



REGULACIÓN METACOGNITIVA Y LOS NIVELES DEL MODELO DE VAN HIELE
EN EL APRENDIZAJE DE LOS CUADRILÁTEROS

EDGAR ALEXANDER ACEVEDO VELANDIA
ESTEFANIA OSORIO JAIMES

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES O EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2018

REGULACIÓN METACOGNITIVA Y LOS NIVELES DEL MODELO DE VAN HIELE
EN EL APRENDIZAJE DE LOS CUADRILÁTEROS

EDGAR ALEXANDER ACEVEDO VELANDIA
ESTEFANIA OSORIO JAIMES

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias

Tutora

Mgr. SANDRA QUINTERO CORREA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES O EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2018

DEDICATORIA

A:

Dios por darme cada día fortaleza y confianza, por acompañarme en cada paso y por la bendición de la vida y sabiduría para culminar con un éxito más.

Mis padres por ser de gran bendición, su apoyo y entrega siempre me ayudan a seguir adelante, gracias por tanto amor.

Mis hermanos por brindarme ánimo y apoyo incondicional en todas las metas que me he propuesto.

Mi esposo por motivarme a continuar, por sus consejos y dedicación constante durante todo el proceso.

A mi hija, Niah Antonella que soportó todo este proceso desde el vientre, ha sido el motor y la fuerza para continuar hasta el final. Por ella y para ella es este logro.

Estefanía Osorio

A:

Dios por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

Mis padres por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.

Edgar Acevedo

AGRADECIMIENTOS

Gracias, de corazón, a nuestra tutora Mg. Sandra Quintero Correa por su dedicación y paciencia. Su apoyo, su criterio y motivación han permitido concluir este proyecto; ha sido una bendición contar con su guía.

Gracias, a todos los docentes de la universidad Autónoma de Manizales, por la formación y enseñanzas que aportaron, material muy relevante para la realización de este proyecto. Y a todo el personal administrativo por su orientación y disponibilidad constante.

Gracias a todas y todos, quienes de una u otra forma han colocado un granito de arena para el logro de este proyecto, agradecemos de forma sincera su colaboración.

RESUMEN

Objetivo: Analizar la incidencia que tiene la regulación metacognitiva en el proceso de aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo Van Hiele en estudiantes del grado 6°, de la I.E. Jorge Eliecer Gaitán del municipio de Aguazul (Casanare).

Metodología: El proyecto de investigación se fundamentó en el enfoque cualitativo con carácter descriptivo, donde se exploró ideas previas y se aplicó una unidad didáctica para el desarrollo de la regulación metacognitiva en los estudiantes del grado 6°, el concepto fue los cuadriláteros, con el fin de identificar la planeación, monitoreo y evaluación a partir de los niveles del modelo Van Hiele.

Resultado: Los procesos de la regulación metacognitiva (planeación, monitoreo y evaluación) permitieron mejorar la capacidad de resolver problemas de cuadriláteros basados en los niveles de reconocimiento, análisis y clasificación del modelo Van Hiele.

Conclusión: los estudiantes a través de la regulación metacognitiva fueron capaces de adaptar sus estrategias a la demandas de los problemas, aprovecharon al máximo sus recursos cognitivos, son conscientes de lo que hacen y porqué lo hacen, ahora son más reflexivos y organizados al planear, se muestran motivados por aprender y comprometidos con su proceso de aprendizaje.

Palabras Claves: Cuadriláteros, Niveles modelo Van Hiele y Regulación metacognitiva

ABSTRACT

Objective: Analyze the incidence of metacognitive regulation in the learning process of the quadrilaterals from the levels of the Van Hiele model in students of the 6th grade, of the I.E. Jorge Eliecer Gaitán from the municipality of Aguazul (Casanare).

Methodology: The research project was based on the qualitative approach with a descriptive character, where previous ideas were explored and a didactic unit was applied for the development of metacognitive regulation in the 6th grade students, the concept was the quadrilaterals, in order to identify the planning, monitoring and evaluation based on the levels of the Van Hiele model.

Results: the processes of metacognitive regulation (planning, monitoring and evaluation) allowed to improve the ability to solve quadrilateral problems based on the levels of recognition, analysis and classification of the Van Hiele model

Conclusion: Students through metacognitive regulation were able to adapt their strategies to the demands of the problems, made the most of their cognitive resources, are aware of what they do and why they do it, now they are more reflective and organized when planning, they show Motivated by learning and committed to their learning process.

Keywords: Quadrilaterals, Van Hiele Levels and Metacognitive Regulation

CONTENIDO

1. PRESENTACIÓN	12
2. ANTECEDENTES	14
3. ÁREA PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.....	20
4. JUSTIFICACIÓN.....	23
5. REFERENTE TEÓRICO	25
5.1 Modelo de Van Hiele	25
5.2 Metacognición.....	31
6. OBJETIVOS	12
6.1 Objetivo general.....	12
6.2 Objetivos específicos	12
7. METODOLOGÍA.....	12
7.1 Enfoque de la investigación	12
7.2 Contexto.....	13
7.2.1 Unidad de trabajo	13
7.2.2 Unidad de análisis	13
7.3 Categorías de análisis.....	14
7.4 Técnicas e instrumentos para la recolección de información	15
7.4.1 El cuestionario.....	15
7.4.2 Observación participante.....	16
7.4.3 Unidad didáctica.....	16

7.4.4 Entrevista semi-estructurada	17
7.5 Procedimiento para la recolección de la información.....	17
7.6 Técnicas y procedimientos para el análisis de la información.....	19
8. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	12
8.1 MOMENTO DE UBICACIÓN	12
8.1.1 Análisis de las dificultades según los niveles del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los cuadriláteros	12
8.1.2 Análisis de la categoría de regulación metacognitiva	26
8.2 MOMENTO DE DESUBICACIÓN.....	31
8.2.1 Análisis de las dificultades según los niveles del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los cuadriláteros	31
8.2.2 Análisis de la categoría regulación metacognitiva	44
8.3 MOMENTO DE REENFOQUE.....	49
8.3.1 Análisis de las dificultades según los niveles del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los cuadriláteros	49
8.3.2 Análisis de la categoría regulación metacognitiva	53
8.3.3 Entrevista semiestructurada.....	55
6. CONCLUSIONES.....	12
7. RECOMENDACIONES	12
8. REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍAS	12
9. ANEXOS	12

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Categorías, subcategorías e indicadores de análisis	14
Tabla 2. Pregunta 1 cuestionario los cuadriláteros I	13
Tabla 3. Pregunta 2 cuestionario los cuadriláteros I	14
Tabla 4. Pregunta 3 cuestionario los cuadriláteros I	15
Tabla 5. Pregunta 4 cuestionario los cuadriláteros I	16
Tabla 6. Pregunta 5 cuestionario los cuadriláteros I	18
Tabla 7. Pregunta 6 cuestionario los cuadriláteros I	19
Tabla 8. Pregunta 7 cuestionario los cuadriláteros I	21
Tabla 9. Pregunta 8 cuestionario los cuadriláteros I	22
Tabla 10. Pregunta 9 cuestionario los cuadriláteros I	23
Tabla 11. Pregunta 10 cuestionario los cuadriláteros I	25
Tabla 12. Preguntas de planeación momento de ubicación	27
Tabla 13. Preguntas de monitoreo momento de ubicación	29
Tabla 14. Preguntas de evaluación momento de ubicación	30
Tabla 15. Reconocer un cuadrilátero por su forma global	32
Tabla 16. Actividad II. Descubrir, comprender y reconocer la forma de los cuadriláteros	33
Tabla 17. Actividad IV. Aprendizaje de un vocabulario matemático básico	34
Tabla 18. Identificar las propiedades principales de los cuadriláteros	37
Tabla 19. Establecer y definir elementos y propiedades	39
Tabla 20. Establecer relaciones de inclusión de las propiedades	41
Tabla 21. Demostraciones de manera intuitiva e informal	43
Tabla 22. Preguntas de evaluación momento de desubicación	47
Tabla 23. Muestra de las preguntas y respuestas concernientes al nivel 1	50
Tabla 24. Muestra de las preguntas y respuestas concernientes al nivel 2	51
Tabla 25. Muestra de las preguntas y respuestas concernientes al nivel 3	52
Tabla 26. Respuestas entrevista semiestructurada	55

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Respuesta E.1 pregunta 10	28
Figura 2. Actividad V, clasificación de los cuadriláteros	36
Figura 3. Respuesta E2 Actividad IV	45
Figura 4. Respuesta E4 Actividad V	46

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo 1. Formato de unidad didáctica	12
Anexo 2. Momento de ubicación	20
Anexo 3. Momento de desubicación	26
Anexo 4. Momento de Reenfoque	44
Anexo 5. Entrevista semiestructurada	51

1. PRESENTACIÓN

Esta investigación tuvo como objetivo analizar la incidencia que tiene la regulación metacognitiva en el proceso de aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo Van Hiele en estudiantes del grado 6°, de la I.E. Jorge Eliecer Gaitán del municipio de Aguazul (Casanare). El enfoque que se utilizó fue el cualitativo con carácter descriptivo y el diseño metodológico estudio de casos, en el cual se analizaron cuatro estudiantes del grado 6°.

La investigación se desarrolló en tres momentos: el primero, denominado de ubicación, en donde se aplicó un cuestionario para identificar las dificultades según los niveles de razonamiento del modelo Van Hiele y por otro lado, se indagó respecto a las estrategias de planeación, monitoreo y evaluación presentes en cada uno de los estudiantes mientras abordaba la solución de un problema de cuadriláteros; el segundo momento, de desubicación, en donde se aplicó la unidad didáctica basada en los niveles del modelo Van Hiele, teniendo en cuenta múltiples lenguajes (discurso oral, escrito, gestos, imágenes, diagramas, entre otros), mediante el cual los estudiantes expresaron las respuestas de los problemas planteados; además, en el desarrollo de las actividades se realizaron preguntas relacionadas con los procesos de regulación metacognitiva con el propósito de identificar en cada uno de los estudiantes, cómo iban evolucionando conceptualmente; y finalmente el momento de reenfoque donde se cuestionó al estudiante acerca de la efectividad de las actividades realizadas y los cambios observados en el proceso.

El análisis de los datos se realizó a través de un proceso de triangulación, el cual se llevó a cabo mediante el contraste de la información procedente de los instrumentos, en el cual se mostraron las diferentes respuestas y los procesos llevados por los estudiantes; así mismo, de las entrevistas y de los gráficos realizados por los estudiantes.

El presente documento, contiene un informe de ocho capítulos, los cuales recopilan todo el proceso investigativo llevado a cabo, el primer capítulo hace referencia a las investigaciones realizadas a nivel internacional y nacional sobre el modelo de Van Hiele y metacognición, en el capítulo segundo se presenta el planteamiento del problema, en el tercero la justificación del estudio, y en el cuarto se desarrolló el tema de estudio en un marco teórico a fin de establecer las bases para la posterior consecución de objetivos y la comprensión de resultados.

En el quinto capítulo los objetivos sobre los cuales se orientó la investigación, en el sexto capítulo contiene el diseño metodológico que integra los apartados de enfoque y tipo de investigación, población, categorías de análisis, fases de la investigación y la estructura de la unidad didáctica. En un séptimo capítulo, se presenta el análisis de los resultados de la investigación, los cuales fueron producto de la recolección, el análisis y la triangulación de la información, permitiendo llegar a la discusión de cada una de las subcategorías determinadas para el estudio. Finalmente en los capítulos octavo y noveno se presenta las conclusiones y recomendaciones, como complemento al documento se señala la bibliografía incluida en todo el documento.

2. ANTECEDENTES

A continuación, se describirán los trabajos de investigación que servirán como referencia para la elaboración del presente proyecto, recopilando resultados obtenidos en la aplicación de los diferentes referentes conceptuales: modelo de Van Hiele, la metacognición y el aprendizaje de los cuadriláteros.

A través de los años se han desarrollado investigaciones con relación a las estrategias metodológicas empleadas por los docentes, la necesidad de transmitir estos modelos posibilita el desarrollo de los procesos educativos que inicialmente fueron de carácter oral, pero con el tiempo fueron generando una práctica profesional como lo es la pedagogía que aplica, conceptualiza y experimenta los conocimientos referentes al aprendizaje de los saberes. Una de estas estrategias didácticas es el Modelo de Van Hiele, que tiene su origen en 1957, en las disertaciones doctorales de Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele en Holanda, donde se establece que el aprendizaje de la geometría se logra pasando por los diferentes niveles de pensamiento, la implementación de este modelo ha logrado buenos resultados que se pueden evidenciar en varias investigaciones.

Entre estas investigaciones se tiene la de Cabellos (2013), quien realizó una investigación titulada “la modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri”, en ella se pretendía implementar la modelización teórica de Van Hiele a partir del aprendizaje constructivo a través del software Cabri y realizar un proceso de experimentación exhaustivo en entornos reales de aula que permitan obtener resultados descriptivos en este ámbito, comprobar la eficacia de la enseñanza de la Geometría en primer curso de ESO con este modelo y el uso del software Cabri y establecer criterios y prescripciones instructivas a partir de la investigación realizada para desarrollar un programa de mejora de la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria basado en el modelo de Van Hiele, en el uso de Cabri y en la detección de errores de comprensión. El autor empleó dos instrumentos metodológicos; el primero, un cuestionario de detección de errores (y de imágenes

conceptuales) que sirven para medir el rendimiento en Geometría y, el segundo, unas unidades didácticas, basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y elaboradas teniendo en cuenta dichas imágenes conceptuales y errores, y utilizando el software de Geometría Dinámica Cabri. Los resultados obtenidos fueron: el rendimiento de los alumnos en Geometría mejora si se establece una docencia basada en el conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos y en la detección de errores, desarrollada con una metodología diseñada según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, y apoyada en un software de Geometría Dinámica, el rendimiento de los alumnos en Geometría no depende del género y a pesar del estudio de la asignatura, los alumnos mantienen errores en la visualización y reconocimiento de objetos geométricos desde Segundo Ciclo de Primaria, lo cual supone que el diseño curricular o la metodología empleada no son las adecuadas.

Así mismo el trabajo realizado por Ixcaquic (2015) “Modelo de Van Hiele y geometría plana” que tuvo como objetivo verificar como la aplicación del modelo de Van Hiele se relaciona con el aprendizaje de la Geometría Plana. Este estudio se realizó a 29 estudiantes de primero básico del Instituto Nacional de Educación de Telesecundaria del paraje Tzanjuyub, Aldea Paxixil, municipio de San Francisco El Alto departamento de Totonicapán (Guatemala), se aplicaron dos pruebas objetivas, una de entrada y una de salida. La primera consta de 15 ítems se elaborará y aplicará con el objetivo de determinar los conocimientos previos que posee el educando en el tema de Geometría Plana mientras que la de salida recoge información sobre los conocimientos adquiridos del tema la Geometría Plana, luego de haber desarrollado las actividades propuestas. Esta investigación cuasi - experimental comprobó efectivamente que existe una diferencia estadísticamente significativa entre los resultados del pretest y postest del modelo de Van Hiele. Dicho modelo incide en la enseñanza de la Geometría Plana, para desarrollar el razonamiento lógico del alumno.

Del mismo modo los autores Lemos y Quintana (2012), realizaron un proyecto de investigación que tuvo como estrategia el modelo de Van Hiele en el desarrollo del

pensamiento espacial por medio del esquema corporal. Se buscó interpretar la implementación de estrategias didácticas fundamentadas en los niveles (visualización y análisis) y las fases de aprendizaje de Van Hiele, utilizando el esquema corporal para el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de segundo grado de la institución educativa sur oriental de la ciudad de Pereira.

Los resultados finales mostraron que pocos estudiantes comparan y clasifican objetos y de igual manera, una pequeña población tiene percepción visual y global, pero la mayoría si identifica los componentes de un todo. Los autores Lemos y Quintana concluyen que aunque hallan estrategias buenas, esto no implica que el resultado sea el esperado, responsabilizan al docente ya que es quien debe saber trabajarlas y adaptarlas al aula teniendo en cuenta los intereses y las necesidades de la población.

De los antecedentes mencionados anteriormente, se puede concluir que la implementación de estrategias didácticas basadas en el modelo de Van Hiele, mejora el proceso de aprendizaje en los estudiantes, permitiendo un desarrollo del pensamiento espacial.

Por otra parte se muestran a continuación los registros encontrados de investigaciones realizadas sobre metacognición que servirán para el presente proyecto.

El autor Sua (2015), presentó una propuesta en donde su objetivo es indagar los procesos cognitivos y metacognitivos con respecto a los enunciados geométricos, en un entorno de ambientes virtuales que integran representaciones geométricas, esta llevó por nombre “la demostración en geometría: Procesos cognitivos y metacognitivos favorecidos por la inclusión de ambientes dinámicos”, y en ella se presenta una revisión bibliográfica que servirá para los ambientes de geometría dinámicas, y poder adoptar una postura frente resolución de problemas y los panoramas frente a la cognición y metacognición, así como propuestas de intervención que apoyan el aprendizaje de la demostración.

En este sentido él da a conocer unas propuestas de intervención, en donde el software atiende a la necesidad de apoyar la diferencia de los estudiantes, considerando el autor que muchos estudiantes, aquellos con menos habilidades, en donde este software promueve en cada estudiante habilidades y aprendizajes sin ser sustituido el profesor.

De igual forma, los autores Valencia, Nilson; Sanabria, Luis y Ibáñez, Jaime (2010), en su estudio: procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. La investigación estudió la comprensión de conceptos en un contexto de solución de problemas de geometría que van de lo simple a lo complejo o viceversa, adjunto a esto describieron estrategias cognitivas y en algunos casos metacognitivas que sigue al estudiante en su proceso de aprendizaje.

La investigación se realizó con estudiantes de grado séptimo de educación básica, que presentaban conocimientos básicos en geometría y se dividieron en dos grupos, el ambiente de aprendizaje computacional se elaboró en el lenguaje de programación orientado a objetos *OpenScript de toolbook instructor 2004*, Los resultados de esta investigación muestran que la interacción de los estudiantes en la solución de problemas gráficos que van de los estudiantes en la solución de problemas gráficos que van de lo simple a lo complejo y viceversa, no muestran diferencias significativas y en relación a la comprensión de conceptos, ellos establecieron que el nivel de aprendizaje obtenido por los estudiantes cuando interactuaron con el ambiente computacional con apoyo de guías fue menor, concluyendo que las ayudas y la orientación del docente son un poderoso motivador en el aprendizaje.

Así mismo, Troncoso (2013). Realizo un proyecto titulado “Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas: una intervención en el aula para determinar la implicación de la implementación de estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas”, la investigación se fundamenta en la implementación de una estrategia metacognitiva y se desarrolla con estudiantes de grado sexto en la zona rural del departamento del Tolima.

El investigador realizó dos pruebas para establecer el progreso y mejora de los estudiantes en la resolución de problemas, arrojando como resultados una afectación positiva en el aprendizaje de los estudiantes, permitiendo establecer que la metacognición jugó un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas.

Además de las anteriores referencias, se vinculan a la presente propuesta los antecedentes relacionados con el aprendizaje de cuadriláteros.

La investigación realizada por González (2015) fue titulada “Errores y dificultades más comunes en el aprendizaje de cuadriláteros: una muestra con alumno de 9/12 años en Cantabria”. Y en esta se describen y explican la presencia de los errores en el aprendizaje de conceptos geométricos. Ellos emplearon como herramienta cuestionarios diseñados por el autor y aplicados a estudiantes de diferentes grados.

Y su investigación deja evidenciado que los alumnos de cuarto como los de sexto, tienen una imagen conceptual pobre o incorrecta de los cuadriláteros, también demostraron que en muchas ocasiones aparecen distractores de orientación y estructuración. Toda esta investigación confirma el papel que juega la imagen mental del alumno, y la necesidad de proporcionar una gran cantidad de ejemplos diferentes a la hora de introducir un concepto nuevo con el fin de que el estudiante lo adquiera correctamente.

También Maguiña (2013) en la tesis titulada Una Propuesta Didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo de Van Hiele, en su estudio tipo cualitativo cuyo objetivo fue diseñar una propuesta didáctica, según el modelo de Van Hiele, promueve que los estudiantes del cuarto grado de secundaria alcancen el nivel 3. También menciona el uso del software de geometría dinámica GeoGebra. El estudio se realizó en la Institución Educativa Particular Buenas Nuevas ubicada en el distrito San Miguel, Lima, Perú, utilizó un instrumento que consistió en una prueba de entrada y una de salida, con diez ítems cada una. Con una muestra de 10 sujetos, la cual fue seleccionada a través del tipo voluntario. En donde se concluyó que la idea didáctica diseñada para la enseñanza de los cuadriláteros

establecida en el modelo de Van Hiele y con apoyo del software GeoGebra, ha logrado que los estudiantes adquieran los niveles de reconocimiento al pasar del nivel medio a un nivel superior.

Se menciona también el alcance del nivel I y nivel II de una forma más fácil, no así en el nivel III que en la duración de su enseñanza es un poco más lenta. Se alcanzó una enseñanza avanzada con los discentes, en el desarrollo de su lenguaje geométrico, en su forma de adquirir los conocimientos, aunque no se obtuvo un cien por ciento al nivel que planteaba la pregunta. Exhorta también que este modelo se puede adaptar a otros temas relacionados con la Geometría. Que las actividades desarrolladas se pueden mejorar para que el estudiante pueda llegar a tener un nivel más alto de conocimiento y desarrollar adecuadamente las habilidades que aún no ha alcanzado.

Todos estos aportes de los diferentes autores, tratan de la implementación de una propuesta didáctica basada en el Modelo de Van Hiele, aunque estas investigaciones se realizaron en diferentes contextos, niveles académicos y objetos de estudios, se evidencia la importancia de la innovación pedagógica, en varios de estos estudios se utilizaron tanto recursos físicos como tecnológicos (software Cabri y Geogebra), que ayudaron a desarrollar en los estudiantes el pensamiento geométrico, ubicándolos en niveles más altos de conocimiento, de esta manera, se pueden adoptar algunos recursos presentados en estos trabajos, con la finalidad de mejorar las prácticas en el aula y tomar unos elementos de estas investigaciones para la elaboración de una unidad didáctica basada en el Modelo de Van Hiele, para el proceso de enseñanza de los cuadriláteros en el aula de clases, y así incentivar a los estudiantes con actividades que llamen su atención de tal manera que representen un mejoramiento significativo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

3. ÁREA PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Para poder entender las dificultades que poseen los estudiantes al aprender geometría, es necesario mostrar la situación que existe en torno a la enseñanza de la misma, y como estas dificultades se viven de cerca en las diferentes instituciones educativas del país.

Básicamente una de estas situaciones de acuerdo con Barrantes y Blanco (2004), es debido a las concepciones y experiencias que los docentes adquirieron en su formación, ya que planean sus clases y emplean los mismos recursos que experimentaron cuando eran estudiantes; es decir, debido a sus concepciones y creencias personales, les impide a los docente llevar a cabo experiencias de aprendizajes enriquecedoras que guíen al estudiante al descubrimiento de la geometría como generadora de conocimiento.

(...) nuestro estudio nos muestra, a pesar de los esfuerzos de los investigadores por presentar nuevos métodos, recursos o materiales sobre enseñanza de la geometría, que muchos estudiantes siguen llegando a las facultades con las mismas experiencias, falta de conocimientos y concepciones sobre la geometría y su enseñanza que hace unos años, lo que indica que se sigue enseñando igual que antes de tales reformas. (Barrantes y Blanco, 2004, p. 249)

Así mismo, otra situación que provocó dificultades en el aprendizaje de la geometría, como lo señalan los autores Barrantes y Blanco (2004), se debe a que desde la década de los setenta la geometría pasó a un segundo plano en el ámbito escolar, debido al auge de las matemáticas modernas; es decir, se le daba más importancia a los contenidos del componente numérico, dejando al final los contenidos geométricos, por lo que en muchas situaciones no se abarcaban dichos temas.

Esta circunstancia dio lugar a que los estudiantes para maestros llegaran a los centros de educación con un conocimiento casi nulo de la geometría y sin apenas referentes sobre su enseñanza-aprendizaje. La formación posterior que recibieron como estudiantes para maestro estaba más relacionada con otros temas, como el numérico, que con la geometría y su enseñanza-aprendizaje. (Barrantes y Blanco, 2004, p. 248)

Teniendo en cuenta lo anterior, es de gran importancia darle a la geometría un lugar destacado en la clase de matemáticas, los docentes requieren aplicar nuevas estrategias didácticas que les permitan lograr que los estudiantes descubran fácilmente que la geometría es una herramienta para la vida. Una estrategia didáctica específica que permite el aprendizaje de la geometría según Goncalves (2006), es el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele.

El modelo de Van Hiele es una estrategia metodológica, que tiene como fin el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes; de acuerdo con los esposos Van Hiele (1986) muchos estudiantes presentan dificultades porque pueden reconocer un cuadrado, pero no logran definirlo, también notaron que los estudiantes no entienden que el cuadrado es un rectángulo, y otros se quejan por tener que demostrar algo que ya “saben” (Van H:39-40).

Según Ixcaquic (2015) otras de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas geométricos son:

- Dificultad al identificar figuras geométricas en dibujos, conjuntos determinados y en objetos físicos que los rodean
- Usan un vocabulario inapropiado para los elementos y relaciones de las figuras geométricas
- Problemas para realizar clasificaciones lógicas de manera formal
- Mínimo reconocimiento de las características de una definición formal (p.44)

Del mismo modo, en el aprendizaje de los conceptos geométricos, los estudiantes también presentan algunas dificultades, específicamente en los cuadriláteros. Algunos de los errores que se presentan los educandos con los cuadriláteros, según González (2015) son:

1. Errores en la identificación de cuadriláteros, siendo cóncavos o no.
2. Errores en la identificación de rombos.

3. Errores en la identificación de rectángulos.
4. Errores en la identificación de trapecios. (p.20)

Por otro lado, los estudiantes también presentan dificultades al resolver problemas geométricos porque son pocos reflexivos, no analizan las dificultades presentadas en el proceso, no comprenden los pasos realizados, no corrigen los errores, no evalúan su desempeño; es decir, no realizan una regulación metacognitiva de su aprendizaje; sumado a esto los docentes dejan a un lado la implementación de la metacognición, la cual permite a los estudiantes aprender a aprender. En este sentido, Flórez (2000) señala que: “La metacognición se refiere a los conocimientos que las personas tienen sobre su propia cognición, motivándolas a prever acciones y a anticipar ayudas para mejorar su rendimiento y resolver mejor los problemas” (p. 5).

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la presente investigación pretende dar respuesta a la pregunta: *¿Qué incidencia tiene la regulación metacognitiva en el proceso de aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo Van Hiele en estudiantes del grado 6º, de la I.E. Jorge Eliecer Gaitán del municipio de Aguazul (Casanare).?*

4. JUSTIFICACIÓN

En la actualidad, se reconoce que la geometría tiene gran importancia y conveniencia, debido a los diferentes usos que se evidencian en objetos y estructuras que circundan el entorno de las personas, por tal razón esta rama de la matemática pasa por un momento de auge y esplendor; en el ámbito de la educación, se hace necesario aplicar y verificar modelos de aprendizaje, que permitan en los educandos realizar actividades de experimentación con objetos del espacio de diferentes formas y representaciones, que ayuden a establecer similitudes, diferencias, relaciones y transformaciones, permitiendo de esta forma la visualización y reconocimiento de la figuras geométrica, luego el estudiante estará en capacidad de analizar las propiedades particulares de cada figura geométrica y finalmente podrá lograr deducciones informales al determinar figuras según sus propiedades y establecerá relaciones entre ellas.

Los docentes de matemáticas tienen la responsabilidad de desarrollar en los estudiantes, habilidades geométricas y por lo tanto deben contar con una amplia base de conocimientos que les permitan guiar con mayor facilidad y buen criterio a sus estudiantes. El docente debe ser el primero en explorar para incluir los descubrimientos, propios o ajenos, en el planteamiento diario de sus clases.

La importancia de esta rama de las matemáticas se ha reconocido por los beneficios cognitivos que conlleva su estudio. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MENC) (2004) afirma:

La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. (p. 1)

Por lo anterior, el presente proyecto propone vincular el modelo de Van Hiele en el proceso de aprendizaje del componente geométrico, este modelo fue desarrollado por los esposos Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, que trabajaban como profesores de geometría en la enseñanza secundaria en Holanda, y que a partir de su experiencia docente, elaboraron un modelo que trata de explicar cómo evoluciona el razonamiento geométrico y, también, como el docente puede diseñar las actividades para mejorar la calidad de este razonamiento en los estudiantes.

La realización de esta investigación permitirá probar un modelo de enseñanza en el desarrollo del pensamiento geométrico, y validarlo mediante la elaboración y aplicación de una unidad didáctica como propuesta de intervención en el área de matemáticas en su componente geométrico, para mejorar el aprendizaje en los estudiantes de la institución Jorge Eliecer Gaitán, teniendo en cuenta que esta propuesta basada en el modelo de Van Hiele es de innovación para esta institución lo que permitirá desarrollar en los estudiantes destrezas para enfrentar problemas espaciales, y así se ofrecerá una vía para la comprensión y la valoración de su entorno; esto favorecerá el rendimiento académico en esta área, y a futuro se podrá evidenciar en las pruebas censales que realiza el Ministerio de Educación Nacional.

Por otra parte al implementar este modelo se podrá enriquecer el aprendizaje de la matemáticas y además se podrá entregar una herramienta didáctica basada en el modelo de Van de Hiele a los docentes de la asignatura, contribuyendo al mejoramiento de sus prácticas, promoviendo de esta manera aprendizajes significativos en sus estudiantes.

5. REFERENTE TEÓRICO

El estudio de la geometría en los programas de educación de las matemáticas escolares en básica secundaria, se había dejado a un lado, por causa del uso de nuevas investigaciones sobre “matemática moderna” que surgió en los años 60 y 70, cuyas principales características fueron el énfasis en las estructuras abstractas, profundización en el rigor lógico, énfasis en la teoría de conjuntos y el cultivo del álgebra, esto produjo un detrimento de la geometría elemental y el pensamiento espacial (MEN, 1998). Desde lo didáctico, científico e histórico, se considera una necesidad inevitable el volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría sino en respuesta a las diferentes metodologías para contribuir al alcance de las metas y propósitos que permitan la construcción del conocimiento y la relación que se establece en la geometría con otras áreas.

Teniendo en consideración lo anterior y para dar inicio al desarrollo de esta investigación, se hace importante conocer algunas de las teorías acerca del tema de estudio, como lo es: El modelo de Van Hiele y la regulación metacognitiva; por esta razón, a continuación, se presentan los contenidos que se pretenden desarrollar, tomando como base el trabajo de algunos autores.

5.1 MODELO DE VAN HIELE

El modelo de Van Hiele se desarrolló gracias a las investigaciones y posteriores estudios realizados por los esposos Pierre y Diana Van Hiele en el año de 1957. El modelo trata de explicar cómo los estudiantes van recorriendo cinco niveles en su comprensión de la geometría y en cada nivel establecen unas fases que permiten analizar el aprendizaje de dicha materia, de esta manera se mejora la calidad del razonamiento de los estudiantes.

De acuerdo con Jaime (1993), el modelo de Van Hiele abarca dos aspectos básicos:

Descriptivo: mediante este aspecto básico se identifican las distintas formas de razonamiento geométrico de los estudiantes y se puede evaluar su progreso.

Instructivo: favorece el avance de los estudiantes mediante unas pautas a seguir por los profesores, en los niveles de razonamiento geométrico dependiendo donde se encuentren.

El modelo de Van Hiele explica cómo el razonamiento pasa por una serie de niveles en los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la geometría; en este modelo, se organiza el conocimiento en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. Para superar un nivel y seguidamente pasar al nivel inmediato superior, el estudiante debe alcanzar unos indicadores de aprendizaje; en cada nivel se plantea una serie de fases de aprendizaje que para avanzar de un nivel a otro el estudiante debe cumplir.

Niveles del razonamiento de Van Hiele

Vargas (2013) indica que los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele están ordenados de la siguiente manera:

Nivel 1: Reconocimiento o visualización

Nivel 2: Análisis

Nivel 3: Deducción informal u orden

Nivel 4: Deducción

Nivel 5: Rigor

Y cada nivel se caracteriza de la siguiente manera:

Nivel 1: El individuo percibe y describe las figuras geométricas por su forma como un todo, no generaliza las características de una figura respecto a otras, no logra diferenciar las partes ni los componentes de la figura, el estudiante puede realizar una copia de cada figura particular o reconocerla, las propiedades determinantes de las figuras no son reconocidas o explicadas por parte de los estudiantes, realiza descripciones y comparaciones visuales con

elementos de su entorno, no emplea un lenguaje geométrico básico para hablar de las figuras geométricas.

Nivel 2: En este nivel los estudiantes pueden reconocer y analizar las propiedades y las partes particulares de las figuras geométricas, reconociendo que estas poseen propiedades matemáticas, pero no cuenta con la capacidad de plantear clasificaciones o relaciones entre propiedades de una figura entre sí o con las otras figuras; establece las propiedades de las figuras de forma sencilla, a través de la manipulación y experimentación; el estudiante no puede elaborar la definición de un concepto, porque omiten características o propiedades importantes en la construcción de un concepto.

Nivel 3: El estudiante en este nivel reconoce las figuras geométricas por sus propiedades y determina cómo unas propiedades se derivan de otras, forma interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas, establece las condiciones suficientes y necesarias que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que los conceptos adquieren significado; pero en este nivel, su razonamiento lógico se logra mediante la manipulación ya que realiza demostraciones, pero no consigue entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones y al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, el individuo no comprende el sistema axiomático de las matemáticas; el individuo ubicado en el nivel 3 es capaz de entender que unas propiedades se deducen de otras.

Nivel 4: En este nivel ya el individuo realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas, comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas, comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que le permite entender que se puedan realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado; es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto grado de razonamiento lógico, obtiene una visión globalizadora de las matemáticas y el individuo puede desarrollar secuencias de

proposiciones para deducir una propiedad de otra, percibe la posibilidad de una prueba, sin embargo, no reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.

Nivel 5: El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí; puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría, capta la geometría en forma abstracta. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, tal como lo sugieren estudios sobre el tema.

En el presente proyecto de investigación sólo se tomará en cuenta los primeros tres niveles del modelo Van Hiele: reconocimiento, análisis y deducción informal u orden, ya que los demás por su alcance se consideran complejos para el grado sexto, grado donde se encuentran los estudiantes con los cuales se hará la intervención; esta decisión se toma siguiendo lo que señalan algunos estudios, que los estudiantes de educación secundaria, solo llegan a alcanzar los primeros tres niveles de aprendizaje (Corberán y otros, 1994; Jaime y Gutiérrez, 1995). Además, hay que tener en cuenta que los estudiantes se pueden ubicar en distintos niveles dependiendo del contenido.

Fases del modelo de Van Hiele

Jaime (1993) describe las cinco fases del modelo de Van Hiele, las cuales pretenden presentar una organización de las actividades, las cuales permitan pasar de un nivel de razonamiento al siguiente, a continuación se caracterizan cada una de las fases:

Información: En ella se menciona o se da a conocer lo que se va a enseñar y lo que se va aprender; en otras palabras, en este período el maestro indaga los conocimientos previos sobre los conceptos que se irá a tratar, se explica qué trayectoria tomará el estudio.

Orientación Dirigida: En ella el estudiante aprende y comprende cuales son los significados y propiedades principales de un tema específico, explora dichos conceptos a través de los materiales que se le va a plantear consecutivamente.

Explicación: esta fase no es más que verificar la forma de como el aprendiz se desenvuelve verbalmente, al explicar sus experiencias previas. La participación del educador debe ser mínima en esta fase, solo debe cuidar el lenguaje del aprendiz.

Orientación Libre: en ella el educando aplica los conocimientos y el lenguaje que ha adquirido, y se enfrenta a tareas más complejas que pueden concluirse con distintos procedimientos. El objetivo específico de esta fase es consolidar los conocimientos adquiridos.

Integración: en esta se acumulan todas las fases, ésta lo sintetiza, para lograr así aplicar lo aprendido, en esta última fase no se presenta nada nuevo sino una síntesis de lo ya hecho y una vez superada esta quinta fase los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de aprendizaje, y están listos para repetir las fases para el nivel superior que sigue.

Principales características del modelo de Van Hiele.

En los estudios de Jaime y Gutiérrez (1990) y Jaime (1993) se analizan algunas características o propiedades del modelo de Van Hiele cuyo conocimiento es imprescindible para la comprensión y aplicación del mismo.

1. Estructura jerárquica y secuencial del modelo: Esta propiedad hace referencia que para obtener un nivel de razonamiento es necesario haber superado el nivel inferior. En un pequeño porcentaje se pueden encontrar alumnos que no se ajusten a esta propiedad lo cual puede ser síntoma de alguna deficiencia en la metodología de asignación de niveles empleada (Jaime, 1993).

2. A cada nivel de razonamiento corresponde un tipo de lenguaje específico: En la actividad diaria si un docente quiere que los estudiantes le comprendan, debe hablarles en su lenguaje, es decir, debe adaptarse al nivel de razonamiento de los estudiantes para, a partir de ahí, tratar de guiarles para que se produzca un avance hacia el nivel superior.

No se puede dar por supuesto que todos los alumnos entienden lo que el profesor dice; por ejemplo, si propone realizar una demostración, tiene que tener en cuenta que la palabra “*demostrar*” carece de sentido para un alumno del nivel básico; uno del nivel de análisis entiende que “*demostrar*” es comprobar la afirmación en unos pocos casos; en el de clasificación, “*demostrar*” es utilizar razonamientos lógicos y en el nivel de deducción, la demostración cumple los requisitos usuales de rigor (Jaime, 1993).

3. Localidad de los niveles de razonamiento. Esta propiedad hace referencia a que un estudiante puede razonar en diferentes niveles según distintos temas de la Geometría.
4. El paso de un nivel de conocimiento al siguiente se realiza de manera gradual, ya que produce mejores resultados la consideración de la continuidad en la adquisición de los niveles, estableciéndose un periodo de transición en el que combinará razonamientos de dos niveles consecutivos.
5. El progreso en los niveles se produce como resultado de la instrucción. Van Hiele (1986) afirma que “*la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje*”.

Como se puede observar, las investigaciones de los esposos Van Hiele aportan elementos de gran importancia para el aprendizaje de la geometría, estos elementos pueden ser tomados por los docentes para realizar propuestas didácticas, que logren un aprendizaje a profundidad de los conceptos geométricos, lo que se pretende con la intervención que hará parte de la presente investigación.

5.2 METACOGNICIÓN

La metacognición se refiere, según, Vidal (2009), a la capacidad que tiene un individuo de conocerse a sí mismo y de autorregular su aprendizaje, es decir planificar o preparar herramientas y estrategias para cada situación, aplicarlas y saber controlarlas, facilita la educación de su propia persona. *Meta* se refiere a ti mismo, *cognición* al conocimiento que posee la persona. Cuando el discente llega a conocerse a sí mismo reconoce sus habilidades, capacidades, posibilidades y oportunidades que posee en el ámbito familiar, comunidad y la sociedad en general. El rol de la metacognición se comprende si se analizan las estrategias y habilidades que utiliza el discente para poder tener conocimiento específico en cuanto la resolución de cada uno de los ejercicios u problemas, aquí se mide las capacidades del discente para poder determinar o emitir un resultado exacto en cuanto a un problema.

De acuerdo al concepto de (Flavell, 1976, p. 232), la metacognición:

“Se refiere al conocimiento que uno tiene sobre los propios procesos y productos cognitivos o sobre cualquier cosa relacionada con ellos, es decir, las propiedades de la información o los datos relevantes para el aprendizaje. Por ejemplo, estoy implicado en metacognición (metamemoria, metaaprendizaje, metaatención, metalenguaje, etc.) si me doy cuenta de que tengo más problemas al aprender A que al aprender B, si me ocurre que debo comprobar C antes de aceptarlo como un hecho... La metacognición se refiere, entre otras cosas, al control y la orquestación y regulación subsiguiente de estos procesos.”

Según los conceptos anteriores, se puede expresar que la metacognición es el grado de conocimiento que tienen los estudiantes sobre sí mismos, sobre los requerimientos de la tarea que deben realizar y sobre sus propios aprendizajes, para poder realizar este proceso se necesita la reflexión del qué, cómo y porque se hacen las cosas.

Elementos de la metacognición

Según Tamayo (2001), citando a Gunstone & Mitchell (1998), en la metacognición se encuentran tres aspectos generales: conocimiento, conciencia y control sobre los propios procesos de pensamiento.

En el aspecto de conocimiento, Tambriz (2015) citando a (López (2007) explica los tipos que este abarca:

Declarativos: (saber qué) hace referencia al conocimiento de los hechos todo lo que son contenidos, conceptos, definiciones, temas, datos, fechas, hechos, es importante darle un nuevo enfoque al aprendizaje de esta temática; solo a través de la metacognición puede lograr el aprendizaje significativo, ya que de esa manera el discente podrá responsabilizarse, interesarse y comprometerse de su aprendizaje; cada contenido será aprendido cuando el discente le dé significado a cada tema desarrollado en clase, y lo puede aplicar en los distintos aspectos de sus actividades cotidianas y lo puede ampliar, multiplicar y crear de esa manera su juicio personal y buscar solución a todos aquellos problemas que hasta la fecha, estaban sin poder resolverse; los conceptos se basan en aprendizajes significativos que solicitan una actitud más activa respecto al estudiante.

Procedimental: (saber cómo) hace referencia al conocimiento sobre el tipo de reglas que se deben aplicar para realizar una tarea, abarca el desarrollo de las aptitudes que permiten que el estudiante pueda conceptualizar y estructurar un marco de saberes lo que de esa manera puede integrar todo el conocimiento, sobre el aprendizaje alcanzado a través de sus aptitudes; el procedimental se refiere a contenidos procedimentales, que sabemos que es un conjunto de saberes sobre procedimientos, estrategias y técnicas, tanto intelectuales donde se abarca el análisis, creatividad, destrezas y habilidades corporales y manuales del discente y el docente tiene la mayor obligación de enseñar la utilización de los materiales y herramientas para la enseñanza del contenido de dicho curso, adicional, el procedimental

representa a todo lo que son habilidades, estrategias, métodos, técnicas; los contenidos procedimentales, son un conjunto de acciones enfocadas y ordenadas a una meta.

Condicional: (saber cuándo y por qué) se refiere a saber por qué cierta estrategia funciona o cuándo utilizar una estrategia en lugar de otra, esta forma de conocimiento es la que permite adaptar los planes de acción o estrategias a una tarea determinada; el procedimiento se deriva de su carácter saber hacer en los contenidos o demostrar acciones como ejecutar, utilizar, planificar, evaluar y presentar resultados en cuanto a los contenidos enseñados y explica cada paso para lograr cada contenido, y saber manejar los pasos que se deben seguir, si el discente sabe correctamente los pasos de un problema matemático, esto significa que aprendió y al mismo tiempo lo aplica en la vida cotidiana.

Schraw (1998), citando a Reynolds (1992), expresa que este tipo de conocimiento ayuda al estudiante a distribuir selectivamente los recursos y a usar las estrategias más eficientemente, permite además identificar el conjunto de condiciones y las exigencias situacionales de cada tarea de aprendizaje.

El aspecto de la conciencia metacognitiva, según Tamayo (2006) citando a Hartman (1998), es un saber de naturaleza intra-individual, hace referencia al conocimiento que tienen los estudiantes de los propósitos de las actividades que desarrollan y de la conciencia que tienen sobre su progreso personal; es un conocimiento que permite el control o la autorregulación del pensamiento y de los procesos y productos del aprendizaje.

La regulación metacognitiva, según Schraw 1998, (citado por Tamayo 2006), hace referencia al conjunto de actividades que permiten al estudiante controlar su aprendizaje; se relaciona con las decisiones del aprendiz antes, durante y después de llevar a cabo cierta tarea de aprendizaje. Se asume que la regulación metacognitiva mejora el rendimiento en diferentes formas: mejora el uso de la atención, proporciona una mayor conciencia de las dificultades en la comprensión y mejora las estrategias ya existentes; se ha encontrado un

incremento significativo del aprendizaje cuando se incluyen, como parte de la enseñanza, la regulación y la comprensión de las actividades.

Según Tamayo (2006) citando a Brown, señala los tres procesos cognitivos esenciales:

Planeación: Es un proceso que se realiza antes de enfrentar una tarea o meta escolar, implica la selección de estrategias apropiadas y la localización de factores que afectan el rendimiento; la predicción, las estrategias de secuenciación y la distribución del tiempo o de la atención selectiva antes de realizar la tarea; consiste en anticipar las actividades, prever resultados, enumerar pasos.

Monitoreo: se refiere a la posibilidad que se tiene, en el momento de realizar la tarea, de comprender y modificar su ejecución, por ejemplo, realizar autoevaluaciones durante el aprendizaje, para verificar, rectificar y revisar las estrategias seguidas.

Evaluación: Realizada al final de la tarea, se refiere a la naturaleza de las acciones y decisiones tomadas por el aprendiz; evalúa los resultados de las estrategias seguidas en términos de eficacia. (p. 3)

6. OBJETIVOS

6.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar la incidencia que tiene la regulación metacognitiva en el proceso de aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo Van Hiele en estudiantes del grado 6°, de la I.E. Jorge Eliecer Gaitán del municipio de Aguazul (Casanare).

6.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las dificultades a nivel de razonamiento que presentan los estudiantes de grado sexto en el aprendizaje de los cuadriláteros.
- Caracterizar los procesos de regulación metacognitiva desde los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la geometría, en alumnos de grado sexto.
- Describir los cambios que genera la regulación metacognitiva en el proceso de aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo Van Hiele, en estudiantes de grado sexto.

7. METODOLOGÍA

7.1 ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación se enmarca dentro de un enfoque metodológico de investigación cualitativa, el cual puede definirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos, como lo afirma Hernández, Fernández y Baptista (2003) el: “enfoque cualitativo: utiliza recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación y puede o no probar hipótesis en su proceso de interpretación” (p. 11).

De acuerdo a lo anterior, el abordaje de esta investigación se considera con un enfoque cualitativo porque los resultados que se obtienen no podrán ser medidos numéricos, sino se interpretarán de acuerdo a la incidencia que se evidencie, luego de la aplicación de la unidad didáctica.

Las investigaciones de tipo descriptivo se basan fundamentalmente, en caracterizar un fenómeno o situación concreta indicando sus aspectos más peculiares o diferenciadores (Morales, 2010).

Por lo tanto, esta investigación es de tipo descriptivo porque lo que busca es describir la incidencia de la regulación metacognitiva y los niveles del modelo Van Hiele en el aprendizaje de los cuadriláteros; es decir, a partir de situaciones cotidianas que logren en los estudiantes un aprendizaje significativo, construyendo su propio conocimiento; este proceso se manifiesta de manera sistemática descriptiva que permite incorporar la función pedagógica.

7.2 CONTEXTO

La investigación se realizará en la Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán sede principal, ubicada en el municipio de Aguazul, departamento de Casanare. Es una institución de carácter oficial con población mixta, cuenta con aproximadamente 1000 estudiantes de estrato socioeconómico 1, 2 y 3. La institución solo cuenta con una jornada, en la cual se atienden los grados de educación básica secundaria y media académica.

Además, la institución educativa atiende a estudiantes con barreras en el aprendizaje y de la participación, (B.A.P) y apoyos pedagógicos manejando estudiantes con diferentes discapacidades, dentro del modelo de aprendizaje mediado.

7.2.1 Unidad de trabajo

La unidad de trabajo para la aplicación de la unidad didáctica serán los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán (Aguazul, Casanare), con un total de 155 estudiantes de género mixto, distribuidos en cuatro grupos.

7.2.2 Unidad de análisis

Para llevar a cabo la presente investigación, se tendrá en cuenta solamente el curso 6A, con 33 estudiantes (15 niñas y 18 niños), cuyas edades oscilan entre once y catorce años, a quienes se les implementará las actividades diseñadas en la unidad didáctica.

Para el análisis de la información, se recolectarán los datos de cuatro (4) estudiantes que serán seleccionados a través de los diferentes desempeños académicos que hayan obtenido después de la aplicación del instrumento inicial. En este sentido, Kinnear y Taylor (1998. p.404) manifiestan que “en el muestreo por conveniencia la selección de un elemento de la

población que va formar parte de la muestra se basa hasta cierto punto en el criterio del investigador”.

7.3 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

En la tabla 1 se muestran las categorías, subcategorías e indicadores de análisis que surgen tanto de la pregunta como de los objetivos de la presente investigación:

Tabla 1. Categorías, subcategorías e indicadores de análisis

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	INDICADORES
Niveles del modelo de Van Hiele	Nivel 1. Reconocimiento o visualización	Percepción global de las figuras Percepción individual de las figuras Uso de propiedades imprecisas Aprendizaje de un vocabulario matemático básico
	Nivel 2. Análisis	Descripción de una figura y sus propiedades La definición de conceptos Deducción de propiedades mediante experimentación. Demostración de una propiedad mediante su comprobación
	Nivel 3. De clasificación o de deducción informal u orden	Capacidad para relacionar propiedades. Comprensión de conceptos y familias de figuras. Demostración de una propiedad usando razonamientos deductivos informales. Comprensión de los pasos de una demostración.

Regulación Metacognitiva	Planeación	Anticipa las actividades Prevé resultados Enumera pasos
	Monitoreo	Verifica las estrategias seguidas Rectifica las estrategias seguidas Revisar las estrategias seguidas
	Evaluación	Evalúa los resultados de las estrategias seguidas en términos de eficacia

Fuente: Elaboración propia

7.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Las técnicas e instrumentos que serán utilizados para recolectar la información, en esta investigación, son: el cuestionario, la observación participante, la unidad didáctica y la entrevista semi-estructurada.

7.4.1 El cuestionario

Aunque el cuestionario está muy ligado a investigaciones de enfoque cuantitativo, este puede ser usado como una técnica de recolección de datos en investigaciones cualitativas, como lo expresan Rodríguez, Fernández y Baptista (2006), el cuestionario es indicado para recoger información en grupos numerosos, en un corto tiempo y mínimo esfuerzo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se realizará un cuestionario en el que se integran los niveles de razonamiento del modelo Van Hiele; en este se incluirán preguntas abiertas y cerradas, con respuestas que muestren razonamientos característicos de los diferentes niveles de van Hiele, este cuestionario constará de 10 preguntas las cuales comprenden los primeros tres niveles de razonamiento y adicionalmente preguntas de regulación metacognitiva.

7.4.2 Observación participante

La observación participante, se ajusta al tipo de investigación, porque como el autor Anguera (1978), plantea “la observación participante es el acto donde el observador registra e interpreta los datos al participar en la vida diaria del grupo u organización que estudia, entrando en la conversación de sus miembros, y estableciendo alguna forma de asociación o estrecho contacto con ellos” (p.128).

7.4.3 Unidad didáctica

Los docentes deben realizar varias funciones, pero la actividad más importante que llevan a cabo es la de diseñar unidades didácticas, que luego llevarán a la práctica; en las unidades didácticas, el docente decide, qué se va a enseñar y el cómo, concretando sus ideas e intenciones, para lograr así el aprendizaje a profundidad de sus estudiantes.

En términos de Tamayo (2006) y Sánchez & Valcárcel (1993), la unidad didáctica es un proceso flexible donde se planifica la enseñanza de los contenidos relacionados con un campo del saber específico, para construir procesos de aprendizaje en una comunidad determinada. Debe estar formada a partir de las ideas previas, la historia y la epistemología de las ciencias, los distintos modos de representación semiótica y las TIC, la reflexión metacognitiva y la evolución conceptual.

En relación con lo anterior, en la unidad didáctica se realizarán actividades para el aprendizaje de los cuadriláteros, asociadas a los niveles del modelo Van Hiele y a la regulación metacognitiva.

7.4.4 Entrevista semi-estructurada

La entrevista semiestructurada, es una conversación que permite un intercambio de información; se pretende con ella cuestionar al estudiante, para identificar la efectividad de las actividades implementadas en la unidad didáctica, además por ser semiestructurada esta “se basan en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados...” (Hernández, Fernández, y Baptista, 2006)

7.5 PROCEDIMIENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

La presente investigación se desarrolla en tres momentos, en los cuales se pretende alcanzar cada objetivo específico, estos momentos son: ubicación, desubicación y reenfoque.

Momento de ubicación:

En este momento se diseñará y aplicará el Cuestionario: los cuadriláteros I, que permitirá identificar los obstáculos que presentan los estudiantes al resolver problemas con cuadriláteros. Este cuestionario contiene diez preguntas (Ver anexo 2), teniendo en cuenta los indicadores de los niveles del modelo de Van Hiele, las preguntas 1, 2 y 3 eran del nivel I de reconocimiento de cuadriláteros, donde se pretende realizar un diagnóstico sobre la percepción global e individual de los cuadriláteros, uso de propiedades y vocabulario matemático usado por los estudiantes.

Las preguntas 4, 5 y 6, pertenecen al nivel 2 de análisis de los cuadriláteros, estas tienen como propósito identificar en los estudiantes como describen un cuadrilátero y sus propiedades, como deducen y comprueban las propiedades de estos. Finalmente las preguntas 7, 8, 9 y 10, eran del nivel 3 de clasificación de los cuadriláteros, estas preguntas se diseñaron con el fin de identificar la capacidad que tienen los estudiantes para: relacionar

propiedades, de comprender conceptos y familias de figuras, hacer y comprobar demostraciones de propiedades.

Dentro de la pregunta 10, se realizaron unas preguntas de regulación metacognitiva. Para indagar acerca de los procesos de planeación, monitoreo y evaluación que realizan los estudiantes. De acuerdo a los resultados obtenidos se pudo identificar los obstáculos presentados, y además sirvió para diseñar las actividades en los momentos de desubicación y reenfoque.

Momento de desubicación:

En este segundo momento, se tendrá en cuenta las dificultades detectadas en el primer momento, para planear las actividades de la unidad didáctica, que se desarrollarán en tres sesiones, basadas en los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele y en la regulación metacognitiva (Ver anexo 3 y 4)

En la primera sesión, se modelaron distintas situaciones problemas de acuerdo al nivel 1 de aprendizaje del modelo de Van Hiele, llamado reconocimiento y visualización, con el propósito que los estudiantes perciban de forma global e individual los cuadriláteros y usen las propiedades de caracterizan cada cuadrilátero, todas las actividades de esta sesión serán guiadas con preguntas abiertas permitiendo identificar los procesos metacognitivos de planeación, monitoreo y evaluación.

En la segunda sesión, se presentaron distintas actividades de acuerdo al nivel 2 de aprendizaje del modelo de Van Hiele, llamado análisis, cuyo propósito es que los estudiantes describan los cuadriláteros y sus propiedades, deduzcan de propiedades de los cuadriláteros mediante experimentación y demuestren sus propiedades mediante su comprobación, estas actividades contendrán preguntas de regulación metacognitiva (planeación, monitoreo y evaluación).

En la tercera sesión, se proponen actividades de clasificación o de deducción informal u orden de cuadriláteros, con el fin de lograr en los estudiantes capacidad para relacionar propiedades, comprensión de conceptos y familias de figuras y comprensión de los pasos de una demostración. Al finalizar cada actividad se realizan preguntas de regulación metacognitiva.

Momento de reenfoque:

Finalmente en este momento, se aplicará nuevamente del cuestionario inicial, con algunas modificaciones, para analizar si las dificultades identificadas fueron superadas y se realizará la entrevista semiestructurada (ver anexo 5) para indagar respecto a la efectividad de las actividades enfocadas hacia el aprendizaje de los cuadriláteros mediante los niveles del modelo de Van Hiele y la regulación metacognitiva, además sobre la forma como lograron superar los obstáculos que presentaban al inicio de las actividades con respecto a los cuadriláteros y su regulación metacognitiva.

7.6 TÉCNICAS Y PROCEDIMIENTOS PARA EL ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN.

La técnica de análisis que se utilizó fue el discurso, según (Tamayo et al. 2010), “El análisis del discurso, y por ende del lenguaje, permite acercarnos cualitativamente a diferentes representaciones de los estudiantes sobre distintos hechos o fenómenos.” (p.96)

Para realizar este análisis de la información, se procedió haciendo un análisis del discurso oral y escrito que realizaron los estudiantes en las diferentes actividades y en los diferentes momentos de la investigación. En este sentido Tamayo (2001) manifiesta que “el análisis de los textos escritos es usado ampliamente con el propósito de comprender los procesos de aprendizaje y cambio conceptual en los estudiantes” (p.48)

Según Tamayo (2001):

“Los textos escritos, como sistemas externos de representación que son, se constituyen a través de un complejo proceso de reconstrucciones, no son sólo la traducción de representaciones internas o de otros sistemas simbólicos como el lenguaje. Los textos tienen naturaleza propia que repercute en la cognición y en el aprendizaje de quien los utiliza. Un texto es un modelo de la realidad a la que hace referencia según ciertas restricciones y como modelo representativo, crea nuevas realidades y nuevas relaciones.” (p.46)

De igual manera el análisis de los textos permitió obtener información de los obstáculos que presentaban los estudiantes sobre los cuadriláteros, se pudo evidenciar aspectos de diferente naturaleza, tales como los relacionados con el conocimiento cotidiano y el científico que ellos poseen. Así mismo, a través de los textos escritos se pudo verificar el avance de los educandos en todo el proceso.

8. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para presentar los resultados de la información obtenida de las técnicas aplicadas y los instrumentos de la unidad didáctica “Aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo de Van Hiele”, se organizaron las respuestas de los estudiantes, mediante tablas que muestran las preguntas con las respuestas, para el análisis se identifican los estudiantes como E1, E2, E3 y E4.

Posteriormente se analizaron éstos instrumentos, por medio de un proceso de triangulación de las respuestas de los estudiantes con el referente teórico, bajo el análisis del discurso, para determinar la incidencia de la regulación metacognitiva en el proceso de aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo de Van Hiele en los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán.

Teniendo en cuenta lo anterior, se identificaron las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los cuadriláteros y del mismo modo se caracterizaron los procesos que intervienen en el desarrollo de habilidades metacognitivas desde los niveles del modelo de Van Hiele como metodología dentro de los procesos de aprendizaje.

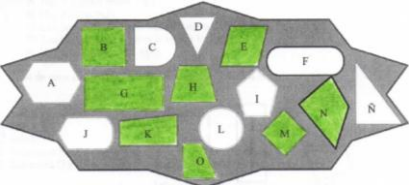


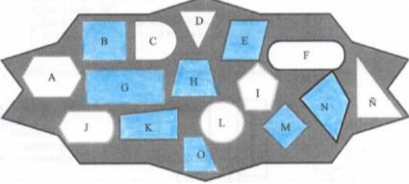
El análisis comprende los resultados por cada momento de la investigación, identificando las categorías y subcategorías, como se muestran a continuación:

8.1 MOMENTO DE UBICACIÓN

8.1.1 Análisis de las dificultades según los niveles del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los cuadriláteros

- **Nivel 1: reconocimiento de los cuadriláteros**

Tabla 2. Pregunta 1 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuestas de los estudiantes
<p>P.1 En la figura que se muestra a continuación, colorea los polígonos que sean cuadriláteros</p>	<p>E.1</p> 
	<p>E.2</p> 
	<p>E.3</p> 
	<p>E.4</p> 

Fuente: Elaboración propia

Según lo anterior, E1, E3 Y E4 tienen claridad para identificar los polígonos de cuatro lados como cuadriláteros, descartan los polígonos que tienen más o menos de cuatro lados y las figuras planas que tienen bordes redondeados; E2 no identifica todos los polígonos de cuatro lados, pero los coloreados cumplen con el concepto de cuadrilátero, se evidencia que

descarta correctamente las figuras con bordes redondeados o de más o menos de cuatro lados.

De acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes en esta pregunta, la mayoría se pueden ubicar en el nivel 1 del razonamiento del modelo de Van Hiele, dado que diferencian claramente los cuadriláteros de los polígonos que tienen más o menos de cuatro lados o con bordes redondeados, y además como lo expresan (Jurado & Londoño, 2005) estos estudiantes reconocen las figuras geométricas por su apariencia global.

Tabla 3. Pregunta 2 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuestas de los estudiantes
P.2 Teniendo en cuenta las figuras coloreadas en el punto anterior indique cuales son: Cuadrados: _____ Rectángulos: _____ Rombos: _____ Paralelogramos: _____ Trapecios: _____ Trapezoides: _____ Romboides: _____	E.1 Cuadrados: <u>B</u> _____ Trapecios: <u>H</u> _____ Rectángulos: <u>E</u> _____ Trapezoides: <u>O</u> _____ Rombos: <u>M</u> _____ Romboides: <u>N</u> _____ Paralelogramos: <u>E</u> _____
	E.2 Cuadrados: <u>B</u> _____ Trapecios: <u>E</u> _____ Rectángulos: <u>G</u> _____ Trapezoides: <u>N, H</u> _____ Rombos: <u>M</u> _____ Romboides: _____ Paralelogramos: _____
	E.3 Cuadrados: <u>B</u> _____ Trapecios: <u>H, O</u> _____ Rectángulos: <u>E</u> _____ Trapezoides: <u>E</u> _____ Rombos: <u>M</u> _____ Romboides: <u>N</u> _____ Paralelogramos: <u>K</u> _____
	E.4 Cuadrados: <u>B</u> _____ Trapecios: <u>H</u> _____ Rectángulos: <u>G</u> _____ Trapezoides: <u>O, E</u> _____ Rombos: <u>M</u> _____ Romboides: <u>N</u> _____ Paralelogramos: <u>E</u> _____

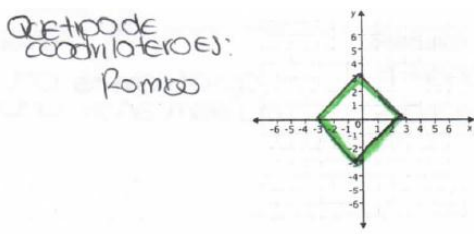
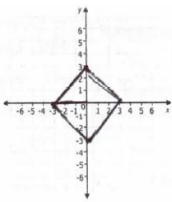
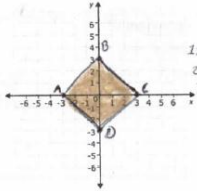
Fuente: Elaboración propia

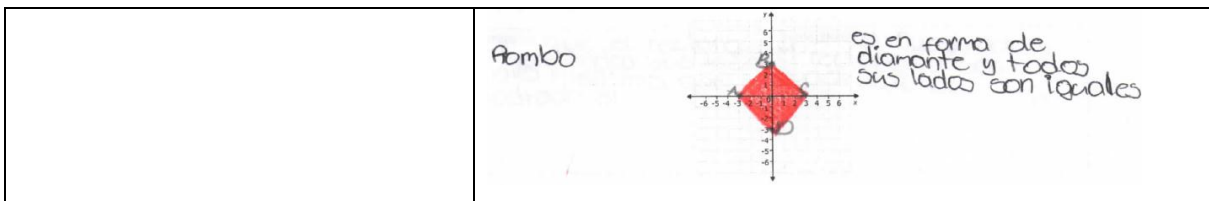
Teniendo en cuenta las respuestas, los estudiantes identifican claramente los polígonos: cuadrado, rectángulo y rombo, desconociendo que un cuadrado también es un rombo y rectángulo; además no reconocen los cuadrados, los rombos y los rectángulos como paralelogramos, solo E1 identifico el romboide como paralelogramo y adicionalmente los

estudiantes confunden algunos de los cuadriláteros como: trapezios, trapezoides y romboides, lo que deja ver que no tiene muy claro la forma de ellos.

Partiendo de lo anterior, los estudiantes se pueden ubicar en el nivel 1 de razonamiento en el modelo de Van Hiele, dado que diferencian algunos cuadriláteros básicos, pero no realizan la clasificación completa y correcta de los cuadriláteros porque no reconocen sus características y propiedades, como lo manifiestan (Jurado & Londoño, 2005), los estudiantes en el nivel 1 “perciben las figuras como objetos individuales, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otras figuras del mismo tipo”.

Tabla 4. Pregunta 3 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuestas de los estudiantes
<p>P.3 Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos A (-3,0); B (0,3); C (3,0) y D (0,-3), únelos en forma consecutiva con una línea recta. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? ¿Cuáles son sus características?</p>	<p>E.1</p> 
	<p>E.2</p> <p>Rombo</p>  <p>Tiene sus lados iguales Tiene 4 vertices</p>
	<p>E.3</p> <p>UN ROMBO</p>  <p>1.tienen los lados iguales 2.tiene 4 angulos agudos 3.tiene la misma medida</p>
	<p>E.4</p>



Fuente: Elaboración propia

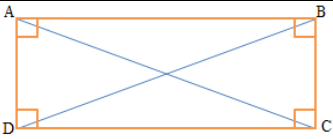
Todos los estudiantes grafican e indican el nombre del cuadrilátero de manera correcta, E1 no escribe ninguna de sus características, E2, E3 y E4 identifican como característica que la figura formada tiene lados iguales, solo E3 manifiesta la característica de ángulos, pero presenta dificultad al reconocer el tipo de ángulo.

Respecto a lo anterior, los estudiantes se siguen ubicando en el nivel de razonamiento 1, no se pueden ubicar en el nivel 2 (análisis) de razonamiento del modelo de Van Hiele, porque reconocen solo una característica de la figura, los estudiantes en el nivel 2 deben “describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, debe ser capaces de analizar las propiedades matemáticas de la figura” (Jaime, 1993). Por otra parte, se refleja que los estudiantes determinan a qué grupo pertenece la figura, de acuerdo a sus esquemas mentales donde existen figuras estereotipadas/prototipos; en términos generales, queda en evidencia que su respuesta está guiada por lo que observan; es decir, por lo visual; esto se evidencia dado que no identifican que la figura formada también es un cuadrado.

- **Nivel 2: Análisis de los cuadriláteros**

Tabla 5. Pregunta 4 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuestas de los estudiantes
P.4 En un rectángulo ABCD, los segmentos \overline{AC} y \overline{BD} son las diagonales, ¿cuál de las siguientes opciones son verdaderas o falsas para cualquier rectángulo?	E.1 A. Hay 4 ángulos rectos. (✓) B. Hay 4 lados. (✓) C. Las diagonales tienen la misma longitud. (✓) D. Los lados opuestos tienen la misma longitud. (✓) E. Hay 4 ángulos agudos. (✗)

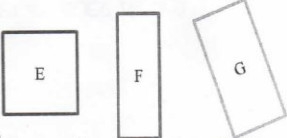
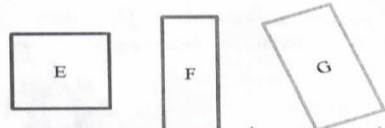
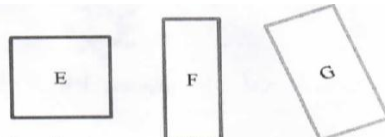
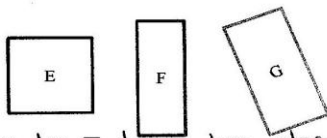
	<p>E.2</p> <p>A. Hay 4 ángulos rectos. (F)</p> <p>B. Hay 4 lados. (V)</p> <p>C. Las diagonales tienen la misma longitud. (V)</p> <p>D. Los lados opuestos tienen la misma longitud. (V)</p> <p>E. Hay 4 ángulos agudos. (F)</p>
	<p>E.3</p> <p>A. Hay 4 ángulos rectos. (F)</p> <p>B. Hay 4 lados. (V)</p> <p>C. Las diagonales tienen la misma longitud. (F)</p> <p>D. Los lados opuestos tienen la misma longitud. (V)</p> <p>E. Hay 4 ángulos agudos. (F)</p>
	<p>E.4</p> <p>A. Hay 4 ángulos rectos. (V)</p> <p>B. Hay 4 lados. (V)</p> <p>C. Las diagonales tienen la misma longitud. (V)</p> <p>D. Los lados opuestos tienen la misma longitud. (F)</p> <p>E. Hay 4 ángulos agudos. ()</p>

Fuente: Elaboración propia

En esta pregunta el estudiante E1, reconocen correctamente todas las propiedades de los rectángulos, y descarta la que no corresponde, pero esto lo logra porque compara visualmente las propiedades con el rectángulo dado, E2 y E3 no identifica que el cuadrilátero solamente posee ángulos rectos y E3 y E4, no reconoce que la longitud de los lados opuestos es la misma.

Tomando como referente lo anterior, los estudiantes no se puede ubicar en el nivel 2 de razonamiento en el modelo de Van Hiele, dado que, a pesar de reconocer algunas características en el cuadrilátero, demuestran el desconocimiento geométrico en algunas de las propiedades de este tipo de polígono, en el nivel 2 “los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades, a partir de la observación y la manipulación.” (Aravena & Caamaño, 2013).

Tabla 6. Pregunta 5 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuesta del estudiante
<p>P.5</p> <p>Cuál de estos puede ser llamado rectángulo.</p> <p>Justifica tu respuesta</p>	<p>E.1</p> <p>A. Todos. B. Sólo F. <input checked="" type="radio"/> C. Sólo G. D. Solamente E y F. E. Solamente Q y R.</p>  <p>Justifica tu respuesta: <u>porque la E y la F son muy diferentes a la G por eso la escogí</u></p>
	<p>E.2</p> <p>A. Todos. <input checked="" type="radio"/> B. Sólo F. C. Sólo G. D. Solamente E y F. E. Solamente Q y R.</p>  <p>Justifica tu respuesta: <u>Por q tiene 4 lados, rectos dos de una medida dos de otra medida</u></p>
	<p>E.3</p> <p>A. Todos. <input checked="" type="radio"/> B. Sólo F. C. Sólo G. D. Solamente E y F. E. Solamente Q y R.</p>  <p>Justifica tu respuesta: <u>Por que dos lados son mas cortos que los otros dos lados mas largos</u></p>
	<p>E.4</p> <p>A. Todos. <input checked="" type="radio"/> B. Sólo F. C. Sólo G. D. Solamente E y F. E. Solamente Q y R.</p>  <p>Justifica tu respuesta: <u>por que la F tiene los dos ldo iguales, el de arriba y de abajo los lados son igual</u></p>



Fuente: Elaboración propia

En esta pregunta se pretende identificar el nivel de desarrollo de los estudiantes para realizar una clasificación inclusiva entre el cuadrado y el rectángulo; y así, determinar si se construyen de forma correcta conceptos matemáticos, en esta pregunta, los estudiantes seleccionaron distintas opciones de respuesta; E1 selecciona la opción C y los demás la opción B, se evidencia por las razones de sus respuestas que expresan nociones desacertadas, sin la rigurosidad matemática que define un objeto en particular, por tanto, la

imagen que han construido de dicho concepto no corresponde a las exigencias del mismo y lo reconocen sólo a partir de estereotipos.

Según lo anterior, los estudiantes no se ubican en el nivel de análisis del modelo de Van Hiele, porque para responder de forma correcta esta pregunta, se requiere conocer una propiedad básica de los rectángulos, “tener todos sus ángulos interiores rectos”, lo anterior, radica según Jaime y Gutiérrez (1990) en el reconocimiento por parte de los estudiantes que las figuras son (o pueden ser) representantes de unas familias.

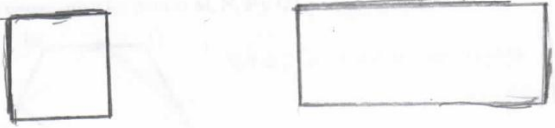
Tabla 7. Pregunta 6 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuesta del estudiante		
<p>P.6</p> <p>Dibuja un cuadrado y un rectángulo.</p> <p>Luego escribe sus diferencias y semejanzas.</p>	<p>E.1</p>  <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p>Diferencias</p> <p>1 Uno es mas largo</p> <p>2 Uno tiene mas cm</p> </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p>Semejanzas</p> <p>1 tiene 4 lados</p> <p>2 ambos son rectos</p> </td> </tr> </table> <p>De acuerdo a lo anterior, decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta (justificar la respuesta):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Todo rectángulo es cuadrado. <i>porque tiene mas cm que el cuadrado</i> • Todo cuadrado es rectángulo. <i>no porque tiene menos cm que el cuadrado</i> 	<p>Diferencias</p> <p>1 Uno es mas largo</p> <p>2 Uno tiene mas cm</p>	<p>Semejanzas</p> <p>1 tiene 4 lados</p> <p>2 ambos son rectos</p>
	<p>Diferencias</p> <p>1 Uno es mas largo</p> <p>2 Uno tiene mas cm</p>	<p>Semejanzas</p> <p>1 tiene 4 lados</p> <p>2 ambos son rectos</p>	
<p>E.2</p>  <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p>Diferencias</p> <p>1 El cuadrado tiene los lados iguales y el rectangulo no.</p> <p>2 No tienen los mismos angulos</p> </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p>Semejanzas</p> <p>1 Sus lados son rectos</p> <p>2 Tienen ambos 4 lados</p> </td> </tr> </table>	<p>Diferencias</p> <p>1 El cuadrado tiene los lados iguales y el rectangulo no.</p> <p>2 No tienen los mismos angulos</p>	<p>Semejanzas</p> <p>1 Sus lados son rectos</p> <p>2 Tienen ambos 4 lados</p>	
<p>Diferencias</p> <p>1 El cuadrado tiene los lados iguales y el rectangulo no.</p> <p>2 No tienen los mismos angulos</p>	<p>Semejanzas</p> <p>1 Sus lados son rectos</p> <p>2 Tienen ambos 4 lados</p>		

De acuerdo a lo anterior, decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta (justificar la respuesta):

- Todo rectángulo es cuadrado ~~no~~ por q el cuadrado tiene sus lados iguales
- Todo cuadrado es rectángulo. ~~no~~ por q el rectángulo tiene lados de distinta medida

E.3

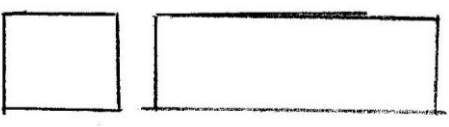


Diferencias	Semejanzas
1. Que uno es mas largo 2. Que tienen diferentes medidas 3. Tienen diferentes longitudes	1. Que tienen 4 ángulos rectos 2. Que tiene 4 lados

De acuerdo a lo anterior, decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta (justificar la respuesta):

- Todo rectángulo es cuadrado ~~no~~ por que tiene diferente medida.
- Todo cuadrado es rectángulo. ~~no~~ por que el cuadro tiene lados iguales y el rectángulo no.

E.4



Diferencias	Semejanzas
que el rectángulo no tiene todos sus lados iguales mientras que el cuadrado si	el cuadrado y el rectángulo son cuadriláteros

- Todo rectángulo es cuadrado ~~no~~ por que no tienen los lados iguales
- Todo cuadrado es rectángulo. ~~no~~ por que el cuadrado si tiene todos los lados iguales.

Fuente: Elaboración propia

Los estudiantes realizan el dibujo del cuadrado y del rectángulo sin definir los ángulos rectos, establece características similares como: poseen ángulos rectos y la cantidad de lados, y algunas diferencias enfocadas en la medida de sus lados, pero ninguno de los estudiantes afirma que todo cuadrado es rectángulo, dando justificaciones desacertadas.

Tomando como referente lo anterior, los estudiantes no se pueden ubicar en el nivel 2 de razonamiento en el modelo de Van Hiele, dado que, a pesar de reconocer algunas características de los cuadriláteros, desconoce las semejanzas y diferencias de los cuadriláteros, generando justificaciones superficiales que demuestran el desconocimiento geométrico de este tipo de polígonos, además, el lenguaje empleado no evidencia mayor rigurosidad geométrica y, de acuerdo con Fouz (2006), la progresión, en y entre los niveles, va muy unida a la mejora del lenguaje matemático necesario en el aprendizaje.

- **Nivel 3: Clasificación de los cuadriláteros**

Tabla 8. Pregunta 7 cuestionario los cuadriláteros I

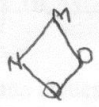

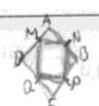
Pregunta	Respuesta del estudiante
P.7 Indicar cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar	E.1 a) Si un cuadrilátero es rectángulo entonces es paralelogramo. <input type="checkbox"/> b) Si un cuadrilátero es rombo entonces es paralelogramo. <input checked="" type="checkbox"/> c) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. <input checked="" type="checkbox"/> d) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. <input checked="" type="checkbox"/> e) Si un cuadrilátero tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. <input checked="" type="checkbox"/> f) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. <input checked="" type="checkbox"/>
	E.2 a) Si un cuadrilátero es rectángulo entonces es paralelogramo. <input type="checkbox"/> b) Si un cuadrilátero es rombo entonces es paralelogramo. <input type="checkbox"/> c) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. <input type="checkbox"/> d) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. <input type="checkbox"/> e) Si un cuadrilátero tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. <input type="checkbox"/> f) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. <input type="checkbox"/>
	E.3 a) Si un cuadrilátero es rectángulo entonces es paralelogramo. <input type="checkbox"/> b) Si un cuadrilátero es rombo entonces es paralelogramo. <input checked="" type="checkbox"/> c) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. <input checked="" type="checkbox"/> d) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. <input checked="" type="checkbox"/> e) Si un cuadrilátero tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. <input checked="" type="checkbox"/> f) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. <input type="checkbox"/>
	E.4 a) Si un cuadrilátero es rectángulo entonces es paralelogramo. <input type="checkbox"/> b) Si un cuadrilátero es rombo entonces es paralelogramo. <input type="checkbox"/> c) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. <input checked="" type="checkbox"/> d) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. <input checked="" type="checkbox"/> e) Si un cuadrilátero tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. <input checked="" type="checkbox"/> f) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. <input checked="" type="checkbox"/>

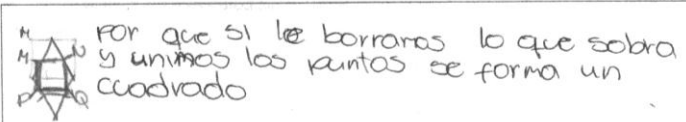
Fuente: Elaboración propia

En esta pregunta se indaga por el nivel de desarrollo de los estudiantes para realizar una clasificación, como se observa en la tabla 8, los estudiantes E1, E2, E3 y E4 no establecen generalizaciones y relaciones entre los cuadriláteros y carece de justificación en sus respuestas, esto demuestra desconocimiento de las propiedades y características de los cuadriláteros.

Los estudiantes E1, E2, E3 y E4 no alcanzan el nivel 3 de razonamiento geométrico (clasificación), porque desde el modelo de Van Hiele, según Jaime (1993), los estudiantes pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con la de otras figuras; es decir, se comprende la existencia de relaciones y se descubren nuevas relaciones y de igual forma, los estudiantes en este nivel pueden realizar clasificaciones inclusivas.

Tabla 9. Pregunta 8 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuesta del estudiante
<p>P.8</p> <p>Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ?</p> <p>Justifique su respuesta</p>	<p>E.1</p> <p>Es un rombo y tiene todos rectos</p> 
	<p>E.2</p> <p>Es un cuadrilátero por q debería con sus puntos tiene q formar una figura de 4 lados</p> 
	<p>E.3</p> <p>Rta: Es un cuadrado</p>  <p>Rta: Por que hace la mitad del rombo de los lados y los unen da un cuadrado.</p>

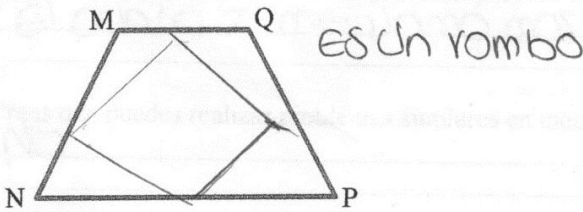
	<p>E.4</p> 
--	---

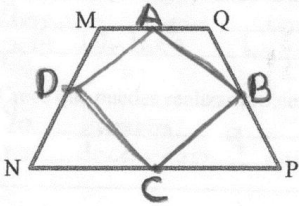
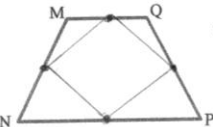
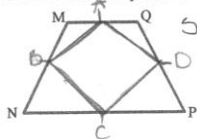
Fuente: Elaboración propia

En esta pregunta el estudiante E1, no realiza de forma adecuada la representación gráfica y por lo tanto no deduce la figura que se forma, los estudiantes E2, E3 y E4, realizan una buena representación gráfica, pero E3 y E4 estudiantes mencionan que la figura que se forma al unir los puntos medios de los lados de un rombo es un cuadrado. Esto demuestra que los estudiantes no consideraron las diagonales no congruentes del rombo, motivo por el cual la respuesta correcta sería se forma un rectángulo. Lo rescatable en esta pregunta es que al menos, dos de los estudiantes mencionaron los lados para tratar de justificar su respuesta.

Como afirma Jaime (1993), en el nivel 3 “se pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con las otras figuras: se comprende la existencia de relaciones y se descubren de manera experimental, nuevas relaciones” (p.7); los estudiantes no se pueden ubicar en este nivel porque para ello deben tener en cuenta cuáles figuras geométricas se enmarcan en la clasificación de los paralelogramos: el rectángulo, cuadrado, rombo y romboide, para luego relacionar propiedades entre el rectángulo y los demás.

Tabla 10. Pregunta 9 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuesta del estudiante
<p>P.9</p> <p>En el siguiente trapecio isósceles MNPQ, con $MN=PQ$, ubica los puntos A, B, C y D, que son los puntos</p>	<p>E.1</p> 

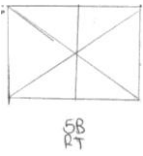
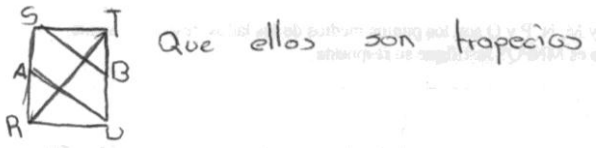
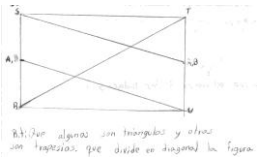
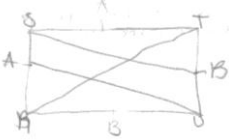
<p>medios de los lados MN, NP, PQ y QA, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q? Justifica tu respuesta</p>	<p>E.2</p> <p>forma consecutiva los puntos M, N, P y Q? <i>Se forma un rombo</i></p> 
	<p>E.3</p>  <p><i>Rta: se forma la figura llamada rombo.</i></p>
	<p>E.4</p>  <p><i>se forma un rombo</i></p>

Fuente: Elaboración propia

En la pregunta 9, como se refleja en la tabla 10, todos los estudiantes son capaces de reconocer el tipo de cuadrilátero formado mediante la observación de los dibujos que ellos mismos han plasmado para representar el objeto matemático en cuestión; aunque, el uso de las propiedades no es del toda explícito.

Este tipo de respuesta no permite la ubicación de los estudiantes en el nivel 3, ya que en cuanto a la parte de la justificación, tuvieron muchas dificultades para buscar argumentos que validarán su respuesta porque básicamente, se limitaron a realizar el gráfico del enunciado del problema. De acuerdo con Corberán et al. (1990), los estudiantes en este nivel ya son capaces de clasificar inclusivamente los diferentes cuadriláteros y podrán dar definiciones matemáticamente correctas, en lugar de definir las figuras mediante listas exhaustivas de propiedades.

Tabla 11. Pregunta 10 cuestionario los cuadriláteros I

Pregunta	Respuesta del estudiante
<p>P.10</p> <p>Si en un paralelogramo RSTU. Se marca con A y B los puntos medios de los segmentos RS y TU, respectivamente, se traza la diagonal RT y los segmentos AU, SB que puedes decir de los segmentos que cortan la diagonal principal. Escribe simbólicamente la conclusión.</p>	<p>E.1</p> 
	<p>E.2</p> 
	<p>E.3</p> 
	<p>E.4</p> 

Fuente: Elaboración propia

Como se muestra en la tabla 11, el estudiante E1, no construye demostraciones, ni propone una simbología geométrica para comprender el enunciado teórico; los estudiantes E2, E3 y E4, aunque realizan una representación gráfica adecuada no proponen una simbología geométrica para comprender el enunciado teórico.

Con base en lo anterior, los estudiantes no se pueden ubicar en el nivel 3 de razonamiento en el modelo de Van Hiele, dado que no proponen procesos de demostración ni mostración de las propiedades de los cuadriláteros.

Según los resultados de la prueba diagnóstica, se puede afirmar que los estudiantes tienen dificultades para reconocer los cuadriláteros y diferenciarlos de acuerdo con sus características, también, se evidencia contradicciones cuando debe seleccionar propiedades de un rectángulo; se considera que los estudiantes evidencian un bajo nivel de razonamiento, ya que no comprenden el concepto de cuadrilátero y sus características.

En general, se pueden afirmar con los resultados obtenidos del cuestionario inicial, que los estudiantes presentan dificultades para: representar un cuadrilátero a través de un enunciado, reconocer un cuadrilátero con base en una figura, interpretar el vocabulario básico matemático, demostrar una propiedad, realizar clasificaciones inclusivas, relacionar propiedades entre sí o con otras figuras. Lo anterior refleja la problemática que se considera objeto de estudio, la comprensión de los cuadriláteros ya que, en el contexto de la institución, se requiere de estudios que aborden esta dificultad para favorecer el razonamiento de los estudiantes y, por lo tanto, su comprensión.

A partir de la información obtenida en la prueba diagnóstica de los cuatro estudiantes evaluados, se puede concluir que la mayoría de ellos se encuentra en el nivel 1 de razonamiento del modelo de Van Hiele, puesto que el reconocimiento de los cuadriláteros lo hacen de forma general, desconociendo sus relaciones de inclusión y centrándose en características exclusivas, lo que demuestra que es necesario por medio de la presente investigación intervenir el trabajo en clase a partir de actividades secuenciales que permitan que los estudiantes lleguen al nivel 3 de razonamiento y con esto mejorar los procesos de conceptualización, generalización y demostración geométrica de los cuadriláteros.

8.1.2 Análisis de la categoría de regulación metacognitiva

- Subcategoría de planeación

El proceso que se realiza antes de resolver el problema es la planeación, este permite detallar los pasos o secuencia que se llevaran a cabo para resolverlo. En este sentido Brown (citada por Tamayo, 2006, p.3) señala:

La planeación es un proceso que se realiza antes de enfrentar una tarea o meta escolar, implica la selección de estrategias apropiadas y la localización de factores que afectan el rendimiento; la predicción, las estrategias de secuenciación y la distribución del tiempo o de la atención selectiva antes de realizar la tarea; consiste en anticipar las actividades, prever resultados, enumerar pasos.

La tabla 12 muestra las preguntas relacionadas con la subcategoría planeación, para indagar acerca de los procesos que realizan los estudiantes.

Tabla 12. Preguntas de planeación momento de ubicación

PREGUNTAS DE PLANEACIÓN
P1. ¿Entendiste el enunciado del problema? ¿Qué debes hallar?¿Cuántas veces lo leíste?
P2. ¿Subrayaste la información importante? ¿Organizaste los datos?
P3. Describe detalladamente, los pasos o la secuencia que llevarás a cabo para saber que figura se forma. Justifica tu respuesta

Fuente: Elaboración propia

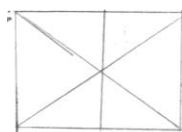
En el proceso de planeación realizado por los estudiantes E.1, E.2, E.3 y E.4, todos manifiestan entender el enunciado, saber qué deben hallar y expresan que leen el problema en promedio de 2 a 3 veces para comprenderlo. No se presenta organización de los datos, ni subrayan información importante en el problema, además, ellos manifiestan unos pasos o secuencia que llevarán a cabo para resolver el problema, pero estas secuencias son cortas y no están enumeradas como lo manifiesta E1: “*mire la figura como era y la entendí y ubique los punto y los uní*”, todo esto incide en sus dificultades para resolverlo, debido a que no cuentan con una estrategia de planeación detallada y adecuada.

Por otro lado, en la respuesta dadas por los estudiantes E.1, E.2, E.3 y E.4 se evidencia que dentro de las estrategias cognitivas empleadas para resolver problemas sobre cuadriláteros está en dibujar el diagrama que permita facilitar su solución, en este sentido, Schoenfeld (1992) manifiesta que:

“Las estrategias cognitivas o heurísticas involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc.”

Una de las estrategias utilizadas por los estudiantes para la planeación fue dibujar diagramas. Ver figura 1

Figura 1. Respuesta E.1 pregunta 10



Según lo anterior, se puede decir que las preguntas relacionadas a la planeación, lograron que los estudiantes se percataran que no contaban con un plan detallado para resolver los problemas, en este sentido, al no tener claro una serie de pasos a seguir, originaba un desorden en la ejecución de las diferentes actividades y es por ello que surge la necesidad en los educandos de una mejor organización y de crear una ruta para resolver los problemas.

- Subcategoría: Monitoreo

El proceso de monitoreo es de gran importancia porque permite verificar de manera continua lo que se está haciendo y permite corregir en caso de errores. En este sentido Brown (citada por Tamayo, 2006, p.3) señala que:

El monitoreo se refiere a la posibilidad que se tiene, en el momento de realizar la tarea, de comprender y modificar su ejecución, por ejemplo, realizar auto-evaluaciones durante el aprendizaje, para verificar, rectificar y revisar las estrategias seguidas.

La tabla 13 muestra las preguntas relacionadas con la subcategoría monitoreo, para indagar acerca de los procesos que realizan los estudiantes para verificar, revisar y rectificar lo que hacen.

Tabla 13. Preguntas de monitoreo momento de ubicación

PREGUNTAS DE MONITOREO
P4. ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta
P5. ¿Te sirve los pasos o secuencia que planteaste? Justifica la respuesta

Fuente: Elaboración propia

En los procesos llevados a cabo por los estudiantes E.1, E.2, E.3 y E.4, se evidencia que no realizan monitoreo de lo que hacen y no saben si lo que está haciendo está bien, E1 y E3 se limitan a realizar una representación gráfica sin un sentido lógico, argumentando que saben poco sobre el tema que se están trabajando, lo cual les impide revisar y corregir lo que están haciendo.

Los estudiantes E.1, E.2 y E.4 manifiestan: “*No estoy seguro que este bien lo que estoy haciendo*” mientras que E.3: “*No se si lo estoy haciendo bien porque se un poquito*”, esto refleja que no existe un control de lo que se está haciendo por parte de los educandos.

Considerando lo anterior, las preguntas de monitoreo permitieron que los estudiantes reconocieran la necesidad de revisar lo que se hace, de identificar si las estrategias que estaban aplicando eran las adecuadas, de corregir la representación gráfica y en algunos casos leer nuevamente el problema y reorganizar los datos, lo que permitía encontrar posibles errores para no cometerlos en problemas posteriores.

- Subcategoría: Evaluación

La evaluación es un proceso que permite revisar si lo que se hizo está bien, replantear algunas estrategias y evaluar el cumplimiento de las metas. En este sentido Brown (citada por Tamayo, 2006, p.3) señala que “la evaluación realizada al final de la tarea, se refiere a la naturaleza de las acciones y decisiones tomadas por el aprendiz; evalúa los resultados de las estrategias seguidas en términos de eficacia”.

La tabla 14 muestra las preguntas relacionadas con la subcategoría planeación, para indagar acerca de los procesos que llevan cabo los estudiantes para evaluar lo que hicieron.

Tabla 14. Preguntas de evaluación momento de ubicación

PREGUNTAS DE EVALUACIÓN
P6. Menciona cuáles fueron las dificultades que tuviste para resolver el problema. Justifica tu respuesta
P7. ¿Verificaste la solución?
P8. ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?
P9. ¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?
P10. ¿Considera que los pasos o secuencia que planeo funcionó bien?¿Por qué?

Fuente: Elaboración propia

Frente a las preguntas, P.6 y P.7, los estudiantes E.1, E.2, E.3 y E.4, respondieron: *“la dificultad que encontré fue que no conocía algunos términos en el enunciado y no verifiqué la solución”, “un problema que no entendí, un poco complicado porque no sabía qué hacer cuando leí por primera vez, pero leí de nuevo y entendí; si verifique porque creía que me había quedado mal”*; *“No se cómo representar simbólicamente y verifique mi grafica pero no supe escribir la respuesta”*

En los procesos de evaluación llevados a cabo por los estudiantes E.1, E.2, E.3 y E.4, con respecto a las preguntas P8, P9 y P10, expresan que los más les llamo la atención: *“que se puede hacer una gráfica para hallar la solución”*, dos estudiantes manifiestan que sí podrían realizar ejercicios similares en menos tiempo, y a la pregunta que si considera que los pasos o secuencia que planeo funcione bien, expresan *“Si, porque me resulto bien tal como lo espere”*, de acuerdo a sus respuestas se evidencia que realizan poca evaluación del proceso llevado a cabo en el problema, argumentando que no entendía en su totalidad el enunciado, que no sabía cómo hacer representaciones simbólicas, por lo cual no saben con certeza si lo que hicieron está bien.

Únicamente se refleja como evaluación el hecho de que reconocen que tienen dificultades y que si se les explica y recuerdan los conceptos pueden realizar el problema, es así como E.1 manifiestan: *“Tengo dificultades al graficar porque no conozco muchos términos del enunciado”*. Por su parte E.2, E.3, E4 expresan: *“No se cómo representar simbólicamente”*; esto indica que hay reconocimiento por parte de los educandos de dificultades en el tema.

De acuerdo a lo anterior, se puede decir que las preguntas relativas a evaluación permitieron que los estudiantes reconocieran la necesidad de evaluar el proceso llevado a cabo cuando se resuelven problemas geométricos, de realizar una retrospección en cada uno de los pasos utilizados. Esto brindaría la posibilidad de identificar si las estrategias empleadas fueron eficaces, si se presentaron errores, si quedaron cosas por hacer y además saber cuál era el grado de satisfacción y motivación frente al tema.

8.2 MOMENTO DE DESUBICACIÓN

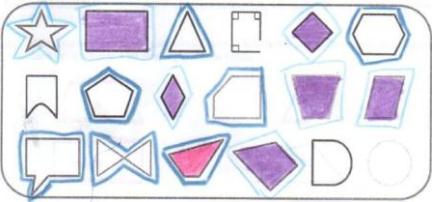
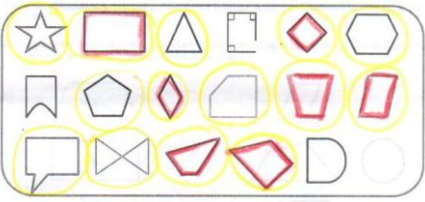
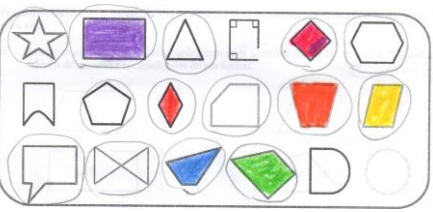
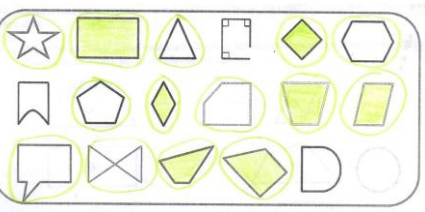
8.2.1 Análisis de las dificultades según los niveles del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los cuadriláteros

En este momento se aplicó la unidad didáctica, donde se diseñaron actividades direccionadas a instruir a los estudiantes para alcanzar cada nivel del modelo Van Hiele, incluyendo procesos de planeación, monitoreo y evaluación asociados al desarrollo de habilidades de regulación metacognitiva, para el aprendizaje los cuadriláteros, abordando la solución de las dificultades identificados en el momento de ubicación.

- **Nivel 1: reconocimiento de los cuadriláteros**

En este segundo momento se analizó lo que sucedió con las dificultades encontradas en el primer momento, referidos al reconocimiento de los cuadriláteros.

Tabla 15. Reconocer un cuadrilátero por su forma global

<p>Pregunta 1. A continuación se muestran unas figuras geométricas, encierra las figuras que sean polígonos y colorea las que consideres que son cuadriláteros.</p>	
<p>E.1</p> 	<p>E.2</p> 
<p>E.3</p> 	<p>E.4</p> 

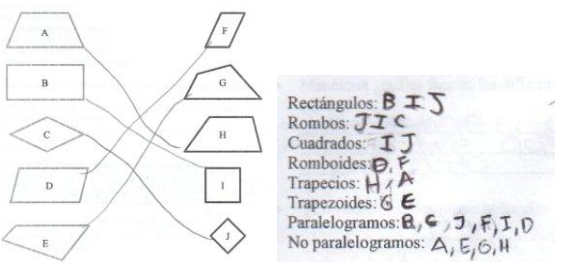
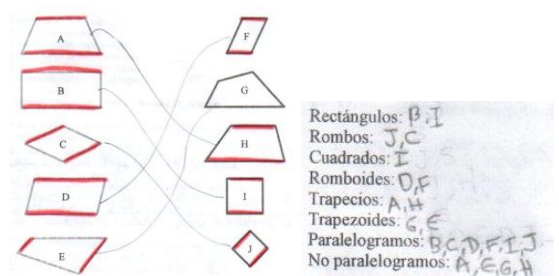
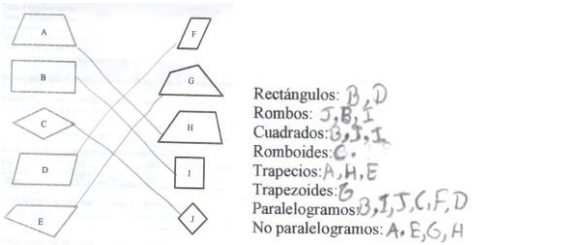
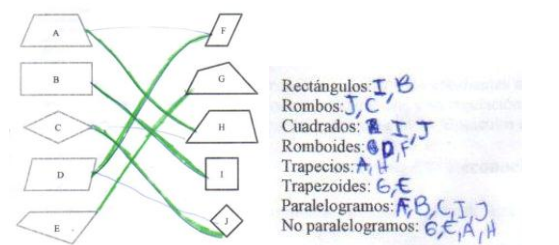
Fuente: Elaboración propia

Esta actividad tenía como propósito reconocer los cuadriláteros por su forma global (ver tabla 15), se observa que los estudiantes encerraron de forma adecuada los polígonos e

identificaron correctamente los polígonos de cuatro lados como cuadriláteros, según la prueba diagnóstica se observa un progreso en E2 porque ahora tiene mayor claridad al identificar los cuadriláteros descartando los polígonos que tienen más o menos de cuatro lados y las figuras planas que tienen bordes redondeados.

Según lo anterior, los estudiantes estarían confirmando que se ubican en el nivel 1 de razonamiento, porque “los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global. Pueden decir triángulo, cuadrado, cubo y así sucesivamente, pero no identifican explícitamente las propiedades de las figuras” (Hoffer, 1983, pág. 207).

Tabla 16. Actividad II. Descubrir, comprender y reconocer la forma de los cuadriláteros

Pregunta 2. Relaciona mediante líneas cada cuadrilátero de la columna izquierda con uno de la columna derecha de acuerdo a las similitudes de sus formas	
<p>E.1</p>  <p>Rectángulos: B, I, J Rombos: J, I, C Cuadrados: I, J Romboides: D, F Trapezoides: H, A, E Paralelogramos: B, C, J, F, I, D No paralelogramos: A, E, G, H</p>	<p>E.2</p>  <p>Rectángulos: B, I Rombos: J, C Cuadrados: I Romboides: D, F Trapezoides: A, H, E Paralelogramos: B, C, D, F, I, J No paralelogramos: A, E, G, H</p>
<p>E.3</p>  <p>Rectángulos: B, D Rombos: J, B, I Cuadrados: B, J, I Romboides: C Trapezoides: A, H, E Paralelogramos: B, J, I, J, C, F, D No paralelogramos: A, E, G, H</p>	<p>E.4</p>  <p>Rectángulos: I, B Rombos: J, C Cuadrados: B, I, J Romboides: D, F, J Trapezoides: A, H Paralelogramos: B, C, I, J No paralelogramos: E, A, H</p>

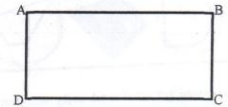
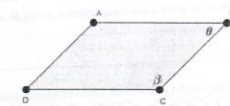
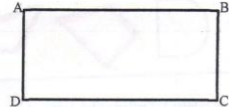
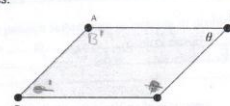
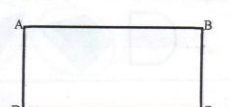
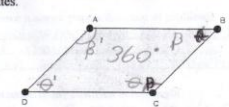
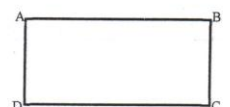

Fuente: Elaboración propia

En esta actividad II, los estudiantes E1, E2, E3 y E4 relacionan de forma correcta los cuadriláteros, según su forma y logran agrupar de manera adecuada los cuadriláteros o hace

clasificaciones parciales y sin incluir a todos los elementos pertenecientes a dicha clase (ver tabla 16).

De acuerdo a lo anterior, los estudiantes tienen un grado alto de adquisición del nivel 1 de razonamiento del modelo Van Hiele, porque como lo expresa Corberán et al. (1994), los estudiantes en este nivel comparan y clasifican figuras geométricas basándose en su apariencia global.

Tabla 17. Actividad IV. Aprendizaje de un vocabulario matemático básico

Actividad IV. Aprendizaje de un vocabulario matemático básico	
<p>E.1</p> <ul style="list-style-type: none"> Indica si es verdadero (V) o falso (F) lo que se dice a continuación basándose en el cuadrilátero ABCD. <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (V)</p> <p>$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ (F)</p> <p>$\overline{CD} \cong \overline{BC}$ (F)</p> <p>$\overline{AD} \perp \overline{CD}$ (V)</p> <p>$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (V)</p> </div>  </div> <ul style="list-style-type: none"> Indique del paralelogramo ABCD los lados que son paralelos o perpendiculares, y congruentes, y los ángulos que son congruentes o suplementarios. Asigna el mismo nombre a los ángulos congruentes. <div style="display: flex; align-items: center;">  </div> <div style="margin-top: 10px;"> <p>$\overline{AD} \cong \overline{CB}$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ _____</p> <p>$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$ _____</p> </div>	<p>E.2</p> <ul style="list-style-type: none"> Indica si es verdadero (V) o falso (F) lo que se dice a continuación basándose en el cuadrilátero ABCD. <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (V)</p> <p>$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ (F)</p> <p>$\overline{CD} \cong \overline{BC}$ (F)</p> <p>$\overline{AD} \perp \overline{CD}$ (F)</p> <p>$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (V)</p> </div>  </div> <ul style="list-style-type: none"> Indique del paralelogramo ABCD los lados que son paralelos o perpendiculares, y congruentes; y los ángulos que son congruentes o suplementarios. Asigna el mismo nombre a los ángulos congruentes. <div style="display: flex; align-items: center;">  </div> <div style="margin-top: 10px;"> <p>$\overline{AD} \cong \overline{CB}$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$ $\angle A \cong \angle B$</p> <p>$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$ $\angle A \cong \angle B$</p> </div>
<p>E.3</p> <ul style="list-style-type: none"> Indica si es verdadero (V) o falso (F) lo que se dice a continuación basándose en el cuadrilátero ABCD. <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (V)</p> <p>$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ (F)</p> <p>$\overline{CD} \cong \overline{BC}$ (F)</p> <p>$\overline{AD} \perp \overline{CD}$ (V)</p> <p>$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (V)</p> </div>  </div> <ul style="list-style-type: none"> Indique del paralelogramo ABCD los lados que son paralelos o perpendiculares, y congruentes; y los ángulos que son congruentes o suplementarios. Asigna el mismo nombre a los ángulos congruentes. <div style="display: flex; align-items: center;">  </div> <div style="margin-top: 10px;"> <p>$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ $\angle A \cong \angle C$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$</p> <p>$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\angle B \cong \angle D$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$</p> </div>	<p>E.4</p> <ul style="list-style-type: none"> Indica si es verdadero (V) o falso (F) lo que se dice a continuación basándose en el cuadrilátero ABCD. <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (V)</p> <p>$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ (F)</p> <p>$\overline{CD} \cong \overline{BC}$ (F)</p> <p>$\overline{AD} \perp \overline{CD}$ (V)</p> <p>$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (V)</p> </div>  </div> <ul style="list-style-type: none"> Indique del paralelogramo ABCD los lados que son paralelos o perpendiculares, y congruentes; y los ángulos que son congruentes o suplementarios. Asigna el mismo nombre a los ángulos congruentes. <div style="display: flex; align-items: center;">  </div> <div style="margin-top: 10px;"> <p>$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\angle B \cong \angle H$ $\angle B \cong \angle H = 180^\circ$</p> <p>$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ $\angle B \cong \angle H$ $\angle B \cong \angle H = 180^\circ$</p> </div>

Fuente: Elaboración propia

Respecto a la actividad IV, esta se realizó de manera individual y el propósito de esta actividad fue promover la lectura y el uso adecuado de símbolos o notación matemática; al inicio de esta actividad los estudiantes mostraban un conocimiento muy pobre sobre vocabulario y notación matemática y ello se evidenció al revisar rápidamente las respuestas de cada uno de los estudiantes, motivo por el cual se hizo un breve paréntesis en el desarrollo de esta actividad.

Lo que encontramos, en relación a las respuestas observadas, fue que los estudiantes sólo utilizan símbolos como $<$, $>$, $=$ y \neq ; no conocían símbolos como \parallel , \perp , \cong ; su vocabulario, también es pobre y en lugar de decir son lados congruentes dicen son lados iguales; no empleaban los términos complementarios o suplementarios sino es igual a 90° o 180° .

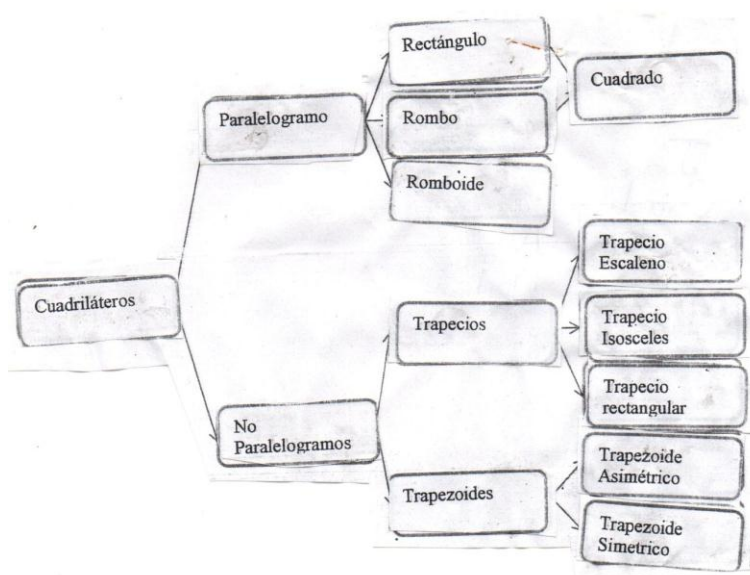
Esta situación permitió realizar un debate, que duró entre 10 y 15 minutos, para unificar criterios en el uso de los símbolos, esto no quiere decir que se desarrolló esta actividad con los estudiantes: por el contrario, el único papel de los docentes fue darle las herramientas necesarias para que ellos culminaran con mayor éxito esta actividad; luego de esta intervención se observó mejoras en las respuestas de los estudiantes.

Tanto E1, E2, E3 y E4 indican de manera acertada cuando dos segmentos son congruentes, paralelos o perpendiculares, además se puede observar que los estudiantes empiezan a usar símbolos como \cong , \perp y \parallel y a determinar cuando los ángulos son congruentes o suplementarios, aunque en algunos casos no lo hagan de manera adecuada. En el nivel 1 de razonamiento los estudiantes como lo expresa Corberán et al. (1994), pueden aprender vocabulario geométrico, identificar formas determinadas y, dada una figura, pueden reproducirla.

Finalmente, culminamos este nivel con el desarrollo de la actividad V, la cual se realizó en grupos de 3 estudiantes a fin de promover el diálogo y superar las dificultades presentadas al establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros en las actividades anteriores. En esta actividad se les solicitaba a los estudiantes que recortaran cada uno de

los recuadros, y luego pegarlos en el diagrama teniendo en cuenta la clasificación general de los cuadriláteros, en el desarrollo de la actividad los estudiantes ya empezaron a tener en cuenta otras propiedades de los cuadriláteros tales como medida de los ángulos, paralelismo, medida de los lados, entre ellos debatían por qué el cuadrado es un rectángulo y un rombo. (Ver figura 2)

Figura 2. Actividad V, clasificación de los cuadriláteros



Según lo anterior, ya en este momento los estudiantes empiezan a identificar atributos relevantes a la hora de hacer una clasificación. Como lo expresa Vinner (1991) diferencia entre dos elementos clave para adquirir un concepto: los atributos relevantes y los atributos irrelevantes. Los atributos relevantes de un concepto son aquellas propiedades que deben poseer todos los ejemplos de dicho concepto, mientras que los atributos irrelevantes son aquellas propiedades no necesarias para definir el concepto pero que permite diferenciar unos ejemplos de otros. Por ejemplo, para definir el concepto de cuadrilátero, un atributo relevante es ser un polígono de cuatro lados; sin embargo sería un atributo irrelevante el paralelismo de sus lados.

- **Nivel 2: Análisis de los cuadriláteros**

En este nivel de razonamiento, se diseñaron actividades para observar e identificar las propiedades principales de los cuadriláteros, se inició con una actividad donde los estudiantes observaban los cuadriláteros, y marcaban en una tabla las propiedades que cumpliesen. La tabla 18 muestra los resultados de esta actividad.

Tabla 18. Identificar las propiedades principales de los cuadriláteros

Actividad I. Observar e identificar las propiedades principales de los cuadriláteros																																																																																																																																																																																																							
<p>E.1</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="2">Todos los lados son</th> <th colspan="2">Los lados opuestos son</th> <th colspan="2">Las diagonales</th> <th colspan="2">Los \sphericalangle opuestos</th> <th colspan="2">Las diagonales son</th> </tr> <tr> <th></th> <th>\cong</th> <th>\cong</th> <th>\parallel</th> <th>\parallel</th> <th>Se bisecan mutuamente</th> <th>Bisecan los \sphericalangle del polígono</th> <th>\cong</th> <th>\cong</th> <th>\perp</th> <th>\perp</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cuadrilátero</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\parallel</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\perp</td> </tr> <tr> <td>Rectángulo</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cuadrado</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Rombo</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Trapezio</td> <td></td> <td></td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Trapezoide</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>\perp</td> </tr> <tr> <td>Romboide</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> </tbody> </table>		Todos los lados son		Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos		Las diagonales son			\cong	\cong	\parallel	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono	\cong	\cong	\perp	\perp	Cuadrilátero	\times	\times	\parallel		\times	\times	\times	\times		\perp	Rectángulo	\times	\times			\times	\times	\times	\times			Cuadrado	\times	\times			\times	\times	\times	\times			Rombo		\times	\times		\times	\times	\times	\times			Trapezio			\times			\times					Trapezoide	\times	\times	\times							\perp	Romboide					\times		\times	\times		\times	<p>E.2</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="2">Todos los lados son</th> <th colspan="2">Los lados opuestos son</th> <th colspan="2">Las diagonales</th> <th colspan="2">Los \sphericalangle opuestos</th> <th colspan="2">Las diagonales son</th> </tr> <tr> <th></th> <th>\cong</th> <th>\cong</th> <th>\parallel</th> <th>\parallel</th> <th>Se bisecan mutuamente</th> <th>Bisecan los \sphericalangle del polígono</th> <th>\cong</th> <th>\cong</th> <th>\perp</th> <th>\perp</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cuadrilátero</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td>\parallel</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td>\perp</td> </tr> <tr> <td>Rectángulo</td> <td>No</td> <td>\parallel</td> <td></td> <td></td> <td>Si</td> <td>Si</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cuadrado</td> <td>Si</td> <td>\parallel</td> <td></td> <td></td> <td>Si</td> <td>Si</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Rombo</td> <td>Si</td> <td>\parallel</td> <td></td> <td></td> <td>Si</td> <td>Si</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Trapezio</td> <td>No</td> <td></td> <td>\parallel</td> <td></td> <td>No</td> <td>No</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td>\perp</td> </tr> <tr> <td>Trapezoide</td> <td>No</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>No</td> <td>No</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td>\perp</td> </tr> <tr> <td>Romboide</td> <td>Si</td> <td>\parallel</td> <td></td> <td></td> <td>Si</td> <td>Si</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td>\perp</td> </tr> </tbody> </table>		Todos los lados son		Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos		Las diagonales son			\cong	\cong	\parallel	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono	\cong	\cong	\perp	\perp	Cuadrilátero	\cong	\cong	\parallel				\cong	\cong		\perp	Rectángulo	No	\parallel			Si	Si	\cong	\cong			Cuadrado	Si	\parallel			Si	Si	\cong	\cong			Rombo	Si	\parallel			Si	Si	\cong	\cong			Trapezio	No		\parallel		No	No	\cong	\cong		\perp	Trapezoide	No				No	No	\cong	\cong		\perp	Romboide	Si	\parallel			Si	Si	\cong	\cong		\perp
	Todos los lados son		Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos		Las diagonales son																																																																																																																																																																																														
	\cong	\cong	\parallel	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono	\cong	\cong	\perp	\perp																																																																																																																																																																																													
Cuadrilátero	\times	\times	\parallel		\times	\times	\times	\times		\perp																																																																																																																																																																																													
Rectángulo	\times	\times			\times	\times	\times	\times																																																																																																																																																																																															
Cuadrado	\times	\times			\times	\times	\times	\times																																																																																																																																																																																															
Rombo		\times	\times		\times	\times	\times	\times																																																																																																																																																																																															
Trapezio			\times			\times																																																																																																																																																																																																	
Trapezoide	\times	\times	\times							\perp																																																																																																																																																																																													
Romboide					\times		\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													
	Todos los lados son		Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos		Las diagonales son																																																																																																																																																																																														
	\cong	\cong	\parallel	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono	\cong	\cong	\perp	\perp																																																																																																																																																																																													
Cuadrilátero	\cong	\cong	\parallel				\cong	\cong		\perp																																																																																																																																																																																													
Rectángulo	No	\parallel			Si	Si	\cong	\cong																																																																																																																																																																																															
Cuadrado	Si	\parallel			Si	Si	\cong	\cong																																																																																																																																																																																															
Rombo	Si	\parallel			Si	Si	\cong	\cong																																																																																																																																																																																															
Trapezio	No		\parallel		No	No	\cong	\cong		\perp																																																																																																																																																																																													
Trapezoide	No				No	No	\cong	\cong		\perp																																																																																																																																																																																													
Romboide	Si	\parallel			Si	Si	\cong	\cong		\perp																																																																																																																																																																																													
<p>E.3</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="2">Todos los lados son</th> <th colspan="2">Los lados opuestos son</th> <th colspan="2">Las diagonales</th> <th colspan="2">Los \sphericalangle opuestos</th> <th colspan="2">Las diagonales son</th> </tr> <tr> <th></th> <th>\cong</th> <th>\cong</th> <th>\parallel</th> <th>\parallel</th> <th>Se bisecan mutuamente</th> <th>Bisecan los \sphericalangle del polígono</th> <th>\cong</th> <th>\cong</th> <th>\perp</th> <th>\perp</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cuadrilátero</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td>\parallel</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td>\perp</td> </tr> <tr> <td>Rectángulo</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> <tr> <td>Cuadrado</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> <tr> <td>Rombo</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> <tr> <td>Trapezio</td> <td></td> <td></td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Trapezoide</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Romboide</td> <td></td> <td></td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> </tbody> </table>		Todos los lados son		Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos		Las diagonales son			\cong	\cong	\parallel	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono	\cong	\cong	\perp	\perp	Cuadrilátero	\cong	\cong	\parallel				\cong	\cong		\perp	Rectángulo		\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times	Cuadrado	\times	\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times	Rombo	\times	\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times	Trapezio			\times								Trapezoide											Romboide			\times		\times		\times	\times		\times	<p>E.4</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="2">Todos los lados son</th> <th colspan="2">Los lados opuestos son</th> <th colspan="2">Las diagonales</th> <th colspan="2">Los \sphericalangle opuestos</th> <th colspan="2">Las diagonales son</th> </tr> <tr> <th></th> <th>\cong</th> <th>\cong</th> <th>\parallel</th> <th>\parallel</th> <th>Se bisecan mutuamente</th> <th>Bisecan los \sphericalangle del polígono</th> <th>\cong</th> <th>\cong</th> <th>\perp</th> <th>\perp</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cuadrilátero</td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td>\parallel</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>\cong</td> <td>\cong</td> <td></td> <td>\perp</td> </tr> <tr> <td>Rectángulo</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> <tr> <td>Cuadrado</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> <tr> <td>Rombo</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> <tr> <td>Trapezio</td> <td></td> <td></td> <td>\times</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Trapezoide</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Romboide</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> <td>\times</td> <td></td> <td>\times</td> </tr> </tbody> </table>		Todos los lados son		Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos		Las diagonales son			\cong	\cong	\parallel	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono	\cong	\cong	\perp	\perp	Cuadrilátero	\cong	\cong	\parallel				\cong	\cong		\perp	Rectángulo		\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times	Cuadrado	\times	\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times	Rombo	\times	\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times	Trapezio			\times								Trapezoide											Romboide		\times	\times		\times		\times	\times		\times
	Todos los lados son		Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos		Las diagonales son																																																																																																																																																																																														
	\cong	\cong	\parallel	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono	\cong	\cong	\perp	\perp																																																																																																																																																																																													
Cuadrilátero	\cong	\cong	\parallel				\cong	\cong		\perp																																																																																																																																																																																													
Rectángulo		\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													
Cuadrado	\times	\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													
Rombo	\times	\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													
Trapezio			\times																																																																																																																																																																																																				
Trapezoide																																																																																																																																																																																																							
Romboide			\times		\times		\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													
	Todos los lados son		Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos		Las diagonales son																																																																																																																																																																																														
	\cong	\cong	\parallel	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono	\cong	\cong	\perp	\perp																																																																																																																																																																																													
Cuadrilátero	\cong	\cong	\parallel				\cong	\cong		\perp																																																																																																																																																																																													
Rectángulo		\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													
Cuadrado	\times	\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													
Rombo	\times	\times	\times		\times	\times	\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													
Trapezio			\times																																																																																																																																																																																																				
Trapezoide																																																																																																																																																																																																							
Romboide		\times	\times		\times		\times	\times		\times																																																																																																																																																																																													

Fuente: Elaboración propia

En esta actividad, los estudiantes debían comprobar las características de los lados, ángulos y de las diagonales de los diferentes cuadriláteros, lo realizaron adecuadamente, se observa que los estudiantes reconocen en los cuadriláteros la congruencia entre los lados, además miden y comprueban la congruencia y demás características de las diagonales y los ángulos en los cuadriláteros; esto se debe a que los estudiantes “comparan figuras mediante el uso explícito de propiedades de sus componentes.” (Corberán et al., 1994).

La actividad II tenía como principal objetivo que los estudiantes explicaran o parafrasearan conceptos y principales propiedades de los cuadriláteros, se obtuvo un buen desempeño en el desarrollo de esta y se evidencia el progreso en el nivel 2 de razonamiento ya que

empiezan a superar las dificultades, al pedirle que definieran con sus palabras que es un cuadrilátero, E1 contesta: “*es una figura que tiene 4 lados, 4 vértices y 4 ángulos*”, aunque en esta respuesta falten algunos elementos del concepto, se evidencia un gran avance porque inicialmente solo tenían en cuenta los lados al realizar la definición. Al preguntarles que es un paralelogramo, E3 responde: “*es una figura que tiene lados paralelos 2 a 2, tiene 4 vértices, 4 ángulos*”, se observa en los estudiantes una mejoría en el vocabulario matemático. Como lo expresan Corberan et al. (1994), los estudiantes:

“Son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden describir sus partes y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal, utilizando vocabulario apropiado para componentes y relaciones (por ejemplo, "lados opuestos", "los ángulos correspondientes son iguales", "las diagonales se cortan en el punto medio", etc.).” (p. 16)

En la actividad III, se pretendía que mediante la experimentación, y el trabajo en equipo los estudiantes construyeran conceptos y comprobarán algunas propiedades de los paralelogramos; se obtuvieron progresos en el nivel 2 de razonamiento al: construir conclusiones a partir de la medida de sus ángulos y determinar las formas de dividir un cuadrilátero en dos partes iguales, afirmando que solo las diagonales dividen en dos triángulos el cuadrilátero, midieron y comprobaron el número de diagonales que se pueden trazar en un paralelogramo, testificando en qué casos tienen igual o diferente medida y si se cortan en el punto medio y además se logró que siguieran unas instrucciones para concretar las propiedades en los paralelogramos, a partir del uso de material concreto. Según Corberan et al. (1994), en el nivel 2 los estudiantes:

“Reconocen las propiedades Matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos. También pueden deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.” (p. 6)

La actividad final del nivel 2 de análisis de los cuadriláteros, se desarrolló de manera grupal y haciendo uso del software GeoGebra, en ella se solicitaba a los estudiantes que

construyera un cuadrado y un rectángulo y que luego rotará la figura; por un lado, esta actividad permitió que el estudiante se diera cuenta que un cuadrado o un rectángulo no dejan de serlo a pesar de rotarlo o encontrarlo en su forma “no habitual”, en el sentido de que en muchas ocasiones nuestros profesores recurren, también, en su presentación a figura prototipos. Por otro lado, tanto en la construcción del cuadrado como del rectángulo se pudo mostrar el paralelismo y la perpendicularidad y, más aun, se pudo ver cómo estas características o propiedades no cambian a pesar de que rotemos la figura. En consecuencia, la actividad IV apuntaba hacia que los estudiantes reconocieran que las propiedades de un cuadrilátero se mantienen aunque cambie su posición en el plano.

Con esta actividad los estudiantes E1, E2, E3 y E4 lograron manipular la orientación de los cuadriláteros, entendiendo que las propiedades se mantienen. Como lo manifiesta González (2015), citando a (Vinner y Hershkowitz, 1983):

“Uno de los distractores más conocidos son los distractores de orientación. Estos se refieren a aquellas propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto. Por ejemplo, la orientación de los rombos apoyados siempre sobre un vértice provoca que no lo reconozcan cuando aparece apoyado sobre la base.” (p.10)

- **Nivel 3: De clasificación de cuadriláteros**

En este nivel de aprendizaje, inicialmente se realizó una actividad que tenía como propósito establecer y definir elementos y principales propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros, para esto debían indicar con una equis que cuadriláteros cumplían las propiedades establecidas. En la tabla 19 se muestran los resultados obtenidos.

Tabla 19. Establecer y definir elementos y propiedades

Actividad I. Complete la siguiente tabla marcando con una equis (x) según corresponda

E.1						E.2					
	Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Romboide	Trapezio		Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Romboide	Trapezio
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos	X	X	X	X		Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos	X	X	X	X	
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos					X	Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos					X
Cuadrilátero con diagonales que son perpendiculares					X	Cuadrilátero con diagonales que son perpendiculares	X	X	X	X	
Cuadrilátero con diagonales congruentes						Cuadrilátero con diagonales congruentes	X	X	X	X	
Cuadrilátero con diagonales que se bisecan	X	X	X			Cuadrilátero con diagonales que se bisecan	X	X	X	X	
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes	X				X	Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes	X	X	X	X	
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos congruentes					X	Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos congruentes	X	X	X	X	X
Cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes	X	X	X	X		Cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes	X	X	X	X	

E.3						E.4					
	Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Romboide	Trapezio		Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Romboide	Trapezio
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos	X	X	X	X		Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos	X	X	X	X	
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos					X	Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos					X
Cuadrilátero con diagonales que son perpendiculares		X	X			Cuadrilátero con diagonales que son perpendiculares	X	X	X		
Cuadrilátero con diagonales congruentes	X	X	X	X		Cuadrilátero con diagonales congruentes	X	X	X	X	
Cuadrilátero con diagonales que se bisecan	X	X	X	X		Cuadrilátero con diagonales que se bisecan	X	X	X	X	
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes	X	X	X	X		Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes	X	X	X	X	X
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos congruentes					X	Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos congruentes					X
Cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes	X	X	X	X		Cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes	X	X	X	X	

Fuente: Elaboración propia

Según los resultados, se puede decir que los estudiantes tienen claridad al identificar los cuadriláteros con dos pares o un par de lados opuestos paralelos, cuando se les pregunto sobre las propiedades de las diagonales de los cuadriláteros vemos que los estudiantes reconocen los cuadriláteros donde las diagonales son perpendiculares y se bisecan, Los estudiantes establecen de forma adecuada la congruencia en los lados y ángulos de los cuadriláteros, vemos un gran avance porque van definiendo elementos que antes no reconocían en estas figuras. Los estudiantes estarían alcanzando el nivel 3 de razonamiento porque según Corberan et al. (1994), en este nivel:

“Pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras a partir de propiedades suyas ya conocidas formuladas con precisión matemática. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación y sus demostraciones son de tipo informal.” (p. 18)

Luego se esta actividad, se realizó un trabajo grupal que consistía en escribir las propiedades de algunos cuadriláteros, las cuales estaban señaladas en unos recuadros, con el fin de lograr que los estudiantes caracterizaran a los cuadriláteros según sus lados, ángulos o diagonales. Dentro de la actividad encontramos respuestas como: *“El rectángulo: todos sus ángulos congruentes, la suma de sus ángulos internos es 360° , ángulos opuestos congruentes, lados opuestos congruentes, diagonales congruentes, las diagonales se intersecan en su punto medio”* *“El romboide: la suma de sus ángulos internos es 360° , ángulos opuestos congruentes, lados opuestos congruentes, las diagonales se intersecan en su punto medio”* *“El rombo: diagonales perpendiculares, la suma de sus ángulos internos es 360° , ángulos opuestos congruentes, lados opuestos congruentes, todos sus lados congruentes, sus diagonales son bisectrices, las diagonales se intersecan en su punto medio”*

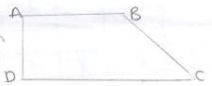
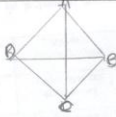
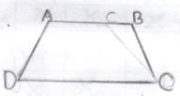
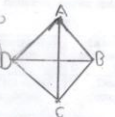
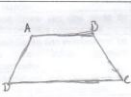

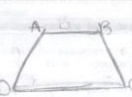

Se evidencia en esta actividad que los estudiantes, de una lista de propiedades seleccionan y descartan dependiendo del cuadrilátero que estén trabajando, se percibe un avance porque de acuerdo a las propiedades de los lados, ángulos y diagonales los estudiantes empiezan a realizar clasificaciones. En el nivel 3 los estudiantes según Corberan et al. (1994):

“Son capaces de: a) Identificar conjuntos diferentes de propiedades que caracterizan a una clase de figuras y comprobar su suficiencia. b) Identificar conjuntos mínimos de propiedades que pueden caracterizar a una figura. c) Formular y utilizar una definición para una clase de figuras.” (p.18)

En la actividad 3, de este nivel se realizó un trabajo individual con el fin que los estudiantes empezarán a establecer relaciones de inclusión de las principales propiedades que caracterizan a los cuadriláteros, en la tabla 20 se muestran algunos resultados obtenidos.

Tabla 20. Establecer relaciones de inclusión de las propiedades

Actividad III. Comprueba si los enunciados sobre un cuadrilátero ABCD son verdaderos y
--

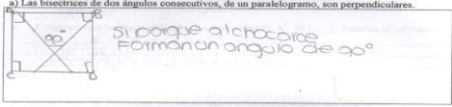
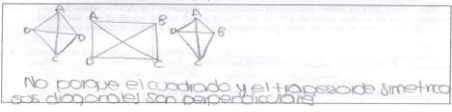
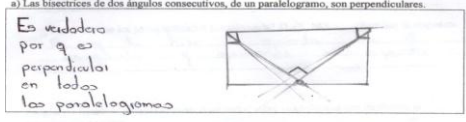
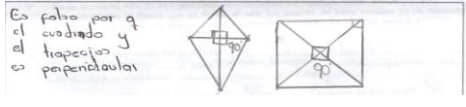
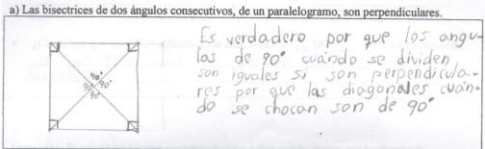

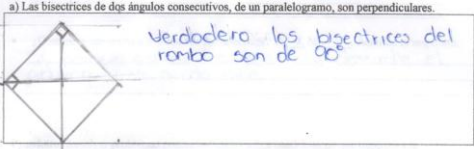
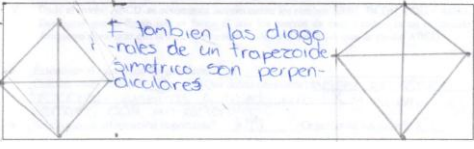
justifique sus respuestas	
<p>E.1</p> <p>a) Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces ABCD es un trapecio.</p> <p>Si porque los trapecios tienen un par de lados paralelos</p>  <p>b) Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces ABCD es un rombo</p>  <p>Es verdadero porque sus diagonales al chocarse son perpendiculares</p>	<p>E.2</p> <p>a) Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces ABCD es un trapecio. F</p> <p>Es verdadero por q el lado AB y CD son </p>  <p>b) Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces ABCD es un rombo</p> <p>Es verdadero por q sus diagonales se chocan y forman ángulos de 90°</p> 
<p>E.3</p> <p>a) Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces ABCD es un trapecio.</p>  <p>Es verdadero por que sus lados AB y CD son </p> <p>b) Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces ABCD es un rombo</p>  <p>Es verdadera por que las diagonales al chocarse forma un ángulo de 90°</p>	<p>E.4</p> <p>a) Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces ABCD es un trapecio.</p>  <p>Si es v por que el $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$</p> <p>b) Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces ABCD es un rombo</p>  <p>Si es v porque sus diagonales forman un ángulo al chocarse</p> <p>$\overline{AC} \perp \overline{BD}$</p>

Fuente: Elaboración propia

Se puede notar en los estudiantes, un avance porque primero realizan una representación gráfica de forma adecuado de los cuadriláteros, señalan cada vértice utilizando letras mayúsculas, trazan las diagonales, todo esto lo hacen con el fin de comprobar las afirmaciones dadas, en sus justificaciones vemos que utilizan símbolos y reconocen que las diagonales del rombo son perpendiculares porque forman un ángulo de 90° , evidenciándose así la comprensión del concepto de perpendicularidad. Como lo expresa Corberán et al. “en sus demostraciones, hacen referencias explícitas a las definiciones.” (p. 18)

Se continuó con la actividad IV, la cual se realizó en parejas con el fin que los estudiantes realizaran demostraciones de manera intuitiva e informal, formulando ejemplos y/o contraejemplos sobre propiedades de los cuadriláteros. En la tabla 21, se muestran las respuestas de los estudiantes.

Tabla 21. Demostraciones de manera intuitiva e informal

Actividad IV. Comprobar las siguientes afirmaciones. Si es verdadera, presente una prueba y si es falsa, muestre un contraejemplo.	
<p>E.1</p> <p>a) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos, de un paralelogramo, son perpendiculares.</p>  <p>b) Todo cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares, es un rombo</p> 	<p>E.2</p> <p>a) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos, de un paralelogramo, son perpendiculares.</p>  <p>b) Todo cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares, es un rombo</p> 
<p>E.3</p> <p>a) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos, de un paralelogramo, son perpendiculares.</p>  <p>b) Todo cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares, es un rombo</p> 	<p>E.4</p> <p>a) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos, de un paralelogramo, son perpendiculares.</p>  <p>b) Todo cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares, es un rombo</p> 

Fuente: Elaboración propia

En la primera pregunta los estudiantes E1, E2, E3 y E4, realiza cada uno diferentes paralelogramos demostrando que la afirmación planteada es verdadera, en sus justificaciones se encuentran frases como E1: “*si porque al chocarse forman un ángulo de 90°*” y llegan a una conclusión E2: “*porque es perpendicular en todos los paralelogramo*”. Estas respuestas demuestran la construcción de conceptos en los estudiantes.

En la segunda pregunta los cuatro estudiantes reconocen que la afirmación es falsa, y los estudiantes E1, E2, y E3 plantean dos contraejemplos el cuadrado y el trapezoide simétrico. Se ve un progreso en el nivel 3 de razonamiento porque según Corberán et al. (1994) los estudiantes realizan una representación gráfica de forma adecuado de los cuadriláteros,

Finalmente se realizó una actividad, donde los estudiantes debían resolver un problema sobre cuadriláteros que implicará la organización de datos, en esta actividad debían hallar que figura se formaba luego de una serie de pasos y además demostrar que el área del rectángulo formado era el doble del área del rombo. Los estudiantes realizaron su representación gráfica adecuada para traducir el enunciado del problema y hallaron la figura que se formaba correctamente, esto muestra que los estudiantes “comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal” (Corberan et al., 1994)

8.2.2 Análisis de la categoría regulación metacognitiva

- **Subcategoría: Planeación**

En este segundo momento, frente a las preguntas de planeación P1. ¿Entendiste el enunciado del problema? ¿Qué debes hallar?¿Cuántas veces lo leíste?, P2. ¿Subrayaste la información importante? ¿Organizaste los datos?, los estudiantes manifiestan que si entienden el enunciado, siguen leyendo en promedio de 2 a 3 veces el enunciado, y expresan con sus palabras que deben hallar o demostrar. Además subrayan y organizan información importante.

Frente a la pregunta P3. Describe detalladamente, los pasos o la secuencia que llevarás a cabo para realizar la demostración, de la actividad IV del nivel de clasificación de cuadriláteros, el estudiante E.1 responde: *“leer el enunciado, hacer el dibujo, marcar los vértices, comprobar si el enunciado es falso o verdadero, justificar la respuesta”* Y E2 responde: *“leer el enunciado varias veces, hacer una representación de mi respuesta, responder verdadero o falso”*. En lo que manifiestan estos estudiantes se evidencia un plan más detallado de los pasos que debe realizar para resolver el problema, comparado con lo que hacían en el primer momento.

En la actividad V del nivel 3 de aprendizaje, el estudiante E.3 respondió a la P.3 “*primero leer el problema hasta 3 veces, subrayar la información importante, hacer los dibujos de los rombos, unir los centros, decir que figura se forma, mirar y comparar las áreas, comprobar si me quedo bien*” y E.4 respondió: “*leer el enunciado, hacer un dibujo para resolverlo, responder a la pregunta, y verificar si quedo bien*”; en lo que manifiestan estos estudiantes se evidencia tener un proceso de planeación ordenado, en la cual se enumeran los pasos o secuencia a seguir para resolver el problema. Al respecto (Sanz 2010, p.115) plantea que “la planeación está dirigida a la definición de los objetivos que se desea alcanzar, a la selección de las estrategias, a la prevención de dificultades”.

Todo lo anterior muestra como la planeación tiene relación con las estrategias cognitivas utilizadas por los educandos, en este caso se evidencia en el proceso llevado a cabo para empezar a resolver se encuentra: leer varias veces el problema, subrayar datos e información importantes, hacer representaciones gráficas, es decir entre más estrategias cognitivas tenga el educando mejor puede ser su proceso de planeación. En este sentido, Schoenfeld (1992) manifiesta que “las estrategias cognitivas o heurísticas involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución”. En las figuras 3 y 4 se muestran las estrategias cognitivas utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas con cuadriláteros.

Figura 3. Respuesta E2 Actividad IV

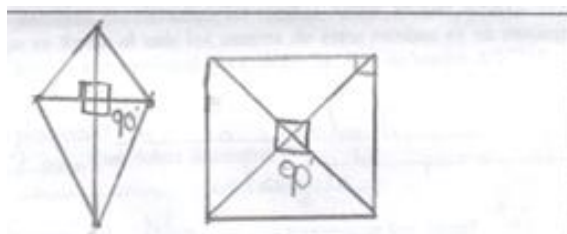
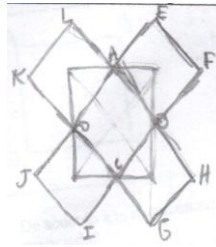


Figura 4. Respuesta E4 Actividad V



En este segundo momento, la planeación permitió que los estudiantes elaboraran una serie de pasos para resolver el problema, lo cual originó una mejor organización de los datos, realización de representaciones gráficas, resaltaron elementos importantes y entendieron mejor el problema.

- **Subcategoría: Monitoreo**

En este segundo momento, los estudiantes frente a la categoría monitoreo reflejan un avance respecto al primer momento, esto se evidencia en las respuestas dadas por los educandos, algunas de ellas se describen a continuación:

El estudiante E.1 manifiesta: *“creo que lo estoy haciendo bien, porque me devolví a leer nuevamente el problema”*. El estudiante E.2 expresa: *“los pasos que estoy usando me sirven porque los voy revisando”*. Por su parte el estudiante E.3 expresa: *“si lo estoy haciendo bien porque rectifique la gráfica, había ubicado mal los vértices”* El estudiante E.4 manifiesta: *“al comienzo lo estaba haciendo mal, borre y volví a leer el problema y así hice bien la gráfica para hallar la respuesta”*.

En las respuestas dadas por los estudiantes E.1, E.2; E.3; E.4; se evidencia que realizan monitoreo de lo que hacen porque revisan las representaciones para ver si están bien, leen nuevamente el enunciado si es necesario y algunas veces borran para corregir las gráficas. Se evidencia más comprensión del tema y verifican mejor lo que están haciendo. Al respecto Sanz (2010.p.116) plantea que el monitoreo “Consiste en la realización de la

actividad y en el control que se ejerce sobre cada uno de los aspectos implicados en su desarrollo y sobre los posibles factores que pueden incidir en la concentración y distribución de los recursos”.

En este segundo momento, el monitoreo permitió a los estudiantes revisar la representaciones graficas realizadas, detectar y corregir errores, replantear pasos del plan, justificar algunas respuestas y volver a leer el problema para una mejor comprensión.

- **Subcategoría: Evaluación**

En este segundo momento, los estudiantes frente a la categoría evaluación, reflejan haber mejorado en este aspecto comparado con el primer momento. En la tabla 22 se presentan las preguntas relativas a la subcategoría evaluación.

Tabla 22. Preguntas de evaluación momento de desubicación

PREGUNTAS DE EVALUACIÓN
P6. Menciona cuáles fueron las dificultades que tuviste para resolver el problema. Justifica tu respuesta
P7. ¿Verificaste la solución?
P8. ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?
P9. ¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?
P10. ¿Considera que los pasos o secuencia que planeo funcionó bien?¿Por qué?

Fuente: Elaboración propia

El estudiante E1 frente a las preguntas de evaluación responde: *“una de las dificultades fue la de comprobar que el área del rectángulo era el doble”, “si verifique”, “la figura que se formó”, “si puedo hacerlo más rápido al entender el enunciado”, “se me funciona el plan, porque se formó la figura correcta”*.

El estudiante E2 frente a las preguntas de evaluación responde: *“tuve algunas dificultades al colocar las letras a la figuras”, “si verifique”, “lo que a mí me llamo más la atención fue realizar la representación gráfica”, “me demoraría menos tiempo, porque entiendo más”, “si me funcionaron los pasos, pero iba corrigiendo”*

El estudiante E3 frente a las preguntas de evaluación responde: *“la dificultad que tuve fue de unir las mitades de los rombos”, “si lo hice”, “me llamo la atención que de 5 rombos al unir las mitades del rombo iba hacer un rectángulo”, “creo que de pronto puedo realizar problemas similares en menos tiempo”, “me funciono el plan porque me ayudo a resolver”*

El estudiante E4 frente a las preguntas de evaluación responde: *“la dificultad fue realizar la figura porque no sabía que era exteriormente”, “si”, “la figura”, “solo un poco más rápido los haría”, “me funcionaron los pasos me ayudaba a que quedara bien”*

Todo lo anterior evidencia que los estudiantes realizan una evaluación del proceso llevado a cabo en solución de problemas con cuadriláteros, reconocen algunas dificultades en comparar las áreas de figuras, en colocar las letras de los vértices, en hacer la representación gráfica porque no conocía algunos términos, y manifiestan sentirse mejor al resolver el problema porque entienden más el tema y recordaron algunos conceptos. Al respecto Sanz (2010) manifiesta que la evaluación implica comprobar los resultados de las propias acciones con los criterios previamente establecidos, bien sea por el docente, por el estudiante o por ambos a la vez.

Además, se evidencia que los estudiantes al saber más acerca del tema y los procedimientos que deben realizar, se sienten más motivados para la solución de problemas, lo que les permitió mejorar gradualmente en este proceso. Del mismo modo, los estudiantes manifiestan que demoran menos tiempo en la solución de problemas similares. En este sentido Schoenfeld (1992) manifiesta que “una de las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas son los

componentes afectivos que caracterizan la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas”.

En este segundo momento la evaluación permitió que los estudiantes identificaran errores, corregir operaciones, reflexionar sobre el proceso llevado a cabo, manifestar el grado de satisfacción de la tarea realizada y realizar una lectura general de los pasos.

8.3 MOMENTO DE REENFOQUE

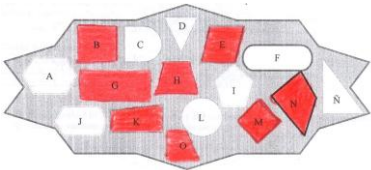
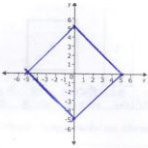
8.3.1 Análisis de las dificultades según los niveles del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los cuadriláteros

En este último momento, las dificultades que presentaban los estudiantes E.1, E.2, E.3 y E.4, detectados en el primer momento, asociados a concepciones inducidas fueron la mayoría superados satisfactoriamente a través de todo el proceso. Los estudiantes ya reconocen los cuadriláteros en su forma global, analizan las propiedades de los cuadriláteros y clasifican los diferentes cuadriláteros según sus propiedades, los definen correctamente y los diferencian. A continuación se presenta algunas de las respuestas de los estudiantes referentes a la subcategoría niveles del modelo de Van Hiele, en la cual se refleja la superación de las dificultades.

- **Nivel 1: Reconocimiento de los cuadriláteros**

En este momento se aplicó el cuestionario cuadriláteros II, en la tabla 23 se presenta algunas respuestas de la subcategoría de reconocimiento.

Tabla 23. Muestra de las preguntas y respuestas concernientes al nivel 1

<p>P1. En la figura que se muestra a continuación, colorea los polígonos que sean cuadriláteros</p>	<p>P2. Teniendo en cuenta la figuras coloreadas en el punto anterior, indique cuales son</p>	<p>P3. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos A (-5,0); B (0,5); C (5,0) y D (0,-5), únelos en forma consecutiva con una línea recta</p>
<p>E.1</p> 	<p>E.2</p> <p>Cuadrados: <u>B</u> Rectángulos: <u>G</u> Rombos: <u>M</u> Paralelogramos: <u>BEGHKMNO</u> Trapecios: <u>HO</u></p> <p>Trapezoides: <u>KN</u> Romboides: <u>E</u> No paralelogramos: <u>NCDKAIJL</u> Cuadrilateros: <u>BEM</u> No cuadrilateros: <u>CDKAIJL</u></p>	<p>E.3</p>  <p>¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? <u>Paralelogramo</u> Define el cuadrilátero formado: <u>es rombo que se parece al cuadrado y al Rectángulo</u> ¿Cuáles son sus características? <u>que tiene 4 vértices 4 ángulos 4 lados que se parece a un cuadrado y rectángulo y es paralelogramo</u></p>

Fuente: Elaboración propia

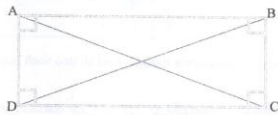
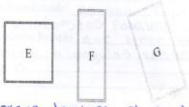
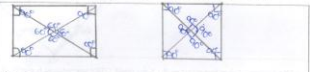
La tabla 23, evidencia el progreso que los estudiantes han tenido en los procesos de reconocimiento de cuadriláteros, debido a que ya reconocen los cuadriláteros en su forma global, descubren y comprenden la forma de los cuadriláteros y la diferenciación entre ellos.

Además, se evidencia que los estudiantes establecen relación entre paralelismo y perpendicularidad en un cuadrilátero, empiezan a utilizar un vocabulario matemático básico adecuado, y establecen una visión global de la clasificación de los cuadriláteros, al saber más sobre los cuadriláteros se muestran más motivados, lo que les permitió superar de manera satisfactoria el nivel 1 de reconocimiento de cuadriláteros del modelo Van Hiele.

• **Nivel 2: Análisis de los cuadriláteros**

En la tabla 24 se presenta algunas respuestas de la subcategoría de análisis de los cuadriláteros.

Tabla 24. Muestra de las preguntas y respuestas concernientes al nivel 2

<p>P4. En un rectángulo ABCD, los segmentos \overline{AC} y \overline{BD} son las diagonales, ¿cuál de las siguientes opciones son verdaderas o falsas para cualquier rectángulo</p>	<p>P5. Cuál de estos pueden ser llamados rectángulos. Justifica tu respuesta</p>	<p>P6. Dibuja un cuadrado y un rectángulo. Luego escribe sus diferencias y semejanzas</p>
 <p>A. Hay 4 ángulos rectos. (✓) B. Hay 4 lados. (✓) C. Las diagonales tienen la misma longitud. (✓) D. Los lados opuestos tienen la misma longitud. (F) E. Hay 4 ángulos agudos. (F) F. Las diagonales son perpendiculares (✓) G. La suma de sus ángulos internos es 260° (F) H. Sus diagonales son bisectrices (F) I. Solo dos ángulos internos son congruentes (F)</p>	<p> <input checked="" type="radio"/> Todos. <input type="radio"/> Sólo F. <input type="radio"/> Sólo G. <input type="radio"/> Solamente E y F. <input type="radio"/> Solamente Q y R. </p>  <p>Justifica tu respuesta: todos porque tambien el cuadrado es llamado rectangulo</p>	 <p> Diferencias: El cuadrado es un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos internos son rectos (90°). El rectángulo tiene los lados opuestos iguales y los ángulos internos son rectos (90°). </p> <p> Semejanzas: Ambos son cuadriláteros y tienen los cuatro ángulos internos sumando 360°. </p> <p>De acuerdo a lo anterior, decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta (justificar la respuesta).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Todo cuadrado es un rectángulo. (✓) porque tiene los cuatro ángulos rectos. • Todo rectángulo es un cuadrado. (F) porque no tiene los cuatro lados iguales.

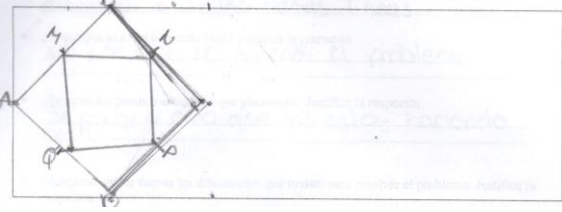
Fuente: Elaboración propia

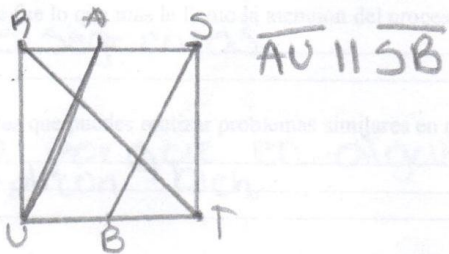
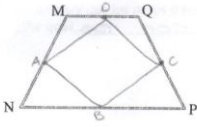
Tomando como base las respuestas de los estudiantes en la secuencia de actividades y el nivel en el que fueron ubicados en la prueba diagnóstica, se puede evidenciar que después de aplicar la secuencia de actividades, se observa un progreso el cual se evidencia en los estudiantes porque: describen un cuadrilátero y sus propiedades, definen y deducen propiedades, establecen algunas relaciones entre las propiedades de los cuadriláteros, establece en forma general las propiedades de los cuadriláteros, relacionan entre los cuadriláteros las características propias de sus diagonales, establecen las propiedades que relacionan y diferencian un cuadrado de un rombo, describen las propiedades que tienen los rombos, reconocen las relaciones entre un cuadrado y un rectángulo.

• **Nivel 3: Análisis de los cuadriláteros**

En este momento de reenfoque, se plantearon cuatro preguntas basadas en el nivel 3 de análisis de los cuadriláteros, en la tabla 25 me muestran algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 25. Muestra de las preguntas y respuestas concernientes al nivel 3

<p>P7. Indicar cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar</p>	<p>P8. Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ?</p>
<p>a) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. b) Si un cuadrilátero tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. c) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. d) Si un cuadrilátero es rectángulo entonces es paralelogramo. e) Si un cuadrilátero es rombo entonces es paralelogramo. f) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto entonces es rectángulo.</p> <p style="text-align: right;">F F F F F F</p>	<p>8. Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ? <u>Un Cuadrado</u> Defina con sus palabras el cuadrilátero formado: <u>puede ser un rombo o un rectángulo</u> Enuncia las propiedades del cuadrilátero formado: <u>sus ángulos internos suma 360°, sus diagonales tienen la misma longitud</u></p> 
<p>P9. Dibuja el paralelogramo RSTU. Marca con A y B los puntos medios de los segmentos RS y TU, respectivamente, traza la diagonal RT y los segmentos AU, SB que puedes decir de los segmentos que cortan la diagonal principal. Escribe simbólicamente la conclusión</p>	<p>P10. En el siguiente trapecio isósceles MNPQ, con $MN=PQ$, ubica los puntos A, B, C y D, que son los puntos medios de los lados MN, NP, PQ y QA, respectivamente. Une en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q</p>

	 <hr/> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué tipo cuadrilátero se forma?: <u>un rombo</u> • Defínelo: <u>tiene 4 líneas congruente y rectas, 4 ángulos y 4 vertices</u> • Escribe sus propiedades: <u>sus ángulos son congruentes, y los segmentos AD y BC son </u>
---	--

Fuente: Elaboración propia

Según las respuestas dadas por los estudiantes, podemos observar un progreso porque ya realizan demostraciones mediante la comprensión de unos pasos, usando razonamientos deductivos informales, se puede observar el uso de vocabulario y símbolos matemáticos de forma adecuada.

8.3.2 Análisis de la categoría regulación metacognitiva

- **Subcategoría: Planeación**

En el tercer momento, los estudiantes E.1, E.2; E.3; E.4; frente a la subcategoría planeación manifiestan que entienden el enunciado del problema, lo leen en promedio de dos a tres veces, subrayan la información importante y organizan los datos si es necesario. Cuando se les pide describir los pasos que llevarán a cabo para resolver la actividad, el estudiante E1 expresa: “1. Leer detalladamente el enunciado, 2. desarrollar un gráfico, 3. verificar la solución, 4. justificar mi respuesta”. El estudiante E2, manifiesta: “1. Leer el problema, 2. ubicar en un grafica los puntos, 3. Ponerle letras, 4. Unir con líneas, 5. Dar la solución”

Lo anterior, evidencia que los estudiantes son más organizados en la planeación para resolver el problema, muestran una serie de pasos enumerados a seguir el cual les permite ir trabajando de acuerdo a lo que le pide el problema. Realizan minuciosamente una

representación gráfica, ubicando la información proporcionada en el ejercicio y resaltando aspectos relevantes del problema.

- **Subcategoría: Monitoreo**

En el tercer momento, el estudiante E.1, frente a la subcategoría monitoreo manifiesta: *“si me sirvieron los pasos porque fui revisando el ejercicio y corrigiendo si estaba malo”*, El estudiante E.2 expresa: *“creo que lo estoy haciendo bien porque me devuelvo a leer varias veces el problema para no perderme”*

El estudiante E.3 manifiesta: *“si lo estoy haciendo bien, porque leí bien y despacio el enunciado”* El estudiante E.4 manifiesta: *“si me sirvieron los pasos, porque cuando revise me sentí seguro de lo que hacía”*

Todo lo anterior refleja que los estudiantes realizan de alguna manera un proceso de monitoreo en lo que hacen, lo cual les permite revisar si la representación gráfica están bien, volver a leer información importante, y algunas veces borrar para corregir. Se evidencia más comprensión del tema y verifican mejor lo que están haciendo.

- **Subcategoría: Evaluación**

En el tercer momento, el estudiante E.1 frente a la subcategoría evaluación manifiesta: *“al final si verifique la solución y corrijo si está mal, antes no lo hacía y me equivocaba en algo”*

El estudiante E.2 expresa: *“no tuve dificultades porque revisaba y entendía todo lo que debía hacer”*; El estudiante E.3 manifiesta: *“lo que más me llamo la atención fue que de un trapecio isósceles se formó un rombo, siguiendo los pasos que decía el enunciado”*

El estudiante E.4 manifiesta: *“los pasos que planeé si funcionaron bien porque siempre al final rectifico”*

En las respuestas dadas por los estudiantes se evidencia que realizan una evaluación del proceso que llevan a cabo en la solución de ejercicios con cuadriláteros, reconocen si presentan o no dificultades, realizan anotaciones de lo que no entienden y manifiestan sentirse mejor al resolver los problemas porque entienden y recuerdan los conceptos.

8.3.3 Entrevista semiestructurada

Al finalizar la unidad didáctica se implementó una entrevista semiestructurada donde se analizó acerca de la incidencia en la implementación de las estrategias de regulación metacognitivas de planeación, monitoreo y evaluación en el proceso de aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo Van Hiele. También la entrevista permitió identificar la superación de los obstáculos que presentaron los estudiantes antes de la implementación de la Unidad Didáctica.

Las respuestas de los estudiantes, se muestran en la tabla 26.

Tabla 26. Respuestas entrevista semiestructurada

Pregunta 1. Antes de las actividades realizadas en la UD, ¿empleabas alguna secuencia de pasos para desarrollar una actividad? Sí __ No __ Justifica tu respuesta.	
E.1 <i>“No, no hacía ningunos pasos porque no me habían explicado que eso lo debía hacer”</i>	E.2 <i>“No, porque no sabía”</i>
E.3 <i>“No, yo solo leía el ejercicio y empezaba a desarrollarlo”</i>	E.4 <i>“No, porque nunca me había enseñado a hacer eso”</i>

Pregunta 2. Después de realizar las actividades de la UD, ¿consideras importante buscar estrategias y elaborar un plan, para la solución de una actividad?	
E.1 <i>“Si, porque me ayudaba hacer los ejercicios, ya que haciendo los pasos, organizando datos y resaltando información importantes se me facilitaba todo”</i>	E.2 <i>“Si, porque utilizando planes o haciendo alguna estrategia se logra un resultado mejor”</i>
E.3 <i>“Si, porque ahora al leer mejor, sacar la información y hacer el plan me queda bien los ejercicios”</i>	E.4 <i>“Si, porque ayuda mucho para desarrollar y verificar si la actividad está bien”</i>
Pregunta 3. Luego de las actividades realizadas en la UD, ¿qué actividades realizas para hacerle seguimiento al plan de trabajo planteado?	
E.1 <i>“leo nuevamente el enunciado para mirar que todo me esté quedando bien”</i>	E.2 <i>“verifico leyendo y revisando lo que voy haciendo y si está mal lo corrijo de una vez”</i>
E.3 <i>“para hacer seguimiento al plan, verifico constantemente el ejercicio para estar seguro de que lo estoy haciendo”</i>	E.4 <i>“las actividades que hago es revisar nuevamente el enunciado”</i>
Pregunta 4. Luego de las actividades realizadas en la UD, ¿piensas que es necesario que usted como estudiante siga evaluando si la estrategia fue efectiva al resolver problemas? Sí ___ No ___ Justifica tu respuesta	
E.1 <i>“si, es necesario porque si la estrategia que utilice no me funciona la corrijo para ejercicios similares”</i>	E.2 <i>“si, porque al final se debe verificar la solución para ver si sirvió la estrategia, si funciona la sigo usando”</i>
E.3 <i>“Si, porque al evaluar si fue efectiva puedo después hacer ejercicios más rápido”</i>	E.4 <i>“si es necesario, para que al final si algo le quedo mal uno puedo arreglarlo rápidamente”</i>

Pregunta 5. ¿Le gustó la metodología empleada para aprender sobre los cuadriláteros?	
E.1 <i>“Si me gusto porque fue diferente, era cosas nuevas que no habíamos hecho, usamos el computador, fueron actividades que me gustaron y además ahora hago los ejercicio más tranquila porque soy más organizada y planeo como lo voy a hacer”</i>	E.2 <i>“Si, porque ahora siendo que se más sobre los cuadriláteros, los profesores nos explicaron muy bien y las actividades fueron bonitas, y ahora cuando son ejercicios difíciles voy revisando para ir corrigiendo”</i>
E.3 <i>“Si me agrado todo el trabajo que hicimos para aprender sobre los cuadriláteros, ahora cuando desarrollo ejercicios realizo un plan para realizarlos bien y constantemente voy revisando para ver si voy bien”</i>	E.4 <i>“si me gusto la metodología, ya que fue diferente, hicimos cosas nuevas, usamos el programa geogebra, y otras cosas. Y ahora leo con más atención los enunciados y voy rectificando lo que hago”</i>

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta los tres momentos enunciados anteriormente y las diferentes respuestas de los estudiantes en los procesos llevados a cabo, se puede realizar la siguiente caracterización de la forma como la regulación metacognitiva favoreció a cada uno de los estudiantes en el aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo Van Hiele y cómo fue su proceso:

Estudiante E.1: En el primer momento manifiesta dificultades en el reconocimiento, análisis y clasificación de cuadriláteros. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento en la aplicación la unidad didáctica, en el cual se superan las dificultades en relación con la clasificación y análisis de cuadriláteros. En el tercer momento es más autónomo y organizado donde se reflejan mejor sus procedimientos y capacidad para ejecutar las tareas, logrando la superación de las dificultades, ubicándose finalmente en el nivel 3 de razonamiento.

Estudiante E.2: En el primer momento manifiesta dificultades en el reconocimiento, análisis y clasificación de cuadriláteros. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento en la aplicación de la unidad didáctica, en el cual se observa un progreso en relación a los niveles de razonamiento. En el tercer momento es más autónomo y organizado donde se reflejan mejor sus procedimientos y capacidad para ejecutar las tareas, logrando la superación las dificultades.

Estudiante E.3: En el primer momento presenta dificultades en el reconocimiento, análisis y clasificación de cuadriláteros. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento en la aplicación de la unidad didáctica, en el cual se superan las dificultades en relación al análisis de propiedades de los cuadriláteros. En el tercer momento es más organizado, detalla los pasos que realiza, reconoce errores y realiza mejor sus procedimientos, logrando la superación de las dificultades y el progreso en los niveles de razonamiento.

Estudiante E.4: En el primer momento presenta dificultades en el reconocimiento, análisis y clasificación de cuadriláteros. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento en la aplicación de la unidad didáctica, en el cual se logra superar las dificultades en relación al reconocimiento y clasificación de los cuadriláteros. En el tercer momento es más organizado, detalla los pasos que realiza, reconoce errores, monitorea lo que hace y realiza mejor sus procedimientos, logrando la superación de las dificultades, ubicándose finalmente en el nivel 3 de razonamiento.

En términos generales, cada uno de los procesos de la regulación metacognitiva (planeación, monitoreo y evaluación) permitieron mejorar la capacidad de resolver problemas de cuadriláteros basados en los niveles de reconocimiento, análisis y clasificación del modelo Van Hiele. A continuación se describe la manera:

En la planeación como primer proceso que se lleva a cabo al resolver el problema, permitió que los estudiantes diseñaran una serie de pasos a través de los cuales iban a realizar cada

una de las actividades del problema. En primer lugar realizaban la lectura comprensiva del problema, después de entenderlo y saber cuál era la pregunta se presentaba la organización de la información, seguidamente realizaban representaciones gráficas que les ayudaban a responder lo que preguntaban y posteriormente daban respuesta y justificación al problema planteado. El hecho de tener una ruta para resolver el problema permitió a los estudiantes ser organizados y saber con qué recursos contaba para la solución de los ejercicios.

En lo referente al monitoreo, este permitió a los estudiantes saber si lo que estaban haciendo estaba bien, revisar las representaciones, corregir errores, leer nuevamente el problema y replantear estrategias. También se pudo reconocer los aciertos y dificultades durante el proceso.

En el proceso de evaluación, permitió saber si se cumplió el objetivo propuesto, identificar algunas dificultades en el proceso llevado a cabo, además se pudo evaluar la efectividad de los pasos realizados.

En conclusión se puede decir que los estudiantes a través de la regulación metacognitiva fueron capaces de adaptar sus estrategias a la demandas de los problemas, aprovecharon al máximo sus recursos cognitivos, son conscientes de lo que hacen y porqué lo hacen, ahora son más reflexivos y organizados al planear, se muestran motivados por aprender y comprometidos con su proceso de aprendizaje, logrando finalmente alcanzar satisfactoriamente los niveles 1, 2 y 3 de razonamiento del modelo de Van Hiele.

6. CONCLUSIONES

La investigación realizada permitió construir y llegar a las siguientes conclusiones, en relación a la aplicación de la regulación metacognitiva en el aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo Van Hiele.

- La aplicación de los procesos de regulación metacognitiva permitió mejorar el aprendizaje de los cuadriláteros permitiendo reconocerlos, analizarlos y clasificarlos, debido a que se crearon espacios que favorecieron la toma de decisiones de los estudiantes, la comprobación y construcción de conceptos, y el desarrollo de habilidades para la regulación de sus propios procesos de aprendizaje; permitiendo saber por qué realizaban determinadas acciones y no limitarse a la repetición. Además permitió a los educandos identificar los errores y aciertos para tenerlos presentes en otros problemas.
- El proceso de planeación como actividad previa a la solución de los problemas, permitió el diseño de unas secuencias por parte de los estudiantes que incluían las acciones a seguir, en este proceso se tuvo en cuenta los conocimientos que tenían los estudiantes acerca de los cuadriláteros, sus dificultades y los recursos cognitivos con que contaba para enfrentar los problemas y de esta manera realizar una serie de pasos organizados de lo que se iba a realizar para poder resolver el problema planteado.
- El monitoreo como proceso que se lleva a cabo desde que se inicia la realización de las actividades, permitió la verificación de dichas actividades que se iban realizando, en este caso las representaciones y rectificación de las mismas. Esto implicaba la revisión de la estrategia empleada e identificar si se estaba llevando a cabo el plan que se diseñó. En algunos casos el estudiante pudo transformar el plan y sus estrategias, organizando nuevamente la información y rectificando las representaciones graficas de diferentes maneras. También permitió al estudiante mantener una actitud reflexiva constante.

- El proceso de evaluación como actividad que permite contrastar los resultados con lo que se planeó al principio, permitió la valoración de los resultados de la estrategia utilizada, como también la rectificación de algunas de las representaciones que se llevaron a cabo en todo el proceso. Esto conllevó a corregir algunos pasos y replantear en algunas ocasiones lo que se hizo.
- En los niveles de razonamiento del modelo Van Hiele, es importante reconocer las dificultades que los estudiantes presentan, debido a que esto permite tener una visión sobre el estado de los educandos, algunas de estas dificultades se pudieron identificar mediante procesos metacognitivos, en este sentido, se confirma lo que manifiesta Tamayo et al. 2010 “la práctica de la metacognición facilita la identificación de obstáculos epistemológicos, lingüísticos y pedagógicos en los actores del proceso de enseñanza–aprendizaje.” (pág.119).
- La implementación de esta unidad didáctica, permitió planificar de forma ordenada una serie de contenidos y actividades en un tiempo determinado, facilitando mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje y adaptar las acciones teniendo en cuenta el contexto y nivel de los educandos, evitando de esta manera la improvisación de los docentes. Y además, permitió que los estudiantes fueran protagonistas en la construcción de su conocimiento, debido a la participación activa en el proceso, logrando superar los niveles 1, 2 y 3 de razonamiento del modelo de Van Hiele.

7. RECOMENDACIONES

- Es importante incluir la regulación metacognitiva en los procesos de aprendizaje de los cuadriláteros según los niveles del modelo Van Hiele en el área de matemáticas, teniendo en consideración los beneficios que esta puede ofrecer a los estudiantes para planear, monitorear y evaluar su proceso.
- Es necesario aumentar el conocimiento sobre la metacognición respecto al papel que cumple en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias, específicamente en el campo de la geometría; del mismo modo, crear instrumentos para la indagación de procesos de regulación metacognitiva, en la cual los estudiantes puedan expresar, reflexionar y discutir respecto a su propio proceso de aprendizaje.
- Es fundamental implementar unidades didácticas en el campo de la geometría donde se inicie el proceso con la indagación de los conocimientos previos de los educandos, estas deben estar bien estructuradas y contener la metodología de trabajo, además, las actividades deben favorecer la creatividad y se deben tener en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje para adaptar los contenidos de acuerdo a los intereses y necesidades de los estudiantes.
- El docente debe estar en constante actualización, buscando estrategias y diseñando su propio material educativo con base al entorno en que vive y rompiendo prototipos de enseñanza que permitan que el estudiante explore, se equivoque, exprese, analice y concluya integrando el conocimiento geométrico con su vida real.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Barrantes, M. & Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. Universidad de Extremadura. Badajoz. Recuperado el 5 de septiembre de 2017 de: <https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21975/21809>
- Cabellos, A. (2013). La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri. (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca de España. Recuperado de: <https://isliedocs.net/document/la-modelizacion-de-van-hiele-en-el-aprendizaje-constructivo-de-la-geometria-en-primero-y-segundo-de-secundaria-a-partir-de-cabri-cabri-3d-y-cabriweb>
- Corberán, R., Gutierrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele. Madrid: CIDE
- Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving, en Resnick, L.B. (ed.). The nature of intelligence. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Flórez Ochoa, R. (2000). Autorregulación, metacognición y evaluación. Acción Pedagógica, 9(1-2), 4-11. Recuperado de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/dspace/bitstream/10495/6913/1/OchoaRafael_2000_atorregulacionmetacognicionevaluacion.pdf
- Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? Revista Ciencias de la Educación. Valencia, España. Año 6, Vol. 1, N°27,

pp. 83-98. Recuperado el 5 de marzo de 2018 de:
<http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volIn27/27-5.pdf>

González, A. (2015). Errores y dificultades más comunes en el aprendizaje de cuadriláteros: una muestra con alumnos de 9/12 años en Cantabria. Universidad de Cantabria. Recuperado el 20 de junio de 2017 en:
<https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/7819/GonzalezGonzalezAndrea.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1995/98). Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática. (Bogotá: una empresa docente y México: Grupo Editorial Iberoamérica). Recuperado de
<http://funes.uniandes.edu.co/674/1/Gutierrez1998Geometria.pdf>

Ixcaquic, I. (2015). Modelo de Van Hiele y geometría plana. (Tesis de Grado) Universidad Rafael Landívar de Guatemala. Recuperado de
<http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesisjcem/2015/05/86/Ixcaquic-Ilsi.pdf>

Kinnear, C. & Taylor, R. (1998). Investigación de Mercados, Un enfoque aplicado; cuarta edición, México, Mc Graw Hill.

Lemos, J. & Quintana, J. (2012). El modelo de van hiele en una estrategia para el desarrollo del pensamiento espacial por medio del esquema corporal. Universidad tecnológica de Pereira. Recuperado de
<http://recursosbiblioteca.utp.edu.co/tesisd/textoyanexos/37276L557.pdf>

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares; M. Sánchez, (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática. Colección Ciencias de la Educación, 4, 295-384. Sevilla, España: Alfar.

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España.

Maguiña, A. (2013). Una Propuesta Didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo de Van Hiele. (Tesis de Magister en enseñanza de las Matemáticas) Universidad Católica de Perú. Recuperado el 15 de junio de 2017 de:
http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/4733/MAGUI%C3%91A_ROJAS_ALBERT_PROPUESTA_CUADRILATEROS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Marín, D. (2013). Estrategias didácticas para fortalecer el pensamiento geométrico en estudiantes de grado sexto. (Tesis de Grado). Universidad Católica de Manizales de Colombia

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. Bogotá, Colombia

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998). Serie lineamientos curriculares matemáticas. Recuperado el 23 de julio de 2018 de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Morales, C. y Majé, R. (2011). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros.

Pérez, K. (2009). Enseñanza de la geometría para un aprendizaje significativo a través de actividades lúdica. Trabajo de Grado. Universidad de los Andes Mérida Venezuela.

- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México, D.F. McGraw-Hill Interamericana.
- Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, 26, 113-125.
- Sua, Camilo (2015). La demostración en geometría: procesos cognitivos y metacognitivos favorecidos por la inclusión de ambientes dinámicos. Comunicación presentada en Compumat 2015. La Habana, Cuba. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/8405/1/La_demostracion_en_Geometria.pdf
- Tamayo, O. (2001). Evolución conceptual desde una perspectiva multidimensional. Aplicación al concepto de respiración. Universidad autónoma de Barcelona. Departamento de didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales.
- Tamayo, O. (2006). "La metacognición en los modelos para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias" *Los Bordes De La Pedagogía: Del Modelo A La Ruptura*. En: Colombia ISBN: 978-958-8316-20-8 ed: Universidad Pedagógica Nacional, V.3, P.275 – 306.
- Tambriz, P. (2015). Metacognición en el aprendizaje de las operaciones básicas algebraicas. Universidad Rafael Landívar. Recuperado de <http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesiseortiz/2015/05/86/Tambriz-Patricia.pdf>
- Troncoso, O. (2013). Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas: una intervención en el aula para determinar las implicaciones de la implementación de estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas. Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. Recuperado el 12 de junio de 2017 de: <http://www.fisica.ru/dfmg/teacher/archivos/ESTRATEGIAS-METACOGNITIVAS-OSCAR-M-TRONCOSO.pdf>

Valencia N., Sanabria L. & Ibáñez J. (2012). Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 45-65. Recuperado el 20 de junio de 2017 de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000100004&lng=en&tlng=.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. (Academic Press: Lodres).

Vargas, G. (2013). *El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría*. Universidad Nacional Heredia Costa Rica.

Zapata, G. (2014). *El desarrollo del pensamiento espacial a través del aprendizaje por descubrimiento*. Trabajo de Grado. Universidad de Antioquia de Colombia.

9. ANEXOS

Anexo 1. Formato de unidad didáctica

UNIDAD DIDÁCTICA

“Aprendizaje de los cuadriláteros desde los niveles del modelo de Van Hiele”

Grado: Sexto

Objetivo: Mejorar el aprendizaje de los cuadriláteros mediante los niveles del modelo de Van Hiele y la regulación metacognitiva

Objetivos de la unidad: El objetivo general de la unidad didáctica, es la comprensión del concepto de cuadriláteros por parte de los estudiantes, teniendo en cuenta la regulación metacognitiva (planeación, monitoreo y evaluación) según los niveles de aprendizaje del modelo de Van Hiele (reconocimiento, análisis, de clasificación).

Objetivos de enseñanza y aprendizaje: Al desarrollar la unidad didáctica es necesario tener unos objetivos dirigidos al ejercicio de enseñar, estos objetivos deben dirigirse a; Identificar el concepto de cuadriláteros de acuerdo con los niveles del modelo de Van Hiele e implementar la regulación metacognitiva en el aprendizaje de los cuadriláteros. Así mismo, el estudiante debe reconocer o visualizar los cuadriláteros de forma individual y global: Analizar las propiedades de los cuadriláteros mediante deducción y demostración, y clasificar los cuadriláteros relacionando sus propiedades.

Finalmente se espera, que logre aplicar dicho concepto en sus ámbitos más usuales, permitiendo utilizar sus propias regulaciones metacognitivas, para dar cuenta de sus avances u obstáculos.

Momento	Objetivo	Actividades	Propósito	Descripción de las actividades	Tiempo
<p>1. Ubicación</p>	<p>Identificar los conocimientos previos y dificultades que tienen los estudiantes respecto a los cuadriláteros, y las estrategias metacognitivas que poseen.</p>	<p>Actividad 1: Cuestionario los cuadriláteros I</p>	<p>Identificar los obstáculos que presentan los estudiantes respecto a los cuadriláteros y conocer que estrategias de regulación metacognitiva poseen los estudiantes.</p>	<p>Este instrumento contenía diez preguntas, teniendo en cuenta los indicadores de los niveles del modelo de Van Hiele, las preguntas 1, 2 y 3 eran del nivel 1 de reconocimiento de cuadriláteros, donde se pretendía identificar la percepción global e individual de los cuadriláteros, uso de propiedades y vocabulario matemático usado por los estudiantes.</p> <p>Las preguntas 4, 5 y 6, pertenecen al nivel 2 de análisis de los cuadriláteros, estas tenían como propósito identificar en los estudiantes como describen un cuadrilátero y sus propiedades, como deducen y comprueban las propiedades de</p>	<p>4 horas de clases (220 minutos)</p>

				<p>estos. Finalmente las preguntas 7, 8, 9 y 10, eran del nivel 3 de clasificación de los cuadriláteros, estas preguntas se diseñaron con el fin de identificar la capacidad que tienen los estudiantes para: relacionar propiedades, de comprender conceptos y familias de figuras, hacer y comprobar demostraciones de propiedades.</p> <p>Dentro de la pregunta 10, se realizaron unas preguntas de regulación metacognitiva. Para indagar acerca de los procesos de planeación, monitoreo y evaluación que realizan los estudiantes.</p>	
2. Desubicación	Instruir a los estudiantes mediante preguntas de	Actividad 1: Reconocimiento de	Reconocer un cuadrilátero por su	Se realizan cinco actividades con el fin que los estudiantes reconozcan o visualicen los	6 horas de clases (330 minutos)

	<p>regulación metacognitvas que permitan superar cada nivel del modelo de Van Hiele, así como una serie de actividades para abordar la solución de las dificultades de los cuadriláteros identificados en el primer momento.</p>	<p>cuadriláteros</p>	<p>forma global.</p> <p>Descubrir, comprender y reconocer la forma de los cuadriláteros y la diferenciación entre ellos.</p> <p>Establecer relación entre paralelismo y perpendicularidad en un cuadrilátero.</p> <p>Aprendizaje de un vocabulario matemático básico.</p> <p>Establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros.</p>	<p>cuadriláteros. Tres de estas actividades se realizaran de forma individual y dos de ellas de forma grupal, una de las actividades se llevará a cabo mediante la herramienta Geogebra.</p> <p>Solo a tres actividades se le realizara unas preguntas metacognitivas, para que los estudiantes vayan regulando su aprendizaje.</p>	
		<p>Actividad 2: Análisis de las propiedades de los</p>	<p>Observar e identificar las propiedades principales de los</p>	<p>Se recrea una serie de actividades que pretenden que los estudiantes análisis las</p>	<p>6 horas de clases (330 minutos)</p>

		cuadriláteros	<p>cuadriláteros.</p> <p>Explicar o parafrasear los conceptos y principales propiedades de los cuadriláteros.</p> <p>Construir conceptos a partir de la experimentación en forma grupal.</p> <p>Reconocer que las propiedades de un cuadrilátero se mantienen aunque cambie su posición en el plano</p>	<p>propiedades de los cuadriláteros, dos actividades se realizan en forma grupal y las otras dos en forma individual, cabe resaltar que durante una actividad se emplea la herramienta Geogebra y se realiza una experimentación para que puedan construir conceptos sobre cuadriláteros.</p> <p>Solo a dos actividades se le realizará unas preguntas metacognitivas, para que los estudiantes vayan regulando su aprendizaje.</p>	
		Actividad 3:	Establecer y definir elementos y	Se recrea unas actividades basadas en la clasificación	6 horas de clase

		De clasificación de los cuadriláteros	<p>principales propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.</p> <p>Caracterizar a los cuadriláteros, según sus lados, ángulos o diagonales.</p> <p>Establecer relaciones de inclusión y establecer las principales propiedades que pueden caracterizar un cuadrilátero.</p> <p>Realizar demostraciones de manera intuitiva e informal y formular ejemplos y/o contraejemplos sobre</p>	<p>informal de los cuadriláteros, en estas los estudiantes deberán evidenciar mediante demostraciones la clasificación de los cuadriláteros. Se realizan dos actividades grupales y tres individuales.</p> <p>Al finalizar tres actividades se realizarán preguntas que logren la regulación metacognitiva.</p>	(330 minutos)
--	--	---------------------------------------	---	---	---------------

			<p>las propiedades de los cuadriláteros.</p> <p>Resolver problemas contextualizados sobre cuadriláteros que impliquen la organización de datos.</p>		
3. Reenfoque	Indagar sobre la efectividad de las actividades planteadas en la unidad didáctica respecto a los niveles del modelo Van Hiele, la superación de las dificultades relacionados a los cuadriláteros y su regulación metacognitiva.	Actividad 1: Cuestionario los cuadriláteros II	Establecer los cambios presentes en el aprendizaje de los cuadriláteros a través los niveles del modelo de Van Hiele y la vinculación de estrategias de regulación metacognitiva.	Se realizará la aplicación de instrumento “cuestionario: los cuadriláteros II” con algunas variaciones con respecto al primer instrumento, que involucre situaciones asociadas a los tres niveles del modelo de Van Hiele, en busca de establecer los cambios en la evolución conceptual de los estudiantes.	4 horas de clase (220 minutos)
		Actividad 2: Entrevista semiestructurada	Cuestionar sobre la efectividad de las actividades	Se aplica la entrevista semiestructurada a 5 estudiantes a quienes se les indaga respecto	4 horas de clase (220 minutos extraclase)

			desarrolladas hacia la superación de las dificultades y el aprendizaje de los cuadriláteros mediante los niveles del modelo de Van Hiele y la regulación metacognitiva	a la efectividad de las actividades enfocadas hacia el aprendizaje de los cuadriláteros mediante los niveles del modelo de Van Hiele, y la regulación metacognitiva.	
--	--	--	--	--	--

Anexo 2. Momento de ubicación

Actividad 1. (Individual)

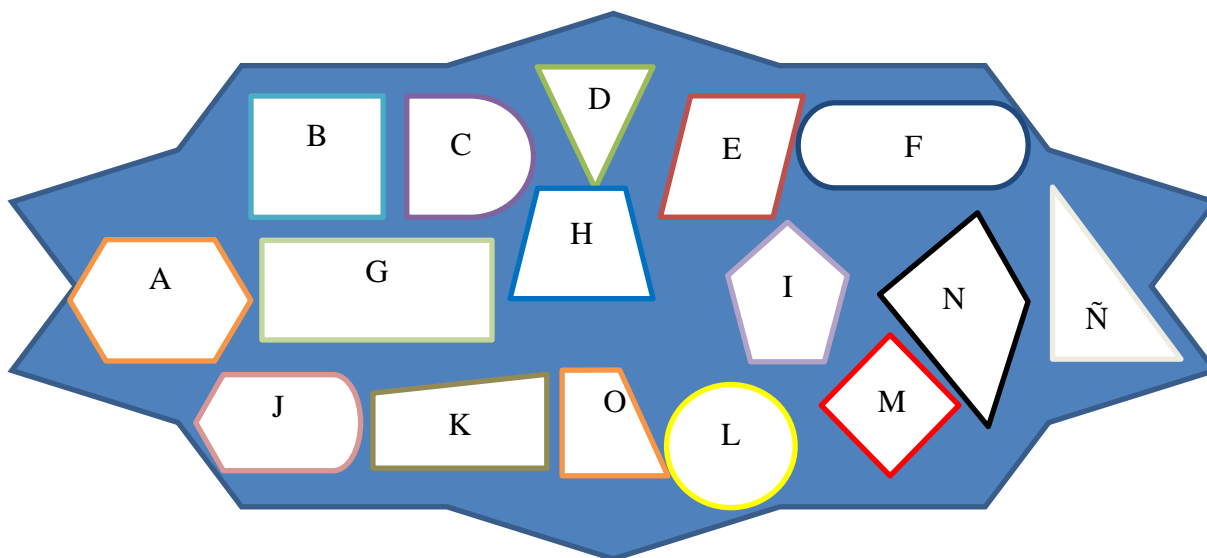
Propósito: Identificar las dificultades que presentan los estudiantes respecto a los cuadriláteros y conocer que estrategias de regulación metacognitiva poseen los estudiantes.

Cuestionario los cuadriláteros I

Nombre: _____

Grado: _____

1. En la figura que se muestra a continuación, colorea los polígonos que sean cuadriláteros.



2. Teniendo en cuenta la figuras coloreadas en el punto anterior, indique cuales son:

Cuadrados: _____

Trapecios: _____

Rectángulos: _____

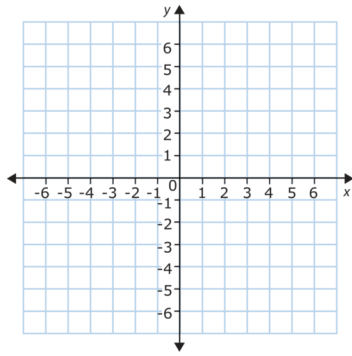
Trapezoides: _____

Rombos: _____

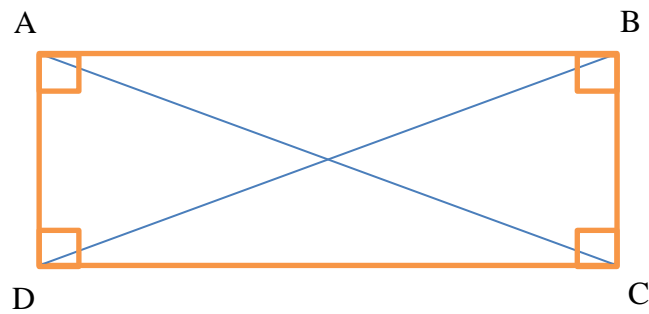
Romboides: _____

Paralelogramos: _____

3. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos A (-3,0); B (0,3); C (3,0) y D (0,-3), únelos en forma consecutiva con una línea recta. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? ¿Cuáles son sus características?

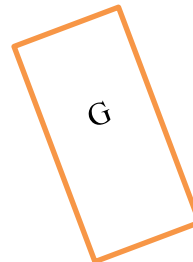
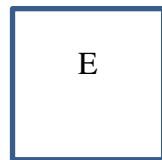


4. En un rectángulo ABCD, los segmentos \overline{AC} y \overline{BD} son las diagonales, ¿cuál de las siguientes opciones son verdaderas o falsas para cualquier rectángulo?



- A. Hay 4 ángulos rectos. ()
 - B. Hay 4 lados. ()
 - C. Las diagonales tienen la misma longitud. ()
 - D. Los lados opuestos tienen la misma longitud. ()
 - E. Hay 4 ángulos agudos. ()
- 5.Cuál de estos pueden ser llamados rectángulos. Justifica tu respuesta

- A. Todos.
- B. Sólo F.
- C. Sólo G.
- D. Solamente E y F.
- E. Solamente Q y R.



Justifica tu respuesta: _____

6. Dibuja un cuadrado y un rectángulo. Luego escribe sus diferencias y semejanzas.

Diferencias	Semejanzas

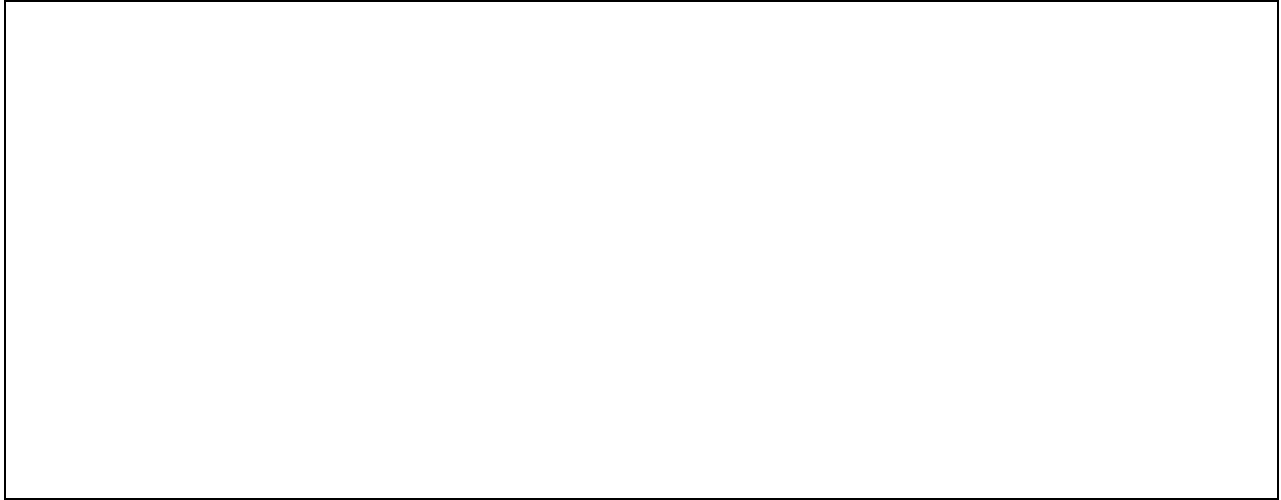
De acuerdo a lo anterior, decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta (justificar la respuesta):

- Todo rectángulo es cuadrado _____
- Todo cuadrado es rectángulo. _____

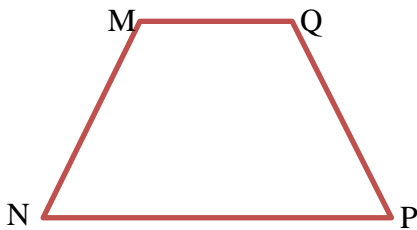
7. Indicar cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar.

- a) Si un cuadrilátero es rectángulo entonces es paralelogramo. ()
- b) Si un cuadrilátero es rombo entonces es paralelogramo. ()
- c) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. ()
- d) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. ()
- e) Si un cuadrilátero tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. ()
- f) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. ()

8. Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ? Justifique su respuesta



9. En el siguiente trapecio isósceles MNPQ, con $MN=PQ$, ubica los puntos A, B, C y D, que son los puntos medios de los lados MN, NP, PQ y QA, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos A, B, C y D? Justifica tu respuesta



10. Si en un paralelogramo RSTU. Se marca con A y B los puntos medios de los segmentos RS y TU, respectivamente, se traza la diagonal RT y los segmentos AU, SB que puedes decir de los segmentos que cortan la diagonal principal. Escribe simbólicamente la conclusión.

Nota: Antes de resolver el problema, responde las preguntas metacognitivas (1,2 y 3)

Preguntas metacognitivas, para el ítem 10

- ¿Entendiste el enunciado del problema? _____
¿Qué debes hallar? _____ ¿Cuántas veces lo leíste? _____
- ¿Subrayaste la información importante? _____ ¿Organizaste los datos? _____
- Describe detalladamente, los pasos o la secuencia que llevarás a cabo para saber que figura se forma. Justifica tu respuesta.

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirve los pasos o secuencia que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona cuáles fueron las dificultades que tuviste para resolver el problema. Justifica tu respuesta

- ¿Verificaste la solución? _____

- ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

- ¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

- ¿Considera que los pasos o secuencia que planeo funcionó bien? Sí _____ No _____
¿Por qué? _____

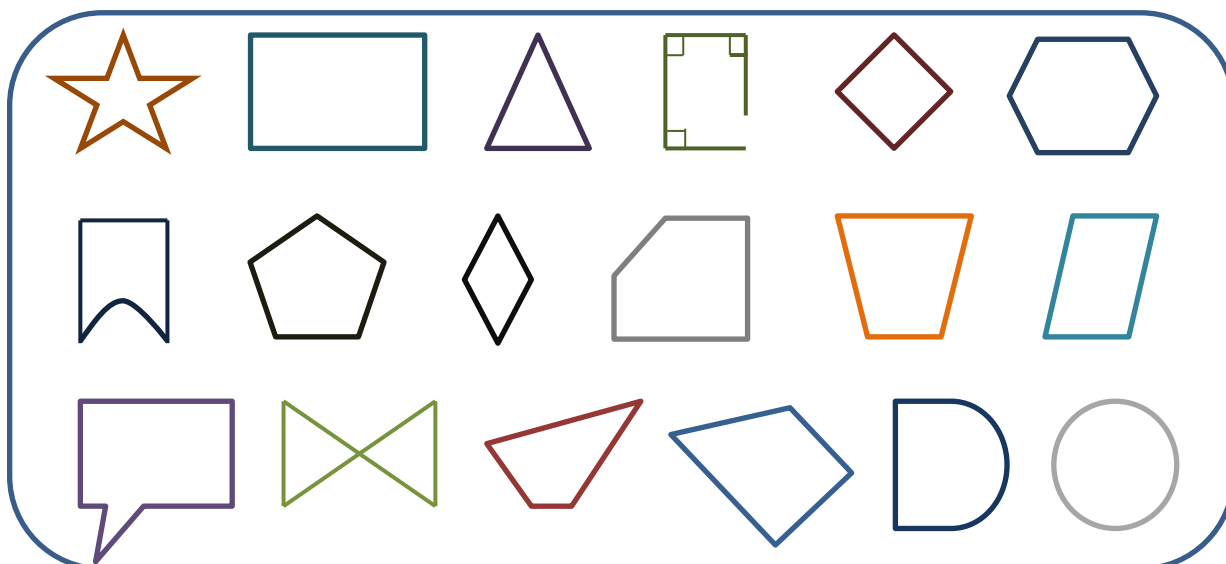
Anexo 3. Momento de desubicación

Propósito: Instruir a los estudiantes mediante actividades que permitan superar cada nivel del modelo de Van Hiele, y su regulación metacognitiva, así como una serie de actividades para abordar la solución de los obstáculos de los cuadriláteros.

Actividad 1. Reconocimiento o visualización de cuadriláteros

Propósito: Reconocer un cuadrilátero por su forma global.

- I. A continuación se muestran unas figuras geométricas, encierra las figuras que sean polígonos y colorea las que consideres que son cuadriláteros.



- De acuerdo a la situación anterior, responde: ¿Qué debes hallar? ¿Cuántas veces leíste el enunciado?

- Elabora una lista de pasos a seguir para solucionar el problema.

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

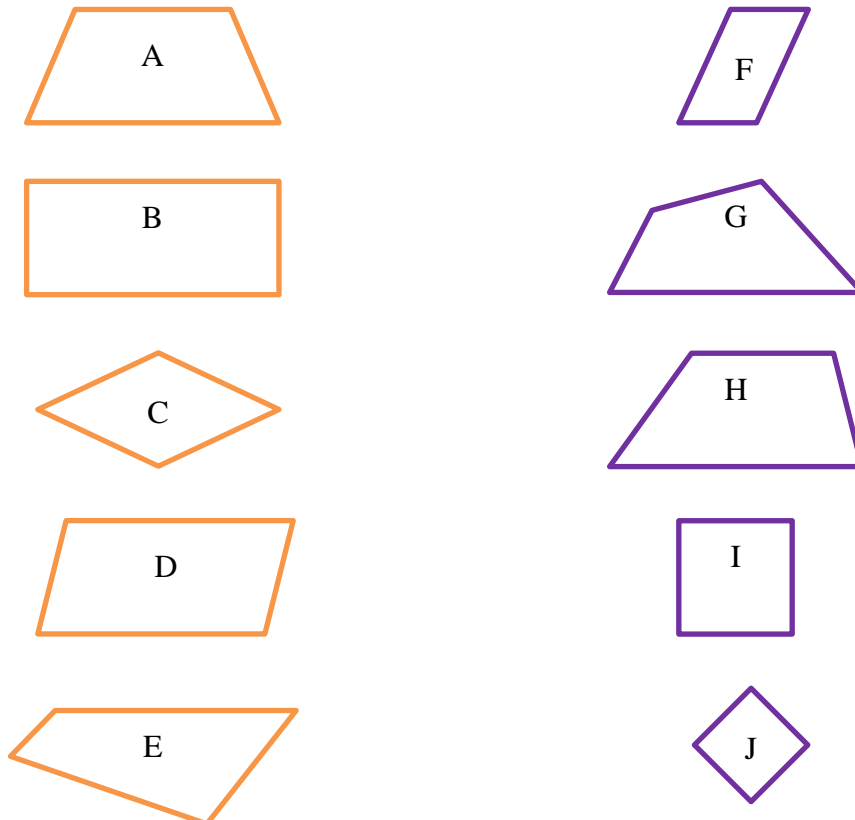
- ¿Te sirve los pasos que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona ¿cuáles fueron las dificultades que tuviste para llevar a cabo su plan y cómo las superó?

- ¿Considera que los pasos utilizados fue adecuada? SI ___ NO _____. Justifica tu respuesta.

Propósito: Descubrir, comprender y reconocer la forma de los cuadriláteros y la diferenciación entre ellos.

II. Relaciona mediante líneas cada cuadrilátero de la columna izquierda con uno de la columna derecha de acuerdo a las similitudes de sus formas.



- Teniendo en cuenta las figuras anteriores, indique cuales son:

Rectángulos:

Rombos:

Cuadrados:

Romboides:


Trapeacios:


Trapezoides:

Paralelogramos:

No paralelogramos:

Propósito: Establecer relación entre paralelismo y perpendicularidad en un cuadrilátero
Actividad grupal

- III. Abra el programa GeoGebra, haciendo clic en el icono  de acceso directo que se encuentra en el escritorio.

Utilizando la herramienta polígono  construya 6 cuadriláteros diferentes con las siguientes características:

1. Tiene 4 ángulos rectos.
2. Tiene 2 ángulos rectos.
3. No tiene ningún ángulo recto.
4. Tiene 2 pares de lados paralelos.
5. Tiene un par de lados paralelos.
6. No tiene ningún par de lados paralelos.

Guarde sus respuestas con el nombre Actividad III_nombres de los estudiantes

- De acuerdo a la actividad anterior, responde: ¿Entendiste el enunciado de la actividad?
¿Cuántas veces leíste el enunciado?

- Elabora una lista de pasos a seguir para solucionar la actividad.

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirve los pasos que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona ¿cuáles fueron las dificultades que tuviste para llevar a cabo su plan y cómo las superó?

- ¿Considera que los pasos utilizados fue adecuada? SI ___ NO _____. Justifica tu respuesta.

Propósito: Aprendizaje de un vocabulario matemático básico

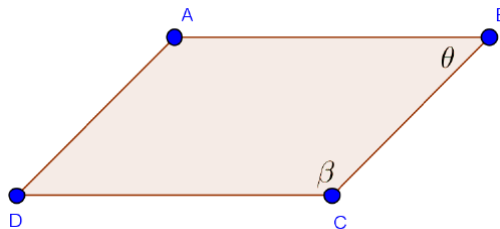
IV. TENGA EN CUENTA QUE: Cuando dos segmentos o ángulos tienen la misma medida se dice que son congruentes (\cong). Si dos segmentos o rectas tienen la misma pendiente (inclinación), se dice que son paralelos (\parallel). Si dos segmentos o rectas al intersectarse forman un ángulo recto se dice que son perpendiculares (\perp).

- Indica si es verdadero (V) o falso (F) lo que se dice a continuación basándose en el cuadrilátero ABCD.

- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ()
- $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ()
- $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ ()
- $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ ()
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ()



- Indique del paralelogramo ABCD los lados que son paralelos o perpendiculares, y congruentes; y los ángulos que son congruentes o suplementarios. Asigna el mismo nombre a los ángulos congruentes.

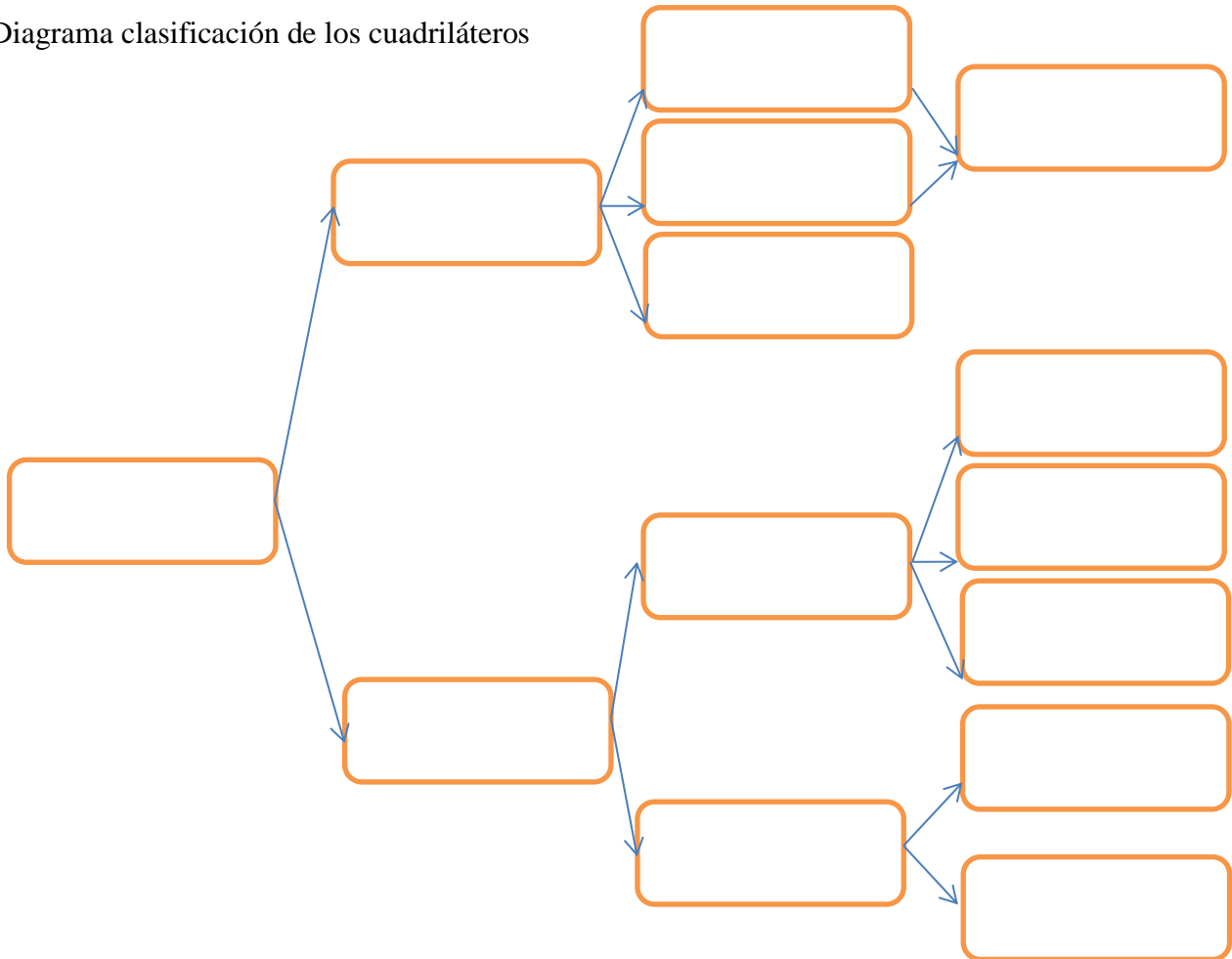


Propósito: Establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros
 Actividad grupal

V. Recorta cada uno de los recuadros, y luego pégalos en el diagrama, teniendo en cuenta la clasificación de los cuadriláteros.

Cuadrado	Trapezio	Trapezoide	Trapezoides
No	Cuadriláteros	Rombo	Trapezio
Trapezoide	Trapezios	Paralelogramo	Rectángulo
Trapezio	Romboide		

Diagrama clasificación de los cuadriláteros



- ¿Entendiste el enunciado del problema? _____
 ¿Cuántas veces lo leíste? _____ ¿Qué debes hacer? _____

- Describe detalladamente, los pasos o la secuencia que llevarás a cabo para realizar la actividad. Justifica tu respuesta.

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirve los pasos o secuencia que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona cuáles fueron las dificultades que tuviste para resolver el problema. Justifica tu respuesta

- ¿Verificaste la solución? _____
- ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

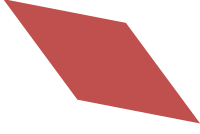
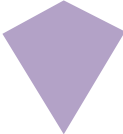










- ¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

- ¿Considera que los pasos o secuencia que planeo funcionó bien? Sí _____ No _____
 ¿Por qué? _____

Actividad 2. Análisis de cuadriláteros

Propósito: Observar e identificar las propiedades principales de los cuadriláteros

I. Observa los siguientes cuadriláteros e identifica en la tabla la relación indicada

		
Rombo	Trapezoide	Romboide
		
Trapezio	Cuadrado	Rectángulo
		
Trapezio	Romboide	Trapezoide
		
Cuadrado	Rectángulo	Rombo

Señala con una X cuando el cuadrilátero cumpla la relación indicada.

Cuadrilátero	Todos los lados son \cong	Los lados opuestos son		Las diagonales		Los \sphericalangle opuestos \cong	Las diagonales son	
		\cong	\parallel	Se bisecan mutuamente	Bisecan los \sphericalangle del polígono		\cong	\perp
Rectángulo								
Cuadrado								
Rombo								
Trapezio								
Trapezoide								
Romboide								

Propósito: Explicar o parafrasear los conceptos y principales propiedades de los cuadriláteros

II. A) De acuerdo con sus conocimientos responda:

Defina con sus propias palabras lo que es un cuadrilátero. _____

Defina, para usted qué es un paralelogramo y diga cuáles son sus propiedades _____

Defina, para usted qué es un rectángulo e indique cuáles son sus propiedades _____

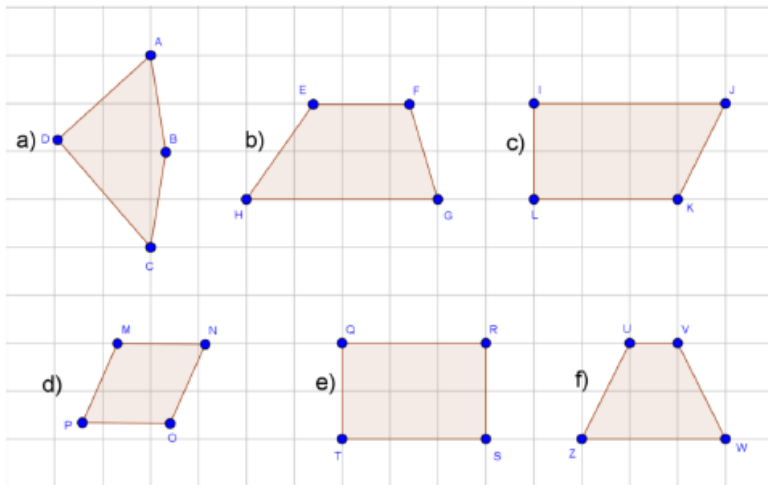
Diga cuánto suman los cuatro ángulos interiores de los rectángulos _____

Defina qué es un rombo y diga cuáles son sus propiedades _____

B) Responda verdadero (V) o falso (F) para cada una de las siguientes afirmaciones

- | | |
|--|--|
| a) Todo rectángulo es rombo () | g) Algunos rombos son rectángulos () |
| b) Todo paralelogramo es rectángulo () | h) Todos los cuadriláteros son rectángulos () |
| c) Todo rectángulo es paralelogramo () | i) Todos los rombos son trapecios () |
| d) Todo paralelogramo es trapecio () | j) Todos los rectángulos son trapecios () |
| e) Existen trapecios que son rectángulos | k) Todo rombo es paralelogramo () |
| f) Ningún rombo es paralelogramo () | |

C) Observe las siguientes figuras y señale las que sean trapecios



¿Qué tuvo en cuenta para seleccionarla o seleccionarla?

Propósito: Construir conceptos a partir de la experimentación en forma grupal

III. Se forman grupos de cuatro estudiantes y se les entrega cuatro cuadriláteros de papel y de diferentes tamaños a cada estudiante, dentro de estos tenemos: un rectángulo, un cuadrado, un rombo y un romboide.

Instrucciones:

- Coloca un número a cada vértice
- Dobla el papel de tal manera que se marquen las diagonales.
- Con la ayuda de una regla medir la longitud de las diagonales de los cuadriláteros y coloca a cada una la medida.
- Con la ayuda de un transportador, medir los ángulos que se forman en la intersección de las diagonales

De acuerdo a lo encontrado en el proceso anterior, y lo hallado por tus compañeros de grupo, contesta las siguientes preguntas. (Justifica tus respuestas)

- ¿Las diagonales de los cuadriláteros los dividen en partes iguales?

- ¿Las medidas de las diagonales de un rectángulo son iguales?

- ¿Las medidas de las diagonales de un cuadrado son iguales?

- ¿Las medidas de las diagonales de un rombo son iguales?

- ¿Las medidas de las diagonales de un romboide son iguales?

- De acuerdo a la actividad anterior, responde: ¿Entendieron el enunciado de la actividad?
¿Cuántas veces leyeron el enunciado?

- Elaboren una lista de pasos a seguir para solucionar la actividad.


- ¿Crees que durante el desarrollo de la actividad lo hicieron bien? Justifica la respuesta


- ¿Les sirvió los pasos que plantearon? Justifica la respuesta


- Menciona ¿cuáles fueron las dificultades tuvieron para llevar a cabo su plan y cómo lo superaron?

- ¿Considera que los pasos utilizados fue adecuada? SI ____ NO _____. Justifica tu respuesta.

Propósito: Reconocer que las propiedades de un cuadrilátero se mantienen aunque cambie su posición en el plano. Actividad Grupal

- IV. Abra el programa GeoGebra, haciendo clic en el icono  de acceso directo que se encuentra en el escritorio.

- a) Utilizando la herramienta polígono regular  construya un cuadrado y determine la medida de sus lados, ángulos y diagonales.

- b) Utilizando la herramienta rotar objeto entorno a un punto  Rotación, rotar el cuadrado construido en el ítem a) en torno a uno de sus vértices considerando un ángulo de 30° . Luego verifique si las medidas de los lados, ángulos y diagonales de la figura rotada varían.

- c) Construya un rectángulo y repita lo que se indica en el ítem b)

Responde:

- Luego de realizar las rotaciones de las figuras, ¿las medidas de los lados, ángulos y diagonales cambiaron? Si ____ No _____. ¿Qué puedes concluir con este ejercicio?

- ¿Entendiste el enunciado del problema? _____
¿Cuántas veces lo leíste? _____ ¿Qué debes hacer? _____

- Describe detalladamente, los pasos o la secuencia que llevarás a cabo para realizar la actividad. Justifica tu respuesta.

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirve los pasos o secuencia que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona cuáles fueron las dificultades que tuviste para resolver el problema. Justifica tu respuesta

- ¿Verificaste la solución?_____

- ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

- ¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

- ¿Considera que los pasos o secuencia que planeo funcionó bien? Sí _____ No _____
¿Por qué?_____

Actividad 3. De clasificación de cuadriláteros

Propósito: Establecer y definir elementos y principales propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.

I. Complete la siguiente tabla marcando con una equis (x) según corresponda.

	Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Romboide	Trapezio
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos					
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos					
Cuadrilátero con diagonales que son perpendiculares					
Cuadrilátero con diagonales congruentes					
Cuadrilátero con diagonales que se bisecan					
Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes					
Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos congruentes					
Cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos congruentes.					

Propósito: Caracterizar a los cuadriláteros, según sus lados, ángulos o diagonales. Actividad Grupal

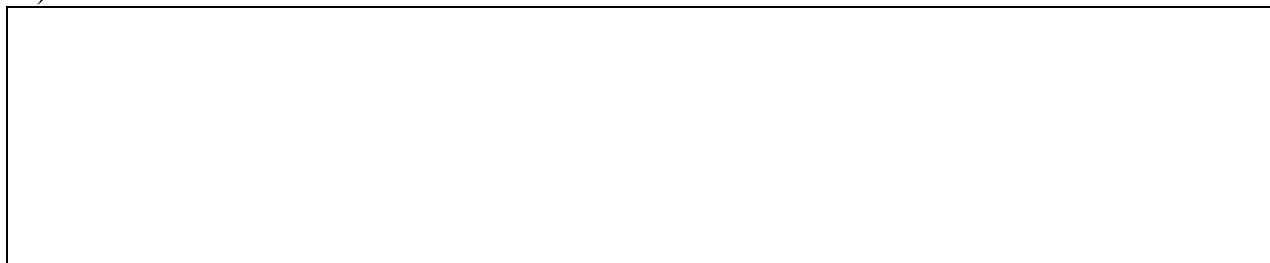
II. Considerando las propiedades señaladas en los recuadros, escribe que propiedades cumple:

Sin ángulos internos congruentes	Diagonales perpendiculares	Todos sus ángulos congruentes	La suma de sus ángulos internos es 360°
Ángulos opuestos congruentes	Lados opuestos congruentes	Todos sus lados congruentes	Diagonales congruentes
Sus diagonales son bisectrices	Las diagonales se intersecan en su punto medio	Solo dos ángulos internos son congruentes	Todos sus lados desiguales

a) El rectángulo



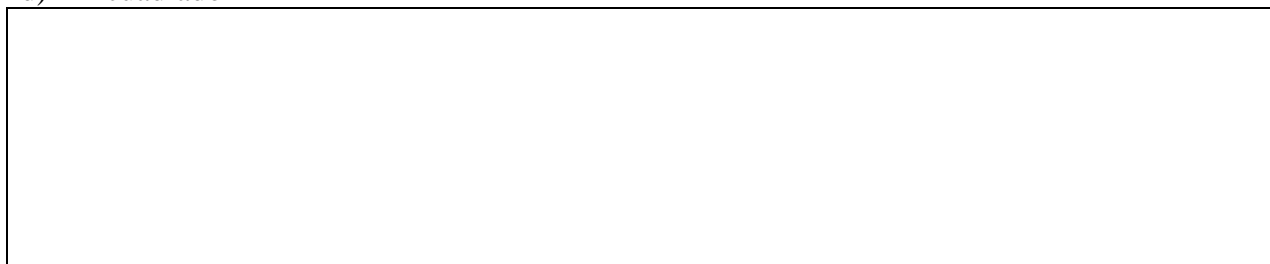
b) El romboide



c) El rombo



d) El cuadrado



e) El trapecio



f) El trapecio simétrico

Propósito: Establecer relaciones de inclusión de las principales propiedades que pueden caracterizar un cuadrilátero.

III. Comprueba si los enunciados sobre un cuadrilátero ABCD son verdaderos y justifique sus respuestas.

a) Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces ABCD es un trapecio.

b) Si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, entonces ABCD es un rombo

c) Si $AB = CD$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, entonces ABCD es un paralelogramo

- De acuerdo a la situación anterior, responde: ¿Qué debes hacer? ¿Cuántas veces leíste el enunciado?

- Elabora una lista de pasos a seguir para solucionar el problema.

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirve los pasos que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona ¿cuáles fueron las dificultades que tuviste para llevar a cabo su plan y cómo las superó?

- ¿Considera que los pasos utilizados fue adecuada? SI ___ NO _____. Justifica tu respuesta.

Propósito: Realizar demostraciones de manera intuitiva e informal y formular ejemplos y/o contraejemplos sobre las propiedades de los cuadriláteros.

Actividad en parejas

IV. Comprobar las siguientes afirmaciones. Si es verdadera, presente una prueba y si es falsa, muestre un contraejemplo.

a) Las bisectrices de dos ángulos consecutivos, de un paralelogramo, son perpendiculares.

b) Todo cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares, es un rombo

- De acuerdo a la situación anterior, responde: ¿Qué debes hacer? ¿Cuántas veces leíste el enunciado?

- Elabora una lista de pasos a seguir para solucionar el problema.

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirven los pasos que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona ¿cuáles fueron las dificultades que tuviste para llevar a cabo su plan y cómo las superó?

- ¿Consideras que los pasos utilizados fueron adecuados? SI ___ NO _____. Justifica tu respuesta.

Propósito: Resolver problemas sobre cuadriláteros que impliquen la organización de datos.

- V. Dado el rombo ABCD, se construyen exteriormente los rombos ABEF, BCGH, CDIJ y ADKL. Demostrar que la figura que se forma al unir los centros de estos rombos es un rectángulo. Asimismo demostrar que el área de este rectángulo es el doble del área del rombo ABCD.

- ¿Entendiste el enunciado del problema? _____
¿Cuántas veces lo leíste? _____ ¿Qué debes demostrar? _____

- ¿Subrayaste la información importante? _____ ¿Organizaste los datos? _____

- Describe detalladamente, los pasos o la secuencia que llevarás a cabo para realizar la demostración. Justifica tu respuesta.

- ¿Qué estrategia puede usarse para resolver la situación? (Hacer un dibujo, un modelo, etc.).

- Realice la representación gráfica

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirve los pasos o secuencia que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona cuáles fueron las dificultades que tuviste para resolver el problema. Justifica tu respuesta

- ¿Verificaste la solución? _____

- ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

- ¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

- ¿Considera que los pasos o secuencia que planeo funcionó bien? Sí _____ No _____
¿Por qué? _____

Anexo 4. Momento de Reenfoque

Actividad 1. (Individual)

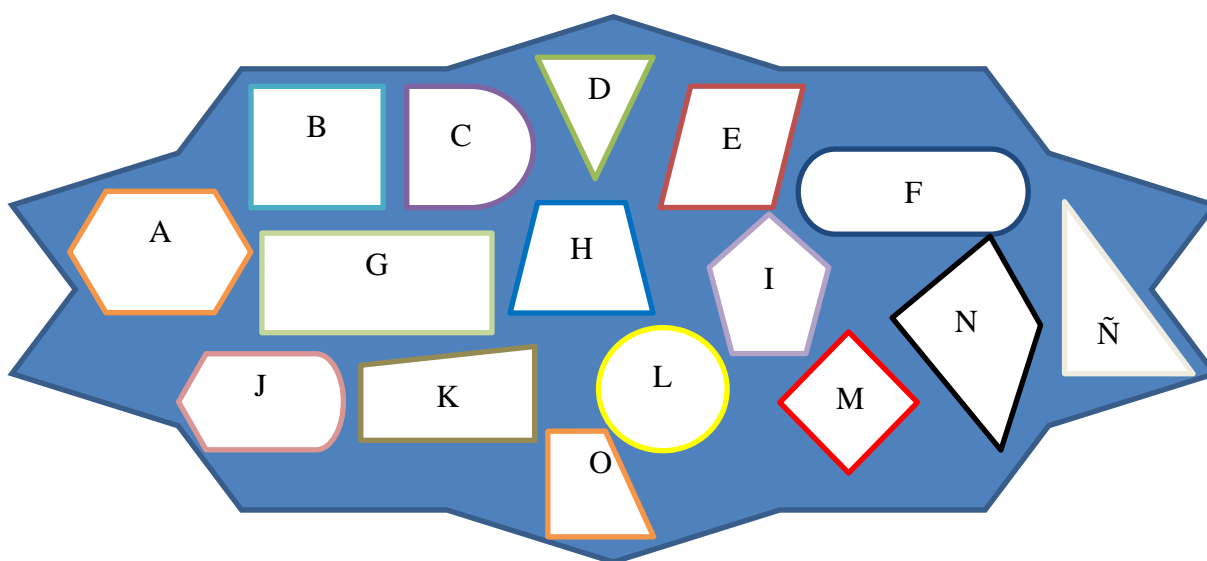
Propósito: Indagar sobre la efectividad de las actividades planteadas en la unidad didáctica respecto a los niveles del modelo Van Hiele, la superación de los obstáculos relacionados a los cuadriláteros y su regulación metacognitiva

Cuestionario los cuadriláteros II

Nombre: _____

Grado: _____

1. En la figura que se muestra a continuación, colorea los polígonos que sean cuadriláteros.



2. Teniendo en cuenta la figuras coloreadas en el punto anterior, indique cuales son:

Cuadrados: _____

Rectángulos: _____

Rombos: _____

Paralelogramos: _____

Trapecios: _____

Trapezoides: _____

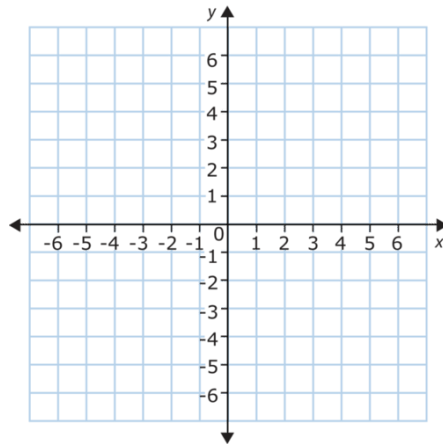
Romboides: _____

No paralelogramos: _____

Cuadriláteros: _____

No cuadriláteros: _____

3. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos A (-5,0); B (0,5); C (5,0) y D (0,-5), únelos en forma consecutiva con una línea recta.

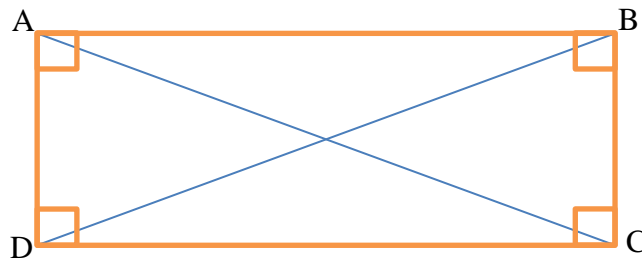


¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? _____

Define el cuadrilátero formado: _____

¿Cuáles son sus características?

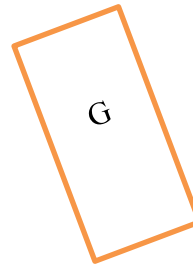
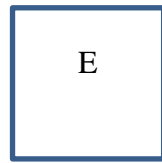
4. En un rectángulo ABCD, los segmentos \overline{AC} y \overline{BD} son las diagonales, ¿cuál de las siguientes opciones son verdaderas o falsas para cualquier rectángulo?



- A. Hay 4 ángulos rectos. ()
- B. Hay 4 lados. ()
- C. Las diagonales tienen la misma longitud. ()
- D. Los lados opuestos tienen la misma longitud. ()
- E. Hay 4 ángulos agudos. ()
- F. Las diagonales son perpendiculares ()
- G. La suma de sus ángulos internos es 260° ()
- H. Sus diagonales son bisectrices ()
- I. Solo dos ángulos internos son congruentes ()

5. Cuál de estos pueden ser llamados rectángulos. Justifica tu respuesta

- A. Todos.
- B. Sólo F.
- C. Sólo G.
- D. Solamente E y F.
- E. Solamente Q y R.



Justifica tu respuesta: _____

6. Dibuja un cuadrado y un rectángulo. Luego escribe sus diferencias y semejanzas.

Diferencias	Semejanzas

De acuerdo a lo anterior, decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta (justificar la respuesta):

- Todo rectángulo es cuadrado _____
- Todo cuadrado es rectángulo. _____

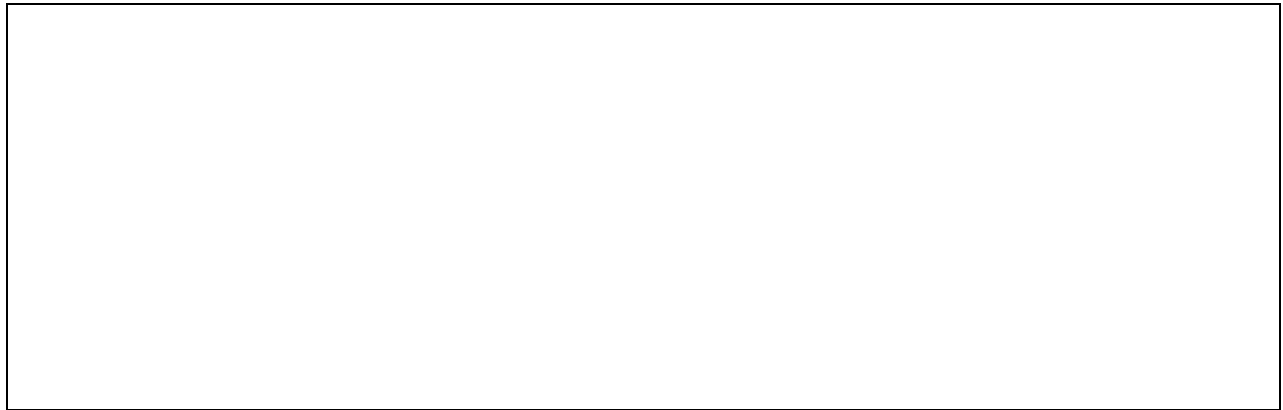
7. Indicar cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar.

- a) Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. ()
- b) Si un cuadrilátero tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. ()
- c) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales entonces es rombo. ()
- d) Si un cuadrilátero es rectángulo entonces es paralelogramo. ()
- e) Si un cuadrilátero es rombo entonces es paralelogramo. ()
- f) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto entonces es rectángulo. ()

8. Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ? _____

Defina con sus palabras el cuadrilátero formado: _____

Enuncia las propiedades del cuadrilátero formado: _____



9. Dibuja el paralelogramo RSTU. Marca con A y B los puntos medios de los segmentos RS y TU, respectivamente, traza la diagonal RT y los segmentos AU, SB que puedes decir de los segmentos que cortan la diagonal principal. Escribe simbólicamente la conclusión.



Preguntas metacognitivas, para el ítem 9

- ¿Entendiste el enunciado del problema? _____
¿Qué debes hallar? _____ ¿Cuántas veces lo leíste? _____
- ¿Subrayaste la información importante? _____ ¿Organizaste los datos? _____

- Describe detalladamente, los pasos o la secuencia que llevarás a cabo para saber que figura se forma. Justifica tu respuesta.

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirve los pasos o secuencia que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona cuáles fueron las dificultades que tuviste para resolver el problema. Justifica tu respuesta

- ¿Verificaste la solución? _____

- ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

- ¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

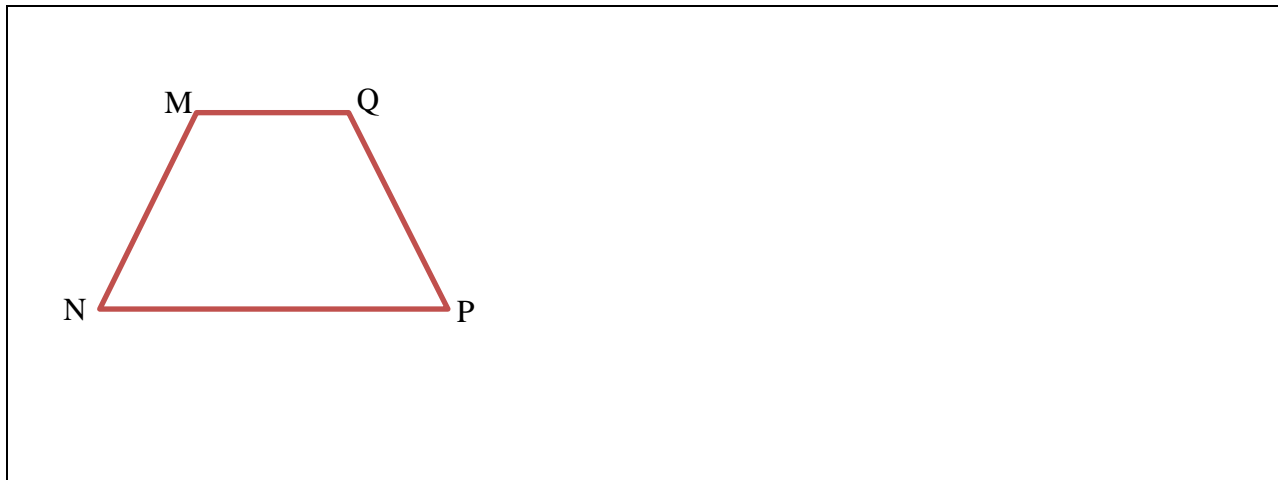
- ¿Considera que los pasos o secuencia que planeo funcionó bien? Sí _____ No _____
¿Por qué? _____

10. En el siguiente trapecio isósceles MNPQ, con $MN=PQ$, ubica los puntos A, B, C y D, que son los puntos medios de los lados MN, NP, PQ y QA, respectivamente. Une en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q

Responde

- ¿Entendiste el enunciado del problema? _____
 ¿Qué debes hallar? _____ ¿Cuántas veces lo leíste? _____
- ¿Subrayaste la información importante? _____ ¿Organizaste los datos? _____
- Describe detalladamente, los pasos o la secuencia que llevarás a cabo para saber que figura se forma. Justifica tu respuesta.

- Representación grafica



- ¿Qué tipo cuadrilátero se forma?: _____
- Defínelo: _____

- Escribe sus propiedades: _____

- ¿Crees que lo estás haciendo bien? Justifica la respuesta

- ¿Te sirve los pasos o secuencia que planteaste? Justifica la respuesta

- Menciona cuáles fueron las dificultades que tuviste para resolver el problema. Justifica tu respuesta

- ¿Verificaste la solución? _____

- ¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

- ¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

- ¿Considera que los pasos o secuencia que planeo funcionó bien? Sí _____ No _____
¿Por qué? _____

Anexo 5. Entrevista semiestructurada

Entrevista semiestructurada

Propósito: Indagar sobre la efectividad de las actividades planteadas en la unidad didáctica (UD) respecto a los niveles del modelo Van Hiele y la regulación metacognitiva

1. Antes de las actividades realizadas en la UD, ¿empleabas alguna secuencia de pasos para desarrollar una actividad? Sí ___ No ___ Justifica tu respuesta.
2. Después de realizar las actividades de la UD, ¿consideras importante buscar estrategias y elaborar un plan, para la solución de una actividad?
3. Luego de las actividades realizadas en la UD, ¿qué actividades realizas para hacerle seguimiento al plan de trabajo planteado?
4. Luego de las actividades realizadas en la UD, ¿piensas que es necesario que usted como estudiante siga evaluando si la estrategia fue efectiva al resolver problemas? Sí ___ No ___ Justifica tu respuesta.
5. ¿Le gustó la metodología empleada para aprender sobre los cuadriláteros?