Vira Pratiwi
Nunuy Nurkaeti
Awiria

KONSEP DASAR MATEMATIKA

Konsep Dasar Matematika

KATA PENGANTAR

Buku ini merupakan salah satu bahan ajar dalam pelaksanaan kegiatan belajar mengajar pada mata kuliah Matematika Dasar yang ditujukan untuk mahasiswa Pendidikan Guru Sekolah Dasar.

Buku ini berisi konsep-konsep dasar matematika yang meliputi logika matematika, himpunan matematika, bilangan, barisan, deret, relasi, fungsi, geometri bangun datar, geometri bangun ruang, permutasi, kombinasi, peluang persamaan dan pertidaksamaan linear, persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.

Sesuai dengan tujuan dalam pembelajaran Matematika Dasar, diharapkan mahasiswa dapat memahami konsep-konsep Matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep, dan mengaplikasikannya di sekolah dasar sebagai calon guru yang professional khususnya untuk pembelajaran Matematika di SD, serta dapat meningkatkan kemampuan memecahkan masalah matematika maupun masalah yang ditemui dalam kehidupan sehari-hari.

Akhirnya kami menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penerbitan buku ini.

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR
DAFTAR ISI
DAFTAR TABEL
DAFTAR GAMBAR

BAB I LOGIKA MATEMATIKA
A. Pendahuluan 1
B. Pernyataan (Proposisi) 1
C. Operasi Dalam Logika 2
D. Pernyataan Majemuk yang Ekuivalen 12
E. Bentuk Lain Implikasi 14
F. Kombinasi Istimewa 15
G. Argumen dan Sembilan Aturan Inferensi 16
H. Kuantor dan Teori Kuatifikasi 20

BAB II HIMPUNAN MATEMATIKA
A. Pendahuluan 25
B. Pengertian Himpunan Matematika 25
C. Cara Menyajikan Himpunan 27
D. Jenis-jenis Himpunan Matematika 28
E. Hubungan Antar Himpunan 29
F. Diagram Venn 31
G. Operasi Himpunan 31

BAB III BILANGAN
A. Pendahuluan 41
B. Bilangan Asli 41
C. Bilangan Cacah 44
D. Bilangan Bulat 48
E. Bilangan Rasional 50

F. Bilangan Irasional 56

BAB IV BARISAN DAN DERET

A. Pendahuluan 59
B. Barisan 59
C. Deret 67

BAB V RELASI DAN FUNGSI

A. Pendahuluan 75
B. Himpunan Pasangan Berurutan 75
C. Perkalian Himpunan 76
D. Relasi 76
E. Fungsi 78
F. Grafik Suatu Fungsi 80
G. Grafik Fungsi Linear 81

BAB VI GEOMETRI BANGUN DATAR

A. Pendahuluan 91
B. Konsep Geometri 91
C. Kurva 98
D. Lingkaran 99
E. Poligon 99
F. Poligon Beraturan 100
G. Segitiga 101
H. Segiempat 102
I. Persegi Panjang 103
J. Persegi 103
K. Jajargenjang 106
L. Belah Ketupat 107
M. Layang-layang 108
N. Trapesium 110

BAB VII GEOMETRI BANGUN RUANG
A. Pendahuluan 115
B. Konsep Bangun Datar........ 115
C. Limas 116
D. Kerucut 117
E. Prisma 118
F. Tabung 119
G. Kubus 119
H. Balok 120
I. Bola 121

BAB VIII PENGUKURAN
A. Pendahuluan 126
B. Standar untuk Satuan Pokok Panjang 126
C. Standar untuk Satuan Pokok Waktu 127

BAB IX KOMBINASI, PERMUTASI, PELUANG
A. Pendahuluan 131
B. Kaidah Perkalian 132
C. Kombinasi 133
D. Permutasi 134
E. Peluang 136
F. Peluang Suatu Kejadian dan Penafsirannya 139
G. Peluang Gabungan Dua Kejadian 142

BAB X PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR
A. Pendahuluan 147
B. Persamaan Linear 147
C. Pertidaksamaan Linear 150

BAB XI PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

A. Pendahuluan 155
B. Persamaan Kuadrat 155
C. Pertidaksamaan Kuadrat 158

DAFTAR PUSTAKA

RIWAYAT PENULIS

DAFTAR TABEL

Tabel 1. 1 Nilai Kebenaran Negasi 3
Tabel 1. 2 Nilai Kebenaran Konjungsi 5
Tabel 1. 3 Nilai Kebenaran Disjungsi 7
Tabel 1. 4 Nilai Kebenaran Implikasi.. 9
Tabel 1. 5 Nilai Kebenaran Biimplikasi 11
Tabel 1. 6 Contoh Ekuivalen 13
Tabel 1. 7 Contoh Tautologi 15
Tabel 1. 8 Contoh Kontradiksi 16
Tabel 7.1 Rumus Luas Permukaan dan Volume Ruang............... 123
Tabel 9. 1 Contoh Percobaan 137

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Contoh Diagram Venn 31
Gambar 2. 2 Irisan Himpunan A dan B 32
Gambar 2. 3 Gabungan Himpunan A dan Himpunan B............... 33
Gambar 2. 4 Komplemen Himpunan A 34
Gambar 3. 1 Garis Bilangan Bulat... 52
Gambar 3. 2 Diagram Venn Bilangan 57
Gambar 5. 1 Contoh Grafik Fungsi 80
Gambar 5. 2 Grafik Fungsi Memotong Sumbu X dan Y.............. 83
Gambar 5. 3 Grafik X = 4... 84
Gambar 5. 4 Grafik Y = 2 84
Gambar 5. 5 Gradien Grafik Fungsi 86
Gambar 6. 1 Hubungan Antar Konsep 92
Gambar 6. 2 Ruas Garis AB 94
Gambar 6. 3 Garis Sejajar dan Berpotongan............................ 94
Gambar 6. 4 Garis Sejajar 95
Gambar 6. 5 Sudut Pelurus.. 96
Gambar 6. 6 Dua Sudut Kongruen 96
Gambar 6. 7 Sudut Siku-Siku... 97
Gambar 6. 8 Kurva Sederhana... 98

Gambar 6. 9 Kurva Tertutup dan Terbuka.................................. 99
Gambar 6.10 Lingkaran.. 99
Gambar 6. 11 Poligon.. 100
Gambar 6. 12 Segi Enam... 100
Gambar 6. 13 Segi Tiga... 101
Gambar 6. 14 Segi Empat.. 102
Gambar 6. 15 Persegi Panjang.. 103
Gambar 6. 16 Jajargenjang... 106
Gambar 6. 17 Belah Ketupat 108
Gambar 6. 18 Layang Layang 109
Gambar 6. 19 Jenis-Jenis Trapesium.. 110
Gambar 6. 20 Trapesium 111
Gambar 7. 1 Bangun Ruang 115
Gambar 7. 2 Limas 116
Gambar 7. 3 Kerucut 117
Gambar 7. 4 Prisma 118
Gambar 7. 5 Tabung.. 119
Gambar 7. 6 Kubus.. 120
Gambar 7. 7 Balok 120
Gambar 7. 8 Bola.. 121
Gambar 10. 1 Hubungan Dua Garis 150

BAB I
LOGIKA MATEMATIKA

A. Pendahuluan

Logika, penalaran, dan pernyataan saling berkaitan. Logika berasal dari bahasa Yunani yaitu "*logos*" diartikan sebagai pikiran, ucapan, atau ilmu pengetahuan. Logika adalah suatu cabang ilmu yang memisahkan secara tegas antara penalaran yang benar dan salah dengan menggunakan cara-cara dan prinsip-prinsip tertentu. Kegiatan penalaran tidak terlepas dari penarikan kesimpulan dalam suatu argumen maupun pernyataan. Berdasarkan uraian di atas dapat dikatakan bahwa logika matematika merupakan cabang ilmu matematika yang mengkaji penarikan kesimpulan yang sahih dan tidak sahih berdasarkan pernyataan-pernyataan matematikanya.

B. Pernyataan (Proposisi)

Pernyataan merupakan kalimat matematika tertutup yang hanya memiliki satu nilai kebenaran, benar saja atau salah saja. Pernyataan dilambangkan dengan huruf kecil seperti p, q, m, n, dan seterusnya. Contoh pernyataan:

p: Semua manusia akan mati.
q: Semua makhluk hidup membutuhkan udara.
a: Piring yang terbuat dari keramik akan pecah saat dijatuhkan.

b: 10 : 5 = 4

g: Bilangan prima adalah bilangan yang hanya memiliki dua faktor.

h: $\frac{6}{12}$ adalah pecahan paling sederhana dari $\frac{18}{24}$.

Sedangkan contoh yang bukan merupakan pernyataan adalah sebagai berikut ini.

1. 3 + x = 8
2. Kapan pulang?
3. Berangkat, yuk!
4. Duduk!
5. 8 – 2y > 1 , dimana y adalah bilangan bulat.

Nilai kebenaran suatu pernyataan dapat bernilai benar (B) atau salah (S). Lambang nilai kebenaran adalah "τ" dibaca "tau". Jika suatu pernyataan p bernilai benar maka dapat dilambangkan τ (p) = B. Adapun contohnya sebagai berikut ini:

s :	Semua hewan adalah makhluk hidup.	τ (s) = B
t :	8 – 4 = 5	τ (t) = S
u :	Semua anggota bilangan prima adalah ganjil.	τ (u) = S
v :	Bilangan genap habis dibagi dua.	τ (v) = B

C. Operasi dalam Logika

Sama halnya dalam bilangan, dalam logika juga terdapat operasi, namun dalam bentuk yang berbeda. Saat mempelajari bilangan, kita mengenal penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Dalam logika dikenal juga operasi. Operasi dalam logika ada dua macam yaitu operasi uner dan operasi biner. Jenis-jenis operasi dalam logika tersebut akan kita pelajari pada bagian ini.

1. Operasi Uner

Operasi uner merupakan operasi yang hanya melibatkan satu unsur atau satu pernyataan. Operasi uner dalam logika yaitu negasi "~". Negasi atau ingkaran merupakan suatu pernyataan yang bernilai salah jika pernyataan semula bernilai benar, dan pernyataan bernilai benar jika pernyataan semula bernilai salah. Contohnya:

p : Makhluk hidup akan mati.
~p : Makhluk hidup tidak akan mati.
q : Rena masuk sekolah.
~q : Rena tidak masuk sekolah.

Tabel 1. 1 Nilai Kebenaran Negasi

P	**~p**	**~(~p)**
B	S	B
S	B	S

2. Operasi Biner

Operasi biner merupakan operasi yang melibatkan dua unsur atau melibatkan dua pernyataan. Operasi biner dalam logika meliputi konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Namun, sebelum membahas konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi, terlebih dahulu dibahas mengenai pernyataan majemuk.

Pernyataan majemuk merupakan gabungan dua pernyataan tunggal atau lebih yang dirangkai dengan menggunakan kata penghubung. Misalnya:

Reno anak yang rajin belajar.
Reno anak yang patuh pada orang tua.

Kedua pernyataan tersebut dapat digabungkan dengan menggunakan kata penghubung “dan” sehingga menjadi:

Reno anak yang rajin dan patuh pada orang tua.

Pada bagian ini yang dibahas adalah pernyataan majemuk yang menggabungkan dua buah pernyataan tunggal menggunakan kata penghubung “**dan, atau, jika … maka …**, serta **jika … dan hanya jika …**” atau yang selanjutya kita sebut sebagai operasi biner konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.

a. Konjungsi

Dua buah pernyataan tunggal yang digabungkan dengan menggunakan kata hubung “dan” disebut operasi konjungsi. Operasi konjungsi dilambangkan dengan “$\wedge$”.

p : Dona membeli kue.
q : Dona membeli jus mangga.

Kedua pernyataan di atas digabungkan dengan menggunakan konjungsi sehingga menjadi:

Dona membeli kue dan jus mangga.

Jika dilambangkan maka bentuknya dimana p (pernyataan pertama) dan q (pernyataan kedua) sehingga p ∧ q. Adapun nilai kebenaran konjungsi akan bernilai benar jika kedua pernyataannya adalah benar. Nilai kebenaran konjungsi dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 1. 2 Nilai Kebenaran Konjungsi

p	**q**	**p ∧ q**
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh:

Tentukanlah nilai kebenaran untuk konjungsi dua pernyataan di bawah ini!

1) p : Jakarta adalah Ibu Kota Indonesia.
   q : Bandung adalah salah satu kota di Jawa Barat.
2) p : 343 adalah bilangan kubik.
   q : Semua segitiga memiliki tiga buah simetri lipat.
3) p : $8 + 5 = 9 + 3$
   q : Himpunan penyelesaian dari $x^2 + 4 = 8$ adalah $\{2\}$.
4) p : 33 adalah bilangan prima.
   q : Persegipanjang memiliki 2 buah simetri putar.

Jawaban:

1) τ (p) = B, τ (q) = B
p $\wedge$ q : Jakarta adalah Ibu Kota Indonesia dan Bandung adalah Ibu Kota Jawa Barat. (BENAR).
Jadi, τ (p $\wedge$ q) = B.

2) τ (p) = B, τ (q) = S
p $\wedge$ q : 343 adalah bilangan kubik dan semua segitiga memiliki tiga buanga simetri lipat (SALAH).
Jadi, τ (p $\wedge$ q) = S.

3) τ (p) = S, τ (q) = S
p $\wedge$ q : 8 + 5 = 9 + 3 dan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 4 = 8$ adalah {2}. (SALAH)
Jadi, τ (p $\wedge$ q) = S.

4) τ (p) = S, τ (q) = B
p $\wedge$ q : 33 adalah bilangan prima dan Persegipanjang memiliki 2 buah simetri putar. (SALAH)
Jadi, τ (p $\wedge$ q) = S

b. Disjungsi

Dua buah pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan menggunakan kata hubung “atau” dinamakan operasi disjungsi. Operasi disjungsi dilambangkan dengan “$\vee$”.

p : Dona membeli kue.
q : Dona membeli jus mangga.

Kedua pernyataan di atas digabungkan dengan menggunakan disjungsi sehingga menjadi:

Dona membeli kue atau jus mangga.

Pernyataan pertama adalah p dan pernyataan kedua adalah q sehingga dapat juga ditulis disjungsinya yaitu $p \vee q$. Nilai kebenaran disjungsi bernilai benar apabila salah satu pernyataan bernilai benar atau kedua pernyataannya benar. Nilai kebenaran disjungsi dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 1. 3 Nilai Kebenaran Disjungsi

p	**q**	**$p \vee q$**
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh:

Tentukanlah nilai kebenaran untuk disjungsi dua buah pernyataan di bawah ini!

1) s : $5 \times 4 = 20$
   t : 8 adalah bilangan genap.
2) s : Sudut sebuah segitiga besarnya 180°.
   t : Kubus memiliki 12 buah titik sudut.
3) s : Akar pangkat tiga dari 799 adalah 9.
   t : Alas sebuah kubus adalah segitiga.
4) s : Besar sudut siku-siku adalah 60°.
   t : 17 merupakan bilangan prima.

Jawaban:

1) τ (s) = B, τ (t) = B
   p ∨ q : 5 × 4 = 20 atau 8 adalah bilangan genap. (BENAR)
   Jadi, τ (p ∨ q) = B.
2) τ (s) = B, τ (t) = S
   p ∨ q : Sudut sebuah segitiga besarnya 180° atau kubus memiliki 12 buah titik sudut. (BENAR)
   Jadi, τ (p ∨ q) = B.
3) τ (s) = S, τ (t) = S
   p ∨ q : Akar pangkat tiga dari 799 adalah 9 atau alas sebuah kubus adalah segitiga. (SALAH)
   Jadi, τ (p ∨ q) = S
4) τ (s) = S, τ (t) = B
   p ∨ q : Besar sudut siku-siku adalah 60° atau 17 merupakan bilangan prima. (BENAR)
   Jadi, τ (p ∨ q) = B

c. Implikasi

Sebelum membahas mengenai implikasi secara lebih jauh, dapat dipahami terlebih dahulu contoh berikut. Riri akan tidur saat ia mengantuk. Apabila Riri tidak tidur artinya ia tidak mengantuk. Artinya Riri tidak mungkin tidur apabila ia tidak mengantuk. Konsep implikasi dalam kehidupan merupakan suatu sebab akibat, dimana hipotesisnya harus memiliki hubungan dengan konklusinya. Artinya pernyataan kedua merupakan akibat dari pernyataan pertama. Berbeda dengan kehidupan sehari-hari, dalam logika matematika tidak selamanya pernyataan kedua (kesimpulan) merupakan akibat dari pernyataan kedua (hipotesis).

Suatu pernyataan majemuk yang dihubungkan dengan kata hubung "jika … maka …" dinamakan operasi implikasi. Operasi implikasi dilambangkan dengan "→". Misalkan:

p : Riri mengantuk.

q : Riri akan tidur.

Dua buah pernyataan tunggal di atas dapat dihubungkan dengan menggunakan operasi implikasi yaitu:

Jika Riri mengantuk maka Riri akan tidur.

Pernyataan majemuk di atas dapat dituliskan sebagai berikut $p \rightarrow q$ dibaca "jika p maka q". Pernyataan p disebut sebagai hipotesis atau anteseden, sedangkan pernyataan q disebut konklusi/kesimpulan atau dinamakan juga sebagai konsekuen. Nilai kebenaran implikasi akan bernilai salah jika hipotesisnya bernilai benar tetapi konklusinya bernilai salah, sedangkan untuk kondisi lainnya bernilai benar. Untuk lebih memahami mengenai nilai-nilai kebenaran implikasi dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 1. 4 Nilai Kebenaran Implikasi

P	**q**	**p → q**
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contohnya:

Tentukanlah nilai kebenaran dari implikasi berikut ini!

1) Jika jumlah semua sudut persegi adalah 180° maka pohon mangga adalah jenis tumbuhan berakar tunggang.
2) Jika pohon jati dapat menggugurkan daunnya maka salah satu faktor dari 12 adalah 5.
3) Jika 8 adalah bilangan prima maka 10 adalah bilangan ganjil.
4) Jika besar sudut lurus adalah 170° maka 2 merupakan bilangan prima genap.

Jawaban:

1) Jika jumlah semua sudut persegi adalah 180° maka pohon mangga adalah jenis tumbuhan berakar tunggang.
   Hipotesis bernilai benar, konklusi bernilai benar, sehingga implikasi bernilai **BENAR**.
2) Jika pohon jati dapat menggugurkan daunnya maka salah satu faktor dari 12 adalah 5.
   Hipotesis bernilai benar, konklusi bernilai salah, sehingga implikasi bernilai **SALAH**.
3) Jika 8 adalah bilangan prima maka 10 adalah bilangan ganjil.
   Hipotesis bernilai salah, konklusi bernilai salah, sehingga implikasi bernilai **BENAR**.
4) Jika besar sudut lurus adalah 170° maka 2 merupakan bilangan prima genap.

Hipotesis bernilai salah, konklusi bernilai benar, sehingga implikasi bernilai **BENAR**.

d. Biimplikasi

Pernyataan majemuk yang dinotasikan dengan "↔" merupakan operasi biimplikasi yang artinya "jika dan hanya jika". Pernyataan biimplikasi dikatakan juga sebagai pernyataan bikondisional atau memiliki syarat ganda. Sebagai contoh:

Tumbuhan akan mati jika dan hanya jika tumbuhan adalah makhluk hidup.

Pernyataan di atas memiliki syarat ganda, dimana tumbuhan akan mati jika dan hanya jika tumbuhan tersebut merupakan makhluk hidup. Jika tumbuhan bukan makhluk hidup maka dapat dipastikan bahwa tumbuhan tidak akan mati. Jadi, biimplikasi merupakan pernyataan majemuk dalam bentuk p jika dan hanya jika q sehingga dilambangkan p ↔ q. Nilai kebenaran operasi biimplikasi adalah bernilai benar jika masing-masing kedua pernyataannya bernilai benar atau bernilai salah. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 1. 5 Nilai Kebenaran Biimplikasi

p	**q**	**p ↔ q**
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh:

Tentukanlah nilai kebenaran dari biimplikasi berikut ini!

1) 5 + 3 = 10 jika dan hanya jika 10 adalah bilangan genap.
2) 6 adalah bilangan genap jika dan hanya jika akar pangkat tiga dari 216 adalah 8.
3) $\frac{1}{2}$ adalah pecahan paling sederhana dari $\frac{6}{12}$ jika dan hanya jika FPB dari 1 dan 2 adalah 1.
4) 10 – 8 = 4 jika dan hanya jika 4 + 8 = 10.

Jawaban:

1) 5 + 3 = 10, τ (p) = S
   10 adalah bilangan genap, τ (p) = B
   τ (p ↔ q) = S
2) 6 adalah bilangan genap, τ (p) = B
   Akar pangkat tiga dari 216 adalah 8, τ (p) = S
   τ (p ↔ q) = S
3) $\frac{1}{2}$ adalah pecahan paling sederhana dari $\frac{6}{12}$, τ (p) = B
   FPB dari 1 dan 2 adalah 1, τ (p) = B
   τ (p ↔ q) = B
4) 10 – 8 = 4, τ (p) = S
   4 + 8 = 10, τ (p) = S
   τ (p ↔ q) = B

D. Pernyataan Majemuk yang Ekuivalen

Pernyataan majemuk yang ekuivalen adalah dua pernyataan majemuk yang memiliki nilai kebenaran yang sama. Ekuivalensi dilambangkan dengan "≡". Jika sebagian pernyataan majemuk ditukar dengan pernyataan lain Sebagai contoh p ∨ q ≡ q ∨ p dimana nilai kebenaran dari kedua pernyataan majemuk tersebut sama.

Tabel 1. 6 Contoh Ekuivalen

p	$\vee$	q	$\equiv$	q	$\vee$	p
B	B	B		B	B	B
B	B	S		B	B	S
S	B	B		S	B	B
S	S	S		S	S	S

Nilai kebenaran dari pernyataan majemuk semula akan sama dengan nilai kebenaran majemuk yang baru jika sebagian atau keseluruhan majemuk tersebut ditukar dengan pernyataan lain yang ekuivalensi logis. Terdapat beberapa aturan penukaran yaitu:

1. Teorema de Morgan (deM)
   $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
2. Assosiasi (Ass)
   $[(p \vee q) \vee r)] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
   $[(p \wedge q) \wedge r)] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$
3. Komutatif (Kom)
   $p \vee q \equiv q \vee p$
   $p \wedge q \equiv q \wedge p$

4. Distribusi (Dist)
   $[(p \vee q) \wedge r)] \equiv [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$

$[(p \wedge q) \vee r)] \equiv [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

5. Negasi Rangkap (NR)

   $p \equiv \sim\sim p$

6. Kontraposisi (Kont.)

   $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

7. Implikasi Material (IM)

   $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

8. Ekuivalensi Material (EM)

   $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

   $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

9. Eksportasi (Eksp)

   $[(p \wedge q) \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

10. Tautologi (Taut)

   $p \equiv (p \wedge p)$

   $p \equiv (p \vee p)$

E. Bentuk Lain Implikasi

Bentuk lain implikasi mencakup **konvers, invers,** dan **kontraposisi**. Ingat kembali bentuk implikasi yaitu:

Jika p maka q.

Berdasarkan bentuk implikasi di atas dapat ditentukan bentuk lain implikasinya sebagai berikut:

Konvers : *Jika q maka p.*

Invers : *Jika ~p maka ~q.*

Kontraposisi : *Jika ~q maka ~p.*

Contoh:

Implikasi : Jika hari ini terjadi badai maka sekolah libur.

Konvers : Jika sekolah libur maka hari ini terjadi badai.
Invers : Jika hari ini tidak terjadi badai maka sekolah tidak libur.
Kontraposisi : Jika sekolah tidak libur maka hari ini tidak terjadi badai.

F. Kombinasi Istimewa

Kombinasi istimewa mencakup tautologi, kontradiksi, dan kontingensi. Tautologi merupakan pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya benar semua, contoh $p \vee \sim p$. Kontradiksi adalah pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya salah semua, contoh $p \wedge \sim p$. Kontingensi merupakan pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya campuran meliputi benar dan salah, contohnya $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, dan $p \leftrightarrow q$ sebagaimana yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya.

Tabel 1.7 Contoh Tautologi

p	$\vee$	**~p**
B	B	S
B	B	S
S	B	B
S	B	B

Tabel 1.8 Contoh Kontradiksi

p	$\wedge$	**~p**

B	S	S
B	S	S
S	S	B
S	S	B

G. Argumen dan Sembilan Aturan Inferensi

Rangkaian pernyataan-pernyataan yang memiliki ungkapan pernyataan inferensi disebut argumen. Kata kunci dalam argument yaitu adanya kata jadi, oleh karena itu, sehingga, dan lain sebagainya yang menunjukkan pada suatu penarikan kesimpulan. Pernyataan-pernyataan sebelum kata "jadi" disebut premis, sedangkan setelah kata jadi disebut konklusi atau kesimpulan. Contohnya yaitu:

Premis

- Jika sedang ujian, maka mahasiswa wajib memakai baju hitam putih.
- Jika hari ini hari pertama ujian, maka mahasiswa akan terlihat tegang.
- Mahasiswa sedang ujian dan terlihat tegang.

Konklusi

- Jadi, mahasiswa wajib memakai baju hitam putih saat ujian dan hari ini merupakan hari pertama ujian.

Validitas argumen tidak melihat kebenaran atau kesalahan dari pernyataan-pernyataan pembentuknya. Suatu argumen dikatakan valid jika konklusinya atau kesimpulannya merupakan akibat logis dari premis-premisnya. Contohnya:

Premis 1 : Jakarta adalah Ibu Kota Indonesia.
Premis 2 : Mangga adalah salah satu tumbuhan berbiji keping dua.
Konklusi : Jadi, setiap makhluk hidup akan mati.

Argumen di atas tidak valid (invalid), dikarenakan konklusinya bukan merupakan akibat logis dari premis-premisnya, walaupun nilai kebenaran dari premis-premisnya bernilai benar. Contoh lainnya yaitu:

Premis 1 : Semua planet ditempati oleh makhluk hidup.
Premis 2 : Manusia tinggal di planet bumi.
Konklusi : Jadi, manusia adalah makhluk hidup.

Argumen di atas bernilai valid karena konklusinya merupakan akibat logis dari premis-premisnya. Terdapat dua jenis aturan inferensi yaitu inferensi deduktif dan induktif. Inferensi deduktif adalah penarikan kesimpulan yang tepat, bukan didasarkan pada kemungkinan. Argumen-argumen penyusunnya dinamakan argumen deduktif, adapun contohnya:

Semua hewan adalah makhluk hidup.
Sapi adalah makhluk hidup.
Jadi, sapi adalah hewan.

Sedangkan, inferensi induktif yaitu suatu penarikan kesimpulan berdasarkan atas kemungkinan dari premis menuju konklusinya.

Argumen-argumen penyusunnya dinamakan argumen induktif, adapun contohnya:
Semua benda yang berwarna merah muda itu lucu menurut Rina.
Rina banyak memiliki benda warna merah muda.
Jadi, semua benda itu lucu.

Untuk mengetahui validitas argumen yang mengandung dua pernyataan tunggal dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran dan menurunkan konklusi argumen. Dengan menggunakan tabel kebenaran yaitu mendaftar nilai-nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataannya. Sedangkan dengan menurunkan konklusi argumennya yaitu dengan menggunakan rangkaian argumen dasar yang telah valid dapat menurunkan konklusi berdasarkan premis-premisnya. Terdapat sembilan aturan inferensi yaitu:

1. Modus Ponen (MP)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

2. Modus Tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\sim q \qquad\qquad} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

3. Silogisme Hipotetik (SH)

$$\begin{array}{l} \underline{p \rightarrow q \qquad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

4. Silogisme Disjungtif (SD)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

5. Simplifikasi (Simp)

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \\ \hline \therefore p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p \wedge q \\ \\ \hline \therefore q \end{array}$$

6. Konjungsi (Konj)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

7. Dilemma Konstruktif (DK)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

8. Dilemma Destruktif (DD)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \therefore \sim p \vee \\ \sim r \end{array}$$

9. Addisi (Add)

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore p \vee q$$

H. Kuantor dan Teori Kuantifikasi

Pernyataan berkuantor merupakan bentuk pernyataan yang memiliki konsep kuantitas. Terdapat dua jenis kuantor yaitu kuantor umum (universal) merupakan kuantor yang menggunakan konsep atau semua dinotasikan dengan "∀" dan kuantor khusus (eksistensial) dinotasikan dengan "∃" mengandung konsep beberapa, sebagian, atau terdapat.

Contoh kuantor umum:

1. Semua manusia akan meninggal.
2. Setiap guru wajib upacara hari Senin.
3. Setiap tumbuhan adalah makhluk hidup.
4. Untuk setiap x, x akan mati.
5. Untuk setiap x, Fx

$$(\forall x)Fx$$

Contoh kuantor khusus:

1. Ada guru di satu desa paling sedikit satu orang.
2. Sebagain guru adalah perempuan.
3. Beberapa guru memiliki mobil.
4. Beberapa x, Mx

$$(\exists x)Mx$$

Nilai kebenaran kuantifikasi umum bernilai benar jika dan hanya jika semua contoh subtitusinya benar. Sedangkan, kuantifikasi khusus bernilai benar jika dan hanya jika minimal ada satu contoh subtitusinya bernilai benar.

LATIHAN SOAL

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan memberikan uraian jawaban yang paling tepat!

1. Tentukan kalimat-kalimat berikut yang merupakan dan bukan pernyataan, jika kalimatnya berupa pernyataan tentukan benar atau salah!
   a. 52 adalah bilangan prima genap.
   b. $5x + 2 = 3y$
   c. Bangun, hari ini masuk sekolah!
   d. Jumlah besar sudut segitiga adalah 180^0.
   e. Mudah-mudahan hari ini tidak hujan.
2. Buatlah tabel kebenaran untuk mengetahui nilai kebenaran pernyataan berikut ini!
   a. $\sim p \vee (q \wedge r)$
   b. $(p \rightarrow q) \wedge \sim r$
   c. $[(a \leftrightarrow b) \vee c] \wedge \sim a$
3. Buatlah pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya menunjukkan tautologi, kontradiksi, dan kontingensi!
4. Susunlah bukti formal validitas argument berikut dengan menggunakan aturan inferensi dan penukaran!
   a. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
      A
      $\sim C \;/\; \therefore \sim S$
   b. H
      $(H \vee I) \rightarrow J \;/\; \therefore H \wedge J$

5. Bubuhkan kuantor pada setiap pernyataan di bawah ini dan gunakan singkatan yang disarankan untuk setiap pernyataannya, jika:

   Bx: adalah seorang aktor.

   Mx : ganteng.

   Tx: terlatih dengan baik.

   Maka tentukanlah pernyataan di bawah ini:

   a. Aktor-aktor yang ganteng terlatih dengan baik.
   b. Beberapa aktor terlatih dengan baik jika mereka ganteng.
   c. Tak akan ada aktor yang ganteng kecuali jika mereka terlatih dengan baik.
   d. Beberapa aktor ganteng yang tidak terlatih dengan baik tidak ganteng.
   e. Bebera aktor ganteng meskipun tidak terlatih dengan baik.

BAB II
HIMPUNAN MATEMATIKA

A. Pendahuluan

Saat kita akan membuang sampah terdapat beberapa tempat sampah dengan warna dan nama berbeda. Biasanya tertulis “sampah organik” dan “sampah anorganik”. Plastik bekas makanan yang dimakan harus dimasukan ke salah satu tempat sampah tersebut sesuai dengan jenisnya. Manakah tempat sampah yang tepat untuk sampah plastik? Secara tidak langsung saat membuang sampah plastik pada tempat sampah yang sesuai, telah terjadi pengelompokkan sampah berdasarkan jenisnya. Sampah plastik harus ditempatkan pada tempat sampah anorganik bukan organik. Hal tersebut berhubungan dengan himpunan yang identik dengan pengelompokkan. Pada bagian ini akan dipelajari mengenai pengertian himpunan matematika, jenis-jenis himpunan matematika, cara menyajikan himpunan, operasi himpunan, diagram venn, dan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel.

B. Pengertian Himpunan Matematika

Himpunan (set) adalah kumpulan objek-objek yang dikelompokkan berdasarkan sifat/keadaan yang sama maupun aturan tertentu sehingga dapat didefinisikan secara jelas. Contohnya:

1. Himpunan yang terdiri dari kepik, belalang, dan kupu-kupu.

2. Himpunan bilangan genap kurang dari 10.
3. Himpunan mahasiswa PGSD Ubhara Jaya yang usianya kurang dari 20 tahun.

Nama suatu himpunan ditulis dengan huruf kapital, misalnya "A, B" dan untuk menyatakan anggota-anggotanya dituliskan di dalam kurung kurawal "{}". Misalnya: *Himpunan yang terdiri dari kepik, belalang, dan kupu-kupu* dapat dinyatakan dengan A = {kepik, belalang, kupu-kupu}.

Objek di dalam suatu himpunan disebut elemen, anggota, atau unsur. Anggota-anggota dari suatu himpunan dilambangkan dengan huruf kecil, misal "a, b." Penulisan anggota dalam suatu himpunan hanya dituliskan anggota-anggota yang berlainan atau berbeda saja. Misalnya: *Himpunan huruf-huruf yang membentuk kata "bambu."* Himpunan tersebut dapat dinotasikan dengan B = {b, a, m, u}. Dari kata bambu terdapat dua huruf "b" sehingga penulisannya cukup satu kali saja.

Untuk menunjukkan suatu anggota himpunan kita dapat menotasikannya dengan menggunakan simbol "$\in$". Diketahui himpunan A = { 1, 2, 3} dapat dikatakan bahwa "*1 adalah anggota himpunan A*" atau dinotasikan $1 \in A$. Sedangkan untuk menunjukkan suatu objek yang bukan merupakan anggota himpunan tersebut dapat menggunakan simbol "$\notin$". Dari himpunan A di atas diketahui "*4 bukan anggota himpunan A*" atau dinotasikan $4 \notin A$.

C. Cara Menyajikan Himpunan

Terdapat beberapa cara menyajikan himpunan yaitu dengan:

1. Mendaftarkan anggota-anggotanya.

   Menyajikan himpunan dengan mendaftarkan anggota-anggotanya adalah menuliskan anggota-anggota dari himpunan tersebut.Contohnya:

   H = {1,3,5,7,9}

   B = {a,b,c,d,e,f}
2. Menggunakan kata-kata.

   Menyajikan himpunan dengan menggunakan kata-kata yaitu menuliskan himpunan dalam bentuk kata-kata ataupun kalimat. Contohnya:

   H = {himpunan bilangan ganjil kurang dari sepuluh}

   B = (himpunan enam huruf latin pertama}

   Z = {himpunan semua hilangan bulat}
3. Notasi pembentuk himpunan.

   Menyajikan himpunan dengan menggunakan notasi pembentuk himpunan adalah dengan notasi atau aturan sehingga menyatakan himpunan yang dimaksud. Contohnya:

   H = $\{x|1 \leq x \leq 10$, x adalah bilangan ganjil} atau dapat juga dinotasikan dengan H = $\{x|1 \leq x \leq 10, x \in$ bilangan ganjil} dibaca "H adalah himpunan semua x sedemikian hingga x lebih dari sama dengan 1 dan kurang dari sama dengan 10, x adalah bilangan ganjil."

D. Jenis-jenis Himpunan Matematika

Terdapat beberapa jenis himpunan matematika meliputi:

1. Himpunan Kosong

   Suatu himpunan juga memungkinkan tidak memiliki anggota atau disebut sebagai himpunan kosong yang dilambangkan dengan **"{ } atau Ø"**. Misalnya bilangan prima diantara 23 dan 27, sehingga dapat dinyatakan dengan P = { } atau dengan Ø.
2. Himpunan yang Memiliki Satu Anggota

   Himpunan ada yang hanya memiliki satu anggota dinamakan singleton. Contohnya himpunan nama bulan yang diawali huruf S, sehingga penulisannya A = {September}.
3. Himpunan Terhingga dan Tak Hingga

   Suatu himpunan dikatakan sebagai himpunan terhingga jika terdapat bilangan cacah yang dapat menyatakan jumlah dari banyaknya himpunan tersebut. Namun, jika tidak ada bilangan cacah yang dapat menyatakan banyaknya jumlah anggota himpunan tersebut, maka himpunan itu merupakan himpunan tak hingga. Misalnya himpunan A disebut himpunan terhingga jika ada bilangan cacah "k" sedemikian hingga "n (A) = k". Jika tidak ada bilangan cacah seperti itu maka A merupakan himpunan tak hingga. Penulisannya dapat dilakukan dengan membubuhkan tanda titik sebanyak tiga, seperti A = {1, 2, 3, 4, …}.

   Untuk menyatakan banyaknya jumlah anggota suatu himpunan dinotasikan dengan "n(b)". Contohnya suatu himpunan B = {1, 3, 5, 7, 9} sehingga banyaknya anggota himpunan B dapat dinotasikan dengan n(B) = 5. Banyaknya jumlah anggota menunjukkan bahwa himpunan tersebut merupakan himpunan terhingga.

4. Himpunan Semesta

Himpunan semesta merupakan himpunan yang memuat semua elemen yang dibicarakan. Himpunan semesta dilambangkan dengan "**S**". Himpunan semesta disebut juga semesta pembicaraan atau himpunan universum. Dalam himpunan semesta yang paling kecil adalah dirinya sendiri. Misalnya adalah A = {a, b, c) jika A adalah suatu himpunan maka A adalah semesta A karena semua anggota A adalah anggota A.

Contoh:

K = {a, b, c}

L = {b, c, d}

S = {a, b, c, d, e, f, … y, z}

Himpunan S merupakan himpunan semesta dari himpunan K dan himpunan L.

E. Hubungan Antar Himpunan

Terdapat beberapa hubungan antar dua himpunan meliputi:

1. Himpunan Bagian

Jika suatu himpunan merupakan bagian dari himpunan lain maka disebut sebagai himpunan bagian. Misalnya:

A = {1,3,5}

B = {1,2,3,4,5,6}

Dapat dikatakan bahwa himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B atau dituliskan dengan “A C B”. Jika bukan merupakan himpunan bagian maka dinyatakan dengan “⊄” sehingga “A ⊄ B”.

2. Himpunan Saling Lepas

   Himpunan saling lepas atau disebut juga himpunan asing jika kedua himpunan tidak mempunyai anggota persekutuan atau setiap anggota A bukan anggota B dan setiap anggota B bukan A. Contohnya:

   K = {1, 3, 5, 7}

   L = {2, 4, 6, 8}

   A dan B dikatakan saling lepas dan dapat disimbolkan dengan **A//B** dibaca “A lepas dengan B.”

3. Himpunan yang Sama

   Himpunan yang sama adalah himpunan yang anggota-anggotanya sama ditulis “A = B.” Contohnya:

   A = {0, 1, 2, 3}

   B = {3, 2, 1, 0}

   Sehingga dapat dinyatakan A = B.

4. Himpunan Ekuivalen

   Dua buah himpunan disebut ekuivalen jika kedua anggotanya dapat dipasangkan satu-satu/anggotanya berkorespondensi satu-satu atau jika banyak anggotanya sama dimana n(A) = n(B). Ditulis A ≡ B dibaca “A ekuivalen dengan B.” Contoh himpunan ekuivalen:

   P = {a, b, c, d}

   Q = {1, 2, 3, 4}

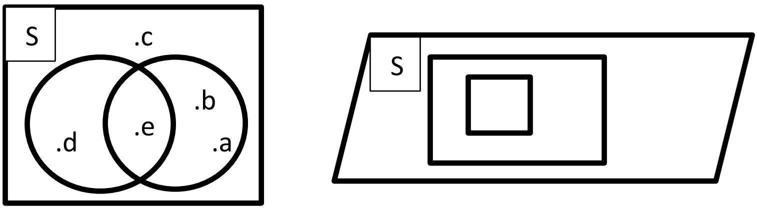
Himpunan P ekuivalen dengan Q dimana n(P) = n(Q). Selain itu, dua buah himpunan tak terhingga bias dikatakan ekuivalen karena berkorepondensi satu-satu. Contoh:

C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, …}

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, …}

F. Diagram Venn

Suatu diagram yang menunjukkan suatu hubungan diantara sekelompok benda atau objek dinamakan diagram venn atau diagram set. Diagram venn atau diagram set dapat digambarkan seperti di bawah ini.



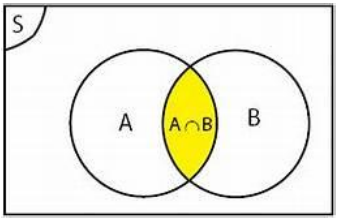
Gambar 2. 1 Contoh Diagram Venn

G. Operasi Himpunan

Operasi himpunan meliputi operasi uner dan biner. Operasi uner dalam himpunan mencakup irisan, gabungan, komplemen, jumlah (tambah), selisih (kurang), dan perkalian.

1. Irisan

Irisan dua himpunan adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan persekutuan dari kedua himpunan. Lambang irisan adalah ∩ dan diagram vennnya adalah:



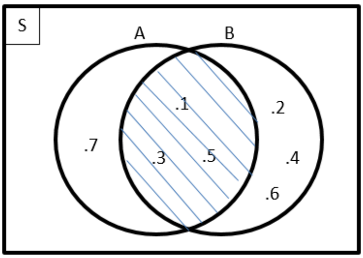
Gambar 2. 2 Irisan Himpunan A dan B

Misalnya:

A = {1, 3, 5, 7}

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Irisan himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan A ∩ B = {1, 3, 5} atau dengan notasi pembentuk himpunan yaitu A ∩ B = {x | x ∈ A dan x ∈ B}. Dapat juga dinyatakan dalam diagram venn, sebagai berikut ini.



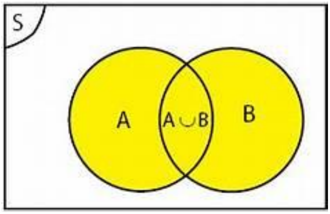
Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. Jika AC B maka A∩B = A
2. Jika A=B maka A∩B = A = B
3. Jika A dan B himpunan saling lepas, maka A∩B=ϕ

4. Jika A∩B = ϕ maka A dan B merupakan himpunan-himpunan saling lepas atau saling asing.

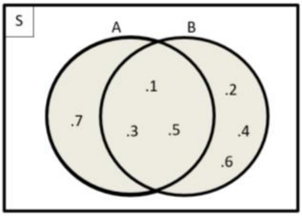
2. Gabungan

Gabungan dua buah himpunan adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A dan himpunan B. Gabungan himpunan dinyatakan dengan U dan bentuk diagram venn untuk gabungan himpunan adalah sebagai berikut ini.



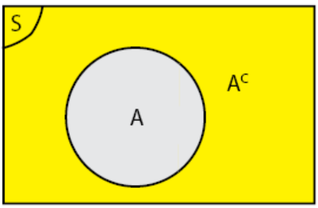
Gambar 2. 3 Gabungan Himpunan A dan Himpunan B

Misalnya:
A = {1, 3, 5, 7}
B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Gabungan himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} atau dengan notasi pembentuk himpunan yaitu A U B = {x | x ∈ A atau x ∈ B}. Dapat pula dinyatakan dalam diagram venn berikut ini.



3. Komplemen

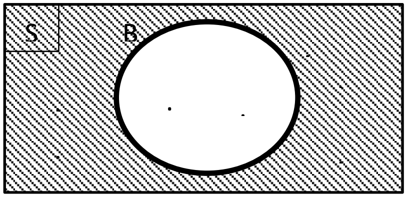
Komplemen suatu himpunan adalah himpunan dari semua anggota himpunan semesta yang bukan merupakan anggota suatu himpunan tertentu. Misalnya S adalah suatu himpunan semesta dan A adalah suatu himpunan, dapat dikatakan bahwa komplemen himpunan A adalah anggota semua himpunan semesta yang bukan merupakan anggota himpunan A. Komplemen suatu himpunan disimbolkan dengan disimbolkan A^C atau A‘, dibaca “A komplemen” dapat dinotasikan **A‘ ={x|x ϵ S atau x ∉ A}.** Bentuk diagram untuk komplemen suatu himpunan adalah:



Gambar 2. 4 Komplemen Himpunan A

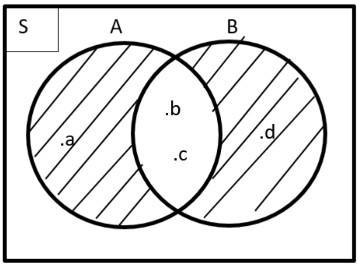
Contoh:

Diketahui himpunan semesta S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan himpunan B = {4, 6} sehingga B^C = {1, 2, 3, 5}. Adapun diagram vennnya adalah:



4. Jumlah (Tambah)

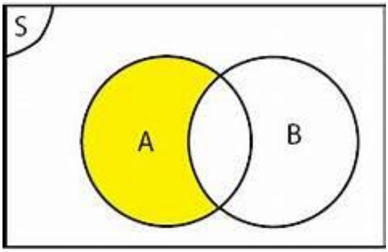
   Penjumlah dua himpunan adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya termasuk ke dalam dua anggota himpunan tersebut tetapi bukan anggota himpunan yang merupakan irisannya. Diagram venn untuk penjumlahan himpunan A + B dapat digambarkan sebagai berikut ini.



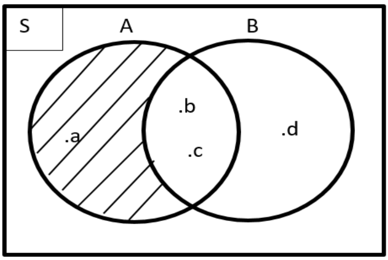
Berdasarkan diagram venn di atas, hasil penjumlahan himpunan A + B adalah bagian diagram yang diarsir. Penjumlahan himpunan A + B dapat dinyatakan dalam notasi pembentuk himpunan yaitu:

$A + B = \{x|x \in A$ atau $x \in B$, dan $x \notin (A \cap B)\}$ atau
$A + B = \{a, d\}$

5. Selisih (Kurang)
   Selisih dua himpuan adalah himpunan dari suatu anggota himpunan yang bukan merupakan anggota himpunan lainnya. Untuk lebih jelasnya bahwa selisih himpunan A – B adalah himpunan anggota A yang bukan merupakan anggota himpunan B. Diagram venn yang menunjukkan selisih dua himpunan adalah sebagai berikut ini.



Sebagai contoh selisih himpunan A = {a, b, c} dan B = {b, c, d} hasilnya dapat dinotasikan dengan $A\text{-}B = A \cap B^C$ atau $A\text{-}B=\{x|x \in A \wedge x \notin B\}$. Adapun diagram vennnya adalah:



Berdasarkan diagram venn di atas diketahui bahwa A – B = {a}.

6. Perkalian

   Perkalian dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan semua pasangan berurutan (a, b) dengan a ϵ A dan b ϵ B sehingga dapat ditulis $A \times B = \{(a,b) | a \epsilon A \text{ dan } b \epsilon B\}$. Dalam pasangan berurutan (a,b) dimana pasangan a dan dengan a pada urutan pertama dan b pada urutan kedua. Pasangan berurutan (a,b) akan berbeda dengan pasangan berurutan (b,a). Contoh:

   $A = \{1, 2, 3\}$

   $B = \{x, y\}$

   Tentukan $A \times B$!

   Jawaban:

   $A \times B = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y)\}$

   Bagaimana jika $B \times A$?

   Maka hasilnya yaitu:

   $B \times A = \{(x,1), (x,2),(x,3), (y,1), (y,2), (y,3)\}$

Pada operasi himpunan terdapat sifat-sifat operasi himpunan. Adapun sifat-sifat operasi himpunan meliputi sifat komutatif, asosiatif, distributif, dan komplemen.

1. Sifat Komutatif

   $A \cap B = B \cap A$

   $A \cup B = B \cup A$

2. Sifat Asosiatif

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3. Sifat Distributif

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. Sifat Komplemen

$A \cap A^c = \emptyset$

$A \cup A^c = S$

$(A^c)^c = A$

$S^c = \emptyset$

$\emptyset^c = S$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

LATIHAN SOAL

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan memberikan uraian jawaban yang paling tepat!

1. Nyatakan himpunan berikut ke dalam notasi pembentuk himpunan!
   a. W = {2, 4, 6, 8, 10}
   b. K = {2}
   c. L = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
2. Tentukan irisan, gabungan, selisih, dan jumlah, himpunan A = {1, 2, 3, 6} dan B {1, 2, 4} serta buatlah diagram vennnya!
3. Tentukan perkalian dua himpunan berikut:
   X = {himpunan faktor bilangan 8}
   Y = {himpunan 5 abjad pertama huruf latin}
4. Diketahui himpunan K = {1, 2, 3, 6}, L = {2, 4, 6, 8} dan M = {1, 2, 3, 4}. Tentukannlah serta buat diagram vennya!
   a. $K \cap (L \cup M)$
   b. $(K \cap L)^c$
5. Banyaknya siswa di kelas A adalah 50 orang. Berdasarkan hasil survey diketahui bahwa 30 orang menyukai sepak bola dan 23 orang menyukai tenis meja. Jika terdapat 2 orang siswa yang tidak menyukai kedua olah raga tersebut dan 25 orang yang hanya menyukai sepak bola, tentukanlah:

   a. Banyaknya siswa yang hanya menyukai tenis meja!

b. Banyaknya siswa yang menyukai kedua olah raga tersebut!

BAB III
BILANGAN

A. Pendahuluan

Bilangan adalah salah satu konsep dalam matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran serta membilang banyaknya suatu objek atau benda. Untuk menyatakan suatu bilangan digunakan angka atau lambang bilangan. Sebagai contoh untuk menunjukkan banyaknya jari tangan digunakan lambang bilangan atau angka yang banyaknya sama dengan jumlah jari tangan yaitu sepuluh “10”. Terdapat berberapa jenis bilangan dalam matematika. Pada bagian ini dibahas mengenai bilangan asli, bilangan cacah, bilangan bulat, bilangan rasional, dan bilangan irasional.

B. Bilangan Asli

Bilangan yang dimulai dari satu “1” atau bilangan bulat positif dan bukan nol dinamakan sebagai bilangan asli. Bilangan asli disebut juga sebagai *finger number*. Hal ini dikarenakan bilangan yang dapat dihitung dengan jari. Bilangan asli dilambangkan dengan “**A**” atau dalam bahasa Inggris “$\mathbb{N}$” yaitu *natural number*. Himpunan bilangan asli dapat ditulis A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …}.

Operasi bilangan asli meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Penjumlahan adalah menambahkan atau menggabungkan sekelompok bilangan atau lebih sehingga menjadi bilangan yang merupakan jumlah. Penjumlahan dilambangkan dengan "+". Contohnya 5 buah bola dijumlahkan dengan 6 bola maka hasilnya yaitu 11 dari hasil menambahkan 5 dengan 6. Contoh lainnya:

1. 3 + 10 = 13
2. 65 + 7 = 72
3. 23 + 78 = 101

Pengurangan merupakan kegiatan mengurangkan suatu bilangan. Pengurangan disimbolkan dengan tanda "- ". Dalam pengurangan, bilangan yang dikurangi dinamakan *minuend*, bilangan pengurang dinamakan *subtrahend* dan hasilnya/jawabannya adalah *reminder*. Jika **a – b = c** maka a dinamakan *minuend*, b dinamakan *subtrahend*, dan c dinamakan *reminder*. Contoh pengurangan bilangan asli yaitu;

1. 67 – 17 = 50
2. 23 – 14 = 9
3. 89 – 72 = 17

Perkalian merupakan operasi yang dipelajari setelah penjumlahan dan pengurangan. Perkalian merupakan operasi penskalaan suatu bilangan dengan bilangan lain. Tanda operasi perkalian adalah "×". Contoh perkalian bilangan asli yaitu:

1. 5 × 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30
2. 3 × 7 = 7 + 7 + 7 = 21
3. 4 × 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12

Pembagian merupakan operasi matematika yang dipelajari setelah penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Pembagian dapat dikenalkan sebagai pengurangan berulang. Tanda operasi pembagian adalah "÷ atau : ". Contoh pembagian pada bilangan asli yaitu:

1. $12 : 4 = 12 - 4 - 4 - 4 = 0$ jadi $12 : 4 = 3$
2. $10 : 5 = 10 - 5 - 5 = 0$ jadi $10 : 5 = 2$
3. $30 : 6 = 30 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 = 0$ jadi $30 : 6 = 5$

Dalam operasi bilangan asli terdapat beberapa sifat seperti komutatif, asosiatif, dan distributif.

1. Sifat Komutatif

   Sifat komutatif pada operasi bilangan asli yaitu pada penjumlahan dan perkalian. Sifat komutatif atau sifat pertukaran pada operasi penjumlahan yaitu "$a + b = b + a$" dan pada perkalian yaitu "$a \times b = b \times a$". Contoh:

   a. $8 + 7 = 15$
      $7 + 8 = 15$
      Jadi, $8 + 7 = 7 + 8$
   b. $3 \times 4 = 12$
      $4 \times 3 = 12$
      Jadi, $3 \times 4 = 4 \times 3$

2. Sifat Asosiatif

   Sifat asosiatif atau pengelompokkan terjadi pada penjumlahan dan perkalian yang melibatkan tiga buah bilangan. Sifat asosiatif pada penjumlahan yaitu "$a + (b + c) = (a + b) + c$" dan pada perkalian yaitu "$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$". Contoh:

   a. $7 + (3 + 5) = 7 + 8 = 15$
      $(7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15$

Jadi, $7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5$

b. $4 \times (2 \times 3) = 4 \times 6 = 24$

$(4 \times 2) \times 3 = 8 \times 3 = 24$

Jadi, $4 \times (2 \times 3) = (4 \times 2) \times 3$

3. Sifat Distributif

Sifat distributif atau penyebaran terdapat pada operasi perkalian. Sifat distributif yaitu “$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ atau $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$. Contoh:

a. $3 \times (2 + 4) = 3 \times 6 = 18$

$(3 \times 2) + (3 \times 4) = 6 + 12 = 18$

Jadi, $3 \times (2 + 4) = (3 \times 2) + (3 \times 4)$

b. $2 \times (5 - 3) = 2 \times 2 = 4$

$(2 \times 5) - (2 \times 3) = 10 - 6 = 4$

Jadi, $2 \times (5 - 3) = (2 \times 5) - (2 \times 3)$

C. Bilangan Cacah

Bilangan yang menyatakan cacah anggota dinamakan bilangan cacah. Bilangan cacah merupakan bilangan asli dan nol atau bilangan bilangan bulat positif dan nol. Himpunan bilangan cacah dapat dituliskan $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ sehingga bilangan asli dapat dikatakan himpunan bagian (subset) bilangan cacah $\mathbf{A \subseteq C}$. Bilangan cacah dilambangkan dengan “C” atau dengan **“$\mathbb{N}$-0”** dalam bahasa Inggris bilangan cacah disebut *whole number*.

Sama halnya dengan bilangan asli, operasi pada bilangan cacah mencakup penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Pengenalan operasi hitung tersebut dilakukan seacara bertahap mulai dari penjumlahan hingga pembagian. Terdapat beberapa sifat operasi pada penjumlahan dan perkalian bilangan cacah sebagai berikut ini.

1. **Sifat Operasi Penjumlahan Bilangan Cacah**

   Operasi penjumlahan bilangan cacah memiliki sifat-sifat tertentu yaitu:

   a. Tertutup

      Bilangan cacah yang dijumlahkan dengan bilangan cacah hasilnya adalah suatu bilangan cacah. Contoh:

      0 + 18 = 18 (bilangan cacah)

      109 + 34 = 143 (bilangan cacah)

   b. Komutatif

      Komutatif atau pertukaran dalam penjumlahan bilangan cacah dimana bilangan cacah **a + b = b + a**. Contoh:

      0 + 18 = 18 + 0

      5 + 10 = 10 + 5

   c. Asosiatif

      Sifat asosiatif atau pengelompokkan yaitu untuk penjumlahan tiga buah bilangan cacah atau lebih dapat dikelompokkan sehingga berlaku **(a +b) + c = a + (b +c)**. Contoh:

      0 + (6 + 7) = (0 + 6) + 7

      9 + (18 + 7) = (9 + 18) + 7

   d. Mempunyai Unsur Identitas

Hasil penjumlahan bilangan 0 dengan suatu bilangan cacah a adalah bilangan cacah itu sendiri, sehingga berlaku **0 + a = a + 0 = a**. Contoh:

0 + 100 = 100

34 + 0 = 34

2. Sifat Operasi Perkalian Bilangan Cacah

Operasi perkalian bilangan cacah memiliki sifat komutatif, asosiatif, distributif, perkalian dengan nol, dan unsur identitas. Untuk lebih jelasnya diuraikan di bawah ini.

a. Komutatif

Sama halnya dalam operasi penjumlahan, sifat komutatif (pertukaran) operasi perkalian dapat dinyatakan dengan "**a × b = b × c**". Contoh:

3 × 4 = 4 + 4 + 4 + 4 = 12

4 × 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12

Jadi, 3 × 4 = 4 × 3

b. Asosiatif

Sifat asosiatif atau pengelompokkan dalam operasi bilangan cacah dapat dinyatakan dengan **"(a × b) × c = a × (b × c)".** Contoh:

(2 × 3) × 4 = 6 × 4 = 24

2 × (3 × 4) = 2 × 12 = 24

Jadi, (2 × 3) × 4 = 2 × (3 × 4)

c. Distributif

Sifat distributif (penyebaran) dalam perkalian bilangan cacah dapat dinyatakan dengan "**a × (b + c) =**

(a × b) + (a × c) atau a × (b - c) = (a × b) - (a × c)".
Contoh:
$3 \times (2 + 4) = (3 \times 2) + (3 \times 4)$
$= 6 + 12$
$= 18$
Berikan contoh lainnya!

d. Perkalian dengan Nol

Setiap bilangan cacah yang dikalikan dengan bilangan nol, hasilnya adalah nol sehingga berlaku "**a × 0 = 0**" untuk setiap a bilangan cacah. Contoh:
$3 \times 0 = 0$
$0 \times 100 = 0$

e. Unsur Identitas

Setiap bilangan cacah bukan nol yang dikalikan dengan 1 hasilnya adalah bilangan cacah itu sendiri, sehingga berlaku "**a × 1 = a**" untuk setiap a bilangan cacah. Contoh:
$35 \times 1 = 35$
$1 \times 8 = 8$

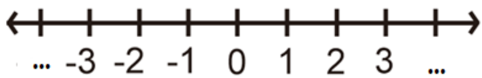
Pada bilangan cacah terdapat beberapa himpunan bilangan, diantaranya:

1. Himpunan semua bilangan asli yaitu A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, …}.
2. Himpunan semua bilangan cacah yaitu C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, …}.
3. Himpunan semua bilangan cacah genap yaitu G = {0, 2, 4, 6, 8, …}.

4. Himpunan semua bilangan cacah ganjil yaitu J = {1, 3, 5, 7, 9, …}.
5. Himpunan semua bilangan prima yaitu P = {2, 3, 5, 7, 11, …}. Bilangan prima adalah bilangan yang hanya memiliki dua faktor yaitu satu dan bilangan itu sendiri.
6. Himpunan semua bilangan kuadrat yaitu K = {0, 1, 4, 9, 16, …}. Bilangan kuadrat adalah bilangan yang diperoleh dengan mengalikan suatu bilangan cacah dengan bilangan cacah itu sendiri.

D. Bilangan Bulat

Bilangan bulat merupakan bilangan yang terdiri dari bilangan bulat positif, nol, dan bilangan bulat negatif. Bilangan bulat merupakan bagian dari bilangan rasional. Bilangan bulat mencakup bilangan asli, cacah, prima, komposit, nol, dan negatif. Secara umum himpunan bilangan bulat dapat dituliskan: B = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}.



Gambar 3. 1 Garis Bilangan Bulat

Terdapat beberapa sifat operasi hitung pada bilangan bulat yaitu:

1. Tertutup

   Untuk setiap penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bilangan bulat hasilnya adalah suatu bilangan bulat. Contoh:
   38 + (-34) = 4 (hasilnya bilangan bulat)
   -3 – 7 = -11 (hasilnya bilangan bulat)

$-5 \times 8 = -40$ (hasilnya bilangan bulat)

2. Komutatif

   Untuk penjumlahan dan perkalian bilangan bulat berlaku sifat pertukaran atau komutatif dimana setiap a dan b bilangan bulat maka "$a + b = b + a$ atau $a \times b = b \times a$".

3. Asosiatif

   Penjumlahan dan perkalian bilangan bulat memiliki sifat asosiatif dimana "$a + (b + c) = (a + b) + c$" begitu pun dalam perkalian. Contoh:

   $3 + (-2 + 5) = (3 + (-2)) + 5$

   $-5 \times (2 \times 3) = (-5 \times 2) \times 3$

4. Distributif

   Sifat distributif pada operasi hitung bilangan bulat berlaku untuk perkalian terhadap penjumlahan dan pengurangan dimana "$a \times (b + c) = (a \times b) + (a\times c)$ dan $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$. Contoh:

   $-3 \times (-4 + 5) = (-3 \times (-4)) + (-3 \times 5)$

   $2 \times (-3 - 4) = (2 \times (-3)) - (2 \times(-4))$

5. Mempunyai Unsur Identitas

   Unsur identitas pada operasi hitung bilangan bulat terdapat pada operasi penjumlahan dan perkalian. Pada penjumlahan setiap bilangan bulat yang dijumlahkan dengan nol maka hasilnya adalah bilangan bulat itu sendiri "$a + 0 = a$ dimana a adalah bilangan bulat". Pada perkalian bilangan bulat setiap bilangan bulat a jika dikalikan dengan satu maka hasilnya adalah bilangan bulat itu sendiri "$a \times 1 = a$".

E. Bilangan Rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$ dimana a dan b bilangan bulat dan b ≠ 0. Merujuk pada definisi tersebut, pecahan merupakan bilangan rasional karena dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$. Bilangan rasional mencakup bilangan asli, bilangan cacah, bilangan bulat, bilangan prima, pecahan, dan bilangan-bilangan lain yang menjadi subset bilangan rasional. Contoh bilangan rasional:

$2 = \frac{2}{1} = \frac{10}{2}$

$0{,}25 = \frac{25}{100}$

$-7 = -\frac{14}{2}$

$\frac{1}{2}$

Pada bagian ini secara khusus akan dibahas mengenai pecahan mencakup jenis-jenis pecahan dan operasi pada pecahan. Pecahan merupakan bilangan diantara dua buah bilangan cacah yang dapat ditulis dalam $\frac{a}{b}$ dimana a dan b adalah bilangan cacah dan b ≠ 0 serta a sebagai pembilang dan b sebagai penyebut. Terdapat beberapa jenis pecahan yaitu:

1. Pecahan Biasa

   Pecahan biasa adalah pecahan yang dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$. Contohnya $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{7}$ dan lain-lain.

2. Pecahan Murni dan Tidak Murni

   Pecahan murni atau pecahan sejati merupakan pecahan yang dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana nilai a lebih kecil dari nilai b. Contohnya $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{3}$, dan lain-lain. Pecahan tidak murni adalah pecahan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana nilai a lebih besar dari b. Contohnya $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{4}$, dan lain-lain, sehingga pecahan tidak murni dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan campuran.

3. Pecahan Senilai

   Pecahan senilai adalah pecahan yang nilainya sama. Untuk mengetahui pecahan senilai dari suatu pecahan dapat diketahui dengan mengalikan bilangan yang sama. Misalnya pecahan senilai dari $\frac{1}{2}$ adalah $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, dan seterusnya. Pecahan-pecahan tersebut diperoleh dengan mengalikan bilangan yang sama dengan pembilang dan penyebutnya, yaitu:

   $\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$

   $\frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$

   Jadi, untuk menentukan pecahan senilai dari sebuah pecahan $\frac{a}{b}$ dapat dirumuskan $\boldsymbol{\frac{a}{b} \times \frac{h}{h}}$.

4. Pecahan Paling Sederhana

   Pecahan paling sederhana adalah pecahan yang pembilang dan penyebutnya memiliki FPB satu atau pembilang dan penyebut relatif prima. Contohnya $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{13}$, dan lain-lain.

5. Pecahan Senama

Pecahan yang memiliki penyebut sama dinamakan sebagai pecahan senama. Contohnya $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, dan $\frac{5}{5}$.

6. Pecahan Campuran

Pecahan campuran adalah pecahan yang terdiri dari bilangan bulat dan pecahan. Bentuk pecahan campuran dapat dinyatakan dalam $a\frac{b}{c}$ dimana a adalah bilangan bulat dan c $\neq$ 0. Suatu pecahan biasa dapat dinyatakan atau diubah ke dalam bentyuk pecahan campuran jika nilai pembilang lebih besar dari pada nilai penyebutnya.

7. Pecahan Desimal, Persen, dan Permil

Pecahan yang basis bilangannya sepuluh merupakan pecahan desimal. Contoh pecahan desimal adalah 0,5; 0,3; dan 0, 25. Pecahan desimal dapat diubah ke dalam bentuk pecahan biasa dengan mengubahnya menjadi bentuk persepuluh, perseratus, dan seterusnya. Contohnya 0, 5 bentuk pecahan biasanya adalah $\frac{5}{10}$.

Persen atau perseratus adalah pecahan yang berpenyebut seratus. Persen dilambangkan dengan %. Contohnya 50 % dinyatakan dalam bentuk pecahan biasa $\frac{50}{100}$. Setiap pecahan yang dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana b $\neq$ 0 dapat dinyatakan dalam bentuk persen yaitu dengan

mengubahnya menjadi pecahan berpenyebut seratus persen. Contohnya:
$\frac{1}{2} \times \frac{50}{50} = \frac{50}{100}$ = 50% atau dengan mengalikannya dengan 100%.

Permil merupakan pecahan yang memiliki penyebut seribu atau perseribu dan dilambangkan dengan ‰. Setiap pecahan $\frac{a}{b}$ dimana b ≠ 0 dapat dinyatakan dalam bentuk permil dengan mengubah penyebutnya dalam bentuk perseribu atau mengalikannya dengan seribu permil. Contohnya:
$\frac{1}{2} \times \frac{500}{500} = \frac{500}{1000}$ = 500% atau dengan mengalikannya dengan 1000%.

Operasi pada pecahan mencakup penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Adapun keempat operasi ini adalah sebagai berikut:

1. Penjumlahan

Menjumlahkan pecahan berpenyebut sama dilakukan dengan menjumlahkan pembilangnya. Contohnya:
$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$
Menjumlahkan pecahan yang penyebutnya berbeda dilakukan dengan menyamakan penyebutnya terlebih dahulu. Menyamakan penyebut dapat dilakukan dengan mengalikan masing-masing pecahan dengan suatu bilangan sehingga penyebut pecahan-pecahan tersebut sama atau dengan mencari KPK dari setiap penyebutnya.

Cara 1: menyamakan penyebut dengan suatu bilangan yang sama.

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2} = \left(\frac{2\times 2}{5\times 2}\right)+\left(\frac{1\times 5}{2\times 5}\right)$$
$$= \frac{4}{10} + \frac{5}{10}$$
$$= \frac{9}{10}$$

Cara 2: menyamakan penyebut dengan mencari KPK dari penyebut-penyebutnya.

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2} = \dots$$

Cari terlebih dahulu KPK dari 5 dan 2!

Diketahui KPK dari 5 dan 2 adalah 10. Sehingga diubah pecahannya menjadi penyebut sepuluh, karena penyebutnya diubah menjadi berpenyebut sepuluh maka pembilangnya pun berubah.

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2} = \frac{2(10:5)}{10}+\frac{1(10:2)}{10}$$
$$= \frac{4}{10} + \frac{5}{10}$$
$$= \frac{9}{10}$$

2. Pengurangan

Aturan operasi pengurangan pada pecahan sama dengan aturan penjumlahan. Jika pecahan berpenyebut sama yaitu dilakukan pengurangan antara pembilangnya, sedangkan jika pecahan penyebutnya berbeda dilakukan penyamaan penyebut terlebih dahulu.

Contoh operasi pengurangan dengan penyebut sama:

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

Contoh operasi pengurangan dengan penyebut beda:

Cara 1: menyamakan penyebut dengan suatu bilangan yang sama.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = (\frac{2 \times 4}{3 \times 4}) - (\frac{1 \times 3}{4 \times 3})$$
$$= \frac{8}{12} - \frac{3}{12}$$
$$= \frac{5}{12}$$

Cara 2: menyamakan penyebut dengan mencari KPK dari penyebut-penyebutnya.

Terlebih dahulu dicari KPK dari 3 dan 4.

KPK dari 3 dan 4 adalah 12.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2(12:3)}{12} - \frac{1(12:4)}{12}$$
$$= \frac{8}{12} + \frac{3}{12}$$
$$= \frac{5}{12}$$

3. Perkalian

   Perkalian pecahan dilakukan dengan mengalikan pembilang dengan pembilang dan penyebut dengan penyebut. Contoh:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2 \times 1}{3 \times 4} = \frac{2}{12}$$

4. Pembagian

   Pembagian pada pecahan dilakukan dengan mengubah operasi pembagian menjadi perkalian. Hal ini dilakukan karena pembagian merupakan perkalian dengan invers, misal a : b = a × b^{-1} atau 4 : 5 = 4 × $\frac{1}{5}$ dimana $\frac{1}{5}$ merupakan invers dari 5. Jadi:

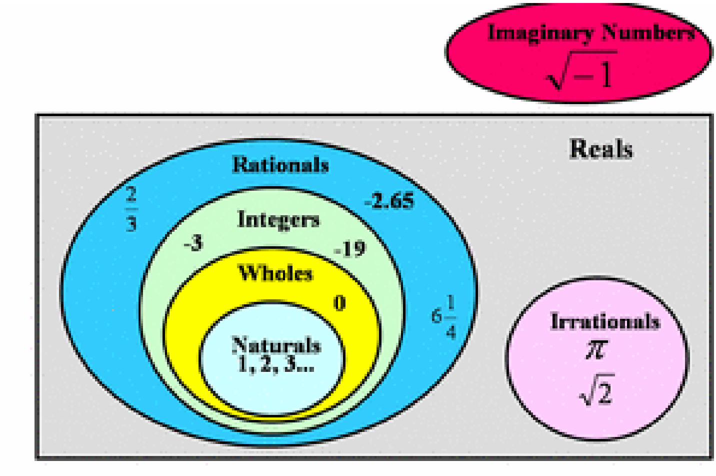
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

F. Bilangan Irasional

Secara umum bilangan real dibagi menjadi dua jenis bilangan yaitu bilangan rasional dan bilangan irasional. Pada bagian sebelumnya telah dibahas mengenai bilangan asli, cacah, bulat, dan rasional. Pada bagian ini akan dibahas mengenai bilangan irasional.

Bilangan irasional merupakan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$ atau tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan. Selain itu, dapat pula dikatakan bahwa bilangan irasional merupakan bilangan riil yang tak dapat dibagi (atau hasil baginya tak pernah berhenti. Lambang bilangan irasional yaitu “Q” dibaca Quotient. Contoh bilangan irasional yaitu:

1. $\pi =$ 3,1415926535 …
2. e = 2,7182818 ...
3. $\sqrt{2}$
4. $\sqrt{3}$



Sumber: https://www.thinglink.com/scene/

Gambar 3. 2 Diagram Venn Bilangan

LATIHAN

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menguraikan jawaban yang paling tepat!

1. Jelaskan yang termasuk bilangan rasional?
2. Sifat operasi apa saja yang dimiliki oleh bilangan bulat?
3. Mengapa $\sqrt{3}$ termasuk bilangan irasional?
4. Buatlah diagram venn mengenai hubungan bilangan asli, cacah, bulat, rasional dan irasional?
5. Apa yang dimaksud dengan bilangan prima dan komposit? Bagaimana posisi kedua jenis bilangan tersebut dalam diagram venn?

BAB IV
BARISAN DAN DERET

A. Pendahuluan

Saat kita melewati suatu toko pakaian terdapat beberapa pakaian yang dipajang dengan ukuran yang berbeda. Pakaian-pakaian tersebut dipajang berdasarkan kesamaan jenisnya. Sama halnya seperti bilangan yang dapat disusun dan dikelompokkan berdasarkan pola dan aturan tertentu. Pada bagian ini akan dibahas mengenai barisan dan deret bilangan. Meliputi barisan aritmatika dan geometri serta deret aritmetika dan geometri.

B. Barisan

Barisan suatu bilangan merupakan kumpulan atau himpunan suatu bilangan yang memiliki aturan atau pola tertentu. Perhatikanlah barisan bilangan di bawah ini!

2, 4, 6, 8, …

5, 10, 20, 40 …

Untuk mengisi bilangan kelima pada barisan bilangan pertama dapat dengan mudah ditemukan yaitu 10 yang diperoleh dari hasil menjumlahkan bilangan 8 dengan 2 dimana setiap bilangan pada barisan tersebut bertambah dua untuk setiap bilangan selanjutnya. Lalu, bagaimana dengan bilangan-bilangan pada barisan bilangan kedua? Ya, pada barisan kedua dapat ditentukan bilangan selanjutnya adalah 80 yang diperoleh berdasarkan hasil perkalian bilangan sebelumnya dengan 2. Terdapat perbedaan antara barisan pertama dan kedua. Pada barisan pertama bilangan-bilangan dalam barisan tersebut diperoleh dengan menjumlahkan suku sebelumnya dengan suatu bilangan tertentu (dalam hal ini bilangan 2), sedangkan pada barisan kedua setiap bilangan pada barisan tersebut diperoleh dengan mengalikan bilangan sebelumnya dengan suatu bilangan tertentu (dalam hal ini bilangan 2).

Setiap bilangan pada barisan bilangan dinamakan sebagai suku-suku. Suku suatu bilangan dinyatakan dalam U_n dimana n adalah bilangan asli. Suku ke-1 suatu barisan bilangan dinyatakan dengan U_1, suku ke-2 yaitu U_2 hingga suku ke-n U_n.

1. Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah barisan yang memiliki selisih antara suku yang berurutannya memiliki selisih yang tetap. Selisih dari dua suku yang berurutan dalam barisan aritmatika dinamakan beda **(b).** Perhatikan barisan aritmatika di bawah ini!

2, 7, 12, 17, 22 …

Berdasarkan barisan di atas dapat diketahui bahwa $U_1 = 2$, $U_2 = 7$, $U_3 = 12$, $U_4 = 17$, dan $U_5 = 22$. Selisih atau beda dari barisan aritmatika di atas dapat diketahui dengan mengurangkan dua suku yang berdekatan, misalnya:

$U_2 - U_1 = 7 - 2 = 5$

$U_3 - U_2 = 12 - 7 = 5$

$U_4 - U_3 = 17 - 12 = 5$

$U_5 - U_4 = 22 - 17 = 5$

Dari uraian di atas dapat diketahui bahwa untuk menentukan beda dalam suatu bilangan aritamtika dapat menggunakan rumus:

$$\boldsymbol{U_n - U_{n-1} = b}$$

Suatu barisan aritmatika jika a merupakan suku pertama dalam barisan aritmatika dan b adalah selisih dua suku yang berdekatan maka barisan aritmatika dapat dinyatakan dengan:

$$\begin{array}{cccccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & \dots & U_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a, & a+b, & a+2b, & a+3b, & \dots & a+(n-1)b \end{array}$$

Oleh karena itu, untuk menentukan suku ke-n dalam suatu barisan aritmatika dapat menggunakan rumus:

$$\boldsymbol{U_n = a + (n - 1)b}$$

Contoh:

a. Tentukan suku ke-7 dari barisan aritmatika di bawah ini!
1, 8, 15, 22, 29 …

b. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan aritmatika di bawah ini!
2, 4, 6, 8, 10, …

c. Diketahui secara berturut-turut suku ke-3 dan suku ke-6 barisan aritmatika adalah 17 dan 35. Tentukan suku ke-8 barisan aritmatika tersebut!

Jawaban:

a. Diketahui:

$U_1 = 1$

$U_2 = 8$

$b = U_2 – U_1 = 8 – 1 = 7$

Ditanyakan: $U_7 = \ldots$?

Jawab:

$U_n = a + (n – 1)b$

$U_7 = 1 + (7 – 1)7$

$U_7 = 1 + 42$

$U_7 = 43$

Jadi, suku ke-7 barisan tersebut adalah 43.

b. Diketahui:

$a = 2$

$b = U_2 – U_1 = 4 – 2 = 2$

Ditanyakan: rumus suku ke-n = …?

Jawab:

$U_n = a + (n – 1)b$

$U_n = 2 + (n -1)2$

$U_n = 2 + 2n – 2$

$U_n = 2n$

Jadi, rumus suku ke-n barisan aritmatika tersebut adalah $U_n = 2n$.

c. Diketahui:

$U_3 = 17$
$U_6 = 35$
Ditanyakan: $U_8 = \dots$?
Jawab:
$U_3 = 17 \rightarrow 17 = a + 2b$
$U_6 = 35 \rightarrow 35 = a + 5b$
Lakukan eliminasi dan subtitusi untuk mengetahui suku pertama dan bedanya!

$$\begin{array}{l} \cancel{a} + 2b = 17 \\ \underline{\cancel{a} + 5b = 35}\ - \\ \quad -3b = -18 \\ \qquad b = 6 \end{array}$$

Subtitusikan nilai dalam persamaan ke satu atau ke dua!

$$\begin{array}{ll} a + 2b & = 17 \\ a + 2.\ 6 & = 17 \\ a + 12 & = 17 \\ a = 17 - 12 & \\ a = 5 & \end{array}$$

Sehingga dapat diketahui rumus suku ke-8 yaitu:
$U_8 = a + 7b$
$U_8 = 5 + 7.\ 6$
$U_8 = 5 + 42$
$U_8 = 47$
Jadi, suku ke-7 barisan aritmatika tersebut adalah 47.

2. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah barisan yang memiliki perbandingan yang tetap antara dua suku yang berdekatannya. Perbandingan yang tetap dalam barisan geometri dinamakan “rasio” atau dilambangkan dengan “r”. Rasio barisan geometri dapat diketahui dengan menggunakan rumus:

$$\boldsymbol{\frac{U_n}{U_{n-1}} = \textit{rasio atau r}}$$

Suatu barisan geometri yang memiliki suku pertama a dan perbandingan r, dapat dinyatakan dengan rumus:

$$\begin{array}{cccccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & \dots & U_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a, & ar, & ar^2, & ar^3, & \dots & ar^{n-1} \end{array}$$

Jadi, untuk menentukan suku ke-n suatu barisan geometri adalah:

$$\boldsymbol{U_n = ar^{n-1}}$$

Contoh:

a. Tentukan suku ke-6 dari barisan geometri di bawah ini!
   2, 6, 18, 54, 162, …

b. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan geometri di bawah ini!
   $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

c. Diketahui secara berturut-turut suku ke-2 dan suku ke-3 barisan geometri adalah 1 dan $\frac{1}{3}$. Tentukan suku ke-5 barisan geometri tersebut!

Jawaban:

a. Diketahui:

$U_1 = 2$

$U_2 = 6$

$r = \frac{6}{2} = 3$

Ditanyakan: $U_6 = \ldots$?

Jawab:

$U_n = ar^{n-1}$

$U_6 = ar^5$

$U_6 = 2 \times 3^5$

$U_6 = 2 \times 243$

$U_6 = 486$

Jadi, suku ke-6 dari barisan geometri tersebut adalah 486.

b. Diketahui:

$a = 1$

$r = \frac{1}{2}$

Ditanyakan: $U_n = \ldots$?

Jawab:

$U_n = ar^{n-1}$

$U_n = \frac{1}{2}^{n-1}$

Jadi untuk menentukan suku ke-n pada barisan geometri tersebut dapat menggunakan rumus $U_n = \frac{1}{2}^{n-1}$

c. Diketahui:

$U_2 = 1$

$U_3 = \frac{1}{3}$

Ditanyakan: $U_8 = \ldots$?

Jawab:

$r = \frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

$U_2 = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = ar$

$1 = a \times \frac{1}{3}$

$a = 3$

Rumus suku ke-5

$U_8 = ar^7$

$U_8 = 3 \times \frac{1}{3}^5$

$U_8 = 3 \times \frac{1}{243}$

$U_8 = \frac{3}{243}$

Jadi, suku ke-5 barisan geometri tersebut adalah $\frac{3}{243}$.

C. Deret

Deret adalah penjumlahan suku-suku dari suatu barisan bilangan. Jika barisan tersebut merupakan barisan aritmetika maka disebut deret aritmetika. Namun, jika barisan tersebut merupakan barisan geometri maka disebut deret geometri. Jika $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n$ maka untuk mengetahui jumlah suku ke n dari deret tersebut dapat dinotasikan dengan S_n dimana n adalah anggota bilangan asli. Berdasarkan uraian tersebut dapat dirumuskan bahwa:

$S_1 = U_1$ (jumlah 1 suku pertama)
$S_2 = U_1 + U_2$ (jumlah 2 suku pertama)
$S_3 = U_1 + U_2 + U_3$ (jumlah 3 suku pertama)
$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ (jumlah n suku pertama)

1. Deret Aritmatika

Deret aritmatika yang suku pertamanya adalah *a* dan bedanya *b*, sehingga untuk jumlah n suku pertama dapat dituliskan dengan persamaan sebagai berikut ini:

Persamaan (1)

$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 2)b] + [a + (n - 1)b]$

Persamaan (2)

$S_n = [a + (n - 1)b] + [a + (n - 2)b] + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a$

Jika persamaan (1) dan persamaan (2) dijumlahkan maka:

$$
\begin{array}{l}
S_n = a + (a + b) + \dots + [a + (n - 2)b] + [a + (n - 1)b] \\
\underline{S_n = [a + (n - 1)b] + [a + (n - 2)b] + \dots + (a + b) + a \quad (+)} \\
2S_n = 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 2)b + \dots + 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b \\
2S_n = n[2a + (n - 1)b] \\
S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)b]
\end{array}
$$

Jadi, untuk menghitung jumlah n suku pertama dalam deret aritmatika rumusnya adalah:

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)b]}$$

Berdasarkan rumus barisan aritmatikan telah diketahui bahwa rumus suku ke-n adalah $U_n = a + (n – 1)b$ sehingga jika rumus tersebut disubtitusikan ke dalam rumus deret aritmatika diperoleh:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n -1)b]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a + a + (n -1)b]$$

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2} [a + Un]}$$

Contoh soal mengenai deret aritmatika:

a. Tentukan jumlah 10 suku pertama dari suatu deret aritmatika dengan $U_n = n + 3$!

b. Tentukan rumus S_n untuk deret artimatika 3, 6, 9, 12, 15, … !

c. Rumus jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika adalah $S_n = \frac{n}{2} (2n + 2)$. Tentukan suku ke-8!

Jawaban:

a. Diketahui:

$U_n = n + 3$

Ditanyakan: $S_{10} = \ldots$?

Jawab:

$a = U_1 = 1 + 3 = 4$

$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$

$S_n = \frac{n}{2} (a + n + 3)$

$S_{10} = \frac{10}{2} (4 + 10 + 3)$

$S_{10} = 5 (17)$

$S_{10} = 85$

Jadi, jumlah 10 suku pertama deret aritmatika tersbeut adalah 85.

b. Diketahui:

$U_1 = a = 3$

Ditanyakan: Rumus $S_n = \ldots$?

Jawab:

$U_n = a + (n - 1)b$

$U_n = 3 + (n - 1)\ 3$

$U_n = 3 + 3n - 3$

$U_n = 3n$

$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$

$S_n = \frac{n}{2}(3 + 3n)$

$= \frac{3n}{2} + \frac{3n^2}{2}$

$= \frac{3n\ (1+n)}{2}$

Jadi, rumus S_n deret aritmatika tersebut adalah $\frac{3n\ (1+n)}{2}$

c. Diketahui:

$S_n = \frac{n}{2}(2n + 2)$

Ditanyakan: $U_8 = \ldots$?

Jawab:

$U_1 = a = S_1 = \frac{1}{2}(2.1 + 2) = 2$

$S_n = \frac{n}{2}(2n + 2) \quad = \frac{n}{2}(a + U_n)$

$2n + 2 \quad = a + U_n$

$$2n + 2 = 2 + U_n$$
$$U_n = 2n + 2 - 2$$
$$U_n = 2n$$

$U_8 = 2.\ 8 = 16$

Jadi, suku ke-8 deret aritmatika tersebut adalah 16.

2. Deret Geometri

Deret geometri dimana suku pertamanya a dan perbandingannya dinyatakan dalam r dapat diketahui suatu persamaan jumlah n suku pertamanya yaitu:

$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ (persamaan 1)

Apabila persamaan tersebut dikalikan dengan r maka dapat diperoleh suatu persamaan berikut ini.

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^n$ (persamaan 2)

Kurangkan persamaan 1 dengan persamaan 2:

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \dots + \cancel{ar^{n-2}} + \cancel{ar^{n-1}}$$

$$\underline{rS_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \dots + \cancel{ar^{n-2}} + \cancel{ar^{n-1}} + ar^n \quad (-)}$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

Sehingga diperoleh rumus jumlah n suku pertama deret geometri yaitu:

$$\mathbf{S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}} \textbf{ dengan } \mathbf{r < 1}$$

$$\mathbf{S_n} = \frac{\boldsymbol{a\,(r^n - 1)}}{\boldsymbol{(r - 1)}} \textbf{ dengan r > 1}$$

Contoh soal deret geometri:

a. Tentukan jumlah 8 suku pertama dari deret geometri berikut ini!

2, 4, 8, 16, 32, …

b. Tentukan rumus S_n untuk deret geometri di bawah ini!

$1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$

Jawaban:

a. Diketahui:

a = 2

$r = \frac{4}{2} = 2$

Ditanyakan: $S_8 = \ldots$?

Jawab:

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{(r-1)}$$

$$S_8 = \frac{2\,(2^8 - 1)}{(2-1)}$$

$$= \frac{2\,(256-1)}{(2-1)}$$

$$= \frac{2\,(255)}{1}$$

$$= 510$$

Jadi, jumlah 8 suku pertama deret geometri tersebut adalah 510.

b. Diketahui:

$r = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

a = 1

Ditanyakan: Rumus S_n = … ?

Jawab:

$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$

$S_n = \frac{1\,(1-\sqrt{3}^n)}{(1-\sqrt{3})}$

$S_n = \frac{1-\sqrt{3}^n}{1-\sqrt{3}}$

Jadi rumus jumlah suku ke-n deret geometri tersebut adalah $S_n = \frac{1-\sqrt{3}^n}{1-\sqrt{3}}$.

LATIHAN SOAL

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menguraikan jawaban yang palin tepat!

1. Tentukanlah suku ke-100 dari barisan aritmatika di bawah ini!
   a. 4, 11, 18, 25, …
   b. 7, 10, 13, 16, …
   c. 1, 3, 5, 7, …
2. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan berikut 3, 9, 19, 33, …!
3. Terdapat suatu barisan geometri 5, $\frac{5}{100}$, $\frac{5}{10000}$, $\frac{5}{1000000}$ tentukan rumus suku ke-n untuk barisan tersebut dan jumlah 6 suku pertamanya!
4. Tentukan suku ke-10 jika $S_n = 3n – 3$!
5. Jika suatu deret geometri memiliki rumus $S_n = 3^n – 1$. Tentukanlah rumus U_n!

BAB V

RELASI DAN FUNGSI

A. Pendahuluan

Terdapat berbagai macam hubungan ynag terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh hubungan anak, orang tua, ataupun hubungan lainnya dalam kegiatan sehari-hari. Anak-anak yang membawa bola dengan berbagai macam warna juga merupakan suatu hubungan. Jika dianalisa dari kegiatan tersebut terdapat dua buah himpunan yaitu himpunan/kumpulan anak-anak dan bola dengan berbagai warna. Dalam matematika juga terdapat suatu hubungan yang melibatkan himpunan utamanya yaitu bilangan. Konsep hubungan dalam matematika dikenal dengan nama relasi. Selain itu, jika suatu relasi memiliki tepat satu anggota di daerah kodomain dinamakan sebagai fungsi. Pada bagian ini akan dibahas mengenai himpunan pasangan berurutan, relasi, fungsi, dan grafik fungsi linear.

B. Himpunan Pasangan Berurutan

Sebelum membahas mengenai relasi dan fungsi, terlebih dahulu dibahas mengenai himpunan pasangan berurutan. Himpunan pasangan berurutan merupakan kumpulan pasangan-pasangan terurut. Jika terdapat dua unsur a dan b yang merupakan unsur dari suatu himpunan tertentu. Kedua unsur tersebut dapat dibentuk menjadi suatu pasangan terurut (a, b) dimana unsur pertama a dan unsur kedua adalah b dengan $a \neq b$.

Suatu pasangan terurut x dan y dapat ditulis (x, y) dimana unsur pertamanya x dan unsur keduanya y. Selain itu, dua pasangan terurut (a, b) dan (x, y) dikatakan sama jika dan hanya jika a sama dengan x dan b sama dengan y.

C. Perkalian Himpunan

Himpunan A dikalikan dengan himpunan B ($A \times B$) hasilnya adalah himpunan pasangan terurut dengan unsur pertamanya anggota A dan unsur kedunya anggota B, dapat dinotasikan dengan $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ dan } y \in B\}$. Contoh: Diketahui $A = \{ k, l, m\}$ dan $B = \{6, 7\}$.

1. Tentukan $A \times B$!
2. Tentukan $A \times A$!

Jawab:

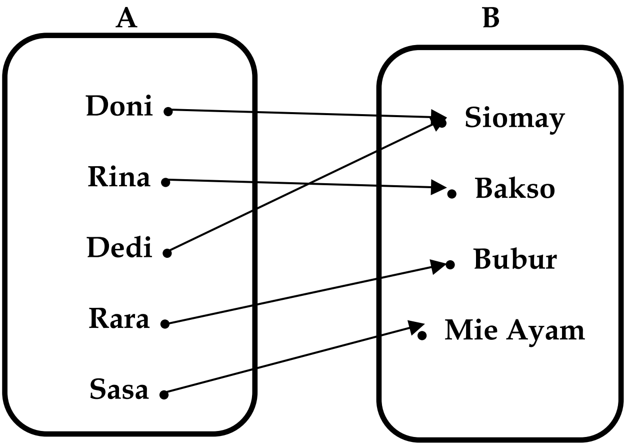
1. $A \times B = \{(k,6), (k,7), (l,6), (l,7), (m,6), (m,7)\}$
2. $A \times A = \{(k,k), (k,l), (k,m), (l,k), (l,l), (l,m), (m,k), (m,l), (m,m)\}$.

D. Relasi

Istilah relasi dikenal sebagai hubungan. Misalnya Rita “anak” Ibu Yuni, artinya relasi dari Rita dengan Ibu Yuni adalah “anak”. Dalam matematika relasi merupakan hubungan antara daerah asal (domain) dan daerah kawan (kodomain). Sehingga dapat dikatakan, himpunan A dan himpunan B dikatakan memiliki relasi jika terdapat himpunan yang saling berpasangan. Relasi dapat dinyatakan dalam diagram panah.

Contoh 1:

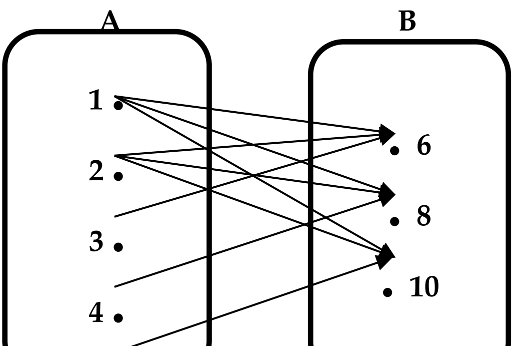
Terdapat 5 orang anak kelas empat dengan makanan kesukaan. Doni menyukai siomay, Rina menyukai bakso, Dedi menyukai siomay, Rara menyukai bubur, dan Sasa menyukai mie ayam. Hubungan himpunan tersebut dapat dinyatakan dalam diagram panah berikut ini!



“... menyukai ...”

Contoh 1:

Suatu himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5} dan B = {6, 8, 10} relasi dari kedua himpunan tersebut adalah faktor dari. Dapat dinyatakan dengan diagram panah berikut ini.



E. Fungsi

Fungsi disebut juga pemetaan. Suatu relasi dapat dikatakan sebagai fungsi jika semua anggota himpunan daerah asal (domain) dipasangkan tepat satu ke daerah kawan (kodomain) atau setiap. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada diagram di bawah ini.

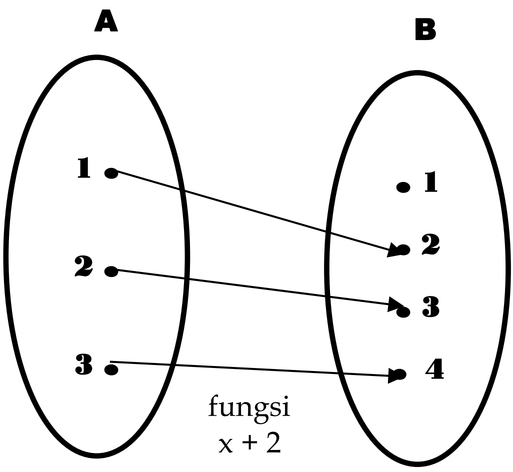


Diagram di atas merupakan contoh fungsi dimana setiap anggota daerah asal tepat berkorespondensi atau dipetakan satu pada daerah kawannya. Daerah asal atau domain dari fungsi di atas adalah A = {1, 2, 3}. Daerah kawan atau kodomain dari fungsi di atas adalah B = {1, 2, 3, 4, 5}, sedangkan range atau daerah hasil adalah himpunan {2, 3, 4}. Pasangan terurut dari fungsi di atas adalah {(1,3), (2,4), (3,5)}. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa fungsi merupakan himpunan pasangan terurut yang setiap unsur pertamanya tepat hanya memiliki satu pasangan.

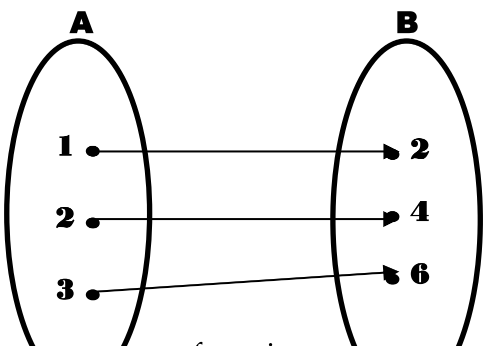
Contoh:

Terdapat dua buah himpunan P = {1, 2, 3} dan Q = {2, 4, 6} diketahui pasangan terurut kedua himpunan tersebut adalah {(1,2), (2,4), (3,6)}. Tentukan:

1. Relasi dari fungsi tersebut.
2. Daerah domainnya.
3. Daerah kodomainnya.
4. Daerah hasil atau range.
5. Gambar diagram panahnya.

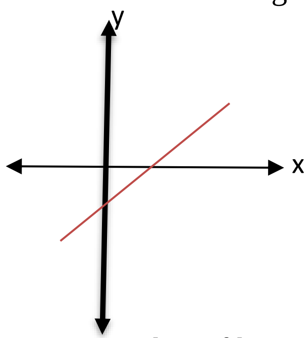
Jawaban:

1. Relasi atau hubungan kedua himpunan tersebut adalah "setengah dari".
2. Daerah domainnya adalah himpunan P = {1, 2, 3}.
3. Daerah kodomainnya adalah himpunan Q = {2, 4, 6}.
4. Daerah hasil atau rangenya adalah {2, 4, 6}.
5. Diagram panah dari fungsi tersebut adalah:



F. Grafik Suatu Fungsi

Grafik fungsi biasanya digambarkan dengan sumbu horizontal x yang menyatakan domain dan sumbu vertikal y yang menyatakan kodomain. Ciri suatu grafik yang merupakan fungsi adalah jika tidak ada garis vertikal yang memotong grafik persamaan lebih dari satu titik. Perhatikan grafik di bawah ini!



Gambar 5. 1 Contoh Grafik Fungsi

Grafik di atas merupakan grafik fungsi karena tidak ada garis vertikal yang memotong lebih dari satu titik suatu persamaan.

Suatu fungsi juga dapat dinyatakan dalam bentuk y = f (x) yang dibaca “y fungsi dari x”. Contoh:

$y = f(x) = x + 3$

Jika f = 1 maka x diganti dengan 1.

$f(x) = x + 3$

untuk $x = -1$ maka $f(-1) = -1 + 3 = 2$

untuk $x = 0$ maka $f(0) = 0 + 3 = 3$

untuk $x = 1$ maka $f(1) = 1 + 3 = 4$

untuk $x = 2$ maka $f(2) = 2 + 3 = 5$

G. Grafik Fungsi Linear

Suatu fungsi dapat dinyatakan ke dalam bentuk grafik dengan menggambarkan pasangan-pasangan berurutannya sebagai titik pada sistem koordinat. Semakin banyak pasangan berurutan yang digunakan dan digambarkan dalam bidang koordinat maka semakin baik grafik yang dibuat. Grafik suatu fungsi linear merupakan garis lurus sehingga saat menentukan dua titik dari suatu fungsi, cukup menarik kedua titik tersebut sehingga menjadi sebuah garis lurus.

Contoh:

Tentukan pasangan terurut dari fungsi $y = 3x + 1$!

Gambarlah grafik fungsinya!

Jawaban:

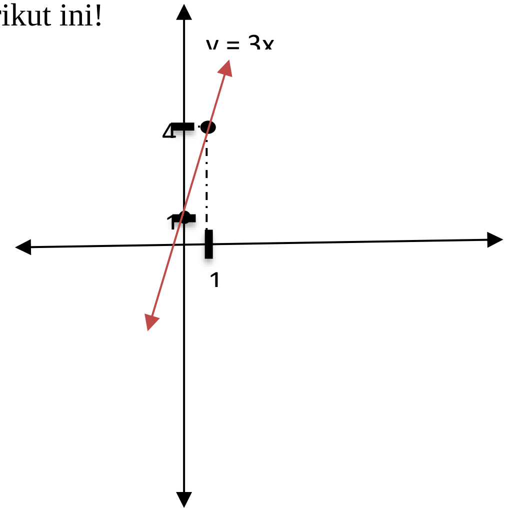
Tentukan pasangan terurut dari fungsi tersebut dengan menentukan dua buah titik, misalnya $x = 0$ dan $x = 1$.

$x = 0$ maka $y = 3x + 1 = 3.0 + 1 = 1$

$x = 1$ maka $y = 3x + 1 = 3.1 + 1 = 4$

x	0	1
y	1	4

Buatlah grafiknya pada bidang koordinat. Sehingga diperoleh gambar berikut ini!



Apabilah grafik suatu fungsi memotong sumbu x pada suatu titik maka dinamakan titik potong grafik fungsi dengan sumbu-x. Titik potong ini diperoleh dengan menentukan nilai y =0 sehingga memiliki absis x dan ordinat y =0 atau koordinat (x, 0). Sedangkan, titik potong grafik fungsi dengan sumbu-y diperoleh dengan menentukan nilai x = 0 sehingga memiliki absis x = 0 dan ordinat y atau koordinatnya (0, y).

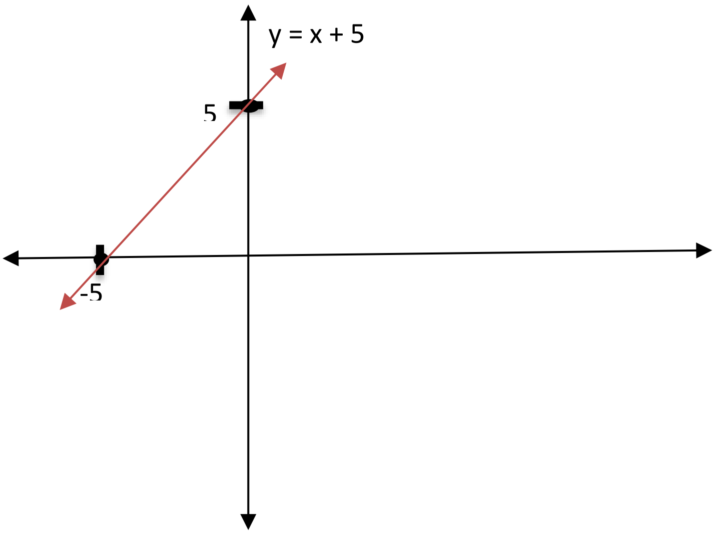
Contoh:

Tentukan titik potong dengan sumbu x dan y untuk fungsi y = x + 5!

x = 0 maka y = x + 5 = 0 + 5 = 5

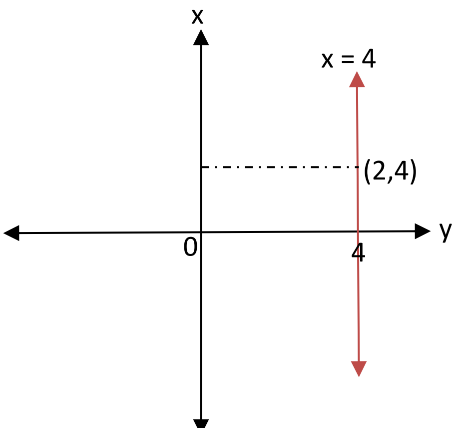
y = 0 maka 0 = x + 5 jadi x = -5

x	0	-5
y	5	0



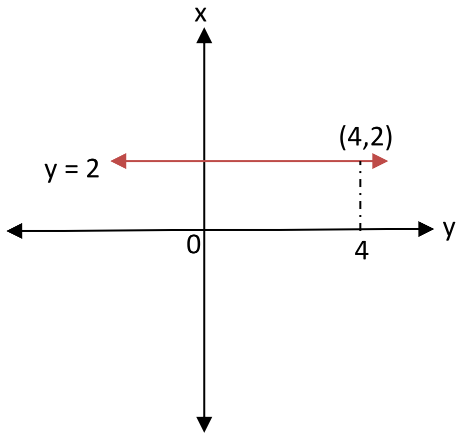
Gambar 5. 2 Grafik Fungsi Memotong Sumbu x dan y

Bagaimana grafik untuk x = 4 dan grafik y = 2? Untuk x = 4 maka grafik yang terbentuk dari koordinat-koordinat dengan absis 4. Grafiknya adalah sebagai berikut ini.



Gambar 5. 3 Grafik $x = 4$

Sedangkan untuk grafik $y = 2$, grafiknya terbentuk dari koordinat-koordinat dengan ordinat yang sama yaitu 2. Adapun grafiknya adalah sebagai berikut ini!



Gambar 5. 4 Grafik $y = 2$

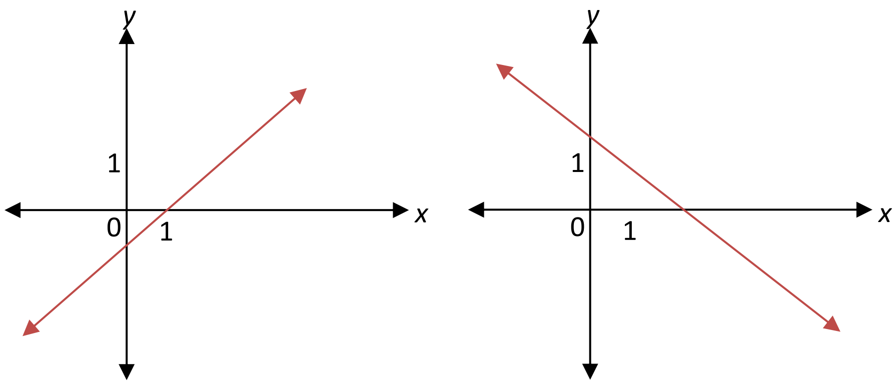
Suatu garis memiliki tingkat kemiringan tertentu, tingkat kemiringan suatu garis dinamakan gradien. Gradien merupakan nilai perbandingan komponen y dan komponen x pada garis itu.

Jika suatu gari AB maka gradien garis tersebut dapat dirumuskan:

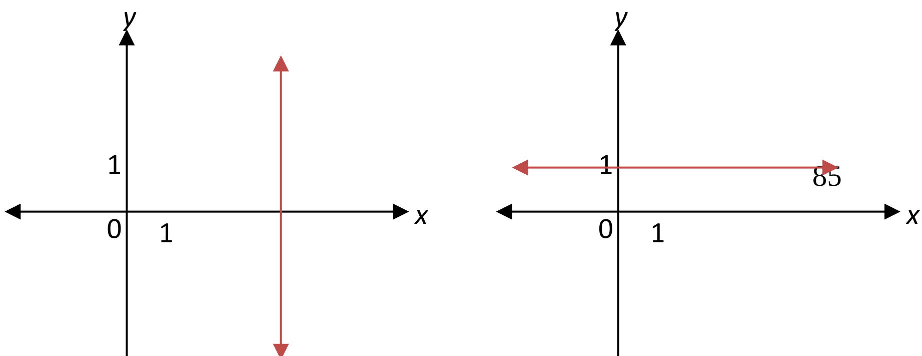
$$\text{Gradien AB} = \frac{\text{Komponen y dari AB}}{\text{Komponen x dari AB}}$$

$$\text{Gradien AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien *m* memiliki tiga kemungkinan yaitu ada yang bernilai positif, nol, dan negatif. Perhatikan gambar grafik di bawah ini!



(i) (ii)



Gambar 5. 5 Gradien Grafik Fungsi

Berdasarkan grafik di atas dapat diketahui bahwa pada gambar (i) gradiennya bernilai positif. Gradien suatu garis bernilai positif jika $x_1 - x_2$ positif dan $y_1 - y_2$ positif. Ini menunjukkan bahwa garis yang dibentuk adalah oleh suatu titik di sebelah kanan lebih tinggi dari daripada di sebelah kiri. Gradien bernilai negatif jika $x_1 - x_2$ negatif dan $y_1 - y_2$ juga negatif. Akibatnya suatu titik di sebelah kiri pada garis tersebut lebih tinggi daripada titik di bagian kanan pada garis tersebut (lihat gambar ii). Untuk gradien yang bernilai $m = 0$ jika $x_1 - x_2 = 0$ ini dapat dilihat pada gambar (iv) dimana garisnya sejajar dengan sumbu x. sedangkan untuk garis yang sejajar dengan sumbu y gradiennya tidak terdefinisikan.

Persamaan umum garis lurus adalah **y = ax +b**. Untuk menentukan gradien dari suatu persamaan garis lurus untuk gradien m maka berlaku rumus:

$$\mathbf{y = mx + b}$$

Berdasarkan persamaan tersebut, untuk suatu garis yang melewati titik (x_1, y_1) maka persamaannya menjadi $\mathbf{y_1 = mx_1 + b}$ atau $\mathbf{b = y_1 – mx_1}$. Nilai b disubtitusikan ke dalam persamaan **y = mx +b** sehingga:

$y = mx + b$

$y = mx + (y_1 – mx_1)$

$y = mx + y_1 - mx_1$

$y – y_1 = mx – mx_1$

$y – y_1 = m (x – x_1)$

Jadi, persamaan garis dengan gradien m yang melalui satu titik yaitu:

$$\mathbf{y - y_1 = m (x - x_1)}$$

Sedangkan persamaan garis melalui dua titik yaitu:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

LATIHAN SOAL

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan menguraikan jawaban yang paling tepat!

1. Jika diketahui suatu domain himpunan {4, 5, 6, 7}. Manakah dari himpunan pasangan terurut berikut yang merupakan fungsi? Berikan alasannya!
   a. {(4,1), (4,3), (5,3), (6,7)}
   b. {(4,1), (5,1), (6,1), (7,1)}
   c. {(4,3), (4,4), (4,5), (4,6)}
   d. {(4,5), (5,4), (6,5), (7,6)}
2. Dari lima orang mahasiswa diketahui bahwa Rina memiliki hewan peliharaan kucing dan kelinci. Yudi memelihara ayam. Aiga memelihara burung dan hamster. Cita memiliki hewan peliharaan kucing dan Laila memiliki hewan peliharaan burung. Tentukan!
   a. Buatlah diagram panah dari relasi di atas!
   b. Apakah relasi di atas termasuk fungsi? Mengapa?
3. Tentukan pasangan berurutan dari fungsi $y = 3x - 2$! Buatlah grafik fungsinya!
4. Tentukan persamaan garis jika diketahui titik (0,4) dan (3,6)!
5. Suatu garis h dengan titik D (0,3) dan E (-3,2), memiliki gradien m_1. Dimana terdapat suatu garis k yang tepat memotong tegak lurus garis h dengan gradien m_2. Tentukanlah:
   a. Persamaan garis g melalui titik D dan E.

b. Carilah gradien garis h yang tegak lurus dengan k.
c. Gambar grafiknya.

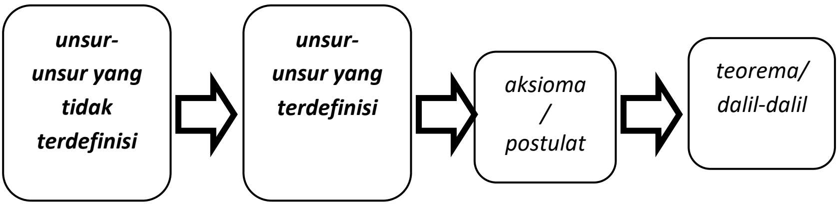
BAB VI
GEOMETRI BANGUN DATAR

A. Pendahuluan

Matematika pada hakikatnya adalah sebagai kumpulan sistem aksiomatis, yakni sistem penerapan dalam matematika dari berbagai metode logika atas sekelompok unsur, relasi, dan operasi. Selain itu konsep matematika tersusun secara hierarkis, terstruktur, logis, dan sistematis, mulai dari konsep yang paling sederhana sampai pada konsep yang paling kompleks. Salah satu kelompok anggota kumpulan sistem atau struktur matematika yang akan dibahas pada BAB ini adalah Geometri. Geometri bangun datar maupun bangun ruang memiliki banyak aplikasi dalam matematika dan kehidupan nyata, yang juga banyak mengandung unsur problem solving. Oleh sebab itu Geometri dan pemecahan masalah Geometri dijadikan bahan perkuliahan matematika yang diberikan kepada mahasiswa secara umum.

B. Konsep Geometri

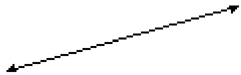
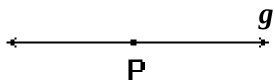
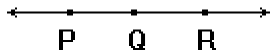
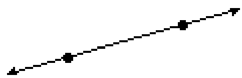
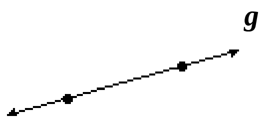
Geometri sebagai salah satu sistem matematika yang memiliki konsep dasar mulai dari unsur primitif atau unsur tak terdefinisi, antara lain: titik, garis, kurva, ataupun bidang. Selain itu terdapat juga beberapa istilah yang tidak didefinisikan, misalnya: melalui, terletak pada, memotong, dan antara. Dari unsur-unsur yang tidak terdefinisikan ini kemudian membangun unsur-unsur yang didefinisikan, selanjutnya ke aksioma atau postulat, dan akhirnya pada teorema atau dalil. Gambaran hubungan antara unsur-unsur yang tidak terdefinisikan, unsur-unsur yang didefinisikan, aksioma/postulat, dan teorema/dalil, dapat dilihat pada Gambar 6.1 diikuti selanjutnya oleh contoh beberapa hubungan antara konsep-konsep tersebut.

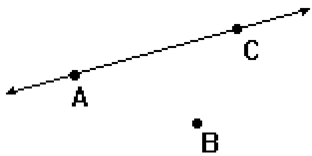


Gambar 6. 1 Hubungan Antar Konsep

Pada gambar 6.1 terdapat hubungan mengenai konsep-konsep dalam geometri beserta ilustrasinya, juga keterkaitan antara unsur tak terdefinisi, relasi tak terdefinisi, dan aksioma-aksioma yang ada dalam geometri. Selanjutnya, akan dipelajari beberapa konsep dasar dalam geometri yang telah didefinisikan, serta beberapa permasalahan yang mengandung pemecahan masalah matematika, seperti berikut:

1. Titik

	Konsep	Ilustrasi
Unsur Pangkal yang Tak Terdefinisi	Titik	 Tidak memiliki dimensi.
	Garis	 Pada garis terdapat banyak titik, panjang tak berbatas.
Relasi Pangkal yang Tak Terdefinisi	Melalui	 Garis *g* melalui titik P, atau titik P terletak pada garis *g*.
	Antara	 Titk Q antara P dan R.
Aksioma	Melalui dua titik yang berbeda dapat dibuat tepat satu garis.	
	Pada setiap garis *g* paling sedikit trdapat dua titik yang berbeda.	

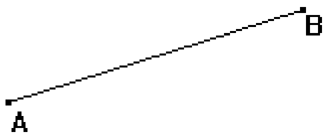
	Konsep	Ilustrasi
	Melalui satu titik di luar garis, dapat dibuat tepat satu garis sejajar dengan garis tersebut.	

2. Garis

a. Definisi Ruas Garis

Jika titik A dan B pada garis AB, maka ruas AB adalah himpunan yang terdiri dari titik A, titik B dan semua titik yang terletak di antara A dan B.

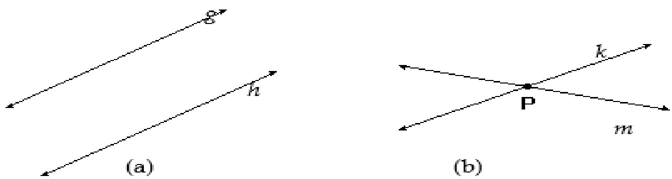
Perhatikan Gambar 6.2 merupakan gambar ruas garis *AB*.



Gambar 6. 2 Ruas Garis AB

b. Definisi Kesejajaran

Dua garis g dan h dikatakan sejajar (g//h) jika kedua garis tersebut tidak mempunyai titik sekutu (titik potong).

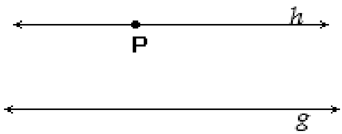


Gambar 6. 3 Garis Sejajar dan Berpotongan

Pada Gambar 6.3 (a) garis l dan m sejajar (g // h) dan pada Gambar 6.3 (b) garis m memotong garis k di titik P.

c. Aksioma Kesejajaran

Melalui sebuah titik P di luar sebuah garis g, ada tepat satu garis h yang sejajar dengan g.

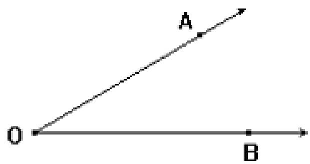


Gambar 6. 4 Garis Sejajar

Gambar 6.4 merupakan gambar garis h melalui P dan sejajar dengan garis g.

3. Sudut

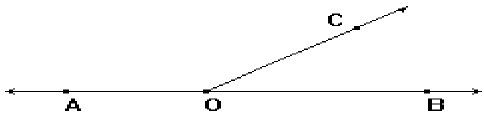
Di Sudut AOB (biasa ditulis: $\angle$ AOB)



Sudut berkaitan dengan besar putaran. Untuk mengukur panjang suatu benda kita dapat menggunakan penggaris berskala, akan tetapi untuk menghitung sudut, kita dapat menggunakan busur derajat untuk menghitung sudut, kita dapat menggunakan busur derajat.

a. Sudut Suplemen (Pelurus)

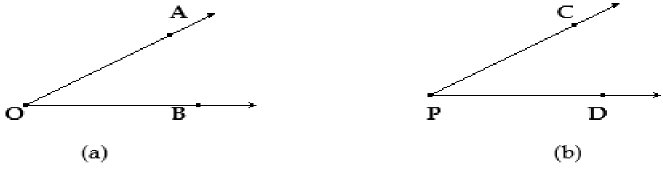
Jika sinar $\overrightarrow{OA}$ berlawanan dengan sinar $\overrightarrow{OB}$, dan sinar $\overrightarrow{OC}$ bukan sinar $\overrightarrow{OA}$ bukan pula sinar $\overrightarrow{OB}$, maka dikatakan $\angle$AOC suplemen $\angle$COB, atau $\angle$COB suplemen $\angle$ AOC.



Gambar 6. 5 Sudut Pelurus

b. Dua Sudut Kongruen

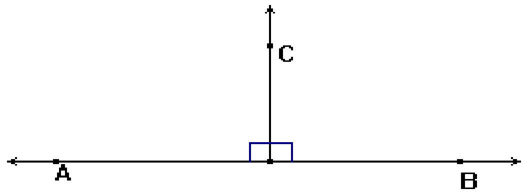
Perhatikan Gambar 6.6 di bawah ini. Gunakan kertas/plastik transparan untuk menjiplak sudut $\angle$AOB pada Gambar 6.6 (a), sehingga Anda memperoleh $\angle$A′O′B′ pada kertas/plastik transparan tadi. Setelah itu, letakkan jiplakan itu pada tempat sebelah kanannya, sehingga O′ berimpit dengan P, kemudian jiplak kembali $\angle$A′O′B′ ke kertas/plastik gambar. Misalkan kita namai $\angle$CPD untuk hasil yang diperoleh, seperti pada Gambar 6.6 (b) Dalam hal ini, dikatakan bahwa $\angle$AOB *kongruen* dengan $\angle$CPD (biasanya ditulis sebagai: $\angle$APD$\cong$ $\angle$CPD.



Gambar 6. 6 Dua Sudut Kongruen

c. Sudut Siku-siku

Sudut siku-siku adalah sudut yang kongruen dengan suplemennya. $\angle AOC \cong \angle COB$ dan $\angle AOC$ suplemen $\angle COB$, maka $\angle AOC$ dan $\angle COB$ masing-masing merupakan sudut siku-siku. Lihat Gambar 6.7.



Gambar 6. 7. Sudut Siku-Siku

d. Horizontal

Cobalah Anda tuangkan air ke dalam gelas, kemudian perhatikan permukaan air ketika dalam keadaan diam. Maka permukaannya selalu memperlihatkan arah horizontal.

e. Vertikal

Jika diketahui arah horisontal, maka garis yang membentuk sudut siku-siku dengan arah horisontal disebut arah vertikal. Cobalah Anda gantungkan tali dengan suatu beban, maka tali tersebut dapat dijadikan petunjuk untuk menentukan arah vertikal.

f. Nama Sudut Berdasarkan Ukurannya

Dari beberapa contoh di atas, kita telah menamai beberapa sudut berdasarkan besarnya, yaitu:

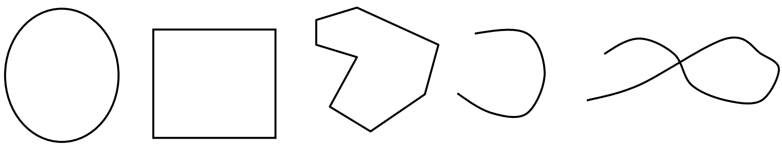
1. Sudut *lurus*, jika besarnya 180^0.
2. Sudut *siku-siku*, jika besarnya 90^0.

Sedangkan kita juga menemukan beberapa sudut yang besarnya kurang dari 90^0, antara 90^0 dan 180^0, serta lebih dari 180^0. Untuk sudut-sudut demikian, kita namakan:

1. Sudut *lancip*, jika besarnya *kurang dari* 90^0.
2. Sudut *tumpul*, jika besarnya antara 90^0 dan 180^0.
3. Sudut *refleks*, jika besarnya *lebih dari* 180^0.

C. Kurva

Kurva dapat dipikirkan sebagai himpunan titik yang dapat digambar, tanpa mengangkat bolpoin atau pensil yang digunakan untuk menggambarkannya. Atau dengan kata lain, kurva dapat kita gambar mulai dari suatu titik, kemudian dibuat jalur dengan alat tulis sampai pada suatu titik lain atau bisa juga kembali lagi ke titik asal. Contoh kurva dapat dilihat pada Gambar 6.8 di bawah ini.



Gambar 6. 8 Kurva Sederhana

1. Kurva Sederhana

Kurva sederhana adalah kurva yang dapat digambar tanpa ada titik yang diulang kecuali mungkin titik-titik ujungnya. Perhatikan Gambar 6.8 sebagai contoh kurva sederhana.

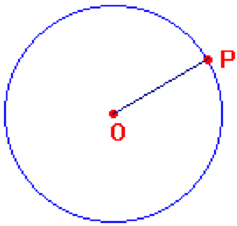
2. Kurva Tertutup Sederhana

Kurva tertutup sederhana adalah kurva sederhana yang kedua titik ujung berimpit. Perhatikan Gambar 6.9 sebagai contoh kurva tertutup sederhana.

Gambar 6. 9 Kurva Tertutup dan Terbuka

D. Lingkaran

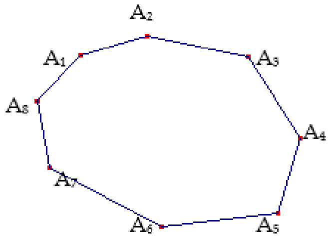
Lingkaran *L*, dengan pusat O dan jari-jari r adalah himpunan kedudukan titik-titik P yang berjarak sama dari O, yaitu panjang OP = r.



Gambar 6. 10 Lingkaran

E. Poligon

Poligon-*n* $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, adalah himpunan titik yang terdiri semua titik pada ruas $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1} A_n$, yang membatasi suatu daerah cembung. Titik $A_1, A_2, \ldots, A_n$ masing-masing disebut *titik sudut* dan ruas $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, … $\overline{A_{n-1}A_n}$, masing-masing disebut sisi *dari* poligon tersebut.

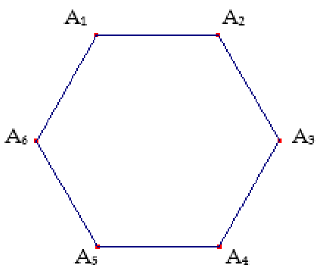


Gambar 6. 11 Poligon

Gambar 6.17 merupakan Poligon–$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Titik-titik A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, dan A_8 disebut titik sudut poligon. Sedangkan $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_6A_7}$, $\overline{A_7A_8}$, dan $\overline{A_8A_1}$ disebut sisi poligon. Poligon demikian disebut segidelapan (segi-8).

F. Poligon beraturan

Poligon-*n* beraturan $A_1A_2\ A_3\ \ldots.\ A_n$ adalah poligon-*n* yang bersifat $A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \ldots \cong A_{n-1}A_n$ dan $\angle A_1 \cong \angle A_2 \cong \ldots \cong \angle A_n$.



Gambar 6. 12 Segi Enam

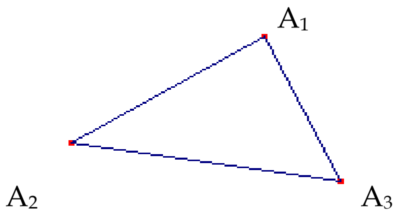
Gambar 6.18 di atas merupakan salah satu representasi dari poligon beraturan yaitu *segi-6 beraturan* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Dalam hal ini,

$$\overline{A_1A_2} \cong \overline{A_2A_3} \cong \overline{A_3A_4} \cong \overline{A_4A_5} \cong \overline{A_5A_6} \cong \overline{A_6A_1}$$

$$\angle A_1 \cong \angle A_2 \cong \angle A_3 \cong \angle A_4 \cong \angle A_5 \cong \angle A_6$$

G. Segitiga

Segitiga adalah poligon yang memiliki tiga sisi.



Gambar 6. 13 Segi Tiga

Alas segitiga merupakan sisi dari segitiga tersebut. Tinggi harus tegak lurus dengan alas sekawan dan melalui titik sudut yang berhadapan dengan alas. Jumlah sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0.

1. Jenis-Jenis Segitiga

a) Jenis Segitiga Ditinjau dari Panjang Sisi-sisinya

1) *Segitiga Sembarang*, adalah segitiga yang semua sisinya *tidak sama* panjang.
2) *Segitiga Sama Kaki*, adalah segitiga yang memiliki *dua buah* sisi yang *sama* panjang.
3) *Segitiga Sama Sisi*, adalah segitiga yanng semua sisinya *sama* panjang.

b) Jenis Segitiga Ditinjau dari Besar Sudut-sudutnya

1) *Segitiga Lancip*, adalah segitiga yang ketiga sudutnya merupakan sudut lancip.
2) *Segitiga Siku-siku,* adalah segitiga yang *salah satu* sudutnya *siku-siku*.
3) *Segitiga Tumpul*, adalah segitiga yang *salah satu* sudutnya *tumpul.*

2. Keliling Segitiga

Keliling suatu segitiga adalah *jumlah keseluruhan panjang sisi yang membentuk segitiga.* Jika panjang sisi-sisi segitiga masing-masing adalah *a*, *b*, dan *c*, maka keliling segitiga tersebut adalah: Keliling Segitiga, K = $a + b + c$

3. Luas Segitiga

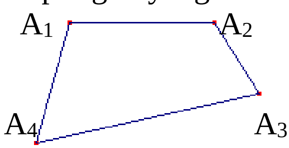
$$\textit{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \times \textit{alas} \times \textit{tinggi} = \frac{1}{2} \times a \times t$$

Hal penting yang harus Anda ingat baik-baik, adalah:

a. *Alas* segitiga merupakan sisi dari segitiga tersebut.
b. *Tinggi* harus tegak lurus dengan *alas yang sekawan* dan melalui titik sudut yang berhadapan dengan alas.

H. Segiempat

Segiempat adalah poligon yang memiliki empat sisi.



Gambar 6. 14 Segi Empat

Terdapat pula beberapa segiempat yang memiliki sifat-sifat istimewa, seperti halnya: persegi, persegipanjang, jajargenjang, belahketupat, layang-layang, dan trapesium.

I. Persegi panjang

Beberapa sifat persegi panjang adalah:

1. Sisi-sisi yang berhadapan sama panjang
2. Sisi-sisi yang berhadapan sejajar
3. Setiap sudutnya sama besar, yaitu 90^0
   Besar keempat sudutnya adalah 90^0 (siku-siku). Dua pasang sisi persegi panjang sering kita namakan *panjang* dan *lebar*.
4. Diagonal-diagonalnya sama panjang
5. Diagonal-diagonalnya berpotongan dan saling membagi dua sama panjang.

Gambar 6. 15 Persegi Panjang

J. Persegi

Persegi merupakan bagian persegi panjang yang istimewa, dengan beberapa sifat berikut ini:

1. Sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar
2. Diagonalnya sama panjang
3. Diagonalnya saling berpotongan dan membagi dua sama panjang.

Sifat-sifat lainnya yang khusus adalah:

1. Sisi-sisi dalam setiap persegi adalah sama panjang
2. Sudut-sudut dalam setiap persegi dibagi dua sama besar oleh diagonal-diagonalnya.
3. Diagonal-diagonalnya merupakan sumbu simetri.
4. Diagonal-diagonalnya berpotongan tegak lurus.

Keliling suatu bangun datar adalah *jumlah semua panjang sisi* yang membatasi bidang datar tersebut sedangkan ***Luas*** bangun datar adalah *luas daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi* bangun datar tersebut.

Keliling persegi panjang diperoleh dengan cara menjumlahkan semua panjang sisi pada persegi panjang tersebut, sedangkan ***keliling persegi*** diperoleh dengan cara menjumlahkan semua panjang sisi pada persegi tersebut.

Rumus keliling persegi panjang adalah:

$K = 2p + 2l$ atau $K = 2(p + l)$

Rumus keliling persegi adalah:

$$K = 4 \times sisi = 4s$$

Luas persegi panjang adalah luas daerah yang dibatasi oleh sisi persegi panjang tersebut. Sedangkan ***luas persegi*** adalah luas daerah yang dibatasi oleh sisi persegi tersebut. Satuan luas cm^2 dibaca sebagai “sentimeter kuadrat” atau “sentimeter persegi”, yang berarti perkalian cm dengan cm pada persegi satuan.

Rumus luas persegi panjang adalah:

$L = panjang \times lebar$ atau, $L = p \times l$

Karena persegi memiliki ukuran panjang dan lebar yang sama yang disebut sisi, maka rumus luas persegi adalah:

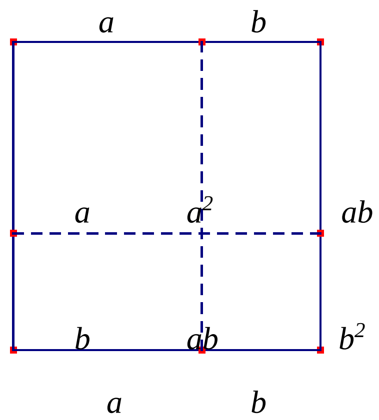
$L = sisi \times sisi$ atau, $L = s \times s = s^2$

Contoh :

Diketahui persegi dengan sisi (a + b). Tentukan luasnya!

Jawaban:

Perhatikan gambar dibawah ini!
Persegi tersebut dapat dibagi menjadi 4 bagian, yang berarti luas persegi dengan sisi (a + b) adalah penjumlahan dari seluruh luas 4 bagian tersebut.



$$Luas = Luas_I + Luas_{II} + Luas_{III} + Luas_{IV}$$

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

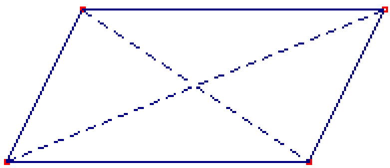
Dari sini, kita memperoleh suatu hubungan yang sangat penting dan sering digunakan, yaitu:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Pernahkah Anda bermain layang-layang? Bagaimana bentuknya? Ya, umumnya layang-layang berbentuk segiempat yang khas. Namun kini, layang-layang berkembang tidak hanya berupa segiempat, layang-layang juga sudah dimodifikasi sedemikian rupa menjadi bentuk-bentuk yang lebih beragam.

K. Jajargenjang

Jajargenjang adalah segiempat dengan sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar, serta sudut-sudut yang berhadapan sama besar. Jajargenjang dapat dibentuk dari gabungan suatu segitiga dan bayangannya setelah diputar setengah putaran dengan pusat titik tengah salah satu sisinya.



Gambar 6. 16 Jajargenjang

1. Sifat-Sifat Jajargenjang

a. Pada setiap jajargenjang, sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar.
b. Pada setiap jajargenjang, sudut-sudut yang berhadapan sama besar.

c. Jumlah dua sudut yang berdekatan dalam jajargenjang adalah 180^0.

2. Luas Jajargenjang

Menentukan luas jajargenjang dapat menggunakan konsep luas segitiga.

$$L_{\text{jajargenjang}} = 2 \times L_{\Delta}$$

$$= 2 \times \tfrac{1}{2} \times a \times t$$

$$= a \times t$$

Dengan menggunakan konsep luas persegi panjang, maka luas jajargenjang juga dapat ditentukan sebagai:

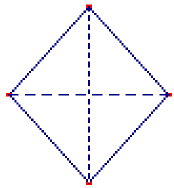
$$L_{\text{jajargenjang}} = a \times t.$$

Jadi, untuk setiap jajargenjang, dengan alas ***a*,** tinggi ***t***, serta luas ***L***, maka berlaku:

$$\boldsymbol{L = a \times t}$$

L. Belah ketupat

Belah ketupat didefinisikan sebagai segiempat dengan *sisi yang berhadapan sejajar*, *keempat sisinya sama panjang*, dan *sudut-sudut yang berhadapan sama besar*. Belah ketupat juga merupakan *jajargenjang yang semua sisinya sama panjang*. Oleh karena itu, semua sifat yang berlaku pada jajargenjang berlaku pula pada belah ketupat. Keistimewaan belah ketupat adalah dapat dibentuk dari gabungan segitiga sama kaki dan bayangannya setelah dicerminkan terhadap alasnya.



Gambar 6. 17 Belah Ketupat

1. Sifat-Sifat Belah Ketupat

Berikut ini adalah sifat-sifat khusus belah ketupat:

a. Semua sisinya sama panjang
b. Diagonal-diagonal belah ketupat menjadi sumbu simetri
c. Kedua diagonalnya saling berpotongan tegak lurus dan saling membagi dua sama panjang.
d. Sudut-sudut yang berhadapan sama besar dan dibagi dua sama besar oleh diagonal-diagonalnya.

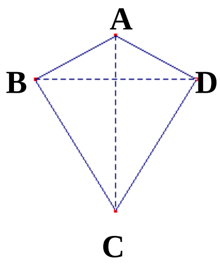
2. Luas Belah Ketupat

Karena belah ketupat merupakan jajargenjang, maka tentu saja luas belah ketupat pun memiliki rumus yang sama dengan rumus luas jajargenjang, yaitu:

$$Luas = alas \times tinggi = \frac{1}{2} \times diagonal_1 \times diagonal_2$$

M. Layang-layang

Layang-layang didefinisikan sebagai segiempat yang *setiap pasang sisinya sama panjang* dan *sepasang sudut yang berhadapan sama besar*. Layang-layang juga merupakan segiempat yang terdiri dari dua segitiga sama kaki yang alasnya sama panjang dan saling berimpit.



Gambar 6. 18 Layang Layang

1. Sifat-Sifat Layang-Layang
   a. Pada setiap layang-layang *sepasang sisinya sama panjang*.
   b. Pada setiap layang-layang terdapat *sepasang sudut berhadapan yang sama besar*.
   c. Salah satu diagonal layang-layang merupakan *sumbu simetri*.
   d. Salah satu diagonal layang-layang *membagi dua sama panjang* dan *tegak lurus* terhadap diagonal lainnya.

2. Luas Layang-Layang

Luas layang-layang dapat dihitung sebagai jumlah luas dua segitiga, yaitu:

$$L_{ABCD} = L_{ACD} + L_{ABC}$$

$$L_{ABCD} = \tfrac{1}{2} \times AC \times DP + \tfrac{1}{2} \times AC \times BP$$

$$L_{ABCD} = \tfrac{1}{2} \times AC \times (DP + BP)$$

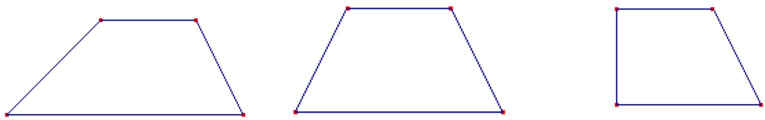
$$L_{ABCD} = \tfrac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$L_{ABCD} = \frac{1}{2} \times diagonal_1 \times diagonal_2$$

Jadi, ***luas layang-layang*** *adalah setengah dari perkalian panjang diagonal-diagonalnya*.

N. Trapesium

Trapesium adalah segiempat yang sepasang sisi berhadapannya sejajar. Pada Gambar 6.25, diperlihatkan beberapa jenis trapesium, (1) *trapesium sembarang*, yaitu yang keempat sisinya tidak sama panjang, (2) *trapesium sama kaki*, yang memiliki sepasang sisi berhadapan sama panjang, dan (3) *trapesium siku-siku*, yang salah satu kakinya membentuk sudut siku-siku.

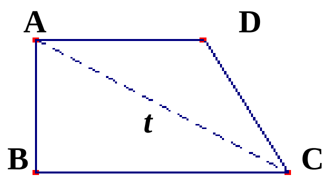


(1) (2) (3)

Gambar 6. 19 Jenis-Jenis Trapesium

Pada suatu trapesium, *jumlah sudut yang berdekatan pada suatu trapesium adalah* 180^0.

Untuk menghitung luas trapesium, kita tarik garis diagonal sehingga membagi daerah trapesium menjadi dua buah segitiga. Perhatikan Gambar 6.26. Trapesium *ABCD* terbagi menjadi dua bagian yaitu ΔABD dan ΔBCD.



Gambar 6. 20 Trapesium

$$L_{\text{trapesium}ABCD} = L_{\Delta ABD} + L_{\Delta BCD}$$

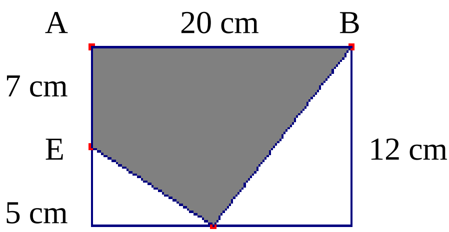
$$= \tfrac{1}{2} \times a \times t + \tfrac{1}{2} \times b \times t$$

$$= \tfrac{1}{2} \times (a + b) \times t$$

$$= \frac{1}{2} \times \textit{ jumlah sisi sejajar} \times \textit{tinggi}$$

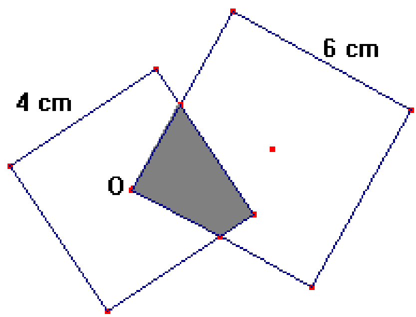
LATIHAN SOAL

1. Diketahui persegi panjang *ABCD*. Hitunglah luas daerah yang diarsir!



D 9 cm F 11 cm C

2. Riana membuat sebuah layang-layang *KLMN* seluas 125 cm^2. Jika kemudian Riana membuat dua buah layang-layang baru yang ukuran setiap diagonalnya adalah dua kali ukuran diagonal layang-layang *KLMN*, hitunglah luas layang-layang baru tersebut!
3. Suatu persegi yang bersisi 6 cm berputar pada titik O yang merupakan titik pusat peregi lain yang bersisi 4 cm. Tentukan luas bidang yang berada pada kedua persegi tersebut!



4. Dalam segitiga ABC, diketahui sudut BAC = 80^0. Jika titik-titik D, E, dan F berturut-turut terletak pada sisi BC, AC, dan AB, dengan CE = CD, dan BF = BD, tentukan besar sudut EDF!

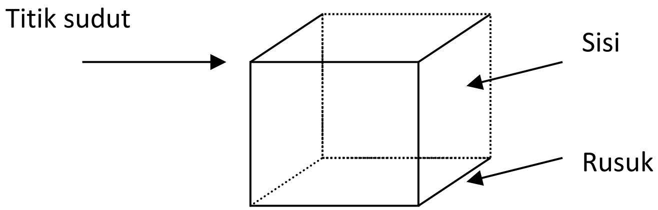
BAB VII
GEOMETRI BANGUN RUANG

A. Pendahuluan

Geometri menyajikan abstraksi dari pengalaman visual dan spasial, misalnya bidang, pola, pengukuran, dan pemetaan. Sedangkan geometri ruang merupakan suatu bentuk geometri yang tidak terletak pada bidang datar atau suatu benda ruang yang berbentuk tiga dimensi. Geometri ruang memiliki panjang, lebar, dan tinggi seperti kubus, balok, kerucut, tabung, prisma,limas dan bola.

B. Konsep Bangun Ruang

Ruang dalam arti sempit terbentuk oleh adanya banyak bidang (minimal empat bidang). Kumpulan bidang tersebut terdapat istilah-istilah titik sudut, sisi,dan rusuk, seperti gambar berikut ini.



Gambar 7. 1 Bangun Ruang

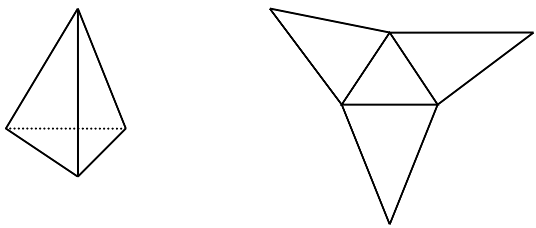
Ada hubungan antara titik sudut (T), sisi (S) dan rusuk (R), yaitu yang disebut Rumus Euler: T + S – R = 2.

Kumpulan bidang-bidang yang beraturan ada yang berpermukaan datar, seperti: limas, prisma, kubus, dan balok. Dan ada bidang banyak yang berpermukaan lengkung, seperti: kerucut, tabung, dan bola.

Jika kita sedang berhadapan dengan masalah-maslah yang berhubungan bangun ruang-bangun ruang seperti di atas akan sangat membantu jika kita dapat membayangkan atau dapat menggambarkannya. Untuk itu kita harus mengenal cirri-ciri khusus dan rumus-rumus yang berkaitan dengan bangun ruang tersebut. Berikut adalah ciri-ciri khusus dan rumus-rumus yang dapat digunakan.

C. Limas

Limas adalah bidang banyak yang ditentukan oleh daerah poligon (yang disebut alas), suatu titik yang tidak terletak pada bidang poligon dan segitiga-segitiga yang ditentukan oleh titik tersebut dan sisi-sisi dari poligon. Alas-alas dari suatu limas dapat berupa segitiga, segiempat, segilima, dan lain lain.

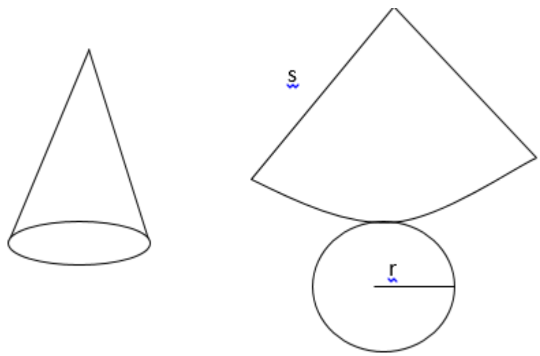


Gambar 7. 2 Limas

Luas permukaan limas merupakan gabungan dari luas alas dengan luas segitiga-segitiga yang membentuknya (menggunakan rumus yang beruhubungan sesuai dengan bentuknya). Volume limas adalah: $\frac{1}{3}$ luas alas x tinggi

D. Kerucut

Kerucut merupakan bentuk limas dengan alasnya berbentuk lingkaran, atau merupakan benda putar dari bidang segitiga.

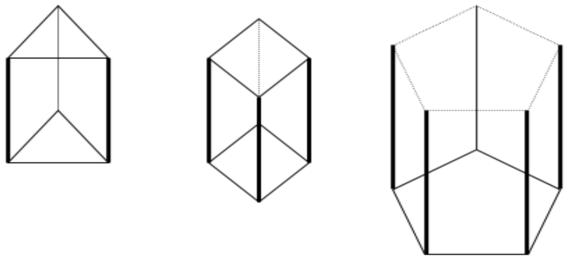


Gambar 7. 3 Kerucut

Luas permukaan kerucut seluruhnya adalah: π r (s + r) , dengan keterangan r= jari-jari lingkaran dan s = panjang garis pelukis (panjang dari alas ke puncak kerucut). Volume kerucut adalah: $\frac{1}{3}\pi r^2 t$, dengan keterangan r= jari-jari lingkaran alas dan t= tinggi kerucut.

E. Prisma

Prisma adalah bidang banyak yang dibentuk oleh dua daerah poligon kongruen yang terletak pada bidang sejajar, dan tiga atau lebih daerah jajaran genjang yang ditentukan oleh sisi-sisi dua daerah poligon tersebut sedemikian hingga membentuk permukaan tertutup sederhana. Dua daerah poligon kongruen yang terletak pada bidang sejajar dapat berupa segitiga, segiempat, segilima, dan lain-lain. Dan jika dua poligon tersebut berbentuk menyerupai lingkaran akan disebut tabung (silinder). Berikut berturut-turut adalah gambar prisma segitiga, prisma segiempat, dan prisma segilima.



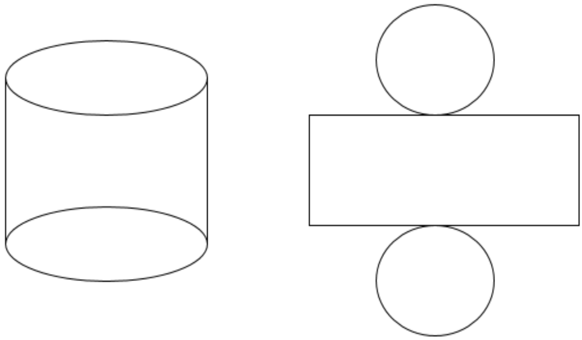
Gambar 7. 4 Prisma

Cobalah Anda bayangkan atau gambar jaring-jaringnya, agar Anda lebih memahami terhadap ciri-cirinya. Luas permukaan prisma adalah jumlah dari kedua alasnya (atas dan bawah) ditambah dengan luas-luas yang lain sesuai dengan bentuk prisma.

Volume prisma adalah: **A.t,** (A = luas alas dan t= tinggi prisma)

F. Tabung

Tabung merupakan benda ruang yang terbentuk oleh dua buah bidang yang berbentuk lingkaran dan sebuah bidang segiempat. Gambarnya seperti berikut:



Gambar 7. 5 Tabung

Luas permukaan tabung adalah: luas bidang alas + luas bidang atas + luas bidang lengkung atau dengan rumus:

$$\mathbf{2\pi r\,(r + t)}$$

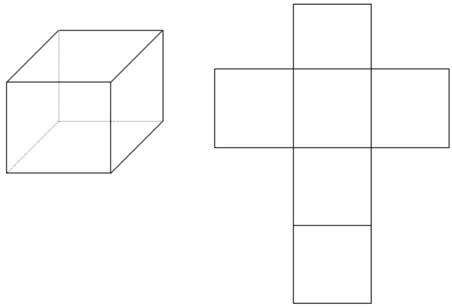
r = jari-jari lingkaran dan t= tinggi tabung.

Volume tabung adalah: luas alas x tinggi atau dengan rumus:

$$\mathbf{\pi r^2 t}$$

G. Kubus

Kubus adalah benda ruang yang memiliki enam bidang persegiempat (bujur sangkar) yang sama dan sebangun, gambar dan jaring-jaringnya sebagai berikut.

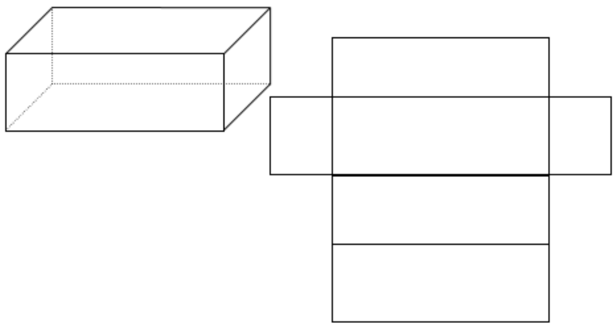


Gambar 7. 6 Kubus

Luas permukaan kunus adalah jumlah seluruh luas sisi-sisinya (6 x luas sisi) atau dengan rumus: $6s^2$, s= panjang rusuk. Volume kubus adalah: s^3

H. Balok

Balok adalah bidang ruang yang mirip dengan kubus atau prisma segiempat, suatu balok terbentuk oleh tiga pasang bidang segiempat, dengan gambar dan jaring-jaringnya seperti berikut.

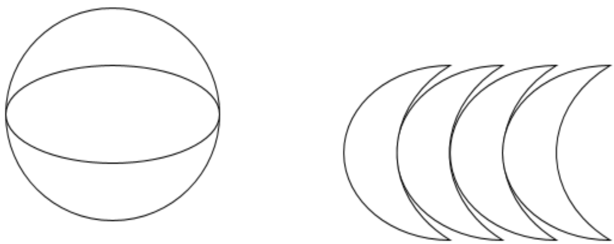


Gambar 7. 7 Balok

Luas permukaannya adalah jumlah luas dari enam sisi-sisinya atau: 2 p l sisi pertama + 2 p l sisi kedua + 2 p l sisi ketiga. Jika panjang sisi pertama dikatakan panjang (p), panjang sisi kedua dikatakan lebar (l), dan panjang sisi ketiga dikatakan tinggi (t), maka didapatkan rumus luas permukaan balok: 2pl + 2pt + 2lt. Volume balok adalah panjang x lebar x tinggi.

I. Bola

Jika kerucut merupakan benda putar dari bidang segitiga dan tabung merupakan benda putar dari bidang segiempat, maka bola adalah benda putar dari bidnag yang berbentuk lingkaran. Bola adalah suatu bidang lengkung yang berjarak sama terhadap titik pusat. Gambar dan jarring-jaring (dipotong empat) bola sebagai berikut.



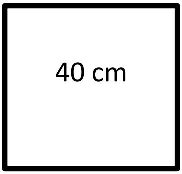
Gambar 7. 8 Bola

Luas permukaan bola adalah: $4\pi r^2$

Volume bola adalah: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Contoh Soal:

Perhatikan gambar berikut:



Berapakah volume tabung (tanpa tutup) yang dapat dibuat dari bangun persegi di samping?

Jawab:

Diketahui : Persegi 40 cm merupakan keliling alas lingkaran dan tinggi lingkaran.

Ditanyakan : Volume tabung yang dibentuk oleh persegi tersebut.

Proses penyelesaian:

Rumus terkait Keliling/luas lingkaran dan Volume Tabung

$$\text{Keliling Lingkaran} = 2\pi r$$
$$40 = 2\,(3{,}14)\,r$$
$$40 = 6{,}28\,r$$
$$r = 6.37 \text{ cm}$$
$$\text{Luas Lingkaran} = \pi r^2$$
$$L = 3{,}14\,(6.37)^2$$
$$L = 3.14\,(40.5769)$$
$$L = 127.41 \text{ cm}^2$$
$$\text{Volume Tabung} = \text{Luas alas x tinggi atau } \pi r^2 t$$
$$V = 127.41 \text{ x } 40$$
$$V = 1096.4 \text{ cm}^3$$

Kesimpulan: Volume tabung yang terbentuk oleh persegi ukuran 40 cm adalah 1096.4 cm^3

Tabel 7. 9 Rumus Luas Permukaan dan Volume Ruang

No	Nama Bangun	Luas Permukaan	Volume
1	Limas	Gabungan dari luas alas dengan luas segitiga-segitiga yang membentuknya	$\frac{1}{3}$ luas alas x tinggi
2	Kerucut	Gabungan dari luas selimut dan luas alas	$\frac{1}{3}$ luas alas x tinggi
3	Prisma	Gabungan dua alas dengan sisi-sisi yang lainnya (sesuai bentuk prisma)	Luas alas x tinggi
4	Tabung	Gabungan luas dua alas dengan segiempatnya	Luas alas x tinggi ($\pi r^2 t$)
5	Kubus	Jumlah keenam sisinya (6 s^2)	Panjang sisi pangkat tiga (S^3)
6	Balok	2(pl + pt + lt).	Panjang x lebar x tinggi (p.l.t)
7	Bola	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

LATIHAN SOAL

1. Limas segienam memiliki 7 sisi dan 12 rusuk. Tentukan banyak titik sudutnya.
2. Jika dua pasang sisi balok dengan 15 cm x 6 cm dan 6 cm x 3 cm, maka berapakah ukuran sepasang sisi yang lainnya?
3. Panjang, lebar, dan tinggi balok adalah: 4 : 3 : 2. Jika jumlah panjang rusuk balok itu 108 cm. Berapakah panjang balok itu?
4. Suatu bola dengan jari-jari r mempunyai luas 64 π cm. Tentukan jari-jari bola tersebut!
5. Suatu kubus dengan ukuran salah satu rusuknya adalah 5 cm, berisi bola padat dengan diameter yang sama dengan ukuran kubus. Jika air dituangkan ke dalam kubus tersebut, berapakah banyaknya air yang dibutuhkan untuk mengisi kubus tersebut hingga penuh?

BAB VIII

PENGUKURAN

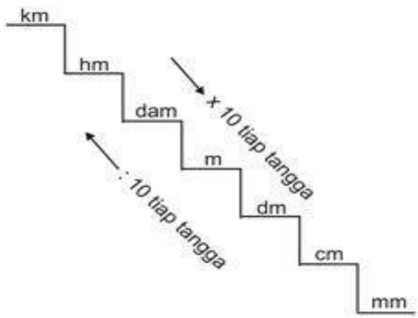
A. Pendahuluan

Pengukuran merupakan kegiatan membandingkan suatu besaran yang diukur dengan alat ukur yang digunakan sebagai satuan. Sesuatu yang dapat diukur dan dapat dinyatakan dengan angka disebut besaran. Pembanding dalam suatu pengukuran disebut satuan. Satuan yang digunakan untuk melakukan pengukuran dengan hasil yang sama atau tetap untuk semua orang disebut satuan baku.

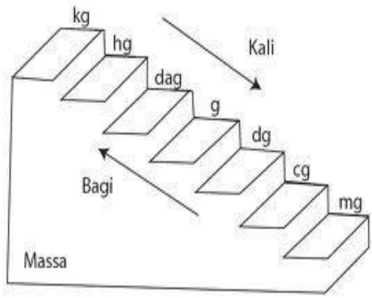
B. Standar untuk Satuan Pokok Panjang

Standar untuk satuan pokok panjang dalam SI adalah meter (m). Satu meter standar sama dengan jarak yang ditempuh oleh cahaya dalam ruang hampa (vakum) pada selang waktu 1/299 792 458 sekon. Satuan panjang dapat diturunkan dari satu meter standar yang telah ditentukan sebagai berikut :

1 desimeter (dm) = 0,1 m
1 sentimeter (cm) = 0,01 m
1 milimeter (mm) = 0,001 m
1 dekameter (dam) = 10 m
1 hektometer (hm) = 100 m
1 kilometer (km) = 1000 m



Satuan massa dapat diturunkan dari satu kilogram standar yang telah ditentukan sebagai berikut :



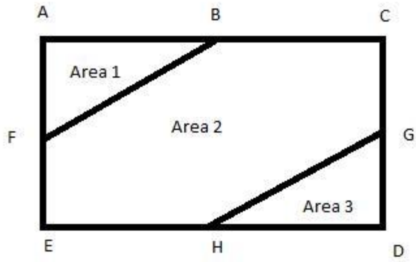
1 ton = 1.000 kg
1 kuintal = 100 kg
1 dekagram (dag) = 0,01 kg
1 gram (g) = 0,001 kg
1 miligram (mg) = 0,000001 kgg
1 mikrogram (mg) = 0,000000001kg

C. **Standar untuk Satuan Pokok Waktu**

Standar untuk satuan pokok waktu dalam SI adalah sekon (s). Satu sekon standar adalah waktu yang diperlukan oleh atom Cesium – 133 untuk bergetar sebanyak 9.192.631.770 kali. Dalam selang waktu 300 tahun hasil pengukuran dengan menggunakan jam atom ini tidak akan bergeser lebih dari satu sekon. Satuan waktu lain yang biasanya dipakai dalam kehidupan sehari-hari antara lain : menit, jam, hari, minggu, bulan,tahun dan abad 1 menit = 60 sekon
1 jam = 60 menit = 3.600 sekon
1 hari = 24 jam = 1.440 menit = 86.400 sekon

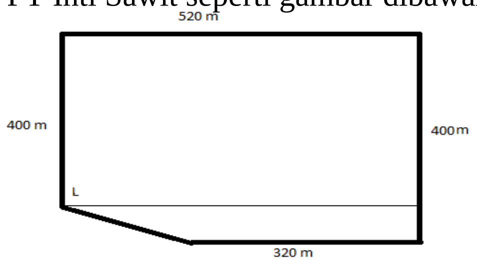
LATIHAN SOAL

1. PT Inti Sawit mempunyai lahan berbentuk persegi panjang dengan panjang 500 meter dan lebar 800 meter. Diagonal lahan tersebut akan di buat jalan setapak. Berapa panjang jalan tersebut ?
2. PT Inti Agro mempunyai lahan seperti gambar dibawah ini!



AC = 1200 meter, CD = 700 meter, B, G, H, F merupakan titik tengah dari sisi persegi panjang tersebut. Area 1 akan ditanami Sengon, Area 2 ditanami Jabon, Area 3 ditanami Akasia Berapa luas lahan PT Inti Agro? Berapa luas masing-masing area?

3. Lahan PT Inti Sawit seperti gambar dibawah ini!



   a. Berapa luas lahan tersebut ?
   b. Jika setiap m^2 memerlukan 200 gram pupuk, berapa kg pupuk yang diperlukan ?

c. Jika setiap 10 m2 menghasilkan panen 100 kg, berapa ton hasil panen yang diperoleh ?

4. PT Inti Sawit membeli pestisida sebanyak 20 drum. Drum tersebut mempunyai ukuran tinggi 150 cm dan jari-jari alas 50 cm. Berapa liter kapasitas setiap drum tersebut. Berapa liter total pestisida yang ada. Jika pestisida tersebut hanya terpakai 83%, berapa liter sisa cairan pestisida ? Berapa drum cairan yang tersisa ?
5. PT Inti Sawit membuka lahan baru seperti dalam gambar. Jika setiap 10 m^2 ditanami 5 bibit tanaman, berapa total bibit yang diperlukan. Setelah masa panen, setiap pohon menghasilkan 50 kg sawit, berapa ton hasil panen yang didapatkan? Jika setiap 50 kg sawit menghasilkan 100 liter CPO, berapa liter yang dihasilkan ?

BAB IX
KOMBINASI, PERMUTASI DAN PELUANG

A. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menghadapi masalah pengaturan suatu obyek yang terdiri dari beberapa unsur. Pengaturan atau penyusunan tersebut ada yang memperhatikan urutan dan ada yang tidak memperhatikan urutan. Pengaturan dengan memperhatikan urutan dalam matematika disebut permutasi, sedangkan yang tidak memperhatikan urutan disebut kombinasi. Berapa banyak pengaturan atau penyusunan yang mungkin terjadi ditentukan dengan menggunakan kaidah pencacahan. Dalam kaidah pencacahan, banyaknya penyusunan tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan salah satu atau gabungan dari metode berikut ini yaitu teknik membilang, permutasi dan kombinasi. Kita akan mempelajari dan berlatih menggunakan teknik membilang terlebih dahulu.

Secara umum cara menemukan banyaknya hasil yang mungkin muncul pada suatu percobaan adalah dengan menggunakan pendekatan-pendekatan seperti kaidah perkalian, permutasi dan kombinasi.

B. Kaidah Perkalian

Kaidah perkalian atau aturan pengisian tempat perkalian diilustrasikan sebagai berikut Jika tempat pertama dapat diisi dengan n_1 cara yang berbeda, tempat kedua dengan n_2 cara yang berbeda, …., tempat ke- k dengan n_k cara yang berbeda, maka banyaknya cara untuk mengisi k tempat yang tersedia adalah :

$\boldsymbol{n_1}$ **x** $\boldsymbol{n_2}$ **x … x** $\boldsymbol{n_k}$

Contoh :

Seorang polisi ingin membuatkan plat nomor kendaraan yang terdiri dari 4 angka, padahal tersedia angka-angka 1, 2, 3, 4, 5 dan dalam plat nomor itu tidak boleh ada angka yang sama. Berapa banyak plat nomor dapat dibuat?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut marilah kita pakai pengisian tempat kosong seperti terlihat pada bagan berikut:

a	**b**	**c**	**d**
5	**4**	**3**	**2**

Buat 4 buah kotak kosong yaitu kotak (a), (b), (c) dan (d) sebab nomor kendaraan terdiri atas 4 angka. Dalam hal ini :

1. Kotak (a) dapat diisi angka 1,2,3,4, atau 5, ada 5 cara.
2. Kotak (b) hanya dapat diisi dengan 5 -1 = 4 cara, karena 1 angka sudah diisikan di kotak (a).
3. Kotak (c) hanya dapat diisi dengan 5 -2 = 3 cara, karena 2 angka sudah diisikan di kotak (a) dan (b).
4. Kotak (d) hanya dapat diisi dengan 5 -3 = 2 cara, karena 3 angka sudah diisikan di kotak (a), (b), dan (c).

Jadi, polisi itu dapat membuat plat nomor kendaraan sebanyak 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 plat nomor kendaraan.

C. Kombinasi

Sebelum kita mempelajari kaidah pencacahan yang lain yaitu permutasi dan kombinasi, kita kaji terlebih dahulu definisi dan notasi faktorial.

Faktorial adalah hasil kali bilangan asli secara berurutan dari 1 sampai dengan *n* atau sebaliknya. Notasi faktorial menggunakan lambang *n*!. Jadi untuk setiap *n* bilangan asli didefinisikan

$$n! = 1.2.3.4....(n-1).n\ .$$

Selain itu didefinisikan juga bahwa 1!= 1 dan 0!= 1

Contoh :

1. 3!=1.2.3=6
2. 5!= 1.2.3.4.5 = 120

Kombinasi merupakan pengaturan atau penyusunan beberapa unsur tanpa memperhatikan urutan. Dengan kata lain, kombinasi adalah susunan unsur-unsur dengan tidak memperhatikan urutannya. Pada Kombinasi berlaku AB = BA. Misalnya kita akan mengirimkan tim lomba cerdas cermat yang terdiri dari 3 orang. Masalah tersebut jelas tidak memperhatikan atau mempertimbangkan urutan. Jadi definisi kombinasi disajikan berikut ini. Kombinasi sekumpulan unsur adalah suatu pengaturan dari semua atau sebagian unsur dengan tidak memperhatikan urutan.

Kombinasi *r* unsur yang diambil dari *n* unsur yang tersedia (dengan tiap unsur berbeda dan $r \leq n$) adalah susunan dari *r* unsur itu tanpa memperhatikan urutan. Banyaknya kombinasi *r* unsur yang diambil dari *n* unsur yang tersedia dinyatakan dengan ${}_nC_r$ dan ditentukan dengan rumus seperti berikut ini: $C_{(n,r)} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Contoh: dalam pelatihan bulutangkis terdapat 10 orang pemain putra dan 8 orang pemain putri. Berapa pasangan ganda yang dapat diperoleh untuk membuat tim ganda putra?

Karena banyaknya pemain putra ada 10 dan dipilih 2, maka banyak cara ada

$$C_{(10,2)} = \frac{10!}{2!\ (10-2)!}$$

$$= \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2!\,8!}$$

$$= 45$$

D. Permutasi

Seperti yang telah dikemukakan di atas, permutasi adalah pengaturan atau penyusunan beberapa unsur dengan memperhatikan urutan, sehingga AB $AB \neq BA$. Contoh masalah dalam kehidupan sehari-hari adalah pengaturan atau penyusunan kepanitiaan yang terdiri dari ketua, bendahara dan sekretaris. Jelas bahwa pada masalah tersebut urutan akan sangat mempengaruhi, sehingga urutan menjadi pertimbangan khusus. Dengan kata lain, permutasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia (dengan tiap unsur berbeda dan $r \leq n$) adalah susunan dari r unsur itu dalam suatu urutan.

Banyaknya permutasi biasa dilambangkan dengan nPr . Rumus umum banyaknya permutasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia. Secara umum notasi permutasi dirumuskan sebagai berikut :

$$P_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Pada definisi permutasi di atas dikatakan bahwa *n* unsur yang tersedia berbeda. Jika unsur-unsur yang tersedia memuat unsur yang sama, bagaimanakah cara menentukan banyaknya permutasi yang memuat unsur sama? Untuk menjelaskan hal ini, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh: Berapa banyak permutasi dari 3 huruf yang diambil dari huruf *A*, *A*, dan *B*?

Pada contoh di atas, unsur yang tersedia terdapat 3 huruf. Dari 3 huruf tersebut terdapat 2 unsur yang sama yaitu *A*. Andaikan kedua unsur yang sama tersebut kita anggap berbeda dengan membubuhkan indeks 1 dan 2 pada kedua huruf *A* tersebut, maka akan diperoleh 6 susunan atau permutasi yaitu

$A_1 A_2 B \quad A_2 A_1 B \quad A_1 BA_2 \quad A_2 BA_1 \quad BA_1 A_2 \quad BA_2 A_1$

Jika kita hilangkan indeks pada huruf *A* maka tinggal dipunyai 3 susunan saja yaitu:

AAB *ABA* *BAA*

Jadi banyaknya permutasi dari 3 unsur yang memuat 2 unsur yang sama adalahn P = $\frac{2.3}{2}$= 3. Secara umum rumus untuk permutasi n unsur yang memuat k, l, m, dan seterusnya unsur yang sama adalah sebagai berikut:

$$P = \frac{n!}{k!\,l!\,m!}$$

Selain itu terdapat pula permutasi siklis, merupakan permutasi yang cara menyusunnya melingkar, sehingga banyaknya menyusun n unsur yang berlainan dalam lingkaran. Adapun cara mencai permutasi siklis dinotasikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{P_{siklis} = (n-1)!}$$

E. Peluang

Konsep peluang berkaitan dengan percobaan atau eksperimen. Percobaan di sini didefinisikan sebagai pengamatan terhadap beberapa aktivitas atau proses yang memungkinkan timbulnya paling sedikit dua peristiwa tanpa memperhatikan peristiwa mana yang akan terjadi. Jadi di dalam suatu percobaan akan menghasilkan sesuatu yang tidak pasti. Artinya bahwa percobaan dapat dilakukan berkali-kali dalam kondisi yang sama dan memungkinkan hasil yang berbeda-beda. Istilah percobaan dalam subunit ini tidak terbatas pada percobaan di laboratorium tetapi percobaan diartikan sebagai prosedur yang dijalankan pada kondisi tertentu dimana prosedur itu dapat diulang berkali-kali pada kondisi yang sama dan hasil dari percobaan tersebut dapat diamati. Berikut ini contoh percobaan dan hasilnya:

Tabel 9.1 Contoh Percobaan

No.	Percobaan	Hasil Percobaan
1.	Pengukuran waktu reaksi kimia	Lama reaksi
2.	Interviu petani	Penghasilan bulanan
3.	Pengamatan sekumpulan hasil produksi	Banyak produk yang cacat
4.	Pelemparan mata uang logam 1 kali	Sisi gambar atau angka

Berdasarkan contoh di atas definisi percobaan atau eksperimen adalah proses pengumpulan data tentang fenomena tertentu yang menunjukkan adanya variasi di dalam hasilnya. Sedangkan hasil percobaan didefinisikan sebagai hasil yang mungkin terjadi, jika percobaan tersebut dilakukan. Setiap hasil dari suatu percobaan jika dihimpun dalam suatu himpunan maka himpunan tersebut dinamakan ruang sampel atau ruang contoh. Ruang sampel dalam ilmu peluang biasanya dinotasikan dengan huruf S. Setiap anggota dalam ruang sampel disebut titik sampel. Ruang sampel dapat dibedakan menjadi dua jenis jika dilihat dari banyaknya anggota ruang sampel yaitu:

1. Ruang sampel diskrit yaitu ruang sampel yang mempunyai banyak anggota berhingga.
2. Ruang sampel kontinu yaitu ruang sampel yang mempunyai banyak anggota tak berhingga.

Ruang sampel yang kita bicarakan dalam subunit ini dinyatakan dalam bentuk himpunan. Himpunan bagian dari ruang sampel disebut kejadian. Jadi kejadian merupakan kumpulan dari satu atau lebih hasil yang terjadi pada sebuah percobaan. Melihat definisi kejadian, ruang sampel dan himpunan kosong juga merupakan kejadian. Dinyatakan dengan n(s). Contohnya, jika melempar sekeping uang logam maka banyaknya ruang sampel atau ruang kejadian adalah dua yaitu munculnya angka atau gambar.

Sedangkan titik sampel disebut juga titik kejadian atau anggota ruang sampel pada suatu percobaan. Contoh titik sampel pada dua keping uang logam (gambar, gambar), (gambar, angka), (angka, gambar), (angka, angka).

Kejadian dalam suatu percobaan dinyatakan dengan himpunan. Pada teori himpunan, dua himpunan atau lebih dapat dikenai operasi komplemen, gabungan atau irisan. Operasi-operasi tersebut juga dapat dikenakan pada kejadian. Berikut ini diberikan contoh untuk menjelaskan hal tersebut.

Contohnya, diketahui percobaan melempar sebuah dadu satu kali. Dari percobaan tersebut, akan dilihat kejadian munculnya mata dadu:

a. selain ganjil
b. genap atau prima
c. ganjil dan prima

Ruang sampel dari percobaan tersebut adalah $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

1. Misalnya A adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil yaitu A = {1,3,5}, maka kejadian munculnya mata dadu selain ganjil merupakan himpunan Ac = {2,4,6}.
2. Misal B adalah kejadian munculnya mata dadu genap yaitu B = {2,4,6} dan C kejadian munculnya mata dadu prima yaitu C = {2,3,5}. Kejadian munculnya mata dadu genap atau prima berarti $B \cup C$ = {2,3,4,5,6}.
3. Misal D adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil yaitu D = {1,3,5}.
4. Kejadian munculnya mata dadu ganjil dan prima berarti mata dadu yang muncul ganjil sekaligus prima yaitu $D \cap C = \{3,5\}$.

F. Peluang Suatu Kejadian dan Penafsirannya

Peluang atau nilai kemungkinan adalah perbandingan antara kejadian yang diharapkan muncul dengan banyaknya kejadian yang mungkin muncul. Bila banyak kejadian yang diharapkan muncul dinotasikan dengan n(A), dan banyaknya kejadian yang mungkin muncul (ruang sampel = S) dinotasikan dengan n(S) maka :Peluang kejadian A ditulis:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Contoh :
Peluang muncul muka dadu nomor 5 dari pelemparan sebuah dadu satu kali adalah….
Jawab:
n(5) = 1 dan

n(S) = 6 $\rightarrow$ yaitu: 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$\text{Jadi, } \mathrm{P}(5) = \frac{n(5)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

Kisaran nilai peluang, jika kejadian A dalam ruang sampel S selalu terjadi, maka n(A) = n(S), sehingga peluang kejadian A adalah

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)} = 1$$

Contoh :
Dalam pelemparan sebuah dadu, berapakah peluang munculnya angka-angka di bawah 10?
Jawab :
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\rightarrow$ n (S) = 6
A = munculnya angka-angka di bawah 10
{1, 2, 3, 4, 5, 6} $\rightarrow$ n (A) = 6

$$\mathrm{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$

Selain itu terdapat pula Frekuensi Harapan suatu kejadian atau peluang, didefinisikan sebagai hasil kali banyak percobaan (n) dengan peluang kejadian. Frekuensi harapan dirumuskan sebagai :

$$\boldsymbol{F(A) = n \times P(A)}$$

Contoh:

Pada percobaan melempar sebuah uang logam sebanyak 300 kali, frekuensi harapan munculnya muka gambar adalah …

Jawab:

n = 300 kali, n(A) = 1, n(S) = 2

P(A) $= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

Jadi, F (A) = n x P(A) = 300 x $\frac{1}{2}$ = 150

Kebalikan dari sebuah peluang disebut Peluang Komplemen Suatu Kejadian, A dinotasikan $P(A^C)$ adalah peluang tidak terjadinya kejadian A.

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Atau

$$P(A^C) + P(A) = 1$$

Contoh:

Dalam sebuah kotak terdapat bola yang diberi nomor 1 sampai 10. jika diambil sebuah bola, berapakah peluang munculnya :

a. Nomor prima
b. Bukan nomor prima

Jawab :

a. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

   n(S) = 10

Misal munculnya nomor prima adalah A, maka

$$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\} \rightarrow n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0,4$$

b. Bukan nomor prima = A^c, maka peluangnya = P(A^c).

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$
$$= 1 - 0,4 = 0,6$$

G. Peluang Gabungan Dua Kejadian

Untuk setiap kejadian A dan B berlaku:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Catatan :

$P(A \cup B)$ dibaca "peluang kejadian A atau B"

$P(A \cap B)$ dibaca "peluang kejadian A dan B"

Contoh :
Dalam melambungkan sebuah dadu, jika A adalah kejadian munculnya bilangan ganjil dan B adalah kejadian munculnya bilangan prima, tentukan peluang kejadian munculnya bilangan ganjil atau prima !
Jawab :
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} → n(S) = 6
A = Bilangan ganjil : {1, 3, 5} → $P(A) = \frac{3}{6}$
B = Bilangan prima : {2, 3, 5} → $P(B) = \frac{3}{6}$

$$A \cap B = \{3,\ 5\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Jadi, peluang kejadian munculnya bilangan ganjil atau prima adalah $\frac{2}{3}$

Peluang Kejadian yang Saling Lepas, untuk setiap kejadian A dan B berlaku:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jika $\cap B = \emptyset$, maka $P(A \cap B) = 0$, sehingga :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dalam kasus ini A dan B disebut dua kejadian *saling lepas*.

Contoh :

Dalam sebuah kantong terdapat 10 kartu, masing-masing diberi nomor yang berurutan. Sebuah kartu diambil dari dalam kantong secara acak. Misal A adalah kejadian bahwa yang terambil kartu bernomor genap dan B adalah kejadian terambil kartu bernomor prima ganjil :

a. Selidiki apakah kejadian A dan B saling lepas
b. Tentukan peluang kejadian A atau B

Jawab :

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

n(S) = 10

A = {2, 4, 6, 8, 10} → $P(A) = \frac{5}{10}$

B = {3, 5, 7} → $P(B) = \frac{3}{10}$

a. $A \cap B = \{\ \}$ maka A dan B saling lepas.

b. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{5}{10} + \frac{3}{10}$$
$$= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Selain itu, terdapat Kejadian Bersyarat. Contohnya, dalam sebuah kotak terdapat 6 bola merah dan 4 bola putih. Jika sebuah bola diambil dari kotak berturut-turut sebanyak 2 kali tanpa pengembalian, tentukan peluang yang terambil keduanya bola merah. Pada soal tersebut terdapat syarat tanpa pengembalian. Maka, Jawabannya:

$$P(A) = \frac{6}{10}; P(B|A) = \frac{5}{9}$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$
$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

Jadi, peluang yang terambil kedua-duanya bola merah tanpa pengembalian adalah $\frac{1}{3}$

Jika tidak terdapat syarat khusus maka peluang dua buah kejadian tersebuut dinamakan, Kejadian Saling Bebas. Jika dua kejadian A dan B saling bebas stokastik, maka peluang terjadinya kedua kejadian tersebut secara bersamaan adalah yang dinyatakan oleh $P(A \cap B)$, adalah :

$$P(A \cap B) = \mathrm{P(A)} \times P(B)$$

Contohnya, sebuah kotak berisi 11 bola yang diberi nomor 1 hingga 11. Dua bola diambil dari kotak secara bergantian dengan pengembalian. Tentukanlah peluang terambilnya bola-bola bernomor bilangan kelipatan 4 dan nomor 9 !

Jawab :

n(S) = 11

A = Kelipatan 4 = {4, 8} → $P(A) = \frac{2}{11}$

B = Bola bernomor 9 → $P(B) = \frac{1}{11}$

$$P(A \cap B) = \mathrm{P(A)} \times P(B)$$
$$= \frac{2}{11} \times \frac{1}{11} = \frac{2}{121}$$

LATIHAN SOAL

1. Hitunglah ${}_6P_1$, ${}_4P_4$, dan ${}_7P_3$!
2. Hitunglah permutasi 6 unsur yang diambil dari 7 unsur yang tersedia !
3. Berapa banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf M, A, D, dan U !
4. Berapa banyak susunan huruf yang terdiri dari 2 huruf yang diambil dari huruf-huruf H, U, T, A, dan N!
5. Di dalam suatu kelas akan dilakukan pemilihan panitia keakraban siswa yang terdiri dari ketua, wakil ketua, dan bendahara. Jumlah siswa dalam kelas tersebut 30 orang. Berapa banyak susunan panitia yang mungkin terjadi?
6. Dalam pelatihan bulutangkis terdapat 10 orang pemain putra dan 8 orang pemain putri. Berapa pasangan ganda yang dapat diperoleh untuk tim ganda putri dan tim Ganda campuran!

BAB X
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR

A. Pendahuluan

Salah satu hal yang dipelajari pada matematika adalah persamaan. Persamaan pada matematika terdiri dari beberapa macam, dan salah satunya adalah persamaan linear. Persamaan linear merupakan persamaan aljabar yang dapat digambarkan sebagai garis lurus pada koordinat kartesius. Lebih lanjut, beberapa persamaan linear dapat membentuk suatu sistem yang disebut sistem persamaan linear. Sementara itu, pengertian dari pertidaksamaan linear adalah kalimat terbuka dalam matematika yang memiliki variabel dengan derajat satu lalu dihubungkan menggunakan tanda pertidaksamaan. Tanda pertidaksamaan berarti tanda selain sama dengan (=), yaitu lebih dari (>), kurang dari (<), lebih dari sama dengan (≥), dan kurang dari sama dengan (≤).

B. Persamaan Linear

Variabel ($ax + by + c = 0$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$) maupun persamaan linear dalam n variabel $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n + b = 0$ dengan variabel-variabelnya $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dan konstanta-konstanta $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dan $b \in R$. Demikian pula dengan himpunan penyelesaian dari suatu persamaan linear baik secara aljabar maupun secara geometri telah kita pelajari dalam mata kuliah lainnya.

Sebuah himpunan terbatas dari suatu persamaan linear dalam variabel-variabel x_1, x_2, x_3, ... , x_n disebut sistem persamaan linear. Urutan bilangan-bilangan s_1, s_2, s_3, ... , s_n disebut suatu penyelesaian dari sistem persamaan linear. Jika $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$, ..., $x_n = s_n$ adalah penyelesaian untuk setiap persamaan linear dalam sistem tersebut. Sebagai contoh, kita perhatikan sistem persamaan linear dari dua persamaan dalam dua variabel.

$$2x - 3y = 12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x + y = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

yang mempunyai penyelesaian x = 3 dan y = -2 atau (3 , -2) karena pasangan bilangan ini memenuhi sistem tersebut, artinya memenuhi persamaan (1) dan persamaan (2). Sedangkan harga-harga x = 2 dan y = -1 bukanlah penyelesaian-penyelesaian dari sistem persamaan tersebut karena pasangan bilangan (2 , -1) hanya memenuhi persamaan (2), tetapi tidak memenuhi persamaan (1). Jadi, sebuah penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear, haruslah memenuhi setiap persamaan linear dalam sistem tersebut.

Sebarang sistem dari m persamaan linear dalam n variabel dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

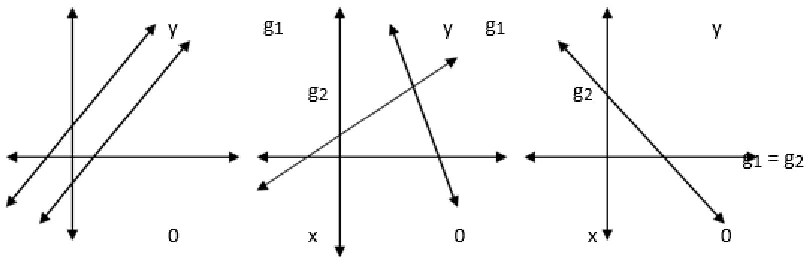
dengan x_1, x_2, x_3, ... , x_n adalah variabel-variabel yang tidak diketahui, sedangkan indeks-indeks dari a dan b menyatakan konstanta. Jika b_1, b_2, b_3,... , b_n konstanta-konstanta yang tidak nol semuanya maka sistem persamaan linear disebut sistem persamaan linear nonhomogen. Jika konstanta-konstanta $b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_n = 0$ maka sistem persamaan linearnya disebut sistem persamaan linear homogen.

Adapula sistem persamaan linear dua vriabel**.** Sebagaimana telah kita ketahui bahwa sebuah persamaan linear dengan sebuah variabel dapat digambarkan sebagai grafik sebuah garis lurus. Dengan demikian, suatu sistem persamaan linear yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel, grafiknya dapat digambarkan sebagai dua garis lurus yang terletak pada bidang koordinat. Sekarang kita tinjau bentuk umum sistem persamaan linear (SPL) yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel, dan misalkan variabel-variabelnya x dan y, yaitu:

$a_1x + b_1y = c_1$ .... (1)

$a_2x + b_2y = c_2$ .... (2)

dengan a_1, b_1 tidak sekaligus kedua-duanya nol, demikian pula a_2, b_2 tidak kedua-duanya nol.



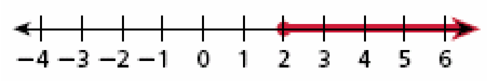
Gambar 10. 1 Hubungan Dua Garis

a. Garis g_1 mungkin sejajar dengan garis g_2, dalam kasus ini tidak ada perpotongannya dan sebagai konsekuensinya tidak ada penyelesaian untuk sistem tersebut.
b. Garis g_1 mungkin berpotongan dengan garis g_2 di satu titik, dalam hal ini maka sistem tersebut hanya mempunyai (tepat mempunyai) satu penyelesaian.
c. Garis g_1 mungkin berimpit dengan garis g_2, dalam kasus ini ada tak hingga banyaknya titik potong, dan sebagai konsekuensinya maka tak terhingga banyaknya penyelesaian untuk sistem tersebut.

C. Pertidaksamaan Linear

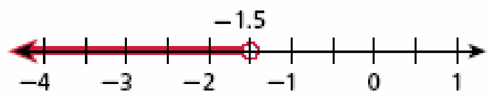
Sebuah Pertidaksamaan adalah pernyataan bahwa dua kuantitas tidak setara nilainya. Pertidaksamaan Linear adalah pertidaksamaan yang linear, dimana *variabel*nya berpangkat satu. Pertidaksamaan menggunakan tanda seperti kurang dari (<), kurang dari sama dengan ($\leq$), lebih dari (>) dan lebih dari sama dengan ($\geq$).

Contohnya, $r \geq 2$, pertidaksamaan ini menyatakan bahwa r adalah gabungan dari semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan 2. Perhatikan lingkaran penuh pada titik 2.



b < -1.5

Sedangkan pertidaksamaan ini mengatakan bahwa *b* adalah gabungan dari semua bilangan real yang lebih kecil dari -1.5. Perhatikan lingkaran kosong di titik -1.5



Cari yang mana *variabel* dari Pertidaksamaan Linear tersebut. Contoh: $5x – 2 < 10$, variabelnya *x*. Cek untuk angka-angka yang diberikan.

Contoh: Cek apakah -1, 10, dan 2 memenuhi pertidaksamaan $5x – 2 < 10$.

(5.-1) – 2 < 10 → -5-2<10 →-7<10 (Benar)

(5.10) – 2 <10 →48 < 10 (Salah)

(5.2) – 2 < 10 →8 < 10 (Benar)

Sederhanakan Pertidaksamaannya :

$$5x – 2 < 10$$

$$5x < 10 + 2$$

$5x < 12$

$x < 12/5$

Hati-hati dengan pembagian bilangan negatif

$-2x + 10 > 18$

$-2x > 18 – 10$

$-2x > 8$

$x < 4$

LATIHAN SOAL

1. Jika x dan y merupakan penyelesaian sistem persamaan $2x - y = 7$ dan $x + 3y = 14$, maka nilai $x + 2y$ adalah $\cdots$ ·
2. Di dalam kandang terdapat kambing dan ayam sebanyak 13 ekor. Jika jumlah kaki hewan tersebut 32 2kor, maka jumlah kambing dan ayam masing-masing adalah....
3. Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan di bawah ini:
   a. b. $2 – 3x \geq 2x + 12$
   b. $4x + 1 < x – 8$
4. Tentukan himpunan penyelesaian dari:
   a. $2x – 3 < 4x – 3 < 2x + 2$
   b. $2x < 3x + 10 < 4x$
5. Di dalam kandang terdapat kambing dan ayam sebanyak 13 ekor. Jika jumlah kaki hewan tersebut 32 2kor, maka jumlah kambing dan ayam masing-masing adalah….

BAB XI
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

A. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari kita tidak menyadari bahwa konsep persamaan kuadrat ini sering kita jumpai, bahkan suatu hal yang kita sering lakukan pun tidak pernah kita pikirkan bahwa terdapat suatu konsep yang mendukung dari kegiatan tersebut konsep persamaan kuadrat, misalnya saja dalam permainan bola basket yaitu bagaimana kelengkungan bola yang dilemparkan ke ring sehingga bisa masuk dengan tepat

B. Persamaan Kuadrat

Fungsi polinom dengan pangkat variabel bebasnya paling tinggi berderajat dua dinamakan fungsi kuadrat. Bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$,a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. a disebut koefisien x^2 , b koefisien x dan c konstanta. Contohnya, koefisien persamaan kuadrat $6x^2 - 7x + 10 = 0$, $a = 6$, $b = -7$, dan $c = 10$. Untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat bisa menggunakan beberapa cara, yakni dengan memfaktorkan, melengkapi kuadrat sempurna dan rumus ABC**.** Berikut uraiannya:

1. Cara memfaktorkan

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat engan pemfaktoran

$x^2 - 5x – 6 = 0$
Jawab:
$x^2 - 5x – 6 = 0$
(dua bilangan jika dikali –6 dan jika ditambah –5)
$(x - 6)(x + 1) = 0$
$x – 6 = 0$ atau $x + 1 = 0$
$x = 6$ atau $x = -1$

Berkaitan dengan nilai-nilai a, b, dan c, dikenal beberapa persamaan kuadrat, diantaranya adalah:

1. Jika a = 1, maka persamaan menjadi $x^2 + bx + c = 0$ dan persamaan seperti ini disebut persamaan kuadrat biasa.
2. Jika b = 0, maka persaman menjadi $x^2 + c = 0$ dan persaman seperti ini disebut persamaan kuadrat sempurna.
3. Jika c = 0, maka persamaan menjadi $ax^2 + bx = 0$ dan persamaan seperti ini disebut peramaan kuadrat tak lengkap.
4. Jika a, b, dan c bilangan-bilangan rasional maka $ax^2 + bx + c = 0$ disebut persamaan kuadrat rasional.

2. Melengkapi Kuadrat Sempurna

Konsep dasar dari metode melengkapkan persamaan kuadrat sempurna adalah merubah persamaan kuadrat seperti $ax^2 + bx + c = 0$ dengan cara melengkapkan kuadrat:

1. Pindahkan konstanta c ke ruas kanan.
2. Bagi kedua ruas dengan koefisien suku-x^2, a.
3. Hitung $[\frac{1}{2} \times (\frac{b}{a})]^2$ dan jumlahkan kedua ruas dengan hasilnya.

4. Faktorkan ruas kanan sebagai kuadrat binomial; sederhanakan ruas kanan.
5. Selesaikan dengan menggunakan sifat akar kuadrat dari suatu persamaan.

Contonya:

$x^2 - 6x + 5 = 0$

Jawab:

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x^2 - 6x = -5$

$x^2 - 6x + 9 = -5 + 9$

$(x - 3)^2 = 4$

$x - 3 = \pm \sqrt{4}$

$x = \pm 2 + 3$

Jadi, $x = 2 + 3 = 5$ atau $x = -2 + 3 = 1$

3. Menggunakan Rumus ABC

Selain menggunakan cara pemfaktoran, untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah dengan menggunakan rumus kuadrat atau sering disebut rumus ABC. Berikut adalah rumusnya:

$$\boxed{x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Contohnya:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 6 = 0$ dengan cara menggunakan rumus ABC!

$x^2 + 5x + 6 = 0$, berarti a = 1, b = 5, dan c = 6.

Dengan menggunakan rumus kuadrat maka diperoleh:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2}-4ac}{2a} = \frac{-5 \pm\sqrt{5^2}-4.1.6}{2.1} = \frac{-5 \pm\sqrt{25}-24}{2} = \frac{-5 \pm\sqrt{1}}{2} = \frac{-5\pm1}{2}$$

Jadi,

$x_1 = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2}$ = -2 atau $x_2 = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2}$ = -3

Jadi akar-akarnya adalah x_1= -2 atau x_2= -3.

Atau Hp = {-2, -3}. Apabila diurutkan dari nilai x yang kecil, maka dapat juga ditulis Hp = {-3, -2}.

C. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu pertidaksamaan yang mempunyai variabel dengan pangkat tertinggi dua.

Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat :

$ax^2 + bx + c > 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0$

$ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \leq 0$

dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$.

Langkah-langkah untuk mencari himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat:

a. Nyatakan pertidaksamaan kuadrat dalam bentuk persamaan kuadrat (jadikan ruas kanan sama dengan 0).
b. Carilah akar-akar dari persamaa kuadrat tersebut.
c. Buatlah garis bilangan yang memuat akar-akar tersebut, tentukan tanda (positif atau negatif) pada masing-masing interval.
d. Himpunan penyelesaian diperoleh dari interval yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.

Contohnya:

Tentukan HP dari $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

Penyelesaian :

Pembuat nol.:

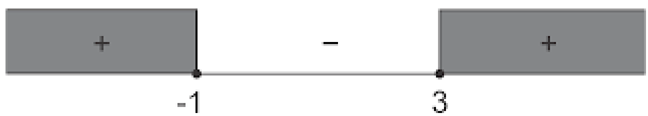
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1$ atau $x = 3$

Untuk interval $-1 < x < 3$, ambil $x = 0$

$x^2 - 2x - 3 = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$ $(-)$



Karena pertidaksamaan bertanda "≥" , maka daerah penyelesaian berada pada interval yang bertanda (+).

∴ HP = $\{x \leq -1 \text{ atau } x \geq 3\}$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan akar-akar persamaan kuadrat berikut dengan rumus ABC!
   a. $4x^2 – x = 0$
   b. $3x^2 –7x + 2 = 0$
   c. $10 + x = 2x^2$
   d. $2x^2 –7x + 3 = 0$
2. Tentukan penyelesaian dari $x^2 + 5x + 4 = 0$!
3. Himpunan penyelesaian dari *x2 – x – 6 < 0* adalah…..
4. Carilah nilai m yang memenuhi $2m^2 – 7m – 4 = 0$!
5. Himpunan penyelesaian *x2 – x – 6 > 0* untuk *x* ∈*R* adalah....

DAFTAR PUSTAKA

Hartono dan Susanah. (2002). *Geometri*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.

Isrok'atun. (2010). *Matematika Dasar*. Serang: UPI Kampus Serang.

Jhon, Bird. (2002). *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Maulana. (2017). Konsep Dasar Matematika dan Pengembangan Kemampuan Berpikir Kritis Kreatif. Sumedang: UPI Sumedang Press.

Maulana. (2008). *Dasar-dasar Keilmuan Matematika*. Subang: Rayyon Press.

Rinaldi, Munir. (2003). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Van De-Wale, J., dkk. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Develovmentally*. USA: Pearson Education.

Wahyudin. (2003). *Buku Paket Pelajan Matematika untuk SLTP*. Bandung: Epsilon Grup.

RIWAYAT PENULIS

VIRA PRATIWI, lahir di Garut Jawa Barat pada 23 Mei 1994. Penulis Menempuh pendidikan formal di SD Negeri Sukamaju V lulus tahun 2005, SMP Negeri 1 Cilawu lulus tahun 2008, SMA Negeri 8 Garut lulus tahun 2011. Menempuh jenjang sarjana di Universitas Pendidikan Indonesia Kampus Tasikmalaya lulus tahun 2015. Setelah itu, melajutkan belajar di Sekolah Pascasarjana Program Studi Pendidikan Dasar Universitas Pendidikan Indonesia lulus tahun 2018. Saat ini, aktif mengajar di program studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Bhayangkara Jakarta Raya.

NUNUY NURKAETI, kelahiran Majalengka, 29 September 1992. Pada tahun 2005 penulis lulus dari SDN Pasirmuncang 2, di SMPN 4 Majalengka lulus tahun 2008, SMAN 1 Majalengka dan lulus tahun 2011. Tahun 2011 melanjutkan ke UPI Kampus Sumedang menggambil program studi S1 Pendidikan Guru Sekolah Dasar lulus tahun 2015. Melanjutkan pendidikan S2 di Universitas Pendidikan Indonesia pada jurusan Pendidikan Dasar, lulus tahun 2018. Saat ini aktif mengajar di program studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar Fakultas Ilmu Pendidikan Universitas Bhayangkara Jakarta Raya.

AWIRIA, kelahiran Jakarta, 15 November 1986. Telah menyelesaikan pendidikan S1 Ilmu Sosial Politik, Program Studi PPKn di Universitas Negeri Jakarta, S2 Pendidikan Dasar, Universitas Negeri Jakarta, dan baru saja menyelesaikan studi S3 Program Doktor di Universitas Negeri Jakarta. Pengajar di beberapa perguruan tinggi, diantaranya Universitas Muhammadiyah Tangerang, Universitas Terbuka Jakarta dan Universitas Bhayangkara Jakarta Raya.

KONSEP DASAR MATEMATIKA

Vira Pratiwi
Nunuy Nurkaeti
Awiria