

修士論文の和文要旨

研究科・専攻	大学院 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 博士前期課程		
氏名	小藤田 遇	学籍番号	1831063
論文題目	経路選択ゲームの均衡解における経路本数制限効果の検証		

要旨

近年では混雑集中による観光公害が社会問題として注目されている。それに対して、増加しつつあるスマートフォン等による経路探索サービスを用いて、公平でありながらも全体の混雑が緩和されるような経路推薦を各ユーザに行う取り組みが始まっている。そこで利用されるのは経路選択ゲームと呼ばれる交通・社会ネットワークを設計、分析するための数理モデルが利用されている。

経路選択ゲームは、グラフ上の頂点ペア間のフローを形成するポテンシャルゲームの一種である。ポテンシャルゲームには均衡と呼ばれる状態が存在し、経路選択ゲームの均衡とは全利用者の頂点ペア間に対して、どの経路を選択してもコストが同一になる状態のことである。経路選択ゲームの派生モデルとして、利用可能な経路集合がすべて一定の要素数以下からなるマトロイド制約付き経路選択ゲームがある。

経路選択ゲームは、均衡解を求解に長い計算時間を要する。求解時に利用する経路の本数に制限を設けることで計算時間を削減することが可能であるが、制限がない場合に比べて得られる均衡解に乖離が見られる。そこで、本研究では経路本数を制限して計算した場合に得られる均衡解を検証し、どの程度の乖離が発生するのかを実験的に評価する。

本研究では先行研究であるマトロイド制約付き経路選択ゲームを基として、資源制約付き経路選択ゲームを定式化した。資源制約付き経路選択ゲームは、経路選択ゲームにおいて均衡解を求めるための定式化であるポテンシャル関数最小化問題に、利用可能な経路に関する上限を与える制約を追加したものである。

資源制約付き経路選択ゲームについて、格子グラフとランダムグラフそれぞれのインスタンスについて実験を行い、得られた解について一般の経路選択ゲームとの比較を行った。本研究で行った実験における解の比較では、ポテンシャル間数値、平均コスト共に有意な差は存在しないという結果を得た。また、レプリケータダイナミクスを用いた計算時間の比較実験では、通常の均衡解探索と上限数まで経路本数を削減した場合での均衡解探索の時間を比較し、削減した場合の方が高速に求解可能であることを確認した。さらに現実の交通網を模したネットワークでの実験を行い、得られる均衡解についての考察を行った。

電気通信大学大学院情報理工学研究科
情報・ネットワーク工学専攻情報数理工学プログラム修士論文

経路選択ゲームの均衡解における
経路本数制限効果の検証

令和2年1月27日

情報数理工学プログラム

学籍番号 1831063

小藤田 遇

指導教員 高橋里司
村松正和

目次

1	はじめに	2
1.1	背景	2
1.2	研究目的	3
1.3	結果	3
1.4	論文構成	3
2	準備	4
2.1	ポテンシャルゲーム	4
2.2	経路選択ゲーム	5
2.3	ワードロップ均衡	6
2.4	ブライスのパラドックス	8
2.5	レプリケータダイナミクス	9
2.6	マトロイド	10
2.7	凸計画問題	11
3	関連研究	12
3.1	マトロイド制約付き混雑ゲーム	12
4	資源制約付き経路選択ゲーム	13
4.1	定式化	13
4.2	性質	13
5	数値実験	16
5.1	均衡解比較	17
5.2	計算時間比較	24
5.3	実際の交通網を参考にしたインスタンス	29
6	終わりに	32
7	謝辞	32

1 はじめに

1.1 背景

近年では政府主導によって推し進められてきた観光政策によって、国内外を合わせた観光客数が年々増加している [1]. そのために、多くの観光地に想定を超えるほどの観光客が訪れる事例が増加している. 人が集中する状況下においては近隣住民に負担が発生してしまうような事象も見られるようになっており、これはオーバーツーリズムや観光公害と呼ばれ世界各地で社会問題となっている [2].

一方でスマートフォン普及率の上昇と共に歩行者、車を問わず携帯端末からの経路検索が多く利用されるようになってきている [3]. これにより、自らの意思で決定した経路ではなく、経路探索サービスによって推薦された経路を利用するため、しばしば交通の集中が発生する. 例えばカーナビゲーションシステムでは、渋滞予測を基に迂回路を推薦するが、多くのユーザが迂回路を利用すると結局は交通の集中が発生してしまう.

こういった背景から、経路網設計等に用いられてきた利用者均衡モデルを応用し、ロードプライシング等によってソフト側で流量を制御する取り組みも行われている [4]. また、オリンピックの開催に合わせ、大規模な歩行者混雑を回避するための流量制御に関する取り組みも報じられている [5].

しかしながら、実社会に存在する大規模交通ネットワークにおいてユーザの要求ごとに均衡配分を実用的な時間で求めることは困難である. 実社会における経路探索サービスは、全ての経路を探索、提示するのではなく、経路候補をあらかじめ絞って推薦する. そのため、実サービス上で均衡配分を考慮した経路推薦を行うことは、全経路の考慮や即応性の観点から現実的ではない.

反復計算を含むアルゴリズムによって均衡配分を計算する際に、考慮する経路の本数を少なくすることが計算時間の減少につながることは過去の研究によって明らかになっている [6][7]. そこで、経路の本数を大幅に削減して計算した場合に得られる均衡配分の質が良ければ、有効な結果の取得と計算時間の減少をどちらも達成することができる. 本研究では均衡配分を一定以下の経路本数において求めるモデルを作成し、元の問題の解との比較を行う.

1.2 研究目的

背景で述べたように，大域的な均衡解を求めるためにはすべての経路について探索を行う必要がある．しかし，携帯端末等から各ユーザが目的地までの経路を探索する際に，全経路を考慮した均衡解を求めるのは計算時間の面から現実的ではない．探索に利用する経路の本数を制限することで計算時間を短縮することは可能であるが，一般的に使用できる経路の本数を制限すると，制限のない場合と比べて均衡解の乖離が見られる．乖離の程度が小さく，経路の本数を制限した場合であっても良い解が得られているならば，実用上は経路本数を制限したモデルで十分であると言える．そこで本研究では，経路本数の制限によってどの程度解の乖離が発生するのかを実験的に評価する．

1.3 結果

本研究では，経路選択ゲームにおいて経路本数に上限を与えたモデルを凸計画問題として定式化した．また，経路選択ゲームにおける均衡解と定式化したモデルにおける均衡解の間に生じるコストおよびポテンシャル関数値の差について統計的検定を通して考察した．さらに，利用する候補となる経路本数を削減した状態で計算を開始することで，高速に均衡解の求解が可能であることをレプリケータダイナミクスを用いた計算実験によって示した．

1.4 論文構成

本章では研究背景および目的について述べた．2章では，定式化および実験に利用する知識について述べる．3章では，本研究における定式化の基となるモデルについて述べる．4章では，本研究において定式化した資源制約付き経路選択ゲームについて述べる．5章では，数値実験によって得られた解と，計算時間に関する考察を行う．最後に6章で，まとめと今後の展望について述べる．

2 準備

本章では経路本数上限を与えた経路選択ゲームをモデル化するために利用するポテンシャルゲーム，混雑ゲームと経路選択ゲームについて定義する．また，均衡配分についての定義及び，均衡配分を求める手法についても触れる．さらに，資源制約付き経路選択ゲームの定式化に用いる凸計画問題についても述べる．

2.1 ポテンシャルゲーム

ポテンシャルゲームは，Monderer と Sharpley[8] によって定義された，ポテンシャルを持つクラス of 非協力ゲームである [9]．プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ，プレイヤー $i \in N$ の戦略集合を S_i とし，戦略空間を $S = \prod_{i \in N} S_i = S_1 \times \dots \times S_n$ とする．また，プレイヤー $i \in N$ の利得関数を $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ ，全体の利得関数を $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ とし，これらから成る戦略形ゲーム $\Gamma = (N, S, \mathbf{u})$ を考える．以下では， $S_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$ ， $\mathbf{s}_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_{-i}$ ， $x \in S_i$ に対して $(\mathbf{s}_{-i}, x) = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$ と表す．ポテンシャル関数を以下のように定義する．

定義 1. [9] 任意のプレイヤー $i \in N$ において，任意の戦略 $x, z \in S_i$ ，および $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ について，

$$u_i(\mathbf{s}_{-i}, x) - u_i(\mathbf{s}_{-i}, z) > 0 \Leftrightarrow P(\mathbf{s}_{-i}, x) - P(\mathbf{s}_{-i}, z) > 0$$

を満たす関数 $P : S \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとき， $\Gamma(N, S, \mathbf{u})$ をポテンシャルゲームといい， P をポテンシャル関数という．

全てのポテンシャルゲームには純粋戦略ナッシュ均衡と呼ばれる戦略の均衡状態が存在する．ポテンシャルゲームにおける純粋戦略ナッシュ均衡を，ポテンシャル関数を用いて以下のように定義する．

定義 2. 戦略 $\mathbf{s} \in S$ が純粋戦略ナッシュ均衡であるとは，任意のプレイヤー $i \in N$ について， i の任意の戦略 $x \in S_i$ と他プレイヤーの任意の戦略 $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ に対して，

$$P(\mathbf{s}) \geq P(\mathbf{s}_{-i}, x)$$

が成り立つことである．

2.2 経路選択ゲーム

経路選択ゲームは Roughgarden[10] によって定義された，グラフ上の頂点ペア間のフローを形成するポテンシャルゲームの一種である．経路選択ゲームは，流量を分割したフロー形成を許容するものを Nonatomic，そうでないものを Atomic と分類する．本稿では Nonatomic な経路選択ゲームモデルを考える．経路選択ゲームは混雑ゲーム [8] とも呼ばれる．

頂点集合 V ，有向辺集合 A からなる有向グラフ $G = (V, A)$ 上の経路選択ゲーム Γ を定義する．記法の簡略化のため， $u, v \in V$ 間の u - v パス (u, w_1, \dots, w_m, v) を，一対一対応する辺の部分集合 $p_{u,v} \subseteq A$ として表す．プレイヤーの集合を $N = \{1, \dots, n\}$ ，グラフ G 上の出発地と目的地のペアである OD ペアの集合を $OD = \{(s_i, t_i) \in V \times V \mid i \in N, s_i \neq t_i\}$ とする．各 OD ペア (s_i, t_i) に対して， s_i - t_i パスの集合を $P_i \subseteq 2^A$ とする．任意のプレイヤー $i \in N$ は OD ペア (s_i, t_i) に対して $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ として，流量 $X_i \in \mathbb{R}_+$ を流そうとする．プレイヤー i の戦略集合を $S_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|P_i|} \mid \sum_{p \in P_i} x_p = X_i\}$ とし，戦略空間を $\mathcal{S} = \prod_{i \in N} S_i = S_1 \times \dots \times S_n$ ，戦略ベクトルを $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ と表す．戦略 $\mathbf{s} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n)$ は各経路にどのくらいの流量を流すかを要素として持つため，ネットワーク上のフローを考える事ができる．プレイヤー $i \in N$ がパス $p \in P_i$ に流すフローの流量を x_p^i と表す．戦略に従って，辺 a の流量を

$$f_a(\mathbf{s}) = \sum_{i \in N} \sum_{p \in P_i: a \in p} x_p^i$$

と表す．有向辺 $a \in A$ のコスト関数 c_a を $c_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ とする．以上から，パス p のフローに対して発生する流量 1 あたりのコストを，

$$\tilde{c}_p(\mathbf{s}) = \sum_{a \in p} c_a(f_a(\mathbf{s}))$$

と表すことができる．また，プレイヤー i の OD ペア間平均コストを

$$C_i(\mathbf{s}) = \frac{1}{X_i} \sum_{p \in P_i} x_p^i \tilde{c}_p(\mathbf{s})$$

とする．これらを用いて経路選択ゲーム $\Gamma = (G, N, OD, \mathcal{S}, \mathbf{c})$ と定義される．ただし $\mathbf{c} = (c_a)_{a \in A}$ とする．

経路選択ゲーム Γ は，混雑ゲームのクラスに属するため，ポテンシャル関数を持つ [10]．ゲーム Γ のポテンシャル関数は，

$$\Phi(\mathbf{s}) = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a(\mathbf{s})} c_a(y) dy \quad (1)$$

と定義される.

2.3 ワードロップ均衡

経路選択ゲームにおける戦略の均衡概念として, ワードロップ均衡がある [11]. ワードロップ均衡となるネットワーク上のフローを均衡解と呼ぶ.

定義 3. 経路選択ゲーム $\Gamma = (G, N, OD, \mathcal{S}, \mathbf{c})$ において, 戦略ベクトル $\mathbf{s}^* \in \mathcal{S}$ が均衡解であるとは, 次を満たすことである.

$$\begin{cases} \tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) = C_i(\mathbf{s}^*) & \text{if } x_p^i > 0 \\ \tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) \geq C_i(\mathbf{s}^*) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

一般的にポテンシャルゲームにおいて, ポテンシャル関数の最小化問題を解くことで均衡解を得ることができる [8]. 経路選択ゲーム Γ における均衡解は, 次の最適化問題を解くことによって得られる [7].

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \quad \Phi(\mathbf{s}) \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{p \in P_i} x_p^i = X_i \quad \forall i \in N \\ & \quad \quad x_p^i \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i. \end{aligned} \quad (3)$$

ポテンシャル関数の最小化によって経路選択ゲームの均衡解が得られることを示す. 最適化問題 (3) をラグランジュ緩和すると以下のように表せる.

$$(\text{LRP}(\Phi)) \quad \left| \begin{array}{l} \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \quad \Phi(\mathbf{s}) - \sum_{i \in N} \phi_i \left(\sum_{p \in P_i} x_p^i - X_i \right) \\ \text{s.t.} \quad \quad \quad x_p^i \geq 0 \quad \quad \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i. \end{array} \right.$$

さらに, $(\text{LRP}(\phi))$ を x_p^i の目的関数を偏微分したものを考える.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} - \phi_i, \quad \forall i \in N.$$

また、各プレイヤー $i \in N$ についてポテンシャル関数である式 (1) を偏微分することで以下が言える。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} &= \sum_{a \in p} c_a(f_a(\mathbf{s})) \\ &= \tilde{c}_p(\mathbf{s}).\end{aligned}$$

(LRP(ϕ)) の相補性条件は以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} - \phi_i \right) x_p^i = 0, \quad \forall i \in N. \quad (4)$$

式 (4) から、 $x_p^i > 0$ の場合について以下を得る。

$$\left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} - \phi_i \right) = 0, \quad \forall i \in N.$$

ここで、(LRP(ϕ)) の双対問題を考える。

$$(\text{LRD}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \phi_i \\ \text{s.t.} \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} - \phi_i \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i. \end{array} \right.$$

以上から、以下の式が各プレイヤー $i \in N$ についての均衡解 $\mathbf{s}^* = (x^1, \dots, x^n)$ に対して成立する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi(\mathbf{s}^*)}{\partial x_p^i} = \phi_i \quad (x_p^i > 0), \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{s}^*)}{\partial x_p^i} \geq \phi_i \quad (x_p^i = 0). \end{array} \right.$$

次に、均衡解 \mathbf{s}^* における、各プレイヤーの平均コストを考える。 $x_p^i = 0$ のとき、 $x_p^i \tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) = 0$ となることから平均コストは

$$\begin{aligned}C_i(\mathbf{s}^*) &= \frac{1}{X_i} \sum_{p \in P_i; x_p^i > 0} x_p^i \phi_i \\ &= \phi_i\end{aligned}$$

となる。 $x_p^i > 0$ となるような経路においては $\tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) = C_i(\mathbf{s}^*)$ が成立する。また、 $x_p^i = 0$ となる経路においては $\tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) \geq C_i(\mathbf{s}^*)$ が成立する。このとき、均衡解 \mathbf{s}^* は定義 3 を満たす。

2.4 ブライスのパラドックス

経路選択ゲームにおいて均衡解を考える時、特別なケースとして扱われる例が存在し、その一つがブライスのパラドックスである。後述するマトロイド制約付き経路選択ゲームにおいて、この現象の発生を抑制することが可能であるという研究も行われている [12].

定義 4. ブライスのパラドックス [13] とは、既存のネットワークに対して、OD間の経路を短絡するような辺を追加した場合に、追加後のOD間の均衡解で発生するコストが増加するような現象のことである。

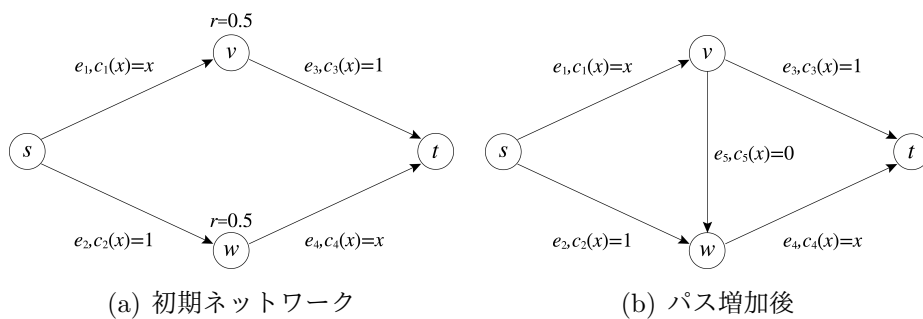


図 1: ブライスのパラドックスにおけるネットワーク

初期ネットワーク図 1(a) にコスト 0 の有向辺 $v \rightarrow w$ を追加した図 1(b) がパス増加後のネットワークである。これらのネットワークにおける均衡解を考える。均衡解を以下に示す。

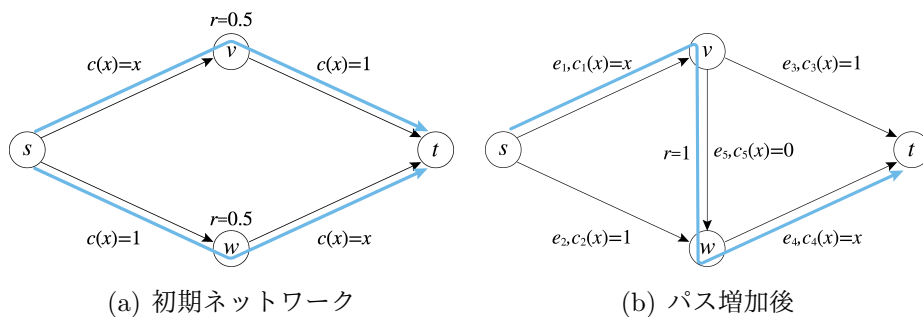


図 2: ブライスのパラドックスにおける均衡解

表 1: 各コストの比較

	平均経路コスト	総コスト	ポテンシャル関数値
図 2(a) 初期ネットワーク	1.5	1.5	1.23
図 2(b) パス増加後	2	2	1

図 2(a),2(b) の通り，パスの増加によって均衡解において利用される経路が変化していることがわかる．また，表 1 からポテンシャル関数値は減少している一方で経路コスト，総コストはともに増加していることがわかる．ブライスのパラドックスは，パスを増やすことで必ずしも均衡解における総コストが改善するわけではないというケースの代表的な例として用いられている．実社会においても，一部の道路を閉鎖することで利用者の移動時間が削減された例が存在する [14]．

2.5 レプリケータダイナミクス

レプリケータダイナミクスは経路選択ゲームにおける均衡解の求解手法であり，微分方程式の解を求めるための進化計算手法の 1 つである [15]．レプリケータダイナミクスとは，すべての経路に対する流量を，以下に示す更新式によって均衡解の条件を満たすまで更新するような反復解法である． $k + 1$ 回目の反復におけるプレイヤー i の経路 p の流量を

$$x_p^i(k+1) = x_p^i(k) - \alpha x_p^i(k) (\tilde{c}_p(\mathbf{s}(k)) - C(\mathbf{s}(k)))$$

で更新し，全ての経路 p が終了条件

$$\begin{aligned} x_p^i &= 0, \\ \tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) &= C(\mathbf{s}^*) \end{aligned}$$

のいずれかを満たすまで反復計算を行う．ただし α はステップサイズであり， $0 < \alpha < 1$ となる値である．この条件を満たす解はレプリケータダイナミクスの解であると同時に均衡解の条件である式 (2) とそれぞれ対応し，どちらの式も同時に満たしていることがわかる．反復中，各 OD ペアの流量は一定で保存される必要がある． k 回目から $k + 1$ 回目への変化

時の流量は以下のように計算される.

$$\begin{aligned}
\sum_{p \in P_i} \frac{x_p(k+1) - x_p(k)}{\alpha} &= \sum_{p \in P_i} \{-x_p(k) (\tilde{c}_p(\mathbf{s}(k)) - C_i(\mathbf{s}(k)))\} \\
&= -\sum_{p \in P} x_p(k) \tilde{c}_p(\mathbf{s}(k)) + \sum_{p \in P} x_p(k) C(\mathbf{s}(k)) \\
&= -XC(\mathbf{s}(k)) + XC(\mathbf{s}(k)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

反復計算時に総流量の変化量が0になることから, レプリケータダイナミクス計算時に流量が保存されることがわかる.

また, 初期解として任意の経路 $p \in P$ に対して $x_p > 0$ である必要がある.

2.6 マトロイド

経路選択ゲームのモデルにおいて, 解を求めるために OD ペア間の経路の集合が定義される. 有限集合においてはマトロイドが定義され, 経路選択ゲームに対してマトロイドを考えた問題も議論されている [16].

定義 5. 有限集合 E とその部分集合族 \mathcal{I} が以下の性質を満たすとき, (E, \mathcal{I}) はマトロイドであるという [17].

- $\emptyset \in \mathcal{I}$
- $I \subseteq J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \in \mathcal{I}$
- $I, J \in \mathcal{I}, |I| < |J| \Rightarrow \exists j \in J \setminus I : I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$

マトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ において E を M の台集合 (ground set) といい, \mathcal{I} を E の独立集合族という. また, マトロイドの例として後述するマトロイド制約付き経路選択ゲームに利用される, 一様マトロイドについて述べる.

定義 6. 一様マトロイド $U_{n,r}$ は, $|E| = n$ となる有限集合 E において, 要素数 r 以下となるすべての独立集合族からなるマトロイドである.

マトロイド制約付き経路選択ゲームでは, 一様マトロイドを用いて経路本数の上限を考えるモデルを扱っている.

2.7 凸計画問題

ポテンシャル関数最小化問題について考えるために、凸計画問題について述べる。ある関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ を目的関数として、 f を最小化する解 $\mathbf{x} \in S$ を求める最適化問題

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in S \end{aligned} \tag{5}$$

を考える。制約は以下の通り与えられるものとする。

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in X \left| \begin{array}{l} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, l) \\ g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = l + 1, \dots, m) \end{array} \right. \right\}.$$

式(5)で与えられる最適化問題において、目的関数が凸関数であり、 g_i について不等式制約を持つものは凸関数、等式制約を持つものは一次関数となるようなものを凸計画問題という [18]。また、このとき S は凸集合となる。一般の最適化問題においては局所最適解が必ずしも大域的最適解にはならないが、凸計画問題は局所最適解が大域的最適解となる性質を持つ。

3 関連研究

本章では，資源制約付き経路選択ゲームの関連研究としてマトロイド制約付き混雑ゲームについて述べる．

3.1 マトロイド制約付き混雑ゲーム

マトロイド制約付き混雑ゲームとは，一般の混雑ゲームにおいてプレイヤーが選択可能な資源の組合せの集合がマトロイド構造を持つモデルをいう [16]．選択可能な資源をネットワーク上の経路としたものが経路選択ゲームである．

利用可能な資源の数が任意の値 $k \in \mathbb{N}$ 以下となるような一様マトロイド制約付き混雑ゲームを考える．各プレイヤー $i \in N$ の戦略集合と，戦略集合から求められる戦略空間を以下のように定義する．

$$S_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|P|} \mid \sum_{p \in P_{use}^i} x_p = X_i, P_{use}^i \subseteq P, |P_{use}^i| \leq k, \forall q \in P \setminus P_{use}^i, x_q = 0 \right\},$$

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n.$$

混雑ゲームはポテンシャルゲームの一種である [19] ため，ポテンシャル関数を用いて均衡解を求めることができ [8]，マトロイド制約付き経路選択ゲームでも同様のことが言える [12]．ポテンシャル関数を以下のように表す．

$$\Phi(\mathbf{s}) = \sum_{a \in E} \int_0^{f_a(\mathbf{s})} c_a(\mathbf{s}) dy.$$

ポテンシャル関数を用いて，マトロイド制約付き経路選択ゲームの均衡解を求める最小化問題を以下のように表す．ここで表される式は式 (2) と同じものである．

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s} \in S} \quad & \Phi(\mathbf{s}) \\ \text{s.t.} \quad & x_p^i \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i. \end{aligned}$$

マトロイド制約付き経路選択ゲームについての性質を示す研究も行われている．Fujishige ら [12] は，任意の辺が一回だけ経路として利用される制約を持ったマトロイドによって，任意のインスタンスにおいて，ブライスのパラドックスの発生を抑えることが可能であると示した．

4 資源制約付き経路選択ゲーム

本研究では、経路本数を一定以下にした場合に得られる均衡解について考える。マトロイド制約付き混雑ゲームを基に、経路選択ゲームにおいて、利用する経路本数に制限をつけたモデルを考える。ゲームのモデル自体は経路選択ゲームと同様のものを利用する。均衡解の求解に用いる最適化問題に制約を追加することで資源制約を表現する。

4.1 定式化

以下では各 OD ペア間において経路の本数が定数 $k \in \mathbb{N}$ 以下となる定式化について述べる。モデルについては 2.2 と同様のものを利用し、定式化は 2.3 を基にして行う。2.3 と同様に、ポテンシャル関数を以下のように定義する。

$$\Phi(\mathbf{s}) = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a(\mathbf{s})} c_a(\mathbf{s}) dy.$$

ポテンシャル関数を用いて、経路本数が k 本以下となるような均衡解を求める最小化問題を以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \quad & \Phi(\mathbf{s}) + \sum_{p \in P} y_p \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{p \in P_i} x_p = X \quad \forall i \in N \\ & \sum_{p \in P_i} y_p \leq k \quad \forall i \in N \\ & x_p \leq y_p \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i \\ & x_p^i \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i \\ & y_p \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i. \end{aligned} \tag{6}$$

4.2 性質

各辺 $a \in A$ のコスト関数 c_a が非負かつ非減少であると仮定した場合のポテンシャル関数は凸関数であるという性質がある。以下の補題を用いた証明によって示される。

補題 1. $c_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ が非負かつ非減少な関数であるとする. このとき,

$$C_a(x) = \int_t^x c_a(y) dy$$

は凸関数となる.

証明. 2点 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ を, $x_1 < x_2$ として考える. このとき,

$$C_a(x_2) - C_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \int_{\frac{x_1 + x_2}{2}}^{x_2} c_a(y) dy$$

$$C_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - C_a(x_1) = \int_{x_1}^{\frac{x_1 + x_2}{2}} c_a(y) dy$$

がいえる. さらに, $c_a(x)$ は非減少であるから,

$$\int_{\frac{x_1 + x_2}{2}}^{x_2} c_a(y) dy \geq \int_{x_1}^{\frac{x_1 + x_2}{2}} c_a(y) dy$$

が成立する. 以上から,

$$C_a(x_2) - C_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq C_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - C_a(x_1)$$

とおくことができ, さらにこれを変形すると

$$\frac{C_a(x_1) + C_a(x_2)}{2} \geq C_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

となる. 以上のことから, $C_a(x)$ は凸関数であることが示された. さらに, $x_1 = 0, x_2 = x$ とおくことで補題が示された. \square

命題 1. 経路選択ゲームにおけるポテンシャル関数は凸関数である.

証明. 各辺 $a \in A$ についてコスト関数が非負, 非減少であると仮定し, $c_a(x)$ とおく. このときポテンシャル関数は

$$\Phi(\mathbf{s}) = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a(\mathbf{s})} c_a(\mathbf{s}) dy \quad (7)$$

となる. 補題 1 から, ポテンシャル関数における各辺コストの 0 から辺流量 $f_a(\mathbf{s})$ までの積分が凸関数となることがわかる. 凸関数の和もまた凸関数であるため, 凸関数である式 (7) のすべての辺についての和であるポテンシャル関数も凸関数となる. \square

以上の議論から資源制約付き経路選択ゲームについて，ポテンシャル関数が凸関数であり，制約式は全て線形制約であることから，資源制約付き経路選択ゲームは凸計画問題であると言える．

次に，資源制約付き経路選択ゲームから得られる最適解について考える．資源制約が与えられる場合，利用可能な経路本数が限られるために，均衡解で利用していた経路を一部利用できない解しか実行可能解として存在しないケースがありうる．その場合には，ブライスのパラドックスのような特殊ケースを除いて，制限がない場合と比べて平均コストが大きくなると考えられる．以下では例を用いて上記の状況について述べる．

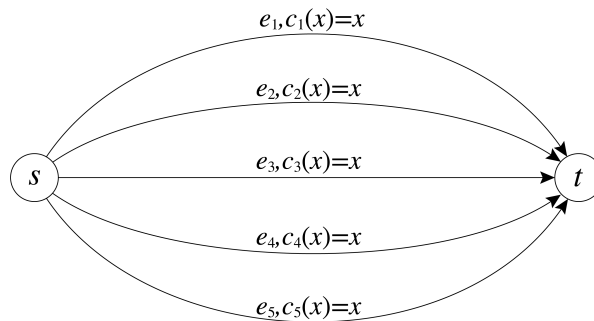
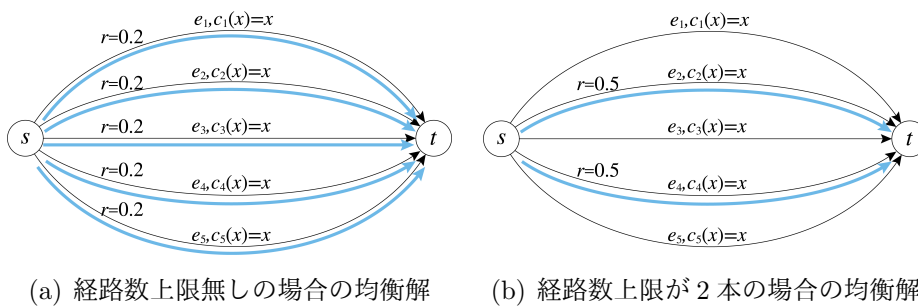


図 3: 例として利用するネットワーク

図 3 の例を用いて，経路本数の上限が存在しないケースである一般の場合の均衡解と，経路本数の上限が 2 本の場合で流量 1 として均衡解を求めた．それぞれのケースにおける均衡解を図 4，表 2 に示す．



(a) 経路数上限無しの場合の均衡解 (b) 経路数上限が 2 本の場合の均衡解

図 4: 例における均衡解

表 2: 各均衡解の比較

	経路コスト	総コスト	ポテンシャル関数値
図 4(a) 上限なし	0.2	1.5	0.1
図 4(b) 上限 2 本	0.5	2	0.25

図 3 の例では、全ての経路でコスト関数が同一であり、経路間で辺の重複もないためにすべての経路に均等に流量を振り分けるのが均衡解となる。したがって、経路本数に上限がない場合では図 4(a) のように全ての経路に対して流量 0.2 を流すのが均衡解となる。一方経路本数に 2 本の上限がある場合では、いずれかの経路を 2 本選び、それぞれに対して均等に流量を振り分け、流量 0.5 をそれぞれの経路に対して流すのが均衡解となる。それぞれの結果について、経路コスト、ポテンシャル関数値共に経路本数に上限がある場合のほうが大きくなっていることがわかる。この例で示されるように、ブライスのパラドックスのような特殊ケースを除いて資源制約を与えた場合には均衡解におけるコストに変化が生じ、コスト、ポテンシャル関数値共に大きくなることがわかる。

5 数値実験

本研究では、同一インスタンスにおいて資源制約付き経路選択ゲームと一般の経路選択ゲームのポテンシャル関数最小化問題の最適値がどれだけ乖離しているかを確認し、考察を行う。また、経路集合をもとに均衡解の計算を行うアルゴリズムにおいて、利用する経路のみの集合を与えた場合と一般の場合で計算時間の比較を行う。さらに、実際のネットワークに準ずるインスタンスにおいてどのような均衡解を形成するのかを考察するため、東京都心部における交通網を模したネットワークを用いたインスタンスでの実験を行う。

各インスタンスにおいて、グラフ G の各辺 $a \in A$ のコスト関数は

$$\begin{aligned} c_a(\mathbf{s}) &= c_a^{cs} + c_a^{cgt}(\mathbf{s}), a \in A, \\ c_a^{cs} &= b, 0.5 \leq b \leq 1.0, \\ c_a^{cgt} &= c \times f_a(\mathbf{s}), 0.5 \leq c \leq 1.0 \end{aligned}$$

と設定し、各辺の a, b は一様分布に従ってランダムに設定する。

実験環境は表 3 の通りである．求解には数理計画ソルバー gurobi8.1.1 を用いた．

表 3: 実験環境

CPU	Memory	OS
3.2 GHz Intel Core i5	16 GB 1867 MHz DDR3	macOS 10.14.6

平均コストの導出のためには辺流量の導出が必要である．そこで，本実験では経路流量から辺流量を導出するため，式 (6) に対して等式制約

$$x_a = \sum_{i \in N} \sum_{p \in P_i: a \in p} x_p^i \quad \forall a \in A$$

を追加した以下のモデルを gurobi に対する入力として解を求める．

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \quad & \Phi(\mathbf{s}) + \sum_{p \in P} y_p \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{p \in P_i} x_p = X \quad \forall i \in N \\
& \sum_{p \in P_i} y_p \leq k \quad \forall i \in N \\
& x_p \leq y_p \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i \\
x_a = \quad & \sum_{i \in N} \sum_{p \in P_i: a \in p} x_p^i \quad \forall a \in A \\
& x_p^i \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i \\
& y_p \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i.
\end{aligned}$$

5.1 均衡解比較

まず，資源制約付き経路選択ゲームにおいて得られる解と一般の経路選択ゲームにおいて得られる解の比較を行う．本実験では表 4 に基づき，各種 10 インスタンスずつ生成し，それぞれ一般の経路選択ゲームの解との比較を行う．

表 4: 均衡解比較実験で利用するインスタンスの種類

グラフクラス	サイズ	辺密度	OD ペア数	経路本数上限
格子グラフ	5 × 5	-	2	上限なし
格子グラフ	5 × 5	-	2	5
格子グラフ	5 × 5	-	2	3
ランダムグラフ	20	0.1	2	上限なし
ランダムグラフ	20	0.1	2	5
ランダムグラフ	20	0.1	2	3
ランダムグラフ	20	0.1	4	上限なし
ランダムグラフ	20	0.1	4	5
ランダムグラフ	20	0.1	4	3

本実験で比較する項目はポテンシャル関数および各インスタンス内での OD ペアでの経路コストである。まず，格子グラフについての実験結果を表 5 に示す。経路上限 3 本の 1 番目のインスタンスの値を斜体としているのは，得られた解が暫定解であったためである。その理由についての考察も行う。

表 5: 格子グラフのポテンシャル関数値

上限なし	5 本	3 本
13.6638	13.6638	<i>13.8425</i>
13.1569	13.1569	13.3561
13.6431	13.6431	13.8514
13.6162	13.6162	13.8446
13.2422	13.2544	13.4381
13.8888	13.9101	14.0803
13.9176	13.9176	14.1001
13.4976	13.4976	13.6501
13.4803	13.4803	13.6560
13.4804	13.4981	13.5855

本実験ではインスタンスの生成を一様分布に基づく乱数から行っているため，各インスタンスの種類ごとに有意差が認められるかをノンパラメトリック検定の一種であるウィルコクソンの順位和検定によって確認する [20]。結果を表 10 に示す。

表 6: 格子グラフでのポテンシャル関数値比較

パターン	P 値
上限なしと上限 5 本	0.7541
上限なしと上限 3 本	0.2224
上限 5 本と上限 3 本	0.2224

表 10, 表 5 で得られる結果から, どちらのパターンでも上限なしの場合に比べてポテンシャル関数値は同じか大きくなることはわかるものの, 有意水準 5% での有意差は認められないということが言える.

次に, ランダムグラフでのインスタンスについて述べる.

表 7: OD ペア 2 組のランダムグラフのポテンシャル関数値

上限なし	5 本	3 本
6.6396	6.6396	6.6396
4.5948	4.5948	4.5948
7.2675	7.2675	7.2675
5.4014	5.4014	5.4046
5.1971	5.1971	5.1979
7.9920	7.9920	7.9920
4.8614	4.8614	4.8614
7.1842	7.1842	7.1842
6.6843	6.6843	6.6843
9.0199	9.0199	9.0199

表 8: OD ペア 2 組のランダムグラフでのポテンシャル関数値比較

パターン	P 値
上限なしと上限 5 本	1
上限なしと上限 3 本	0.9497
上限 5 本と上限 3 本	0.9497

表 9: OD ペア 4 組のランダムグラフのポテンシャル関数値

上限なし	5 本	3 本
9.5778	9.5778	9.5912
14.9622	14.9622	14.9622
12.8647	12.8647	12.8647
18.0149	18.0149	18.0199
12.3523	12.3523	12.3523
25.3254	25.3254	25.3254
10.0221	10.0221	10.0221
15.6125	15.6125	15.6125
9.8532	9.8532	9.8532
17.1682	17.1682	17.1682

表 10: OD ペア 4 組のランダムグラフでのポテンシャル関数値比較

パターン	P 値
上限なしと上限 5 本	1
上限なしと上限 3 本	0.9513
上限 5 本と上限 3 本	0.9513

ランダムグラフにおける実験では、OD ペアが 2 組の場合、4 組の場合ともに格子グラフと比べて目的関数値の差は小さくなったといえる。そのため、これらのインスタンスについても有意差を認めることはできなかった。

また、表 11, 12, 13 に各インスタンスにおける OD ペア間の経路コストおよび上限なしの場合と、各上限での値の差を示す。格子グラフにおいて上限を 3 本とした場合ではすべてのインスタンスで上限なしの場合との差が生じていることがわかり、経路本数の制限によりコストが上昇したことがいえる。一方でランダムグラフを用いたインスタンスでは、一部のインスタンスでしか差が生じなかった。さらに、格子グラフ、ランダムグラフ共に一部のインスタンスにおいて差が負になっていることがわかる。これは、他の OD ペアが利用する経路が減少したことによって、上限なしのフローにおいて利用していた経路において生じるコストが減少したものと考えられる。一方で同インスタンスについて、ポテンシャル関数値を比較した場合には上限ありの場合の方が値が大きくなってい

ることから，大域的最適解である上限なしの解に比べ，目的関数値で比べた場合に悪い解になっていることがわかる．このような事象は複数 OD ペアで均衡解を形成する場合に発生すると考えることができ，OD ペアの経路に含まれる辺の一部が他の OD ペアの経路と重複しているために発生するものと考えられる．

表 11: 格子グラフにおける OD ペア間経路コスト

No.	OD	上限なし	上限5本	上限3本	5本との差	3本との差
1	1	7.8606	7.8606	8.0545	0.0000	0.1939
	2	8.1220	8.1220	8.3962	0.0000	0.2742
2	1	7.7833	7.7833	7.9960	0.0000	0.2128
	2	7.6437	7.6437	7.8288	0.0000	0.1852
3	1	8.0626	8.0626	8.2958	0.0000	0.2332
	2	7.9015	7.9015	8.1268	0.0000	0.2253
4	1	7.8913	7.8913	8.2475	0.0000	0.3562
	2	8.0881	8.0881	8.1935	0.0000	0.1054
5	1	7.9184	7.9181	8.0642	-0.0004	0.1458
	2	7.7350	7.7323	7.9857	-0.0027	0.2506
6	1	8.3050	8.3636	8.5285	0.0586	0.2234
	2	7.9301	7.9648	8.1882	0.0347	0.2580
7	1	8.0094	8.0094	8.3142	0.0000	0.3047
	2	8.1219	8.1219	8.2872	0.0000	0.1653
8	1	7.9103	7.9103	8.0286	0.0000	0.1184
	2	8.0392	8.0392	8.2859	0.0000	0.2467
9	1	7.6265	7.6265	7.8508	0.0000	0.2243
	2	8.1353	8.1353	8.3431	0.0000	0.2078
10	1	7.7367	7.7515	7.8897	0.0148	0.1530
	2	7.8909	7.9041	7.9803	0.0132	0.0894

表 12: OD ペア 2 組のランダムグラフにおける OD ペア間経路コスト

No.	OD	上限なし	上限 5 本	上限 3 本	5 本との差	3 本との差
1	1	5.6511	5.6511	5.6511	0.0000	0.0000
	2	3.3505	3.3505	3.3505	0.0000	0.0000
2	1	1.9635	1.9635	1.9635	0.0000	0.0000
	2	3.9112	3.9112	3.9112	0.0000	0.0000
3	1	3.0759	3.0759	3.0759	0.0000	0.0000
	2	6.4277	6.4277	6.4277	0.0000	0.0000
4	1	5.1772	5.1772	5.2147	0.0000	0.0375
	2	1.5156	1.5156	1.5156	0.0000	0.0000
5	1	4.8340	4.8340	4.8552	0.0000	0.0212
	2	1.6604	1.6604	1.6604	0.0000	0.0000
6	1	2.7630	2.7630	2.7630	0.0000	0.0000
	2	7.7824	7.7824	7.7824	0.0000	0.0000
7	1	4.0173	4.0173	4.0173	0.0000	0.0000
	2	2.3264	2.3264	2.3264	0.0000	0.0000
8	1	6.5204	6.5204	6.5204	0.0000	0.0000
	2	2.7704	2.7704	2.7704	0.0000	0.0000
9	1	5.8790	5.8790	5.8790	0.0000	0.0000
	2	2.8140	2.8140	2.8140	0.0000	0.0000
10	1	7.8337	7.8337	7.8337	0.0000	0.0000
	2	3.4816	3.4816	3.4816	0.0000	0.0000

表 13: OD ペア 4 組のランダムグラフにおける OD ペア間経路コスト

No.	OD	上限なし	上限 5 本	上限 3 本	5 本との差	3 本との差
1	1	1.0976	1.0976	1.0976	0.0000	0.0000
	2	5.1404	5.1404	5.1404	0.0000	0.0000
	3	4.0904	4.0904	4.1452	0.0000	0.0548
	4	1.7180	1.7180	1.7180	0.0000	0.0000
2	1	10.6453	10.6453	10.6453	0.0000	0.0000
	2	1.7581	1.7581	1.7581	0.0000	0.0000
	3	3.0402	3.0402	3.0402	0.0000	0.0000
	4	4.6422	4.6422	4.6422	0.0000	0.0000
3	1	4.2545	4.2545	4.2545	0.0000	0.0000
	2	1.2870	1.2870	1.2870	0.0000	0.0000
	3	8.7575	8.7575	8.7575	0.0000	0.0000
	4	2.6484	2.6484	2.6484	0.0000	0.0000
4	1	8.5072	8.5072	8.5191	0.0000	0.0119
	2	3.6017	3.6017	3.6603	0.0000	0.0585
	3	5.8500	5.8500	5.8041	0.0000	-0.0459
	4	5.7419	5.7419	5.7142	0.0000	-0.0277
5	1	5.9593	5.9593	5.9593	0.0000	0.0000
	2	3.0330	3.0330	3.0330	0.0000	0.0000
	3	3.1328	3.1328	3.1328	0.0000	0.0000
	4	4.4400	4.4400	4.4400	0.0000	0.0000
6	1	4.5509	4.5509	4.5509	0.0000	0.0000
	2	5.0239	5.0239	5.0239	0.0000	0.0000
	3	12.3043	12.3043	12.3043	0.0000	0.0000
	4	14.4678	14.4678	14.4678	0.0000	0.0000
7	1	3.9030	3.9030	3.9030	0.0000	0.0000
	2	2.9283	2.9283	2.9283	0.0000	0.0000
	3	3.5357	3.5357	3.5357	0.0000	0.0000
	4	2.7008	2.7008	2.7008	0.0000	0.0000
8	1	5.5492	5.5492	5.5492	0.0000	0.0000
	2	2.7227	2.7227	2.7227	0.0000	0.0000
	3	7.6044	7.6044	7.6044	0.0000	0.0000
	4	4.6434	4.6434	4.6434	0.0000	0.0000
9	1	3.9982	3.9982	3.9982	0.0000	0.0000
	2	1.5101	1.5101	1.5101	0.0000	0.0000
	3	4.3665	4.3665	4.3665	0.0000	0.0000
	4	2.7353	2.7353	2.7353	0.0000	0.0000
10	1	4.8073	4.8073	4.8073	0.0000	0.0000
	2	3.3388	3.3388	3.3388	0.0000	0.0000
	3	5.1006	5.1006	5.1006	0.0000	0.0000
	4	9.6448	9.6448	9.6448	0.0000	0.0000

格子グラフのインスタンス1において暫定解しか求まらなかった結果について考察する。インスタンス1に関する結果を表15, 14に再掲する。他のインスタンスに比べてポテンシャル関数値, 経路コストともに他のインスタンスと同様の差に留まっていると言える。最適解を探索するのが困難としている原因として, この問題が組合せの探索を内包している点が考えられる。

表 14: 格子グラフのインスタンス1におけるポテンシャル関数値

上限なし	5本	3本
13.6638	13.6638	13.8425

表 15: 格子グラフのインスタンス1における OD ペア間経路コスト

No.	OD	上限なし	上限5本	上限3本	5本との差	3本との差
1	1	7.8606	7.8606	8.0545	0.0000	0.1939
	2	8.1220	8.1220	8.3962	0.0000	0.2742

5.2 計算時間比較

次に, 均衡解を求める際の計算時間の比較を行う。求解には経路選択ゲームにおける均衡解探索アルゴリズムの一つであるレプリケータダイナミクスを用いる。実験に利用するインスタンスを表16に示す。各グラフクラスについて10インスタンス作成し, それぞれについて上限なしの場合と, 上限を設けた場合について実験を行った。

表 16: 計算時間比較実験で利用するインスタンスの種類

グラフクラス	サイズ	辺密度	OD ペア数	経路本数上限
格子グラフ	4 × 4	-	2	上限なし
格子グラフ	4 × 4	-	2	5
格子グラフ	4 × 4	-	2	3
ランダムグラフ	20	0.1	2	上限なし
ランダムグラフ	20	0.1	2	5
ランダムグラフ	20	0.1	2	3
ランダムグラフ	20	0.1	4	上限なし
ランダムグラフ	20	0.1	4	5
ランダムグラフ	20	0.1	4	3

本実験では、レプリケーターダイナミクスに際して経路本数に上限を設けない場合について事前の枝刈り [6] を行うことで高速化を行う。上限を設ける場合については、上限なしの場合で得られた解で利用された経路から流量が多い順に上限まで選択し、新たに利用する経路とする。上限なしの場合で利用した経路の本数が上限の値を下回っていた場合には、利用した経路をそのまま計算に利用する。

本実験で比較する項目は各インスタンスにおける求解にかかった計算時間である。それぞれのインスタンスについての計算時間を表 17,18,19 に、平均時間を表 20 に示す。

表 17: 格子グラフにおける各上限値での計算時間 [sec.]

	上限なし	上限 5 本	上限 3 本
1	51.4654	0.3094	0.8532
2	246.9515	0.3486	0.1678
3	144.5244	7.6221	0.9645
4	158.0815	4.2298	1.5799
5	347.6425	1.2647	0.2513
6	545.2877	0.5095	0.3095
7	183.9172	0.7227	1.2187
8	126.9466	0.8002	0.3983
9	181.5818	11.0754	0.4112
10	145.5730	3.8306	0.2050

表 18: OD ペア 2 組のランダムグラフにおける各上限値での計算時間 [sec.]

	上限なし	上限 5 本	上限 3 本
1	1.5993	0.1458	0.1460
2	2.0583	0.1752	0.1890
3	2.0724	0.0966	0.1094
4	0.4899	0.4693	0.4548
5	0.3399	0.2984	0.2807
6	0.5652	0.3849	0.3770
7	1.2532	0.1752	0.1710
8	18.4642	0.2182	0.2148
9	0.1105	0.0151	0.0242
10	2.2438	0.3551	0.3433

表 19: OD ペア 4 組のランダムグラフにおける各上限値での計算時間 [sec.]

	上限なし	上限 5 本	上限 3 本
1	1.9036	0.2206	0.2010
2	311.7823	16.4764	15.0408
3	2.3077	0.3956	0.4102
4	23.1325	0.1722	0.1850
5	2.7364	0.5397	11.6399
6	19.8533	0.4273	9.3684
7	28.9290	5.5759	4.9389
8	3.0406	0.1323	0.1362
9	0.2978	0.0209	0.0359
10	4.9860	2.9031	2.9072

表 20: 各グラフクラスでの平均比較 [sec.]

	上限なし	上限 5 本	上限 3 本
格子グラフ	213.1972	3.0713	0.6359
ランダムグラフ/OD ペア 2 組	2.9197	0.2334	0.2310
ランダムグラフ/OD ペア 4 組	39.8969	2.6864	4.4863

得られた結果について考察する。平均値で比べた場合、格子グラフについては上限値を小さくするほど計算時間が短くなっていることがわかる。一方でランダムグラフの場合では上限の値が変化しても計算時間に変化が見られない、あるいは上限の値が小さくなった場合に計算時間が増加するといった変化が見られた。平均値での結果を踏まえて各インスタンスでの計算時間について考える。格子グラフでの結果は多くのインスタンスで上限が抑えられるほど計算時間が短くなっているが、一部のインスタンスでは上限3本の場合で上限5本の計算時間を上回っていることがわかる。また、ランダムグラフにおける結果では、ほぼ全てのケースで上限値の変化に対して計算時間が変化していないことがわかる。また、一部のインスタンスでは上限値が小さくなった場合に大幅に計算時間が長くなっている事がわかる。特に顕著なのがランダムグラフの5番目のインスタンスにおける、ODペア4組での実験である。このケースでは、上限が3本の場合の計算時間が上限なしの場合における計算時間を上回る結果となっていることがわかる。このケースにおける利用経路に関する実験結果を表21に示す。

表 21: 5 番目のランダムグラフにおける OD ペア 4 組での実験結果

	経路上限	探索経路数	利用経路数
OD1	上限なし	2	1
	5本	1	1
	3本	1	1
OD2	上限なし	3	1
	5本	1	1
	3本	1	1
OD3	上限なし	6	4
	5本	4	4
	3本	3	3
OD4	上限なし	6	2
	5本	2	2
	3本	2	1

表21の結果から、どのODペアにおいても探索経路数、利用経路数共に少なくなっていることがわかる。各ODにおける結果から、計算時間が上限数の抑制に伴って長くなる原因はOD3にあると考えることができ

る。OD3での利用経路数は、上限なしと上限5本の場合で4本であるのに対し、上限3本では上限の3本に抑えられる。他のODペアについて考えると、上限なしの場合の利用経路数が3本を下回っている上に、OD1とOD2では1本であるため、計算の必要がないことがわかる。さらに、OD4については上限3本の場合に探索経路数は2本でありながらも、利用経路数は1本になっている。これは、OD3での探索経路数が減った結果として起こったことであると考えられる。これらの結果から、上限なしのケースのように余剰経路が存在する方が、上限値を元の均衡解で利用される本数以下まで制限した場合よりも高速に求解できることがあると言える。表19から、5番目のインスタンスのケースと同様に上限がある場合のほうが計算時間がかかっている6番目のインスタンスのケースについての利用経路に関する実験結果を表22に示す。

表 22: 6番目のランダムグラフにおけるODペア4組での実験結果

	経路上限	探索経路数	利用経路数
OD1	上限なし	11	2
	5本	2	1
	3本	2	2
OD2	上限なし	6	1
	5本	1	1
	3本	1	1
OD3	上限なし	3	1
	5本	1	1
	3本	1	1
OD4	上限なし	37	6
	5本	5	2
	3本	3	2

表22から、5番目のインスタンスのケースと同様のことが本ケースではOD4において同様に生じているといえる。この場合はさらに、OD1において上限5本の場合と3本の場合で利用経路数が異なっていることから、OD4で上限5本の場合と3本の場合に利用されている2本の経路は違う組合せであることが考えられる。つまり、OD4において上限5本の場合で探索経路に選ばれていた経路のうち、上限3本では探索経路に選ばれなかったものが上限5本の場合で利用経路に入っているものと考え

られる。この場合にもやはり，探索経路数が少ないために計算時間が長くなっているものと言える。

以上のことから，本実験における格子グラフのような経路本数が大きくなるようなケースにおいて経路本数に上限を設けることが計算時間の面で有効であることがわかった。また一方で，本実験におけるランダムグラフのような経路本数が小さく，上限なしの場合の均衡解において利用経路数が少なくなるようなインスタンスについては上限値の与え方によっては必ずしも計算時間の面で有効でないことも考えられる結果となった。

5.3 実際の交通網を参考にしたインスタンス

最後に，東京都心の交通網を参考としたネットワークを利用したインスタンスにおける実験を行った。参考にした範囲は，調布から国際展示場と，調布から羽田空港の2つの地点間であり，表現するネットワークは経路検索サービスから得られる経路を含むものである。本実験で利用するインスタンスにおけるコスト関数は，BPR 関数 [11] を基として，数理計画ソルバー gurobi で扱える形とするため以下の線形コストを利用した。

$$c_a(\mathbf{s}) = t_a \left(\alpha + \frac{f_a(\mathbf{s})}{l_a} \right)$$

ここで t_a は辺が結ぶ頂点間の距離， l_a は辺が表す交通手段の定員， α は交通手段ごとの距離あたりのコストを表している。今回設定した各パラメータの値を表 23 に示す。

表 23: 交通網を基とするインスタンスの各パラメータ値

	α	l_a
鉄道	0.2	0.4
モノレール	0.2	0.1
バス	0.5	0.03

本実験で用いたネットワークを図 24 に示す。

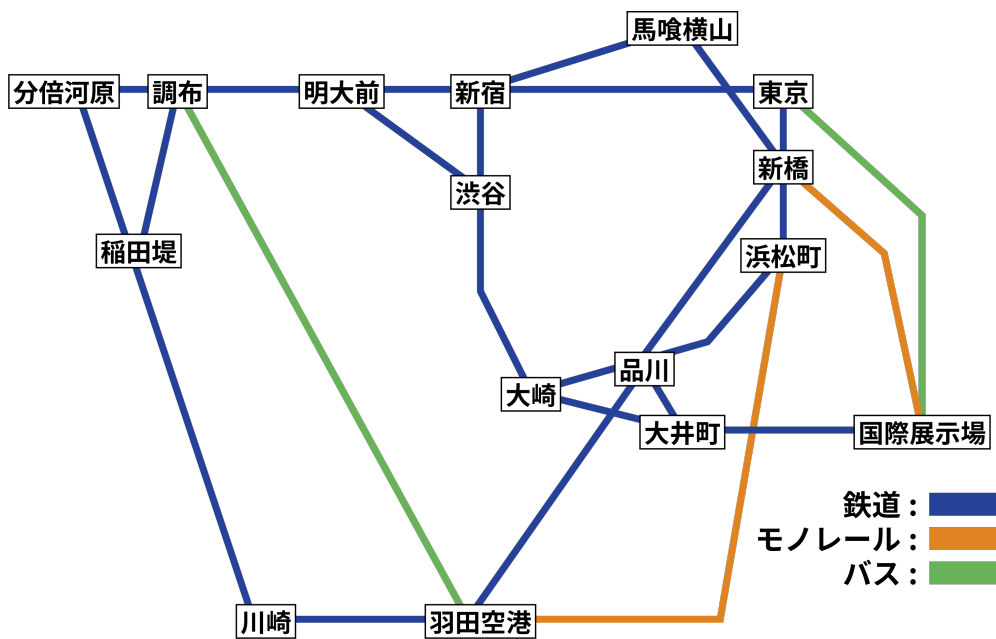


図 5: 交通網を基にしたネットワーク

実験結果として得られた解のそれぞれの値を表 24 に示す。

表 24: 実験結果

	国際展示場	羽田空港
総経路数	699	251
利用経路数	4	5
経路コスト	89.6776	87.0668

表 24 に示した各目的地への利用経路の内訳を以下に示す。
国際展示場

1. 調布, 明大前, 渋谷, 大崎, 国際展示場
2. 調布, 新宿, 東京, 新橋, 国際展示場
3. 調布, 新宿, 東京, 大崎, 国際展示場
4. 調布, 新宿, 東京, 国際展示場

羽田空港

1. 調布, 稲田堤, 川崎, 羽田空港
2. 調布, 新宿, 馬喰横山, 品川, 羽田空港
3. 調布, 分倍河原, 川崎, 羽田空港
4. 調布, 羽田空港
5. 調布, 新宿, 東京, 浜松町, 羽田空港

上に示した各経路ごとの流量を表 25 に示す.

	国際展示場	羽田空港
1	0.8086	0.3687
2	0.0963	0.2999
3	0.0597	0.2482
4	0.0354	0.0444
5	–	0.0388

得られた結果について考察する. 本実験では, 現実の交通網の一部のみを抽出してインスタンスとし, そこから得られる均衡解を導出した. これは, 考えられうる全ての経路を考慮するのではなく, 一部のネットワークから得られる経路のみを考慮して解を求めるのに等しい. つまり, 本実験は経路探索サービス等に近い環境で解を求めるものであるといえる. その結果として得られた解においては, 本実験のインスタンスで考えられうる全経路数と比較して少数の経路で均衡解を形成していることがわかる. ここで示される経路の本数は実際に利用されている経路探索サービスが推薦する候補数と比べても同等か, あるいは少数であると考えられる. 今回の実験結果ではコスト関数としてBPR関数を簡略化したものを使っており, さらに他ODペアのフローを考慮していないものの, 距離から得られるコストは実際の値を利用しており, 環境としては現実に近いものであると言える. したがってこの結果からは, 実際のネットワークにおいても経路数を削減して均衡解を形成することによって発生する全経路を考慮した場合の均衡解との差は大きいものにはならないということが考えられる.

6 終わりに

本研究では，経路本数に一樣マトロイド制約を与えたマトロイド制約付き経路選択ゲームを基に，資源制約付き経路選択ゲームを凸計画問題として定式化した．また，定式化した問題について数理計画ソルバーを用いた実験を行い，得られた解から本実験に用いたサイズのインスタンスにおいては有意な差が認められないことを示した．レプリケータダイナミクスを用いた求解時間を比較する実験では，本実験に用いたサイズのインスタンスのうち，OD ペア間での経路本数が多いものに関して経路本数を絞ったほうが高速に求解が可能であることを示した．一方で，選ぶ経路本数が少ないものに関しては経路の上限値の決め方によっては必ずしも計算時間が短くなるわけではないという結果も得られた．実際の交通網を参考にしたインスタンスでの実験では，限られたネットワークの中でも少数の経路のみを利用して均衡解を形成することから，適切な制限を与えることによってコストの増加を抑えつつも高速に均衡解を求めることが可能であるという考察を得た．

今後の課題としては，計算時に利用する経路の集合を効率的に求める手法の構築および，適切に上限値を求める手法の構築が考えられる．また，さらに大きいサイズのインスタンスにおける実験も必要であると考えられる．

7 謝辞

この研究を遂行するにあたり，日々多くのご指導を賜りました高橋里司准教授に深く感謝の意を表します．また，研究活動にあたって最適化ゼミ等を通して多くのご助言，ご意見を頂きました村松正和教授に感謝申し上げます．最後に，研究に関する多くの議論を通してご協力頂いた高橋研究室，村松研究室，保木研究室の学生の皆様に感謝致します．

参考文献

- [1] 国籍/月別 訪日外客数 (2003 年～2019 年) - 日本政府観光局 (JNTO)https://www.jnto.go.jp/jpn/statistics/since2003_visitor_arrivals.pdf .(2020/1/8 アクセス)
- [2] オーバーツーリズムとは・観光用語集 - JTB 総合研究所 <https://www.tourism.jp/tourism-database/glossary/over-tourism/> .(2019/12/23 アクセス)
- [3] 地図利用実態調査 2018 <https://www.zenrin.co.jp/product/article/map-18/index.html> .(2019/12/23 アクセス)
- [4] 円山 琢也:都市域における混雑課金の政策分析: レビューと展望. 土木計画学研究・論文集,**26**,pp.15–32,2009.
- [5] 東京五輪、A I で混雑緩和 政府計画 最適な帰途へ歩行者誘導 - SankeiBiz <https://www.sankeibiz.jp/macro/news/180314/mca1803140500007-n1.htm> .(2020/1/10 アクセス)
- [6] G. Kofujita and S. Takahashi, “Pruning Algorithms for A Replicator Dynamics Method in Multiple OD Selfish Routing Games”, *International Journal of Smart Computing and Artificial Intelligence*, **3**(2), pp.40–56, 2019.
- [7] K. Yoshida, T. Okamoto and S. Koakutsu, “An Efficiency Improvement of the Equilibrium Solution Search on the Selfish Routing Game by Removing Redundant Paths”, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, **9**, pp.234–241, 2016.
- [8] D. Monderer and L. S.Shapley, “Potential Games”, *GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR*, **14**, pp.124–143, 1996.
- [9] 宇井 貴志, “ポテンシャルゲームと離散凹性”, 第 17 回 RAMP シンポジウム論文集, pp.89–100, 2005.
- [10] T. Roughgarden, “Routing Games”, *Algorithmic Game Theory*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2007.

- [11] 土木学会, 『利用者均衡モデル』, 交通ネットワークの均衡分析–最新の理論と解法–, 土木学会, 1998.
- [12] S. Fujishige, M. X. Goemans, T. Harks, B. Peis and R. Zenklusen, “Matroids Are Immune to Braess’ Paradox”, *Mathematics of Operations Research*, **42**(3), pp.577–896, 2017.
- [13] D. Braess, A. Nagurney and T. Wakolbinger, “On a Paradox of Traffic Planning”, *TRANSPORTATION SCIENCE*, **39**(4), pp.446–450, 2005.
- [14] Y. Hyejin, G. Michael and J. Hawoong, “Price of Anarchy in Transportation Networks: Efficiency and Optimality Control”, *Physical Review Letters*, **101**(12), 128701, 2008.
- [15] S. Fischer and B. Vocking, “On the Evolution of Selfish Routing”, *Algorithms - ESA 2004*, pp.323–334, 2004.
- [16] H. Ackermann, H. Röglin and B. Vöking, “Pure Nash equilibria in player-specific and weighted congestion games”, *Theoretical Computer Science*, **410**, pp.1552–1563, 2009.
- [17] 久保 幹雄, 田村 明久, 松井 知己, “マトロイド理論”, 『応用数理計画ハンドブック』, 朝倉書店, 2002.
- [18] 田村 明久, 村松 正和, “最適化問題”, 『最適化法』, 共立出版, 2002.
- [19] 横尾 真, 岩崎 敦, 櫻井 祐子, 岡本吉央, “非協力ゲーム (基礎編)”, コンピュータ ソフトウェア, **29**(2), pp.69–84, 2012.
- [20] F. Wilcoxon, “Individual comparisons by ranking methods”, *Biometrics Bulletin*, **1**, pp.80–83, 1945.
- [21] 田口 東, “首都圏電車ネットワークに対する時間依存通勤交通配分モデル”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, **48**, pp.85–108, 2005.