

修 士 論 文 の 和 文 要 旨

| | | | |
|---------|-----------------------------------|------|---------|
| 研究科・専攻 | 大学院 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 博士前期課程 | | |
| 氏 名 | 伊藤 和司 | 学籍番号 | 1831014 |
| 論 文 題 目 | グラフ上のペグソリティアの計算複雑さ | | |

要 旨

オセロやチェスをはじめとしたゲーム・パズルは古くから遊ばれており、その計算複雑さや必勝性等についても盛んに研究が行われている。本論文ではゲーム・パズルの一種であるペグソリティアをグラフ上に一般化したグラフ上のペグソリティアの計算複雑さ及び可解性について研究を行う。

ペグソリティアとは格子状の盤上のペグを定められたルールで取り除いていき最終的に 1 個にすることを目的とする古くから遊ばれているパズルである。ペグソリティアの解法、可解性については様々な研究が行われており、またその計算量については与えられた盤面でのペグソリティアが解を持つか否かを判定する問題は NP 完全であることが知られている。ペグソリティアは格子状の盤面の上でペグを動かすが、このペグソリティアを一般のグラフ上に拡張したグラフ上のペグソリティアも考案され、研究が行われている。しかしグラフ上のペグソリティアの計算困難性は証明されていなかった。本研究ではこのグラフ上のペグソリティアにおいて、グラフと初期状態で空となる 1 個の頂点が与えられたときペグを一つにできるか否かという問題が NP 完全であることを証明した。入次数 1 出次数 2 の頂点もしくは入次数 2 出次数 1 の頂点のみで構成される平面有向グラフに対するハミルトン閉路問題からの帰着により、証明をおこなった。

また、グラフ上のペグソリティアでは標準的なペグソリティアを表すことができない。そこで標準的なペグソリティアを表せるような定義をしたグラフ上のペグソリティアも考案されており、これを一般化ペグソリティアと呼び通常のグラフ上のペグソリティアと区別する。本研究ではこの一般化ペグソリティアにおいて、パスとサイクルの直積でできたグラフの可解性についても研究をおこなった。その結果 $C_3 \square P_n$ ($n \geq 3$)、 $C_4 \square P_n$ ($n \geq 3$)、 $C_n \square P_3$ ($n \geq 3$)、 $C_5 \square P_4$ 、 $C_{2n} \square P_5$ ($n \geq 2$)、 $C_{2n} \square P_{2m}$ ($n, m \geq 2$) が解を持つことを証明した。

令和元年度 修士論文

グラフ上のペグソリティアの
計算複雑さ

電気通信大学大学院 情報理工学研究科

情報・ネットワーク工学専攻

情報数理工学コース

学籍番号 1831014

伊藤 和司

主任指導教員: 武永康彦准教授

指導教員: 垂井淳准教授

目次

| | | |
|-----|---------------------------------------|----|
| 1 | はじめに | 2 |
| 2 | グラフ上のペグソリティア | 3 |
| 3 | グラフ上のペグソリティアの計算困難性 | 5 |
| 3.1 | 可解性判定問題の NP 完全性 | 5 |
| 3.2 | 元のグラフがハミルトン閉路を持つときペグを一つにできることの証明 . . | 7 |
| 3.3 | ハミルトン閉路が存在しないときにペグを一つにできないことの証明 . . . | 11 |
| 4 | 一般化ペグソリティアとその可解性 | 27 |
| 4.1 | 一般化ペグソリティアの定義 | 27 |
| 4.2 | 一般化ペグソリティアの可解性 | 27 |
| 5 | おわりに | 37 |

1 はじめに

ペグソリティアとは盤上のペグを定められたルールで取り除いていき最終的に 1 個にすることを目的とする、古くから遊ばれているパズルである。ペグが直線状に並んでいてかつその隣にペグがないとき、ペグは他のペグを飛び越えることができる。飛び越えられたペグは盤から取り除く (図 1)。標準的なペグソリティアの盤面を図 2 に示す。黒丸の頂点はペグがある事を示している。このような格子状の盤面のペグソリティアについて様々な研究がされており ([1, 2, 3] など)、その計算量については与えられた盤面でのペグソリティアが解を持つかどうかの問題が NP 完全であることが知られている [3]。

これをもとにグラフ上のペグソリティアが考案され、研究が行われている ([4, 5, 6] など)。[4, 5] では様々な形のグラフや、それらのグラフの直積でできたグラフに対しペグソリティアが解を持つかどうかの研究が行われている。[6] ではペグを取り除く動きの逆である unjump を用いたリバーシブルペグソリティアでグラフが解を持つかどうかの研究が行われている。しかし、グラフ上のペグソリティアにおいて計算困難性は証明されていない。本研究ではこのグラフ上のペグソリティアにおいて、グラフと初期状態で空となる頂点が与えられたときペグを一つにできるか否かという問題が NP 完全であることを証明する。

グラフ上のペグソリティアの定義ではすべての辺に区別が無く、辺さえあれば飛び越しが可能であり、実際のペグソリティアでは不可能な動きであるペグの移動、例えば下のペグを飛び越えて、飛び越えた頂点の右にある空の頂点にペグを移動させる事などができてしまう。つまりこの定義では標準的なペグソリティアを表せない。[7] では標準的なペグソリティアを表せるようなグラフ上のペグソリティアを定義し、解の有無を研究している。本論文では [7] の定義でのグラフ上のペグソリティアを一般化ペグソリティアと呼び区別する。この一般化ペグソリティアにおいて、パスとサイクルの直積でできたグラフについての可解性を証明する。

2 章ではグラフ上のペグソリティアの定義と性質を示し、3 章ではグラフ上のペグソリティアの可解性判定問題が NP 完全であることを証明する。4 章では一般化ペグソリティアの定義と可解性を示す。

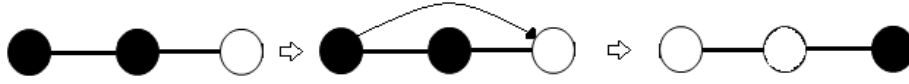


図1 ペグの飛び越し

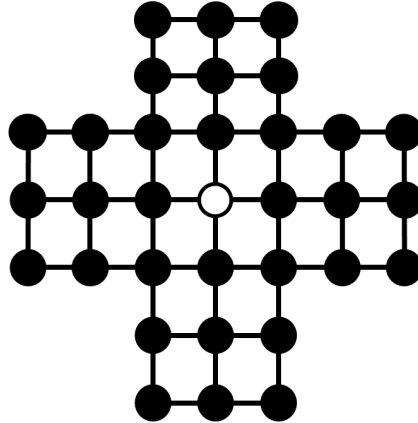


図2 標準的なペグソリティア

2 グラフ上のペグソリティア

本章ではグラフ上のペグソリティアの定義 [4] を示し、パスやサイクルにおける可解性についての結果のうち、本論文で用いるものをまとめる。

グラフ $G = (V, E)$ (V は頂点の集合、 E は辺の集合) において、頂点 x と y にペグが存在し頂点 z が空の頂点であり、 $xy \in E, yz \in E (x \neq z)$ を満たすときペグは x から y を飛び越えて z に移動することができる。このとき y のペグを取り除く。このときのペグの移動を $x \rightarrow y \rightarrow z$ と表す。 S を初期盤面における空の頂点の集合、 T を終了時にペグがある頂点の集合とする。ある $S = \{s\}$ からスタートしてペグを 1 個にできるグラフを solvable であるといい、ある $S = \{s\}$ からスタートして最終的に距離が 2 離れたペグ 2 個にできるグラフを distance 2-solvable であるという [4]。

頂点数が n 個のパスを P_n とあらわす。同様に頂点数 n 個のサイクルを C_n と表す。 P_n の頂点を端から順に $1, 2, \dots, n$ とする。 C_n の頂点は任意の頂点から順に $1, 2, \dots, n$ とする。まず以下の結果を示す。

定理 1 [4]

1. $P_{2n}(n \geq 2)$ は $S = \{2\}$ のとき $T = \{2n - 1\}$ にできるため solvable である。
2. $P_{2n-1}(n \geq 2)$ は solvable ではないが、 $S = \{2\}$ のとき $T = \{2n - 1, 2n + 1\}$ にできるため distance 2-solvable である。

定理 1 の初期盤面 $S = 2$ のときのパス上のペグソリティアの解法の手順を以下に示す。
 $i = 1, 2, \dots, n - 1$ に対し、次の 2 回の移動を 1 組とした動作を繰り返す。

手順 1 $2i + 2 \rightarrow 2i + 1 \rightarrow 2i, 2i - 1 \rightarrow 2i \rightarrow 2i + 1$

すると、パスの頂点数が偶数ならばペグが $2n - 1$ にのみ、奇数ならば $2n - 1$ と $2n + 1$ に残る。以降、この手順をパスの基本解法と呼ぶ。

定理 2 [4]

1. C_3 と $C_{2n}(n \geq 2)$ は freely solvable である。
2. $C_{2n+1}(n \geq 2)$ は solvable ではないが、distance 2-solvable である。

定理 2 で、 C_{2n} を頂点 2 が空の頂点の P_{2n} とみなすと、 P_{2n} に対する解法が適用できる。つまり頂点 2 を空の頂点としたとき、ペグは頂点 $2n - 1$ に残る。また C_{2n+1} も同様に頂点 2 が空の頂点の P_{2n+1} とみなすと、 P_{2n+1} に対する解法が適用できるのでペグは頂点 $2n - 1, 2n + 1$ に残る。

定理 3 [7]

1. $P_{2n}(n \geq 3)$ は $S = \{5\}$ のとき $T = \{2n - 1\}$ にできるため solvable である。
2. $P_{2n-1}(n \geq 3)$ は solvable ではないが、 $S = \{5\}$ のとき $T = \{2n - 1, 2n + 1\}$ にできるため distance 2-solvable である。

定理 3 の初期盤面 $S = 5$ のときのパス上のペグソリティアの解法を以下に示す。
 $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5, 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ としたのち $i = 2$ から手順 1 を行う。この手順もパスの基本解法に含めることとする。

定理 4 [7]

$P_{2n}(n \geq 2)$ は $S = \{2\}, \{5\}, \{k - 1\}, \{k - 4\}$ のとき、その時に限り solvable である。

3 グラフ上のペグソリティアの計算困難性

3.1 可解性判定問題の NP 完全性

定義 1 グラフ上のペグソリティアにおいて、入力 (V, E, s) (V は頂点の集合、 E は辺の集合、 s は空の頂点) が与えられたとき、ペグを一つにすることができるかどうかという問題をグラフ上のペグソリティアの可解性判定問題とする。

定理 5 グラフ上のペグソリティアの可解性判定問題は NP 完全である。

各頂点が入次数 1 出次数 2 の頂点もしくは入次数 2 出次数 1 の頂点である平面有向グラフのハミルトン閉路問題は NP 完全であることが知られている [8]。このハミルトン閉路問題からグラフ上のペグソリティアの可解性判定問題への多項式時間帰着をおこなうことで NP 完全である事を示す。以下、本章ではこの定理の証明をおこなう。

入次数 2 出次数 1 の頂点を表すガジェットを図 3、入次数 1 出次数 2 の頂点を表すガジェットを図 4 に示す。図 3 において、 $i_{5\alpha}$ と $i_{5\beta}$ の頂点が頂点ガジェットの入口で p_8 の頂点が頂点ガジェットの出口である。図 4 において、 p_{-8} の頂点が頂点ガジェットの入口で、 $o_{5\alpha}$ と $o_{5\beta}$ の頂点が頂点ガジェットの出口である。頂点ガジェットと頂点ガジェットの間にガジェットは存在せず、それぞれの出口と入口にあたる頂点が直接接続される。

以下の節ではこれらのガジェットで構成されたグラフ上のペグソリティアにおいて、元のグラフがハミルトン閉路を持つときかつその時に限りペグを一つにすることができる事を証明する。

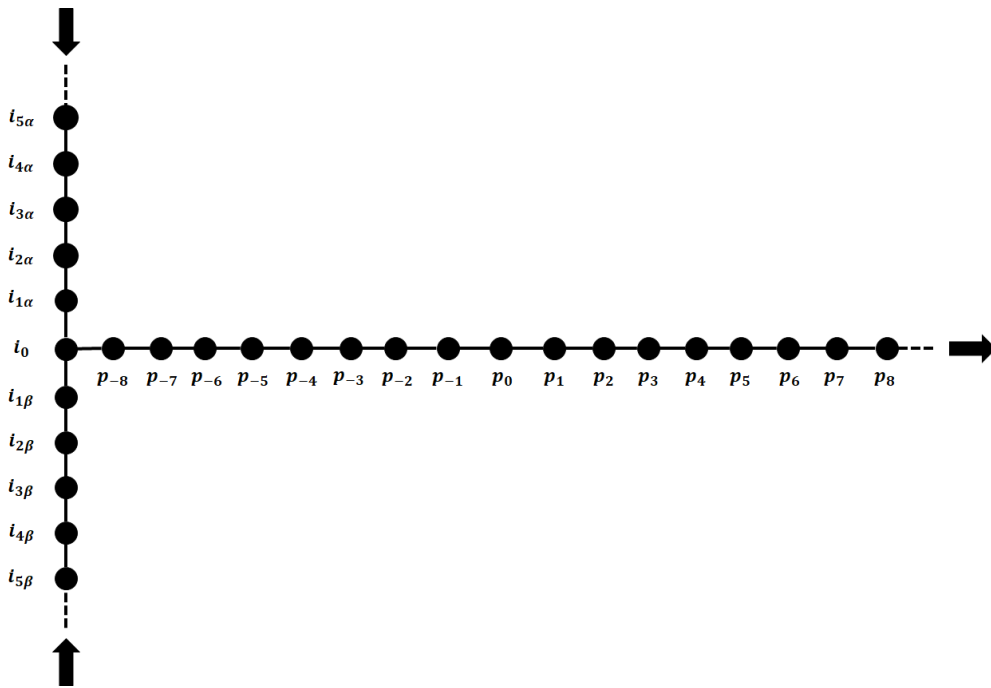


図3 入次数2 出次数1の頂点ガジェット

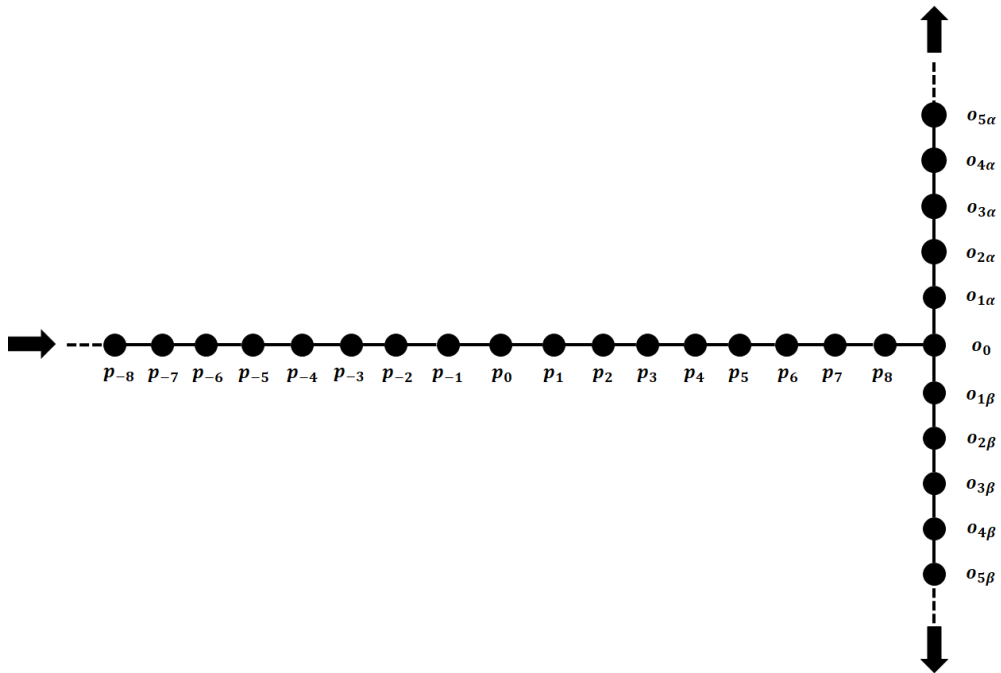


図4 入次数1 出次数2の頂点ガジェット

3.2 元のグラフがハミルトン閉路を持つときペグを一つにできることの証明

始めの空の頂点を入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットの p_0 の頂点とする。構成されたグラフ上のペグを消す時、基本的に手順 1 を使用して消していく。手順 1 を使用してペグを消していく動きを以降ペグの進行と呼び、頂点 x へ進行すると書くとき、手順 1 を使用して頂点 x の方へペグを消していくことを表す。 p_0 から p_8 へ進行すると、図 5 (a) の状況となる。このとき、この頂点ガジェットの $p_{-8}, p_{-7}, p_{-6}, p_{-5}, p_{-4}, p_{-3}, p_{-2}$ の頂点は最後に消す事になる。また、他の頂点ガジェットから p_{-8} に入ってきて p_8 へ進行した場合 $p_{-8}, p_{-7}, \dots, p_6$ までの頂点が空の頂点である図 5 (a) の状況となる。

この状況で、ハミルトン閉路上の次の頂点が $o_{5\alpha}$ に接続されている場合の消し方は以下のようになる。

手順 2 $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8, p_7 \rightarrow p_8 \rightarrow o_0, o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta}, o_{5\beta} \rightarrow o_{4\beta} \rightarrow o_{3\beta}, o_0 \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_{2\beta}, o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta}, o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0, o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\alpha}, o_{4\alpha} \rightarrow o_{3\alpha} \rightarrow o_{2\alpha}, o_{1\alpha} \rightarrow o_{2\alpha} \rightarrow o_{3\alpha}$

次の頂点ガジェットが $o_{5\beta}$ と接続している場合も同様の手順で消すことができる。消し終わると図 5 (b) の状況になる。

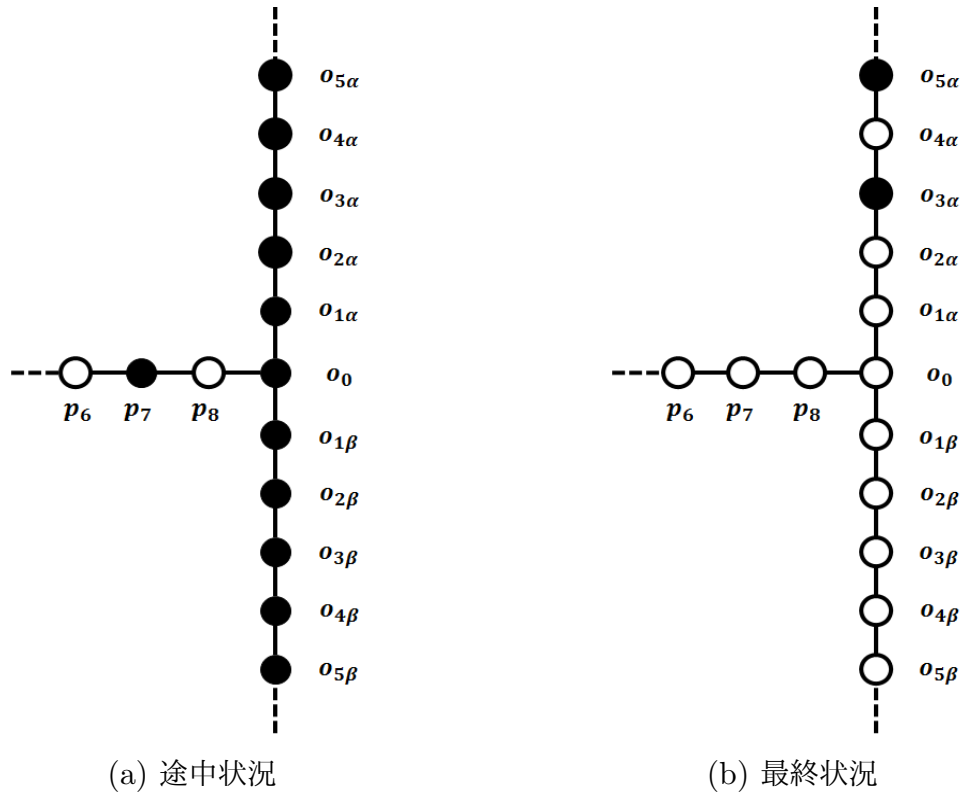


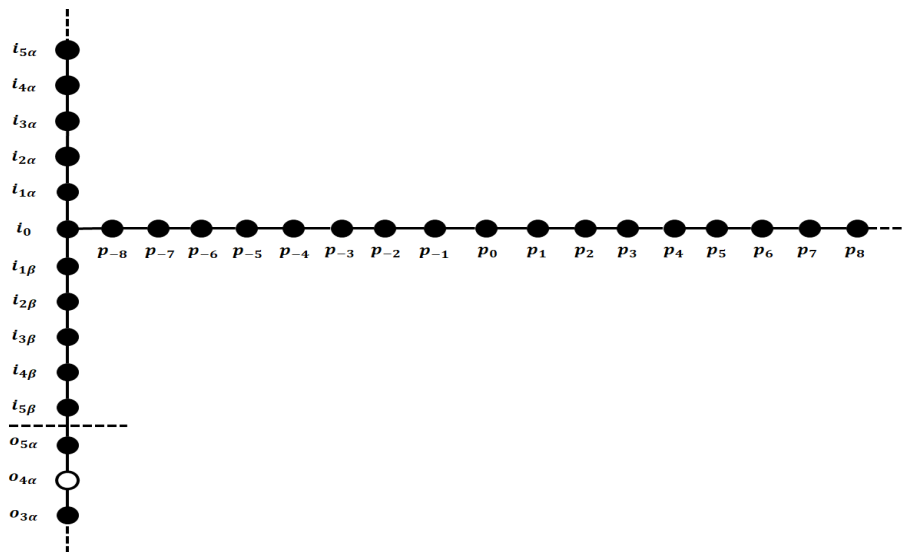
図5 入次数1 出次数2 の頂点ガジェットを消す際の状況

このとき $o_{5\alpha}$ と接続している頂点ガジェットが入次数2 出次数1 の頂点ガジェットの
場合図6の状況になる。このときの消し方を以下に示す。

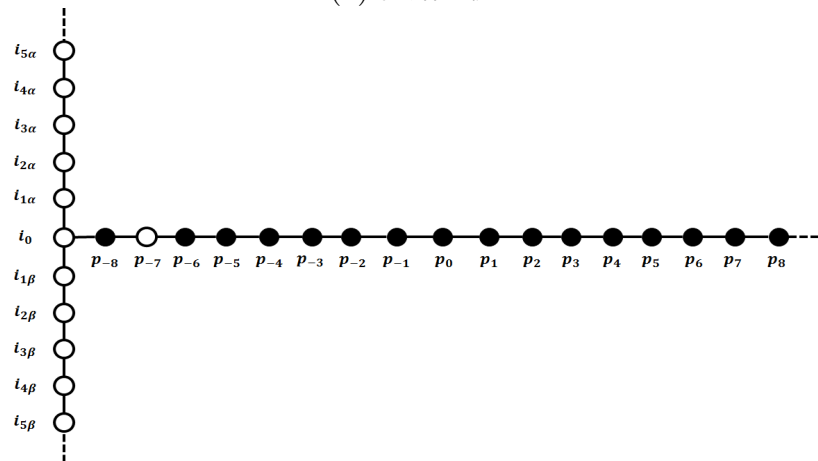
手順3 $i_{5\beta} \rightarrow o_{5\alpha} \rightarrow o_{4\alpha}$, $o_{3\alpha} \rightarrow o_{4\alpha} \rightarrow o_{5\alpha}$, $i_{3\beta} \rightarrow i_{4\beta} \rightarrow i_{5\beta}$, $o_{5\alpha} \rightarrow i_{5\beta} \rightarrow i_{4\beta}$, $i_{1\beta} \rightarrow$
 $i_{2\beta} \rightarrow i_{3\beta}$, $i_{4\beta} \rightarrow i_{3\beta} \rightarrow i_{2\beta}$, $i_{1\alpha} \rightarrow i_0 \rightarrow i_{1\beta}$, $i_{2\beta} \rightarrow i_{1\beta} \rightarrow i_0$, $i_{3\alpha} \rightarrow i_{2\alpha} \rightarrow i_{1\alpha}$, $i_{5\alpha} \rightarrow$
 $i_{4\alpha} \rightarrow i_{3\alpha}$, $i_0 \rightarrow i_{1\alpha} \rightarrow i_{2\alpha}$, $i_{3\alpha} \rightarrow i_{2\alpha} \rightarrow i_{1\alpha}$, $p_{-7} \rightarrow p_{-8} \rightarrow i_0$, $i_{1\alpha} \rightarrow i_0 \rightarrow p_{-8}$

手順3を終えると図6(b)の状況になり、 p_8 へ進行すると図6(c)の状況になる。

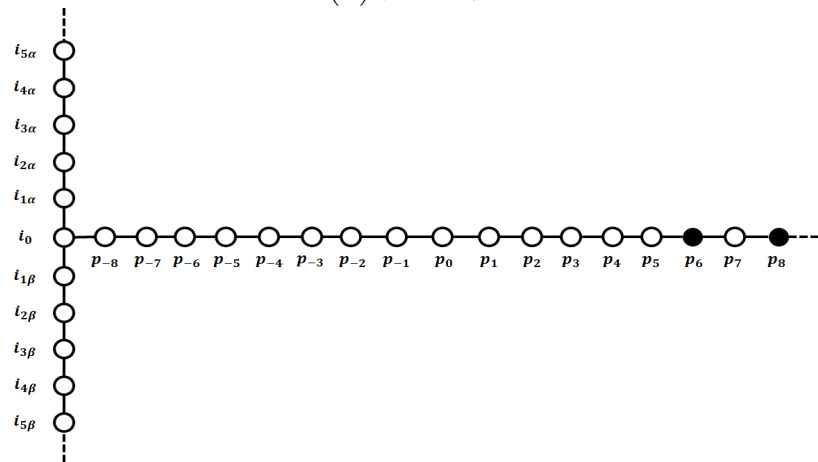
ここで、入次数1 出次数2 の頂点ガジェットの最終状況と入次数2 出次数1 の頂点ガ
ジェットの最終状況はともに図7の状況になる。ゆえに、次のガジェットに入る前のペグ
の配置は、頂点の種類によらず常に同じになる。他のガジェットから入次数1 出次数2 の
頂点ガジェットに入る場合も、手順1を使用すると図5(a)の状況になるので、手順2で
消すことができる。



(a) 開始状況



(b) 途中状況



(c) 最終状況

図6 入次数2 出次数1の頂点ガジェットのベグの消し方

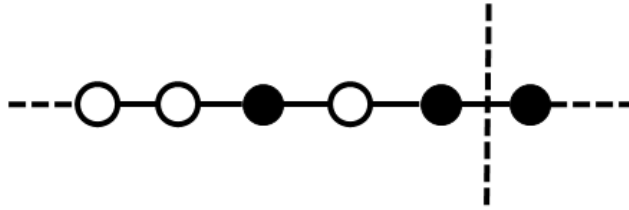


図7 各ガジェットの消し終わり

このようにしてハミルトン閉路上の頂点すべてに対応する頂点ガジェットを消していくと、いずれ最初の頂点ガジェットに辿り着く。最初の頂点ガジェットが入次数1出次数2の頂点ガジェットなので、既に p_{-1} と p_0 及びそれ以降の頂点は空の頂点となっている。図7の状況から p_{-2} へ進行すると p_{-3} にのみペグが残る。つまりペグを一つにすることができる。

3.3 ハミルトン閉路が存在しないときにペグを一つにできないことの証明

まず次の性質を証明する。

性質 1 もとのグラフから帰着してできたグラフ上のペグソリティアの盤面において、次数が 2 の空の頂点が 4 個連続しているとする。その頂点を $i, i+1, i+2, i+3$ とする。 $i, i+3$ に隣接した頂点の次数が 2 であれば、頂点 i 側に存在するペグのみをどのように移動させても頂点 i 側から頂点 $i+2$ にペグを置くことができず、頂点 $i+3$ 側に存在するペグのみをどのように移動させても頂点 $i+3$ 側から頂点 $i+1$ にペグを置くことができない。

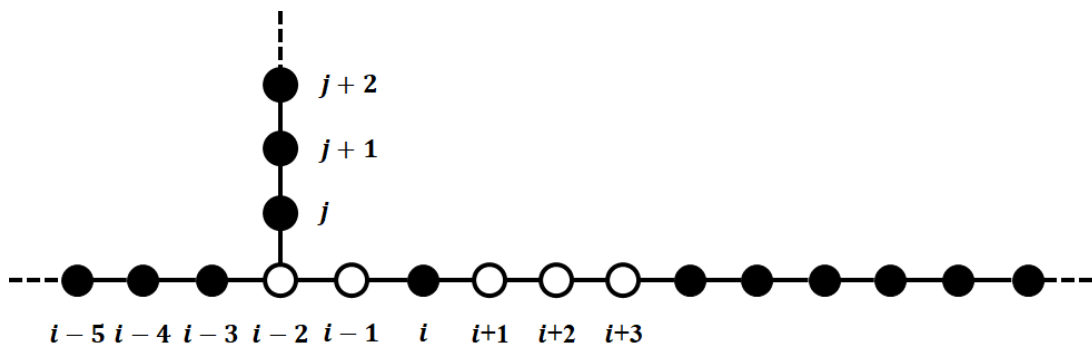
証明 $i-2$ が次数 3 の頂点であるときを考える。頂点 i 側に存在するペグのみを用いて $i+2$ にペグを置くためには $i \rightarrow i+1 \rightarrow i+2$ とペグを動かす必要がある。そのため $i+1$ と i にペグが存在する必要がある。 $i+1$ にペグを置くためには $i-1 \rightarrow i \rightarrow i+1$ とペグを動かす必要があるので、 i にペグが存在する必要がある。ペグを i に移動させるためには $i-2 \rightarrow i-1 \rightarrow i$ とペグを動かす必要があり、すると図 8(a) のようになる。 $i+1$ にペグを置くために再び $i-1$ にペグを動かす必要があるので $j+1 \rightarrow j \rightarrow i-2, i-3 \rightarrow i-2 \rightarrow i-1$ と動かすと $i-1$ にペグを置くことができ、 $i-1 \rightarrow i \rightarrow i+1$ と動かすと図 8(b) のようになり、 $i+1$ に置くことができる。

$i+1$ にペグが存在するので再び i にペグを置くことができれば $i+2$ にペグを置くことができる。 $i-4, i-5, \dots$ のペグを用いて $i-2$ 側にペグを動かすためには、図 9(a) の状況から図 9(b) の様に動かしていき、 $i-3$ 側に存在する次数 3 の頂点の部分で、 $i-2$ の頂点で $j+1 \rightarrow j \rightarrow i-2, i-3 \rightarrow i-2 \rightarrow i-1$ と動かしたのと同様の手順を用いる必要がある。すると $i-2$ にペグを動かした結果図 9(c) の状況になり $i-5$ 側の次数 3 の頂点から $i-3$ までが空の頂点となる。また $j+2$ 側のペグを用いて j にまでペグを動かすときも、同様となる。このとき $j \rightarrow i-2 \rightarrow i-1$ と動かすことができるが、以降 $i-2$ の頂点にペグを置こうとしても $i-3$ の頂点から $i-5$ 側の次数 3 の頂点、 j から $j+2$ 側の次数 3 の頂点までが空の頂点となっている。そこからペグを動かそうとしてもそこで上記の動かし方を繰り返すことになり、 $i-2$ にペグを置くことはできない。つまりこれ以上ペグを動かすことはできず、頂点 i 側に存在するペグをどのように動かしても頂点 $i+1$ より先にペグを置くことができない。

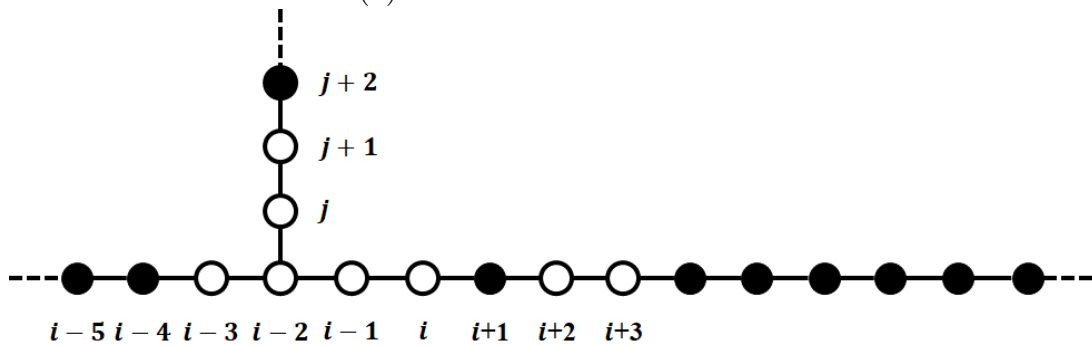
図 8(a) の状況から $i-1$ にペグを置くとき、 $i-3, i-4, \dots$ のペグのみを用いて上記の方法で $i-1$ に置くこともでき、ペグを $i+1$ まで置く事ができるが、このとき $j, j+1,$

...にはペグが存在するが、 $i-3, i-4, \dots$ が空の頂点となっている。ここで $j, j+1, \dots$ のペグを用いてペグを動かせるのは同様の手段を用いて $i-1$ までとなるのでこの場合もこれ以上ペグを動かすことはできず、頂点 i 側に存在するペグをどのように動かしても頂点 $i+1$ より先にペグを置くことができない。

また、次数が3の頂点が $i-2$ よりも $i-5$ 側にある場合、 j が隣接する頂点が $i-3, i-4, \dots$ となるだけ残ったペグで到達できる頂点が $i-1, i-2, \dots$ と離れていく事になるのでどの場合でも $i+2$ にペグを置く事はできない。頂点 $i+3$ 側も同様となる。 □

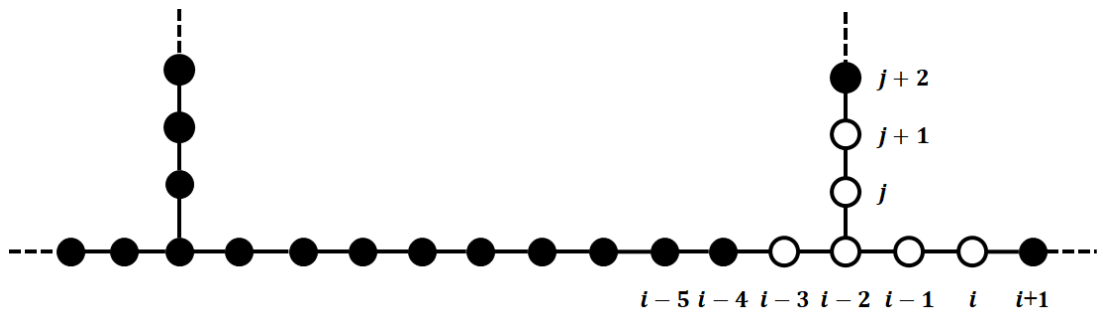


(a) i にペグを動かした時の図

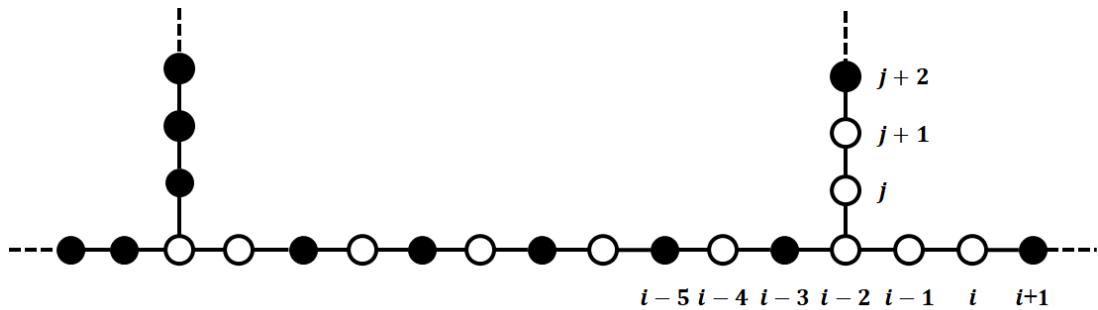


(b) $i+1$ にペグを動かした時の図

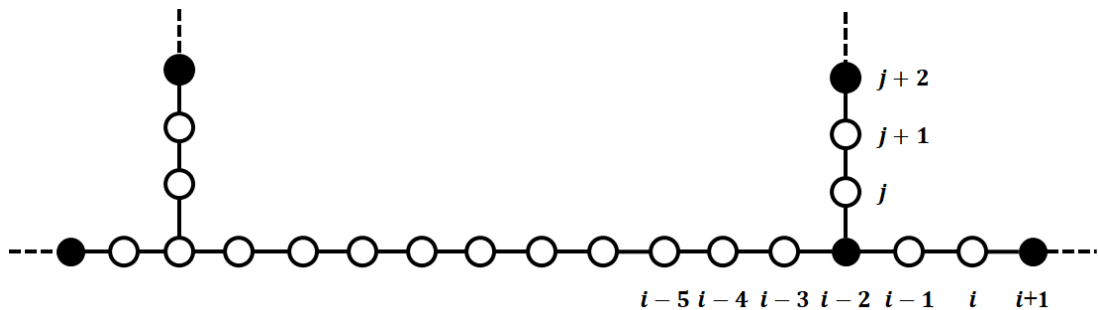
図8 性質1の状況



(a) ペグを動かす直前



(b) 途中



(c) $i-2$ までペグを動かした時

図9 $i-2$ にペグを置くための動き

性質 2 もとのグラフから帰着してできたグラフ上のペグソリティアの盤面において閉路上のペグを残さず消す時、閉路上に含まれない辺にあたる部分のペグは最大で5個までしか消すことができない。また、消せる数は5個または3個または2個である。

証明 入次数1 出次数2の頂点において $o_{5\alpha}$ に進行する場合を考える。途中経過として図10(a)の状況になるので、ここから $o_{5\alpha}$ に進行する場合を考える。また各ガジェットに

においてすべてのペグを消さずに進行すると図 10(b) の様に図 10(a) と比べて空の頂点が一つずれている状況になる場合があるのでその場合に $o_{5\alpha}$ に進行するときも考える。

まず図 10(a) の状況のとき、 $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ もしくは $o_{1\alpha} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かせる。

1. $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かした場合

p_7 を空の頂点にするためには $p_8 \rightarrow p_7 \rightarrow p_6$ と動かすか $p_7 \rightarrow p_8 \rightarrow o_0$ と動かす必要がある。次に $p_8 \rightarrow p_7 \rightarrow p_6$ と動かした場合、 $o_{1\alpha}$ 側のペグを考えなければ、性質 1 より $o_{2\beta}$ 側のペグだけを用いてペグを置けるのは o_0 までであり、このとき p_8 と p_7 が空の頂点であることから、 p_6 のペグを消しつつ $o_{5\alpha}$ に進行することができない。したがって、 p_7 を空の頂点にするためには、 $p_7 \rightarrow p_8 \rightarrow o_0$ と動かす必要がある。このとき p_8 側の頂点はすべて空の頂点となる。残りのペグを $o_{2\beta}$ から $o_{5\alpha}$ へのパス、もしくは $o_{5\beta}$ から $o_{5\alpha}$ へのパスとみなすと $o_{1\beta}$ が空の頂点であることから、定理 1 からパスの基本解法を用いる事ができ、 $o_{5\alpha}$ に進行することができる。また $o_{5\beta}$ から $o_{5\alpha}$ へのパスとみなして $o_{5\alpha}$ へ進行するとき、 $o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta}$ 、 $o_{5\beta} \rightarrow o_{4\beta} \rightarrow o_{3\beta}$ と動かすので図 11(a) の状況になるが、このとき性質 1 より i_1 側のペグだけを用いて置けるのは $o_{4\beta}$ までとなる。 $o_{4\beta}$ までペグを動かすと図 11(b) の状況となり、このとき $o_{4\beta}$ のペグを消しながら $o_{5\alpha}$ に進行することはできない。 $o_{2\beta}$ から $o_{5\alpha}$ へのパスとみなしたときも同様であり、 $o_{3\beta}$ 側のペグを消しながら $o_{5\alpha}$ に進行することはできない。ゆえに、進行しない辺のうち消せるペグの数は 5 個または 2 個となる。

2. $o_{1\alpha} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かした場合

$o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かした時と同様に考えると、 p_7 を空の頂点にするためには、 $p_7 \rightarrow p_8 \rightarrow o_0$ と動かす必要がある。このとき p_8 側の頂点はすべて空の頂点となる。 $o_{1\alpha}$ が空の頂点であることから、残りのペグを o_0 から $o_{5\alpha}$ へのパス、もしくは $o_{3\beta}$ から $o_{5\alpha}$ へのパスとみなすと定理 1 と定理 3 からパスの基本解法を用いる事ができ、 $o_{5\alpha}$ に進行することができる。このとき進行しない辺のうち消せるペグの数は 3 個または 0 個となる。

次に図 10(b) の状況のときも、図 10(a) の状況のときと同様の考え方を用いる。図 10(b) の状況のとき $o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$ もしくは $o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_0$ と動かせる。

1. $o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$ と動かした場合

p_8 を空の頂点にするためには、 $o_0 \rightarrow p_8 \rightarrow p_7$ と動かすか、 $p_8 \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\alpha}$ と動かす必要がある。 $o_0 \rightarrow p_8 \rightarrow p_7$ と動かした場合、 $o_{1\alpha}$ 側のペグを考えなければ性質 1

から $o_{1\beta}$ 側のペグのみを用いてペグを置けるのは p_8 までで、このとき図 12 となる。性質 1 の証明で示したようにこのとき $o_{1\beta}, o_{2\beta}, \dots$ が空の頂点となるので、この状況からは $o_{5\alpha}$ に進行することができない。つまり p_8 を空の頂点にするためには $p_8 \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\alpha}$ と動かす必要がある。このとき $o_{3\alpha}$ 側のペグに関して、 $o_{1\alpha}$ まで動かそうとすると $o_{2\alpha}$ の先が空の頂点となり $o_{5\alpha}$ へ進行できなくなる。つまり $o_{4\alpha} \rightarrow o_{3\alpha} \rightarrow o_{2\alpha}$ の動きのみ考慮すればよい。 $o_{4\alpha} \rightarrow o_{3\alpha} \rightarrow o_{2\alpha}, o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$ と動かした場合、 $o_{1\alpha}, o_{2\alpha}, o_{3\alpha}, o_{4\alpha}$ が空の頂点となる。このとき $o_0, o_{1\beta}, \dots$ のペグは $o_{2\alpha}$ までしか動かすことができないので $o_{5\alpha}$ に進行することはできない。 $o_{4\alpha} \rightarrow o_{3\alpha} \rightarrow o_{2\alpha}, o_{1\alpha} \rightarrow o_{2\alpha} \rightarrow o_{3\alpha}$ と動かした場合、 $o_{2\alpha}, o_{1\alpha}, o_0$ が空の頂点となるので、 $o_{1\beta}, o_{2\beta}, \dots$ のペグは $o_{1\alpha}$ までしか動かすことはできない。しかし $o_{5\alpha}$ に進行するためには $o_{1\alpha}$ のペグを動かすことはできないので、 $o_{1\beta}, o_{2\beta}, \dots$ のペグを消して進行することはできない。

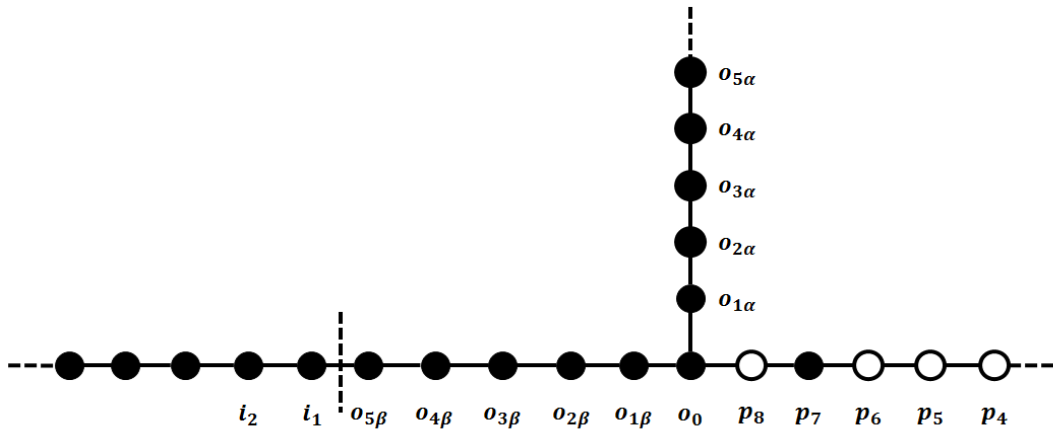
$o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_0$ と動かした場合は図 13 となる。この状況で $o_0 \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_{2\alpha}$ と動かしても、性質 1 より $o_{3\beta}$ 以降のペグだけを用いて o_0 までペグを動かすことができないので、 $o_{5\alpha}$ へ進行する事ができない。 $o_{1\alpha} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かしても $o_{3\beta}$ 以降のペグだけを用いて o_0 までペグを動かすことができないので、 $o_{5\alpha}$ へ進行する事ができない。 $o_{1\alpha} \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\beta}$ と動かしても、 $o_{4\beta} \rightarrow o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta}, o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_0$ とまでしか動かさず $o_{1\alpha}$ にペグを置くことができないので、 $o_{5\alpha}$ へ進行する事ができない。つまり $o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$ と動かした場合 $o_{1\beta}$ 側のペグを消しながら $o_{5\alpha}$ へ進行する事ができない。

2. $o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_0$ と動かした場合

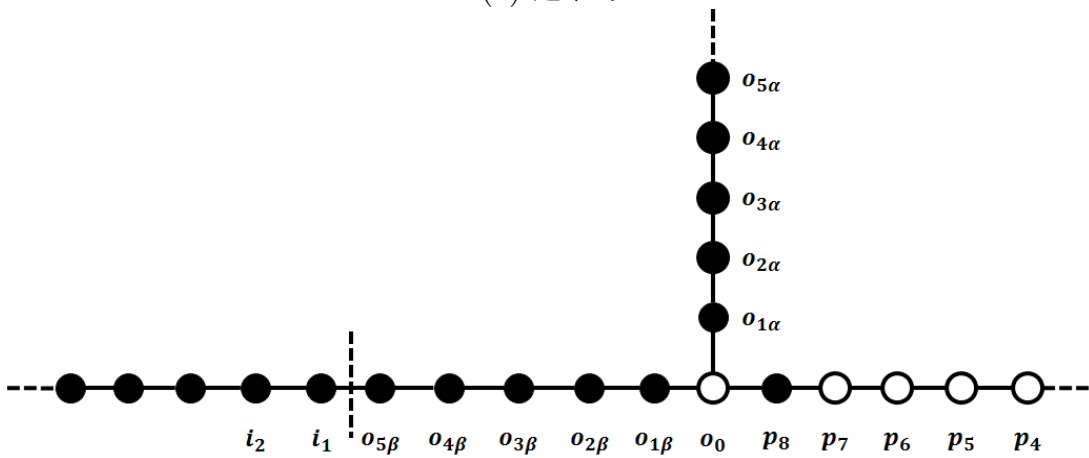
p_8 を空の頂点にして $o_{5\alpha}$ に進行するためには $p_8 \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\beta}$ と動かす必要がある。 $p_8 \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\beta}$ と動かした場合、図 14 となる。この状況のとき $o_{4\beta} \rightarrow o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta}$ と $o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$ と動かす選択肢が二つある。 $o_{4\beta} \rightarrow o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta}$ と動かした場合、 $o_{5\alpha}$ へ進行するとき $o_{2\beta}$ を消しつつ進行する事はできない。この状態で $o_{5\beta}$ 側のペグだけを用いて置けるのは $o_{3\beta}$ までで、このときも $o_{5\alpha}$ へ進行するとき $o_{2\beta}$ と $o_{3\beta}$ のペグを消しつつ進行する事はできない。図 14 の状況から $o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$ と動かした場合、 $o_{4\beta} \rightarrow o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta}$ と動かす以外の選択肢は、 $o_0 \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_{2\beta}, o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8, o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\alpha}$ となる。 $o_0 \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_{2\beta}$ とすると、 $o_{2\beta}$ 側のペグだけを用いて置けるのは o_0 までであり、 $o_{5\alpha}$ へ進行することはできない。 $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ とすると、 $o_{3\beta}$ 側のペグだけを用いて置けるのは $o_{1\beta}$ までであり、 $o_{5\alpha}$ へ進行することはできない。 $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\alpha}$ とすると $o_{5\alpha}$ へ進行することはできるが、 $o_{3\beta}$ 側のペグだけを用いて置けるのは $o_{1\beta}$ までであり、 $o_{3\beta}$ 側のペグを消しながら進行

することはできない。つまり、進行しない辺のうち消せるペグの数は2個または0個となる。

入次数2 出次数1の頂点ガジェットにおいて $i_{5\alpha}$ または $i_{5\beta}$ から p_8 へ進行する場合も同様となる。 □

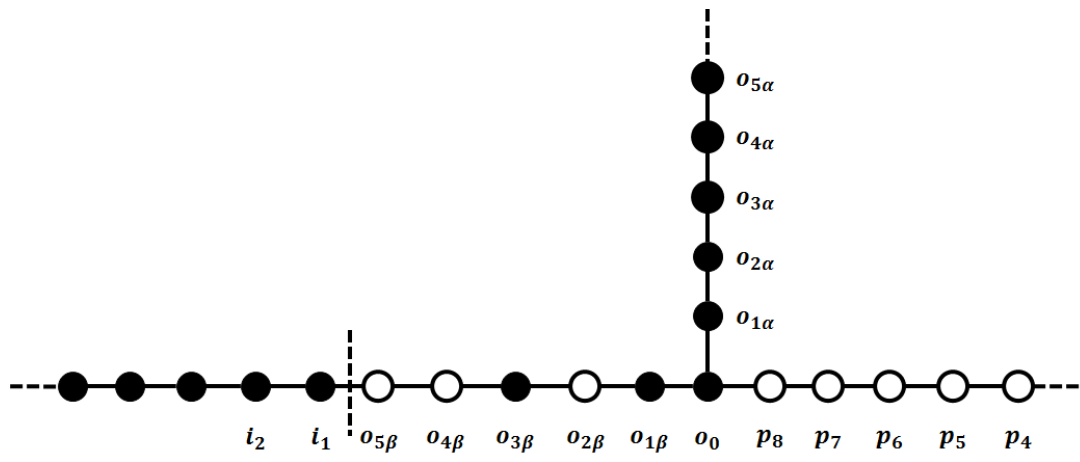


(a) 通常時

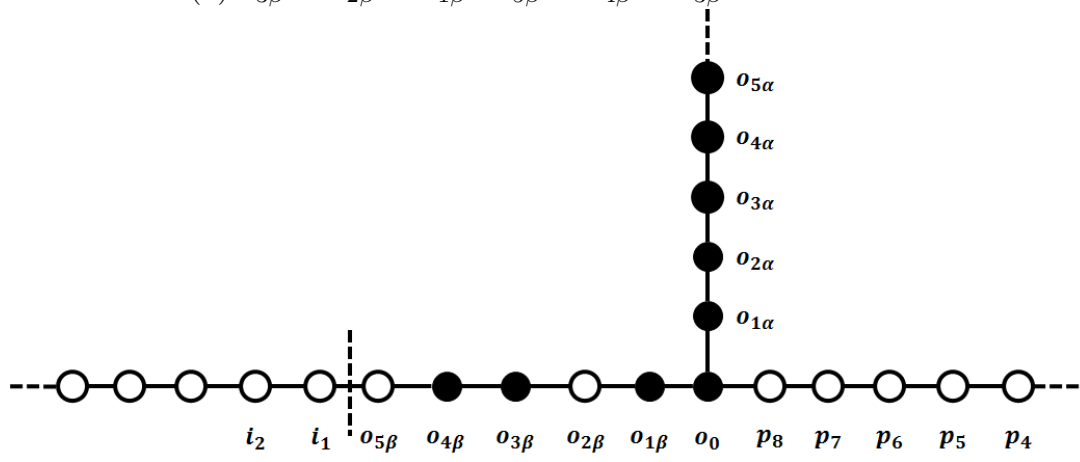


(b) 空の頂点の一つずれている状況

図10 入次数1 出次数2の頂点ガジェットにおいて $o_{5\alpha}$ へ進行する途中経過



(a) $o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta}$ 、 $o_{5\beta} \rightarrow o_{4\beta} \rightarrow o_{3\beta}$ と動かした後



(b) (a) の状況から $o_{4\beta}$ にペグを置いたとき

図 11 図 10(a) で通らない辺のペグを 5 個消せるとき

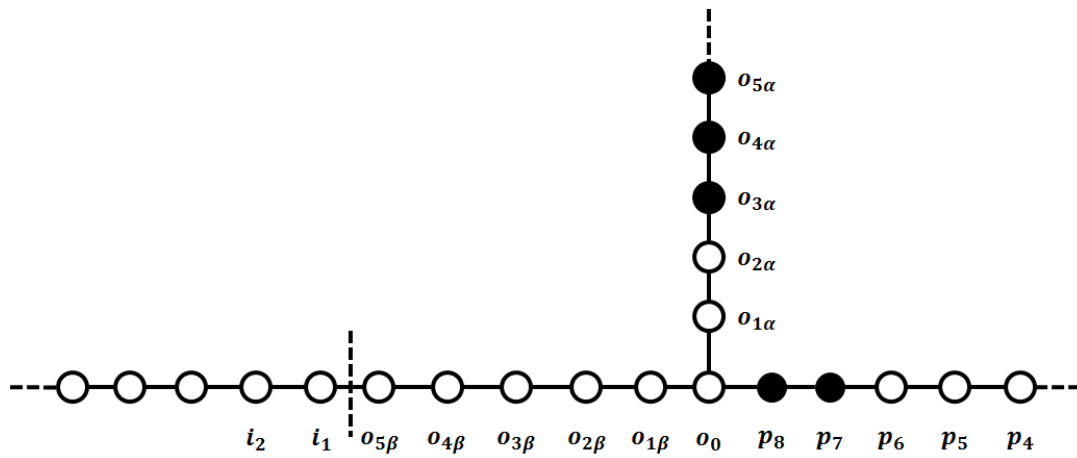


図 12 $o_0 \rightarrow p_8 \rightarrow p_7$ と動かした後、 p_8 にペグを置いたとき

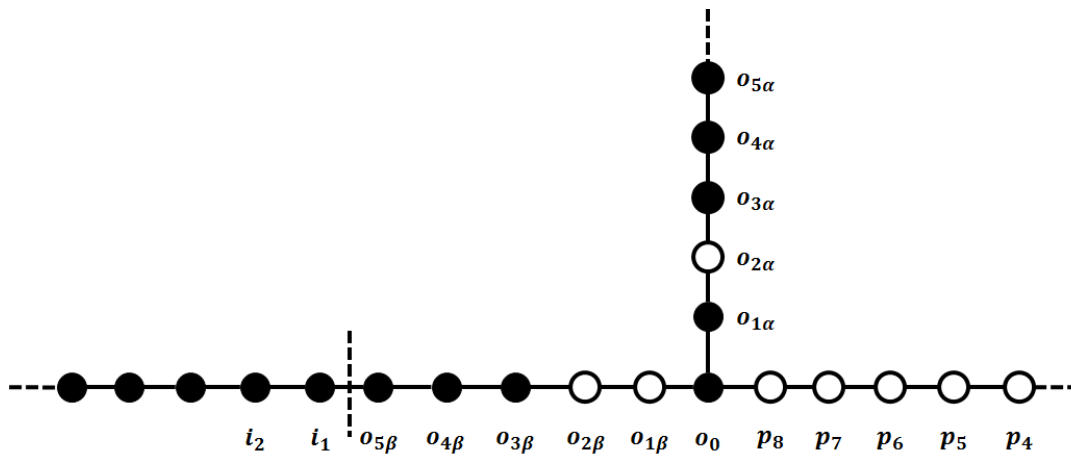


図 13 図 10(b) から $p_8 \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\alpha}$ 、 $o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_0$ と動かした場合

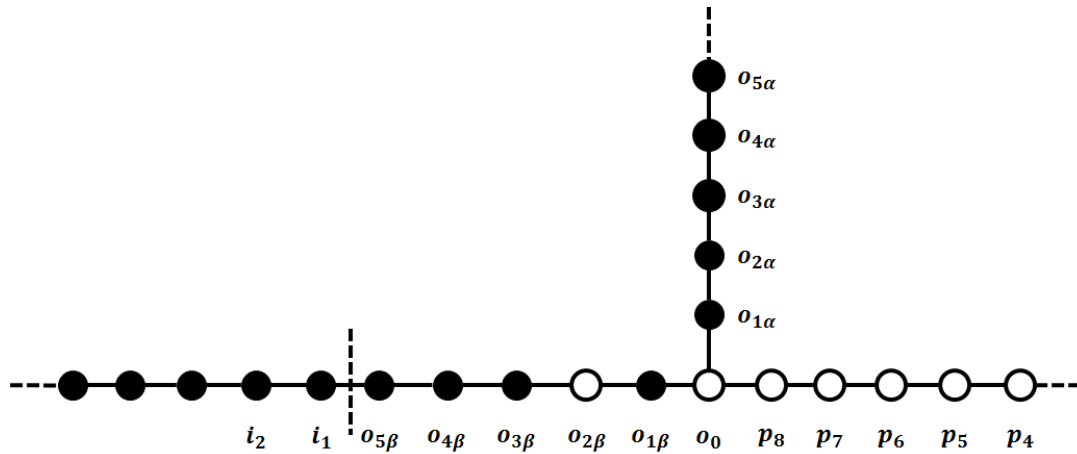


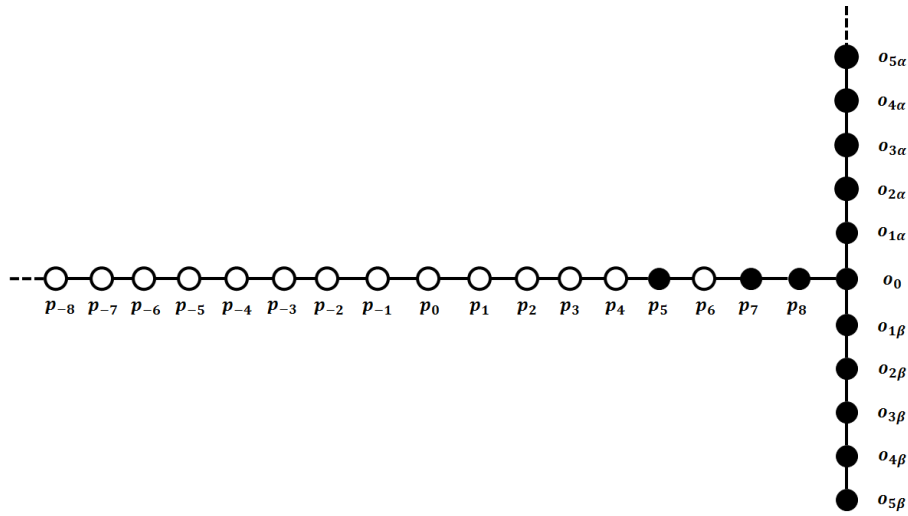
図 14 図 10(b) から $o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_0$ 、 $p_8 \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\beta}$ と動かした場合

構成されたグラフで頂点ガジェットを順に消していく途中で分岐してペグの進行を二手に分けることはできないこと、途中で有向辺の向きとは逆の向きに進行するとペグを一つにできなくなること、元のグラフにハミルトン閉路が存在しないとき、閉路に含まれない頂点に対応する頂点ガジェットのペグをすべて消すことができないことを順に示す。

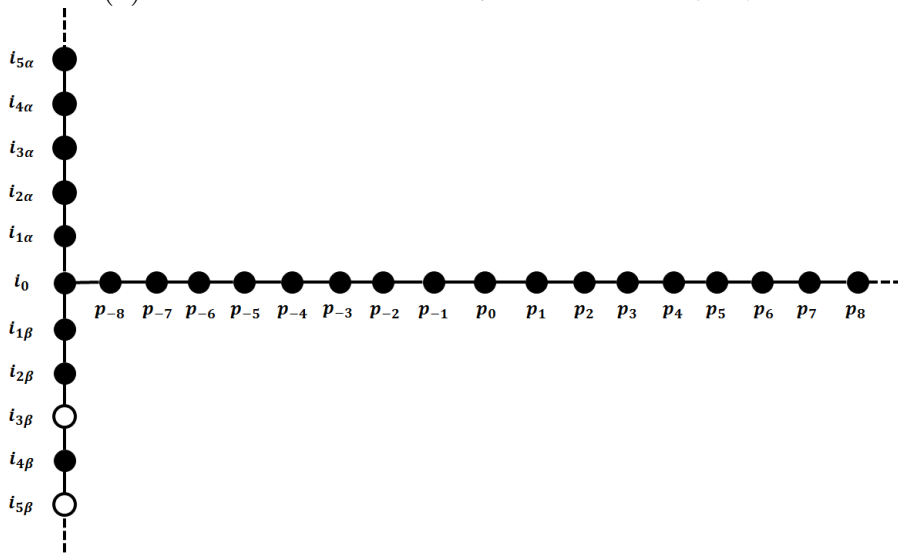
まずペグの進行において、分岐して二手に進行できない事を示す。最初に、開始盤面から p_{-8} と p_8 の両方へ進行することができないことを示す。ペグを消し始めたとき、入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットの p_0 のみが空の頂点となっている。まず、 $p_2 \rightarrow p_1 \rightarrow p_0$ とすると、空の頂点は p_1, p_2 となる。このとき、 p_8 へ進行するためには p_1, p_3, p_4, \dots にペグが存在し、 p_2 が空の頂点である必要がある。この条件を満たしつつ p_1 にペグを置くためには $p_{-1} \rightarrow p_0 \rightarrow p_1$ と動かす必要がある。今、空の頂点は p_{-1}, p_0, p_2 となる。ここで p_{-8} へ進行するためには、 $p_0, p_{-2}, p_{-3}, \dots$ にペグが存在し、 p_{-1} が空の頂点である必要がある。この条件を満たしつつ p_0 にペグを置くためには、 $p_4 \rightarrow p_3 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_1 \rightarrow p_0$ と動かさなければならず、このとき空の頂点は $p_{-1}, p_1, p_2, p_3, p_4$ となる。このとき $p_5, p_6, p_7, p_8, \dots$ は手順 1 を使用できる形ではないので p_8 へ進行する事ができなくなる。また、最初に $p_{-2} \rightarrow p_{-1} \rightarrow p_0$ と動かした場合も同様である。

次に、入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットを消す際、 $o_{5\alpha}$ と同時に $o_{5\beta}$ へ進行することはできないことを示す。入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットのペグを消しながら $o_{5\alpha}$ へ進行する途中、図 15 の状況 (ペグを消し始めた頂点では p_{-8}, \dots, p_{-2} にペグが残っている) となる。このとき、 p_5 のペグを消しつつ $o_{5\alpha}$ に進行するためにはペグを $p_8 \rightarrow p_7 \rightarrow p_6$ と動かす必要がある。次に $p_6 \rightarrow p_5 \rightarrow p_4$ とすると p_5, p_6, p_7, p_8 が空の頂点となる。このとき、 p_8 にペグを動かすためには $o_{1\alpha} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かす必要がある。ここで、性

質 1 より、 $o_{2\alpha}$ 側のペグのみで o_0 にペグを置くことができるので、 $o_0 \rightarrow p_8 \rightarrow p_7$ と動かすことができる。またこのとき $o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta} \rightarrow o_0$ と動かし、 $o_{3\beta}$ 側のペグのみで $o_{1\beta}$ にペグを置くことができるので、 $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かすことができる。このあと $p_8 \rightarrow p_7 \rightarrow p_6$ と動かすことができるが、 $o_{1\alpha}$ から $o_{1\beta}$ はすべて空の頂点となる。よって性質 1 よりこれ以降のようにペグを動かしても p_7 の位置にペグを置く事はできず、 p_4 のペグを消す事はできない。つまり図 15 の状況で、 $p_8 \rightarrow p_7 \rightarrow p_6$ と動かした後は $p_5 \rightarrow p_6 \rightarrow p_7$ と動かす必要がある。このとき、 $o_{5\alpha}$ と同時に $o_{5\beta}$ へ進行する事はできないことを総当たりで示した (付録)。 $o_{5\alpha}$ と同時に $o_{5\beta}$ へ進行するためには、手順 1 を両側に同時に用いることのできる状況が必要である。付録ではその状況にはなり得ない事を示している。これは入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットの場合も同様で $i_{5\beta}$ 側から入ってくるとき図 6(a) の状況となり、そこから進めていくと図 15(b) となるが p_{-3}, p_{-2}, \dots のペグを考慮に入れないければ途中で図 15(a) の状況と同様の形になるので、 p_8 と同時に $i_{5\alpha}$ へ進行する事はできない。以上より、構成されたグラフにおいて 2 方向に進行する事はできない。



(a) 入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットを消す途中



(b) 入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットを消す途中

図 15 それぞれの頂点ガジェットを消す途中状況

次に、元のグラフにハミルトン閉路が存在しないとき、ペグを消していく途中で想定通りにペグを消していく以外の動かし方として本来の有向辺の向きではなく逆向きに進んでいく場合、ペグをすべて消すことができないことを示す。

まず、ペグの消し始めから想定逆向きにペグを動かしていく場合に起こりうる状況を考えていく。初めに $p_2 \rightarrow p_1 \rightarrow p_0$ 、 $p_5 \rightarrow p_4 \rightarrow p_3$ としてから p_{-8} へ進行すると図 16 の状況となる。

この状況から入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットに $o_{5\alpha}$ から入る場合を考える。つまり図 17 の状況となる。このとき $o_{5\beta}$ 側に進行すると、性質 2 より p_3, p_2, \dots, p_{-8} のペグが残る事になり、またこのとき p_3, p_2, \dots, p_{-8} のペグを消すためには p_{-8} に接続する頂点ガジェットから p_3 へ進行しなければならないのですべてのペグを消した上で消し始めの頂点ガジェットに戻る事ができなくなる。つまりペグを一つにすることができない。ゆえに入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットに $o_{5\alpha}$ から入った場合 p_{-8} 側に進行する必要がある。また逆走の途中にペグの消し始めの入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットに $o_{5\alpha}$ から入る場合、 $o_{5\beta}$ 側に進行することになるが、性質 2 より p_5 を消して進行することができないのでこの場合もペグを一つにすることができない。入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットに p_8 側から入る場合、 p_{-8} から進行するときの入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットと同様の消し方になるので分岐して $i_{5\alpha}$ と $i_{5\beta}$ の両側に同時に進行する事はできない。つまり本来の有向辺の向きと逆向きに進行する限りペグを消す事はできるが、本来の向きに戻ろうとするとペグをすべて消すことができなくなる。最終的にペグを消し始めた頂点に戻ってくるときペグを一つにすることができるが、このときもとのグラフにハミルトン閉路が存在する事になるので、問題はない。

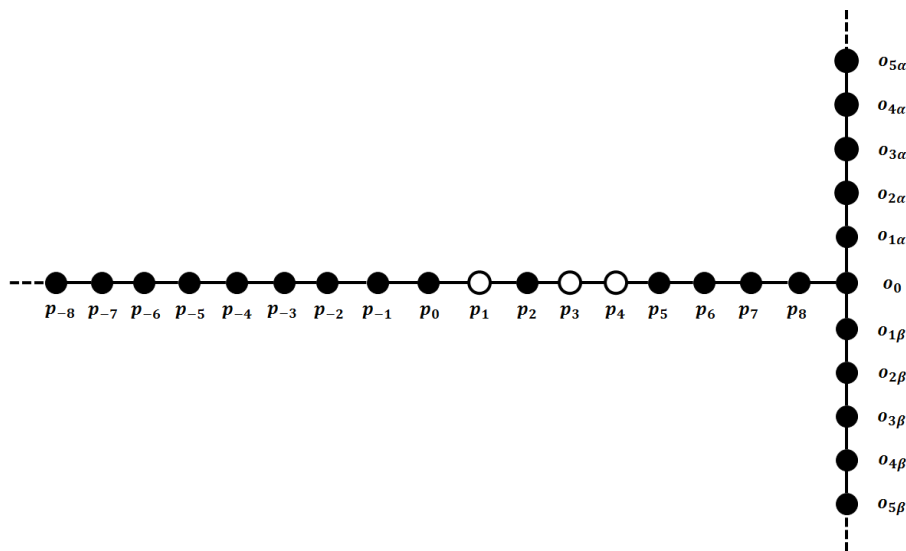


図 16 ペグの消し始めの逆走

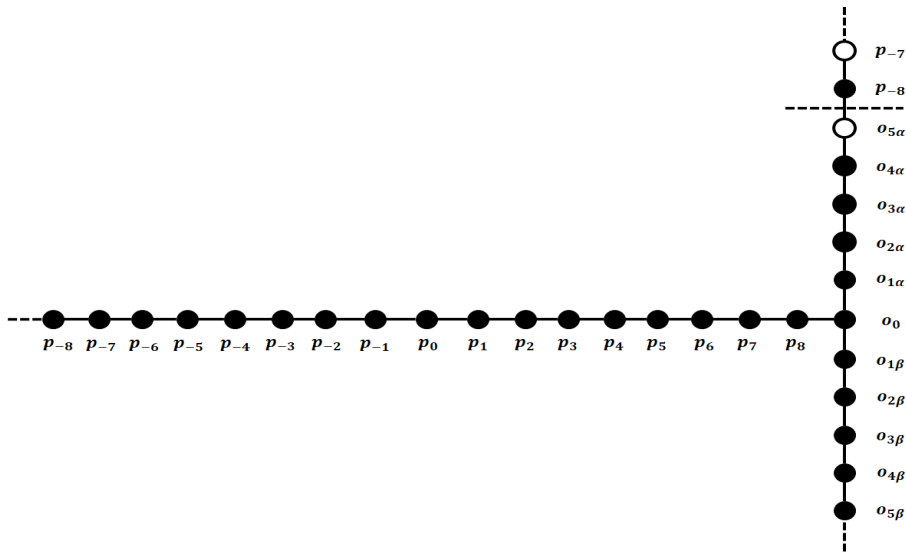


図 17 ペグの消し始め直後の逆走で入るときの入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットの状態

次に、入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットにおいて $i_{5\beta}$ 側から $i_{5\alpha}$ 側へ進行する場合を考える。入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットに入ってくる場合、図 6 の状況になる。

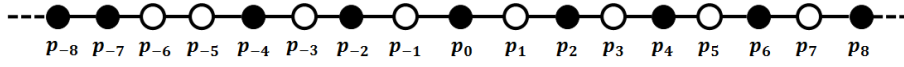
$i_{5\alpha}$ へ進行する場合、性質 2 より $p_{-3}, p_{-2}, \dots, p_8$ のペグを消すことができない。このとき残った $p_{-3}, p_{-2}, \dots, p_8$ のペグをすべて消すためには、 p_8 に接続する頂点ガジェットから入り p_{-3} へ進行する必要がある。しかし、最初にペグを消し始めた入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットの $p_{-8}, p_{-7}, \dots, p_{-2}$ の頂点にもペグが残っており、そのすべてを消して逆走を始めた頂点ガジェットに戻ってくることはできない。つまり有向辺の向きに逆らった進行を一度でもするとペグを一つにすることはできない。

元のグラフにそもそも閉路が存在しない場合、辺を逆行せずにペグを消し始めた頂点に戻ってくることはできないのでペグを一つにすることができない。また、元のグラフにハミルトン閉路ではない閉路が存在しているとき、その閉路上に含まれない頂点が存在する。このとき閉路上のペグを消して進みながら閉路上に含まれない頂点ガジェットのペグを消す事はできない事を示す。閉路上に含まれない頂点のうち、閉路上の頂点に隣接するものは、

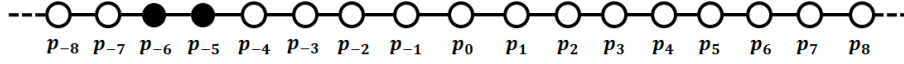
1. 閉路上の入次数 1 出次数 2 の頂点に隣接している入次数 1 出次数 2 の頂点
2. 閉路上の入次数 1 出次数 2 の頂点に隣接している入次数 2 出次数 1 の頂点
3. 閉路上の入次数 2 出次数 1 の頂点に隣接している入次数 1 出次数 2 の頂点
4. 閉路上の入次数 2 出次数 1 の頂点に隣接している入次数 2 出次数 1 の頂点

の 4 種類が考えられる。

まず閉路上の入次数 1 出次数 2 の頂点から出る辺と接続している、閉路に含まれない入次数 1 出次数 2 の頂点を考える。このとき閉路に含まれない頂点ガジェットの p_{-8} が閉路上の入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットの $o_{5\alpha}$ と $o_{5\beta}$ のどちらと接続していても差異はないので、閉路上の頂点ガジェットの $o_{5\alpha}$ と接続しているとしても一般性を損なわない。この頂点ガジェットのペグをすべて消すためにはこの頂点ガジェット内のペグを消していき、残ったペグを $o_{5\alpha}$ か $o_{5\beta}$ 側か p_{-8} 側いずれかの頂点に接続する頂点ガジェットに移動させるか、ペグをこの頂点ガジェットにのみ残す必要がある。この頂点ガジェット内にのみ残すためには消し始めの頂点ガジェットに残っているペグを消す必要があるが、消し始めの頂点ガジェットのペグを消すためには p_{-8} 側から p_{-2} へ進行する必要がある、そのとき少なくとも一つのペグが消し始めの頂点ガジェットに残ることとなるので不可能である。ゆえにこの頂点ガジェットにのみペグを残す場合は考慮しない。ここで p_{-8} の頂点のペグに注目する。閉路上の入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットにおいて、 $o_{5\alpha}$ 側と $o_{5\beta}$ 側に同時に進行できないことは既に示した。このとき、 p_{-8} のペグを $o_{5\alpha}$ 側と $o_{5\beta}$ 側に接続する頂点ガジェットに移動しようとする、 $p_{-8} \rightarrow p_{-7} \rightarrow p_{-6}$ としなければならない。 p_{-6} を空の頂点にするためには、 $p_{-6} \rightarrow p_{-5} \rightarrow p_{-4}$ としなければならない。つまり、 p_{-8} のペグを $o_{5\alpha}$ 側と $o_{5\beta}$ 側に接続する頂点ガジェットに移動するためには先に $o_{5\alpha}$ から $o_{5\beta}$ のペグを $o_{5\alpha}$ 側と $o_{5\beta}$ 側に接続する頂点ガジェットに存在する空の頂点を利用して o_0 を空の頂点にする必要がある、その後 $p_7 \rightarrow p_8 \rightarrow o_0$ 、 $p_5 \rightarrow p_6 \rightarrow p_7$ 、...、 $p_{-6} \rightarrow p_{-5} \rightarrow p_{-4}$ 、 $p_{-8} \rightarrow p_{-7} \rightarrow p_{-6}$ とペグを動かしていく必要がある。このとき図 18(a) の状況になる。このとき p_{-8} のペグは p_{-6} に移動させることができるが、その後さらに $o_{5\alpha}$ 側と $o_{5\beta}$ 側に移動しようとする、 $p_{-6} \rightarrow p_{-5} \rightarrow p_{-4}$ としなければならない。そのためには p_{-5} にペグが置かれている必要があるが、 p_{-5} にペグを移動させようとした場合、 $p_{-3} \rightarrow p_{-4} \rightarrow p_{-5}$ としなければならない。 p_{-3} にペグを移動させようとした場合、 $p_{-1} \rightarrow p_{-2} \rightarrow p_{-3}$ としなければならない。つまり $o_0 \rightarrow p_8 \rightarrow p_7$ 、 $p_7 \rightarrow p_6 \rightarrow p_5$ 、...、 $p_{-1} \rightarrow p_{-2} \rightarrow p_{-3}$ 、 $p_{-3} \rightarrow p_{-4} \rightarrow p_{-5}$ とペグを動かす必要がある、このとき図 18(b) の状況になるので、明らかに $o_{5\alpha}$ もしくは $o_{5\beta}$ まで移動させることができない。



(a) p_{-8} のペグを p_{-6} に移動させる直前



(b) 最終状況

図 18 p_{-8} のペグを $o_{5\alpha}$ 側と $o_{5\beta}$ 側に移動させようとしたとき

また、 p_{-8} のペグを隣接した頂点ガジェットの $o_{5\alpha}$ 側に動かすもしくは p_{-7} のペグを $o_{5\alpha}$ 側に動かして p_{-8} を消す場合を考える。隣接した頂点の $o_{5\alpha}$, $o_{4\alpha}$, ... が空の頂点でない場合、そもそも p_{-8} や p_{-7} を隣接した頂点ガジェットの $o_{5\alpha}$ 側に動かすことができない。ゆえに隣接した頂点ガジェットの $o_{5\alpha}$ が空の頂点だと仮定して、 $p_{-7} \rightarrow p_{-8} \rightarrow o_{5\alpha}$ と動かした場合を考える。このとき p_{-6} を $o_{5\alpha}$ 側と $o_{5\beta}$ 側に接続する頂点ガジェットに移動しようとしても上記した p_{-8} を $o_{5\alpha}$ 側と $o_{5\beta}$ 側に接続する頂点ガジェットに移動しようとしたときと同様の状況となり、移動させることができない。ゆえに $p_{-5} \rightarrow p_{-6} \rightarrow p_{-7}$ と動かす必要がある。同様に p_{-4} は $p_{-3} \rightarrow p_{-4} \rightarrow p_{-5}$ と動かす必要がある。このように $p_{-1} \rightarrow p_{-2} \rightarrow p_{-3}$, $p_1 \rightarrow p_0 \rightarrow p_{-1}$, ..., $o_0 \rightarrow p_8 \rightarrow p_7$ とペグを動かしていくと図 19 の状況になる。ここで p_7 のペグを消すもしくは p_7 を p_{-8} 側へ動かすためには p_8 にペグが必要となる。このとき最低でもこの頂点ガジェット内で $o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$, $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かす必要があり、このあと $p_8 \rightarrow p_7 \rightarrow p_6$, $p_6 \rightarrow p_5 \rightarrow p_4$, ..., $p_{-6} \rightarrow p_{-7} \rightarrow p_{-8}$ とペグを動かすと p_{-7} から p_8 は空の頂点となるが図 20(a) の状況となる。ペグをできるだけ消そうとした場合 $o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$, $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow o_{1\alpha}$, $o_{4\alpha} \rightarrow o_{3\alpha} \rightarrow o_{2\alpha}$, $o_{2\alpha} \rightarrow o_{1\alpha} \rightarrow o_0$, $o_{3\beta} \rightarrow o_{2\beta} \rightarrow o_{1\beta}$, $o_{1\beta} \rightarrow o_0 \rightarrow p_8$ と動かせば p_8 にペグを動かすことができ、このあと $p_8 \rightarrow p_7 \rightarrow p_6$, $p_6 \rightarrow p_5 \rightarrow p_4$, ..., $p_{-6} \rightarrow p_{-7} \rightarrow p_{-8}$ とペグを動かすと図 20(b) の状況となる。どちらの状況であったとしても、 $o_{5\alpha}$ と $o_{5\beta}$ とともに接続する頂点ガジェットが閉路上に含まれていたとしても性質 2 より、この頂点ガジェットに残ったペグをすべて消す事はできない。

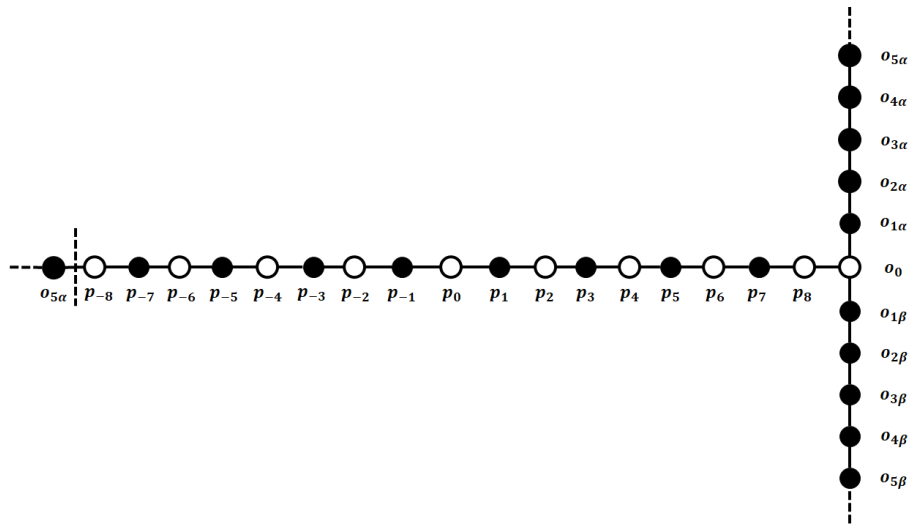


図 19 閉路上にない入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットで $o_0 \rightarrow p_9 \rightarrow p_7$ と動かした直後

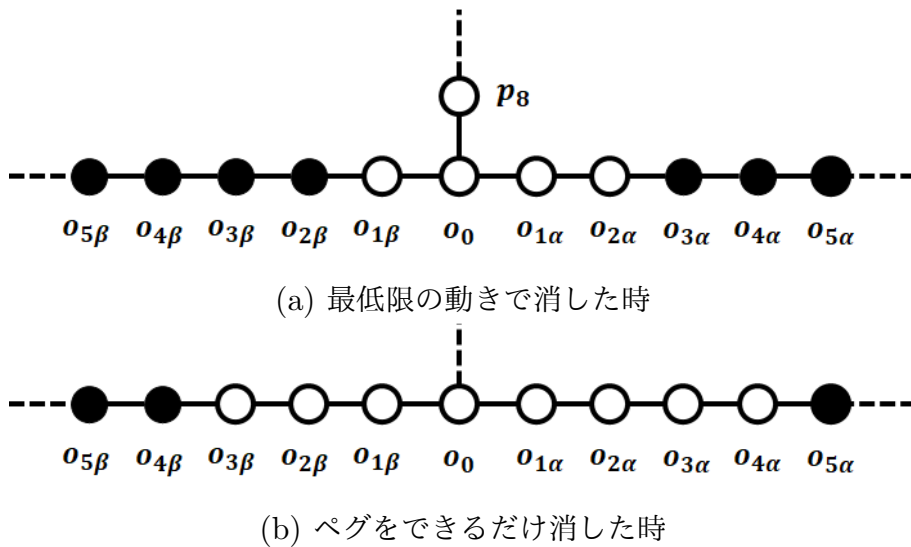


図 20 図 19 の状況から p_7, p_5, \dots に残るペグを消した時

次に閉路上の入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットの $o_{5\alpha}$ と $i_{5\beta}$ で接続している、閉路に含まれない入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットを考える。この場合も同様で、 $i_{5\alpha}$ 側もしくは $i_{5\beta}$ 側にペグを移動させようとした場合図 18(b) と同様の状況となり p_8 側にペグを移動させようとした場合図 20 と同様の状況となる。ゆえにすべての頂点を消して残ったペグを隣接した頂点ガジェットに移動させることはできない。

次に閉路上の入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットの $i_{5\alpha}$ と $o_{5\alpha}$ で接続している、閉路に含まれない入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットを考える。この場合もまた同様で、 $o_{5\alpha}$ 側

にペグを移動させようとしても、 p_{-8} 側にペグを移動させようとした場合でも同様の議論でペグを消す事はできないことが示せる。閉路上の入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットの $i_{5\alpha}$ と p_8 で接続している、閉路に含まれない入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェットも同様である。

ここで、閉路上の頂点ガジェットと隣接する閉路上の頂点ガジェットのペグをすべて消せない事が示せたので、閉路上の頂点ガジェットと隣接していない頂点を考えたときも同様の議論を行うと必ずどこかにペグが残る事になる。

以上より、与えられた盤面でペグを消していくとき、元のグラフにハミルトン閉路が存在しない場合は全てのペグを消す事はできない。□

4 一般化ペグソリティアとその可解性

4.1 一般化ペグソリティアの定義

本節では一般化ペグソリティア [7] の定義を与える。グラフ $G = (V, E)$ 、辺集合 $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$ が与えられる。辺 (x, y) と (y, z) が同じ辺集合 E_i に属し、頂点 x と y にペグが存在し頂点 z が空の頂点であるときペグは x から y を飛び越え z に移動することができる。それ以外の定義はグラフ上のペグソリティアと同一である。

グラフ G と H の直積 $G \square H$ は以下のように定義される。

$$V(G \square H) = \{(g, h) | g \in V(G), h \in V(H)\},$$

$$E(G \square H) = \{((g, h), (g', h')) | (h = h' \wedge (g, g') \in E(G)) \vee (g = g' \wedge (h, h') \in E(H))\}$$

また、本論文では辺集合は以下の様に定義する。

$$E_1 = \{((g, h), (g', h')) | (h = h' \cap (g, g') \in E(G))\}$$

$$E_2 = \{((g, h), (g', h')) | (g = g' \cap (h, h') \in E(H))\}$$

つまり、元のグラフで存在した辺でのみペグの移動が行える。グラフの直積を考えると、頂点数が 2 のグラフと直積をとると必ず solvable ではなくなるためグラフ G と H はそれぞれ頂点数が 3 以上とする。また、 $G \square H$ の $h \in V(H)$ に対し、 $\{(v, h) | v \in V(G)\}$ による誘導部分グラフを G^h 、 $g \in V(G)$ に対し、 $\{(g, v) | v \in V(H)\}$ による誘導部分グラフを H^g と表す。

4.2 一般化ペグソリティアの可解性

本節では一般化ペグソリティアにおいて、パスとサイクルの直積でできたグラフでパスとサイクルのサイズを変え、それぞれの可解性を示す。

定理 6 [9] $n, m \geq 2$ のとき、 $C_{2n} \square P_{2m}$ は solvable である。

以下、サイクル C_n の頂点番号を C_n のある頂点から $1, 2, \dots, n$ とし、パス P_n の頂点番号を P_n の端の頂点から $1, 2, \dots, n$ とする。以下に示す図において c_i と記した行の頂点はサイクルの頂点 i に対応する頂点で、 p_j と記した列の頂点は各パスの頂点 j に対応する頂点となる。つまり i 行 j 列の位置の頂点が頂点 (i, j) を示している。図 21 を例にとると、 c_2 と記された行、 p_4 と記された列に対応する頂点は $(2, 4)$ となる。

定理 7 $n \geq 3$ のとき、 $C_3 \square P_n$ は solvable である。

証明 まず、 $C_3 \square P_4$ が solvable であることを示す。 $P_4 \square C_3$ の初期盤面での空の頂点を $(2, 2)$ とする。

手順 4 $(2, 4) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (2, 2)$ 、 $(1, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (2, 3)$ 、 $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 3)$ 、 $(1, 4) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (1, 2)$ 、 $(3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ 、 $(3, 4) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 2)$ 、 $(2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (2, 4)$ 、 $(1, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (2, 2)$ 、 $(2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 3)$ 、 $(2, 4) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (2, 2)$

とするとペグが一つになる。

次に、 $C_3 \square P_6$ を考える。初期盤面での空の頂点を $(2, 2)$ とし、 $C_3 \square P_4$ と同様に手順 4 で動かしていき、最後の動きの直前で止める。すると、図 21 となるから

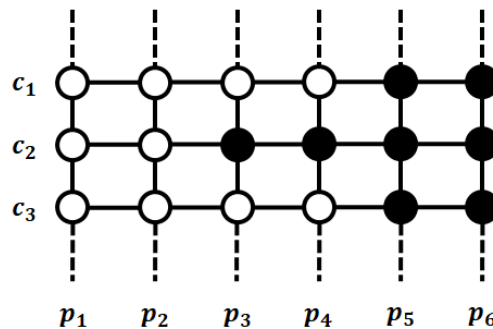


図 21 $C_3 \square P_6$ の解き方途中経過

手順 5 $(1, 6) \rightarrow (1, 5) \rightarrow (1, 4)$ 、 $(1, 4) \rightarrow (2, 4) \rightarrow (3, 4)$ 、 $(2, 6) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (2, 4)$ 、 $(3, 4) \rightarrow (2, 4) \rightarrow (1, 4)$ 、 $(3, 6) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (3, 4)$ 、 $(1, 4) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (2, 4)$ 、 $(2, 3) \rightarrow (2, 4) \rightarrow (2, 5)$

とするとペグが一つになる。

次に、 $C_3 \square P_8$ を考える。初期盤面での空の頂点を $(2, 2)$ とし、 $C_3 \square P_6$ と同様に手順 5 で動かしていく。すると、図 22 となるので

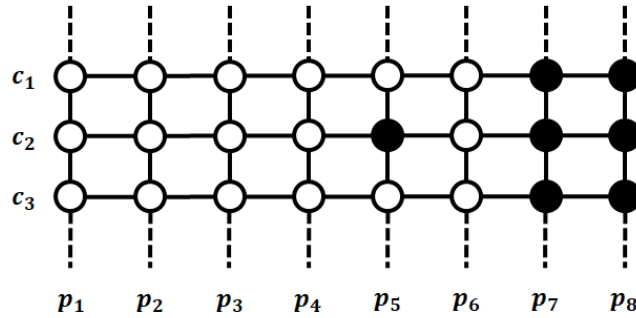


図 22 $C_3 \square P_8$ の解き方途中経過

手順 6 $(1, 8) \rightarrow (1, 7) \rightarrow (1, 6)$ 、 $(3, 8) \rightarrow (3, 7) \rightarrow (3, 6)$ 、 $(2, 8) \rightarrow (2, 7) \rightarrow (2, 6)$ 、 $(2, 5) \rightarrow (2, 6) \rightarrow (2, 7)$ 、 $(1, 6) \rightarrow (3, 6) \rightarrow (2, 6)$ 、 $(2, 6) \rightarrow (2, 7) \rightarrow (2, 8)$

とするとペグが一つになる。

次に、 $c_3 \square P_{10}$ を考える。初期盤面での空の頂点を $(2, 2)$ とし、 $C_3 \square P_8$ と同様に手順 6 で動かしていく。すると、図 23 となるので

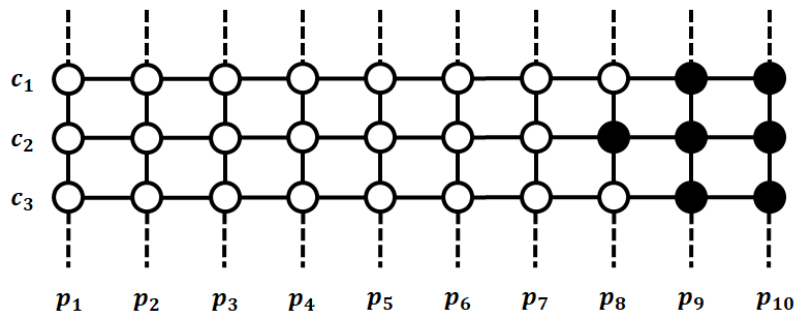


図 23 $C_3 \square P_{10}$ の解き方途中経過

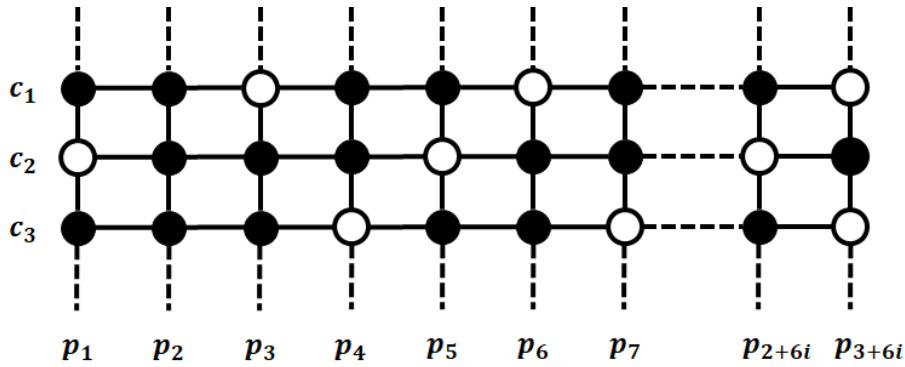
手順 7 $(3, 10) \rightarrow (3, 9) \rightarrow (3, 8)$ 、 $(3, 8) \rightarrow (2, 8) \rightarrow (1, 8)$ 、 $(1, 10) \rightarrow (2, 10) \rightarrow (3, 10)$ 、 $(1, 8) \rightarrow (1, 9) \rightarrow (1, 10)$ 、 $(1, 10) \rightarrow (3, 10) \rightarrow (2, 10)$ 、 $(2, 10) \rightarrow (2, 9) \rightarrow (2, 8)$

とするとペグが一つになる。またこのとき、 $C_3 \square P_4$ を解くときの最後の状況と同様になる

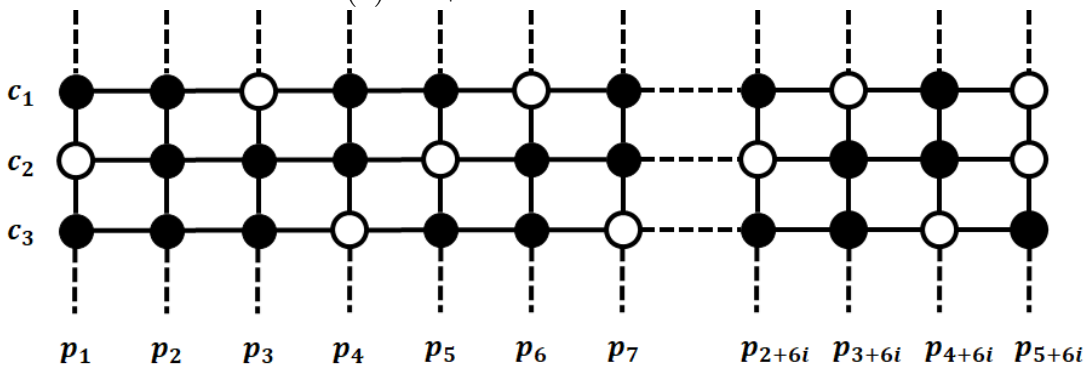
ので $C_3 \square P_{12}$ を解くには $C_3 \square P_{10}$ を解くときと同様に手順 7 で動かしていき、最後の動きの直前で止めたあと手順 5 と同様に動かすと解くことができる。つまり $C_3 \square P_{6n} (n \geq 2)$ のとき、 $C_3 \square P_{6n-2}$ の最終状況の一つ前から手順 5 で解くことができ、 $C_3 \square P_{6n+2} (n \geq 2)$ のとき、 $C_3 \square P_{6n}$ の最終状況から手順 6 で解くことができ、 $C_3 \square P_{6n+4} (n \geq 2)$ のとき、 $C_3 \square P_{6n+2}$ の最終状況から手順 7 で解くことができる。よって、 $C_3 \square P_{2n} (n \geq 2)$ は solvable である。

次に、 $C_3 \square P_{2n+1} (n \geq 1)$ が solvable であることを示す。 $C_3 \square P_{2n+1}$ の初期盤面での空の頂点を $(2, 1)$ とする。最初 $(2, 3) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 1)$ 、 $(3, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3)$ 、 $(3, 5) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (3, 3)$ 、 $(1, 5) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (3, 5)$ 、 $(1, 7) \rightarrow (1, 6) \rightarrow (1, 5)$ 、 $(2, 7) \rightarrow (3, 7) \rightarrow (1, 7)$ と動かす。以降手順 8 を $i = 1$ から $6i \leq 2n - 2$ となる最大の i まで繰り返す。ただし $6i \leq 2n - 2$ となる最大の i に関しては $2n + 1 \bmod 6$ が 3 のとき手順の 1 まで、5 のとき 2 まで、1 のとき 3 までで終了する。

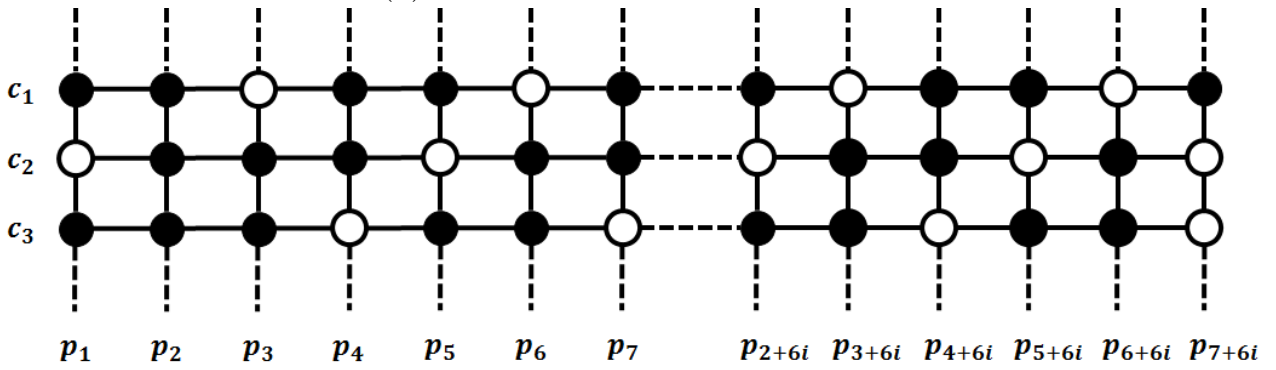
- 手順 8
1. $(2, 3 + 6i) \rightarrow (2, 2 + 6i) \rightarrow (2, 1 + 6i)$ 、 $(3, 3 + 6i) \rightarrow (1, 3 + 6i) \rightarrow (2, 3 + 6i)$
 2. $(3, 5 + 6i) \rightarrow (3, 4 + 6i) \rightarrow (3, 3 + 6i)$ 、 $(1, 5 + 6i) \rightarrow (2, 5 + 6i) \rightarrow (3, 5 + 6i)$
 3. $(1, 7 + 6i) \rightarrow (1, 6 + 6i) \rightarrow (1, 5 + 6i)$ 、 $(2, 7 + 6i) \rightarrow (3, 7 + 6i) \rightarrow (1, 7 + 6i)$



(a) $2n + 1 \pmod 6$ が 3 のとき



(b) $2n + 1 \pmod 6$ が 5 のとき



(c) $2n + 1 \pmod 6$ が 1 のとき

図 24 $C_3 \square P_{2n+1}$ 手順 8 終了時点

その後、手順 8 の 3 で終わったならば $(2, 6 + 6i) \rightarrow (3, 6 + 6i) \rightarrow (1, 6 + 6i)$ と動かした後手順 9 の 1 から、手順 8 の 2 で終わったならば $(1, 4 + 6i) \rightarrow (2, 4 + 6i) \rightarrow (3, 4 + 6i)$ と動かした後手順 9 の 2 から、手順 8 の 1 で終わったならば $(3, 2 + 6i) \rightarrow (1, 2 + 6i) \rightarrow (2, 2 + 6i)$ 、と動かした後手順 9 の 3 から始めて $6i \leq 2n - 2$ となる最大の i から $i = 1$ まで繰り返していく。

手順 9 1. $(3, 5 + 6i) \rightarrow (1, 5 + 6i) \rightarrow (2, 5 + 6i)$ 、 $(1, 7 + 6i) \rightarrow (1, 6 + 6i) \rightarrow (1, 5 + 6i)$ 、
 $(1, 5 + 6i) \rightarrow (2, 5 + 6i) \rightarrow (3, 5 + 6i)$ 、 $(1, 4 + 6i) \rightarrow (2, 4 + 6i) \rightarrow (3, 4 + 6i)$
 2. $(2, 3 + 6i) \rightarrow (3, 3 + 6i) \rightarrow (1, 3 + 6i)$ 、 $(3, 5 + 6i) \rightarrow (3, 4 + 6i) \rightarrow (3, 3 + 6i)$ 、 $(3, 3 + 6i) \rightarrow (1, 3 + 6i) \rightarrow (2, 3 + 6i)$ 、
 $(3, 2 + 6i) \rightarrow (1, 2 + 6i) \rightarrow (2, 2 + 6i)$
 3. $(1, 1 + 6i) \rightarrow (2, 1 + 6i) \rightarrow (3, 1 + 6i)$ 、 $(2, 3 + 6i) \rightarrow (2, 2 + 6i) \rightarrow (2, 1 + 6i)$ 、 $(2, 1 + 6i) \rightarrow (3, 1 + 6i) \rightarrow (1, 1 + 6i)$ 、
 $(2, 6i) \rightarrow (3, 6i) \rightarrow (1, 6i)$

手順 9 の繰り返しが終わると図 25 の状況となる。

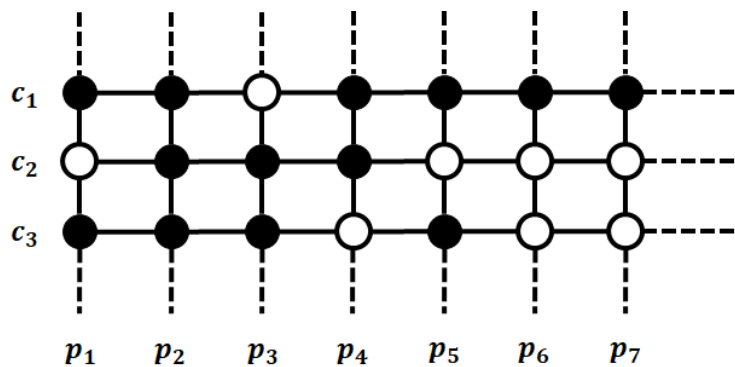


図 25 $C_3 \square P_{2n+1}$ 手順 9 終了時点

この状況から $(3, 5) \rightarrow (1, 5) \rightarrow (2, 5)$ 、 $(1, 7) \rightarrow (1, 6) \rightarrow (1, 5)$ 、 $(1, 4) \rightarrow (2, 4) \rightarrow (3, 4)$ 、
 $(1, 5) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (3, 5)$ 、 $(2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (1, 3)$ 、 $(3, 5) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (3, 3)$ 、 $(3, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3)$ 、
 $(3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ 、 $(2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (1, 3)$ 、 $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1)$ 、
 $(1, 3) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1)$ 、 $(3, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1)$ とするとペグが一つになる。よって、
 $C_3 \square P_{2n+1} (n \geq 1)$ は solvable である。以上より、 $C_3 \square P_{2n} (n \geq 2)$ と $C_3 \square P_{2n+1} (n \geq 1)$ が solvable であることが示されたので、 $n \geq 3$ のとき、 $C_3 \square P_n$ は solvable である。 □

定理 8 $n \geq 3$ のとき、 $C_4 \square P_n$ は solvable である。

証明 定理 6 より、 $C_4 \square P_{2n} (n \geq 2)$ は solvable であるから、 $C_4 \square P_{2n+1} (n \geq 1)$ が solvable であることを示す。まず $C_4 \square P_3 (n \geq 1)$ が solvable であることを示す。 $C_4 \square P_3 (n \geq 1)$ の初期盤面での空の頂点を $(2, 1)$ とする。最初、手順 10 を用いる。

手順 10 $(4, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (2, 1)$ 、 $(4, 3) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (4, 1)$ 、 $(2, 2) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (4, 2)$ 、 $(2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 3)$ 、
 $(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1)$ 、 $(3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ 、 $(4, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (2, 3)$ 、
 $(4, 1) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (4, 3)$

手順 10 を終わると図 26 となる。

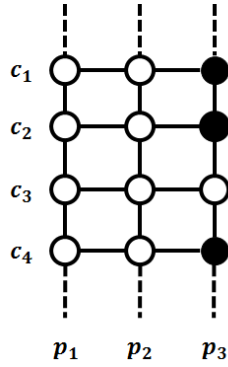


図 26 $C_4 \square P_3$ 手順 10 終了時点

この後、 $(1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3)$ 、 $(4, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (2, 3)$ とするとペグを一つにすることができる。

次に、 $C_4 \square P_5 (n \geq 1)$ を考える。 $C_4 \square P_5 (n \geq 1)$ の初期盤面での空の頂点を $(2, 1)$ とし、手順 26 を用いると C^1 と C^2 にペグは残っておらず、 C^3 のうち $(3, 3)$ にのみ空の頂点があり、 C^4 と C^5 に空の頂点は存在しない状況、つまり図 27 となる。

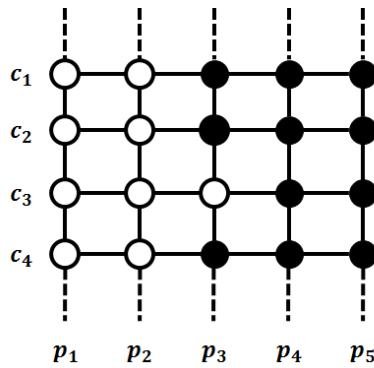


図 27 $C_4 \square P_5$ 手順 27 終了時点

このとき、 C^3 、 C^4 と C^5 にのみ着目すると $C_4 \square P_3 (n \geq 1)$ の初期盤面とみなすことができ、かつ空の頂点を $(2, 1)$ の状況と同様とみなすことができる。つまりこの後 $C_4 \square P_3 (n \geq 1)$ と同様にして解くことができる。パスの頂点数が 7 以降も同様にして解くことができるので $C_4 \square P_{2n+1} (n \geq 1)$ は solvable である。以上より、 $C_4 \square P_{2n} (n \geq 2)$ と $C_4 \square P_{2n+1} (n \geq 1)$ が solvable であることが示されたので、 $n \geq 3$ のとき、 $C_4 \square P_n$ は

solvable である。 □

定理 9 $n \geq 3$ のとき、 $C_n \square P_3$ は solvable である。

証明 まず $C_{2n+1} \square P_3 (n \geq 1)$ が solvable であることを示す。 $C_{2n+1} \square P_3 (n \geq 1)$ の初期盤面での空の頂点を $(1, 2)$ とする。最初、定理 2 より、 C_{2n+1}^1 は $(2n-1, 1)$ と $(2n+1, 1)$ にのみペグが残った状態にする事ができる。次に、 $(2n-2, 3) \rightarrow (2n-2, 2) \rightarrow (2n-2, 1)$ と動かすと図 28(a) となる。このとき定理 2 より、 C_{2n+1}^2 は $(2n, 2)$ と $(1, 2)$ にのみペグが残った状態にする事ができる。同様に C_{2n+1}^3 は $(2n, 3)$ と $(1, 3)$ にのみペグが残った状況、つまり図 28(b) の状況にする事ができる。

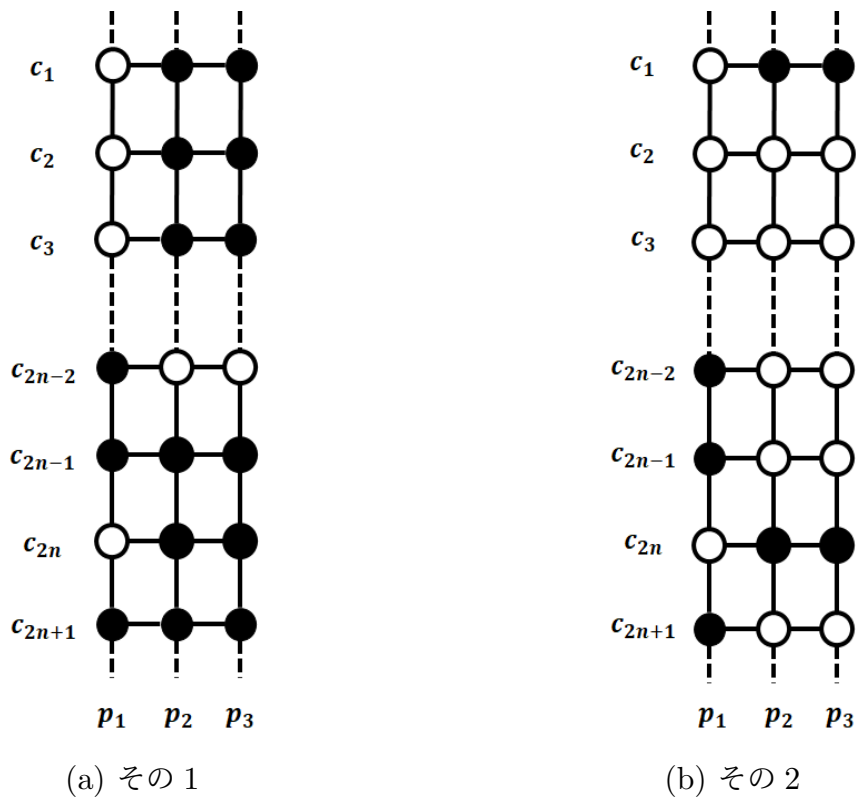


図 28 $C_{2n+1} \square P_3$ 途中経過

この後、 $(2n-2, 1) \rightarrow (2n-1, 1) \rightarrow (2n, 1)$ 、 $(2n+1, 1) \rightarrow (2n, 1) \rightarrow (2n-1, 1)$ 、 $(1, 3) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1)$ 、 $(2n, 3) \rightarrow (2n, 2) \rightarrow (2n, 1)$ 、 $(2n-1, 1) \rightarrow (2n, 1) \rightarrow (2n+1, 1)$ 、 $(2n+1, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1)$ と動かすとペグを一つにすることができる。

次に、 $C_{2n} \square P_3 (n \geq 2)$ が solvable であることを示す。 $C_{2n} \square P_3 (n \geq 2)$ の初期盤面での空の頂点を $(1, 2)$ とする。定理 2 より、 C_{2n}^1 は $(2n-1, 1)$ にのみペグが残った状態にす

る事ができる。次に、 $(1, 3) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1)$ と動かすと定理 2 より、 C_{2n}^2 は $(2n - 2, 2)$ にのみペグが残った状態にする事ができる。同様に C_{2n}^3 は $(2n - 2, 3)$ にのみペグが残った状態にする事ができる。

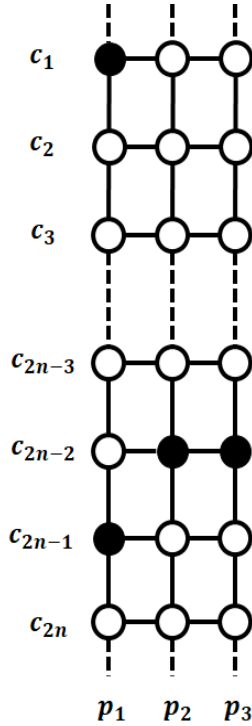


図 29 $C_{2n} \square P_3$ 途中経過

このとき図 29 となるので $(2n - 2, 3) \rightarrow (2n - 2, 2) \rightarrow (2n - 2, 1)$ 、 $(2n - 2, 1) \rightarrow (2n - 1, 1) \rightarrow (2n, 1)$ 、 $(1, 1) \rightarrow (2n, 1) \rightarrow (2n - 1, 1)$ と動かすとペグを一つにすることができる。以上より、 $n \geq 3$ のとき、 $C_n \square P_3$ は solvable である。□

定理 10 $C_5 \square P_4$ は solvable である。

証明 $C_5 \square P_4$ の初期盤面での空の頂点を $(3, 2)$ とする。 $(3, 4) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 2)$ 、 $(1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3)$ と動かすと、 P^1 は定理 1 より $(1, 2)$ にペグを残して解くことができる。同様に P^2 は $(2, 2)$ にペグを残して解くことができる。その後 $(3, 2) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 4)$ 、 $(1, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2)$ 、 $(3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ 、 $(3, 4) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 2)$ 、 $(5, 3) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (3, 3)$ 、 $(3, 3) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 1)$ 、と動かすと、 P^4 は定理 1 より $(4, 2)$ にペグを残して解くことができる。同様に P^5 は $(5, 2)$ にペグを残して解くことができる。その後 $(5, 2) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (3, 2)$ 、 $(3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ と動かすとペグを一つにすることができる。□

定理 11 $n \geq 2$ のとき、 $C_{2n} \square P_5$ は solvable である。

証明 $C_{2n} \square P_5$ の初期盤面での空の頂点を $(2, 3)$ とする。定理 2 より、 C_{2n}^3 は $(2n-1, 3)$ にのみペグが残った状態にする事ができる。次に、 $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 3)$ と動かすと定理 2 より、 C_{2n}^2 は $(2n-2, 2)$ にのみペグが残った状態にする事ができる。同様に C_{2n}^1 は $(2n-2, 1)$ にのみペグが残った状態にする事ができる。このとき、図 30(a) となるので $(2n-2, 1) \rightarrow (2n-2, 2) \rightarrow (2n-2, 3)$ 、 $(2n-2, 3) \rightarrow (2n-1, 3) \rightarrow (2n, 3)$ 、 $(1, 3) \rightarrow (2n, 3) \rightarrow (2n-1, 3)$ とすると、 C_{2n}^1 と C_{2n}^2 はすべて空の頂点で、 C_{2n}^3 は $(2n-1, 3)$ にのみペグが残った状態にする事ができる。この後、 $(1, 5) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (1, 3)$ 、 $(2, 5) \rightarrow (2, 4) \rightarrow (2, 3)$ 、...、 $(2n-2, 5) \rightarrow (2n-2, 4) \rightarrow (2n-2, 3)$ と動かすと、 C_{2n}^3 は $(2n, 3)$ のみが空の頂点という状況になるので、定理 2 より、 $(2n-3, 3)$ のみペグが残った状態にする事ができる。このとき図 30(b) となるので、 $(2n, 5) \rightarrow (2n, 4) \rightarrow (2n, 3)$ 、 $(2n-1, 5) \rightarrow (2n-1, 4) \rightarrow (2n-1, 3)$ 、 $(2n, 3) \rightarrow (2n-1, 3) \rightarrow (2n-2, 3)$ 、 $(2n-3, 3) \rightarrow (2n-2, 3) \rightarrow (2n-1, 3)$ と動かすとペグを一つにすることができる。 \square

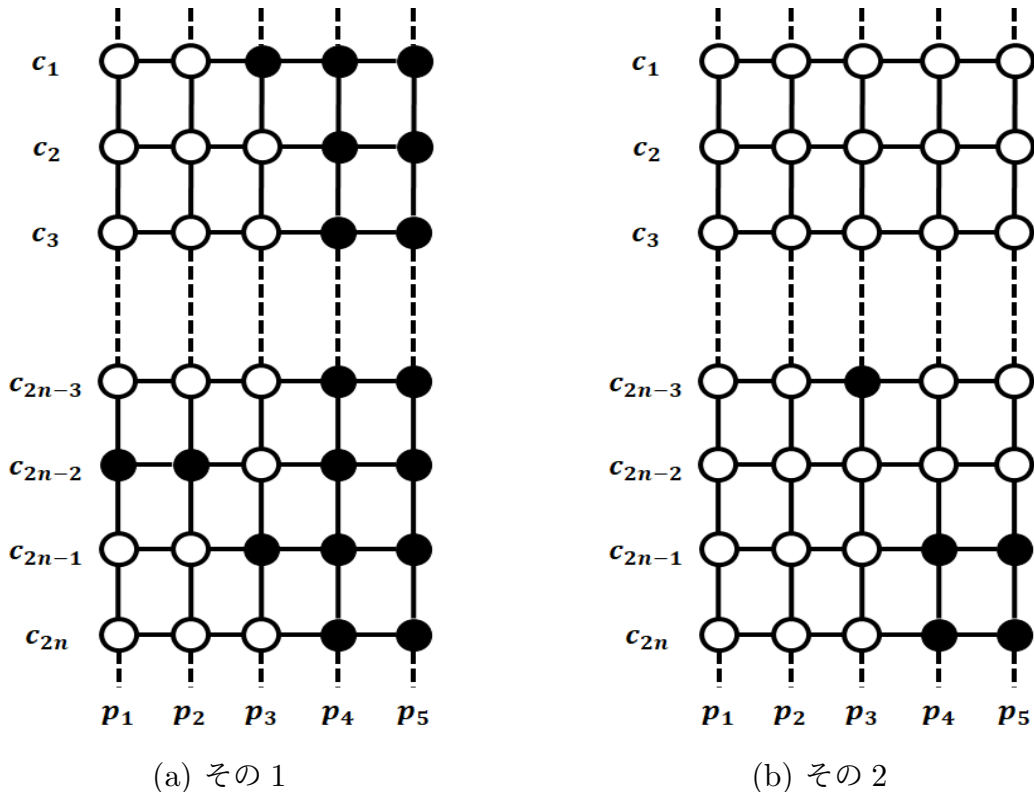


図 30 $C_{2n} \square P_5$ 途中経過

パスとサイクルの頂点数の solvable となる関係をまとめると以下の表のようになる。表内の数字は対応する定理を示す。現在空白となっているのは solvable かどうかまだ明らかにできていない頂点数となる。

表1 パスとサイクルの直積でできたグラフの可解性

| P \ C | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
|-------|---|---|----|----|---|----|---|----|-----|
| 3 | 7 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 4 | 7 | 8 | 10 | 6 | | 6 | | 6 | |
| 5 | 7 | 8 | | 11 | | 11 | | 11 | |
| 6 | 7 | 8 | | 6 | | 6 | | 6 | |
| 7 | 7 | 8 | | | | | | | |
| 8 | 7 | 8 | | 6 | | 6 | | 6 | |
| 9 | 7 | 8 | | | | | | | |
| 10 | 7 | 8 | | 6 | | 6 | | 6 | |
| ... | 7 | 8 | | | | | | | |

5 おわりに

本論文では1個の空の頂点を与えたときのグラフ上のペグソリティアが解をもつかどうかという問題がNP完全である事を証明した。また、一般化ペグソリティアでのパスとサイクルの直積でできたグラフの可解性を証明した。

グラフ上のペグソリティアにおいて、あるグラフが solvable であるかどうかという問題に対しての計算複雑さを証明することができなかつたため今後の課題としたい。また、一般化ペグソリティアにおいてパスとサイクルの直積でできたグラフにおいてどんな頂点数であっても solvable であるかどうかを証明すること、それに加えて与えられたグラフが解を持たないことを証明することも今後の課題である。

参考文献

- [1] Antoine Deza and Shmuel Onn, Solitaire Lattices, Graphs and Combinatorics, 18(2002) 227-243.

- [2] Christopher Jefferson, Angela Miguel, Ian Miguel and S.Armagan Tarim, Computers and Operations Research, 33(2006) 2935-2959.
- [3] Ryuhei Uehara and Shigeki Iwata, Generalized Hi-Q is NP-Complete, The transactions of the IEICE, E73-E(2)(1990) 270-273.
- [4] Robert A. Beeler and D. Paul Holiman, Peg Solitaire On Graphs, Discrete Mathematics, 311(2011) 2198-2202.
- [5] Robert A. Beeler and D. Paul Holiman, Peg solitaire on the windmill and the double star graphs, Australasian Journal of Combinatorics, 52(2012) 127-134.
- [6] John Engbers and Christopher Stocker, Reversible peg solitaire on graphs, Discrete Mathematics, 338(2015) 2014-2019.
- [7] 山本和明 武永康彦, グラフ上の一般化ペグソリティア, 電子情報通信学会総合大会, ISS-P-28(2017).
- [8] J. Plesnik, The NP-completeness of the hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two, information processing letters, 8, 4(1979) 199-201.
- [9] 伊藤和司, 一般化ペグソリティアの可解性, 電気通信大学卒業論文, (2018).

付録

$o_{5\alpha}$ と $o_{5\beta}$ の両方へ進行する事ができないことを深さ優先方式でペグの動かし方を総当たりで示す。最初の図が総当たりの初期の局面となっている。始めはペグの動かし方が一通りしかないのをそれを矢印の通りに動かした局面が次の図となっている。各図中の番号はその局面可能な動きを表す。左上は初期局面から何番目の動作を行ってきたかの系列を表す。総当たりの際、その動かし方をすると既に表した局面になる場合にその局面の番号の系列を動かし方に記して以降省略をする。この付録はこの頂点ガジェットのペグをすべて消しつつ $o_{5\alpha}$ と $o_{5\beta}$ の両方へ進行できないことを示すものであるから、明らかに条件を満たせない場合それ以上動かさずその状況で終えている。

また $o_{5\alpha}$ 側もしくは $o_{5\beta}$ 側から空の頂点が2つ連続している時、片側のペグを動かしても反対側のペグに影響を及ぼすことは無いのでその場合省略している。

