characteristics of the PCs over a 61-hexagonal constellation.

の点においても六角形格子上の提案符号化変調方式が有利であることを確認できた．

## 6. む す び

本論文では，PAPR の低減のため六角形格子上の積符号を用いた符号化変調方式を提案し，シミュレーションによりその特性を示した．まず，等確率で各信号点が出現する場合に，信号点数 $N$ のに対して等方性の六角形格子は QAM と比較して PAPR の増加を抑えることができ，電力効率的に有利な形状であることが確認できた．しかし，この構造は，信号点数が 2 のべき乗とならず，$2^m$ 個のビット割り当てを行う際には，ビットを割り振らない信号点が生じる．そこで，隣接点同士のハミング距離を抑えながら効率的にビットを配置していくアルゴリズムを提示した．ただし，非ビット割り当て信号点のインデックスは整数符号の検査シンボルとしては出現し得るため，全ての格子上の点は使用され得る．

次にシミュレーションを通して提案符号化変調方式の有利性を示した．19 点六角形格子における負巡回符号を用いた積符号では，16QAM 上の同種の積符号よりも，0.5 dB の符号化利得を得ることができた．また，リードソロモン符号との積符号では，負巡回符号とのものよりも更に符号化利得を 2 dB 向上させることができた．これは，訂正可能範囲の異なる符号を組み合わせた効果が得られたためと推定する．

更に，37 点及び 61 点六角形格子上の各符号を比較していき，整数符号との積符号にはリード・ソロモン符号が有効であること，信号点数の近い矩形 QAM と比較して提案積符号により 0.8 dB から 1 dB の符号化利得が得られることを示した．

また，六角形格子上の符号化における PAPR の値は，いずれも図 2 における QAM のものと比較すると低い値であった．各結果から，従来の矩形 QAM と比較して提案方式により，電力利用効率を改善しつつ，誤り率を抑えられることが確認できた．

今後は，更なる信号点数の六角形格子上の符号の特性についての検討を行う．六角形格子上の整数符号として，127，271 点のものが提案されている [22]．これらについても，その特性や他符号との組み合わせなどについても検討していく．

**謝辞**　本研究の一部は JSPS 科研費 (17K00400) の助成を受けた．

## 文　　献

[1] IEEE, “IEEE 802.15.6-2012 - IEEE Standard for local and metropolitan area networks - part 15.6: Wireless Body Area Networks,” https://standards.ieee.org/standard/802_15_6-2012.html, Accessed on June 2, 2019.

[2] ETSI, “Smart body area networks,” http://www.etsi.org/technologies-clusters/technologies/smart-body-area-networks, Accessed on June 2, 2019.

[3] A. Goldsmith, Wireless Communications, Cambridge, 2005.

[4] H. Ochiai, “Exact and approximate distributions of instantaneous power for pulse-shaped single-carrier signals,” IEEE Trans. Wireless Commun., vol.10, no.2, pp.682–692, 2010.

[5] C. Cahn, “Combined digital phase and amplitude modulation communication systems,” IRE Trans. Commun. Syst., vol.8, no.3, pp.150–155, 1960.

[6] A.B. Idris, A.B.B.M. Fauzi, M.S.B. Idris, I.B. Taib, M.B. Kassim, and R.B. Ab Rahman, “Reduction of PAPR using huffman coding and APSK modulation technique for F-OFDMA in 5G system,” 2018 IEEE 8th Int. Conf. System Engineering and Technology, pp.24–28, 2018.

[7] D. Yoda and H. Ochiai, “A reduced-complexity multilevel coded modulation for APSK signaling,” 2013 IEEE International Symposium on Information Theory, pp.1994–1998, 2013.

[8] R. Duan, R. Liu, M. Shirvanimoghaddam, Y. Li, and C.W. Chen, “A low PAPR constellation mapping scheme for rate compatible modulation,” IEEE Commun. Lett., vol.20, no.2, pp.256–259, 2015.

[9] R. Zamir, Lattice Coding for Signals and Networks: A Structured Coding Approach to Quantization, Modulation, and Multiuser Information Theory, Cambridge University Press, 2014.

[10] M. Simon and J. Smith, “Hexagonal multiple phase-and-amplitude-shift-keyed signal sets,” IEEE Trans. Commun., vol.21, no.10, pp.1108–1115, 1973.

[11] S.-J. Park, “Triangular quadrature amplitude modulation,” IEEE Commun. Lett., vol.11, no.4, pp.292–294, 2007.

[12] S.-J. Park, “Performance analysis of triangular quadrature amplitude modulation in AWGN channel,” IEEE Commun. Lett., vol.16, no.6, pp.765–768, 2012.

[13] S.H. Han, J.M. Cioffi, and J.H. Lee, “On the use of hexagonal constellation for peak-to-average power ratio reduction of an ODFM signal,” IEEE Trans. Wireless Commun., vol.7, no.3, pp.781–786, 2008.

[14] J. Conway and N. Sloane, “A fast encoding method for lattice codes and quantizers,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol.29, no.6, pp.820–824, 1983.

[15] N. Sommer, M. Feder, and O. Shalvi, “Low-density lattice codes,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol.54,

no.4, pp.1561–1585, 2008.
[16] N. Sommer, M. Feder, and O. Shalvi, "Shaping methods for low-density lattice codes," 2009 IEEE Information Theory Workshop, pp.238–242, 2009.
[17] B.M. Kurkoski, "Coded modulation using lattices and Reed-Solomon codes, with applications to flash memories," IEEE J. Sel. Areas Commun., vol.32, no.5, pp.900–908, 2014.
[18] O. Shalvi, N. Sommer, and M. Feder, "Signal codes: Convolutional lattice codes," IEEE Trans. Inform. Theory, vol.57, no.8, pp.5203–5226, 2011.
[19] H. Kostadinov, H. Morita, N. Iijima, A.J.H. Vinck, and N. Manev, "Soft decoding of integer codes and their application to coded modulation," IEICE Trans. Fundamentals, vol.93, no.7, pp.1363–1370, 2010.
[20] J. Justesen and T. Høholdt, A course in error-correcting codes, vol.1, European Mathematical Society, 2004.
[21] S. Lin and D.J. Costello, Error control coding, Pearson Education India, 2001.
[22] H. Morita, "Nearest-neighbor error correcting codes on a hexagonal signal constellation," 2015 IEEE International Symposium on Information Theory, pp.2480–2484, 2015.
[23] E.R. Berlekamp, "Negacyclic codes for the Lee metric," 1966.
[24] A.J.H. Vinck and H. Morita, "Codes over the ring of integers modulo m," IEICE Trans. Fundamentals, vol.81, no.10, pp.2013–2018, 1998.
[25] B.F. AlBdaiwi and B. Bose, "Quasi-perfect Lee distance codes," IEEE Trans. Inform. Theory, vol.49, no.6, pp.1535–1539, 2003.
[26] I.S. Reed and G. Solomon, "Polynomial codes over certain finite fields," Journal of the society for industrial and applied mathematics, vol.8, no.2, pp.300–304, 1960.

（2019 年 6 月 12 日受付，11 月 2 日再受付，
2020 年 1 月 13 日早期公開）

**北原　裕久**　（正員）

2002 電気通信大学電子工学科卒．2004 防衛庁入庁．2012 防衛大学校博士前期課程了．2012 修士 (電子工学) 独立行政法人大学評価・学位授与機構．現在，電気通信大学大学院博士後期課程在学中．

**森田　啓義**　（正員：シニア会員）

1983 阪大大学院後期課程了．同年豊橋技術科学大学助手．1990 電気通信大学電気通信学部講師を経て，現在同大大学院情報理工学研究科教授．情報源符号化，整数符号，MPEG ビデオ解析に関する研究に従事．工博．情報処理学会，IEEE 各会員．

**眞田亜紀子**　（正員）

2009 Queen's University, Canada, Department of Mathematics and Statistics, Ph.D program 修了 (Ph.D in mathematics)．同年 Post-doctoral fellow at Claude Shannon Institute, University College Dublin, Ireland．2012 電気通信大学に助教として着任，2018 より湘南工科大学工学部情報工学科講師．離散数学を用いた符号化やネットワークトポロジー解析の研究に従事．IEEE 会員．