LA MODELACIÓN: UNA POSIBILIDAD PARA DESARROLLAR LA ESTIMACIÓN DECANTIDADES CONTINUAS EN LA MAGNITUD VOLUMENEN ESTUDIANTES DE GRADO 9°

YANETH MILENA AGUDELO MARÍN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2013

Tesis para obtener el grado de Magister en Enseñanza de las Ciencias

La modelación: una posibilidad para desarrollar la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen en estudiantes de grado 9°

Yaneth Milena Agudelo Marín

Tutor

Ligia Inés García Castro
Candidata a Doctora en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud

Universidad Autónoma de Manizales

Departamento de Educación

Maestría en Enseñanza de las Ciencias

Manizales

2013

Agradecimientos

- A mi asesora, candidata a Doctora Ligia Inés García Castro por sus consejos oportunos en todos los momentos.

- Al Colegio del Sagrado Corazón de Jesús Hermanas Bethlemitas y en especial a las estudiantes del grado 9°, por las facilidades concedidas sin las cuales este trabajo no sería posible.

- A mi esposo Carlos Alberto y mi hija Geraldine por el tiempo que cedieron para que me pudiera dedicar a este trabajo.

Contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Anexos

1. Planteamiento del Problema

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es necesario desarrollarhabilidades y capacidades para interactuar de manera efectiva en diversos contextos –trabajar en equipo, capacidad de observar y reflexionar matemáticamente, analizar, tomar decisiones, planificar estrategias para resolver una situación, comunicarse efectivamente usando lenguaje matemático, estimar la utilidad de las soluciones potenciales a los retos planteados- que contribuyan a su comprensión. Sin embargo, este proceso en lo que refiere específicamente a la enseñanza se ha visto afectado por una larga cadena de situaciones que impiden la optimización del tiempo y la calidad de la Educación Matemática que se imparte a los estudiantes en las instituciones educativas, entorpeciendo la elaboración apropiada de conceptos y el desarrollo de procesos lógicos del pensamiento que eleven la capacidad para resolver situaciones en contexto. A este respecto se refieren diversos autores –Miguel de Guzmán (1985), Carlos Eduardo Vasco (1994), RodneyBassanezi y María SalettBiembengut (1997), Juan Godino (2002), Luis Rico Romero (2005), María Trigueros (2009), por mencionar algunos– quienes investigan métodos más efectivos paraacercarse desde la didáctica de las matemáticasy desde sus distintas regiones (números, geometría, medidas, estadística, probabilidad, álgebra)a los requerimientosacadémicos y cotidianos de los estudiantes,coincidiendo en la necesidad de implementar metodologías y estrategias que permitan una comprensión profunda de las situaciones y relaciones que se viven diariamente.

Los aspectos mencionados versan sobre las relaciones entre lasmatemáticas y la realidad, ítems que vinculan al ser humano con fenómenos físicos que constantemente plantean situaciones desafiantes, que exigen al estudiante desarrollar planes de actuación que le permita desenvolverse hábilmente adquiriendo confianza y responsabilidad en la validación de sus argumentos y la adquisición de sus conocimientos; procesos que no se pueden llevar a cabo sin revisar detenidamente la actividad matemática planeada por el profesor y ejecutada por él mismo y sus estudiantes. Al respecto la comunidad académica en su mayoría, considera que dicha revisión debe concebirse como una auto-reflexión, pues como Samper, C., Camargo, L & Leguizamón, C,. (2003, pág. 60) indican:

> …el rol del profesor es esencial, pues es el responsable de gestionar un ambiente de aprendizaje que permita a los estudiantes explorar relaciones de diferentes maneras. La apertura que tengan a las distintas formas de razonar, les dará seguridad para hacer conjeturas con base en la observación de patrones, validar conjeturas, generar preguntas y respuestas y usar su conocimiento para explorar diferentes vías de solución

No obstante la premisa anterior, al revisar las relaciones entre las matemáticas y la realidad (desde la pedagogía, la psicología, la didáctica, la investigación en Educación Matemática,entre otras) surgen diversos aspectos propios de la enseñanzay el aprendizaje que se deben desarrollar para garantizar la denominada "*Alfabetización numérica"*entendida por Fernández, I (2010, pág. 3) como: "*Capacidadque todos los ciudadanos deben adquirirpara enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la* ***estimación*** *y el cálculo mental o escrito"*, peroque pocas veces los docentes la apropian y como consecuencia de ésta práctica se hizo común que algunos procesos y dominios se privilegien en las aulas más que otros.

Tal es el caso de la estimación, pues aunque se conoce su incidencia en el cálculo mental, en el dominio de las relaciones numéricas y en losprocesos de medida de cantidades continuas y discretas, ni los profesores de matemáticas ni las normativas ministeriales en Colombia hacen énfasis en la importancia de su desarrollo. Una muestra de ello, es que a pesar de estar contemplada en los Lineamientos Curriculares. Matemáticas, emanados para Colombia por el Ministerio de Educación Nacional (MEN)(1998) "*En cuanto a la medida se refiere, los énfasis están en… desarrollar el sentido de la medida (que involucra la estimación)…"*es omitida casi por completo en los Estándares para la excelencia en la educación en su capítulo estándares curriculares para el área de matemáticaspresentados al país en 2002 con la intención de superar las dificultades de calidad y eficiencia del sistema educativo.Es oportuno destacar en este apartado, que un grupo dedocentes-investigadores convocados por la Asociación Colombiana De Matemática Educativa (ASOCOLME), realizó un análisis crítico a los estándares curriculares correspondientes al área de Matemáticas, revisando la coherencia, pertinencia, debilidades y fortalezas que a nivel conceptual presentaba el documento y con las respuestas obtenidas elaboraron un cuaderno denominado “Estándares Curriculares – Área de Matemáticas: Aportes para el análisis”, en el que se ponen de manifiesto (entre otros) los vacíos que con respecto a la estimación se presentan. Por ejemplo, en los estándares referentes al estudio de la estructura de los conjuntos numéricos hallaron que ni siquierase sugiere a los docentes que transversalicen la estimación como un eje del currículo a pesar de que es sabido que los procesos de medida tienen gran incidencia en la construcción de los diferentes conjuntos numéricos. De igual forma, hallaron que en el capítulo sobre pensamiento métrico y sistemas de medida, solo en los grados 2° y 3° se plantea la estimación y la diferencia entre magnitudes continuas y discretas. Además se destaca en el informe que en estudios como el TIMMS (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias) los estudiantes colombianos obtienen puntajes inferiores al promedio obtenido por los estudiantes internacionales, solo comparables con los puntajes más bajos de los catalogados como en Alto rendimiento. Desafortunadamente, en la revisión también se detectó la poca incidencia que tiene para losasesores ministeriales y los docentes las distinciones entre magnitudes; prueba de ello es que solo hasta grado 6° se sugiere trabajar con la selección de unidades de medida, hecho que el grupo de investigadores precisa comoposible detonante del bajo rendimiento en las diferentes pruebas que se aplican en el país a diferentes grados.

Precisamente siguiendo esta misma línea de trabajo, son varios los investigadores que en búsqueda de estrategias de enseñanza y aprendizaje eficientes de la matemática, hallaron en la modelación una oportunidad para mejorar y optimizar diferentes procesos en el aula. Al respecto, Trigueros, M (2009) en su trabajo *“El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas”* hace un detallado resumen de lo que se entiende por modelación en Educación Matemática, destacando que esta se usa en el aula según la postura epistemológica y los objetivos de quien la implemente.

Para Blum*et al*, citado por Villa-Ochoa, J (2009) La modelación es un proceso que se nutre de las interacciones que se dan en la clase de matemáticas y que gracias a su versatilidad ha acaparado la atención de los investigadores en Educación Matemática desde diferentes ópticas. Villa-Ochoa da cuenta de que en la literatura sobre modelación,las investigaciones a nivel internacional se destacan al punto que existen grupos de estudio con fines muy variados: epistemología, modelación como competencia y su relación con otras competencias, prácticas de enseñanza y aprendizaje de la modelación y sus aplicaciones, aportes de la tecnología a la modelación y sus aplicaciones, implementación de la modelación como proceso y recurso en el aula, todos ellos con el propósito de favorecer la elaboración de conceptos, el desarrollo de habilidades de pensamiento lógico, la resolución de situaciones cotidianas, la motivación por las matemáticas, conseguir mejorías en su desempeño y formar hábitos de estudio (entre otros) en los estudiantes.

Por tal motivo, reconociendo que en el entorno colombianose presentan limitaciones en la dirección del proceso de enseñanza y aprendizaje de la medición en matemáticas y que se hace necesario reflexionar entorno a la estimación como habilidad inherente al proceso de medir, se plantea la siguiente situación:

¿De qué manerala modelación favorece el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitudvolumen en estudiantes de grado 9°?

2. Justificación

"He descifrado que medir es matemáticas"
Niña de 1er grado[1]

Desafortunadamente para muchos profesores el objetivo de las prácticas usuales de enseñanza con respecto al dominio de la medida es la memorización de unidades y la conversión interna dentro un sistema de medidas; así como la aplicación de fórmulas y la realización de cálculos numéricos para entrenar a los estudiantes en la resolución de ejercicios, enseñándoles lo que se puede llamar procedimientos de algoritmización a realizar mecánicamente (Chamorro, M. 1995). Existe una escasa consideración de los aspectos cualitativos requeridos para la construcción de diferentes magnitudes: Identificación de atributos medibles, comparación de objetos atendiendo a una cierta magnitud, construcción del concepto de unidad de medida o manejo del error en las mediciones, además, desde lo cuantitativo, no se adjudica la suficiente importancia a actividades de medición directa y al uso de instrumentos de medida o estimaciones, tal como lo planteó la Asociación Colombiana de Matemática Educativa ASOCOLME (2002) al analizar la vinculación que puede tener este tratamiento didáctico con el desempeño de los estudiantes en los procesos de medición.

En consecuencia, corresponde a los docentes organizar y planificar actividades que potencien el desarrollo geométrico-métrico de los niños y jóvenes, poniendo estas nociones dentro de un contexto específico que les permita resolver situaciones cotidianas. De ahí la necesidad de permitir que los estudiantes realicen experiencias sensoriales (ver, tocar, oír, etc.), para pasar del espacio vivenciado (en el colegio, en el patio, en el parque, etc.) a un espacio representado.Teniendo en cuenta las reflexiones anteriores, en esta investigación se considera que la implementación de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje puede ser una herramienta didáctica que posibilite la visualización clara por parte del estudiante de la estrecha relación que hay entre el mundo real y la medición, debido a que como afirma Blomhøj, M (2004)"Las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre

[1]Castle&Needham, citados por Colón, H (2009)

las cuales construir importantes conceptos matemáticos… en las que se incluya el uso consciente y autónomo de dichas herramientas”

De acuerdo con la situación expuesta, la pertinencia de esta investigación se manifiesta en el tratamiento didáctico que se da al proceso de modelación, al implementarlo como una metodología de enseñanza y aprendizaje dirigida específicamente a potenciar la estimación en el ámbito del dominio de la medición de cantidades continuas, el cual puede convertirse en un referente a seguir para estudios similares en el país en el marco del dominio de las competencias matemáticas.

Siguiendo a Chamorro, M. citada por Cañón, M (2009), el reto didáctico va a consistir en encontrar situaciones didácticas que permitan la construcción con significado de los conceptos esenciales de medida. En este sentido, este trabajo pretende ampliar los espacios de reflexión sobre el desarrollo de la estimación en cantidades continuas en volumen, buscando una ruta clara y precisa con la implementación de la modelación como método de enseñanza y aprendizaje en el aula, esperando que “cuando los alumnos enfrenten situaciones problémicas de interés sean capaces de explorar formas de representarlas en términos matemáticos, de explorar las relaciones que aparecen en esas representaciones, manipularlas y desarrollar ideas poderosas que se puedan canalizar hacia las matemáticas (medición) que se quiere enseñar” Lehrer y Schauble y Leshy English citados por Trigueros, M (2009, pág. 76).

3. Objetivos

3.1 Objetivo principal

- Reconocer la incidenciade la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje sobre el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumenocupado en estudiantes de grado 9°.

3.2 Objetivo específico

- Caracterizar cambios en la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen ocupado en estudiantes de grado 9°, a partir de la implementación de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje.

4. Antecedentes

A pesar del potencial alcance que tiene el trabajo con la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje no se hallaron estudios de investigación que la relacionen con el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen; si bien es cierto, existen diferentes estudios que abordan bien sea el dominio de la estimación por un lado o las bondades y desventajas de la modelación como método de enseñanza y aprendizaje por otro, ninguna de ellas las relaciona en una misma línea investigativa. Esta aseveración se sustenta con base en los resultados más importantes sobre investigaciones referidas al tema, encontrados después de realizar la revisión bibliográfica. En conjunto, entre los antecedentes revisados que contextualizan esta investigación se destacan los aportes de los trabajos que a continuación se refieren:

Carlos de Castro Hernández, Enrique Castro Martínez e Isidoro Segovia Alex (2002) llevaron a cabo una investigación denominada "*Un modelo alternativo para la descripción de estrategias de estimación en cálculo".*Aunque su estudió se centró en las estrategias de estimación que utilizan los profesores en formación, el modelo utilizado por los autores para la descripción, caracterización, clasificación e identificación de destrezas inherentes a la habilidad de estimar es un aporte muy valioso para esta investigación pues en él se concreta un enfoque que permite clasificar las estrategias de estimación (uno de los objetivos de esta investigación) atendiendo a procesos cognitivos en el que se facilita el análisis de los errores cometidos en tareas de estimación. En consonancia y coherencia con la teoría que sobre estimación se conoce, los resultados del estudio dan cuenta de que los sujetos que realizaron el test de Levine, -propuesto para recoger los datos- llevan a cabo estrategias que ponen de manifiesto algunos de los procesos de estimación: reformulación, traducción y compensación y que pocas veces combinan los tres procesos en una misma estrategia, validando el organigrama de análisis de estrategias diseñado por los autores y definiéndolo como un modelo comprensivo.

Así mismo, Jhony Alexander Villa Ochoa (2007)en su trabajo "*La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo",* revisa las diversas investigaciones que demuestran que la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje favorece la resolución de situaciones matemáticas al facilitar la interpretación y re-significación de contextos tanto de los estudiantes como de los profesores en relación con el aula y la realidad. Además, presenta en dicho documento la diferencia entre modelación como actividad científica y modelación como herramienta para construir conceptos matemáticos en el aula de clase, determinando diferencias como las que se citan a continuación.

Tabla 1. Algunas diferencias entre los procesos de modelización y de modelación en el campo de las matemáticas.

Criterio	Como actividad científica	Como herramienta en el aula de clase
Propósito del modelo	El modelo se construye para solucionar un problema de otras ciencias (naturales, sociales, humanas…) o para avanzar en una teoría o ciencia	El modelo se elabora para construir un concepto matemático dotado de un significado y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a su carácter aplicativo
Los conceptos matemáticos	Emergen de la situación a través de un proceso de abstracción y simplificación del fenómeno.	Deben haber sido considerados a priori con base en la preparación y selección del contexto por parte del maestro y de acuerdo con los propósitos de la clase.
Contextos	Obedecen a problemas que comúnmente no han sido abordados o se abordan de una manera diferente al	Deben obedecer a problemas abordados previamente por el docente de la clase con el objeto de

	interior de la ciencia.	evaluar su pertinencia con los propósitos educativos.
Otros factores	Se presenta generalmente en un ambiente propio de la ciencia en la cual se aplica y generalmente es externo a factores educativos.	Se presenta regularmente en el aula de clase bajo una motivación propia de contextos cotidianos y de otras ciencias.

Fuente: Villa-Ochoa, J., (2007, pp. 69)

En el marco de este estudio el objetivo principal fue reflexionar sobre la modelación como estrategia didáctica que permite al docente abordar conceptos matemáticos y al estudiante construir dichos conceptos en el aula en un marco de realidad de tal forma que se facilite su entendimiento. Así mismo, la investigación resalta el papel del docente en el proceso de implementación de la modelación como estrategia didáctica en matemáticas y enumera dos fases en el proceso: fase 1 o "a priori" y fase 2 o de "ejecución" y da algunas pautas para llevarlas a cabo en el aula de clases.

Las conclusiones a las que llega el autor en este estudio son compartidas por los semilleros de investigación de la Universidad de Antioquia y han sido debatidas en los cursos de Didáctica del Álgebra que ofrece la misma Universidad, determinando que tanto docentes como estudiantes son beneficiarios de implementar procesos de modelación en el aula ya que propician espacios para la creatividad, la interpretación de contextos, la visualización de las prácticas del aula desde otras ópticas y además "permite desarrollar las herramientas para interpretar, describir, explicar y documentar los niveles de comprensión de los estudiantes" (Ibíd.). Dichos beneficios respaldan también los objetivos propuestos para esta investigación ya que dan cuenta de los alcances que tiene la modelación como estrategia didáctica pues le permite al docente trabajar las matemáticas aprovechando la motivación de los estudiantes y favoreciendo el desarrollo de habilidades que les permita usarla en contextos de la vida diaria.

En esta misma línea, Isidoro Segovia y Carlos De Castro (2007) realizaron un estudio llamado *"La investigación en estimación en cálculo"* en el que resaltan la importancia de estimar cantidades. Así, los investigadores revisan el papel de la estimación en el currículo escolar de matemáticas, resaltándolacomo una competencia que se relaciona con diferentes componentes (conceptuales, técnicos, afectivos) que facilita la comprensión de la cuantificación de las magnitudes y fomenta su interpretación, dado que es un aspecto que se relaciona con situaciones reales que los estudiantes viven frecuentemente. De hecho, en la revisión de este documento, se encontró que se exponen literalmente las razones por las que se debe enseñar a estimar, destacando razones de utilidad en la vida diaria, en la vida escolar y razones de formación escolar a nivel de conocimiento y de potencialización del pensamiento.

A partir de este trabajo, se refuerza la concepción que en esta investigación se tiene con relación a la estimación como parte fundamental de los conceptos, procesos y competencias referentes al número y la medida y se considera que los aportes ofrecidos desde lo conceptual y lo didáctico enriquecen a los maestros en Educación Matemática, dado que los autores dedican un apartado de su estudio a la enseñanza de la estimación, destacando la dificultad que ha representado para los profesores el trabajo con cantidades "aproximadas" enfrentándose a un idea tradicional que destaca a las matemáticas como una ciencia exacta o a las situaciones problémicas como "situaciones con un única solución" (nada más alejado de la realidad cuando se trabaja con estimaciones). De igual modo, la investigación acentúa la importancia de la evaluación de la estimación y compara los métodos y estrategias usados por diferentes autores para tratar de medir cuán aceptable es una estimación, sin embargo, la estimación resulta muy difícil de medir dado que intervienen factores como las características de la tarea de estimación, el tipo de prueba, el porcentaje de error, el tiempo para llevar a cabo la prueba o el procedimiento y estrategia que utiliza quien resuelve la tarea. A pesar de los intentos por encontrar la mejor forma de evaluar la estimación, se concluyó que las pruebas hasta ahora diseñadas han sido insuficientes para juzgar las respuestas dadas por los estudiantes, motivo por el cual se sugiere que evaluar la estimación debe ser una tarea basada en la observación tal y como lo plantea Schoen, quien otorga total importancia a las tareas de estimación pero siempre dentro de la resolución de problemas, de tal forma que el contexto de la situación planteada dé pistas sobre la utilidad de una estrategia usada e incluso aporte a sus posibles soluciones con respuestas exactas o aproximadas. Es interesante ver cómo dicha conclusión armoniza con esta investigación dando validez al uso de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje toda vez que su principal foco de interés es desarrollar la estimación en el marco de una matemática con sentido y en contexto.

Por otra parte, María Trigueros Gaisman (2009) a través de su trabajo *"El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas"* exponelas ventajas y desventajas de usar la modelación como metodología de enseñanza y analiza las diferentes posturas acerca del uso de la modelación en el aula, partiendo de lo que se entiende por modelación en investigación en Educación Matemática.

En esta investigación se presentan algunas experiencias significativas en el uso de la modelación como metodología para enseñar matemáticas, específicamente en el álgebra y por último se trata de esclarecer el panorama que se puede alcanzar en el aula si se incluye esta metodología en la enseñanza de las Matemáticas. A pesar de que este estudio está analizando concretamente el aprendizaje de las matemáticas en el nivel educativo universitario, su aporte a la presente investigación es muy significativo si se tiene en cuenta que se resalta la importancia del diseño de la situación del mundo real que se va a trabajar con los estudiantes, pues "un problema planteado en buenos términos coadyuva el compromiso de los estudiantes en su solución y el aprendizaje de nuevos conceptos" (Ibíd.), además se destaca en las conclusiones que aunque existen diferencias entre los ritmos de aprendizaje de los estudiantes que conllevan a que no todos avancen o profundicen de la misma manera, es evidente que acercarse a las matemáticas desde esta perspectiva trae consigo más bondades que dificultades.

La premisa fundamental de la modelación como estrategia metodológica en el aula es alcanzar la contextualización del conocimiento matemático valiéndose de situaciones que se puedan representar mediante modelos matemáticos. No se puede negar que se presentan muchas dificultades, pero la clave está en gran medida en que se requiere de un profesor que dé cuenta de todos los cambios que se deben llevar a cabo al interior del aula para incorporarla y que reconozca que aunque los estudiantes pueden enfrentar muchas dificultades, “el hecho mismo de enfrentarlos y hacerlos conscientes de ello favorece el aprendizaje” (Ibíd.).

Para hablar de medida, Javier Alliaume, Ignacio Caggiani& Natalia Pastrana (2009) en su trabajo *”Magnitud y medida. El lugar de las ideas previas de los niños en la estimación; la experimentación y las prácticas de medidas”* dan especial énfasis a las ideas previas de los estudiantes, pues estas ocupan un lugar relevante en los estudios de fenómenos educativos cuando de Didáctica de la Matemática se trata. Razón por la cual, los autores de la investigación que se cita inician su estudio con una revisión sobre las teorías cognitivas que adjudican un lugar importante a las ideas previas del estudiante construyendo así un andamiaje teórico que respalda la tesis que dirige su estudio: “El aprendizaje de un conocimiento matemático –la constitución del sentido del mismo-, supone una interacción dialéctica donde el sujeto compromete conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas” (Ibíd.). Tesis que se comparte con el presente estudio pues la modelación como estrategia didáctica exige reconocer las ideas previas para poder fortalecer los vínculos entre lo que sabe el estudiante, lo que necesita cuando se enfrenta con la situación a modelar y lo que constituye su aprendizaje al finalizar el proceso.

Dentro de esta perspectiva, el trabajo se sumerge en las magnitudes y la medida; se hace una exposición de la posición de Brousseau frente al universo de la medida y la medición para finalizar planteando la importancia del error y las desviaciones en la medición, llegando incluso a plantear algunos obstáculos de origen didáctico en las mediciones que guardan estrecha relación con la estimación de medidas. Ahora bien, a pesar de que el informe no expone objetivo alguno, tampoco menciona cuál es la relación de las ideas previas y la estimación (alusión que hace el título), ni tampoco se explica su importancia, utilidad o alcance para el caso específico de estimar en forma sistemática. Por el contrario, para el caso de este trabajo de investigación,se espera que al finalizarloquede en evidencia la importancia, utilidad y alcance de la estimación, así como que se rescate la necesidad de experimentar y practicar la medición en contexto.

En contraposición**,** Héctor Colón (2009) trata en su investigación *"Desarrollo del concepto de medición en la escuela elemental"*, el tema del rol de la medición en la Educación Matemática en el nivel elemental. En él se rescatan apreciaciones del Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés) con respecto a la medición, en las que se le ubica como uno de los ítems que mayor uso tiene debido a su carácter práctico, transversalidad con otras disciplinas y requerimiento al estudiar situaciones del mundo real. De igual modo, se resalta su vínculo con las artes, las ciencias sociales, la estadística, la geometría, los números y las ciencias naturales entre otros, motivo por el cual, no se explica que los conceptos y destrezas propios de la medición, sean tratados en la escuela como un capítulo particular y durante el resto del desarrollo del currículo se echen en el cajón del olvido.

Con independencia de la magnitud que se esté analizando (longitud, área, volumen, ángulos, tiempo), el autor referencia detalladamente las situaciones a los que los infantes deben enfrentarse para llegar a construir el concepto de medición, constituyéndose en una amplia y variada fuente de datos y autores que enriquecen el presente trabajo. Así pues, las conclusiones a las que llega Colón son igualmente enriquecedoras y se enmarcan totalmente en la postura que sobre la enseñanza de la medición tiene la autora de esta tesis, pues como expresa Lehrer citado por Colón, H., (2009, pág.10) "Es crucial tomar en consideración el hecho de que el desarrollo del concepto de medición pueda ayudar a entender mejor los fenómenos naturales en el entorno inmediato, domiciliario o escolar, de los estudiantes. Es importante que los niños experimenten situaciones que les permitan pensar sobre problemas de medición y que expresen preguntas relacionadas al concepto según surgen espontáneamente de sus experiencias diarias".

Ahora bien, con respecto al desempeño de los docentes de matemáticas, Jhony Alexander Villa, Carlos Bustamante, Mario Berrío, Aníbal Osorio & Diego Ocampo (2009) en su investigación *"El proceso de modelación matemática, una mirada a la práctica del docente"* aclaran la diferencia entre "resolver problemas" y "modelación" entendiendo esta última como una herramienta que va más allá de simplemente construir modelos matemáticos, para ubicarse en una postura que la eleva al nivel de herramienta implicada en la resolución de problemas. En él, se revisa a través de un estudio de casos, la coherencia entre lo que opinan los profesores, específicamente con respecto a las matemáticas y lo que realmente llevan a cabo en sus prácticas pedagógicas, evidenciando grandes diferencias.

Al finalizar el estudio, los investigadores tipificaron los casos estudiados y entre sus conclusiones citan la necesidad de revisar la formación de los maestros de matemáticas, pues parece ser que poseen elementos teóricos que no transforman su práctica pedagógica ni movilizan los cambios que en el país se esperan "de tal manera que se aminore la creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas y las prácticas del aula de matemáticas" Agudelo Valderrama, citado por Villa-Ochoa et al (2009).
De esta manera, se refuerza la premisa que en esta investigación se sustenta sobre la necesidad de un cambio en la concepción del maestro de matemáticas para que reflexione sobre sus creencias y actitudes reflejando una perspectiva más sociocultural y constructiva de ellas.

Algo parecido hicieron Berta Barquero, Marianna Bosch& Josep Gascón (2010) en su investigación *"Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales"* quienes tuvieron como objetivo principal el problema de la enseñanza de las matemáticas, concretamente en el primer curso de ingeniería técnica industrial. Los investigadores se plantean varios interrogantes (¿Qué matemáticas se deben enseñar y cómo deben ser enseñadas?, ¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos que se enseñan no se reduzcan a un conjunto desarticulado de conceptos carentes de sentido?, ¿Cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una herramienta de modelización de situaciones o hechos científicos de tal forma que la enseñanza se organice en función de los problemas que los estudiantes deben resolver?, ¿Qué tipo de dispositivos didácticos posibilitarían una integración generalizada de la modelización matemática en los sistemas de enseñanza?, ¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones limitan su desarrollo?) que intentan responder a través de la implementación de los llamados *Recorridos de Estudio e Investigación* que en palabras de los autores "se constituyen en nuevos dispositivos didácticos que tienen doble función: integrar en el currículo las cuestiones a las que responden los contenidos matemáticos que los estudiantes deben aprender y articularlos mediante un proceso de modelización que permite “recubrir” el currículo considerado, dotándolo de una clara funcionalidad” (Ibíd. pág. 339)

A juicio de los expertos, la implementación de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) planteados por Chevellard se constituyen en una herramienta que modifica el arquetipo presente en la escuela, en el que se invita a los profesores a cambiar “listados” de temas y saberes, por la introducción de “un paradigma del *cuestionamiento del mundo,* para dar sentido al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto, transportando a la escuela una actividad de estudio más cercana al ámbito de la investigación” (Ibíd.), motivo por el cual, el equipo de investigadores decidió diseñar un REI que inicia con el estudio de una cuestión generadora de numerosas situaciones (para este caso el estudio de la dinámica de poblaciones) en las que se requiere utilizar diferentes herramientas matemáticas que aparezcan como *consecuencia* de la situación problema y no como *origen* de ella.

Las conclusiones obtenidas en este estudio son significativas para el tema que atañe a esta investigación, pues derivada de la utilización de la modelización como dispositivo didáctico a través de un REI, se facilitó a los estudiantes tomar responsabilidad en diversas tareas como: participar en la formulación de cuestiones problemáticas, formular hipótesis, contrastar experimentalmente, elegir las herramientas matemáticas adecuadas, redactar y defender los resultados obtenidos, etc. Sin embargo, el máximo aporte se da desde la descripción detallada que hacen del problema, dado que se destacan las características de una cuestión generatriz (situación problema), las condiciones ideales para su experimentación y el proceso para analizarlo metodológicamente. Cabe anotar que también se enumeran las dificultades o restricciones que se dan para integrar los REI como dispositivo didáctico en un trabajo con modelización. Entre ellos se destacan a nivel didáctico, el nivel de disciplina matemática que requiere; a nivel pedagógico, el voluntarismo inicial de la profesora del curso y también de los estudiantes; a nivel de metodología del docente, el reparto de las responsabilidades y ceder la autonomía a los estudiantes y a nivel de distribución de tiempos, el tener que romper con la distribución horaria establecida para dar cabida a sesiones de más larga duración, aspectos que también pueden llegar a restringir la implementación de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje.

Volviendo a la estimación, Yadni Rodríguez (2010) llevó a cabo un estudio denominado *“Actividades para desarrollar la habilidad de estimar, con las unidades de longitud en escolares de 5° grado de la educación primaria”* en el que propone actividades prácticas de medición en las unidades de longitud con el fin de desarrollar la habilidad de estimar, utilizando estrategias didácticas que además de permitir establecer el nivel de desarrollo en el que se encuentren los estudiantes, potencian dicha habilidad.
En ella se definen términos como *habilidad* y *estimar* desde la óptica de la Matemática Educativa y luego se hace un recorrido por el estado actual de la habilidad de estimar en la escuela primaria en Cuba, en el que la autora encuentra limitaciones en la dirección de la enseñanza y el aprendizaje de la estimación, pues los estudiantes no responden a los niveles de comprensión establecidos por su país para la primaria y los docentes manifiestan que casi siempre trabajan la magnitud longitud y la estimación con los ejercicios planteados por los libros de texto propios de cada grado, a pesar de reconocer que se deben programar prácticas de medición con ejercicios interesantes, novedosos o utilizando software. Con base en esta realidad, se desarrolló una propuesta de 7 actividades muy variadas en sus recursos, que requieren manejo de las unidades de longitud en contexto, así como necesidad de poner en práctica la habilidad de estimar.
Finalmente, las conclusiones obtenidas por el estudio son bastante claras, al revelar que sí existe posibilidad de potenciar la habilidad de estimar siempre y cuando las tareas de estimación diseñadas sean estudiadas previamente por el profesor para que respondan a las necesidades propias de la magnitud que se esté trabajando.

Respecto a la implementación de la tecnología en el aula de clase y su relación con la modelación, SamanthaAnaluz Quiroz, María Dhelma Rendón & Ruth Rodríguez (2011) dan cuenta del desarrollo de las competencias de modelación en el cálculo del volumen que se pueden favorecer en los estudiantes gracias al uso de las webquest en el aula de clase. En su estudio *“Competencias de modelación matemática para el aprendizaje del cálculo del volumen con apoyo en las webquest”*las autoras tuvieron en cuenta las competencias de modelación matemática que establece el Informe Programmefor International

StudentAssessment (PISA) (INECSE, 2003) que son (entre otras): Estructurar el campo o situación que va a modelarse; Traducir la realidad a una estructura matemática; Interpretar los modelos matemáticos en términos reales; Trabajar con un modelo matemático; Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados y comunicar acerca del modelo para plantear las actividades con base en la solución de problemas que integrarían con el uso de las TIC específicamente con las wequest.

Las conclusiones de su estudio reconocen las ventajas que para los estudiantes y el profesor trae el trabajo con la modelación, máxime si estas se unen a los beneficios que ofrece el uso de la tecnología en la clase de matemáticas, entre otros aspectos,porque favorece que los estudiantes trabajen en equipo, confronten sus procedimientos y resultados, amplíen la información necesaria para resolver una situación problema, se motiven y optimicen el tiempo que dedican a la solución de una situación matemática en contexto, entre otros. La citada investigación enriquece el trabajo que se pretende llevar a cabo puesto que en ella se abordan los aspectos metodológicos desde lo cualitativo, asignando al profesor-investigador el rol de observador participante en el que la triangulación metodológica (análisis de los resultados de las diferentes fuentes y métodos de recolección utilizados) facilita que los sesgos inherentes a los instrumentos se minimicen y se puedan validar así los resultados.

Finalmente en un trabajo en conjunto Jesús Jorge Castillo, Isidoro Segovia, Enrique Castro y Marta Molina (2011) analizaron las deficiencias que presentan estudiantes de secundaria en la capacidad estimativa de magnitudes continuas como lo describe su investigación *“Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: longitud y superficie”*. Tal y como los autores referencian, este trabajo abarca un área variada en conceptos, destrezas, procesos que se refieren tanto a la medida como a la estimación. En él destacan los trabajos de Sowder y Wheeler, Hildreth, Chamorro y sus propias investigaciones anteriores sobre las componentes de la estimación en cálculo y su aplicabilidad para la estimación en medida, pudiendo identificar con detalle el conjunto de ítems que intervienen en la creación de conocimiento relativo a la estimación de medida. Dicho listado se convierte en un marco teórico de obligada referencia para esta investigación pues facilita detectar los factores que hacen que la capacidad estimativa se desarrolle en los estudiantes.

5. MarcoTeórico

En este apartado se presenta la contribución de diferentes autores fuente para esta investigación. Se inicia con la intención de clarificar lo que se entiende por modelación en Educación Matemática, para luego enfocar la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje. Finalmente, se abordan los fundamentos de la estimación en el campo de las cantidades continuas en la magnitud volumen.

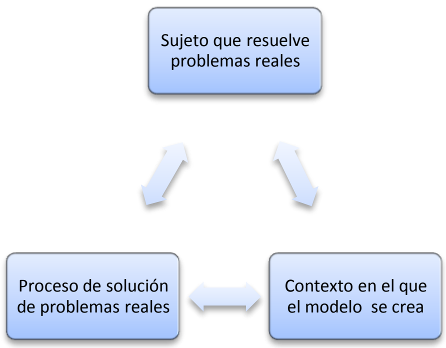
5.1 La modelación en la enseñanza de las matemáticas: perspectivas muy variadas

La modelación en la enseñanza de las matemáticas es un ítem que cada día cobra más fuerza en Educación Matemática; basta simplemente con revisar la bibliografía existente para darse cuenta de la magnitud de su impacto a nivel curricular, didáctico y pedagógico, motivo por el cual es frecuente que grupos de estudio de divulgación como ICTMA (International CommunityontheTeaching of mathematicalModelling and Applications) ó RECOMEM (Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática) realicen conferencias, congresos e investigaciones dedicados a dar a conocer las bondades y desafíos que plantea.

Así pues, la modelación es vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje y este aspecto según Blomhøj (2004), es relevante para cualquier nivel de enseñanza. Así pues, no solo Blomhøjha intentado caracterizar el concepto de modelación en el aula, otros investigadores como Blum, W. &Niss, M. (1991) y Villa-Ochoa, A. et. Al (2010) también lo han hecho, concluyendo que por su misma naturaleza la modelación se cubre de matices diferentes según la intención de quien la use.

Atendiendo a lo variada y enriquecedoraque puede llegar a ser la modelación, esta ha sido clasificada según diferentes perspectivas educativas:

Tabla 2. Perspectivas, intereses y pretensiones respecto al uso de la modelación en el aula.

PERSPECTIVA	INTERÉS	PRETENSIÓN
REALISTA	Resolver problemas reales que tengan sentido práctico para los alumnos, estos pueden ser reales, de fantasía o formales.	Desarrollar herramientas para comprender el mundo en el que viven y entender cuáles son los componentes de los modelos matemáticos.
CONTEXTUAL	Resolver problemas reales pero preocupándose por la relación tríadica: 	Comprender la naturaleza del proceso de modelación y las distintas restricciones que sobre éste ejerce el medio en el que surge la necesidad de modelación.
COGNITIVA	Psicológico (Analizar los procesos mentales que tienen lugar durante la modelación)	Comprender la forma en que se piensa cuando se usa la modelación en la solución de problemas y promover los procesos de pensamiento matemático mediante su uso.
CONTEXTO DE APRENDIZAJE	Invitar a los alumnos a cuestionar e investigar situaciones referidas a la realidad a través del uso de las matemáticas	Brindar oportunidades para discutir el papel de las matemáticas en la sociedad y la naturaleza de los modelos matemáticos.
TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD)	Analizar y describir las condiciones y restricciones que permiten el desarrollo de procesos de estudio que comienzan a partir de problemas relevantes ya sean con temas extra y/o intra-matemáticos dado que la actividad matemática no se restringe	Considerar la actividad matemática en sí misma como una actividad de modelación ya que la modelación no es un aspecto más de las matemáticas.

	a la consideración de problemas aplicados.	
MODELOS Y MODELACIÓN	Enfatizar en la construcción de sistemas conceptuales o modelos por parte de los alumnos preparándolos en la solución del tipo de problemas a los que normalmente se enfrentan fuera de la escuela. En esta perspectiva la búsqueda de patrones es preponderante.	Desarrollar en los estudiantes formas flexibles y creativas de pensar que les permitan abordar las situaciones que se les presenten. El aprendizaje debe llevarse a cabo en un ambiente que favorezca y promueva procesos de cuestionamiento y reflexión, que a su vez conduzcan a la comprensión de los fenómenos a través del uso de recursos matemáticos.
MIXTA	Pedagógico. Lograr un aprendizaje significativo utilizando la teoría de desarrollo conceptual del ámbito de la Educación Matemática (Teoría APOE)	Promover procesos de aprendizaje de los estudiantes introduciendo conceptos nuevos y desarrollando sus estructuras conceptuales a través de la introducción de problemas reales que posibiliten la emergencia de ideas matemáticas.
EDUCATIVA	Pedagógico	DIDÁCTICA: La modelación se utiliza para estructurar y promover el proceso de aprendizaje de los alumnos.
		CONCEPTUAL: La modelación es clave para introducir nuevos conceptos y para desarrollarlos.
CARACTERÍSTICAS COMUNES EN TODAS LAS PERSPECTIVAS - El contexto en el que se plantea y se resuelve el problema debe tener sentido para los estudiantes. - Los estudiantes deben desarrollar procesos diversos de razonamiento de los cuales pueden surgir conceptos para abordar la tarea. - Se aprovechan las ideas que surgen de los estudiantes para introducir conceptos importantes de la matemática.		

Fuente: Elaboración propia con base en la clasificación expuesta según Trigueros, M (2009)

5.2 La modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje

Kaiser, G. et. Al (2006)revisaron los alcances de la modelación y analizaron hasta qué punto laEducación Matemática tenía una teoría de su enseñanza y aprendizaje, concluyendo, que este análisis depende de la noción de la teoría que se esté usando.

Fue así, como desde una perspectiva global sobre la teoría de la enseñanza y el aprendizaje de la modelación,dichos autores, ofrecieron una lista con seis diferentes propósitos para el uso de un ciclo general de modelación en el aula, que están representados por los siguientes ítems:

(1) Como medio para analizar procesos de modelado matemático auténtico, de tal forma que se pueda entender y validar su proceso y servir de base para aplicaciones y decisiones importantes.

(2) Como herramienta que permite identificar elementos clave en la competencia de modelos matemáticos.

(3) Como estrategia para analizar los trabajos de los estudiantes (modelado retrospectivo) para determinar qué parte del ciclo han estado trabajando, qué caminos han tomado y los tipos de dificultades que han experimentado durante sus actividades de modelación.

(4) Como una herramienta para apoyar el trabajo de los estudiantes.

(5) Como herramienta didáctica para la planificación de cursos de modelado o proyectos: ¿Qué parte del ciclo de la modelación se debe trabajar con los estudiantes? ¿Cómo pueden ser desafiados de acuerdo con el diseño de la situación didáctica o la interacción con el profesor durante la actividad? ¿Dónde puede que necesiten apoyo?

(6) Como una manera de definir y analizar un elemento curricular en la enseñanza de las matemáticas.

Así mismo, Córdoba (2011) concluye que a partir de la revisión del estado del arte de la modelación en Educación Matemática, es posible identificar básicamente dos tendencias con relación a la modelación como metodología de aprendizaje y enseñanza:

a) La modelación entendida como proceso, en la que se trae una situación al dominio de las matemáticas para ser explicada.
b) La modelación como un método de enseñanza y aprendizaje. Entendida por unos como objeto de enseñanza y por otros como medio para enseñar matemáticas.

Desde esta perspectiva, en este trabajo, la modelación[2] se asume como una metodología de enseñanza y aprendizaje que utiliza el proceso de modelización en cursos regulares (Bassanezi, R. &Biembengut, M. (1997)). De esta manera y en total comunión con D´Ambrosio citado en Biembengut, M &Hein, N (s.f.) se considera que la influencia de la enseñanza en el aprendizaje implica una relación que conlleva reflexión y acción. Según su postura, al crearse modelos se facilita la acción: "Esa recreación de modelos por el sujeto, que puede utilizar otros modelos que ya han sido incorporados a su realidad y que es la esencia del proceso creativo, debería constituir el punto focal de los sistemas educativos".

En resumen, si existe una preocupación en el campo de la Educación Matemática, estaestá íntimamente ligadacon la funcionalidad y el sentido de las matemáticas que se enseñan y aprenden en los diferentes cursos escolares; razón por la cual, la comunidad académica reflexiona permanentemente sobre la forma en que se pueda lograr que los estudiantes desarrollen habilidades y estrategias que les permita aplicar y encontrarle sentido en su cotidianidad a las ideasmatemáticas. Por ejemplo, Adler, I. citado en Biembengut, M &Hein, N. (s.f) pone de relieve la importancia de las matemáticas escolares, aduciendo que en ellas, el pensamiento y la experiencia directa se deben tratar como una unidad para enriquecer lo "real" y dotar de significado a los símbolos.

5.3 Modelación matemática: La perspectiva de María Biembengut y Nelson Hein.

Según el juicio deBiembengut, M.; &Hein, N. (2004, pp. 108), existen razones de peso para defender el proceso de modelación en la Educación Matemática, en particular, desde la postura que enseña matemáticas usando el método de la modelación dado que con su implementación se busca:

[2]Bassanezi, R. &Biembengut, M. (1997) definen la palabra modelación como una "contracción" de los términos Modelización y Educación. Modelación= modelización + educación

- “Integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento;
- Interés de las matemáticas frente a su aplicabilidad;
- Mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos;
- Capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema;
- Estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas;
- Habilidad en el uso de la tecnología;
- Capacidad para actuar en grupo;
- Orientación para la realización de la investigación;
- Capacidad para redactar una investigación”.

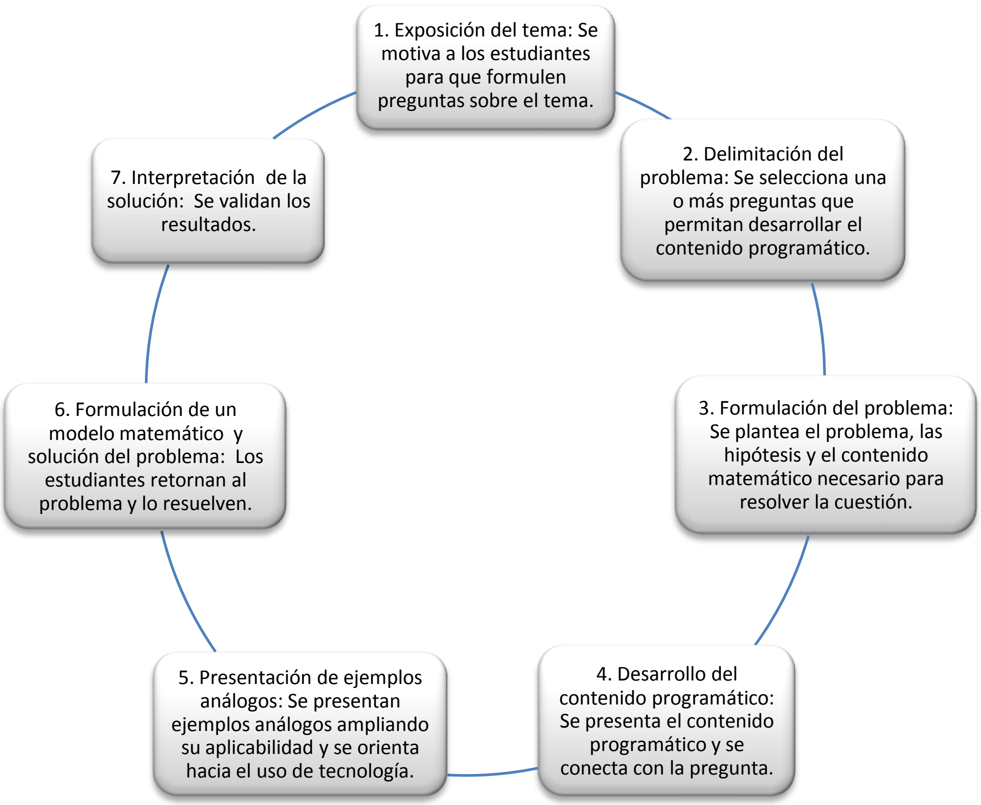
De igual modo y después de varios años de investigación y atendiendo a variables como el currículo, horario de clases, cantidad de estudiantes por curso, disponibilidad de tiempo, entre otras, que afectan la enseñanza de las matemáticas, Biembengut y Heinadaptaron las fases del proceso de la modelación como método de enseñanza a estos ítems y presentaron a la comunidad dos tipos de abordajes que puede seguir el profesor en su implementación:

1. *Método de enseñanza*: Desarrollo del contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados.
2. *Método de investigación*: Orientación de los estudiantes para que hagan un trabajo de modelaje.

Su experiencia los llevó a proponer una serie de etapas a desarrollar en la clase de matemáticas para alcanzar cada uno de los abordajes mencionados.

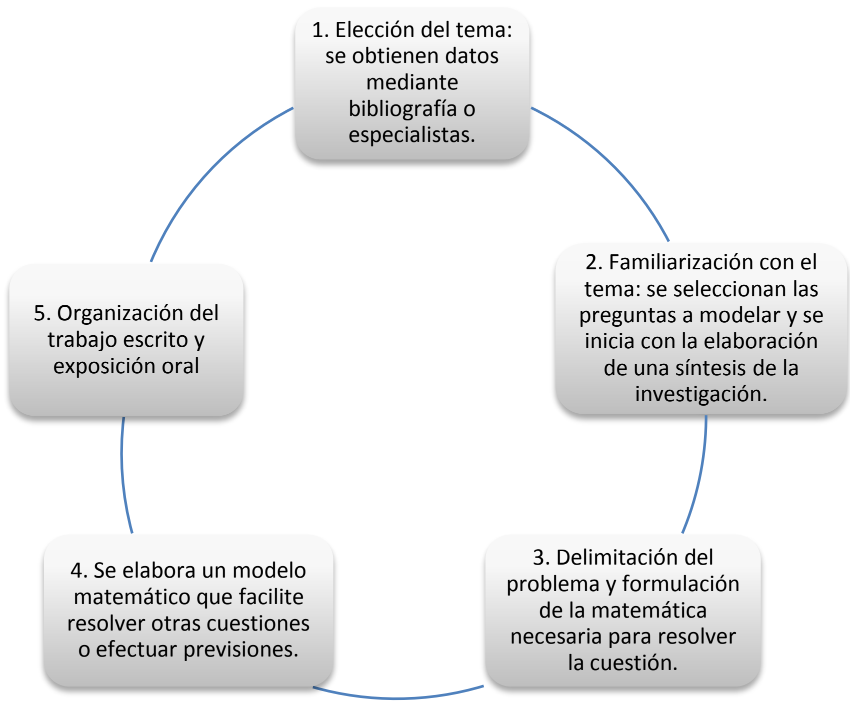
Con respecto al *primer* abordaje, se presenta un esquema que explica el método de actuación de la modelación como metodología de enseñanza para desarrollar el contenido programático.Cabe aclarar que las etapas no son susceptibles de implementarse en una sola jornada, por el contrario, se planifican para diferentes clases y en modo alguno se proponen como “camisa de fuerza”. Dada la dinámica en el aula, cada etapa puede enriquecerse con la retroalimentación de otra etapa que no necesariamente es la que se sugiere inmediatamente después.

Figura 1. Método de actuación de la modelación como metodología de enseñanza para desarrollar el contenido programático según las etapas propuestas por Biembengut, M.; &Hein, N. (2004, pp. 109)



Con relación al *segundo* abordaje, el objetivo es facilitar condiciones para que los estudiantes aprendan a investigar y elaboren modelos matemáticos. Los autores hacen énfasis en que este trabajo puede realizarse paralelo al desarrollo del contenido programático.

Figura 2. Método de actuación del profesor para crear condiciones en las cuales los estudiantes son orientados para que hagan un trabajo de modelación según las etapas propuestas por Biembengut, M.; &Hein, N. (2004, pp. 117)



5.4 Modelación, modelo, cotidianidad y contexto

Como se ha esbozado, la modelación en Educación Matemática parte del supuesto de interpretar matemáticamente situaciones de la realidad para tomar algún tipo de decisión. Desde ahí, la modelación como metodología de enseñanza y aprendizajese vale de situaciones que motiven a los estudiantes para que después de ser abordadas desde diferentes etapas didácticas, conduzcan a obtener modelos matemáticos que lasvaliden y solucionen. Así pues, la elección de la situación motivadora en el contexto de la modelación, ocupa un lugar determinante en el éxito del proceso.

En este apartado, se precisan los conceptos que en esta investigación se asumen para los términos modelo, cotidianidad y contexto ya que por la misma variedad de posturas en las que la modelación puede abordarse, la literatura al respecto es bastante amplia.

Comúnmente el término modelo matemático está asociado con el campo científico y aunque las variadas definiciones de modelo apuntan a la referencia *Matemáticas – mundo real*, Villa-Ochoa (2007) aclara que la diferencia entre ellas está dada por la forma de representación matemática de dicha relación.

Para ilustrar esto, se citan algunas definiciones:

- ✓ Berges, M (s.f:10)define modelo como “la imagen o representación del conjunto de relaciones que definen un fenómeno con miras a su mejor entendimiento…puede expresarse en fórmulas matemáticas, símbolos, palabras; pero en esencia, es una descripción de entidades, procesos, atributos y las relaciones entre ellas. Puede ser descriptivo o ilustrativo, pero sobre todo útil”.
- ✓ Roig, A. &Llinares, S. (2004)entienden por modelo la interpretación matemática de una situación que conlleva a centrarse en sus elementos, sus relaciones, patrones y características de forma tal que se facilite alcanzar un modelo en algún nivel de sofisticación.
- ✓ El MEN (2006) en los Estándares Básicos de Competenciasen Matemáticas adopta la definición de modelo como la forma de entender un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que puede usarse para volver cercana o concreta una idea o concepto y así poder representar la realidad y hacerla comprensible.

Para este estudio, modelo se define según lo expuesto por Bassanezi citado en Villa-Ochoa (2007)quien desde una postura didáctica, indica que tener un modelo consiste en tener un conjunto de símbolos y relaciones matemáticasque intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación.

Por otra parte, cuando de realidad se trata, las opiniones también son muy diversas; así, para Villa-Ochoa, J. et al (2009) más que realidad, en Educación Matemática debe hablarse de *sentido de realidad*el cual se refiere a la sensibilidad que los profesores deben tener ante la realidad, es decir, que ese sentido incluya aspectos como la intuición, la imaginación y la creatividad para poder detectar situaciones del contexto factibles de modelarse y que puedan movilizar el conocimiento de los estudiantes, todo ello desde la subjetividad que dota al profesor de habilidad para observar la realidad objetiva y le permite resignificarla.

Por su parte, Alsina, C (2007) considera que la realidad es muy difícil de definir, pero hace una salvedad al indicar que en Educación Matemática la realidad debe estar definida con tanta claridad que sobre ella tenga sentido la matematización. De este modo, Alsina se acoge a la definición que el ICMI Study 14 (International

CommissiononMathematicalInstruction, 2004) determina específicamente sobre Aplicaciones y modelización en la enseñanza de las matemáticas: “Entendemos por mundo real todo lo que tenga que ver con naturaleza, sociedad o cultura, incluyendo tanto lo referente a la vida cotidiana como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares diferentes de las matemáticas” (Ibíd. pág. 87)

Para Blum y Borromeo, citados por Córdoba (2011) la realidad se define como “el resto del mundo”. Desde esta perspectiva, la realidad está en un plano diferente al de las matemáticas aunque incluye a la sociedad, la naturaleza, la cotidianidad y las disciplinas científicas.

Como era de esperarse, un concepto tan complejo como lo es el de realidad, suscita posturas diferentes según la posición de quien la investigue. En el marco de esta investigación, la realidad es equiparable a la cotidianidad que losestudiantes viven en el aula de clases y por tanto es única en sus características, necesidades, actuares y evoluciones. Bosh, M et al. Citada en Córdoba (2011) sustenta que una situación de realidad para los estudiantes se enmarca no solo en sus intereses sino también en sus comprensiones. Y en este sentido, queda al descubierto que la particularidad es inherente a la cotidianidad incluso al interior de un mismo grupo de estudiantes.

Cuando se está hablando de cotidianidad es imposible no detenerse a revisar el contexto, pues uno no habita sin el otro. Jan de Lange, citado por Alsina, C (2007) considera que el contexto es tan amplio que hace alusión a la vida cotidiana pasando por lo cultural, lo científico, lo artificial y lo matemático.

En la modelación el contexto y la contextualización son tan relevantes, que Cordero y otros citados en Córdoba (2011) los consideran como los agentes que no solo permiten simulaciones en el aula, sino que permiten conocer las representaciones que del conocimiento se hacen los estudiantes,facilitando al profesor conocer sus re-significaciones y el proceso de construcción del conocimiento matemático escolar.

En esta investigación, se precisa la definición de contexto como la que sustenta el MEN en la Serie Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) “El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende”

5.5 Medir. Un poco de historia

¿Se puede enseñar lo que se ha de construir?[3]

El acto de medir ha estado presente en la historia del hombre desde que éste empezó a desarrollar actividades prácticas al interior de sus sociedades, siendo usada en un principio como una extensión de su propio cuerpo (antropométrico), evolucionando con la cultura misma hasta llegar a formalizarse con abstracciones. Fue así como el hombre a través de la cotidianidad pudo observar que hay objetos más pesados o más altos o más largos que otros y poco a poco llegó a comprobar que esos aspectos no podían ser contados de la misma manera que las colecciones de objetos ya que constituían una unidad en sí mismas. Las actividades que realizaba le ofrecían cada vez mayores retos al necesitar comparar granos; terrenos; construcciones; recorridos; en fin, muy tempranamente tuvo que recurrir a la utilización de patrones de medida, hasta que finalmente surgieron las unidades convencionales. Para ilustrar un poco su recorrido histórico, a continuaciónse expone una aproximación explicativa a diferentes modelos sobre la medida, con base en Kula, W.

Tabla 3. Modelos explicativos del concepto de medida.

MODELO EXPLICATIVO	**APROXIMACIÓN TEÓRICA**

[3] Solé, I. (1991)

ANTROPOCÉNTRICO	Bajo este modelo el hombre medía el mundo consigo mismo por ser el centro del universo donde se encontraba incorporado.
MÍTICO	Se le tiene miedo a medir partes del cuerpo, porque se cree que no se crecerá más.
RELIGIOSO	Se confunde la medida con la estafa. Medir es símbolo de la pérdida de la felicidad, proviene directamente del pecado original. Contar y Medir equivalen a Pecar. El mismo Kula lo dice en su libro en forma jocosa, el que inventó las medidas fue Caín y hay pasajes bíblicos que hacen referencia a esa medida.
JUSTICIA	De esta concepción eran partidarios los mercantiles, ganaderos y comerciantes, estaban de acuerdo con la medida, efecto contrario al significado anterior, porque para ellos, la medida y el pesaje eran cosas normales, siempre que ambas fueran "justas".
PODER	La medida es atributo de poder en todas las sociedades civilizadas, es símbolo de soberanía, de dominación. En la historia se proporcionan innumerables ejemplos de litigios entre ciudades y esto se originaba en la lucha por el derecho de establecer y controlar no solo las medidas, sino los reinos, ya que, entre dos regiones que estuvieran luchando por su soberanía, quien ganara ejercía su poderío imponiendo sus medidas, buscando con ellos la unificación.
PERFECTIBILIDAD	La medida es un proceso racional, perfecto en su racional claridad, obra de la mente humana, libre de prejuicios y tradiciones, "buena" para todos, es decir, la medida como símbolo de "prosaica pedantería".

Fuente:García, L. & Osorio, A. (2008)

5.6 ¿Qué se entiende por medida de magnitudes? Algunas definiciones

Para Duhalde, M.E.; & González, M.T (1996) el número obtenido a partir del proceso de medir es, precisamente, la *medida*. Lo que se mide en un objeto no es el objeto mismo, sino algunas de sus propiedades o cualidades, por eso, medir supone repetir una unidad de medida de tal forma que cubra todo el intervalo a medir, teniendo en cuenta que si la unidad de medida es mayor que la cantidad a medir ésta debe dividirse en subunidades a fin de que no queden huecos ni superposiciones, esto sucede por ejemplo, al determinar cantidades de dinero, líquidos, sólidos, ángulos, distancias, lapsos de tiempo, temperaturas, intensidad de corriente e incluso al determinar cantidad de información en el marco de las teorías informáticas (bit).

Ahora bien, las *magnitudes* corresponden a los rasgos o atributos que cambian de forma cuantitativa –medibles mediante números- clasificándose en continuas (longitud, peso, densidad, volumen) o discretas (número de elementos). Dentro de esta lógica, si la medida es el resultado de medir, es decir, de comparar la cantidad de magnitud que se quiere medir con la unidad de esa magnitud, este resultado se deberá expresar mediante un número. A este número se le denomina *cantidad de magnitud*, seguido de la unidad que se ha utilizado: $4m^2$; 200,36 Km; 5/3 Kg; ¼ h. Es importante destacar que los números naturales se emplean para contar y los Números Reales positivos (racionales e irracionales) se emplean para medir.

Parafraseando a Bressan&Yaksich (2001) La medida, de uso corriente en la vida cotidiana, es el puente entre la aritmética y el mundo físico. Por ende, medir desde el punto de vista matemático, es asignarle un número Real positivo a una cantidad y desde el punto de vista físico es el proceso por el cual se averigua cuántas veces una cantidad –elegida convencionalmente como patrón o unidad de medida – está contenida en otra de la misma magnitud.

Desde esta postura, es medible todo lo que se pueda cuantificar en términos de unidad, todo lo que tenga masa, o longitud, o tiempo, sin embargo, no sólo es medible lo que se puede observar, por ejemplo, la velocidad de la luz es medible y no se ve. De todos modos es evidente que la medida de una cantidad depende de la unidad elegida, pero que la cantidad es invariante e independiente.

5.7 La escuela y las situaciones de medida

La relevancia de la medida en el entorno escolar se puede evidenciar dado el número de investigaciones sobre Educación Matemática que la incluyen (Proyecto Edumat-Maestros (España); NCTM (Estados Unidos), Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME); ASOCOLME (Colombia)) y la importancia que los Ministerios de Educación de una gran cantidad de países le dan al contenerla en todas sus directrices de trabajo. Sin embargo, la reflexión en torno a su enseñanza y aprendizaje no debe darse sólo en altas esferas, sino más bien en el aula, pues es allí donde se empieza a matematizar el uso social de la medida que desde antes de ingresar a la escuela ya tenía el niño. Al respecto, Godino, J. et al. (2002, pág. 617) afirma: "Si queremos que los alumnos entiendan la razón de ser de la medida debemos enfrentarles a dichas situaciones, no tanto para que ellos reinventen por sí mismos las técnicas, sino para que puedan dominar los procedimientos de medida y atribuir un sentido práctico al lenguaje y normas que regulan la actividad de medir"

Antes de llegar a la escuela, los niños ya se han dado cuenta de que las "cosas" son diferentes y para ello han realizado observaciones tendientes a determinar diferencias de color, tamaño, textura o forma, además, han realizado comparaciones utilizando marcos de referencia –patrones- ligados a su propio cuerpo, pero estas oportunidades no son suficientemente aprovechadas al llegar a la escuela y todo aquel "ritual" de comparación y descubrimiento de unidades de medida no convencionales y de debate sobre su utilidad, que debería desembocar en el reconocimiento de que la medida va a cambiar según el patrón que se utilice pero no su magnitud, se ve truncada por el afán de culminar con prontitud el plan de asignatura que beneficia a las unidades de medida de longitud y área (por ser las más perceptibles) y al uso del número, condenando a los niños a enfrentar múltiples obstáculos cuando de aprehender otras nociones como la de volumen se trata.

Coincidiendo con Brooks, citado en Dickson, L. et al. (1991, pág. 88) "La introducción de los niños de nuestra cultura al mundo de la medida se realiza mediante instrumentos refinados y complejos. Les ha sido vedado el desarrollo histórico de la medida, lo que conlleva, para empezar, que no se dan cuenta de la necesidad misma de medir", ni mucho menos comprender que medir es comparar, replicar una unidad patrón.

Luego, los escolares se enfrentan a otro obstáculo –no menos importante-: los encuentros con la medida se dan con los números naturales, y se quedan allí; se restringen, son manipulados por los profesores para evitar de una forma irreal y descontextualizada, que la medida adopte su estado “natural” y despliegue ante ellos su verdad: en el mundo real la medida pertenece al campo de los números fraccionarios y decimales, la precisión absoluta no es una característica de la medida; Carpenter y Osborne, citados por Dickson, L. et al (1991) sostienen que los docentes parecen “crear una regularidad perceptual y una pulcritud (las soluciones de los problemas son números “redondos”), que brilla por su ausencia en las medidas del mundo real”.

Dentro de esta cadena de obstáculos que enfrentan los escolares para llegar a medir una cualidad de un cuerpo, ocupa un lugar preponderante la enseñanza del Sistema Métrico Decimal (SMD de aquí en adelante), pues si bien es cierto, dicho sistema surge de la necesidad de regular el comercio, también lo es, que se convierte en un obstáculo para comprender la naturaleza de las magnitudes. Así pues, Sáiz, M. (s.f) expone con claridad la forma en que tradicionalmente el SMD transmite un mensaje equívoco del desarrollo histórico de la medición y de los sistemas de medidas al sugerir que se inicia con una unidad de longitud (metro), de ahí se pasa a dos dimensiones (metro cuadrado) y luego a tres dimensiones (metro cúbico). Desde luego, el tratamiento dado por lo profesores es fundamental, sin embargo, lo común es que

> “la enseñanza del SMD deje de lado conceptos asociados a las magnitudes que han de ser medidas. De alguna manera se parte del supuesto de que todo el mundo sabe qué es longitud, superficie o volumen. Lo importante es medir todo usando las unidades del SMD” Sáiz, M (2007, pág. 3)

5.8 La medición como proceso que involucra el error

Ahora bien, todo valor obtenido en una medida viene condicionado por posibles errores experimentales (accidentales y sistemáticos) y si es del caso, por la sensibilidad del aparato utilizado, es así como en el acto de medir influye el observador, las circunstancias en que mide y la calidad del aparato que utiliza. El error cometido en el proceso de medida tiene un significado distinto a“equivocación”, es inherente al proceso de medir y por consiguiente, cuando se mide es imposible conocer el “valor verdadero” de una magnitud.

Es en este sentido que la estimación viene a jugar un papel decisivo en los procesos de medición ya que como el error no puede eliminarse totalmente sino minimizarlo y a este también se le debe estimar.

5.9 ¿Qué se entiende por estimación de magnitudes?

La estimación en matemáticas es entendida por Segovia, I. & Castro, C. (2009) como "juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite". Es evidente que esta acepción trae implícita la aplicación del término en dos grandes campos matemáticos: el numérico y el de medida.

Por razones investigativas se ampliará la definición al campo de la medida, y para ello en este trabajo se adopta la postura dada por Bright, citado en MEN, Lineamientos Curriculares. Matemáticas, (1998) quien ofrece una definición de estimación específica para las magnitudes, en la que la explica como el proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición. Así las cosas, la medida es un proceso mental que frecuentemente involucra aspectos visuales y manipulativos.

Así mismo, en este estudio se coincide con la postura de Bressan, A. &Yaksich, F. (2001) quienes definen la estimación como una estrategia del pensamiento con la cual se resuelven diversos problemas que no admiten respuestas exactas. Las autoras catalogan la estimación como un proceso que se basa en el conocimiento internalizado de referentes y unidades de medida convencionales, dicho proceso mental toma a la comparación como su operación básica, asociando la cantidad a estimar directamente con alguna unidad o referente (objeto usual o partes del cuerpo) esté presente o ausente.

5.9.1 *La estimación en medida.*

En el marco de las dificultades que se presentan ante los aprendices para aprehender la medida (si no se permite el uso comparativo de patrones no convencionales, la prevalencia de mediciones solo para magnitudes perceptuales y el uso exclusivo de números naturales como cantidad de magnitud,) surge otra discordancia entre la escuela y el mundo real: Las estimaciones pocas veces hacen parte del currículo escolar.

Las estimaciones desaparecen con facilidad del fin educativo del aula y con ellas se aleja la posibilidad de encontrarle aplicación a lo que allí se trabaja sobre medida, pues su uso es muy común. Así pues, los aprendizajes formales sobre la medida no capacitan generalmente para la estimación, y al contrario, sí lo hacen los aprendizajes no formales producto de la necesidad (Callís, J. &Fiol, L (s.f)).

La enseñanza intencional de la estimación no es un ítem que se limite única y exclusivamente al campo de la medida, por el contrario, es tan amplia su utilidad, que se extiende al campo de la numeración y las operaciones y de ahí su utilidad y su relación con el cálculo mental. De acuerdo con el Consejo Provincial de Educación, Provincia de Rio Negro (Argentina) encabezado por Bressan, A. &Bogisic, B. (1996) desarrollar la capacidad de estimación en los estudiantes es muy importante porque facilita:

- ✓ Predecir situaciones probables.
- ✓ Proponer respuestas aproximadas de manera rápida cuando son más convenientes que las exactas o éstas no se pueden emitir.
- ✓ Desarrollar pensamiento hipotético (conjeturar, resolver, valorar, modificar)
- ✓ Utilizar comprensivamente los conceptos relacionados con los números y la medida.
- ✓ Tolerar el error encontrándole sentido.
- ✓ Reformular problemas a formas mentalmente más manejables.
- ✓ Aplicar distintas estrategias de estimación, sabiendo elegir la más conveniente a la situación planteada.

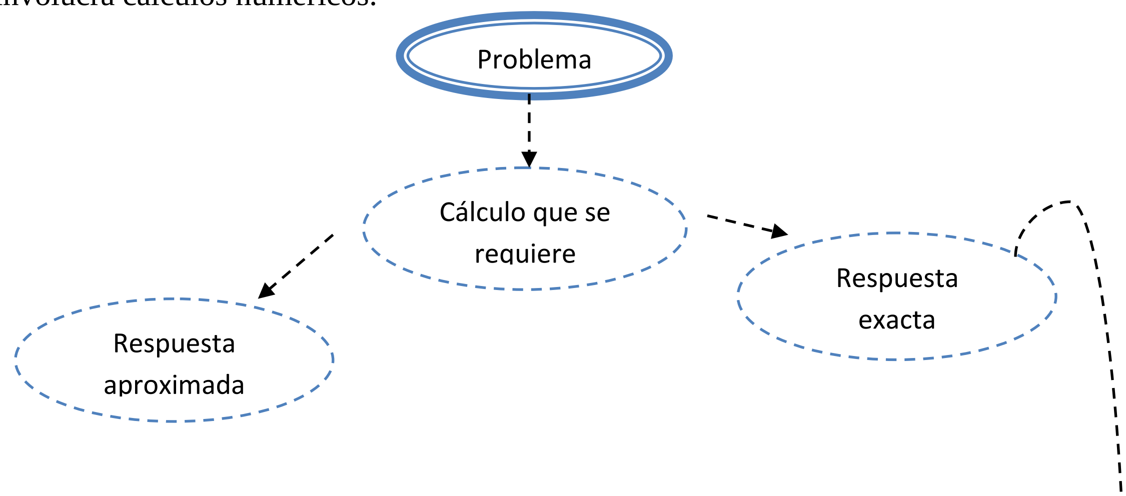
En consecuencia, favorecer el uso de la estimación en situaciones de medida propicia en los estudiantes procesos mentales que traen implícitos aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales que se regulan progresivamente al interactuar con los demás y con el medio.

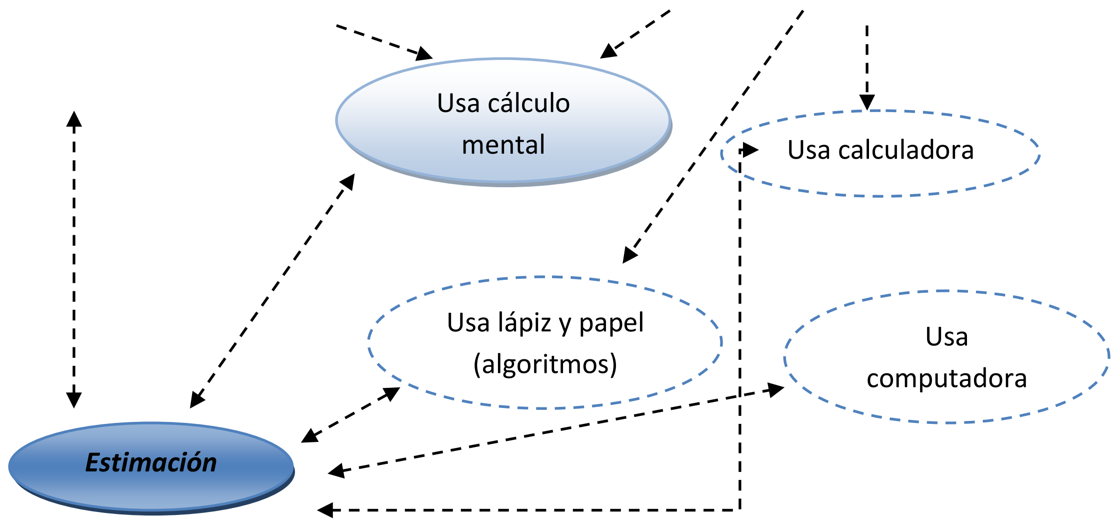
A partir de una revisión rigurosa de los resultados de investigaciones en los que se identificaron habilidades, estrategias y procesos que intervienen en la estimación, Castillo, J. et al. (2011) determinó los componentes de la estimación en medida. Dichos componentes son:

- ✓ Comprender la cualidad que se va a estimar o medir.
- ✓ Percibir lo que va a ser medido o estimado.
- ✓ Comprender el concepto de unidad de medida.
- ✓ Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación.
- ✓ Tener imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación.
- ✓ Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar.
- ✓ Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida.
- ✓ Seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones. Entre ellas se destacan: Iterar un referente presente o ausente, acotar, comparar, descomponer, recomponer, reajustar, usar técnicas indirectas (empleo de fórmulas)
- ✓ Verificar la adecuación de la estimación.

Para estimar en medida también se hace uso de destrezas que corresponden a la estimación en cálculo ya que no se trata de una adivinación, sino que esta constituye en sí una forma de cálculo privilegiado que corresponde a un proceso mental que involucra destreza en el uso de algoritmos mentales–según Segovia, I. (2007) fáciles de memorizar y rápidos-, uso apropiado de números sencillos, dominio de procedimientos aritméticos como el redondeo, el truncamiento y la sustitución y dominio del sistema de numeración decimal y sus distintas formas de representación numérica.

Figura 3. Proceso que se sigue en la toma de decisiones para resolver un problema que involucra cálculos numéricos.





Fuente:Bressan, A. &Bogisic; B. (1996, pág. 7)

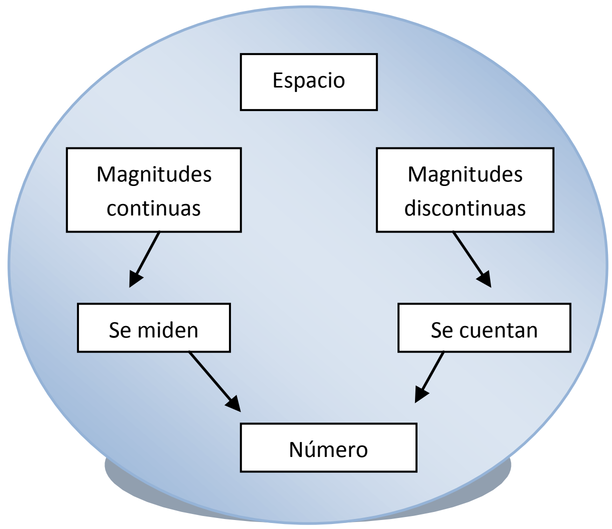
En la figura 3, se puede apreciar el papel de la estimación tanto en la solución de problemas que requieran cálculos exactos, como respuestas aproximadas ya que como estrategia, la estimación "ayuda a anticipar resultados, orientar los cálculos y controlar la razonabilidad de las respuestas obtenidas"Bressan, A. &Bogisic; B. (1996, pág. 7)

5.10 Cantidades continuas y magnitud volumen

Las cantidades pueden ser discretas o continuas. Cantidades discretas son las que constan de unidades o partes separadas unas de otras. Las cantidades continuas por el contrario, no están formadas por partes separadas entre sí, continuo significa "sin interrupción" y por esto no pueden contarse, pueden medirse si seleccionamos una unidad de medida.

Duhalde, M.E.; & González, M.T (1996, pág.52) ayudan a precisar por medio de un gráfico, que el número se relaciona con el espacio a través del conteo o medición de sus magnitudes en una relación constante, pero que precisamente como número que permite expresarlas, puede expresar cantidades "contables o discretas" (números naturales) o "medibles o continuas"(números fraccionarios o decimales):

Figura 4. Relación número-espacio a través del conteo o medición de sus magnitudes.



Ahora bien, con relación a la magnitud volumen, Kerslake, D., citada en Dickson, L. et al. (1991) sostiene que existe una confusión entre los conceptos de capacidad y de volumen tan arraigado en la población en general, que es necesario hacer claridad en ellos. Según esta autora, la capacidad es la facultad de los envases huecos para alojar algo y su patrón de medida está dado en litros, mientras que el volumen puede usarse en 2 sentidos:

- ✓ Volumen interno: es lo mismo que capacidad, aunque se espera que en este sentido las unidades de medida estén dadas en unidades cúbicas.
- ✓ Volumen externo: cantidad de espacio que un objeto toma para sí, es decir, volumen de espacio que ocupa.

Dickson, L. et al. (1991) fue más allá, ampliando el concepto de volumen y diferenciando (con base en las investigaciones que Piaget e Inhelder adelantaron en 1974) cuatro tipos de volumen a saber:

- ✓ Volumen interno.
- ✓ Volumen externo.
- ✓ Volumen líquido y capacidad.
- ✓ Volumen desplazado: El volumen de un objeto es equivalente al volumen del líquido que desplaza al ser sumergido en un recipiente con agua.

Posteriormente, Sáiz M., (2003) estudió los significados que comúnmenteson asociados al vocablo volumen destacando:

- ✓ Volumen interno.
- ✓ Volumen ocupado.
- ✓ Número, es decir, volumen como una magnitud que se puede calcular.
- ✓ Volumen encerrado.
- ✓ Volumen desplazado.

Ante tanta ambigüedad, Kerslake, D., citada en Dickson, L. et al. (1991) sustenta que es necesario adelantar en el aula trabajos didácticos que conlleven a los estudiantes a superar las dificultades que se presentan con relación a la conservación de volumen y capacidad y que desencadenarían en la apreciación de los estudiantes de la naturaleza imprecisa de las medidas de estas magnitudes. Reconocer esta naturaleza imprecisa es lo que torna a la estimación como un aspecto operable, por cuanto el sujeto podrá reconocer e identificar cantidades cuya medida sea aproximadamente la de las unidades tomadas como referente.

Hay que decir que las dificultades en el estudio de las magnitudes surgen al ser tratadas como fenómenos separados de las situaciones reales, con tal suerte, que las dificultades dan lugar a confusiones y no a relacionesentre magnitud y medida, volumen y capacidad, volumen y peso, volumen y superficie, área y perímetro, masa y peso entre otras. Al respecto, Chamorro, M. & Belmonte, J., (1991)consideran que esta dificultad se debe a que para trabajar con medidas directas (las que pueden ser medidas directamente o mediante un aparato calibrado: longitud, masa, tiempo, voltaje…) se dan errores que van desde el uso indebido de los sentidos y de los instrumentos de medida, hasta dificultades para contar unidades no enteras. Pero para trabajar con medidas indirectas (las que atañen a esta investigación por no medirse directamente ya sea por su tamaño o forma, siendo necesario calcularlas mediante fórmulas a partir de magnitudes medidas directamente: velocidad, volumen, superficie…), no solo intervienen las dificultades ya señaladas para las medidas directas, sino que además se añaden dificultades relacionadas con la elección de la unidad de medida adecuada, la comprensióndel lenguaje algebraico, las confusiones ya mencionadas entre diferentes magnitudes y los problemas con datos erróneos o no reales, motivo por el cual en el documento “La medida en la Educación Primaria” (2003) sus autores concluyeron que los errores en los procesos indirectos de medición están asociados por una parte al mal uso de las fórmulas y por otra a los cambios de unidades o a la omisión de la unidad cuando se expresa una cantidad.

Para los fines de esta investigación la magnitud volumen que se estudia, corresponde al tipo *volumen ocupado*, es decir, cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno(Sáiz, M. (s.f, pp.8)).

5.11 Volumen ocupado

En la vida cotidiana es más común hacer referencia a la noción volumen interno (capacidad, llenado total de cosas huecas) y no a la noción volumen ocupado (volumen de un objeto). Al respecto, Piaget e Inhelder (citados por Dickson, 1991) demostraron con sus estudios que la noción volumen ocupado se adquiere en un estadio más tardío que la noción de volumen interno, lo que acentúa la dificultad que presentan los estudiantes al abordar dichas nociones.

A Sáiz, M., (2003) le preocupa dicha dificultad y por eso revisa los conceptos que sobre volumen tienen los profesores para ayudar así a los estudiantes a alcanzar la noción de volumen ocupado y se adentra en la cotidianidad de la escuela,confirmando que en el aula se evidencia una marcada ausencia de tareas que apunten a la noción volumen ocupado y refuerza su postura citando a Kerslake (citada por Dickson, 1991) quien considera que los escolares encuentran más sencilla la noción de volumen interior (¿cuánto contiene un recipiente?) que la de volumen ocupado (¿cuánto espacio ocupa este objeto?), destacando que los docentes utilizan los mismos esquemas para estudiar las dos nociones, impidiendo que los estudiantes distingan ambos tipos de volumen.

La misma autorasugiere que el problema de confusión entre capacidad y volumen podría disminuir notablemente si cada vez que en el aula se aborda una magnitud, el profesor hace hincapié en los objetos susceptibles deser medibles con dicha magnitud, así por ejemplo, los objetos susceptibles de ser medidos respecto a su volumen interno/capacidad son los recipientes, mientras que cualquier objeto de nuestro mundo es susceptible de ser medido respecto a su volumen ocupado.

De igual modo, la investigadora cuestiona las herramientas que en la clase de Matemáticas se le ofrecen a los estudiantes para enfrentarse a situaciones de medida en la "vida real", pues en clase los estudiantes se limitan a encontrar el volumen de sólidos regulares cuando en la cotidianidad abundan los sólidos irregulares. De ahí la importancia de generar oportunidades de medir y de estimar valiéndose del entorno.

Finalmente, esde destacar la importancia que tiene al momento de estudiar el volumen y su medida; reconocer que el hombre vive en un mundo tridimensional,de modo que se reconozca que el volumen es la magnitud de nuestro mundo (Sáiz, M. 2007).

6. Diseño Metodológico

En este capítulo, se justifican las opciones metodológicas que se adoptaron para llevar a cabo la presente investigación describiéndolas pormenorizadamente.

6.1Tipo de estudio

Este estudio tuvo como objetivo fundamental reconocer la incidencia de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje sobre el desarrollo de la estimación en cantidades continuas específicamente en la magnitud volumen ocupado, motivo por el cual su preocupación central fue comprender cómo a través de la implementación de una estrategia metodológica intencionalmente concebida, se puede potenciar en los estudiantes la estimación en la magnitud volumen en contextos significativos y facilitadores de la interacción social.

Así, el trabajo realizado se enmarcó en un plano de investigación cuyo fin fue estudiar una situación en el ambiente natural del aula, procurando examinar ese desenvolvimiento a través de estrategias diversificadas. Por lo tanto, la naturaleza del problema a investigar sugirió adoptar una metodología centrada en una investigación cualitativa.

De acuerdo con Ortiz, M. (1999) los métodos de investigación cualitativa en Educación Matemática, reconocen la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, facilitan el diseño de métodos más apropiados a la naturaleza del problema y destacan al aula como escenario principal, con los profesores y los estudiantes como protagonistas. De este modo, la implementación de una metodología de corte cualitativo permitió el conocimiento de aspectos personales, creencias, perspectivas, concepciones, éxitos y fracasos propios de los actores de la dinámica escolar estudiada.

6.2 El método

Teniendo en cuenta los aspectos referidos y dado que este estudio está orientado hacia la comprensión, se consideró que la etnografía educativa como método de investigación era el método que más se adecuaba al trabajo a realizar. De acuerdo con Axpe, M. A.; (s.f) este método "deriva de los estudios de campo sobre la enseñanza escolar y otros procesos educativos" ya que se adapta fácilmente a las tareas que deberían orientar la actividad de un etnógrafo en el campo educativo. Asimismo, Eisner, E.; citado por Folgueiras, P. (2009) enumera las ventajas de la investigación cualitativa destacando entre otras, que los estudios tienden a estar enfocados, el propio investigador se torna como un instrumento, es de carácter interpretativo y se atiende a lo concreto, a lo particular; todos ellos, aspectos que validaron su implementación en esta investigación.

Además este estudio, atiende a un paradigma interpretativo cuya finalidad es de corte comprensivo dado que requirió de la participación activa de la investigadora en la cotidianidad de la clase de matemáticas, lo que le supuso observar y auscultar el modo como interactuaban las estudiantes y ella misma como profesora titular de la asignatura. Al respecto, Bartolomé, M.; citada por Axpe, M; (s.f) considera que los enfoques comprensivos son necesarios para un conocimiento mayor de la realidad educativa, aunque lo realmente interesante es que la etnografía dé lugar a un conocimiento tal de la realidad que permita transformarla.

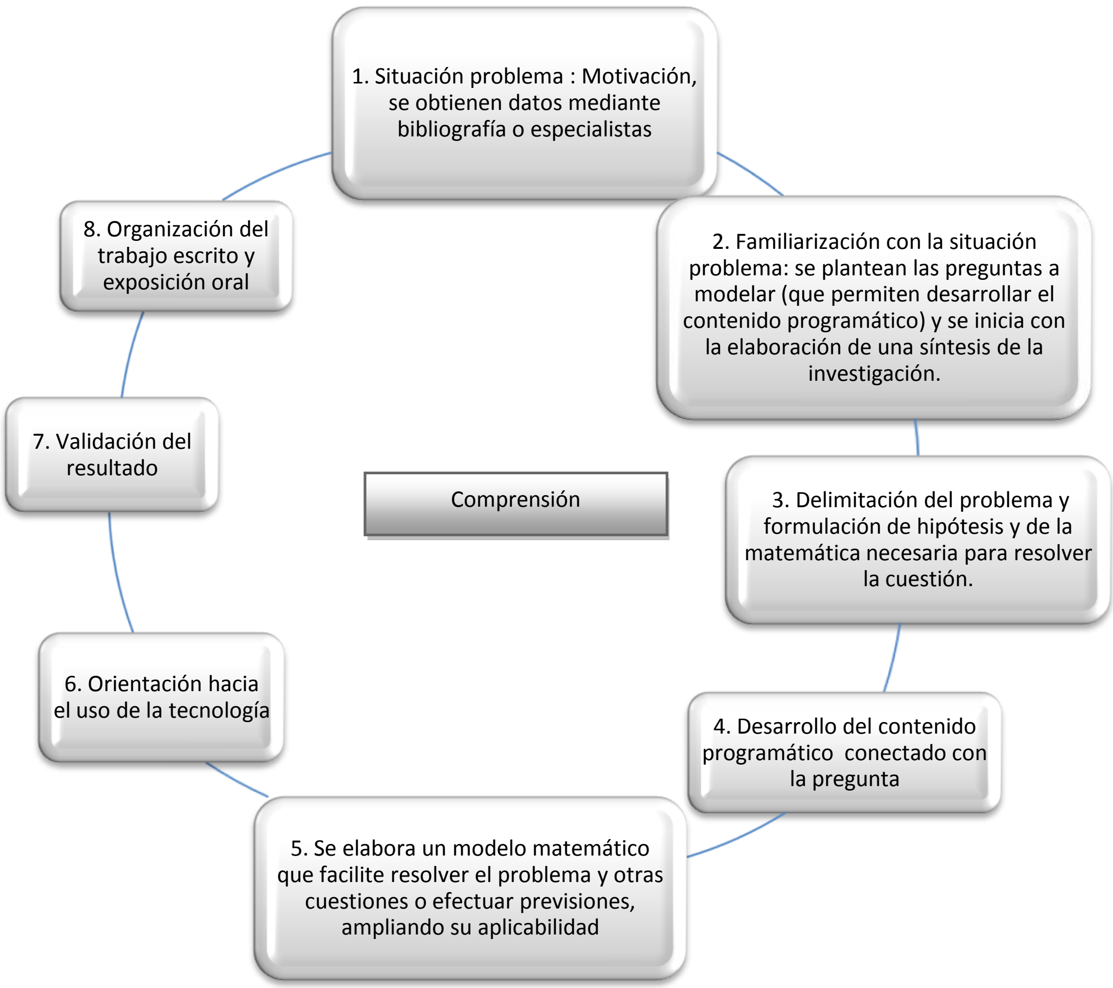
Para llevar a cabo esta investigación, se utilizó una metodología de trabajo intensivo entorno a una secuencia didáctica, con el fin de abarcar la complejidad de la situación a estudiar, toda vez que se pretendía analizar las ideas, mecanismos y procedimientos matemáticos de un grupo de estudiantes confrontados en situaciones de estimación de volumen ocupado cotidianos, así como de comprender e interpretar las manifestaciones de las formas de pensamiento, las decisiones, dificultades y opciones de las estudiantes en las situaciones diseñadas en dicha secuencia didáctica.

6.3 Procedimiento

La preparación del trabajo de campo se inició con el diseño de una secuencia didáctica que facilitó el desarrollo de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje.

Esta secuencia se concibió como una serie de actividades coordinadas y dirigidas a la consecución de un fin, un producto o una tarea final, que en esta investigación coincidió con la implementación de la modelación matemática como método de enseñanza y aprendizaje desde los abordajes sugeridos por Biembengut, M.; &Hein, N. (2004): desarrollo del contenido programático (método de enseñanza) integrando algunas etapas del método para enseñar a los estudiantes a hacer modelación (método de investigación) con el fin de potencializar en las estudiantes el desarrollo de habilidades para la investigación y la estimación en cantidades continuas para el contenido programático correspondiente a la asignatura de Matemáticas en grado 9° de educación básica secundaria en la unidad "volumen de cuerpos geométricos".

Figura 5. Abordaje de la Modelación Matemática como método de enseñanza y aprendizaje que fusiona el método de enseñanza y el método de investigación propuestos por Biembengut y Hein.



Fuente: Elaboración propia.

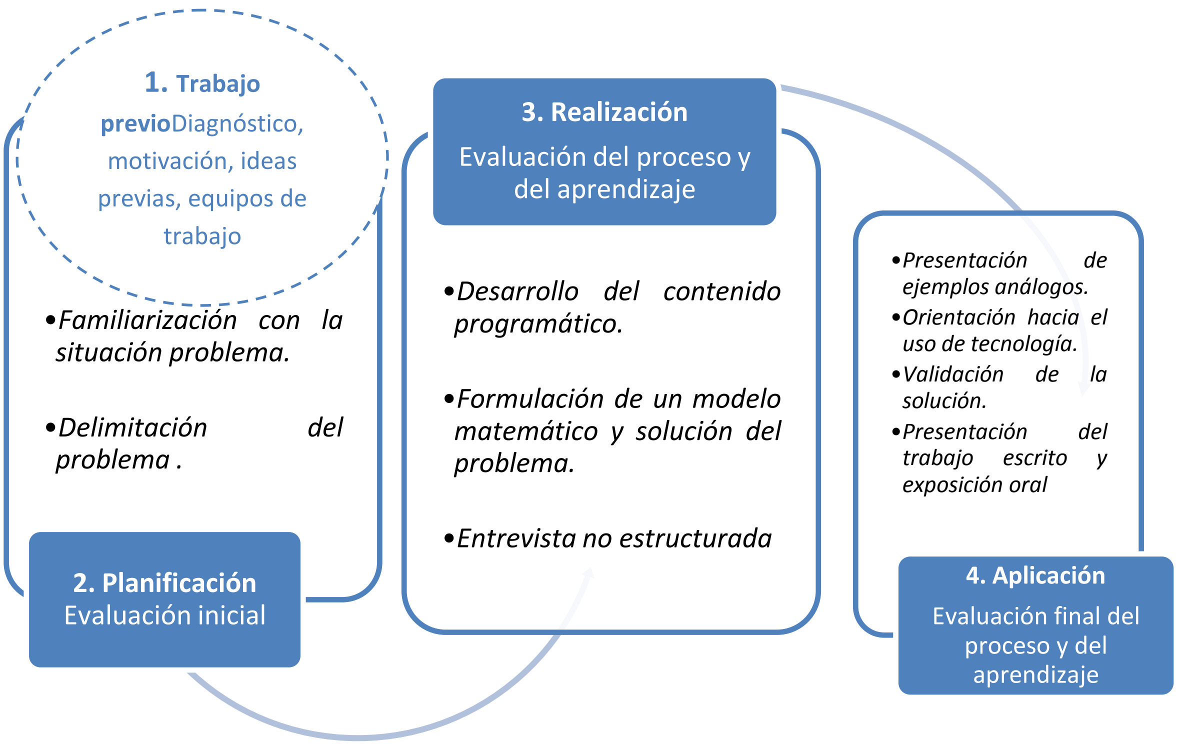
Se decidió diseñar una secuencia didáctica dado que se hacía necesario contar con un modelo que permitiera planificar y organizar las etapas de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje, proporcionando sentido de funcionalidad en aras de dar coherencia a la propuesta metodológica. Las características de una secuencia didáctica, enunciadas en Competencia matemática. Educación secundaria obligatoria (s.f) son:

- ✓ Constituirse como una unidad de trabajo
- ✓ Plantear situaciones problémicas
- ✓ Tener un objetivo claro
- ✓ Evaluar como parte del proceso (facilitar ejemplos análogos)

Para alcanzar el objetivo de investigación, se planificó la secuencia didáctica a través de cuatro fases que contienen las etapas para implementar la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje que involucraron a su vez las técnicas de recolección de datos propias del método de investigación elegido para el estudio, facilitando al mismo tiempo los espacios para evaluar tanto el proceso como el aprendizaje. Lafigura 6 facilita la observación de la secuencia de actividades en la organización metodológica

El trabajo se implementó en el Colegio del Sagrado Corazón de Jesús-Hermanas Bethlemitas de la ciudad de Pereira Risaralda; institución de carácter privado, campestre y femenino, que por cada grado escolar cuenta con solo un grupo de estudiantes. Para la realización de la práctica, se determinó que el grado 9° era el que más se ajustaba al objetivo de la investigación, debido a que el contenido programático de la asignatura de Matemáticas en el cuarto periodo académico, sugería el trabajo con volúmenes de cuerpos geométricos, más no incluía la estimación como parte de su plan de asignatura, por eso, los profesores de Matemáticas de la Institución en reunión de área, decidieron hacer algunas modificaciones, no solo para facilitar el proceso de investigación de una de sus compañeras, sino para enriquecer el plan de estudios del área en este aspecto específico (Anexo A).

Figura 6. Secuencia didáctica.



Fuente: Elaboración propia.

El grado 9° contaba con 39 estudiantes con edades que oscilan entre 14 y 16 años, la investigadora era la profesora titular del grupo para la asignatura de Álgebra, por lo cual se esperaba que no se alterara la dinámica cotidiana de la clase, sin embargo, las estudiantes fueron informadas de algunas de las actividades que se llevarían a cabo como entrevistas o filmaciones, toda vez que estas no eran actividades habituales en el salón de clase.

6.3.1 Fase 1: Trabajo previo.

La primera fase correspondiente al trabajo previo involucró el diagnóstico, la motivación, el reconocimiento de las ideas previas de las estudiantes y la conformación de los equipos de estudio.

Durante esta sesión de trabajo (tres horas de clase, 135 minutos en total), las estudiantes respondieron un cuestionario diagnóstico, el cual supuso por parte de las estudiantes la puesta en común de sus ideas previas, sometiendo sus conocimientos a cuestionamientos y revisiones que condujeron a que se interesaran verdaderamente por profundizar en la nueva temática que se les presentaba; y por parte de la investigadora abordar la comprensión que las estudiantes tenían sobre laestimación en lamagnitud volumen ocupado y sobre cómo la aplicaban en su cotidianidad.

De igual forma, durante esta fase se solicitó al grupo que se subdividiera en 8 equipos de trabajo; para lo cual la investigadora decidió permitir que las estudiantes conformaran los equipos atendiendo a su afinidad entre pares, considerando que de este modo, las estudiantes se sentirían más a gusto y con más confianza, favoreciendo discusiones en el marco de la práctica social que subyace a la modelación y a la secuencia didáctica planteada. Precisamente, en este sentido, Camarena, P. (2009) considera que cuando se trabaja la matemática en contexto, los estudiantes tienden a hacerse responsables de su aprendizaje adquiriendo habilidades directamente implicadas en la autonomía del aprendizaje, todo ello gracias al trabajo en equipo, cambiando el paradigma de que el profesor es el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje por otro que gira en torno al estudiante.

Los 8 equipos de trabajo se guiaron durante la secuencia didáctica por normas claramente establecidas en un contrato de trabajo cooperativo (Anexo B).

6.3.2 Fase 2: Planificación.

El objetivo de esta segunda fase fue familiarizar a las estudiantes con la situación problema que para este caso correspondió a la construcción de empaques (Anexo C) con un fin particular.

Durante esta fase, de duración aproximada de 2 sesiones (180 minutos en total) se delimitó el problema al trabajo sólo con prismas. Así Algunas de las preguntas orientadoras en esta fase fueron: ¿cómo se puede resolver la situación?, ¿qué formas pueden tener los empaques?, ¿cuál es el volumen ocupado ideal según el producto?, ¿qué conocimientos matemáticos se requieren para solventar la situación?, ¿existe relación alguna entre la forma del empaque y su volumen ocupado?, ¿cómo se puede optimizar el material?, ¿cuál es el papel de los datos "exactos" en la construcción de los empaques?

La fase de planificación requirió el uso de un diario de campo, el cual se siguió alimentando durante el trascurso de las diferentes fases de la secuencia didáctica.

6.3.3. Fase 3: Realización.

En esta fase, de duración aproximada de 10 sesiones (450 minutos en total) se desarrolló el contenido programático para la asignatura de Matemáticas en el grado 9° del colegio Bethlemitas (área de superficies, cuerpos geométricos, magnitudes extensivas, unidades de medida para volumen, volumen de cuerpos geométricos, estimación indirecta de medidas), así como también se procedió a matematizar los resultados obtenidos hasta ese momento en las diferentes prácticas que buscaban la solución al problema planteado en la fase 2 con el fin de construir el modelo.

Hay que decir que para esta investigación, la posición de Biembengut M., &Hein, N., (s.f), frente a lo que es un modelo matemático, permeó la secuencia didáctica para darle coherencia y sustento: "sea cual sea el caso, la solución de un problema requiere de una formulación matemática detallada. Al conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno o un problema realista, lo denominamos modelo matemático".

Así pues, la investigadora acompañó a las estudiantes en la búsqueda de estrategias para llegar a estimar el volumen ocupado de los distintos modelos de empaques que ellas mismas habían propuesto para solucionar la situación problema a través de sus modelos, coincidiendo con la postura de Córdoba, F., (2011) quien sustenta que en el proceso de modelación en el aula, lo importante no es que el modelo encaje perfectamente en los datos, sino que las interacciones que surjan en la dinámica misma del proceso, favorezcan la emergencia de elementos que re-signifiquen el conocimiento matemático escolar.

Durante este acompañamiento tuvieron lugar algunas entrevistas no estructuradas (cuyas preguntas se adaptaron a las situaciones particulares de cada equipo de trabajo durante el desarrollo de la fase) dada la flexibilidad que brindaba ala investigadora esta técnica de recolección de datos.

6.3.4 Fase 4: Aplicación.

En el marco de esta última fase de la secuencia didáctica, las estudiantes diligenciaron un nuevo cuestionario, cuya duración fue de 2 sesiones de 90 minutos en total, en el que pusieron a prueba su habilidad para llegar a consensos y poner al servicio de las situaciones planteadas los modelos matemáticos formulados en situaciones anteriores con el fin de validarlos; con este instrumento, se propuso a las estudiantes situaciones en las que fue necesario estimar volúmenes ocupados ya fuera los propuestos por ellas o a través de modelos de prismas construidos con Cabri 3D, que es un software educativo que provee herramientas destinadas al estudio de la geometría dinámica, todo esto aprovechando que "la implementación de software de geometría dinámica es un instrumento útil en la resolución e invención de problemas, provocando que el alumno realice experimentos, conjeturas y generalizaciones" Castro, E., (2011), citando a Christou, Mousoulides, Pittalis, y Pitta-Pantazi.

En palabras de Biembengut M., &Hein, N., (s.f), "es importante al concluir el modelo, elaborar un informe en el que se comuniquen todas las facetas del desarrollo, con el fin de propiciar su uso". Motivo por el cual, cada equipo de trabajo presentó un trabajo escrito que posteriormente expuso ante sus compañeras en el que se resaltaron no solo los procedimientos matemáticos utilizados, sino también los avances, dificultades y fortalezas que caracterizaron el desempeño de cada equipo, evaluando así el proceso del cual habían sido protagonistas.

6.4 Técnicas e instrumentos de recolección de información.

Una vez se está ante un estudio de naturaleza comprensiva, el trabajo de campo se convierte en una constante que determina la recolección de los datos, los cuales son variados, numerosos y provenientes de fuentes igualmente diversas. Parael caso de la presente investigación, se implementaron diferentesinstrumentosaplicados directamente en el ambiente natural de la clase.

En primer lugar, se usarondos cuestionarios, uno denominado "de diagnóstico"(Anexo D) el cual contaba con nueve preguntas abiertas(se decidió plantearlas abiertas con el fin de no delimitar a las estudiantes con posibles respuestas y obtener la mayor cantidad de información posible a pesar de la dificultad que supondrían al momento de clasificarlas y codificarlas para analizarlas) y otro,implementado al finalizar la secuencia didáctica denominado "de validación" (Anexo E) que igualmente contó con una batería de preguntas abiertas.

Por otra parte, las grabaciones en video de gran parte de las actividades que realizaron las estudiantes en los diferentes subgrupos, permitió ampliar la percepción de las dinámicas observadas por la investigadora ya que esta técnica facilita hacerse a aspectos que difícilmente se pueden recordar con exactitud tales como gestos, acciones y/o verbalizaciones. Dichas grabaciones fueron analizadasy enriquecidas con los registros del diario de campo viniendo a constituirse en un instrumento básico para la reflexión y la reconstrucción de los procesos que acontecíanen el aula. Tanto los cuestionarios como las grabaciones en video fueron analizados a través del uso de un software llamado atlas.ti que permite analizar y codificar datos cualitativos.

El conjunto de registros realizado por las estudiantes en la secuencia didáctica también fue objeto de estudio a través de la técnica denominada análisis de contenido. Fromm, L. & Ramos, V., (2009) se refieren a esta técnica como una forma de leer e interpretar el contenido de cualquier clase de documentos, resaltando que “debemos agudizar nuestro sentidos de modo que podamos leer cosas que, aunque estén presentes, nadie más percibe, lo cual no significa que sean inventadas” sugiriendo además que el análisis de los documentos debe estar respaldado por evidencia, que para este caso específico, corresponde a los trabajos escritos entregados por las estudiantes al finalizar la secuencia didáctica.

Otro medio de recolección de datos lo constituyó la realización de entrevistas no estructuradasdurante las actividades que iban llevándose a cabo durante la secuencia didáctica y que quedaron registradas en las grabaciones ya mencionadas. Dichas entrevistas se dieron en el marco de los subgrupos que formaron las estudiantes como preguntas que surgían para profundizar en los diálogos que la investigadora consideró interesantes, ya fueran por lo acertados o por lo equivocados. De este modo, la definición de entrevista dada por Folgueiras, P. (2009, pp. 19) “Técnica orientada a obtener información de forma oral y personalizada sobre acontecimientos vividos y aspectos subjetivos de los informantes en relación a la situación que se está estudiando” se evidenció a cabalidad.

7. Análisis de datos

“Con frecuencia las trampas del leguaje nos impiden entender el sentido de una oración y nos empujan a entender mal una realidad determinada. Por eso resulta siempre muy útil examinar el contexto en el que se usan las oraciones o en que aparecen los hachos. La descripción de la realidad es, pues, una descripción de los contextos en que la realidad aparece: a partir de esa descripción podemos saber en qué consiste lo que estamos examinando y qué sentido tiene”Terricabras, 1999)

A partir del análisis de los instrumentos de recolección de datos se procuró determinar la capacidad de las estudiantes para estimar volúmenes así como verificar el modo en que la modelación como estrategia de enseñanza-aprendizaje incidía en la mejora de dicha capacidad. Los datos fueron interpretados teniendo en cuenta el contexto en el que fueron recogidos tratando de relacionar el objeto de estudio con los contextos que lo influenciaron.

7.1 Exploración de ideas previas

Para la exploración de ideas previas, se aplicó un cuestionario diagnóstico cuyo propósito fue revisar la capacidad de las estudiantes para estimar volúmenes en diferentes situaciones. Se identificaron cuatro categorías y ocho subcategorías (identificadas por su recurrencia) relacionadas con el concepto de volumen que de una u otra forma les impidió llevar a cabo la tarea de estimar. Como ya se había comentado, el análisis se hizo desde una perspectiva cualitativa y para ello la investigadora se apoyó en una red semántica construida a partir de la información dada por las estudiantes en el cuestionario diagnóstico.

El análisis de las categorías y subcategorías que finalmente se destacaron en la implementación del taller diagnóstico comprendió la revisión de registros de las estudiantes y notas del diario de campo implementado por la investigadora de modo que emergieran los aspectos fundamentales que facilitaron el proceso de estudio.

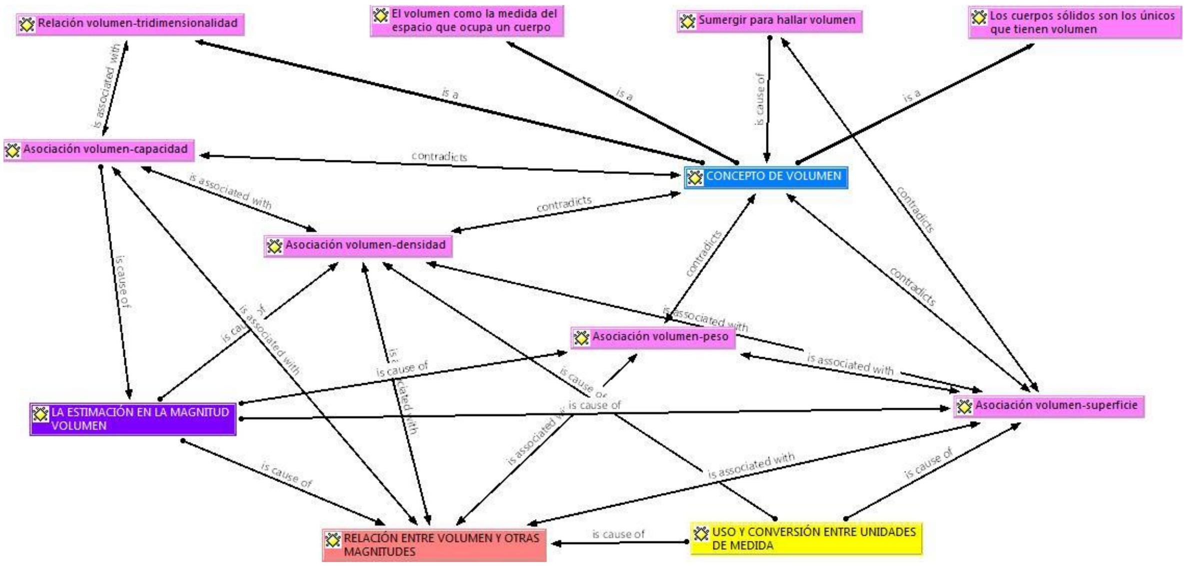


Figura 7. Red semántica en la cual se representan las principales categorías y subcategorías halladas en el instrumento diagnóstico.

7.1.1 Concepto de volumen

La noción de volumen no por básica deja de ser un problema tanto para los estudiantes en los diferentes cursos que lo abordan como para los profesores que con frecuencia presentan tantas dificultades como sus aprendices con respecto entre otros, a aspectos históricos y epistemológicos del concepto que van más allá de la estructura formal que presenta y deberían contemplar con fines educativos (González-López, M. & Flores, P. (2002)

Dentro de las ideas expresadas por las estudiantes con respecto al significado del concepto volumen se encontró que prevalecen concepciones como:

- 
pero todo tiene volumen, un lugar en la "tierra",

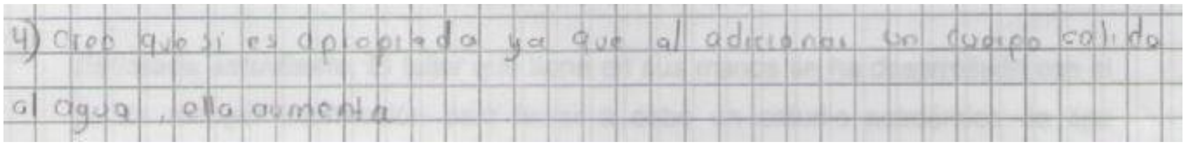
- 8. Si porque tiene 3 dimensiones (x, y, z), podría contener algo, y el mismo ocupa un espacio.
- una caja de un metro x un metro (1m x 1m) con profundidad de 1m
- 4 SI CREO QUE ES APROPIADO YA QUE AL TIRAR LA PIEDRA EN EL AGUA AUMENTA Y UNO SE DA CUENTA DE EL VOLUMEN. POR LO QUE SUBE EL AGUA.

Estas expresiones ilustran las nociones que del concepto volumen tienen las estudiantes y todas ellas están en concordancia con lo que para Freundenthal y Puig citados por Sáiz,M (2003, pp. 450) es un concepto matemático:

> "Medio de organización de diferentes fenómenos que suceden en contextos diversos. Por ejemplo, en el caso del volumen, puede ser entendido como el espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, como la cantidad de unidades que forman un cuerpo o como un espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido, como un espacio libre encerrado en una superficie cerrada, o bien, como una función de medida o una integral e incluso de algunas otras maneras…La totalidad de estos significados, usos, reglas y propiedades, en todos los contextos es lo que Freudenthal llamaría "concepto volumen" y Puig "campo semántico del volumen" o "conocimiento enciclopédico del volumen"

Sin embargo, se evidencia una contradicción entre lo que las estudiantes dicen que es el volumen y lo que realmente entienden cuando se les pide que hallen el volumen o que interpreten una expresión que denota unidades de volumen. Por ejemplo, en respuesta a la pregunta ¿considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Expresiones como:

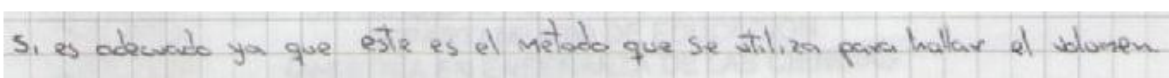
- no, porque no es compacto y flotaría, pero si se impulsa hasta el fondo de un recipiente con agua entonces tendría un volumen

➢ 
4) Creo que sí es apropiada ya que al adicionar un cuerpo sólido al agua, ella aumenta

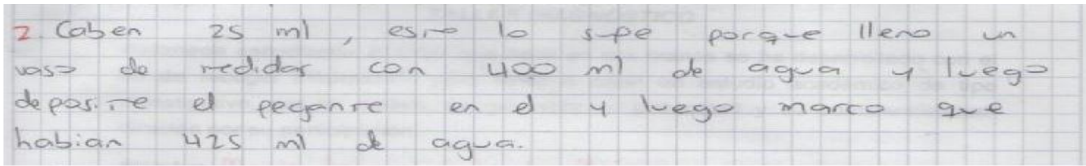
dejan al descubierto que para algunas estudiantes, sólo los cuerpos sólidos tienen volumen y por tanto objetos diseñados con materiales maleables o los líquidos y los gases no ocupan un lugar en el espacio.

Independientemente de la edad y escolaridad del sujeto que se enfrente a situaciones de medición de volumen, Sáiz, M., (2003) considera que “la ausencia de una fórmula específica para hacer un cálculo, o bien la falta de imaginación para descomponer un objeto en partes o poca experiencia en transformaciones de romper y rehacer o para medir con instrumentos de precisión” son ítems que pueden contribuir a formar la creencia de que no todos los objetos tienen volumen y que por tanto no son volumen-medibles

Otra concepción que prevalece con una alta frecuencia es la del principio de Arquímedes como “el método para hallar volumen”. Dicha concepción se refuerza por expresiones dadas por las estudiantes en respuesta a la situación: La profesora estimó que el volumen de la piedra que está sobre la mesa es 10 cm^3. El procedimiento que llevó a cabo fue: usando un recipiente graduado, con agua, sumergió la piedra y después midió cuánto subía el nivel del agua. ¿Cree que esta estrategia es apropiada para encontrar el volumen?:

➢ 
Si es adecuado ya que este es el método que se utiliza para hallar el volumen

Esta misma idea persiste en casi todas las respuestas de las estudiantes ante otras situaciones en las que para determinar el volumen se pudieron usar estrategias diferentes al principio de Arquímedes; se pone por caso la pregunta 2 del cuestionario que proponía: ¿cuánta cantidad de pegante cree que cabe en el pegante cilíndrico que hay sobre la mesa?A pesar de que pudieron hacer uso de la fórmula del volumen para los cilindros que ya era conocida por ellas, todas, sin excepción, implementaron la misma estrategia de inmersión del pegante en un recipiente graduado lleno con agua, además, se evidencia confusión en la expresión de las cantidades de magnitud y sus unidades de medida pero este apartado se tratará más adelante.

➢ 
2. Caben 25 ml, esto lo supe porque lleno un vaso de medidor con 400 ml de agua y luego deposite el pequeño en el y luego marco que habian 425 ml de agua.

Al contrario de lo hallado por la investigadora Sáiz, M., (2003) quien analizó los procedimientos para medir y comparar volúmenes usados por maestros de primaria de México, en este estudio el procedimiento más generalizado y “confiable” para hallar volúmenes entre las estudiantes es la inmersión de objetos. En el caso de la doctora Sáiz, aunque la inmersión fue uno de los métodos más usados, no era considerado por los maestros como un método confiable pues pensaban que el peso, la densidad y la presión influían en el resultado. No obstante, la confusión volumen-peso, volumen-superficie y volumen-densidad también fueron constantes entre las estudiantes, solo que ellas no tenían conciencia de dichas confusiones.

Sanmiguel, A. & Salinas, M. (2011) destacan cómo la comprensión del concepto volumen y su conexión con la realidad da herramientas a los estudiantes para que entiendan su entorno; sin embargo, también destacan que las dificultades que presentan los estudiantes derivan en gran medida de las dificultades que presentan los profesores al enseñar el concepto como resultado de la metodología empleada. Así pues, en esta investigación se considera que la persistencia del procedimiento de inmersión como “el método para hallar volumen” en correspondencia a la definición “volumen: espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido” deriva en gran parte de una temprana introducción del lenguaje algebraico relacionado con el concepto de volumen y no es representativo de una noción clara en la que las estudiantes comprendan realmente el significado de *“espacio desplazado”*, pues de lo contrario no se daría la confusión entre volumen-peso, volumen-densidad, volumen-capacidad y volumen-superficie dadas las estructuras lógicas que según sus edades deberían tener.

7.1.2 Relación entre volumen y otras magnitudes.

Tanto por su edad, como por haberlos estudiado en grados anteriores y asignaturas diferentes, las estudiantes de grado 9° deberían diferenciar los conceptos de superficie, capacidad, peso, densidad y volumen; sin embargo, un detallado análisis de las respuestas dadas por las estudiantes conlleva a determinar que no diferencian estas nociones y prueba de ello es el uso indistinto que hacen de uno u otro concepto tomándolos como si fueran sinónimos.

7.1.2.1 Asociación volumen-peso, volumen-capacidad, volumen-superficie y volumen-densidad

Según estudios realizados por investigadores en psicología del desarrollo como Piaget (1923/1970), Inhelder (1955), Vygotsky (1934/1986), Karmiloff-Smith (1992) o Sloutsky (2004), por la edad que alcanzan las estudiantes que participaron de este estudio (14-16 años), las estructuras lógico-algebraicas y de medida características al estadio del desarrollo en el que se encuentran corresponde al denominado por Piaget como "de las operaciones formales" (a partir de los 12 años).

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991) realizan una síntesis de los cinco estadios del desarrollo de la construcción de la inteligencia y de las operaciones lógicas en el ser humano según los estudios de Piaget, destacando específicamente las características propias del proceso de comprensión de las magnitudes de medida; en dicho resumen, se determina que siguen el siguiente transcurso:

1. *Estadios iniciales.* Los juicios sobre longitud, área o volumen se fundamentan por características perceptuales. El sujeto no da muestras de captar la noción de conservación.
2. *Comienza a emerger la conservación y la transitividad.* (6-7 años). Los sujetos aún no comprenden la necesidad de tener unidades de medida todas del mismo tamaño.
3. *Inicio de la conservación operacional y la transitividad:* (7-8 años) Los sujetos comienzan a entender el sentido de área encerrado en un contorno (bidimensión)
4. *Se capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto a medir.* (8-10 años) Los sujetos comienzan a captar la idea de medir recubriendo con unidades más pequeñas que el objeto a medir. Ya han tenido desarrollo las nociones de

medida lineal, superficial y de capacidad, pero del volumen aún no se tienen nociones debido a la imposibilidad de recubrir el espacio ocupado por un cuerpo.

5. *Desarrollo de nociones de medida.* (11-12 años) Puede calcular volumen basado en dimensiones lineales.

Blanco, R. (2010) también destaca los estudios de Piaget y especifica con respecto a los últimos dos estadios del desarrollo que las estructuras lógico-algebraicas y de medida presentan características como:

→ Estadio operacional concreto (7-12 años): Se consigue la comprensión de la estructura numérica, de la conservación de la materia, del peso y del volumen.

→ Estadio operacional formal (12 años en adelante): Las estructuras algebraicas corresponden al pensamiento proposicional e hipotético-deductivo, se da la comprensión de la proporcionalidad métrica, la adquisición de los esquemas combinatorios, las proporciones lógicas y se comprenden conceptos físicos como los relacionados en la comprensión de los factores presentes en problemas con balanzas o planos inclinados.

Sin embargo, el debate respecto de la "secuencialidad" (longitud-área-capacidad-volumen) de la aparición de las nociones entre las diferentes magnitudes de medida está servido. Del Olmo, Moreno y Gil citados por Manotas, M., & Rojas, C., (2008) citan a Hart quien cuestiona los estadios propuestos por Piaget en cuanto a secuencialidad, toda vez que según sus estudios, muchos niños pueden conservar área sin conservar longitud. Aún así, en el presente estudio se considera como base teórica los estudios de Piaget, dado que las edades en las que los sujetos alcanzan los diferentes estadios son aproximadas, además el mismo Piaget, citado por Bullejos, J., & Sampedro, C., (1987) sostiene que la distinción y relación de las propiedades generales de la materia son una conquista del desarrollo intelectual.

En consecuencia y atendiendo a lo citado en el apartado 7,1 de este estudio, el desarrollo de la noción del concepto volumen y el subyacente uso de unidades de medida y conversión entre ellas en el ser humano, depende de múltiples factores entre los que destacan: el desarrollo intelectual, la forma en la que los profesores afrontan la enseñanza del concepto y los contextos en los que el individuo construye significados para darle coherencia a sus experiencias.

Investigaciones diversas (Bullejos y Sampedro 1987, Sanmiguel y Salinas 2001, Chamorro 2003, Vecino 2003) ponen de manifiesto que las dificultades de los estudiantes al interpretar fenómenos de medida persisten gracias a la influencia de sus experiencias personales y que estas inciden directamente en las posteriores dificultades para el aprendizaje de conocimientos científicos. Así mismo, Bullejos, J. & Sampedro, V. (1987) consideran que tal como lo exponen Driver, Osborne y Wittrock las confusiones entre conceptos radican, "más que en la ausencia de mecanismos operatorios formales, en la influencia que tienen los significados construidos por el individuo a lo largo de su vida acerca de su entorno" y que por ello, consideran, tal como lo hicieron Posner, Strike, Hewwson y Gertzog que se debe "enfocar el aprendizaje de las ciencias como un "cambio conceptual" similar al producido en los científicos cuando unas ideas son sustituidas por otras más elaboradas", motivo por el cual concluyen, citando a Carrascosa, que "la principal dificultad para la adquisición de conocimientos científicos no reside en la existencia de preconceptos sino en la metodología que está en su origen".

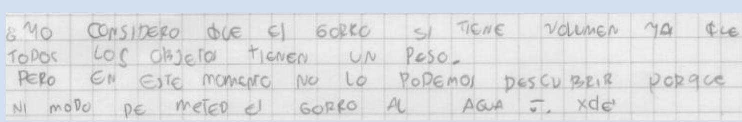
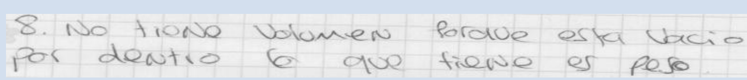
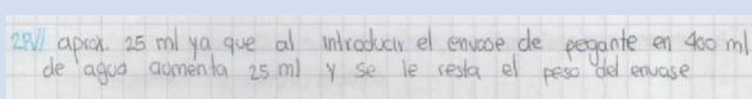
En esta línea de pensamiento, Tamayo, O. et al. (2011) argumenta como "desde la perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de las ciencias, la contemplación del mundo poco aporta a la construcción del conocimiento científico", motivo por el cual, muchos de los conceptos "se deben enseñar y aprender con lógicas diferentes a las del sentido común, es decir, exigen tomar cierta distancia de la información que brindan los órganos de los sentidos". Así pues, en opinión de la investigadora de esta tesis, las dificultades que presentan las estudiantes inherentes a la diferenciación de las nociones implicadas en este estudio descansan en mayor proporción sobre las dificultades del profesorado (metodología) para enseñar conceptos de medida, pues son los profesores los encargados de modelar las experiencias para que los estudiantes puedan interpretar con mayor facilidad la realidad.

Precisamente, Chamorro, M. (2003) analiza el panorama de los currículos de matemáticas de diferentes países para procurar entender lo que sucede en el caso de las dificultades de la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria y descubre que en todos se dan las siguientes características:

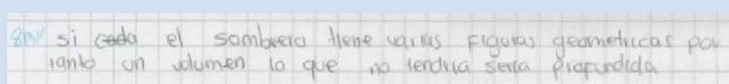
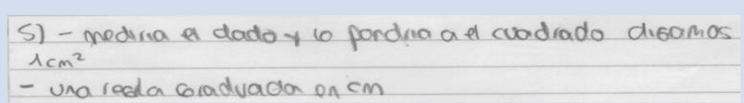
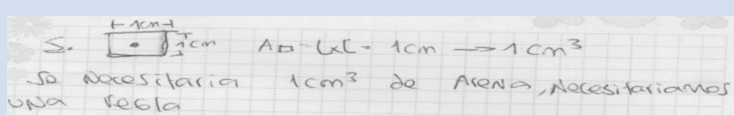
- → Claro predominio de la memorización de equivalencias entre las unidades de medida.
- → Abuso en la memorización y manipulación de fórmulas.
- → Excesivo tiempo dedicado a las conversiones entre unidades de un mismo sistema.
- → Falta de atención a los procesos de medición.
- → Escasa realización de estimación de medidas.
- → Poco uso de los procesos de medición para la resolución de problemas.

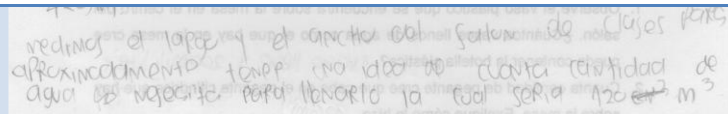
Como es obvio, en el marco de este panorama, las dificultades no se hacen esperar.

A continuación, se muestran algunas de las expresiones de las estudiantes en las que se evidencia la no diferenciación de los conceptos de peso, superficie, capacidad, densidad y volumen. Cabe destacar que los conceptos aquí mencionados son básicos e iniciales en procesos tanto de la Física como de la Geometría e incluso de la Química. Sin embargo, la no diferenciación entre ellos es una dificultad muy común en la mayoría de los estudiantes incluso en los estudiantes universitarios (Manotas y Rojas 2008, Raviolo et al 2005) y los profesores (Sáiz 2003, Guillén 2010).

1. Asociación Volumen-peso	**Texto ilustrativo**
Con respecto, por ejemplo a las siguientes situaciones: ▪ Cuánta cantidad de pegante cree que cabe en el pegante cilíndrico que hay sobre la mesa. Explique cómo lo hizo. ▪ ¿Considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Explique	 8. YO CONSIDERO QUE EL GORRO SI TIENE VOLUMEN YA QUE TODOS LOS OBJETOS TIENEN UN PESO. PERO EN ESTE MOMENTO NO LO PODEMOS DESCUBRIR PORQUE NI MODO DE METER EL GORRO AL AGUA :. xde  8. No tiene volumen porque esta vacio por dentro lo que tiene es peso  28// aprox. 25 ml ya que al introducir el envase de pegante en 400 ml de agua aumenta 25 ml y se le resta el peso del envase

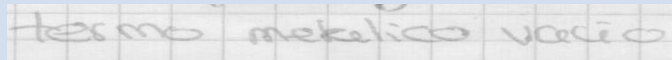
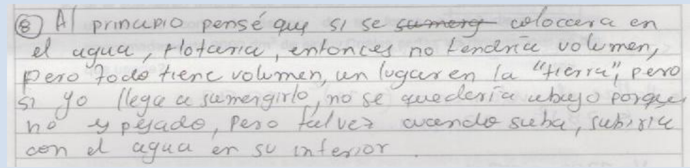
Según los citados estudios de Piaget, los niños adquieren la noción y conservación del peso alrededor de los 8 años y esta adquisición les permite mantener una opinión estable sobre dicha conservación aún en casos en los que visualmente se percibe lo contrario. Masoliver, J. (1974) encontró en sus estudios sobre la conservación del peso, que según la experiencia que los sujetos adquieran en su vida, se tiene mucha más “capacidad para prescindir de la ilusión que produce la forma sobre el tamaño, que capacidad para prescindir de la ilusión que produce el tamaño sobre el peso”, ello implicaría que la dificultad para desligar el concepto de volumen del de peso, está íntimamente ligada a experiencias ricas que impliquen la reflexión, el trabajo práctico, manipulativo e intuitivo.

2. Asociación Volumen-superficie	**Texto ilustrativo**
Con respecto, por ejemplo a las siguientes situaciones:	
▪ ¿Considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Explique	 8AV si cada el sombrero tiene varias figuras geometricas por tanto un volumen lo que no tendria sería profundida
▪ Si fuera a llenar de arena un dado para jugar parqués, ¿Qué medidas tendría en cuenta para conocer la cantidad de arena que requiere? ¿Qué instrumentos de medición utilizaría? ¿Cuántos centímetros cúbicos cree que puedecontener el dado?	 S) - mediria el dado y lo pondria al cuadrado diriamos 1cm² - una regla graduada en cm  S. 1cm 1cm A = LxL = 1cm → 1cm³ Se necesitaria 1cm³ de Arena, Necesitariamos una regla
▪ Si se considerara que el	

salón de clase es una piscina, ¿Cuánta cantidad de agua se necesitaría para llenarlo? Explique los procedimientos que usó para llegar a esa conclusión.	

Las respuestas obtenidas con relación a esta confusión evidencian que algunas estudiantes perciben los objetos como superficies y por tanto para ellas el grosor o la profundidadno se tienen en cuenta, además vuelve a predominar el uso de fórmulas. Chamorro, M. (2003), explica que esta dificultad deriva de la metodología empleada por el profesor, originada gracias a una aritmetización de la Geometría y la Medida que invita a "sustituir magnitudes por números, con falta de suficientes experiencias necesarias para la conceptualización del sentido de magnitud y de su medida". En tal sentido, Vecino, F. (2003) sostiene que para el caso específico de la Geometría la dificultad subyace cuando se identifica con el cálculo de áreas de figuras en el plano y con el cálculo de volúmenes en el espacio. La misma Chamorro ahonda en la persistencia de la noción área aún cuando se trabaje otra magnitud como el volumen e indica que además de las dificultades mencionadas, una presentación precoz de las nociones matemáticas y de un modo predominantemente perceptual desencadena en errores ligados a una presentación estática de figuras y aun abuso del dibujo que "fomenta la identificación de figuras con su entorno", por eso Castelnuovo y Chamorro, citados por Sanmiguel, A. & Salinas, M. (2011) amonestan el uso del dibujo como técnica predominante en el caso de la medida.

3. Asociación Volumen-capacidad	**Texto ilustrativo**

Con respecto, por ejemplo a las siguientes situaciones: ▪ Cite 2 objetos o elementos cuyo volumen aproximado sea 1 m^3 ▪ ¿Considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Explique	 termo metalico vacio  8 Al principio pensé que si se ~~sumerg~~ colocara en el agua, flotaria, entonces no tendria volumen, pero todo tiene volumen, un lugar en la "tierra", pero si yo llega a sumergirlo, no se quedaría abajo porque no es pesado, pero talvez cuando suba, subiria con el agua en su interior.

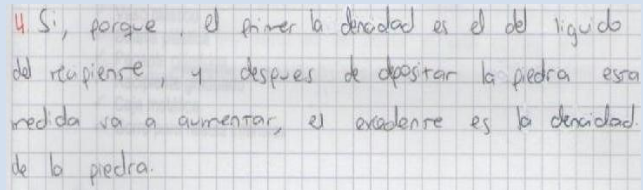
Otra de las confusiones que se presentó en algunas de las estudiantes es la de considerar como sinónimos los conceptos de volumen y capacidad. Para ellas, la posibilidad que tenga un objeto de contener algo es lo mismo que la medida del espacio que ese objeto ocupa y aunque en el sentido de volumen interno es lo mismo, en el de volumen externo u ocupado no. Kerslake citada por Dickson, L., et al. (1991) explica que esta confusión deriva de las experiencias que se tienen referentes al volumen: la gran mayoría se refieren al llenado de formas huecas en las que los estudiantes sí perciben el fenómeno del llenado, en cambio con el volumen ocupado, las experiencias se limitan a ejercicios escolares de cálculo de volumen de sólidos como el ortoedro y que se muestra entonces como una experiencia que no se puede "vivir" fuera del aula.

Dentro de las confusiones entre los conceptos de superficie, capacidad, peso, densidad y volumen que presentan las estudiantes de este estudio, destaca la confusión volumen-densidad.

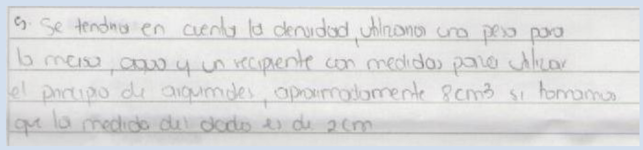
4. Asociación Volumen-densidad	**Texto ilustrativo**

Con respecto, por ejemplo a la siguiente situación:

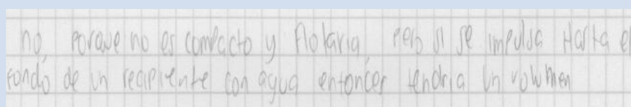
- La profesora estimó que el volumen de la piedra que está sobre la mesa es 10 cm^3. El procedimiento que llevó a cabo fue: usando un recipiente graduado, con agua, sumergió la piedra y después midió cuánto subía el nivel del agua. ¿Cree que esta estrategia es apropiada para encontrar el volumen?, Compruebe y explique


4 Si, porque, el primer la dencidad es el del liquido del recipiente, y despues de depositar la piedra esta medida va a aumentar, el exedente es la dencidad de la piedra.

- Si fuera a llenar de arena un dado para jugar parqués, ¿Qué medidas tendría en cuenta para conocer la cantidad de arena que requiere? ¿Qué instrumentos de medición utilizaría? ¿Cuántos centímetros cúbicos cree que puede contener el dado?


5. Se tendria en cuenta la densidad, utilizamos una peso para la mesa, agua y un recipiente con medidas para utilizar el principio de arquimedes, aproximadamente 8cm3 si tomamos que la medida del dado es de 2cm

- ¿Considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Explique


no, porque no es compacto y flotaria, pero si se impulsa hasta el fondo de un recipiente con agua entonces tendria un volumen

Raviolo, A., et al (2005) precisa que las dificultades de los estudiantes sobre la densidad con relación a los conceptos de masa y volumen se manifiestan frecuentemente a través de:

→ Atribución de características de un concepto a otro.

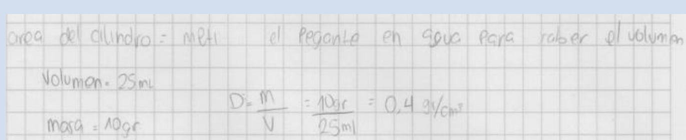
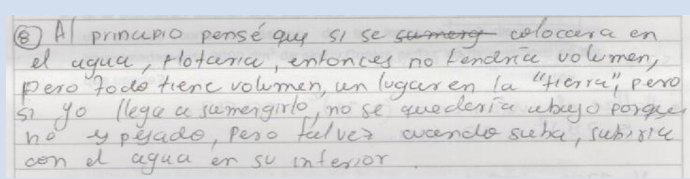
→ Relación de la densidad con una de las variables (masa o volumen) y no con la relación entre ellas.

→ Confusión de cambios de forma con cambios de volumen y, por lo tanto con cambios de densidad.

→ La no consideración de que la densidad es una propiedad característica de una sustancia, que permite diferenciarla de otras sustancias.

De igual modo, este autor menciona a Gabel y Bunce quienes atribuyen la falta de comprensión entre estos conceptos a su naturaleza abstracta siendo la razón por la cual los estudiantes recurren a algoritmos para resolver los problemas. En el marco de su estudio, Raviolo determina que la principal causa de la dificultad en la diferenciación de conceptos relacionados con la densidad parece encontrarse en las “características de la enseñanza recibida y en el tipo de cuestiones solicitadas en las evaluaciones”, todo esto como consecuencia de que la enseñanza se fundamenta en una “presentación verbal, deductiva y matemática del tema, en la resolución de ejercicios numéricos, más que en la resolución de verdaderos problemas; se lleva a cabo poca experimentación y, en general, pocas actividades que favorecen la reflexión y construcción conceptual”.

El alto índice de relación entre el volumen y la densidad entre las respuestas de las estudiantes que emergieron al analizar el cuestionario diagnóstico, parece estar relacionado con el aprendizaje de la fórmula de la densidad más que con el concepto de densidad y mucho menos con el de volumen. El hecho de que no hacen mención al proceso de medición indica la predominancia de cómo se ha abordado el tema en la clase de física.

Asociación entre volumen-superficie-peso-densidad y capacidad	**Texto ilustrativo**
Con respecto, por ejemplo a volumen-superficie-densidad	
▪ Cuánta cantidad de pegante cree que cabe en el pegante cilíndrico que hay sobre la mesa. Explique cómo lo hizo.	
▪ ¿Considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Explique	

Las dificultades de las estudiantes con relación a los conceptos mencionados, evidencian un problema conceptual situado más allá de su capacidad de distinguir entre un concepto y otro. En este sentido, la autora de este estudio considera que a las estudiantes de grado 9° les afecta el no comprender la naturaleza aproximativa de la medida, el carecer de aproximaciones reales a los instrumentos de medida y la poca práctica que han tenido en la medición de fenómenos de fácil y difícil percepción; además coincide con Osborne citado por Dickson, L., et al. (1991) en cuanto a la responsabilidad de la escuela en los obstáculos que sobre medida presenten los estudiantes: “la naturaleza de la forma en que los niños aprenden a medir y se valen de medidas exige cuidadosa atención”.

7.1.3 Uso y conversión entre unidades de medida.

El trabajo de conversiones es sin ninguna duda el que más espacio ocupa en la Geometría escolar a través de los diferentes grados. Para el caso particular de Colombia, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el MEN incluyen el uso de las magnitudes y sus unidades de medida como un estándar a alcanzar al finalizar el grado 3° y de ahí en adelante para todos los niveles con diferentes grados de dificultad. Derivada de esta “necesidad prioritaria”, los textos escolares y los profesores parten de las equivalencias entre unidades y tal como sucede en España, según Chamorro, M., (2003) las situaciones que plantean los docentes para abordar el tema se enfocan a realizar conversiones de tipo formal, aplicando procesos algoritmizados, “enseñados a través de tablas o escaleras que proporcionan de forma rápida y automática una escritura equivalente”; los problemas que suceden a este tipo de prácticas se constituyen en un obstáculo didáctico para trabajar no solo en medida, sino en estimación. La misma Chamorro(Ibíd.) defiende con base en estudios de su autoría que las dificultades derivadas del uso y conversión entre unidades de medida son de carácter variable, dependiendo de la naturaleza de la dificultad.

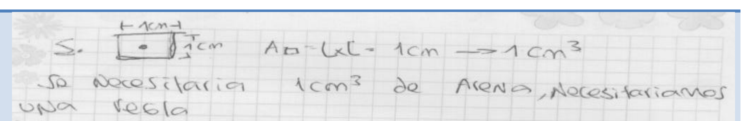
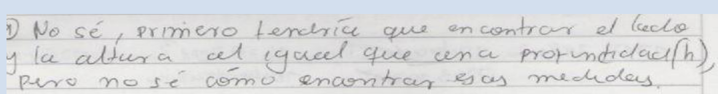
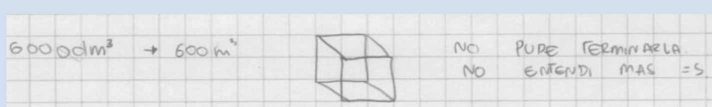
Las dificultades de tipo metodológico citadas por la autora en mención que se evidenciaron en el grupo de estudiantes protagonistas de esta tesis se detallan a continuación:

7.1.3.1Comprensión de la dimensionalidad: La bidimensionalidad versus la tridimensionalidad.

Rogalski, citado por Chamorro, M. (78 bíd..) señala “la existencia de obstáculos conceptuales múltiples” en la adquisición de las medidas de superficie y volumen, entre ellas destaca:

→ La dimensionalidad
→ El estatuto de las unidades de medida y su relación con las unidades de longitud para medidas espaciales.
→ La relación existente entre la unidad de medida de superficies y volúmenes con la unidad de medida de longitud.

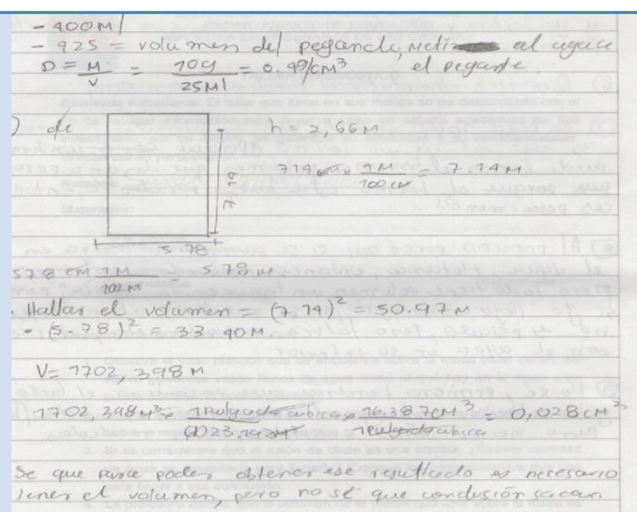
Esta dificultad se evidenció en respuestas como:

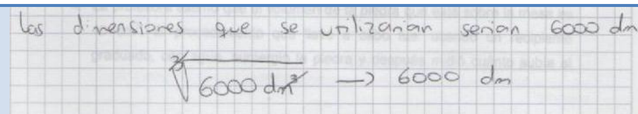
Dificultad	Texto ilustrativo
▪ Los aspectos geométricos que concurren en la longitud o en la superficie son transferidos a la noción de volumen.	  

7.1.3.2 Introducción del lenguaje algebraico

En muchos casos el uso y la aplicación de fórmulas no son otra cosa que “actividades de cálculo disfrazadas”. Martínez y Rivaya citados por Sanmiguel, A. & Salinas, M. (2011) sostienen que las dificultades en la apropiación de conceptos matemáticos derivadas de la temprana introducción del lenguaje algebraico (fórmulas) se dan porque “se tiende a construir la Geometría a partir del lenguaje algebraico en detrimento de una Geometría de búsqueda intuitiva”. Así mismo, los autores citan a Dickson y otros, quienes argumentan que esta dificultad conlleva una falta de variedad de técnicas de resolución y la tendencia del alumnado a “emplear fórmulas memorísticamente”.

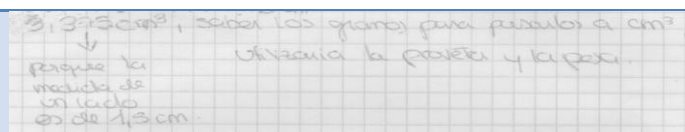
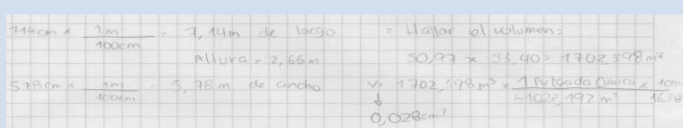
A juicio de la investigadora se considera que dicha dificultad en la metodología de enseñanza por parte de los profesores de las estudiantes de grado 9° que participaron de este estudio, se pudo dar tanto en la asignatura de Física (fórmula para hallar densidad), como en las de Química y Geometría (manejo de factores de conversión) pues según las respuestas de las estudiantes a las diferentes situaciones planteadas, se puede identificar la marcada necesidad que tienen de plantear fórmulas sin reparar en las respuestas a veces sin coherencia, sobre todo en el uso de las fórmulas de área, volumen y densidad que en términos de Chamorro, M. (2003) se denota como “aritmetización de la medida”

Dificultad	Texto ilustrativo
▪ Uso y aplicación de fórmulas	

7.1.3.3 Algoritmización de la medida

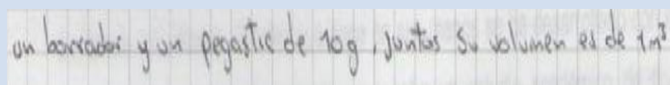
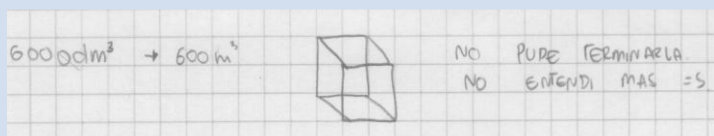
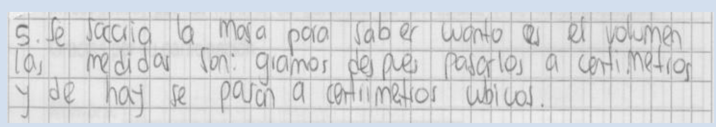
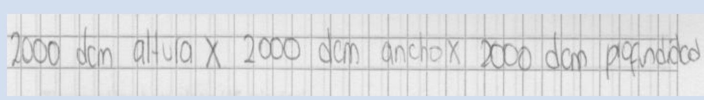
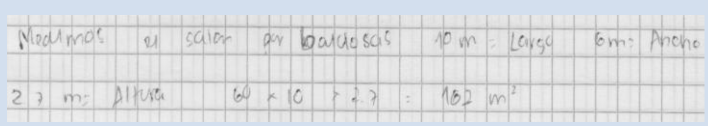
Es descrita por Chamorro como el resultado de ejercicios abstractos que buscan solo cambiar unidades, conlleva errores como que los estudiantes confundan las unidades de medida de diferentes magnitudes o simplemente no las expliciten al dar resultados. Olmo y otros, citados por la autora resaltan la incidencia de la creencia entre los profesores de que los estudiantes ya descubrieron por sí solos el concepto de magnitud y pasan a estudiar su medida.

Dificultad	Texto ilustrativo
▪ Trabajo exclusivamente formal del cambio de unidades	 

7.1.4 La estimación en la magnitud volumen

La importancia de que los estudiantes desarrollen dominio sobre las habilidades de estimación tanto en cálculo como en medida es innegable. En referencia con la medida, la estimación es un proceso mental que facilita que un sujeto llegue a una medida sin haber usado instrumento alguno de medición, así como también lo es el proceso de comparar cantidades sin medirlas.

Se hace referencia en este apartado, a las dificultades que las estudiantes presentaron cuando debieron utilizar la habilidad de estimar en situaciones específicas de medida del volumen. Destacan en este estudio algunas dificultades analizadas según los componentes de estimación en medida de Castillo, J. et al. (2011) ya enunciados en el marco teórico:

Dificultad	Texto ilustrativo
▪ Comprender la cualidad que se va a estimar	
▪ Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación.	
▪ Verificar la adecuación de la estimación	
▪ Comprender el concepto de unidad de medida	
▪ Seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones. Entre ellas se destacan: Iterar un referente presente o ausente, acotar, comparar, descomponer, recomponer, reajustar, usar técnicas indirectas (empleo defórmulas)	

En términos generales, las estudiantes evidencian tener un desarrollo pobre en los componentes de estimación. Lo anterior pudo concluirse gracias no solo a sus respuestas en el cuestionario diagnóstico, sino también a lo que la investigadora evidenció durante el desarrollo del cuestionario. Las estudiantes en su totalidad necesitaron iterar referentes presentes para poder determinar la longitud de la medida necesaria, ninguna pudo hacerlo con referentes ausentes. Así mismo, la mayoría carecían de una imagen mental clara de la unidad de medida que iban a usar para la tarea de estimación, por eso recurrieron al uso de su propio cuerpo (por ejemplo, sus estaturas o la longitud de uno de sus dedos).

Figura 8. Estudiantes usando medidas antropométricas para estimar longitudes.

En cuanto alajuste de la unidad de medida que utilizaban, se comprobó que tampoco comprendían el concepto de unidad de medida y por ende no podían verificar la adecuación de la estimación que realizaban, razón por la cual, para ellas no fue motivo de discusión ni de asombro que para diseñar una caja para transportar animales con capacidad de 6000 dm^3requirieran (según sus cálculos aproximativos) 2000 dm de longitud en cada una de sus aristas.

En este sentido Reys, R. (1995) sustenta con respecto a los componentes de estimación, que cada uno “refleja la clase de pensamiento de alto nivel, asociado con la solución de problemas y razonamiento matemático” que tiene un sujeto, sustentándose las dificultades mencionadas; además concluye que “pocos tópicos matemáticos ofrecen la riqueza de beneficios, tanto a corto como a largo plazo, como lo hace la estimación” motivo por el cual la limitada capacidad de estimar en las estudiantes impide un buen desempeño, no solo en tareas propias de la Geometría, la Química o la Física, sino también en situaciones cotidianas. Súmese a estos tópicos las dificultades mencionadas sobre el concepto volumen y la equívoca asociación que las estudiantes hacen entre la magnitud volumen y otras magnitudes para comprender la compleja situación mental que se entreteje.

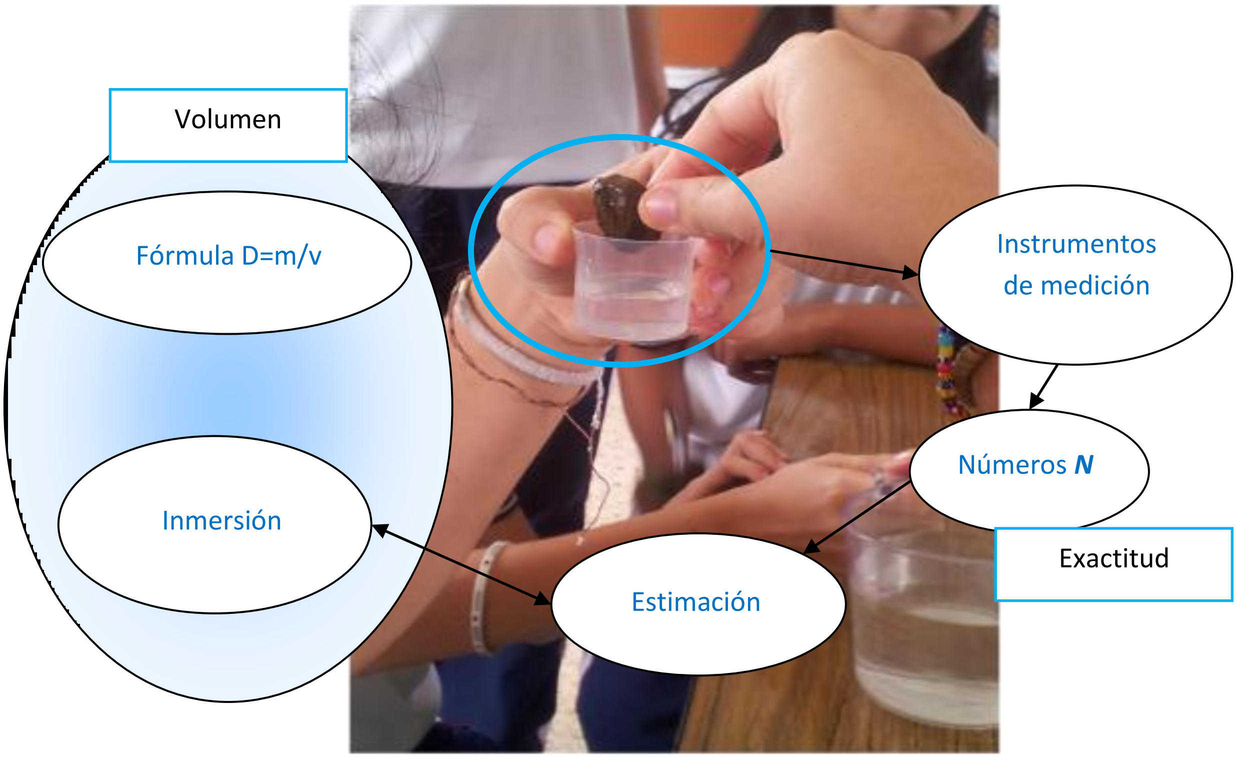
7.1.5 Modelo de trabajo en la exploración de ideas previas.

La revisión de los modelos mentales que las estudiantes tienen sobre la estimación en volumen surgió como una necesidad inherente al análisis de los datos recogidos en esta investigación, con la finalidad de determinar si a través de la intervención didáctica en la que la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje fue la excusa para posibilitar el desarrollo de la habilidad de estimar, tuvo éxito o no.

Según Johnson-Laird, citado por Greca, I. & Moreira, M. (1998), “los modelos mentales son modelos de trabajo de situaciones y acontecimientos del mundo y que mediante su manipulación mental, permiten comprender y explicar fenómenos del mundo y actuar con las predicciones resultantes” por consiguiente, los modelos mentales son herramientas potencialmente útiles en los procesos de enseñanza y aprendizaje pues al ser construcciones únicas y particulares dan a los profesores una visión más clara de la forma como sus estudiantes comprenden el mundo.

En el caso particular de esta investigación, uno de los grupos (al que se llamó 1) dio a conocer su modelo, expresándolo en voz alta y dando argumentos para ellas muy válidos; de ahí en adelante, los demás grupos hicieron a un lado sus modelos y sus creencias y se acomodaron a lo que el grupo 1 sustentaba. Esto se convirtió durante esta fase en un obstáculo para la identificación de otros modelos, pero también se constituyó en un punto de debate al interior de otros grupos que aunque en un principio se acomodaron al modelo del grupo 1, pasadas algunas sesiones de la intervención didáctica cuestionaron algunas de las posturas de sus compañeras y en sus diálogos se evidenció la incorporación de nuevos elementos al modelo, resultando un modelo más elaborado a revisar en la exploración final

*Figura 9.*Modelo de trabajo del grupo 1 durante la exploración de ideas previas.



Fuente: Elaboración propia

Los seres humanos hacen uso de modelos mentales cuando enfrentan un problema, ya que estos permiten comprender y obtener representaciones cognitivas que les facilita enfrentar la situación. La figura 8 muestra los rasgos centrales de un modelo con las características que Norman, D. citado por Greca, I. & Moreira, M. (Ibíd.) señala como propias de los modelos mentales: "incompletos, inestables (se olvidan detalles de los modelos o se descartan), sin fronteras bien definidas, no-científicos (reflejan creencias sobre el sistema representado), parsimoniosos (las personas optan por operaciones físicas adicionales, a cambio de menor complejidad mental)" pero ante todo, muestra la función principal de un modelo mental: funcionalidad para el sujeto. De este modo, las estudiantes pudieron explicar cómo hallar el estimado del volumen de un cuerpo e hicieron previsiones aunque su modelo estuviera construido sobre nociones imprecisas y por tanto fueran imprecisas sus conclusiones.

Para solucionar la situación de estimar volúmenes, las estudiantes que integraban el grupo 1 redujeron el total de sus representaciones a 2 ítems que consideraban "la forma de hallar el volumen de un cuerpo": la inmersión y la fórmula de la densidad, ambos conceptos trabajados desde la asignatura de Física. Como aproximación inicial, suponen que el agua desplazada por el cuerpo sumergido debe medirse en un vaso graduado con números naturales (instrumento de medición) ya que esto garantizará que los resultados sigan siendo expresados en este mismo conjunto numérico. Así, después de hallar la diferencia entre el incremento del agua con el cuerpo sumergido y sin el cuerpo, llegan a la conclusión de que el número obtenido corresponde al volumen de ese cuerpo. Una de las integrantes pregunta por la unidad de medida que utilizarán pero ninguna parece asignar relevancia a este comentario así que concluyen que el volumen es expresado simplemente como un número natural o en ml (porque en esta unidad viene graduado el vaso).

Los ítems que las integrantes del grupo 1 hacen intervenir se relacionan con el hecho de que su modelo mental se sustenta en lo perceptual y dentro de esta lógica, la estimación no tiene mucha importancia porque para ellas siempre que un cuerpo se sumerja en un vaso graduado con agua, se obtendrán datos exactos. Dicho de otro modo, la estimación se reduce a realizar una operación matemática o a remplazar en la fórmula de la densidad los valores conocidos.

El uso del conjunto de los números naturales en el modelo, se explica desde la falta de comprensión de los números racionales. Un buen número de investigaciones coinciden en que dentro de los contenidos matemáticos que se enseñan, las fracciones son un contenido que presenta dificultad tanto en el proceso de enseñanza como en el de aprendizaje (Freudenthal, 1983, 2001; Kieren, 1985, 1998; Salazar, Martinic & Maz, 2011). En el marco de la habilidad de estimar, el significado de número racional viene acompañado del constructo "medida" aunque autores como Llinares y Sánchez (1997, 2000) consideren el constructo de medida dentro del de "parte-todo". Lo cierto es que, en el tratamiento de las fracciones en la escuela, se privilegia de forma casi exclusiva la relación parte-todo, en la que los estudiantes deben realizar acciones como las que describen Escolano & Gairín y Gairín & Sancho, citados por Salazar, M., Martinic, S. & Maz, A. (2011):

- Realizar transferencias entre representaciones gráficas y representaciones simbólicas.
- Describir, en la representación gráfica, las partes que representan el "todo" y las que representan las partes destacadas.

- Realizar un doble recuento, el de las partes distinguibles y el del total de las partes, con esto se refuerza el sentido de número Natural.
- Representar, de forma simbólica, el resultado de los dos recuentos, colocar debajo de una línea el resultado del todo y, escribir sobre la línea el resultado de contar las partes destacables. Con esto la fracción no tiene status de número, debido que para el estudiante esta representación simbólica no tiene entidad de número porque la entiende como una situación descriptiva.

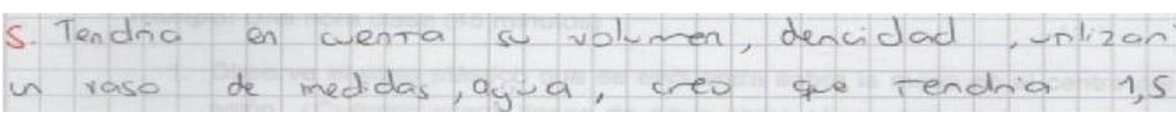
Con este tipo de actividades se ignora la medida de magnitudes, al estudiante se le oculta la existencia de un proceso de medida, debido a que en la instrucción suceden los siguientes hechos:

- "En las actividades a realizar no se hace mención a la magnitud superficie, la que se utiliza en las tareas, debido a que éstas se resuelven a través de un doble conteo, con esto se hace omisión de la magnitud utilizada.
- Existe una indefinición de la unidad. El "todo" o la unidad no se hace explícita a los estudiantes, más bien se oculta su superficie. De esta forma las figuras suelen presentarse superpuestas y claramente diferenciadas según la particularidad del color, de manera que el estudiante no tiene necesidad de reconocer la unidad para resolver la tarea".Salazar, M., Martinic, S. & Maz, A. (2011)

Así pues, el tratamiento de las fracciones bajo un solo constructo impide que los estudiantes construyan el concepto de fracción como un número racional; mientras tanto, los docentes piensan que el estudiante ya construyó el concepto, que hace relaciones y operaciones y que puede trasladar dicha comprensión a contextos diferentes. Según lo evidenciado en el modelo de trabajo del grupo 1, las estudiantes no pudieron utilizar su conocimiento de las fracciones en el contexto de la medición de la magnitud volumen utilizando la técnica de inmersión, a pesar de que ellas saben representar fracciones de forma numérica y con diagramas y resuelven operaciones entre fracciones en contextos numéricos.

Las estudiantes parecen tenerle miedo al error que pueda generar el uso de números fraccionarios o el uso de los decimales al momento de dar un resultado. Su preocupación por la exactitud deja al descubierto que estimar no es una tarea que tenga mucha importancia en las actividades académicas que se llevan a cabo en su currículo y por ende para ellas los datos “inexactos” generan dudas y se sienten incapacitadas para interpretarlos por lo que el uso de números naturales las hace sentir más cómodas. Este panorama viene a comprobar lo expuesto por Chamorro, C. & Belmonte, J. (1991) quienes sustentan que la estimación es imposible desarrollarla si no se realizan prácticas de medida, de manera que el error cometido disminuya poco a poco y por ende, disminuya el temor de quien realiza la tarea. Además, los autores también recomiendan practicar la estimación con cada una de las unidades de medida que conozcan los estudiantes, así se beneficiaría no solo la propia estimación, sino también el aprendizaje de qué unidades usar en cada medición.

En la puesta en escena del modelo de trabajo del grupo 1, apareció la fórmula de la Densidad, sin embargo, aunque ellas la mencionaron en varias oportunidades e incluso la escribieron en los procedimientos de cálculos numéricos, finalmente ejecutaron un modelo mental incompleto porque no tenían datos para reemplazar en la fórmula: no conocían la densidad de los objetos, ni su masa, ni su volumen y aunque revisaron en varias ocasiones sus planteamientos, lo que Johnson-Laird llama “revisión recursiva” (la revisión se detiene cuando el sujeto está inferencialmente satisfecho, lo que se traduce en que no encuentra un modelo alternativo que dé cuenta de la situación como él la percibe) decidieron usar solo la inmersión y en algunos casos plantear la fórmula para dejarla indicada.


S. Tendría en cuenta su volumen, dencidad, utilizan un vaso de medidas, agua, creo que tendría 1,5

Cuando se enseña, los profesores esperan que los estudiantes construyan modelos mentales muy similares a los modelos conceptuales que presentan para acercar el conocimiento; sin embargo, la realidad es otra. Al respecto, Norman, D., nuevamente ilustra el caso señalando que aunque lo ideal sería que se diera una relación directa y simple entre el modelo conceptual del profesor y el modelo mental del estudiante, este no se da porque los estudiantes no tienen “el conocimiento del dominio necesario para interpretarlos como modelos conceptuales”, además, los estudiantes “no comprenden que el modelo conceptual es una representación simplificada e idealizada de fenómenos o situaciones, no el fenómeno o la situación en sí”. De aquí la importancia de que los profesores le hagan seguimiento a los elementos que del modelo conceptual toman sus estudiantes para incorporarlos a sus modelos mentales.

7.2 Intervención didáctica

En este estudio se considera que el profesor es el actor del proceso de enseñanza llamado a propiciar y analizar las situaciones que enriquezcan al estudiante en su proceso de aprendizaje. En consecuencia, la secuencia didáctica que se implementó en este estudio también fue analizada y arrojó datos de vital importancia para determinar el alcance de sus objetivos.

Los videos que se tomaron durante la fase 2 (Planificación) y la fase 3 (Realización) de la secuencia didáctica, fueron analizados al igual que el instrumento diagnóstico con el software Atlas.ti; de este análisis emergieron 2 categorías y 3 subcategorías todas relacionadas con el proceso de representación y organización del espacio, específicamente con la medición aproximada y directa y la medición indirecta como estrategias de estimación.

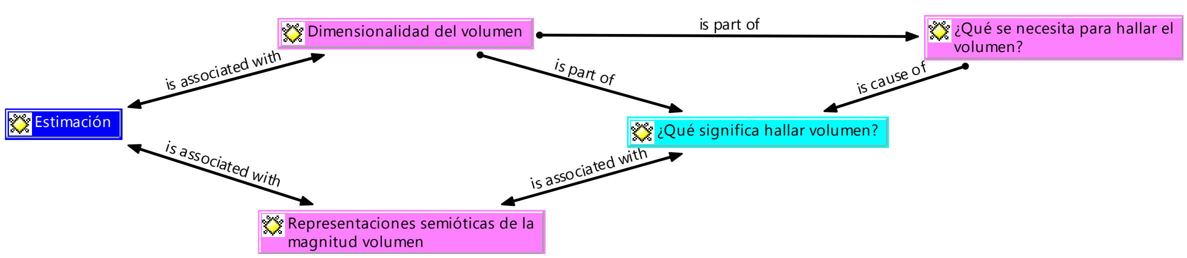


Figura 10. Red semántica en la cual se representan las principales categorías y subcategorías halladas en durante la intervención didáctica.

Uno de los objetivo de este estudio es caracterizar cambios en la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a partir de la implementación de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje, por tanto, este apartado se centra en el análisis de las dificultades que se encontraron; en ningún caso, se indica que el cien por ciento de las estudiantes del grado 9° que fueron partícipes de esta investigación presentaban tales dificultades.

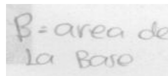
7.2.1 ¿Qué significa hallar volumen?

La importancia del concepto de volumen es tal, que afecta la cotidianidad de los sujetos dado que el contexto en el que se desenvuelven muchos de los aspectos de la vida es tridimensional, de ahí la importancia de que en la escuela también se reconozca este status y se reflexione sobre los aspectos que le son inherentes tanto en la enseñanza como en el aprendizaje para que maestros y estudiantes elaboren un modelo mental del volumen amplio, claro, coherente y funcional.

Para analizar la primera categoría se realizó la transcripción de una de las conversaciones que se dio entre pares al interior de uno de los grupos. Dicha conversación se originó durante la actividad en la que debían hallar el volumen del empaque que el equipo había decidido elaborar, para completar una tabla de datos. En este diálogo intervinieron varias de las subcategorías que en la red semántica se relacionaron con la categoría ¿qué significa hallar volumen?; estas se analizaron y además se completaron con apartados de las respuestas escritas que dieron las estudiantes.

> *Paquita:*Vea, esto. Digamos para hallar el volumen uno cómo hace. No entiendo, digamos uno dice: calcula desde acá (señala en el prisma que el grupo construyó una de sus aristas) pero uno calcula el alto o el ancho…o todo?.
>
> *Eva:*Osea, hallar la base de la caja (y con sus manos muestra que se refiere a la cara del prisma que ellas han dejado contra el piso, que para ellas es la base porque allí es donde “descansa” el prisma).
>
> *Susi:* Para hallar el volumen qué necesitamos saber?
>
> *Eva:* Pues ya tenemos la fórmula, es base por altura. Y esto es un rectángulo (señala la cara que les está sirviendo como base).
>
> *Paquita:* Es que la caja es un rectángulo. Sí?
>
> *Susi:* Uno? Yo veo varios (rectángulos), hay uno acá, otro acá, otro acá (señala tres de sus caras)
>
> *Paquita:* Hay dos cuadrados, por eso es lado por lado. No?
>
> *Susi:* ¡Es un cubo!

Eva: Ah…entonces la fórmula es lado al cubo.

Susi: No, es la que ya dijiste: volumen igual a base por altura y al redactarla escribe: V= Bxh 

Sáiz, M. (2003) sostiene que hay 6 significados que se pueden asociar al vocablo volumen, y que son: volumen desplazado, volumen ocupado, volumen interno, volumen encerrado, capacidad y número. Para el caso de esta investigación se pudo verificar, que para las estudiantes volumen pasó por dos significados: En un primer momento se asociaba a volumen desplazado (en la inmersión de un objeto en agua) y durante la intervención didáctica se asociaba a volumen como número porque para ellas volumen era el resultado de una operación (multiplicar dimensiones en una fórmula previamente establecida).

7.2.1.1 ¿Qué se necesita para hallar el volumen?

Según Piaget, para hallar volúmenes es necesario que el sujeto alcance dos operaciones mentales fundamentales: conservación de sustancia y transitividad. La operación de la conservación se ocupa de permitir al sujeto identificar elementos invariantes de una situación, por ejemplo, laharina en una bolsa, ocupa el mismo espacio tanto en la bolsa como en un recipiente. La operación de la transitividad da fundamento a la relación de orden en cuanto establece relaciones de igualdad. En cuanto a la edad aproximada en la que se alcanzan estas operaciones, Shayer et al. (Citado por Dickson, L. et al. (1991)), difiere de Piaget (11-12 años), él encontró en sus estudios que para muchos chicos, esta comprensión se da cerca de los 17 años.

Cuando en una de las actividades se pedía a las estudiantes que determinaran un método para hallar el volumen del prisma que eligieron como empaque para su producto, destacó que el 100% de las estudiantes eligieran la inmersión o el uso de fórmulas. Uno de los equipos eligió un prisma triangular y tenían dificultad para hallar el área de su base, entonces se dio el siguiente diálogo:

Lupita: Profe, cómo encontramos el volumen si no tenemos el área del triángulo? (el prisma estaba armado)

Sofi: Pues desarmémoslo! Así tomamos la medida y medimos los ángulos para saber si es rectángulo.

*Investigadora:*Les sugiero buscar otro método (por varios segundos silencio y caras asombradas)… Qué tal si piensan en “llenarlo” con cubos para determinar cuántos le caben… y así saber su volumen aproximado.

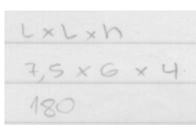
Sofi: No profe, eso es muy duro…mejor lo metemos en agua.

Lupita: Y un recipiente graduado de ese tamaño? (muestra el prisma que armaron)… no hay forma.

Sofi: Tocó desarmarlo. No esperen… pues midamos aquí el triángulo.

Mientras tanto, un grupo que estaba cerca y que escuchó la conversación llamó a la investigadora y se entabló la siguiente conversación:

Clara: Profe, no nos da esto (señala el procedimiento que acaba de realizar)


L×L×h
7,5 × 6 × 4
180

Investigadora: ¿Por qué?

Clara: Porque ya hicimos la multiplicación de la fórmula del volumen para un prisma (rectangular) y ¿cómo van a caber 180 dentro de esta caja?

Investigadora: Y por qué lo dudan?

Luz: Porque 180 es mucho.

Investigadora: Pero me dicen que 180 es mucho, ¿180 qué?

Clara: Cubos… debe estar mala esta fórmula.

Investigadora: Los datos que han puesto en la fórmula, corresponden a qué unidades de medida?

Luz: Están en centímetros.

Investigadora: Y por qué no aparecen indicados?

Clara: Porque ya se sabe. Ahí están… si se multiplican tres veces dan centímetros cúbicos, por eso es volumen.

Investigadora: Y ¿cómo es, por ejemplo, un metro cúbico?

Las estudiantes se quedan pensando, a lo que la investigadora les pide que lo mediten y lo escriban. Más tarde al revisar sus producciones se encontró esto:

* 1 Caja de 1m x 1m con profundidad de 1m

* 1 matera de 1m x 1m con profundidad de 1m

En estos diálogos se evidencia la dificultad de las estudiantes para imaginar los cuerpos compuestos por cubitos unitarios, aunque sí conocen lo que es una unidad dada en unidades cúbicas. Dickson, L. et al. (92bíd..) explica este suceso como la imposibilidad de los sujetos de operar en un nivel conceptual elevado, operando por tanto en un estado de desarrollo concreto. Además, agrega que si en la escuela sólo se ha entrenado a los estudiantes para calcular el volumen con base en las dimensiones lineales de un sólido, este no se basa en una verdadera comprensión conceptual y es muy posible que sólo se limiten a aplicar fórmulas y demostrar “habilidades calculísticas”. Así mismo, se notó que la dificultad para imaginar los cubitos unitarios dentro del prisma les impidió abordar el volumen con otra estrategia: haciendo uso de la adición de “capas” de cubos con las que se puede recubrir “capa por capa” un cuerpo y determinar su volumen.

Por otra parte, el tratamiento escolar del volumen deja al descubierto que el uso del SMD se asocia necesariamente con el acto de medir, como si le fuera inherente. Así pues, se cree que para hallar el volumen se necesita manejar el SMD y las conversiones entre su escala de unidades.

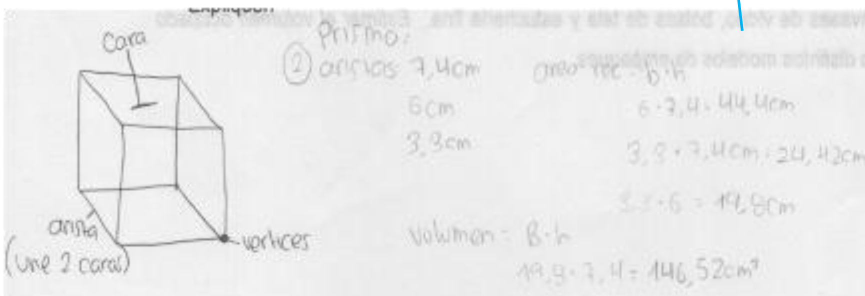
Es significativo el hecho de que en el tratamiento del volumen se prime una cualidad (ser susceptible de ser medido), previamente al estudio del concepto en sí (González-López, M. & Flores, P (2002)) y que por ello, se abuse de su uso tanto en los famosos ejercicios de conversión entre unidades, como en el uso de fórmulas sin justificar, desencadenando en los escolares la no distinción entre las magnitudes y la asignación de medidas. Las estudiantes que participaron de este estudio no estuvieron exentas de este abuso y por ello pocas tenían en cuanta la naturaleza aproximativa de la medida.

7.2.1.2 Dimensionalidad del volumen.

Con respecto a la dimensionalidad del volumen, existen dos tratamientos didácticos que no se coordinan adecuadamente en la escuela y que por su tratamiento afectan la noción del concepto y la posibilidad de llegar a estimarlo. Por un lado está la interpretación del volumen como una magnitud física unidimensional que se puede medir y comparar en el conteo de unidades de volumen y por otro está la interpretación de volumen como una magnitud física tridimensional, calculable como el producto de tres longitudes o el producto de una superficie por una longitud (Maza, citada por Saucedo, G. (2009)) que para el caso de las estudiantes estaban separados entre sí y por lo tanto no era clara su relación. Prueba de ello es que por un lado hacían uso de tablas de conversión entre unidades y por otro usaban fórmulas para el volumen, en ningún caso las usaron simultáneamente o una como el respaldo de la otra.

Nótese que la escala para unidades de longitud que realizó esta estudiante está invertida (parte superior de la hoja), luego vuelve a construirla pero aún necesitó hacer correcciones.

Uso de una fórmula para hallar el volumen. El problema es que para este grupo, su prisma tiene “varias bases” para reemplazar en la fórmula.



La concepción de “varias bases” por parte de este grupo y la marcada necesidad que demostraron de asegurarse de identificar los componentes del cuerpo con el que trabajaban (cuáles son las aristas, las caras, los vértices, cuántas caras había, cuántas bases) supuso para la investigación la revisión de teorías al respecto del dominio video-espacial. Así, para Saucedo, G (ibíd.) es posible que los estudiantes miren o dibujen figuras sin analizar su concepto ni sus propiedades, dejándose llevar por lo que ven (para el caso de estas estudiantes, la representación mental de que los prismas son un cubo cuyas caras son todas iguales, les hizo pensar que tenía varias bases); esto puede conllevar a que se den errores en los razonamientos al momento de hallar el volumen de un cuerpo.

Así mismo, la separación entre el aspecto conceptual y el figural influye en el poco dominio de la visualización espacial que pueden presentar los estudiantes, viéndose impedidos para manipular figuras mentalmente. El dominio de la visualización espacial es un proceso que

> “requiere dos tipos de habilidades, una relacionada con la interpretación de la información figural, o sea poder leer, comprender e interpretar las representaciones visuales y la otra, relacionada con el procesamiento de imágenes mentales, o sea la posibilidad de manipular, analizar y poder transformar los conceptos relacionados con ella en otra clase de información, a través de representaciones visuales externas.” Saucedo, G. ((2009), pág. 6)

Para ilustrar esta dificultad se transcribe una de las consultas que un grupo le planteó a la profesora investigadora:

> *Luz:* Profe, si yo tengo la caja así; este es el largo y este es el ancho o el largo es así? (mostrando en su caja algunas aristas) Y dónde está la profundidad? (gira la caja)

La dificultad en la manipulación mental del objeto "prisma" se presentó para este otro grupo al momento de determinar la cantidad de aristas que poseía.

1. Características de los empaques que el equipo ha decidido elaborar:

Cuerpo	Número de vértices	Número de aristas	Número de caras	Forma de las caras	Volumen
Prisma	8	14	6	rectangulo-res	B · h

Para Alsina, citado por Saucedo (95bíd..), esta dificultad se puede mejorar teniendo en cuenta que hay distintos tipos de representaciones y que en cada una se resalta un aspecto determinado del objeto, así, es posible resaltar las caras de un objeto observándolo perpendicularmente en proyecciones ortogonales, dibujos en perspectiva, isometrías o dibujos con cortes de nivel topográficos, todas estas opciones con la intención de desarrollar y completar la percepción espacial.

Si en la escuela se aprovecharan los beneficios de la estimación, a través de ella se podría centrar la atención de los estudiantes en los atributos del objeto y en lo que miden, "de esta manera, la estimación de medidas contribuye al desarrollo del sentido espacial, así como de conceptos y destrezas numéricas"Godino, J., Batanero, C. & Roa, R. (2002).

7.2.1.3 Representaciones semióticas de la magnitud volumen.

Continuando con la disociación existente entre la concepción del volumen como una magnitud unidimensional o como una magnitud tridimensional expresada en términos de las unidades de medida del volumen o como el producto de tres longitudes, las diferentes representaciones semióticas de la magnitud volumen juegan un papel importante cuando de abordar tareas de estimación de volumen ocupado se trata.

En el caso de las matemáticas, un registro de representación está construido a partir de signos, es decir está conformado por trazos, símbolos, e íconos (enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, figuras geométricas…) que origina una representación útil no solo para comunicar sino para el trabajo matemático propiamente dicho. Hiebert y Carpenter, citados por Gutiérrez, S. & Aparicio, D. (2007)consideran que si el objeto matemático que se está representando tiene una completa conceptualización, el tránsito entre diferentes formas de representarlo no debe generar dificultades, por esto, los autores sostienen que:

> "…las matemáticas se comprenden si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y por la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho se comprenden aceptablemente si están ligados a redes existentes, por medio de conexiones numerosas o fuertes". (2007, pág. 23)

En esta fase del estudio, las estudiantes presentaron dificultades en el tránsito entre diferentes representaciones ("escala" de unidades, fórmulas, inmersiones y gráficas para determinar el volumen), al punto de que cada una se trataba en un momento diferente, no como instrumentos que se pueden elegir según las necesidades de comunicación que se tenga, sino como si fueran métodos cuyos usos estuvieran dispuestos para situaciones específicas; Duval, R.(2006) explica esta dificultad específicamente desde la Geometría, ya que "el uso común de la palabra "figura", hace confundir a veces la visualización con su decodificación, induce a entender mal la especificidad de estas dos clases de transformaciones independientes (la forma discursiva y la forma visual), así como el papel complejo que subyace a cualquier actividad geométrica" (pág. 148)

7.2.2 Estimación

Para analizar esta categoría se transcribe una de las intervenciones entre dos compañeras de diferentes grupos y la profesora:

Panchita: (Dirigiéndose a Eva) ¿Cómo sacaron la estimación? (del volumen de una caja)

Eva: Yo tomé la medida de mi brazo y vine y la puse a comparación de la caja, cuando me dio, medí lo que me sobraba con la mano (le muestra en su mano una cuarta) y así supe el largo que tenía.

Panchita: Y así se estima?

Eva: Así supe las medidas…además no estoy midiendo directamente… eso es estimar.

Investigadora: Y por qué no usaste sólo la cuarta? Para qué usar el brazo?

Eva: Porque el brazo es casi de la misma medida del largo de la caja, con la mano (cuarta) no me cabía tan exacto.

La comparación es la operación básica de la estimación en medida, esta comparación se hace asociando la cantidad a estimar con alguna unidad o referente (presente o ausente) y como ya se había mencionado en el marco teórico, para estimar se debe tener internalizada la unidad o el referente que se usa para comparar. En el diálogo que se transcribió al inicio de este apartado, se evidencia que para *Eva*la estimación ya es operativa, en tanto que es capaz de reconocer referentes cuya medida es cercana a la de lacantidad que va a estimar, sin embargo, el hecho de que primero midió su brazo, indica que aún no establece una correspondencia directa con las unidades convencionales de medida o que nuevamente es presa de la necesidad de dar datos lo más exactos posible. Al respecto, Segovia, I. & De Castro, C (2007, pág. 215) explican este fenómeno como la confusión por parte de los sujetos entre estimación y aproximación y aclaran que aunque son dos términos que se relacionan no son sinónimos.

> "aproximar es encontrar un resultado suficientemente preciso para un determinado propósito. La aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; se aproxima tanto como la situación lo precise; tiene como herramientas los teoremas del cálculo (aproximado) o teoría de errores y los algoritmos de lápiz y papel o con calculadora. La estimación tiene en cuenta el error pero de manera menos precisa. A veces, este no tiene un control asegurado… La

estimación puede emplear algunos de los teoremas del cálculo aproximado en la medida que estos teoremas puedan aplicarse mentalmente".

Bressan, A. & Bogisic, B. (1996) consideran que una buena técnica para estimar consiste en descomponer en partes la cantidad a estimar, de forma que cada una se estime directamente por separado y luego se relacionen; esta parece ser la técnica que usó la estudiante. *Eva* estimó cada una de las aristas que requería para hallar el volumen usando un referente usual y presente (su brazo y la cuarta de su mano) y luego las relacionó a través de una fórmula previamente establecida; las autoras, denominan a esta relación de procesos de estimación de cálculos y medidas combinados como "estimación indirecta" y aunque no es el único camino para estimar, sí es el más común cuando los sujetos no se exponen con frecuencia a tareas de estimación más elaboradas que las que la vida cotidiana les ofrece.

En el informe Cockcroft, citado por Segovia, I. & De Castro, C (2007) se explica que la estimación puede considerarse desde dos aspectos:

- La que permite obtener, antes de efectuar un cálculo, una respuesta aproximada.
- La que se define como capacidad para determinar si la respuesta es o no razonable.

Un aspecto que les es pertinente es la posibilidad de estimar medidas de diversos tipos, pero se aclara que con experiencia práctica y uso continuado se mejoran los resultados, esta es una de las razones por las cuales les es tan difícil estimar.

La habilidad para representar video-espacialmente un objeto también influye directamente en la capacidad de estimar, así, la capacidad de aceptar más de un proceso y más de un valor para obtener una estimación redundará en confianza y tolerancia al error reconociendo que la estimación es útil.

7.3 Exploración final

Las competencias que se analizaron durante el desarrollo del taller de validación (Anexo E) se relacionaron fundamentalmente con la capacidad que demostraron las estudiantes de estimar volúmenes en prismas; A continuación se destaca la red semántica que ilustra las principales categorías y subcategorías encontradas.

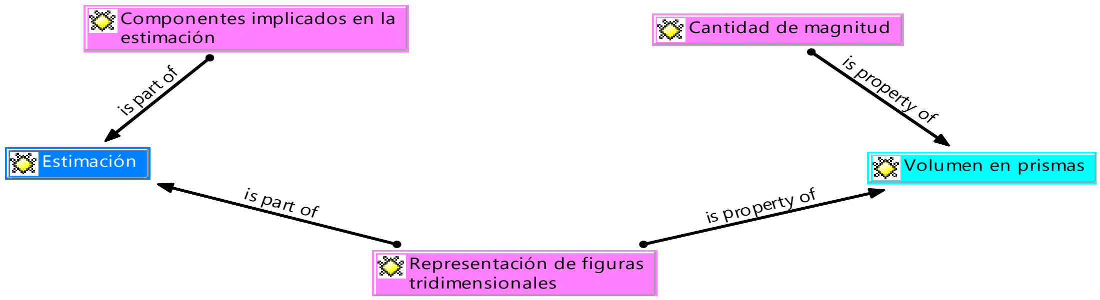


Figura 11. Red semántica en la cual se representan las principales categorías y subcategorías halladas durante el desarrollo del taller de validación.

7.3.1 Volumen de prismas

El objeto mental volumen, entendido en esta investigación en el sentido que le da Freudenthal (citado por Saucedo, G. (2009)): "todas las representaciones, ideas, relaciones, significados que el concepto evoca en la mente de la persona" experimentó un cambio sustancial en los modelos mentales de las estudiantes.

Cuando se inició la investigación, para las estudiantes el concepto volumen solo hacía referencia al volumen desplazado; sin embargo, la inmersión para muchas medía el peso, el área, la capacidad o la densidad. Si bien es cierto, no se abordaron en este estudio todos los conceptos (fenomenológicos) físicos con los que ellas asociaban volumen, sí se logró hacer diferencia en tres aspectos:

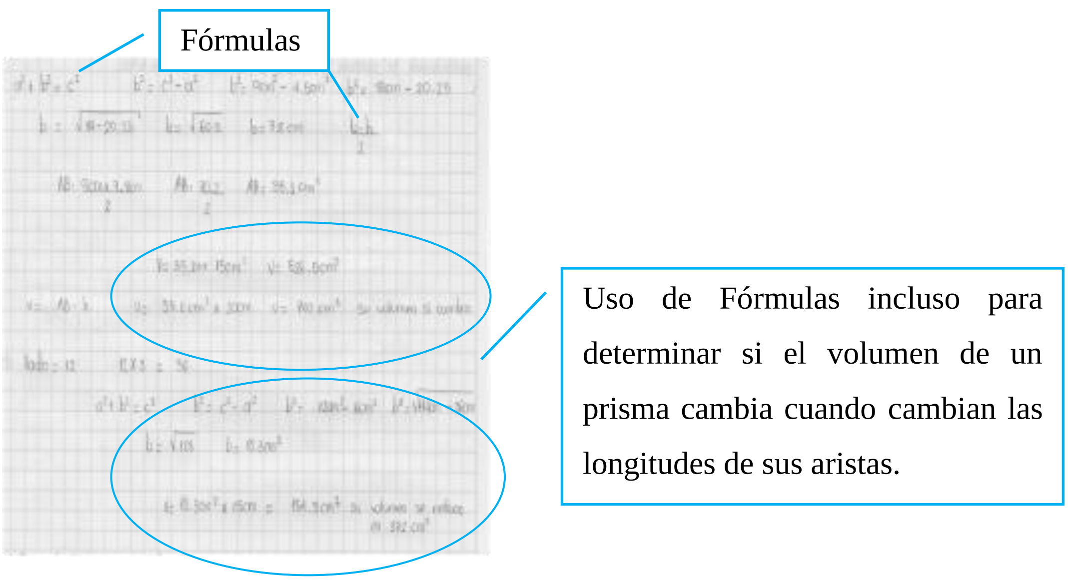
- Capacidad no es lo mismo que volumen ocupado.
- El volumen puede hallarse usando diferentes técnicas.
- El volumen no es lo mismo que el área.

Este avance se logró gracias a que para solucionar el problema en la intervención didáctica, las estudiantes debieron manipular y transformar elementos concretos que les facilitó observar cambios y diferencias. Estas actividades fueron propuestas por la investigadora siguiendo algunas de las pautas que Freudenthal (citado por Sáiz, M. (s.f, pág. 10)) propone como indispensables para la formación del objeto mental volumen:

1. Hacer muchas transformaciones con sólidos, como moldear, transformaciones de romper y rehacer, sumergir y otras.
- Aprovechar este para hacer hincapié en la diferencia entre volumen y área y diferenciar capacidad y volumen.
- Observar la aditividad del volumen.
2. Hacer repartos justos.
- Aprovechando regularidades en los cuerpos.
- Estimando.
- Midiendo
3. Comparar y reproducir.
- Comparando bases y luego alturas.
- Por estimación.
- Por medición.
- Usando transformaciones que conserven el volumen.
4. Medir.
- Por exhaución con una unidad y afinando la medición con subunidades.
- Con transformaciones de romper y rehacer.
- Por relaciones geométricas conocidas.
- Por medio de fórmulas.
- Por inmersión.
- Construir cuerpos de igual área y diferente volumen.

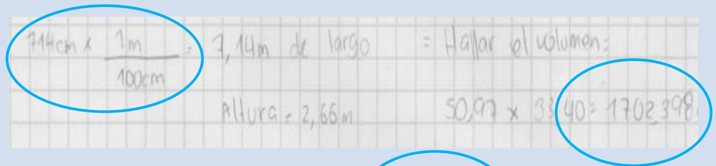
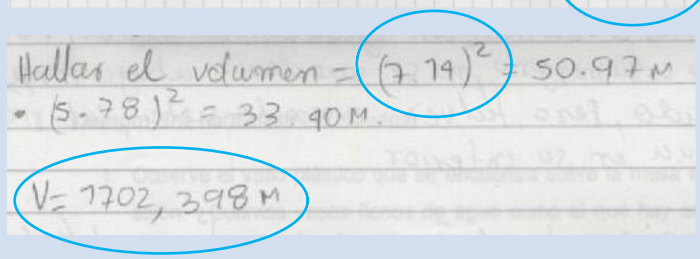
Con respecto a la observancia de la aditividad del volumen, se logró anidar la noción de que es posible llenar un cuerpo con “cubos” cuyas aristas tienen longitud igual a 1 seguido de la unidad que se esté trabajando (m^3, cm^3) y de este modo estimar su volumen; sin embargo ellas mostraron resistencia a la idea y siempre volvían al uso de la fórmula. Como se ha repetido, los modelos mentales de las estudiantes revelan su experiencia en el acercamiento a la medición de la magnitud volumen y estos se manifiestan a través de su discurso y de sus ideas; de igual forma, es posible que la decisión tomada en el diseño didáctico sobre limitar el trabajo al volumen de prismas, reforzara la idea de que el volumen se mide en tres dimensiones: largo, ancho y espesor, o bien largo, ancho y altura o profundidad (Novaro, citado por Sáiz, M. (ibíd..)) ahora que ya reconocían la diferencia entre volumen desplazado y volumen ocupado y ya no hablaban de la inmersión como “el método” para hallar el volumen.

Al igual que en el estudio de la doctora Sáiz con maestros de primaria mexicanos sobre algunos objetos mentales relacionados con el volumen, en las estudiantes que participaron de esta investigación también se evidenció (desde el taller diagnóstico) que aunque en sus definiciones de volumen no hablaran de fórmulas o números, este sí es el significado que subyace al objeto mental. Esto se evidencia en los procedimientos de medición y en la forma en la que resuelven las situaciones que se les presentan, todas reducidas a un modelo numérico. La necesidad recurrente de fórmulas aún en situaciones de estimación permaneció con fuerza durante toda la intervención didáctica.

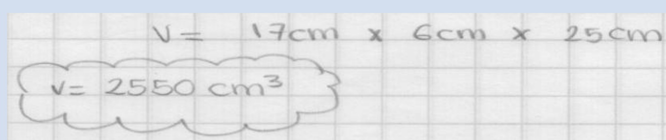
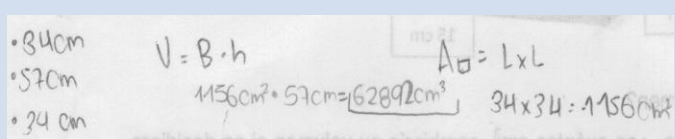


7.3.1.1 Cantidad de magnitud.

En el desarrollo del marco teórico, se definió la cantidad de magnitud como un número que expresa la medida de una magnitud, seguido de la unidad que se ha utilizado. En este sentido, el uso de los elementos notacionales en la escritura alfanumérica para expresar cantidades y medidas fue un aspecto que para las estudiantes no tenía mucha importancia pues para la gran mayoría de ellas, era obvio que la unidad estaba ahí, que se infería si se sabía con qué unidades se midió y que notarla no era relevante pues lo que importaba era el número.

Antes (taller diagnóstico)	Texto ilustrativo
▪ Las unidades de medida podían ser expresadas pero al final solo quedaba la medida de la magnitud. ▪ Las unidades de medida no se notaban al reemplazar en la fórmula y al final aparecían, la medida de la magnitud pero acompañada de otra unidad de medida.	 

Después de la intervención didáctica, el cambio en la concepción del significado de cantidad de magnitud fue notorio. Las estudiantes se referían a las unidades de medida y las magnitudes tanto en forma oral como escrita y pocas veces obviaron su notación, el trabajo práctico les permitió comparar cantidades y medir, procesos que son esenciales al cuantificar la realidad (Godino, J., Batanero, C.& Roa, R (2002))

Ahora (taller de validación)	Texto ilustrativo
▪ Los elementos notacionales (alfanuméricos) aparecen completos en un alto porcentaje.	 

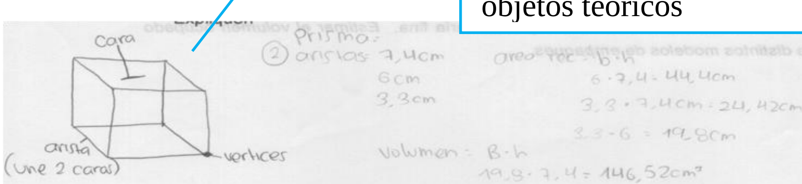
Paraleloal trabajo con los prismas, en la intervención didáctica se implementaron una serie de actividades encaminadas a mejorar el dominio y la comprensión de la medida de magnitudes. Dichas actividades fueron tomadas de Godino, J., Batanero, C.& Roa, R (2002, pág. 636) y aunque están dirigidas al nivel de educación primaria, para la investigadora fueron útiles dado que todo indica que en la educación primaria, las estudiantes no tuvieron la oportunidad de vivenciarlas:

- Mediciones con unidades convencionales y no convencionales.
- Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos de manera exacta y aproximada.
- Toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas en cada caso atendiendo al objetivo de la medición.
- Transformación, comparación y equivalencias de las unidades de medida utilizando los algoritmos de cálculo correspondientes.
- Utilización de los algoritmos para calcular áreas de rectángulos y triángulos.
- Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada para la medición.
- Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo estimaciones de medidas en situaciones naturales.

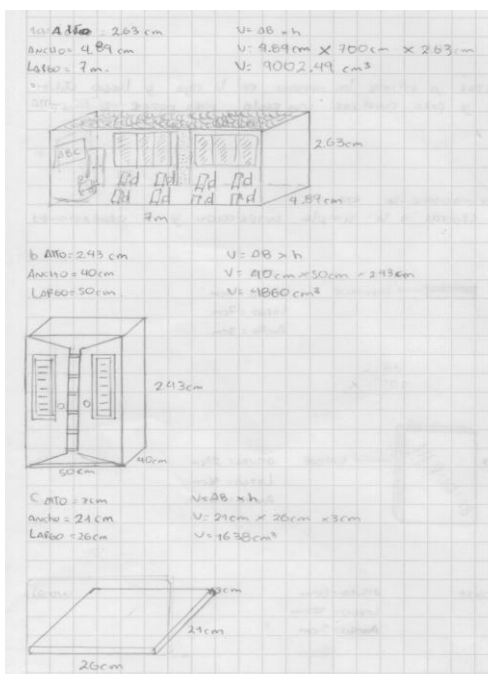
7.3.1.2 Representación de figuras tridimensionales.

La imagen mental en tres dimensiones que en los primeros acercamientos de esta investigación tenían las estudiantes sobre los prismas, era la de un cubo, a pesar de que buscaron moldes y construyeron los prismas para solucionar el problema de empacar sus productos, cuando hacían un gráfico para analizar una situación problema, siempre lo asociaban a esta forma.

Los dibujos que realizan los estudiantes son una representación de objetos teóricos



La interpretación de volumen como una magnitud física tridimensional, calculable como el producto de tres longitudes o el producto de una superficie por una longitud, sentó las bases para que el modelo de figura tridimensional, se fortaleciera desde la relación plano/espacio en cuyo caso el proceso de visualización del cuerpo en la mente se enriqueció. Las situaciones que se dieron en la intervención didáctica forzaron el establecimiento de relaciones entre lo que se percibe en el espacio tridimensional y lo que aparece cuando este queda plasmado en el plano. Así las cosas, la relación entre el espacio tridimensional y el bidimensional se robusteció ofreciendo elementos de referencia para el estudio de los cuerpos así como facilitando la interpretación, la visualización mental (si se producían cambios de posición o de tamaño), la estructuración, la capacidad de abstracción para reconocer aspectos propios de su condición (longitud, posición) y la preparación para imaginarse la figura en su totalidad aunque solo se viera una parte.



Sin embargo se quedó en deuda con la unidimensionalidad del volumen ya que el aspecto de medir y comparar en el conteo de unidades de volumen no se trabajó, en parte por la premura del tiempo y en parte porque el interiorizar la unidad de medida que necesitaban para hacer las estimaciones y las mediciones les volvió hábiles en la determinación de la unidad y por lo tanto no les fue necesario hacer conversiones. Este tratamiento en la metodología (el de no tratar la dimensionalidad del volumen como una unidad que tiene dos variantes) puede acarrear incomprensión, pues no se tuvo la oportunidad deabordar características propias del SMD necesarias para que la dimensionalidad del volumen se fijara en sus objetos mentales.

7.3.2 Estimación

En el marco de las dificultades que se presentaron ante las aprendices para potenciar la habilidad de estimar volúmenes estuvo la dicotomía entre lo exacto y lo aproximado. Expresiones como las consignadas por los equipos durante el taller de validación, al consultarles en tono reflexivo si reviste alguna importancia el uso de cálculos exactos o de cálculos aproximados en el diseño del modelo del empaquedan cuenta de ello:

Importancia de cálculos exactos	**Texto ilustrativo**
▪ Los cálculos exactos*garantizan* el buen uso del espacio.	2. Usar calculos exactos en los empaques es muy importante, ya que esto nos garantiza que usemos muy bien el espacio, ahorremos dinero, tengamos mas ganancias y nuestro producto quede bien empacado y seguro.
▪ *Las matemáticas son una ciencia exacta.* ▪ Los cálculos exactos proveen al prisma de *estética* y de *forma.*	Reflexion. Pensamos que si es importante tener calculos exactos por varias razones, primero las matematicas son una ciencia exacta, segundo si quiero que mi poligono sea regular y quede bien formado debe tener medidas exactas en todas sus caras. Tambien es importante en la estetica del empaque de un producto pues si sus calculos no fueran exactos este no seria bonito y no tendria la forma indicada
▪ Los cálculos exactos son *extremadamente importantes* porque hacen *prolijo* al empaque.	Reflexión es extremadamente importante el uso de calculos exactos, ya que si no se hace de esta manera es posible que el empaque no que prolijo, su presentacion no seria adecuada.

En sus comentarios se refleja que aún no valoran la estimación como un proceso mental que facilita resolver situaciones que no tienen respuestas exactas (inherentes a la medición) y por el contrario lo ven como una estrategia que puede distorsionar el valor de un cálculo. Segovia, I. & De Castro, C. (2007) catalogan como simplista, la concepción que relaciona a las matemáticas con la exactitud y advierten, que bajo ese esquema (aprendido en la escuela), la estimación se torna ajena a ellas o peor aún, como una forma poco correcta de hacer matemáticas.

7.3.2.1 Componentes implicados en la estimación

Showder y Wheeler (citadas por Segovia, I. & De Castro, C. (Ibíd.)) analizaron en el año 1989 cómo se desarrolla la comprensión de la estimación y concluyeron que los procesos propios de esta habilidad se desarrollan muy lentamente y con la edad. En su estudio también resaltaron la importancia que tiene para la estimación que los sujetos acepten que un mismo problema puede tener múltiples respuestas y reconozcan que realizar una compensación puede mejorar una solución.

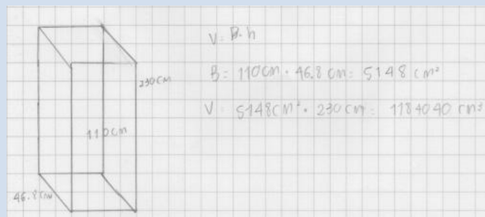
La relación entre el desarrollo de una habilidad cognitiva y el desarrollo de las diferentes etapas del pensamiento ha sido ampliamente estudiado (Piaget (1923/1970), Inhelder (1955), Vygotsky (1934/1986). En el caso de la estimación Case y Sowder (1990) (citados por Segovia, I. & De Castro, C. (Ibíd.)) contrastaron el modelo de desarrollo cognitivo de Case (1985) y corroboraron su hipótesis: el dominio de tareas de estimación en las que hay que coordinar destrezas de aproximación mentales, no se alcanza hasta cerca de los 12 años.

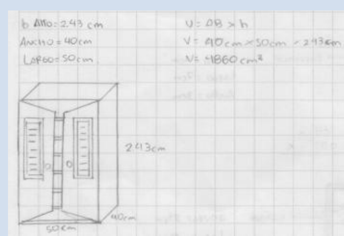
Para el caso que ocupa este estudio, el análisis se centró en el componente denominado como *capacidad estimativa métrica* (en magnitudes continuas), el cual se determina según la tendencia que la medida estimada muestre: sobreestimación, subestimación y su respectivo porcentaje de error (Castillo, J. citado por Segovia, I. & Castro, E., (2009)). Los componentes de estimación *simbólica* (empleo de unidades de medida no convencionales) y de estimación discreta, no se tuvieron en cuenta por motivos investigativos.

A continuación se muestran las estimaciones de volumen de diferentes cuerpos con forma de prisma obtenidas por los grupos de trabajo durante el desarrollo del taller de validación analizados bajo la tendencia que demostró la estimación de la medida.

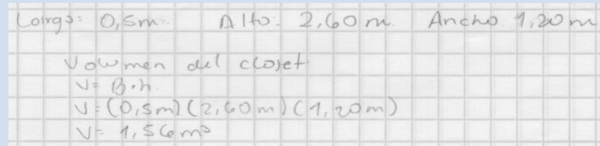
Los procesos utilizados por las estudiantes fueron: proceso de comparación de la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente presente (antropométrico para el caso de las longitudes de las aristas) y técnicas indirectas (empleo de fórmulas).

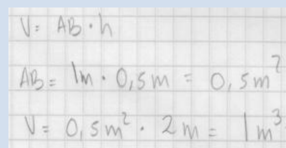
- Estimación del volumen ocupado por el closet del salón de clases:

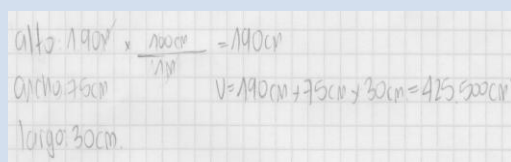
Equipo 1	Volumen
▪ Medida real	Alto: 220 cm. Ancho: 100 cm. Profundidad: 40 cm V= 880000 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ 34,55% Sobreestimación

Equipo 2	Volumen
▪ Medida real	Alto: 220 cm. Ancho: 100 cm. Profundidad: 40 cm V= 880000 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ -99,44% Subestimación
▪ Error detectado: La longitud de la altura del closet fue dada como 2,43 cm, es altamente probable que las estudiantes se refirieran a 2,43 m.	

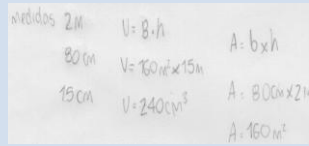
Equipo 3	Volumen

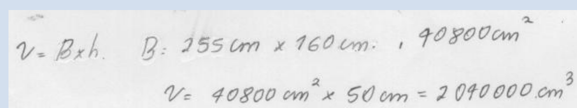
▪ Medida real	Alto: 220 cm. Ancho: 100 cm. Profundidad: 40 cm V= 880000 cm^3
▪ Estimación	 Largo: 0,5m Alto: 2,60 m Ancho 1,20 m Volumen del closet V= B·h V=(0,5m)(2,60m)(1,20m) V= 1,56m³
▪ Porcentaje de error	▪ 77,27% Sobreestimación

Equipo 4	Volumen
▪ Medida real	Alto: 220 cm. Ancho: 100 cm. Profundidad: 40 cm V= 880000 cm^3
▪ Estimación	 V= Ab·h Ab= 1m · 0,5m = 0,5m² V= 0,5m² · 2m = 1m³
▪ Porcentaje de error	▪ 13,63% Sobreestimación

Equipo 5	Volumen
▪ Medida real	Alto: 220 cm. Ancho: 100 cm. Profundidad: 40 cm V= 880000 cm^3
▪ Estimación	 alto 1,90m x 100cm/1m = 190cm ancho 75cm V=190cm x 75cm x 30cm = 425500cm³ largo 30cm
▪ Porcentaje de error	▪ -51,42% Subestimación
▪ Error detectado: El algoritmo de la multiplicación es incorrecto, es 427500, no 425500. El porcentaje de subestimación se obtuvo con el valor real dado que las longitudes de las aristas ya estaban estimadas	

Equipo 6	Volumen

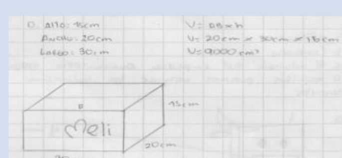
▪ Medida real	Alto: 220 cm. Ancho: 100 cm. Profundidad: 40 cm V= 880000 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error	▪ No aplica
▪ Error detectado: La unidad de magnitud (longitud) utilizada en el algoritmo de la multiplicación, está dada en diferentes unidades (cm, m)	

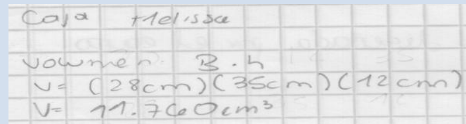
Equipo 7	**Volumen**
▪ Medida real	Alto: 220 cm. Ancho: 100 cm. Profundidad: 40 cm V= 880000 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error	▪ 131,81% Sobreestimación

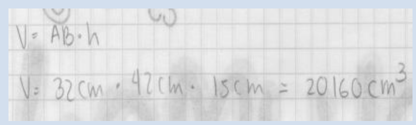
El equipo 8 no respondió.

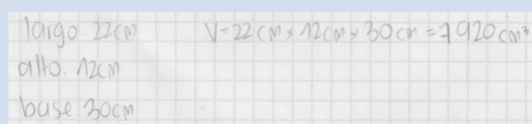
➢ Estimación del volumen ocupado por el baúl que en la clase de artística decoró Melissa.

El equipo 1 no respondió.

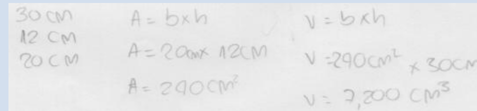
Equipo 2	**Volumen**
▪ Medida real	Alto: 13 cm. Ancho: 32 cm. Largo: 25 cm V= 10400 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ -13,46% Subestimación

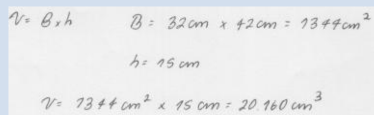
Equipo 3	Volumen
▪ Medida real	Alto: 13 cm. Ancho: 32 cm. Largo: 25 cm V= 10400 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ 13,07% Sobreestimación

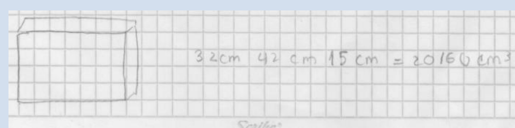
Equipo 4	Volumen
▪ Medida real	Alto: 13 cm. Ancho: 32 cm. Largo: 25 cm V= 10400 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ 93,84% Sobreestimación

Equipo 5	Volumen
▪ Medida real	Alto: 13 cm. Ancho: 32 cm. Largo: 25 cm V= 10400 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ -23,84% Subestimación

Equipo 6	Volumen

▪ Medida real	Alto: 13 cm. Ancho: 32 cm. Largo: 25 cm V= 10400 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ -30,76% Subestimación

Equipo 7	Volumen
▪ Medida real	Alto: 13 cm. Ancho: 32 cm. Largo: 25 cm V= 10400 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ 193,84% Sobreestimación

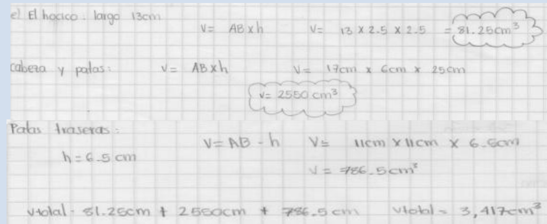
Equipo 8	Volumen
▪ Medida real	Alto: 13 cm. Ancho: 32 cm. Largo: 25 cm V= 10400 cm^3
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ 93,84% Subestimación

➢ Estimación del volumen ocupado por la vaca decorativa que un equipo construyó con base en un modelo de internet.

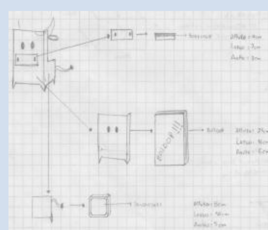
Equipo 1	Volumen
▪ Medida real	▪ Hocico: Alto: 4 cm. Ancho: 5cm. Largo: 11 cm V= 220 cm^3 ▪ Cuerpo: Alto: 23 cm. Ancho: 16 cm. Grosor: 3,5 cm. V=1288 cm^3 ▪ Patas traseras: Profundidad: 5 cm. Largo: 11 cm, Ancho: 10 cm. V= 550 cm^3

Volumen total: 2058 cm^3

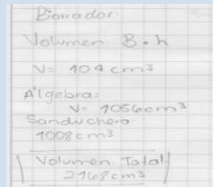
- Estimación



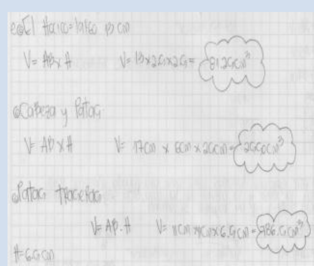
- Porcentaje de error:
- 66,03% Sobreestimación

Equipo 2	Volumen
▪ Medida real	▪ Hocico: Alto: 4 cm. Ancho: 5cm. Largo: 11 cm V= 220 cm^3 ▪ Cuerpo: Alto: 23 cm. Ancho: 16 cm. Grosor: 3,5 cm. V=1288 cm^3 ▪ Patas traseras: Profundidad: 5 cm. Largo: 11 cm, Ancho: 10 cm. V= 550 cm^3 *Volumen total: 2058 cm^3*
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ 30,80% Sobreestimación

Equipo 3	Volumen
▪ Medida real	▪ Hocico: Alto: 4 cm. Ancho: 5cm. Largo: 11 cm V= 220 cm^3 ▪ Cuerpo: Alto: 23 cm. Ancho: 16 cm. Grosor: 3,5 cm. V=1288 cm^3

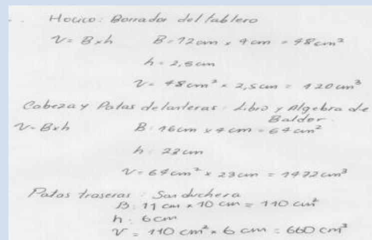
	▪ Patas traseras: Profundidad: 5 cm. Largo: 11 cm, Ancho: 10 cm. V= 550 cm^3 *Volumen total: 2058 cm^3*
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ 5,3% Sobreestimación

El equipo 4 no respondió

Equipo 5	**Volumen**
▪ Medida real	▪ Hocico: Alto: 4 cm. Ancho: 5cm. Largo: 11 cm V= 220 cm^3 ▪ Cuerpo: Alto: 23 cm. Ancho: 16 cm. Grosor: 3,5 cm. V=1288 cm^3 ▪ Patas traseras: Profundidad: 5 cm. Largo: 11 cm, Ancho: 10 cm. V= 550 cm^3 *Volumen total: 2058 cm^3*
▪ Estimación	
▪ Porcentaje de error:	▪ 66,07% Sobreestimación

El equipo 6 no respondió

Equipo 7	**Volumen**

▪ Medida real	▪ Hocico: Alto: 4 cm. Ancho: 5cm. Largo: 11 cm V= 220 cm^3 ▪ Cuerpo: Alto: 23 cm. Ancho: 16 cm. Grosor: 3,5 cm. V=1288 cm^3 ▪ Patas traseras: Profundidad: 5 cm. Largo: 11 cm, Ancho: 10 cm. V= 550 cm^3 *Volumen total: 2058 cm^3*
▪ Estimación	 Hocico: Borrador del tablero V= B×h B=12cm × 4cm = 48cm² h = 2,5cm V= 48cm² × 2,5cm = 120cm³ Cabeza y Patas delanteras: Libro y Algebra de Baldor. V= B×h B: 16cm × 4cm = 64cm² h: 23cm V= 64cm² × 23cm = 1472cm³ Patas traseras: Sandwichera B: 11 cm × 10 cm = 110 cm² h: 6cm V = 110 cm² × 6 cm = 660 cm³
▪ Porcentaje de error:	▪ 9,42% Sobreestimación

El equipo 8 no respondió

Para el caso de la estimación en la magnitud volumen ocupado en prismas, las estudiantes presentan una tendencia clara a sobreestimar (estimar sobre el valor real), sólo el equipo 3 logró estimar en dos ocasiones (en el volumen de la caja y en el de la vaca) con un porcentaje de sobreestimación (13,07% y 5,3% respectivamente) muy cerca de la media real, mientras que el equipo 7 presenta un porcentaje de sobreestimación elevado, con más del 100% en la estimación del volumen ocupado para el clóset y para la caja (131,81% y 193,84% respectivamente). 2 equipos (el equipo 2 y el 5) presentaron tendencia a subestimar en la estimación del volumen ocupado del clóset y de la caja, mientras que ambos equipos sobreestimaron en el volumen ocupado de la vaca.

A pesar de los altos porcentajes de sobreestimación, el hecho de que tanto en el concepto de volumen como en la capacidad de estimación se dieran avances que sugieren comprensión, se considera un logro; dado que como se ilustró en el taller diagnóstico, las estudiantes no podían estimar (dominando las áreas de estimación), sólo podían realizar algunas tareas componentes de la estimación de cantidades tales como aproximar números y realizar algunos cálculos mentales, pues la no identificación de la magnitud volumen, la poca interiorización de referentes de medida y la misma concepción de que estimar no es un proceso matemático dada su "inexactitud" se los impedía.

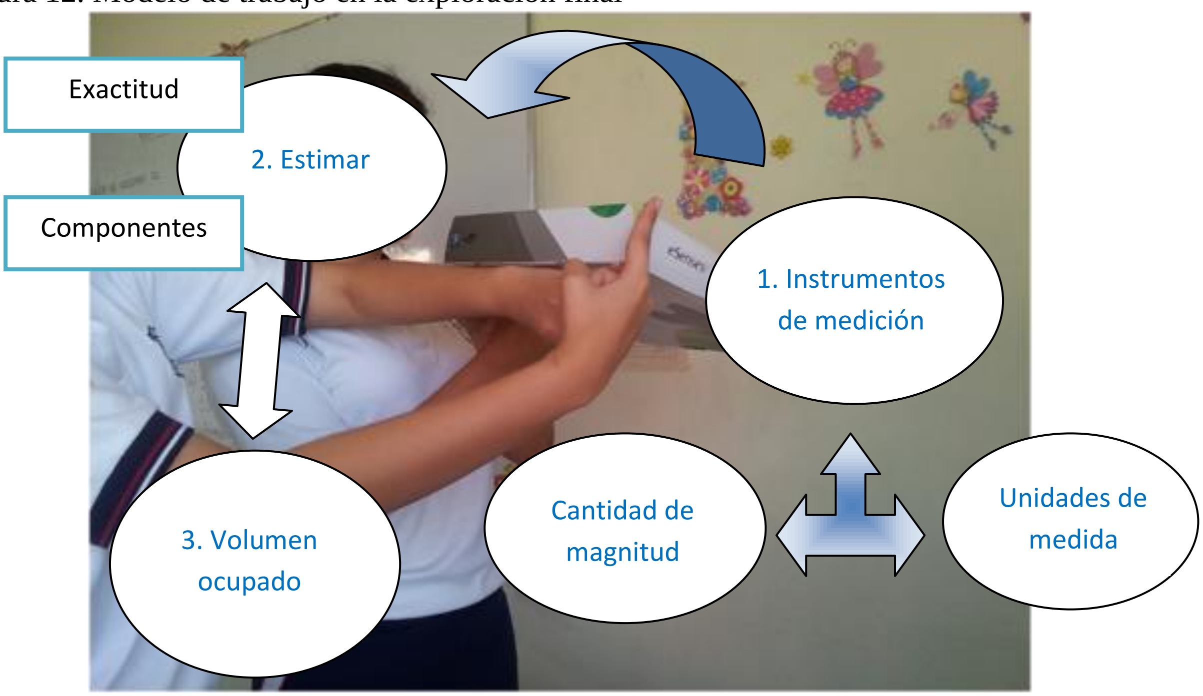
Finalmente, se exponen los componentes de la estimación en medida determinados por Castillo, J. et al. (2011) ya citados en el marco teórico de este estudio que se vieron más beneficiados con la intervención didáctica, así como los desafíos que quedaron planteados.

Avances	**Desafíos**
▪ Comprender la cualidad que se va a estimar o medir. ▪ Percibir lo que va a ser medido o estimado. ▪ Comprender el concepto de unidad de medida. ▪ Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación. ▪ Usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones: iterar y/o comparar un referente presente y usar técnicas indirectas (empleo de fórmulas) ▪ Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar.	▪ Usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones: iterar un referente ausente, acotar, descomponer, recomponer, reajustar ▪ Tener imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación. ▪ Verificar la adecuación de la estimación. ▪ Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida.

7.3.3 Modelo de trabajo en la exploración final

En el transcurso de la intervención didáctica, las estudiantes enriquecieron sus ideas sobre el volumen y la estimación a partir del desarrollo del contenido programático que se sirvió de una situación problémica (la construcción de empaques (Anexo C)). Durante el proceso de enriquecimiento, salieron a flote algunos aspectos que fueron discutidos, consultados y puestos a prueba y que facilitaron la construcción de un modelo de trabajo que aunque partía del modelo del grupo 1 en la exploración de ideas previas, fue alimentado con nuevos elementos. Este proceso es denominado por Tamayo, O. et al. (2011) como evolución conceptual y se entiende "como la posibilidad que tienen los estudiantes de elegir el modelo que logre un mejor nivel de satisfacción entre las distintas opciones de modelos explicativos presentes en un fenómeno determinado".

Figura 12. Modelo de trabajo en la exploración final



Fuente: Elaboración propia

Erdurán y Dush, citados por Izquierdo, M. &Adúriz-Bravo, A. (2005) definen modelo como "una representación gracias a la cual se utiliza algo que ya se comprende". Concatenando esta definición con la investigación en curso, se puede decir que finalizada la intervención didáctica, las estudiantes ampliaron la representación mental que tenían de la estimación de volúmenes, adquiriendo mayor comprensión de los aspectos numéricos, espaciales, cualitativos, algebraicos y estimativos de la magnitud volumen.

7.4 Actuación de la modelación

"La modelación como metodología de enseñanza, parte de un tema y sobre él desarrolla cuestiones que se quieren comprender…es capaz de llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significados o sentidos para él" (Biembengut y Hein, citados por Biembengut, M. & Hein, N. (2004)), tal como lo afirman los autores, en este estudio se pudo evidenciar que después de la intervención didáctica la comprensión se fijó en los modelos de trabajo de las estudiantes.

Para ilustrar la ruta que se siguió durante el proceso de implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje, en la figura 12, se muestran las fases llevadas a cabo, resaltando la interacción entre las estudiantes y el problema. En ella se visualizan las variables que intervinieron en el proceso, las características distintivas en cada fase y la obtención de un modelo algebraico fruto de la relación entre las fórmulas, los cuerpos y la estimación comparativa con un múltiplo de un referente presente.

Para este estudio, modelo se define como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación (Bassanezi citado en Villa-Ochoa (2007)); así, en esta experiencia se hicieron evidentes aspectos que facilitaron a la investigadora determinar la forma en la que las estudiantes mejoraron su capacidad estimativa a través del modelo fijado para el trabajo con volumen de prismas:

- El algoritmo se vincula fuertemente con los modelos numéricos, los algebraicos y los geométricos-espaciales de las estudiantes, de ahí el uso frecuente de fórmulas para traducir la información que plantea el problema.
- El modelo facilitó que la experiencia de estimar pudiera llevarse a otros contextos y ser validada, como por ejemplo en el trabajo con el software geométrico Cabri 3D, en el que las estudiantes pudieron manipular el espacio tridimensional que ofrecen las herramientas del software y controlar las variables, de tal modo que los cambios

de longitud o de superficie en los cuerpos no significaban un problemas mayúsculo al ser estimados.Duval, R. (2006) destaca el uso de software como una herramienta que ofrece una “percepción dinámica de la transformación de representación frente al soporte estático del papel” facilitando que los estudiantes cambien de una representación semiótica con intencionalidad y comprensión.

Figura 13. Actuación de la modelación

Comprensión

1. Construcción de empaques

Bibliografía: Internet, datos

2. ¿Cómo se puede resolver la situación?, ¿qué formas pueden tener los empaques?, ¿cuál es el volumen ocupado ideal según el producto?¿existe relación alguna entre la forma del empaque y su volumen ocupado?, ¿cómo se puede optimizar el material?, ¿cuál es el papel de los datos "exactos" en la construcción de los empaques?

Se inicia la elaboración de una síntesis de la investigación

3. Hipótesis: El empaque ideal para los productos tiene forma de prisma. Estimación de su volumen

Reconocer la relación y las diferencias entre longitud, área y volumen.

Identificar los métodos para hallar volumen.

Manejo del conjunto de los números racionales.

Comprender el concepto de unidad de medida y tenerla como imagen mental.

Usar estrategias apropiadas para realizarestimaciones

Matemática necesaria

4. Contenido programático:área de superficies, cuerpos geométricos, magnitudes extensivas, unidades de medida para volumen, volumen de cuerpos geométricos, estimación indirecta de medidas

5.Modelo matemático

6. Aplicación en cabri

7. Taller de validación

8. Trabajo escrito y exposición oral

8. Conclusiones

"No leemos ni comprendemos significados neutros; leemos discursos de nuestro entorno y comprendemos datos e informaciones que nos permiten interactuar y modificar nuestra vida" Paulo Freire

Este estudio tuvo como objetivo analizar la incidencia de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje en la capacidad de estimar cantidades continuas en la magnitud volumen ocupado en un grupo de estudiantes de grado 9° de Educación Básica Secundaria, su sentido fue comprender cómo una estrategia metodológica que se vale de contextos significativos puede potencializar una habilidad y promover su desarrollo teniendo particular atención en el ambiente escolarizado, por ello, en este estudio interesó caracterizar cambios en las tareas de estimación a que se enfrentaban las estudiantes.

El trabajo siguió una metodología cualitativa, recogiendo datos en el ambiente natural del aula, interesando particularmente la observación, interrogación e interpretación de un sinnúmero de acciones, que facilitaron el acceso a un conocimiento que de otro modo no hubiera podido conseguirse; el análisis estuvo fundamentalmente en la comunicación de los resultados de la actividad matemática de las estudiantes.

Con estos propósitos se diseñó una secuencia didáctica con la que se pretendía verificar si finalizada su implementación, las estudiantes movilizaban su capacidad estimativa en la magnitud volumen ocupado a partir de situaciones de conflicto cognitivo, transfiriendo los conocimientos adquiridos en tareas anteriores en procesos de resolución de problemas. Los resultados presentados indican que globalmente, la secuencia didáctica diseñada para implementar la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje sí contribuyó en la promoción de la capacidad estimativa y verificó, que tal como lo indica Godino, J. (2002) la complejidad del conocimiento matemático de los aprendices es progresiva.

8.1 Conclusiones concernientes al proceso de aprendizaje

Las estudiantes evaluadas mejoraron ostensiblemente la habilidad de estimar magnitudes continuas en volumen de prismas, concretamente usando la estrategia de iteración y/o la de comparar un referente presente usando técnicas indirectas (empleo de fórmulas), estableciendo así relaciones métricas progresivamente más elaboradas.

Fue claro que algunas estudiantes consiguieron realizar estimaciones cercanas a la medida real aunque lo hicieran utilizando su cuerpo como una extensión. No obstante, la estrategia de usar medidas antropométricas (usadas por todas las estudiantes) vino a convertirse en una forma de encarar el obstáculo que supone el uso excesivo del Sistema Métrico Decimal, que con regularidad reduce el acto de medir a lo algorítmico y permite visualizar a la medida como una acción cotidiana y no como una cuestión aritmética. Finalizado el trabajo se pudo confirmar lo expuesto por el MEN (1998) cuando afirma que si los estudiantes estiman, acceden a complejas técnicas de medición, comprenden los atributos susceptibles de ser medidos en un objeto y adquieren conciencia del tamaño de las unidades de medida.

Con relación a los modelos de trabajo, se pudo concluir que los modelos mentales que tenían las estudiantes sobre medición, espacio tridimensional, volumen y estimación al iniciar este estudio fueron evolucionando conceptualmente hasta estructurarse con elementos más elaborados, producto de la percepción, del discurso, de la interacción social y de la experiencia de cada una frente a lo que se vivía en el aula (Otero, M. & Banks-Leite, L. (2006) y dada la naturaleza “incompleta” e “inestable” de los modelos (Norman, D. citado por Greca, I. & Moreira, M. (1998)), se espera que sigan enriqueciéndose ahora que se han fortalecido sus bases. Sin embargo, el mayor alcance que tiene para las estudiantes la evolución de sus modelos es su funcionalidad y la posibilidad que les brinda de solucionar situaciones de medida en las que anticipar o juzgar un resultado pueda ser determinante.

Otro punto importante es que las estudiantes ampliaron su percepción del concepto de volumen pasando de considerarlo solo como volumen desplazado a considerarlo también como volumen ocupado; además, pudieron diferenciarlo de otros conceptos, por ejemplo, del capacidad y del superficie.

En esta misma línea, el dominio de la visualización espacial de los objetos también recibió un tratamiento que le enriqueció. Los modelos de los prismas habían sido interiorizados por la mayoría de las estudiantes como un cubo y este modelo constituía un obstáculo cuando se trataba de comprender las propiedades de prismas no ortoedros. Con el trabajo de modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje se logró que la imagen mental en tres dimensiones evolucionara hasta encontrar una relación más cercana entre el plano y el espacio de tal forma que fuera más fiel a la realidad. Así las cosas, la relación entre el espacio tridimensional y el bidimensional se fortaleció facilitando la interpretación, la visualización mental (si se producían cambios de posición o de tamaño), la estructuración, la capacidad de abstracción para reconocer aspectos propios de su condición (longitud, posición) y la preparación para imaginarse la figura en su totalidad aunque solo se viera una parte. En este sentido, Rico, L. (2005) subraya que los estudiantes tienen que aprender a desenvolverse a través del espacio, de las formas y de las construcciones porque deben ser conscientes de cómo ven las cosas y por qué las ven así.

Los resultados presentados evidencian que en las estudiantes hubo avances en la comprensión de la magnitud volumen, el uso de unidades de medida estandarizadas y no estandarizadas, la estimación, el reconocimiento y uso de la cantidad de magnitud y el uso de diferentes sistemas numéricos, tales avances se refieren según el MEN en los referentes curriculares de la Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas (1998, pág. 17) al desarrollo del pensamiento métrico, el cual se perfecciona cuando se mide y el énfasis está en:

> Comprender los atributos medibles… y su carácter de invarianza, dar significado al patrón y a la unidad de medida y a los procesos mismos de medición, desarrollar el sentido de medida (que involucra la estimación) y las destrezas para medir, involucrar significativamente aspectos geométricos como la semejanza en mediciones indirectas y los aspectos aritméticos fundamentales en lo relacionado con la ampliación del concepto de número.

Es fundamental resaltar que el trabajo llevado a cabo por las estudiantes se constituyó en una forma de resolver un problema que era de su interés, esta característica (propia de la modelación) facilitó la participación y la creación de un ambiente de auto-construcción del conocimiento a partir de la interacción entre pares, acompañado por la colaboración de un adulto cuyo objetivo era destacar la intencionalidad matemática de las tareas, promoviendo la explicación de ideas, la profundización y el análisis de los procedimientos. Las estudiantes demostraron flexibilidad en sus raciocinios y en las estrategias para resolver problemas y movilizaron y transfirieron conocimientos de un contexto a otro demostrando autonomía, responsabilidad e interés a lo largo de todo el proceso.

8.2Conclusiones concernientes al proceso de enseñanza

La relación entre qué matemáticas sabe un estudiante y qué matemáticas debería saber, es una cuestión que acapara amplios comentarios entre los investigadores. Sin embargo, la pregunta que subyace es: ¿Los estudiantes pueden usar cotidianamente lo que aprenden en la escuela? Una buena ilustración de lo que sucede lo provee la siguiente historieta:

Si se quiere que los estudiantes adquieran competencia y comprensión, se debe planificar el acto de enseñar mostrándole a los estudiantes que los conceptos que se enseñan tienen significado, de este modo, los estudiantes aprenderán unas matemáticas distintas y adquirirán una visión diferente de las matemáticas (Godino, J. et al. (2002))

Considerando la relación que las estudiantes establecieron con la matemática durante la intervención didáctica, se puede decir que la intencionalidad de este trabajo también apuntó a analizar las actitudes de las estudiantes frente a las matemáticas escolares. De hecho, la intencionalidad de la propuesta presentada no tuvo ese propósito explícito, pero una vez se implementó la secuencia didáctica se reveló en los análisis, que la mayoría de las estudiantes demostraban una actitud bastante favorable frente al trabajo, a esta conclusión se llega gracias a que la investigadora es la titular de la asignatura de Álgebra y para ella es posible comparar el desenvolvimiento de las estudiantes antes y después de la intervención didáctica.

La importancia de plantear una secuencia didáctica que facilitara el método de actuación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje fue una estrategia fundamental. Los recursos de aprendizaje puestos en marcha por las estudiantes llevan a considerar que en efecto, las tareas aisladas o realizadas esporádicamente no son la mejor propuesta para facilitar el aprendizaje, y mucho menos el aprendizaje significativo para que, consecuentemente, no se diluya a lo largo del tiempo. A lo largo de la implementación de la secuencia didáctica se verificó que bajo los parámetros de la modelación, las estudiantes pudieron acomodar sus conocimientos a las nuevas construcciones mentales y teóricas que se tejieron sobre estimación; de hecho, la capacidad de pasar de “modelos de” a “modelos para” (que la mayoría de las estudiantes envueltas en el estudio reveló), demuestra que la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje permite la exploración de diversas formas de acercarse a un fenómeno y por ende al proceso de enseñanza y aprendizaje.

El tratamiento que se le dio a la modelación en esta investigación, proporcionó herramientas para que las estudiantes dieran significado a los conceptos matemáticos a que tuvieron acceso, apreciaran su utilidad y mejoraran en su comunicación tanto oral como escrita, incluyendo la notación matemática. El hecho de que las estudiantes pudieran discutir abiertamente sus puntos de vista con sus compañeras e identificaran y reconocieran sus fortalezas y debilidades, destaca el aspecto social y formativo que favorece la modelación en las matemáticas, además de proporcionar elementos para revisar la creencia extendida entre muchas personas de que hay que estar atento y mirando siempre al frente (al tablero) para “entender matemáticas”, desvirtuando el carácter colectivo de la construcción y re-significación del conocimiento.

Se puede concluir entonces, que la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje favoreció la proyección del conocimiento a través del uso del lenguaje algebraico y las prácticas sociales en el aula; de este modo se posibilitó una traducción de entes matemáticos que en otros contextos pudieran ser insignificantes para las estudiantes; finalmente no se debe olvidar que "los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar un modelo útil y efectivo sobre qué entendemos por comprender tales objetos" Godino, J. (2002) y que es tarea de los profesores facilitar y habilitar los espacios para que se lleve a cabo la re-significación del conocimiento.

8.3 Conclusiones concernientes al desarrollo de la capacidad estimativa.

Godino (2002) reflexiona acerca de la complejidad del conocimiento matemático y para ello invita a reconocer la complejidad que supone alcanzar una competencia y la compresión matemática. Al respecto, el autor indica:

> (La competencia y la comprensión matemática) No pueden ser concebidas como estados dicotómicos, esto es, se tiene o no, competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático. Se tratan más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora… el problema del logro del binomio (competencia-comprensión) está, por consiguiente, íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático" (Godino, J.(2002, pág. 14))

Para el caso particular de la estimación la situación es igual. Estimar es un proceso mental que requiere establecer relaciones entre la teoría y la práctica y entenderlo (con conocimiento y comprensión) requiere perfeccionamiento. Finalizada la intervención didáctica, se puede decir que las estudiantes comprenden algunas técnicas para llevar a cabo la tarea de estimar, entendiendo "comprenden" en el sentido que le da Godino, J. (Ibíd.): conocen porqué dichas técnicas son adecuadas, su ámbito de validez y las relaciones que presentan con otras técnicas. A pesar de esto, no se puede decir que las estudiantes son competentes estimando, porque como explica Godino, las estudiantes no dominan correctamente (con un margen de error mínimo) las técnicas para estimar, ni aplican técnicas variadas que permitan decir que conocen cómo hacer la tarea en cualquier situación.

No obstante, se considera que con la implementación de la modelación como estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje se aportó al desarrollo de la estimación toda vez, que se fortalecieron aspectos como los notacionales, escritura alfanumérica, mejoramiento de las técnicas para medir y la utilización de instrumentos de medida, el cálculo aritmético, el uso de fórmulas, la interiorización de las unidades de medida de longitud, la cualidad que mide el volumen, la flexibilidad mental, entre otros, todos ellos relacionados directamente con la estimación de cantidades continuas en las estudiantes.

Se resalta por último el hecho de que la mayoría de las estudiantes adquirió la estructura multiplicativa del volumen sin dar muestras de que han adquirido la noción de "cubrir con capas", este aspecto reviste importancia porque en investigaciones recientes (Sanmiguel, A. & Salinas, M. (2011) la tendencia era contraria, el uso de estrategias de recuento de cubitos desplazaba al uso de fórmulas o a la composición y descomposición de los cuerpos.

9. Cuestiones abiertas

9.1 Implicaciones y recomendaciones

Este trabajo se llevó a cabo con una profunda convicción de que es posible abordar el proceso de enseñanza desde una óptica contraria a la reduccionista, en la que la reflexión sea el punto de apoyo para salir en la búsqueda de cambios sustanciales. Así, una vez finalizado el trabajo, queda la certeza de que aún hay mucho por revisar en este sentido.

Camarena citada por Camarena, P. (2009) estudia los factores que afectan la problemática del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, encontrando aspectos de tipo curricular, relativos a la formación de los profesores, inherentes a la complejidad de la propia matemática, relacionados con la infraestructura cognitiva de los estudiantes, por problemas de tipo social, económico o emocional, ocasionados por obstáculos didácticos o epistemológicos, por malos hábitos de estudio y por causa del proceso de enseñanza y aprendizaje no adecuado, en este sentido, la implicación de los métodos de enseñanza sobre el desarrollo de la capacidad de estimar es indiscutible. La enseñanza del volumen se da generalmente a partir de un enfoque aritmético donde la conversión entre las unidades del SMD ha dejado poco espacio al tratamiento de la magnitud bajo otras perspectivas como la que tiene en cuenta la aditividad del volumen, dando la idea a los estudiantes de que volumen se reduce a una fórmula relacionada con los cubos (l^3). En contraste, aprender la magnitud volumen acarrea un sinnúmero de conceptos, experiencias y habilidades que se limitan siguiendo métodos predominantemente ligados a la longitud (largo, ancho, alto) y que retardan aún más la adquisición del concepto. Este tratamiento didáctico podría explicar la marcada confusión entre diferentes magnitudes (área, densidad, peso): los estudiantes no comprenden realmente las cualidades que caracterizan cada magnitud y las relacionan memorísticamente mediante fórmulas que poco les significan.

Por lo tanto, se recomienda una formación continua del profesorado (tanto de matemáticas como de física), que se preocupe por estudiar aspectos propios de la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático de tal forma que puedan plantear estrategias metodológicas posibles en el acontecer del aula, con el objetivo claro de evitar actividades de medición que dejen para más tarde las aclaraciones teóricas y contribuir a la comprensión del volumen ocupado y por ende a la estimación como un ítem inherente a cualquier tipo de medición.

De igual modo se recomienda la inclusión en los planes de estudio de las Instituciones Educativas Colombianas de la estimación, tanto en cálculo como en medida, en todos los niveles de educación. Todos tendrían que ganar: los profesores que verían avances en las habilidades y destrezas de los estudiantes relacionadas con los 5 tipos de pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional), los investigadores al ampliar en un campo muy rico y que en Colombia poco se ha estudiado y los estudiantes quienes podrían encarar con más herramientas conceptuales las situaciones que de medida y estimación se les presentan cotidianamente.

Otro aspecto que es pertinente referir es la importancia de hacer significativa la matemática. La finalidad de plantear una intervención didáctica que tenga a la modelación como protagonista no es una tarea fácil, pero tampoco imposible, la necesidad de propiciar espacios para desarrollar actitudes y habilidades usando problemas que generen interés en los estudiantes es ya un aliciente para intentarlo.

Sin embargo, hay algunos aspectos que se deben tener presentes cuando se decide implementar la modelación, sobre todo, cuando se trabaja en un nivel de enseñanza medio, en el que el bagaje teórico de los estudiantes apenas alcanza el álgebra básica y cuyo objetivo no es enseñar a modelar, sino introducir ciertos conocimientos matemáticos. Por ejemplo, es importante tener siempre presente el objetivo principal por el que se decidió llevar a cabo una estrategia didáctica de modelación y buscar un equilibrio entre los aspectos de la modelación que son importantes rescatar y los conceptos que se quieren enseñar. En este sentido, los modelos se usan como instrumentos que favorecen el desarrollo de los conceptos, aunque las técnicas de modelación no resulten muy eficientes o las más adecuadas (Trigueros, M., (2009)).

9.2 Perspectiva futura

Finalmente se considera esta investigación como el punto de partida para exponer aspectos susceptibles de ser estudiados con mayor detalle en otras investigaciones:

- Reconocer las causas que propician que los porcentajes de error en las tareas de estimación que presentan los estudiantes en la estimación de magnitudes continuas específicamente en volumen, se sesguen a la sobreestimación y no a la subestimación.
- Sowder, citado por Segovia, I. & De Castro, C (2007) menciona dentro de los componentes implicados en el cálculo estimativo los componentes afectivos que involucran: confianza en la habilidad para hacer matemáticas, confianza en la habilidad de estimar, tolerancia al error y reconocer que la estimación es útil. ¿Cómo potencializar los componentes afectivos vinculados a la estimación?
- ¿Cómo lograr que los profesores se interesen verdaderamente por la evolución de las diferentes etapas del pensamiento de sus aprendices para que tareas como las de la estimación resulten menos complejas?
- ¿Cómo determinar el "intervalo de respuesta aceptable" (Segovia, I. & De Castro, C (Ibíd.)) en la evaluación de tareas de estimación?
- Método de articulación curricular y conceptual de las asignaturas de física, matemáticas, geometría y química para que los estudiantes alcancen conocimientos articulados y no fraccionados que redunden en conocimientos duraderos y significativos.

10. ReferenciasBibliográficas

Alsina, C. (2007) Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en Educación Matemática y sus implicaciones docentes.*Revista Iberoamericana de Educación*. Enero-abril, número 043. Organización de Estados Iberoamericanos para la educación, la ciencia y la cultura, 85-101. Madrid España

Alliaume, J., Caggiani, I. & Pastrana, N. (2009) *Magnitud y medida. El lugar de las ideas previas de los niños en la estimación; la experimentación y las prácticas de medidas.* Ejes temáticos para el concurso de maestros de educación común, publicación especial, Aula.

Montevideo, Uruguay. Mayo de 2009.

Recuperado dehttps://sites.google.com/site/jalliaume/documentos

Axpe, M. (s.f) *La investigación etnográfica en el campo de la educación. Una aproximación meta–analítica.*Tesis de Doctorado. Departamento de Didáctica e Investigación Educativa y del Comportamiento, Universidad de La Laguna.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2010) Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales.*Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*. V. 29 (3) 339-352.

Bassanezi, R. & Biembengut, M. (1997) Modelación matemática: Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. *Revista Números* 32, 3-25

Berges, M. (s.f)*La modelación como método teórico de la investigación educativa*.
Recuperado dehttp://www.ucp.vc.rimed.cu/sitios/varela/articulos/rv2405.pdf

Biembengut, M. & Hein, N. (2004) Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática.*Educación Matemática*, agosto. V. 16 (002) 105-125.Santillana. México.

Biembengut, M. & Hein, N. (s.f) *Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas*. Departamento de matemática – CCEN, Universidad Regional de Blumenau.
Recuperado dehttp://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf

Blanco, R. (2010) Las estructuras lógicas fundamentales y su representación en el encéfalo humano. Eikasia. *Revista de Filosofía*, añoV. (32).
Recuperado de www.revistadefilosofia.com

Blomhøj, M., (2004) *Mathematical modelling – a theory for practice.International perspectives on learning and teaching mathematics*. National center for mathematics education. Suecia45-159.

Blum, W. & Niss, M. (1991) Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects.*EducationalStudies in mathematics*(22)37-68

Bressan, A. & Bogisic, B. (1996) La*estimación, una forma importante de pensar en matemática*. Biblioteca Nacional de Maestros.

Recuperado de http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL000516.pdf

Bressan, A.; & Yaksich, F (2001) *La enseñanza de la medida en la educación general básica*. Campana Argentina. UNESCO

Bullejos, J., & Sampedro, C., (1987) *Diferenciación de los conceptos de masa, volumen y densidad en alumnos de BUP, mediante estrategias de cambio conceptual y metodológico. Investigación y experiencias didácticas.* Comunicación presentada en el II Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y las Matemáticas.Recuperado de: https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=7&ved=0CFgQFjAG&url=http%3A%2F%2Fwww.raco.cat%2Findex.php%2FEnsenanza%2Farticle%2Fdownload%2F51289%2F93035&ei=eagvUZY2gvj1BKnCgIAO&usg=AFQjCNHUavnL1NuOeayCvpCOE0ua37HzHw&sig2=dTk1i9LTQQImhVrgwDmLDA&bvm=bv.43148975,d.eWU&cad=rjt

Callís, J. & Fiol, L. (s.f) *Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal*,161-169.

Recuperado dehttp://www.uv.es/aprengeom/archivos2/CallisFiol03.pdf

Camacho, M., García, M., Hernández, J., Noda, A. & Socas, M. (2003) La medida en la Educación Primaria. *Colección Cuadernos de aula*. Canarias.
Recuperado de
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/dgoie/publicace/scripts/detalle.asp?p=445

Camarena, P. (2009) Ensayo: La matemática en el contexto de las ciencias. *Revista Innovación Educativa, "Las matemáticas y la educación"* volumen 9 (46), enero-marzo 15-25

Cañón, M., (2009) *Orientaciones didácticas al tratamiento de la longitud en la escuela: del reconocimiento de atributos a la comprensión de los procesos de conservación*. En: ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. ASOCOLME. Memorias del 9° encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Valledupar, Cesar. 141-146.

Castillo, J., Segovia, I., Castro, E., & Molina, M. (2011) *Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: Longitud y superficie*. Trabajo presentado en el Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática, Granada, 17-19 Febrero.

Castro, E., (2011) La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento*

Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Chamorro, M.,& Belmonte, J. (1991) *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid. Síntesis.

Chamorro, M., (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *UNO revista de Didáctica de las Matemáticas,* n° J, enero, 1995.31-53.

Chamorro, M. (2003) *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Colección Aulas de verano.

Colección Cuadernos de Matemática Educativa, cuaderno no. 5 (2002) *Estándares curriculares - área matemáticas: aportes para el análisis*. Asociación colombiana de matemática educativa, ASOCOLME

Colón, H. (2009*)*Desarrollodel concepto de medición en la escuela elemental. *Revista 360* n° 4

Córdoba, F.J. (2011) *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.

De Castro, C., Segovia, I & Castro, E. (2002).*Un modelo alternativo para la descripción de estrategias de estimación en cálculo*. Boletín de estudios e investigación n°3, 159-165. La Salle.

Dickson, L.; Brown, M. & Gibson, O. (1991) *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, editorial Labor, S.A

Duhalde, M.E.; & González, M. T. (1996).*Encuentros cercanos con la matemática*. Buenos Aires. Editorial Aique

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la Educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, V. 9.1. 143 - 168.

Fernández I. (2010) *Revista digital Eduinnova* n° 24, septiembre de 2010.
Recuperado dehttp://www.eduinnova.es/sep2010/09matematica.pdf

Folgueiras, P. (2009) *Métodos y técnicas de recogida y análisis de información cualitativa*. Universidad de Barcelona

Fromm, L. & Ramos, V. (2009) La práctica pedagógica cotidiana: Hacia nuevos modelos de investigación en el aula.*Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes centroamericanos de Educación Básica*; n° 8. San José, C.R

García, L; & Osorio, A. (2008) Modelos mentales sobre el concepto de medida. *Revista latinoamericana de estudios educativos*. Vol 4 n° 2, Julio-Diciembre. Manizales Caldas.

Godino, J. (2002) Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. XVI Convengo Nazionale: Incontri de la Matemática. Castel San Prieto TermeBolognaNovembre.

Godino, J.; Batanero, C. & Roa, R. (2002) *Proyecto Edumat-Maestros*.Febrero. Recuperado dehttp://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

González-López, M & Flores, P (2002) Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: el caso del volumen. Educación Matemática.

Greca, I. & Moreira, M. (1998) Modelos mentales, modelos conceptuales y modelización. Cad. Cat. *Enseñanza física*. V. 15 (2). 107-120

Gutiérrez, S. & Aparicio, D. (2007) *Caracterización de tratamientos y conversiones: El caso de la función afín en el marco de las aplicaciones*. Universidad Pedagógica Nacional. Tesis

Guzmán, M. de, (1985) *enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática, Aspectos didácticos de matemáticas*. Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza. 52-75

Izquierdo, M. & Adúriz-Bravo, A. (2005) Los modelos teóricos para la ciencia escolar. Un ejemplo de Química. *Revista Enseñanza de las Ciencias.* N° extra. VII Congreso

Kaiser, G., Morten, B. &Bharath, S., (2006) *Hacia una teoría didáctica para el modelado matemático*.Analyses ZDM Vol. 38 (2)

Katja, M.(2006) *Mathematics meets reality*, ISDDE

Manotas, M., & Rojas, C., (2008) Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios. *Zona próxima*, N.9, diciembre-sin mes. 60- 69. Universidad del Norte, Colombia.

Masoliver, J. (1974) Efectos de la ilusión volumen-peso aplicada a la conservación del peso. *Revista Latinoamericana de psicología.* V. 6(1) 67-70

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares*. *Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MinisteriodeEducación Nacional. (2002). *Estándares básicos de competencias.*Bogotá: Magisterio.

Ortiz, M. (1999) La *investigación en Educación Matemática en Colombia, 1991–1999*. Recuperado de http://portales.puj.edu.co/didactica/PDF/EstadosdeArte/EducacionMatematicasMarinaOrtiz.pdf

Otero, M. & Banks-Leite, L. (2006) Modelos mentales y modelos numéricos: Un estudio descriptivo en la enseñanza media. Relime. V. 9, (1), marzo. 151-178

Quiroz, S., Rendón, M.,& Rodríguez, R. (2011). *Las competencias de modelación matemática para el aprendizaje del cálculo de volumen con apoyo en las webquest*. Tesis de Maestría. Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey.

Recuperado dehttp://www.virtualeduca.info/fveduca/es/tematica/41/98-las-competencias-de-modelacion-matematica-para-el-aprendizaje-del-calculo-de-volumen-con-apoyo-en-las-webquest?joscclean=1&comment_id=302

Raviolo, A., Moscato, M., & Schnersch, A. (2005) *Enseñanza del concepto de densidad a través de un modelo analógico*. Revista de Enseñanza de la Física, vol. 18, N° 2 pp. 93-103

Reys, R. (1995) *Estimación. La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria, lecturas.* Primer nivel programa de actualización permanente. México D.F

Rico, L. (2005) *La competencia matemática en PISA*. Fundación Santillana, La enseñanza de las matemáticas y el informe PISA. 21-40. Madrid.

Rodríguez, Y. (2010) Actividades para desarrollar la habilidad de estimar, con las unidades de longitud en escolares de 5° grado de la educación primaria. *Revista Varela*, N. 27 septiembre-diciembre. Universidad de ciencias pedagógicas Félix Varela.

Roig, A. & Llinares, S.(2004)*Dimensiones de la competencia matemática alfinalizar la educación secundaria obligatoria*.*Caracterización y análisis*. Departamento de Innovación y Formación Didáctica Universidad de Alicante.

Sáiz, M. (2003) Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. *Revista mexicana de investigación educativa*, mayo-agosto. V. 8 (018). México, D.F, México 447-478

Sáiz, M,. (s.f) El volumen ¿por dónde empezar?

Recuperadodehttp://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf

Salazar, M., Martinic, S. & Maz, A. (2011) Avances de una investigación sobre los modelos, representaciones y recursos utilizados por profesores de primaria para las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A, Maz (Eds), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática-2011*. 39-47. Granada, dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Samper, C., Camargo, L.& Leguizamón, C,. (2003) *Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría*. Colección: Cuadernos de Matemática Educativa. ASOCOLME. Cuaderno número 6. pp. 60

Sanmiguel, A. & Salinas, M. (2011) Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2° de ESO relacionadas con el concepto de volumen y su medida. En Marín, M; Fernández, G.; Blanco, L.; Palarea, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*.543-554. Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Saucedo, G. (2009) Hacia la construcción del concepto de volumen. En Zapico, I., & Tajeyan, S. (Ed.),*Acta de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática*. República Argentina, ciudad de Buenos Aires: SOAREM.Sociedad Argentina de Educación Matemática

Segovia, I. & De Castro, C (2007). La investigación en estimación en cálculo. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cazares Solórzano.* 213-236. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Recuperado dehttp://eprints.ucm.es/12834/1/Segovia_y_De_Castro_2007.pdf

Segovia, I. & Castro, E., (2009)*La estimación en el cálculo y la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la*

Matemática de la Universidad de Granada. Recuperadode http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/articulos/17/espannol/Art_17_329.pdf

Solé, I. (1991) *¿Se puede enseñar lo que se ha de construir?* Cuadernos de Pedagogía N° 188, 33-35

Tamayo, O. et all. (2011) *La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación.*Colciencias, proyecto n° 1219-11-17061

Terricabras, J. (1999) *Atrévete a pensar: la utilidad del pensamiento riguroso en la vida cotidiana*. Barcelona. Pidós.

Trigueros, M., (2009). Eluso de La modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Innovación educativa*, V. 9(46) enero-marzo 75-87

Vasco, C. E. (1994). *El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. En M.E.N: un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*. vol II. Bogotá: Serie Pedagogía y Currículo.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Revista Tecno Lógicas*63-85

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrío, M., Osorio, A. &Ocampo, D. (2009). *El proceso de modelación matemática. Una mirada a la práctica del docente*. En Leston, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME, 22. 1443-1451. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa - Colegio Mexicano de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrío, M., Osorio, J. & Ocampo, D., (2009) Sentido de realidad y modelación Matemática: el caso de Alberto. *Alexandríarevista de Educación en ciencia y tecnología*. V. 2(2), 159 – 180 Julio.

Villa-Ochoa, J., Ruíz, H. (2009) Modelación en Educación Matemática: una miradadesde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad Católica del norte* Nº 27, mayo – agosto, pp. 4. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102/203

Villa-Ochoa, J.A; Rojas, C; Cuartas, C; (2010) ¿Realidad en las matemáticas escolares?: reflexiones acerca de la "realidad" en modelación en Educación Matemática. *Revista virtual Universidad católica del Norte*. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/70

Anexo A. Diseño curricular del plan integral de área.

	COLEGIO DEL SAGRADO CORAZÓN DE JESÚS - HERMANAS BETHLEMITAS	Código: PGF-01-R02
	PLANES INTEGRALES DE AREA (Álgebra)	Versión: 07 Pág. 4 de 4

GRADO 9° PERIODO 4

ESTÁNDARES	LOGROS	CONTENIDOS	COMPETENCIAS
PENSAMIENTO MÉTRICO Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión adecuados. Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.	Solucionar situaciones problémicas hallando volúmenes.	• Unidades de medida para volumen. • Volumen de cuerpos geométricos. • Estimación indirecta de medidas.	• Reconoce el desarrollo de poliedros y determina su volumen.

Elaborado por:	**Aprobado por:**
Lic. YANETH MILENA AGUDELO MARÍN	

Anexo B. Contrato de trabajocooperativo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

CONTRATO DE TRABAJO COOPERATIVO

Objetivos:

✓ El equipo es el que avanza:

→ Cooperando con la realización de las actividades.

→ Ayudándose dentro del equipo cuando alguien tiene dudas.

→ Colaborando para mantener un buen ambiente de trabajo en el equipo y en el aula.

→ Esforzándose para que el trabajo de equipo sea constante en todos sus miembros

✓ El equipo se ha de organizar:

→ Teniendo siempre el material necesario para trabajar organizado y preparado.

→ Responsabilizándonos de los trabajos a realizar.

✓ La comunicación requiere:

→ Hablar con voz normal.

→ Escuchar a los compañeros y a la profesora.

→ Colaborar con el equipo en la solución de problemas y trabajos.

✓ El equipo se compromete a respetar y cumplir los acuerdos de este contrato. Este contrato podrá ser revisable, flexible y adaptable.

Estudiantes:

____

____

Fecha:_____________

Anexo C. Actividad experimental

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

A continuación se presenta la secuencia a seguir para la actividad experimental.

Según los equipos conformados, trabajar en el seguimiento de las instrucciones para llevar a cabo la actividad.

SOLUCIONES PARA EMPACAR

En la asignatura de Emprendimiento ustedes debieron plantear una serie de propuestas para crear empresa. Entre las propuestas ofrecidas se encontraron mermeladas, aceites corporales, bebidas naturales, velas y velones, pasteles, crepes, postres y hasta humus. Sin embargo, ahora, el reto consiste en encontrar la forma de diseñar y construir soluciones específicas de empaque, de tal forma que se satisfagan aspectos como el volumen ocupado y la forma, necesarios para hacer rentable la propuesta de empresa y los requerimientos de los posibles clientes, ofreciéndoles una amplia gama de envolturas para sus productos.

1. De acuerdo a las características de los empaques que el equipo ha decidido elaborar, completar la siguiente tabla:

Cuerpo	Número de vértices	Número de aristas	Número de caras	Forma de las caras	Volumen

2. Elaborar el modelo de empaque elegido por el equipo de trabajo, teniendo en cuenta las necesidades propias detectadas según el producto (longitud de sus aristas, área de sus caras, volumen ocupado).

Reflexión: ¿Reviste alguna importancia el uso de cálculos exactos o de cálculos aproximados en el diseño del modelo del empaque? Expliquen.

3. Si decidieran cambiar las longitudes de las aristas en los moldes empleados para diseñar por ejemplo, un molde con una base cuya área sea mayor y sus caras con menor base o viceversa,
    a. ¿Qué factores creen que incidan en las posibles diferencias?
    b. ¿Cómo podrían estimar los cambios en el volumen?
    c. ¿Existe una solución única para resolver esta situación?
    d. Nuevamente, ¿reviste alguna importancia el uso de cálculos exactos o de cálculos aproximados en el nuevo diseño del modelo del empaque? Expliquen.

Anexo D. Cuestionario diagnóstico

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

Estimada estudiante: El cuestionario que tiene en sus manos se ha desarrollado con el fin de recoger información para llevar a cabo un estudio académico de tipo investigativo, por tal motivo, se garantiza su privacidad y su confidencialidad. Gracias por su participación.

Nombre: ___________________________________

Materiales:

- ✓ Vaso plástico
- ✓ Botella plástica
- ✓ Pegante cilíndrico
- ✓ Recipiente graduado
- ✓ Caja metálica
- ✓ Gorro para fiestas infantiles

Tiempo: Una hora clase (45 minutos)

1. Observe el vaso plástico que se encuentra sobre la mesa en el centro del salón. ¿Cuántos vasos llenos de agua como el que hay en la mesa cree puede contener la botella plástica?
2. Cuanta cantidad de pegante cree que cabe en el pegante cilíndrico que hay sobre la mesa. Explique cómo lo hizo.
3. Si se considerara que el salón de clase es una piscina, ¿Cuánta cantidad de agua se necesitaría para llenarlo? Explique los procedimientos que usó para llegar a esa conclusión.
4. La profesora estimó que el volumen de la piedra que está sobre la mesa es 10 cm^3. El procedimiento que llevó a cabo fue: usando un recipiente graduado, con agua, sumergió la

piedra y después midió cuánto subía el nivel del agua. ¿Cree que esta estrategia es apropiada para encontrar el volumen?, Compruebe y explique.

5. Si fuera a llenar de arena un dado para jugar parqués, ¿Qué medidas tendría en cuenta para conocer la cantidad de arena que requiere? ¿Qué instrumentos de medición utilizaría? ¿Cuántos centímetros cúbicos cree que puede contener el dado?
6. En la publicidad que ofrece "tudespensa.com"[4], se describe el volumen de la chocolatina toblerone como: *Volumen: Pack3x50gr*. ¿Para usted qué significa esa expresión?
7. Cite 2 objetos o elementos cuyo volumen aproximado sea 1 m^3
8. ¿Considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Explique
9. Si le solicitaran diseñar una caja para transportar animales encerrados por un periodo corto de tiempo, de tal forma que pudiera contener aproximadamente 6000 dm^3 de aire, ¿Cuáles serían las dimensiones en dm que usaría?

[4] Consultada el 3 de agosto de 2012. Disponible en: http://www.tudespensa.com/supermercado/alimentacion/chocolates-y-dulces/chocolatinas/22152-toblerone/

Anexo E. Cuestionario de validación

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

CUESTIONARIO DE VALIDACIÓN

Estimada estudiante: El cuestionario que tiene en sus manos se ha desarrollado con el fin de recoger información para llevar a cabo un estudio académico de tipo investigativo, por tal motivo, se garantiza su privacidad y su confidencialidad. Gracias por su participación.

Integrantes del equipo: ____________________________________

Entre las ideas sugeridas por los sub-grupos para empacar los productos que se propusieron en la asignatura de Emprendimiento se cuentan en mayor cantidad las cajas de cartónplegadizas. Según lo sugerido por su grupo,respondan el siguiente cuestionario.

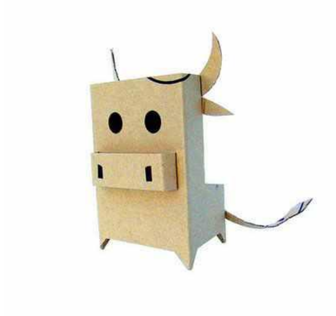
1. En uno de los equipos conformado por sus compañeras se decidió que el empaque ideal para su producto, tendría el mismo tamaño y forma que la caja destinada para el reciclaje de papel que hay en el salón de clase.

    a. Estimen su volumen.
    b. Describir el procedimiento o razonamiento llevado a cabo para obtener la estimación de su volumen.

   Explicar por escrito cada uno de los procedimientos o razonamientos llevados a cabo para obtener los volúmenes.

2. Uno de los diseños que más llamó la atención fue este, construido con base en un modelo encontrado en internet[5]:

[5] Tomado de http://helektron.com/obras-de-arte-hechas-con-cajas-de-carton/



Las estudiantes que lo diseñaron, decidieron realizarlo tomando como base objetos conocidos tales como:

- Hocico: borrador del tablero.
- Cuerpo: libro "Álgebra de Baldor"
- Patas traseras: sanduchera (como la que está sobre el pupitre del profesor)

a. Según los datos ofrecidos, estimar el volumen total del diseño.

Describir el procedimiento o razonamiento llevado a cabo para obtener la estimación de su volumen.

3. Estimar el volumen ocupado del clóset que hay en el salón.
4. Estimar el volumen ocupado del baúl que en clase de artística decoró Melissa