Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria

Néstor Mario Castaño Arbeláez

Directora
Ligia Inés García C.

UAM
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria

Néstor Mario Castaño Arbeláez

Asesora de tesis

Ligia Inés García Castro

Maestría en Enseñanza de las Ciencias

Universidad Autónoma de Manizales

Manizales

2014

Dedicatoria

A mis padres, por su infinita paciencia.

Agradecimientos

Deseo agradecer a todas aquellas personas e instituciones que hicieron posible esta investigación, especialmente al Instituto Universitario de Caldas, por su valiosa colaboración relacionada con la recolección de la información, a la Universidad Autónoma de Manizales, por su apoyo en cuanto a la documentación, también a la magíster Ligia Inés García Castro, por su tiempo, recomendaciones y valiosas asesorías.

Tabla de contenido

1. Introducción 6
2. Planteamiento del problema 7
3. Justificación 13
4. Objetivos 14
4.1 Objetivo General 14
4.2 Objetivos Específicos 14
5. Referente Teórico 15
5.1 Antecedentes 15
5.2 Números racionales: historia y definición 23
Historia 23
5.3 Concepto de número racional 27
5.4 Operaciones con fraccionarios y algunos aspectos epistemológicos y didácticos sobre la enseñanza de las fracciones 29
5.5 Obstáculos, errores y dificultades en la enseñanza de los números racionales 32
6. Diseño metodológico 35
6.1 Tipo de investigación 35
6.2 Esquema 36
6.3 Procedimiento 37
6.4 Caracterización de la unidad de trabajo 37
7. Resultados 41
7.1 Análisis estadístico 41
Conclusiones derivadas del análisis cuantitativo 53
7.2 Análisis categorial 54
Dificultades didácticas 55
Dificultades ontogenéticas 65
Dificultades epistemológicas 68
Dificultad epistemológica 72
Dificultad didáctica 73
Dificultad ontogenética 74
Dificultad didáctica 75
Dificultad epistemológica 77
8. Conclusiones 80
9. Recomendaciones 82
10. Referencias 84
11. Anexos 88

1. Introducción

En la matemática, se han propuesto varios sistemas numéricos, entre los cuales hay uno que presenta cierta dificultad para el aprendizaje y también para su enseñanza. Este sistema es el de los números racionales, al cual se le han dedicado numerosas investigaciones y se han escrito varios libros. De todas formas, la mayoría de las investigaciones se han enfocado en el aprendizaje y muy pocas a la enseñanza, pues se suele culpar al estudiante por el fracaso en la asimilación de este tema.

En esta investigación, se pretende saber cuáles son las dificultades que presentan los docentes en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Para lograrlo, se utilizaron dos instrumentos para la recolección de la información: un cuestionario y un taller. El cuestionario permitió un análisis estadístico[1], sobre indicadores cualitativos en una escala Likert. Y luego, se le hizo un análisis cualitativo para las preguntas abiertas[2] que permitió un proceso interpretativo de índole didáctica. Los resultados del taller también se analizaron de manera cualitativa.

Se espera que esta investigación pueda servir para determinar las dificultades que se les presentan a los maestros en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones.

[1] El análisis se procesó con el software estadístico SPSS.

[2] Para este análisis se utilizó el software Atlas.ti.

2. Planteamiento del problema

La matemática en general presenta cierta dificultad, tanto para su enseñanza como para su aprendizaje y más concretamente, lo relacionado con los números racionales, ya que como lo mencionan D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2008):

> Las fracciones constituyen un obstáculo notable, dado que la aceptación de este objeto por parte de la comunidad matemática se dio en tiempos remotos (desde el 2000 a. C. en Egipto o tal vez antes), parecería que no existen indicios de obstáculo epistemológico, pero un estudio histórico atento y crítico muestra, por el contrario, que no es así.

En Colombia, se han realizado pruebas para medir la calidad de la educación en áreas como la matemática, que se ha medido en pruebas nacionales (Saber) y en pruebas internacionales (TIMSS, PISA y SERCE).

En julio de 2010, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación –ICFES– dio a conocer los resultados de las pruebas SABER aplicadas a los estudiantes de 5° y 9° grados en lenguaje, matemáticas y ciencias. Con respecto a las matemáticas el ICFES concluyó lo siguiente:

> En esta área el desempeño relativo de los estudiantes de ambos grados es inferior al de lenguaje y ciencias. En quinto grado, 31 de cada 100 estudiantes están en el nivel mínimo. El 17% de los estudiantes demuestra las competencias establecidas en el nivel satisfactorio, es decir, además de hacer lo definido para el nivel mínimo. El 8% de los alumnos de ese grado se ubica en el nivel avanzado. Casi la mitad (44%) de los estudiantes no alcanza los desempeños mínimos establecidos en la evaluación de esta área al momento de culminar la básica primaria. Esta proporción es superior en 23 y 22 puntos porcentuales a las de lenguaje y ciencias, respectivamente.

> En noveno grado, el 52% de los alumnos está en nivel mínimo de desempeño, proporción superior a la de quinto. El 19% de los alumnos, cifra similar a la de quinto grado, se ubica en el nivel satisfactorio. Sólo el 3% demuestra un desempeño sobresaliente en el área. El 26% se encuentra en el nivel insuficiente.
>
> La comparación entre los resultados alcanzados por los estudiantes de quinto y noveno grados en matemáticas muestra una situación muy preocupante en ambos casos, pues únicamente una proporción cercana a la cuarta parte (25% y 22%, respectivamente) logra o supera los desempeños esperados (ICFES, 2010, págs. 13 - 15).

El *Trends in International Mathematics and Science Study* –TIMMS–, traducido al español como *Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*, que evalúa a los estudiantes en ciencias y matemáticas de los grados 4° y 8°, según los resultados de 2007 en matemáticas, concluye respecto a los promedios y niveles de desempeño lo siguiente:

> El promedio global de los estudiantes colombianos de cuarto grado fue 355 puntos, el cual está muy por debajo de Hong Kong (607), Singapur (599), Taipéi (576) y Japón (568). En ese grado nuestro país superó solamente a Marruecos (341), El Salvador (330), Túnez (327), Kuwait (316), Qatar (296) y Yemen (224). Situación similar se observa en octavo, en donde el promedio global de Colombia fue 380, mientras que los de Taipéi, Corea y Singapur fueron, respectivamente, 598, 597 y 593. En ambos grados nuestro promedio fue significativamente inferior al promedio TIMSS. Naciones con nivel socioeconómico y de desarrollo humano similares a los de Colombia (Argelia, Irán, Ucrania y Turquía) lograron promedios significativamente más altos que los de nuestro país, aunque inferiores al promedio TIMSS.
>
> En cuarto grado, el 69% de los estudiantes colombianos mostró logros inferiores a los descritos en la respectiva prueba. El 22% se ubicó en el nivel bajo; tan solo un 7% en el medio, 2% en el alto y ninguno en el avanzado. En octavo la situación es similar, puesto que el 61% tuvo logros inferiores a los descritos en la prueba para este grado, el 28% se ubicó en el nivel bajo, en tanto que el 9% en el medio, el 2% en el alto y

> ninguno en el avanzado. Estas cifras son preocupantes, puesto que casi las dos terceras partes de los estudiantes colombianos presentan dificultades con el manejo de los conocimientos básicos de las matemáticas que fueron evaluados por TIMSS 2007 (ICFES, 2010, págs. 10 - 14).

El *Programme for International Student Assessment* (PISA), traducido al español como *Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes,* se aplicó por primera vez en Colombia en 2006, con énfasis en Ciencias y en 2009 con énfasis en Lectura. Esta prueba evalúa a jóvenes de 15 años en tres áreas: ciencias, matemáticas y lectura. PISA establece seis niveles de desempeño: Nivel 1 (entre 358 y 419 puntos), nivel 2 (entre 420 y 481 puntos), nivel 3 (entre 482 y 544 puntos), nivel 4 (entre 545 y 606 puntos), nivel 5 (entre 607 y 668 puntos) y nivel 6 (por encima de 669 puntos). En relación con los niveles de desempeño y puntajes promedio en matemáticas, el ICFES concluye lo siguiente:

> El 38,8% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 1. El 31,6% se clasificó en el nivel 1. Al sumar esta proporción con la de quienes están por debajo de ese nivel, se encuentra que el 70,6% de los alumnos no logra el desempeño mínimo establecido por PISA (nivel 2).
>
> El 20,3% de los estudiantes se ubicó en el nivel 2; el 7,5% en el 3; y sólo el 1,8% restante en los niveles 4, 5 y 6. Estos resultados son muy preocupantes, pues además de ser los más deficientes entre las tres áreas evaluadas, contrastan con los de Shanghái, Finlandia y Corea, países en los que más de la mitad de los alumnos se clasificó por encima del nivel 3.
>
> En 2003, el énfasis de PISA fue en matemáticas. En esa edición se fijó como referencia un promedio de 500 para el conjunto de los países de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). En 2009 éste fue de 496, cifra que no presenta una diferencia significativa con respecto a la de 2003[3]. Shanghái, Singapur y Hong Kong tuvieron los puntajes promedio más altos (600, 562

[3] Según la OCDE, la disminución en el promedio en la prueba de matemáticas puede explicarse por la inclusión de nuevos países a partir de 2003.

> y 555, respectivamente); en tanto que los más bajos correspondieron a Kirguistán (331), Panamá (360) y Perú (365). La diferencia entre Kirguistán y Shanghái es de 269 puntos.
>
> El promedio de Colombia fue de 381 puntos, el cual es significativamente menor que el de la OCDE y que los obtenidos por Uruguay (427), Chile (421) y México (419). Por otra parte, el resultado de nuestro país es estadísticamente similar al de Brasil y supera los de Perú y Panamá (ICFES, 2010, págs. 32 - 35).

Por último, entre 2002 y 2008, Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación –LLECE– llevó a cabo el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE), que se encargó de evaluar a los niños y niñas que cursaban 3er y 6° grados de educación primaria en 2005 y 2006 en las escuelas de América Latina y el Caribe. En las áreas de Matemáticas, Lenguaje y Ciencias de la Naturaleza, concretamente en el área de Matemáticas para ambos grados, Colombia estuvo ubicada en el promedio, siendo éste de 500; para el 3er grado, el 38.60 % tuvo un nivel de desempeño básico, y para el 6° grado, el 47.64 % obtuvo un nivel de desempeño medio (LLECE, 2008).

Al hacer la comparación entre las cuatro pruebas, se puede observar que los resultados en matemática para Colombia ocupan los últimos lugares y el porcentaje de estudiantes que obtuvieron malos resultados es elevado.

En síntesis, es preocupante el bajo desempeño de los estudiantes especialmente en el área de matemáticas. En entrevista realizada por la periodista Mariana Suárez Rueda en 2010, al decano de Matemáticas de la Escuela Colombiana de Ingeniería, Carlos Abel Álvarez, le pregunta si el bajo desempeño de los estudiantes en matemáticas es problema también de los profesores, a esto, Álvarez responde que sí, y agrega:

> Se cree que cualquier persona que sepa sumar y restar puede enseñarle a otra a hacerlo y esto ha perjudicado el aprendizaje de los niños. Sería deseable que los

> profesores mejor preparados fueran los que enseñaran en los primeros años, no cualquier profesional desempleado (Álvarez, 2010, pág. 21).

El bajo desempeño de los estudiantes en matemáticas puede estar relacionado con las necesidades formativas de los docentes que, según Gil, Pessoa, Fortuny y Azcárate (2001), deben responder a preguntas como ¿qué han de saber y saber hacer los profesores de ciencias? Esta pregunta cuando se les formulan a los docentes en formación o en actividad. Según los autores, "las respuestas son, en general, bastante pobres y no incluyen muchos de los conocimientos que la investigación destaca hoy como fundamentales" (Formación del profesorado de las ciencias y la matemática. Tendencias y experiencias innovadoras). Esta investigación hace una "propuesta basada, por una parte, en la idea de aprendizaje como construcción de conocimientos con las características de una investigación científica y, por otra, en la necesidad de transformar el pensamiento espontáneo del profesor" (pág. 11). En esta propuesta, se concretan ocho puntos claves que el docente debe conocer y saber hacer, con el fin de poder llevar a cabo una buena labor. Ellos son:

1. Conocer la materia que va a enseñar.
2. Conocer y cuestionar el pensamiento docente.
3. Adquirir conocimientos teóricos sobre el aprendizaje y el aprendizaje de las ciencias.
4. Realizar una crítica fundamentada de la enseñanza habitual.
5. Saber preparar actividades.
6. Saber dirigir la actividad de los alumnos.
7. Saber evaluar.
8. Utilizar la investigación y la innovación (Gil, Pessoa, Fortuny, & Azcárate, 2001, pág. 11).

En esta forma, es preciso indagar los motivos por los cuales los docentes no logran hacerse entender, de modo que el problema se relaciona con la didáctica de las matemáticas relacionado especialmente con la enseñanza.

La dificultad de la enseñanza de las matemáticas radica especialmente en la desconexión de los temas que se tratan en clase con la vida diaria, puesto que no hay una vinculación práctica del conocimiento escolar y la matemática cotidiana. Al menos en relación con las operaciones básicas y la comprensión de los números enteros y los racionales, que son procesos que pueden relacionarse con la vida cotidiana, el estudiante debería poder reconocer su utilidad práctica:

> No se puede negar que la didáctica de las fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras. Por regla general, los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. Cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad. Desde mi punto de vista, este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones funcionan mucho peor que los números naturales y por la que mucha gente nunca aprende las fracciones.
>
> Los alumnos con el don de digerir algoritmos aprenden a operar con fracciones de todos modos, los alumnos menos o nada dotados en este sentido específico lo aprenden por ensayo y error o no lo aprenden en absoluto. Después de uno o dos años de fracciones, algunos alumnos dominan los algoritmos, aunque no tienen ni idea de lo que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas; otros no conocen siquiera el nombre de fracciones particulares. La pobreza fenomenológica del enfoque me parece, en gran parte, responsable de este fallo didáctico (Freudenthal, 1994, págs. 8 - 20).

De esta manera, se hace necesario indagar las posibles dificultades que puedan tener los docentes en la enseñanza de las matemáticas y, más concretamente, con respecto a las operaciones con números racionales, por ser este un tema de alta relevancia y de relativa complejidad para su enseñanza y para su aprendizaje (D’Amore, Fandiño, Marazzani, &

Sbaragli, 2008). Además, algunos datos del NAEP[4] de Estados Unidos sugieren que "mientras los adolescentes son funcionales con los números enteros, su desempeño en tareas con fracciones es de un nivel más bajo" (Carpenter et al., 1975, citado en Kieren, (1980)). En este sentido, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son las dificultades que manifiestan los docentes en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria?

3. Justificación

Se suele responsabilizar al estudiante del fracaso escolar, por lo cual, se tiende a buscar con detalle las dificultades en el aprendizaje y no en la enseñanza. Por esta tendencia, la presente investigación apunta a la enseñanza más que al aprendizaje. A este respecto, una investigación realizada por la Facultad de Educación de la Universidad de la Sabana, que duró dos años y participaron 25 docentes de colegios públicos y privados en zonas rurales y urbanas, indagó sobre las formas en que aprenden los profesores, y encontró que:

> Uno de los hallazgos más importantes es que las teorías enseñadas en las universidades e instituciones de formación de docentes no son pertinentes para la enseñanza, pues abordan el estudio de los niños de una manera universalista, que no corresponde a las situaciones cotidianas de los contextos en que trabajan los educadores. También se encontró que los profesores escogen una teoría que les parece adecuada para enseñar, pero en el aula no la utilizan sino que se inclinan por prácticas de enseñanza cotidiana, tradicionalista y ligada a las experiencias de su formación durante la infancia y la adolescencia. Otro de los aspectos que llamaron la atención es que en sus explicaciones sobre el aprendizaje, los profesores hablan de conceptos psicológicos, sociológicos y de otras ciencias, pero no de la pedagogía, que es la teoría y la reflexión sobre el hecho educativo, lo cual dificulta el diseño de los procesos de enseñanza y la planeación de las clases (Guzmán, 2010, pág. 8).

[4] En castellano: Evaluación Nacional del Progreso Educacional.

Por lo general, la educación y, por consiguiente, la pedagogía suelen seguir una tendencia tradicionalista (Guzmán, 2010, pág. 8). Por eso, el docente no suele percatarse de que tiene dificultades en la enseñanza. En este sentido, el impacto de la presente investigación será el reconocimiento de la importancia de la cualificación en la formación docente. No obstante, no se quiere decir aquí que los estudios sobre el aprendizaje de las matemáticas no sean relevantes. Por el contrario, el autor está convencido de que toda enseñanza debe tener como propósito el aprendizaje, pero, en este caso, centrar la mirada en la enseñanza implica preocuparse por el estudiante y por su aprendizaje para no hacer recaer en él los problemas pedagógicos sobre la matemática.

De este modo, es relevante la utilidad que puede tener esta investigación para tratar de identificar las posibles dificultades sobre el problema planteado, lo cual puede servir para determinar otros tipos de problemas que se presentan en la matemática. Además, no sólo es de interés en la educación secundaria, sino también en la primaria y en posgrados. Por su parte, los docentes la pueden emplear para concientizarse de sus propios errores en la enseñanza.

4. Objetivos

4.1 Objetivo General

Determinar las dificultades que manifiestan los docentes en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria.

4.2 Objetivos Específicos

- ✓ Identificar las dificultades que pueden afectar la enseñanza de las operaciones con números racionales.
- ✓ Reconocer las dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en las estrategias didácticas que manifiestan los docentes.

5. Referente Teórico

5.1 Antecedentes

En una investigación realizada por los profesores Rafael Escolano y José María Gairín de la Universidad de Zaragoza (2005), sobre los “Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria”, se propone en primer lugar observar los obstáculos didácticos provocados al priorizar la enseñanza de la fracción como relación parte-todo. En segundo lugar, presentar una propuesta didáctica alternativa para alumnos de 4°, 5° y 6° de educación básica. Esta propuesta se apoya en el uso de tres modelos de aprendizaje: medida, cociente y razón. A partir de esta investigación, se pueden reconocer los obstáculos didácticos que ocurren al priorizar la enseñanza de la fracción como relación parte-todo. Además, es interesante observar la propuesta con base en tres modelos de aprendizaje: medida, cociente y razón, que hacen parte de las siete interpretaciones que proporciona Kieren (1980) para los números fraccionarios, por lo cual, es de interés para esta investigación, puesto que los tres constructos, más los otros cuatro que se mencionarán más adelante, son subcategorías para el análisis.

La propuesta toma como referente el paradigma constructivista del aprendizaje: prioriza el trabajo personal y en grupo de los alumnos y potencia el aula como espacio para la construcción del conocimiento. Respecto a lo metodológico, se refiere al paradigma constructivista del aprendizaje, pero en este caso es relevante la valoración del aula como espacio para la construcción del conocimiento.

Esta propuesta, que forma parte de una investigación en Didáctica de la matemática, se implementó en los cursos 1999-00, 2000-01, 2001-02 y 2003-04 en el colegio público "Tío Jorge" de la ciudad de Zaragoza. En la experimentación, participaron 160 alumnos y 5 profesores del colegio (Escolano & Gairín, 2005).

En un estudio doctoral realizado en el CINVESTAV de México por Paula Perera y Marta Valdemoros (2007), cuyo título es "Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de Educación Primaria", se desarrolló una enseñanza experimental aplicada a un grupo de cuarto grado de primaria, con niños de nueve años de edad de una escuela pública. El programa de enseñanza estuvo integrado por tareas vinculadas a la vida real de los niños. Dichas actividades fueron diseñadas para promover soluciones que favorecieran en el estudiante el desarrollo de significados (medida, cociente intuitivo y rudimentos de operador multiplicativo. Se pretendió propiciar con ello la construcción de la noción de fracción. Así mismo, fueron aplicados dos cuestionarios, uno anterior y otro posterior al programa de enseñanza. Además, se efectuaron entrevistas individuales a tres niños que fueron previamente seleccionados para el estudio, con el propósito de comprender los procesos como resultado de la enseñanza impartida. Se identificaron significados respecto a la construcción de la noción de fracción y se utilizaron los tres constructos de Kieren (1976), dos de ellos, medida y cociente, son utilizados en el mencionado trabajo y el otro es el operador multiplicativo.

La investigación se inició con un cuestionario exploratorio aplicado a 30 estudiantes, con el propósito de obtener información sobre los conocimientos con que cuentan los niños sobre las fracciones. El examen permitió seleccionar a tres alumnos para el estudio y facilitó la organización de la enseñanza. El examen inicial estuvo conformado por trece tareas organizadas en tres bloques. En el primer bloque, se presentaron tareas relacionadas con el significado de medida; en el segundo bloque, se incluyen situaciones de reparto; y en el tercero, actividades relacionadas con el significado de operador multiplicativo. Es interesante la aplicación de un pre-test y luego de un post-test, divididos en bloques, cada

uno de ellos aplicado al significado de interés del estudio. Además, se incluyeron entrevistas individuales para detectar diferencias.

En una investigación llevada a cabo por Rebeca Flores y Gustavo Martínez (2009), cuyo título es “Una construcción de significado de la operatividad de los números fraccionarios”, citan a Perera y Valdemoros (2007) quienes consideran que algunos investigadores han reconocido que las fracciones son uno de los contenidos de las matemáticas que presentan dificultades para su enseñanza y para su aprendizaje, en los niveles básicos de educación. Las dificultades señaladas por estos trabajos son puntos clave en este trabajo.

Al respecto, Fandiño (2009) identifica varios errores típicos en los estudiantes, entre los que están las dificultades con las operaciones entre números racionales, al manejar el adjetivo *igual*, al reconocer los diagramas más comunes y al manipular equivalencias. La investigación considera la perspectiva socioepistemológica como el aparato teórico que le permite presentar las ideas en torno a una primera exploración realizada con estudiantes de nivel secundaria del Estado de México. Éstas incluyen la idea de fracción y a algunos de sus significados. Uno de los objetivos de este trabajo es el de determinar los significados de la noción de fracción que trascienden en su operatividad, por lo cual se desarrolló un primer acercamiento exploratorio mediante un cuestionario a estudiantes de una escuela secundaria del Estado de México, que pudiera dar cuenta de algunos de esos significados.

El estudio incluyó elementos de carácter teórico, de carácter curricular y de carácter exploratorio. El aspecto curricular está referido al tratamiento en los programas de estudio y en libros de texto sobre la noción de fracción y su operatividad. Respecto al aspecto exploratorio, se consideraron tres momentos:

- ✓ Una primera aproximación sobre significados en torno al objeto de estudio, cuyos resultados servirán para una mejor orientación de los dos momentos subsecuentes.

- ✓ Una profundización a través de entrevistas a estudiantes y profesores sobre el objeto de estudio.
- ✓ Un cuestionario que incluyó situaciones, problemas o actividades propuestos en libros de texto vigentes.

En lo metodológico, cabe resaltar el aspecto exploratorio y sus consiguientes tres momentos que se llevan a cabo.

En la investigación de Marcela Luelmo (2004), de la Escuela de Ciencias de la Educación de la Universidad de La Salle de México, sobre las "Concepciones matemáticas de los docentes de primaria en relación con la fracción como razón y como operador multiplicativo", se observa que las matemáticas han presentado en el currículo oficial una diversidad de problemas de enseñanza y de aprendizaje. Uno de los contenidos centrales de esta materia son las fracciones, que presentan más dificultades que otros. El estudio hace un análisis de la enseñanza de ese contenido a partir de una de las teorías actuales que rigen a la enseñanza de las matemáticas que es la teoría de los campos conceptuales. Esta teoría plantea que una estructura matemática puede adquirir diferentes significados de acuerdo con el contexto en el que se utilice. Considera que un conocimiento adecuado de dicha estructura requiere conocer todos los significados que puede tener. En la fracción, por ejemplo, los significados son cuatro: como medida, como cociente, como razón y como operador multiplicativo. De estos, los dos últimos son los más difíciles de comprender.

Al analizar los datos, se encontró que los docentes no han construido estos dos significados de la fracción, por lo cual su conocimiento de ésta es incompleto y la enseñanza que puedan ofrecer de ella será deficiente. Con esto, se identificaron las implicaciones educativas de los resultados encontrados en los alumnos de primaria.

Para el diseño metodológico, se seleccionó una población comprendida por los docentes que trabajan en una escuela primaria pública del Distrito Federal de México, como maestros titulares de grupo, durante el ciclo escolar 2002–2003. La muestra comprende

ocho de los maestros titulares de grupo. Esta muestra es de tipo no probabilística, pues la elección de los docentes dependió de su disponibilidad en el momento de la aplicación.

El instrumento para la recolección de datos es un cuestionario que consta de cinco reactivos. Cada uno de estos contiene dieciséis sub–reactivos, de los cuales ocho sub–reactivos (dos reactivos) pertenecen a la variable "Fracción como operador multiplicativo" y los ocho restantes (tres reactivos) a la variable "Fracción como razón".

La encuesta se realizó de acuerdo con la disposición de los docentes y con el tiempo que podían dedicar a la solución del cuestionario. Se realizó durante tres visitas a la escuela, en las que se entregó individualmente el instrumento a los docentes, después de explicarles el objetivo de la investigación. Se les pidió que fueran comentando el proceso de solución de cada problema. Les hicieron preguntas como ¿Cómo lo resolvió? ¿Por qué lo resolvió así?

En el aspecto metodológico, conviene notar que la muestra fue no probabilística, tomando en consideración el tiempo y la disponibilidad de los docentes para la aplicación del instrumento, que fue un cuestionario respondido en forma individual. Lo más interesante aquí fue la forma como se aplicó, pues no se limitó a responder las preguntas, sino que se les pidió que fueran comentando el proceso de solución de cada uno de los problemas planteados.

La interpretación de los problemas se hizo con base en los niveles definidos por Hart y Kieren (citados por Luelmo, 2004), para la fracción como razón y como operador multiplicativo respectivamente. Se elaboraron tablas para los significados de la fracción estudiados. En este caso, al igual que otras investigaciones, se nombran dos de los constructos de Kieren. Para este autor, solo toman el de operador multiplicativo, el otro, que corresponde a la razón, lo hacen basados en Hart. Además, se analizaron las respuestas de los profesores, tomando en cuenta las explicaciones que dieron para caracterizar las concepciones (Luelmo, 2004).

La “Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones”, que es una estrategia didáctica de intervención en el aula, se desarrolló con estudiantes del sector oficial de la Institución Educativa Alfonso Builes Correa de Planeta Rica (Córdoba–Colombia), con jóvenes entre 10 y 11 años del grado sexto, llevada a cabo por los docentes Armando Meza y Antonio Barrios (2010) de la Institución Simón Bolívar de Planeta Rica.

Para la realización de este trabajo, se seleccionó el grado sexto conformado por 40 estudiantes, a quienes se les aplicó una prueba diagnóstica sobre el concepto de fracción, equivalencia y suma de fracciones, con el fin de indagar el grado de aprendizaje alcanzado por estos en el desarrollo de su programa de matemáticas. Luego, se les indicó otro camino que permitía enfatizar los temas descritos anteriormente, a través de un juego, que fue diseñado con anterioridad por el grupo de estudio. Uno de los principales aportes fue la indagación sobre las ideas previas y se les propuso una alternativa diferente a través de un juego. Ésta es una estrategia didáctica de intervención en el aula. Además, se buscó indagar el aprendizaje logrado mediante la enseñanza.

Elena Ruíz y Marta Valdemoros (2006) realizaron un estudio de caso que forma parte de un proyecto doctoral concluido en 2005: “Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina”. La propuesta se realizó con un grupo de sexto grado de educación elemental conformada por 29 niños mexicanos de 11 años. La niña del estudio de caso, Paulina, expresó el proceder de varios de estos niños, que resolvieron el cuestionario inicial con algoritmos manejados de un modo mecánico, sin darle sentido a sus elaboraciones, lo cual se observó al principio del programa de enseñanza. Dicho programa propició la ampliación del pensamiento proporcional cualitativo de Paulina, y fortaleció su pensamiento proporcional cuantitativo en la resolución de problemas.

En esta forma, la enseñanza, el cuestionario final y las entrevistas mostraron que el enriquecimiento del pensamiento proporcional cualitativo le permitió a Paulina ampliar las relaciones cuantitativas y mejorar el manejo de los algoritmos, al enmarcarlos en

aplicaciones con sentido. La investigación reconoció la relación entre el pensamiento proporcional cualitativo y el cuantitativo, que les puede ayudar a los estudiantes a mejorar el manejo de los algoritmos para la resolución de problemas, los cuales resolvían con algoritmos manejados de una manera mecánica.

Otro estudio de caso realizado por las investigadoras del CINVESTAV de México, Valdemoros y Ruíz (2008): "El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos", que es una indagación cualitativa realizada en una escuela primaria nocturna de México DF, siguieron el caso de Lucina junto con cuatro casos más. La indagación alternó el uso de números naturales, fraccionarios y decimales. Se abordó exclusivamente el enriquecimiento semántico y conceptual de las fracciones en la resolución de problemas que permiten la reconstrucción de las experiencias personales.

El estudio se realizó mediante un cuestionario exploratorio y dos entrevistas didácticas aplicadas a esta mujer de 41 años, de sexto grado. Las entrevistas fueron la principal fuente de información. Se seleccionó el caso de Lucina porque ella regresó recientemente a la escuela, exhibió un desempeño sólido en el cuestionario y un satisfactorio nivel de reflexión sobre la naturaleza de sus elaboraciones. Al igual que el estudio de caso anterior, este trabajo aporta elementos metodológicos, además del enriquecimiento conceptual de las fracciones.

Una investigación llevada a cabo por los profesores de la Universidad de Alicante, Ceneida Fernández y Salvador Llinares (2010), titulada "Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria – El caso de la construcción de la idea de razón", se propuso estudiar la relación entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo en estudiantes de educación primaria en el contexto de la construcción del significado de la idea de razón. Para ello, se categorizaron las estrategias usadas por estudiantes de educación primaria cuando resuelven diferentes problemas proporcionales y problemas con una estructura aditiva, y se hizo un análisis estadístico implicativo para identificar las relaciones entre las estrategias.

Los participantes de la investigación fueron 197 estudiantes de educación primaria de tres centros públicos diferentes: 65 estudiantes de 4° curso, 68 estudiantes de 5° curso y 64 estudiantes de 6° curso. Los centros están situados en ciudades con familias son de clase media y alta. Los principales sectores productivos son la industria y los servicios. El instrumento de recogida de datos utilizado se hizo teniendo en cuenta el modelo de razonamiento proporcional descrito por Modestou y Gagatsis (2010), en el cual se elaboró un cuestionario formado por problemas con estructura multiplicativa y con estructura aditiva. Esta investigación brinda elementos teóricos sobre la construcción del significado de la idea de razón y sobre el modelo de razonamiento proporcional, que se tuvo en cuenta para el instrumento utilizado para la recogida de datos.

Una investigación titulada “Diseño de una investigación para identificar los significados de fracción que ponen de manifiesto los profesores de primaria en Chile”, llevada a cabo por los profesores Marta Cecilia Salazar de la Universidad Silva Henríquez de Chile, Sergio Martinic de la Universidad Católica de Chile y Alexander Maz de la Universidad de Córdoba de España (2011), se enfoca en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, específicamente en las fracciones, debido a las dificultades que dicho concepto presenta en su enseñanza y en su aprendizaje. El objetivo fue identificar los significados que manifiestan los profesores de 5° año básico en la enseñanza de las fracciones, y analiza los modelos, las representaciones y los recursos utilizados.

Con ayuda de los videos grabados en 2009 en el programa *Docente más*, se seleccionaron aquellos cuyo contenido era de fracciones. La investigación fue descriptiva y exploratoria. Para el análisis de los videos, se elaboró un registro de observaciones mediante la asignación de etiquetas descriptivas, y se definió en qué consiste cada una de ellas y qué se observará en los videos. Se identifican algunos instrumentos de recolección de información que pueden ser replicados en este estudio, pues, en la metodología utilizada, cabe resaltar que la muestra fue intencional y que la investigación fue a la vez descriptiva y exploratoria.

La tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa presentada por Rebeca Flores García (2010) del Instituto Politécnico Nacional de México: “Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria”, intenta analizar esos significados que, por su multiplicidad, suscitan dificultades para su enseñanza y para su aprendizaje, hecho que prevalece en la enseñanza básica.

El trabajo se desarrolló a través de una revisión de investigaciones relacionadas con el objeto de estudio, un análisis del programa de estudio, tres series de libros de texto de la escuela secundaria de México, una encuesta a estudiantes con un instrumento conformado por seis problemas y el análisis de las realizaciones de los estudiantes al enfrentar estos problemas. Conviene resaltar para este estudio la forma en que se desarrolló el trabajo mencionado.

5.2 Números racionales: historia y definición

En la historia, se han construido varios sistemas numéricos, algunos de los cuales son subconjuntos de los otros, entre ellos se tienen los complejos, los imaginarios, los reales, los irracionales, los enteros, los naturales y los racionales. Estos últimos se verán a continuación, empezando con su historia y continuando con una breve definición.

Historia

Diofanto en el siglo III, d. C., fue el primero de los matemáticos griegos que trató las fracciones como números. El concepto de fracción desde su origen respondió a la necesidad de repartir objetos entre varias personas: el problema de distribuir 1, 2, 6 ó 7 hogazas de pan entre 10 personas, es una de las situaciones resueltas en el Papiro de Ahmes, también conocido como papiro de Rhind[5]), como una de las referencias históricas más antiguas de la aparición de este concepto (Méndez, citado por Tamayo *et al.*, 2011).

[5] Fue escrito por *Ahmes* (*A'h-mosè*), escriba egipcio de mediados del siglo XVI.a.C. El escriba se basó en textos de trescientos años de antigüedad, según se relata al principio del papiro. El documento fue encontrado en el siglo

Por otro lado, según Fandiño (2009), los babilonios utilizaron fracciones cuyo denominador era una potencia de 60, mientras que los egipcios usaron las fracciones con numerador igual a 1. En la escritura, la fracción la expresaban con un óvalo, que significaba parte o partido, y debajo, o al lado, ponían el denominador. El numerador no se ponía por ser siempre 1. Los griegos y los romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persistió hasta la edad media. Según Tamayo *et al.* (2011), "para los antiguos egipcios, el problema de expresar las partes de un todo fue el motor de la invención de los fraccionarios, como la necesidad de medir cantidades continuas porque los números naturales resultaban insuficientes" (pág. 210).

Fandiño (2009) relata que los antiguos egipcios, 2000 años a. C., utilizaban únicamente las llamadas fracciones unitarias, es decir, las fracciones de la forma 1/n, siendo $n \neq 0$, de modo que el numerador siempre es igual a 1. Sin embargo, pronto se dieron cuenta de que es posible escribir cualquier número racional como suma de fracciones unitarias distintas, a lo cual se le llamó fracción egipcia. Fibonacci, citado por Fandiño (2009), en su libro *Liber Abaci*, indica la manera de obtener una fracción egipcia a partir de cualquier fracción.

Las fracciones egipcias fueron descubiertas en el mundo moderno en 1858, cuando el escocés Henry Rhind, a los 25 años de edad, compró en un mercado de Luxor el papiro de seis metros de longitud por 33 centímetros de ancho, donde había gran cantidad de acertijos matemáticos y geométricos y fracciones y cálculos para la construcción. En este papiro se describen las fracciones egipcias y se dan tablas de fracciones escritas como fracciones egipcias (Sánchez, 2000).

La forma de escribir las fracciones tal como las conocemos ahora se originó en la India, en el siglo VI. Se escribían como un número encima del otro sin la raya entre ellos. La forma $\frac{m}{n}$, es decir, con la raya o vínculo, fue creada por los árabes e introducida en Europa

XIX, en Ramesseum, en unas ruinas. Posteriormente, fue adquirido por Henry Rhind en 1858. Cuando Rhind murió, en 1864, los herederos donaron el papiro al Museo Británico de Londres (Sánchez, 2000).

en el siglo XIII por Leonardo de Pisa, o Fibonacci, famoso entre otros trabajos por la serie de Fibonacci. La escritura más compacta m/n se comenzó a utilizar en 1784 por razones tipográficas.

A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue quien generalizó el uso de los números decimales tal como los conocemos hoy. De acuerdo con Tamayo *et al.* (2011), "las matemáticas árabes tienen un auge importante en el manejo de los números racionales e introducen una notación más actual" (pág. 210).

A finales del siglo XVI, Simon Stevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los expresaba de una forma complicada: para 123,456 escribía 123(0) 4(1) 5(2) 6(3). Según Freudenthal (1994), "en las propuestas de Stevin, las fracciones decimales se conectaron estrechamente a un sistema decimal de medida" (pág. 49).

A principios del siglo XVII, los números decimales ya aparecieron tal como los escribimos hoy, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal en el siglo XVIII.

> La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros. Los números racionales se expresan de dos formas diferentes, como fracción y con notación decimal. La escritura fraccionaria tiene, para Aleksandrov (1973) su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría. El uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes como el tiempo, da lugar a la notación decimal (Centeno, citado en Tamayo *et al.*, 2011).

A continuación, para concluir esta reseña histórica, se cita textualmente el libro *Las fracciones* de Fandiño (2009):

> “Fracción” deriva del término latino “fractio”, es decir, “parte obtenida rompiendo”, es decir “romper”. Por lo tanto es erróneo pensar que, en el significado original etimológico de “fracción”, ya esté comprendida la solicitud (que es específica sólo para la matemática) de que las partes obtenidas con la acción de romper sean “iguales” (pág. 37).

De acuerdo con lo que afirma la autora, surge un concepto esencial en el manejo de los números racionales que se refiere al concepto de igualdad:

> El símbolo $\frac{m}{n}$ tiene un origen incierto, pero claramente fue usado por Leonardo Fibonacci Pisano en su *LiberAbaci* del 1202; los números fraccionarios son allí llamados “rupti” (rotos) o también “fracti” (pedazos) y la rayita horizontal puesta entre numerador y denominador es llamado “vírgula” es decir “bastoncillo” (“virga”, bastón). Aún hoy, para indicar por ejemplo una cantidad de euros comprendida entre 4 y 5, hay quien dice “4 y rotos”.
>
> Según Cajori (1928-29) el bastoncito fue usado anteriormente también por el matemático árabe Abu Zakhariyá Muhammad ibnAbdalláh al–Hassar (por lo general abreviado en al-Hassar) casi un siglo antes que Fibonacci; según Yuskevic (1976) los orígenes serían aún más antiguos, hindú, mientras que en el siglo I los griegos escribían el numerador sobre el denominador, pero sin ningún bastoncillo.

Como puede observarse, el símbolo matemático de fracción viene empleándose desde la antigüedad, con algunas modificaciones, dependiendo de la cultura, lo que puede aportar elementos que dan cuenta de sus dificultades de comprensión:

> También las palabras “numerador” y “denominador” tienen un origen incierto, pero sabemos que se afirmaron en el curso del siglo XV en Europa.
>
> La llamada “reducción de las fracciones a los términos mínimos” o “fracción irreducible” (aquella que por ejemplo hace pasar de la fracción $\frac{12}{30}$ a su equivalente $\frac{2}{5}$) es ciertamente muy antigua, pero se encuentra explícitamente presentada en Luca Pacioli (1445-1515) y en Nicoló Fontana de Brescia llamado Tartamudo (1499-

> 1557), bajo el nombre de “dividir” (*schisare* en italiano antiguo, es decir exprimir); el máximo común divisor de los dos términos es llamado “divisor” (*schisatore*); la misma operación se encuentra también llamada, a finales de la edad media, “ultima depressione fractorum” (última expresión de los factores) o “ridur li rottiallasua menor denominatione” (reducir los rotos a su menor denominación). Esta operación hoy en día es llamada “simplificación”.
>
> Tiene cierta difusión la operación contraria, la cual permite pasar, por ejemplo, de $\frac{2}{5}$ a $\frac{12}{30}$; esta es llamada “amplificación”. En ciertos países de América, por ejemplo, tiene todavía un amplio uso escolar que, en Europa, en cambio se perdió desde el siglo XIX (Fandiño, 2009, pág. 39).

Respecto a las fracciones propias, Fandiño (2009) las asocia con las llamadas “fracciones egipcias”, que tienen como numerador la unidad, resultado de dividir un todo en partes iguales.

> La distinción entre fracciones “propias” e “impropias”, es apenas del siglo XVIII; esta distinción, poco intuitiva, que impone algunos problemas desde un punto de vista didáctico, parece que no existía anteriormente. A la “fracción impropia” $\frac{8}{3}$, por ejemplo, se prefería la escritura equivalente $2\frac{2}{3}$ es decir 2 enteros y $\frac{2}{3}$. En este caso, sin embargo, es evidente que los “rotos” son los $\frac{2}{3}$ y claramente no las 2 unidades. Por lo tanto la “fracción” $\frac{8}{3}$ tenía que aparecer como innatural ya que en efecto no representa “rotos” sino “enteros y rotos” (págs. 37 - 39).

5.3 Concepto de número racional

Se llama número *racional* a una pareja de números enteros llamados *numerador* y *denominador*, con la única condición de que el denominador no sea cero. Se escribirá así: *m/n* donde *m* es el numerador y *n* el denominador. También se puede escribir (y es más

usual) $\frac{m}{n}$ con el numerador sobre el denominador, separados por una raya horizontal o vínculo.

La segunda forma tiene la ventaja de que la raya reemplaza el paréntesis, tanto en numerador como en denominador. Por ejemplo: $\frac{a+b}{c-d}$ equivale a $(a + b) / (c – d)$ y es más legible. De esta forma de escribir se deriva una forma de hablar: por ejemplo, al racional ¾ se lo llama también “tres sobre cuatro”. A los números racionales también se les llama *quebrados, fracciones o fraccionarios*, pero estos dos últimos nombres sólo suelen usarse cuando el denominador no sea 1 (Obregón, 2007, pág. 113). Según Kieren (citado por Dickson (1991, pág. 294):

> “los números racionales” son los números expresables como razón o cociente de dos números enteros y por consiguiente, entre ellos contamos con todas las fracciones, porcentajes y demás decimales representables mediante fracciones, esto es, los decimales finitos y los periódicos.

La definición de número racional de Kieren (1980) dice: “cualquier número x que satisface $ax = b$ donde a y b son enteros ($a \neq 0$)” (pág. 128). Esta definición no dice mucho sobre la noción de los números racionales tal como ocurre en el conocimiento personal, pues los números racionales pueden significar muchas más cosas. Wagner (citado por Kieren, 1980) sugiere que el concepto de número racional suele ser un mega–concepto, que incluye muchos hilos entrelazados (p. 125).

La Real Academia de la Lengua Castellana indica que:

> Los números quebrados 1/5, 2/6, 8/10… se expresan lingüísticamente con dos numerales: un cardinal en función adjetiva que designa el numerador del quebrado: *un, dos, ocho,* y un numeral ordinal en función substantiva que designa el denominador: *quinto, sexto, décimo* (RAE, citado en Freundenthal, 1994).

Para Freudenthal (1994), el término “fracción” está pasado de moda, pues los números racionales son objetos matemáticos actualmente. Para el autor, hay una diferencia entre

“fracción” y “número racional”. Las *fracciones* son el recurso fenomenológico del número racional. Mientras la “fracción” está relacionada con romper o fracturar, el “número racional” evoca asociaciones menos violentas, en el sentido de que está relacionado con “razón”, y no en el sentido de la razón sino en el de proporción, de medida. Sin embargo, Freudenthal dice que en realidad las fracciones tienen mucho que ver con razón (pág. 8).

Según Freudenthal (1994), el abordaje de las fracciones según la relación “parte-todo” es limitado fenomenológicamente y también matemáticamente. Este enfoque produce sólo fracciones propias (el numerador es menor que el denominador). La didáctica tradicional de la aritmética se limita a este enfoque incluso en el sentido restringido de la división del pastel y pasa por alto que la concreción de los racionales no se agota con romper un todo en partes (págs. 19–20).

Según Vasco (2010), a los racionales positivos se les llama fraccionarios, no obstante, conviene distinguir el número fraccionario de la fracción. Este autor propone el “Archipiélago Fraccionario”, basado en Kieren, que se apoya en la idea de que no hay un solo concepto de número racional, sino varios. La comparación se debe a que un archipiélago no tiene una sola isla, sino varias. De esta manera, no habría una sola isla de números racionales o de fraccionarios, sino muchas islas de un archipiélago.

5.4 Operaciones con fraccionarios y algunos aspectos epistemológicos y didácticos sobre la enseñanza de las fracciones

En relación con las operaciones, Freudenthal (1994) dice que “en la didáctica tradicional de las fracciones, la multiplicación está vinculada al patrón rectangular antes que al operador fracción” (pág. 48). Además, le parece molesto que “tres veces” sea una operación natural, igual como lo es “1/3 de”, lo cual da a entender que para la multiplicación de fracciones se puede reemplazar “m/n de” por “m/n veces” (pág. 42).

Kieren (1980) propone un modelo de construcción de conocimiento a través de una red de subconstructos de número racional que forma un sistema ideal personal de conocimiento sobre el número en referencia, evidenciando una relación entre cinco significados asociados a la noción de fracción: medida, cociente, operador, razón y parte todo (Flores, 2010). En relación con la enseñanza, sostiene que:

> Las interpretaciones de los números racionales forman una base conceptual para la construcción de estructuras cognitivas y de enseñanza relacionadas. A partir de esta base, cinco ideas de números fraccionarios emergen como fundamento para un constructo de número racional, éstas representan cinco patrones de pensamiento numérico fraccionario o racional (Kieren, 1980, p. 134, citado en Flores, 2010).

Así mismo, la base para mejorar la enseñanza del número fraccionario y racional necesita tomar en consideración la visión de Wagner propuesta en 1976 (citado por Kieren, 1980, pág. 133), que asume los números racionales como un megaconcepto. Esto significa que la enseñanza necesita orientarse de manera implícita a los componentes que comprende el constructo de número racional. En suma, la enseñanza necesita considerar las interrelaciones entre los principales componentes. Kieren plantear un modelo teórico con cuatro sub–constructos esenciales, el otro (parte–todo) se encuentra implícito en cada uno de ellos (Flores R. , 2010).

Thomas Kieren ha venido investigando desde los años setenta sobre los diferentes significados que le son asociados a la fracción. En 1976, realizó una publicación en la que menciona siete interpretaciones de los números racionales. Esta polisemia es la razón principal de las dificultades de aprendizaje, tanto relacionadas con el concepto como con las operaciones (Fandiño, 2005, citada por Flores, 2010). Tales interpretaciones son:

- ✓ Fracciones
- ✓ Decimales
- ✓ Pares ordenados (clases equivalentes)
- ✓ Medidas

- ✓ Cocientes
- ✓ Operadores
- ✓ Razones

Sin embargo, más adelante Kieren (1980, p. 137) menciona cinco sub-constructos:

- ✓ Parte todo
- ✓ Razón
- ✓ Cociente
- ✓ Medida
- ✓ Operador

De acuerdo con Kieren (1980), los sub–constructos parte–todo y razón están estrechamente relacionados y han formado las bases tradicionales y modernas para el desarrollo del significado de fracción. En el sub–constructo "parte–todo", algo entero es roto en partes iguales. Las ideas de fracción son utilizadas para cuantificar las relaciones entre la totalidad y un número designado de partes. El sub–constructo "cociente" está emparentado con las relaciones parte–todo. En aquél, se tiene en cuenta la cuantificación del resultado de dividir una cantidad en un número dado de partes y está relacionado últimamente al álgebra de las ecuaciones lineales. El sub–constructo "medida" y el sub–constructo "cociente" está también emparentado con las relaciones parte–todo. Sin embargo, la tarea de medida significa la asignación de un número a una región. Esto es hecho usualmente a través de la iteración del proceso de contar el número de unidades completas utilizadas para cubrir la región. El sub–constructo *operador* describe los números racionales como mecanismos, pues se asigna un conjunto (o región) multiplicativamente en otro conjunto. Este sub–constructo fija la atención de los racionales como elementos en el álgebra de funciones (Kieren T. , 1980, págs. 134-136). Según Freudenthal (1994),

> …multiplicar y dividir (positiva o negativamente) potencias de 10 precede a la introducción formal y al aprendizaje de la multiplicación y la división de las

> fracciones decimales en general. La división de fracciones decimales se reduce por estos medios a la de enteros (pág. 51).

Respecto a la enseñanza dice que:

> En la enseñanza compensatoria y en las observaciones en las instituciones de formación de profesores, se me ocurrió que la didáctica usual, que apunta a la enseñanza de reglas para el lugar del punto decimal puede conducir a un bloqueo de la intuición y de la necesidad de intuición. Una vez estas reglas han sido formuladas y aprendidas, es casi imposible corregir aplicaciones erróneas, mediante la apelación a la intuición. Si se necesitan, tales reglas serían el término de un desarrollo, que no puede ser acelerado artificialmente. Las reglas se entenderían en diferentes niveles (Freudenthal, 1994).

Kieren (1980) sostiene que "la instrucción en números racionales debería ser aplazada hasta que el estudiante haya alcanzado el estado de las operaciones formales", para lo cual se basa en el hecho de que "una reacción a la prolongada historia de los pobres resultados en la instrucción del número racional es que el constructo de número racional es solamente accesible a los estudiantes más maduros". Por consiguiente, propone que "una alternativa plausible es aplazar la instrucción del número racional hasta la escuela secundaria". Esta propuesta también la plantean otros autores como Washburne y Freudenthal, citados en Kieren (1980).

5.5 Obstáculos, errores y dificultades en la enseñanza de los números racionales

En la presente investigación, se asume que un obstáculo es algo que impide avanzar –no sólo la enseñanza sino también el aprendizaje de algún concepto–, mientras que una dificultad es una oportunidad para avanzar, pero proporciona un conocimiento deficiente que es transmitido por el docente, por la dificultad que manifiesta para transmitirlo. Por otro lado, los errores también se suelen considerar como obstáculos, que en la didáctica de

la matemática, se conocen como obstáculos cognitivos, pues según Socas (citado por Garrido, Baquero & Baiz (2009)), las dificultades se concretan en la práctica en forma de obstáculos, y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores.

Para Brousseau (1998), hay tres tipos de obstáculos que pueden ser el resultado de diferentes causas y por eso se los diferencia según el origen en: obstáculos ontogenéticos (relacionados con el estudiante y su naturaleza), obstáculos didácticos (relacionados con el maestro y sus elecciones) y obstáculos epistemológicos (relacionados con la naturaleza de los argumentos de la matemática) (D'Amore, citado por Fandiño, 2009).

D'Amore (2004) define los obstáculos así:

> (…) obstáculo es una idea que, en el momento de la formación de un concepto, fue eficaz para afrontar problemas (incluso sólo cognitivos) precedentes, pero que se revela ineficaz cuando se intenta aplicarla a un nuevo problema. Dado el éxito obtenido (es más: con mayor razón a causa de éste), se tiende a conservar la idea ya adquirida y comprobada y, no obstante el fracaso, se trata de salvar; pero este hecho termina por ser una barrera hacia sucesivos aprendizajes (pág. 171).

A pesar de que la presente investigación se centra en las dificultades más que en los obstáculos, es necesario agregar las siguientes consideraciones de Moreno y Flores:

> Algunos errores conceptuales aparecen al relacionar distintas interpretaciones de la fracción. La identificación de la fracción con una cantidad es un obstáculo para interpretar y manejar la fracción como razón, y para el número racional.
>
> La noción de equivalencia de fracciones es origen de errores debidos al manejo simultáneo de diversos sentidos de fracción y de equivalencia, y otras veces por los problemas originados ante la transitividad del signo igual.
>
> La introducción temprana del cálculo algorítmico puede provocar confusiones en su manejo. Estos equívocos también se pueden producir por la similitud entre las notaciones de los números naturales y las fracciones. En este sentido se puede

considerar que las operaciones aprendidas con los números naturales son un obstáculo para las operaciones realizadas con racionales ya que, por ejemplo, la multiplicación no significa siempre un aumento de la cantidad.

En el aprendizaje de los números decimales, los alumnos encuentran dificultades en las operaciones, en el uso del cero, en la lectura y escritura de los números y en el orden. Estas dificultades se deben en gran medida a la persistencia de conocimientos de los números naturales (Moreno & Flores, 2000).

6. Diseño metodológico

6.1 Tipo de investigación

Creswell (1998), define cuatro tipos de diseños de los métodos mixtos según sus intenciones: los procedimientos, las variantes comunes a los tipos de estudio que se combinan, las fortalezas de cada uno y los retos que enfrentan. Uno de los diseños corresponde a la triangulación, cuyo propósito es combinar las fortalezas de las metodologías para obtener datos complementarios sobre un mismo problema de investigación, a partir de la comparación y la contrastación de los datos.

En la presente investigación, el diseño es recurrente, puesto que se hace una aplicación secuencial de un diseño cuantitativo y uno cualitativo que se aplican independientemente, pero cuyos resultados se complementan (Creswell, 1998), pues con ellos se pretenden identificar las dificultades que manifiestan los docentes para la enseñanza de las operaciones con números racionales.

En primer lugar, se recolectan datos mediante un cuestionario con preguntas cerradas cuyas respuestas se ubican en una escala Likert para permitir su manejo estadístico[6]. Este primer ejercicio es descriptivo de la frecuencia de las respuestas.

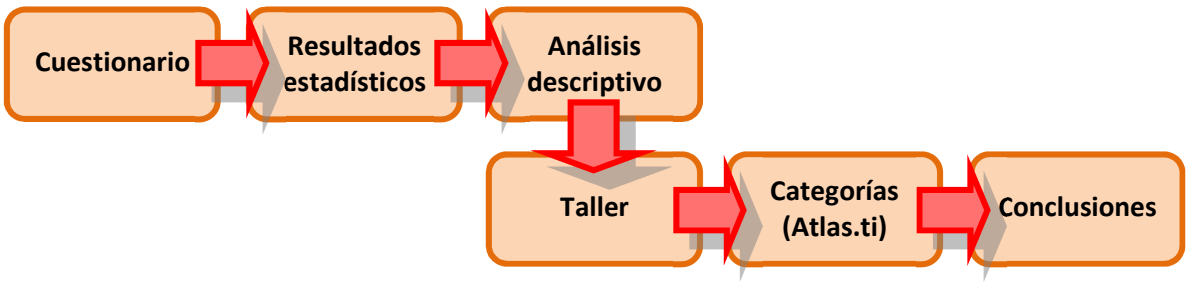
[6] Para su análisis, se utiliza el software SPSS.

Algunos datos obtenidos en el cuestionario, tales como argumentos o justificaciones a las respuestas ubicadas en la escala Likert, fueron analizados en una sistematización de categorías emergentes[7].

Este diseño integra los resultados en la fase de interpretación, lo que da lugar a las categorías emergentes que permiten responder a la pregunta de investigación, para contrastarlas posteriormente, de modo que permitan obtener conclusiones significativas.

En este sentido, la investigación es un estudio de caso con preguntas cualitativas, distribuidas en un cuestionario de respuestas cerradas, algunas preguntas abiertas y una entrevista. Además, se consideran los aspectos metodológicos en la revisión de antecedentes, donde se observa que el tema de investigación ha sido poco estudiado, pues la mayoría de los estudios han apuntado al aprendizaje de los números racionales y son escasos los que dirigen sus indagaciones a la enseñanza. Esta escasez hace que la investigación tenga un carácter exploratorio. También se pretende reconocer en los docentes las formas didácticas que emplean en la enseñanza de los números racionales, lo cual le da un carácter descriptivo.

4.2 ESQUEMA DEL DISEÑO METODOLÓGICO



[7] Para esta sistematización se usó el software Atlas.ti.

6.3 Procedimiento

Para lograr los objetivos específicos se realizó lo siguiente:

Para lograr el primer objetivo específico: “Identificar las dificultades que pueden afectar la enseñanza de las operaciones con números racionales”, se diseñó un cuestionario exploratorio con preguntas cerradas (anexo A), sobre la enseñanza de los números racionales, que fue aplicado a docentes de matemáticas de educación secundaria de Manizales.

Para lograr el segundo objetivo específico: “Reconocer las estrategias didácticas que emplean los docentes para enseñar las operaciones con números racionales y su relación con las dificultades en su enseñanza”, se recogieron datos susceptibles de ser categorizados. El cuestionario permitió diseñar el taller a partir de la saturación de las categorías que emergieron en el cuestionario (anexo B).

6.4 Caracterización de la unidad de trabajo

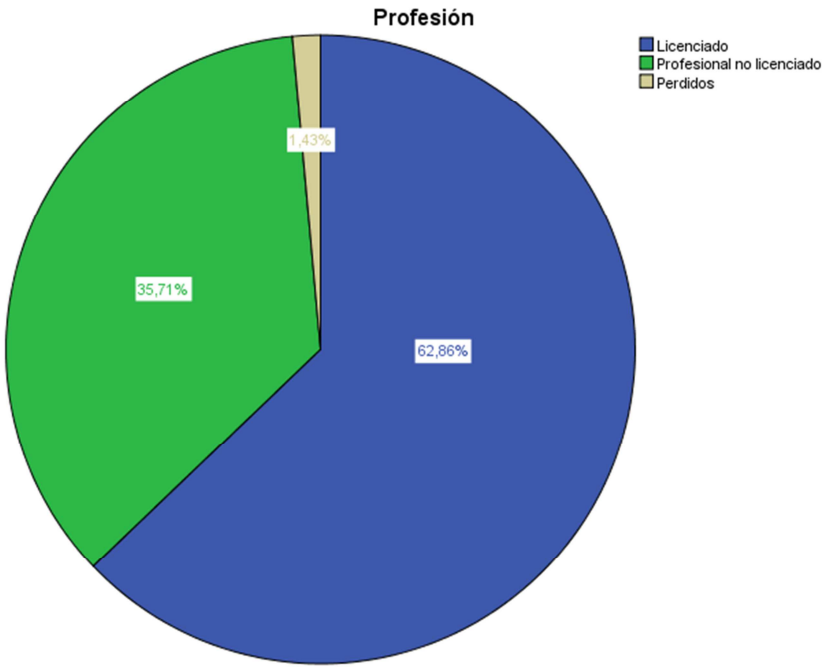
Los instrumentos para la recolección de los datos (cuestionario y taller) fueron trabajados con docentes de bachillerato del área de matemáticas de todos los grados, en 24 colegios de la ciudad de Manizales, 70 docentes participaron en la encuesta y 12 en el taller, los cuales fueron clasificados en licenciados y profesionales no licenciados. Estos últimos tienen una profesión diferente (ingenieros, economistas, etc.). La muestra es de maestros y maestras y los participantes cuentan con una experiencia docente de 1 a 40 años. Entre los colegios en los que se realizaron las indagaciones hay públicos y privados. Algunos son solo de varones, otros son femeninos y otros mixtos. La cantidad promedio de estudiantes por salón es de 35.

Es importante tomar en consideración que el número de docentes licenciados y los no licenciados no es igual, como se muestra en la tabla y el gráfico siguientes:

TABLA 1. PROFESIÓN

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Licenciado	44	62,9	63,8	63,8
	Profesional no licenciado	25	35,7	36,2	100,0
	Total	69	98,6	100,0	
Perdidos	Sistema	1	1,4		
Total		70	100,0		

GRÁFICA 1. PROFESIÓN

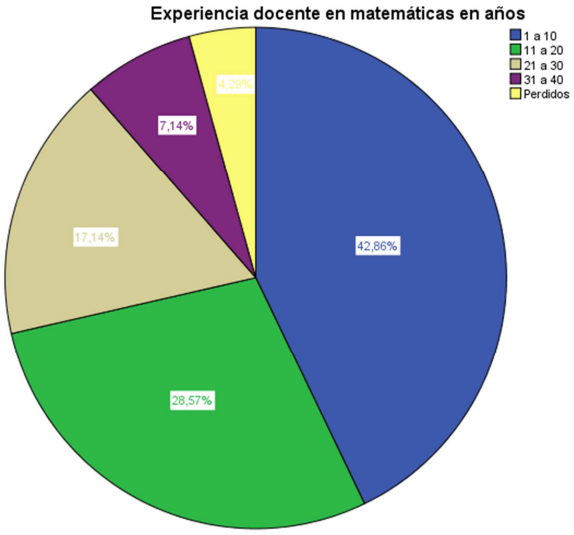


Por otro lado, la experiencia docente se considera conjuntamente para los docentes licenciados y los profesionales no licenciados, y oscila entre 1 y 40 años. Se agrupa en intervalos de la siguiente manera:

TABLA 2. EXPERIENCIA DOCENTE EN MATEMÁTICAS EN AÑOS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	1 a 10	30	42,9	44,8	44,8
	11 a 20	20	28,6	29,9	74,6
	21 a 30	12	17,1	17,9	92,5
	31 a 40	5	7,1	7,5	100,0
	Total	67	95,7	100,0	
Perdidos	Sistema	3	4,3		
Total		70	100,0		

GRÁFICA 2. EXPERIENCIA DOCENTE EN MATEMÁTICAS



De acuerdo con las tablas anteriores la caracterización de la muestra puede resumirse así:

Participaron en el estudio 70 maestros, de los cuales el 62,9% corresponde a docentes con formación pedagógica ya que se encuentran formados como licenciados en educación, otro hecho significativo es que un porcentaje del 42,86% poseen una experiencia de 1 a 10 años en la docencia, seguido del 28,57% de maestros que poseen una experiencia docente entre 11 y 20 años.

7. Resultados

7.1 Análisis estadístico

A continuación se presentan los resultados relativos a las diez preguntas que se detallan en la siguiente tabla:

TABLA 3. RESUMEN DEL PROCESAMIENTO DE LOS CASOS

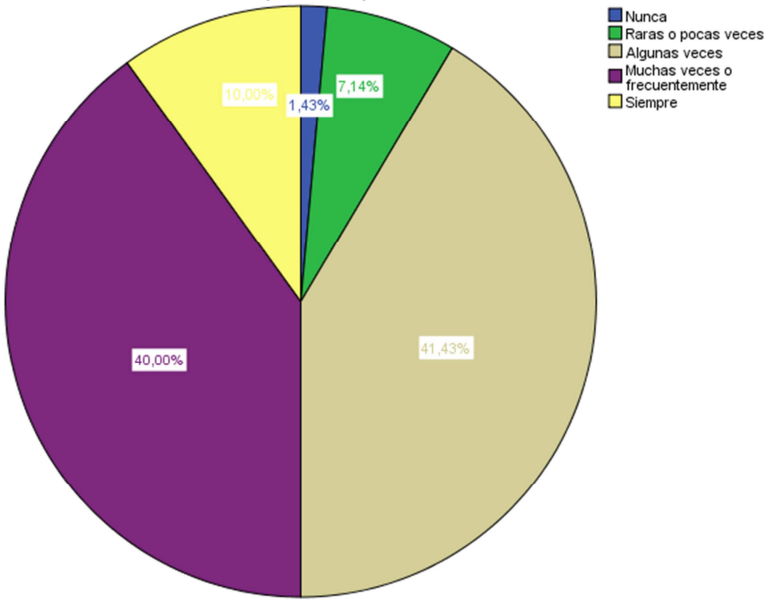
Pregunta	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
1. ¿Considera que la enseñanza de los números racionales es un tema de difícil comprensión para los estudiantes?	69	98,6%	1	1,4%	70	100,0%
2. ¿Hace uso de alguna estrategia diferente o especial cuando enseña los números racionales con sus operaciones?	69	98,6%	1	1,4%	70	100,0%
3. ¿Indaga acerca de las dificultades de comprensión que poseen los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales con sus operaciones?	68	97,1%	2	2,9%	70	100,0%
4. ¿Prepara las clases de matemáticas y más específicamente lo relacionado con los números racionales?	69	98,6%	1	1,4%	70	100,0%
5. ¿Si se da cuenta o los estudiantes le dicen que no están entendiendo las operaciones con los números racionales, usted se preocupa por cambiar de estrategia con el fin de una mejor comprensión?	68	97,1%	2	2,9%	70	100,0%
6. ¿Es paciente y comprensivo cuando los estudiantes no comprenden las operaciones con los números racionales?	68	97,1%	2	2,9%	70	100,0%

7. ¿Es abierto a las sugerencias o recomendaciones hechas por amigos y compañeros docentes, y las acepta y toma en cuenta para mejorar en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones?	68	97,1%	2	2,9%	70	100,0%
8. ¿Es abierto a las sugerencias o recomendaciones hechas por sus estudiantes, y las acepta y toma en cuenta para mejorar en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones?	69	98,6%	1	1,4%	70	100,0%
9. ¿Le molesta o incomoda que un estudiante le corrija o le haga caer en la cuenta de algún error cometido en la enseñanza de los números racionales?	67	95,7%	3	4,3%	70	100,0%
10. ¿Le parece complicado explicar ciertos temas, especialmente los números racionales?	66	94,3%	4	5,7%	70	100,0%

TABLA 4. ¿CONSIDERA QUE LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES ES UN TEMA DE DIFÍCIL COMPRENSIÓN PARA LOS ESTUDIANTES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	**Nunca**	1	1,4	1,4	1,4
	Raras o pocas veces	5	7,1	7,1	8,6
	Algunas veces	29	41,4	41,4	50,0
	Muchas veces o frecuentemente	28	40,0	40,0	90,0
	Siempre	7	10,0	10,0	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

GRÁFICA 3. ¿CONSIDERA QUE LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES ES UN TEMA DE DIFÍCIL COMPRENSIÓN PARA LOS ESTUDIANTES?

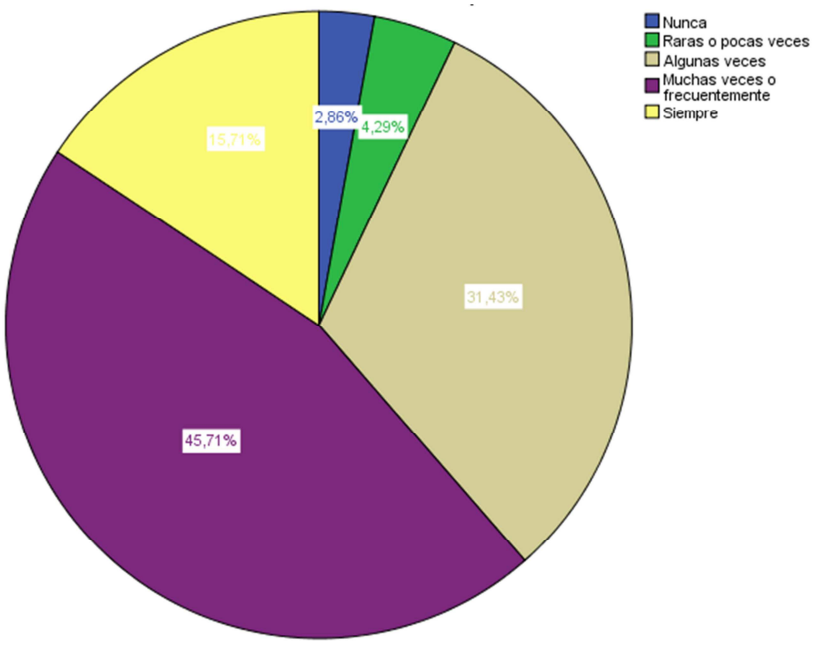


El porcentaje mayor, 81.4 %, está ubicado en las opciones de Algunas veces y Muchas veces o frecuentemente; para Nunca, 1.4 %; Raras o pocas veces, 7.1 %, y Siempre, 10 %; en la opción Algunas veces, 41.4 %, y Muchas veces o frecuentemente, 40 %.

TABLA 5. ¿HACE USO DE ALGUNA ESTRATEGIA DIFERENTE O ESPECIAL CUANDO ENSEÑA LOS NÚMEROS RACIONALES CON SUS OPERACIONES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	2	2,9	2,9	2,9
	Raras o pocas veces	3	4,3	4,3	7,1
	Algunas veces	22	31,4	31,4	38,6
	Muchas veces o frecuentemente	32	45,7	45,7	84,3
	Siempre	11	15,7	15,7	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

GRÁFICA 4. ¿HACE USO DE ALGUNA ESTRATEGIA DIFERENTE O ESPECIAL CUANDO ENSEÑA LOS NÚMEROS RACIONALES CON SUS OPERACIONES?



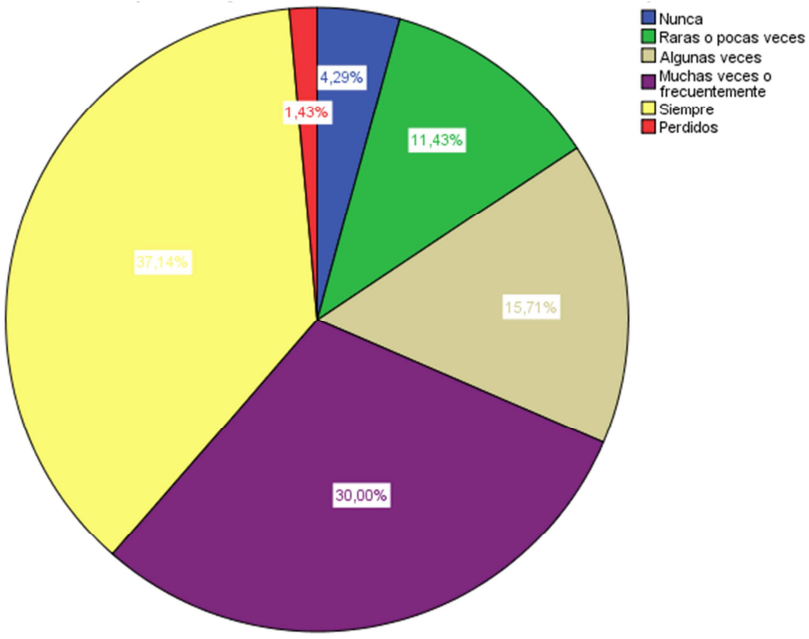
La mayor parte del porcentaje está concentrado en las opciones de Algunas veces y Muchas veces o frecuentemente, con 77.1 %; Nunca, 2.90 %; Raras o pocas veces, 4.3 %, y Siempre, 15.7 %; para la opción de Algunas veces, 31.4 %, y Muchas veces o frecuentemente, 45.7 %.

TABLA 6. ¿INDAGA ACERCA DE LAS DIFICULTADES DE COMPRENSIÓN QUE POSEEN LOS ESTUDIANTES EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES CON SUS OPERACIONES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	3	4,3	4,3	4,3
	Raras o pocas veces	8	11,4	11,6	15,9
	Algunas veces	11	15,7	15,9	31,9

	Muchas veces o frecuentemente	21	30,0	**30,4**	62,3
	Siempre	26	37,1	**37,7**	100,0
	Total	69	98,6	100,0	
Perdidos	**No sabe o no responde**	1	1,4		
Total		70	100,0		

GRÁFICA 5. ¿INDAGA ACERCA DE LAS DIFICULTADES DE COMPRENSIÓN QUE POSEEN LOS ESTUDIANTES EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES CON SUS OPERACIONES?

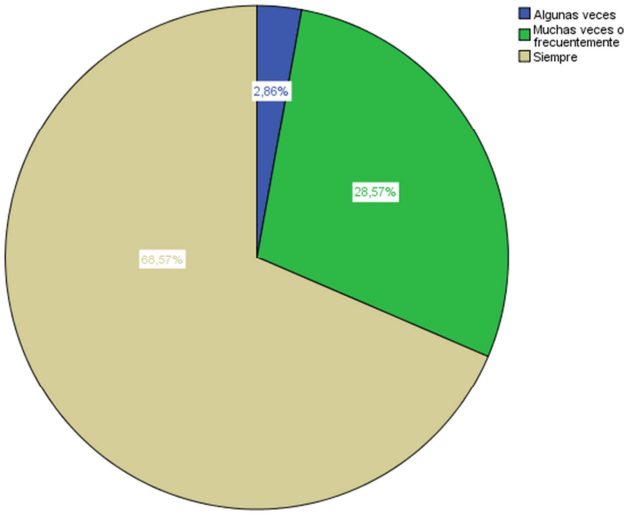


El mayor porcentaje se ubica principalmente en las opciones de Muchas veces o frecuentemente y Siempre, con 67.1 %; Nunca, 4.3 %; Raras o pocas veces, 11.4 %, y Algunas veces, 15.7 %; para la opción de Muchas veces o frecuentemente, 30.0 %; Siempre, 37.1 %, y No sabe o no responde, 1.4 %.

TABLA 7. ¿PREPARA LAS CLASES DE MATEMÁTICAS Y MÁS ESPECÍFICAMENTE LO RELACIONADO CON LOS NÚMEROS RACIONALES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	0	0	0	0
	Raras o pocas veces	0	0	0	0
	Algunas veces	2	2,9	2,9	2,9
	Muchas veces o frecuentemente	20	28,6	28,6	31,4
	Siempre	48	68,6	68,6	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

GRÁFICA 6. ¿PREPARA LAS CLASES DE MATEMÁTICAS Y MÁS ESPECÍFICAMENTE LO RELACIONADO CON LOS NÚMEROS RACIONALES?

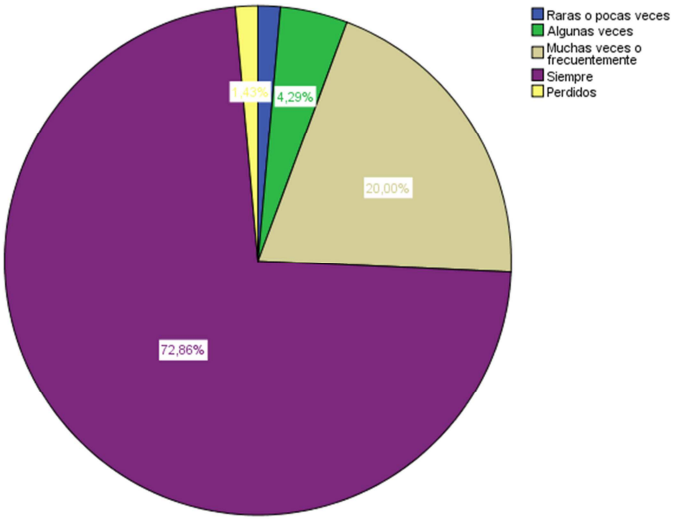


Se presenta un porcentaje bastante alto para las dos opciones de Muchas veces o frecuentemente y Siempre, mientras que para las demás opciones es inexistente o casi nulo; para Algunas veces, 2.90 %; Nunca y Raras o pocas veces, 0 %; para las opciones de Muchas veces o frecuentemente y Siempre, 97.20 %; para la opción de Muchas veces, 28.6 %, y Siempre, 68.6 %.

TABLA 8. ¿SI SE DA CUENTA O LOS ESTUDIANTES LE DICEN QUE NO ESTÁN ENTENDIENDO LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS RACIONALES, USTED SE PREOCUPA POR CAMBIAR DE ESTRATEGIA CON EL FIN DE UNA MEJOR COMPRENSIÓN?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	0	0	0	0
	Raras o pocas veces	1	1,4	1,4	1,4
	Algunas veces	3	4,3	4,3	5,8
	Muchas veces o frecuentemente	14	20,0	20,3	26,1
	Siempre	51	72,9	73,9	100,0
	Total	69	98,6	100,0	
Perdidos	No sabe o no responde	1	1,4		
Total		70	100,0		

GRÁFICA 7. ¿SI SE DA CUENTA O LOS ESTUDIANTES LE DICEN QUE NO ESTÁN ENTENDIENDO LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS RACIONALES, USTED SE PREOCUPA POR CAMBIAR DE ESTRATEGIA CON EL FIN DE UNA MEJOR COMPRENSIÓN?

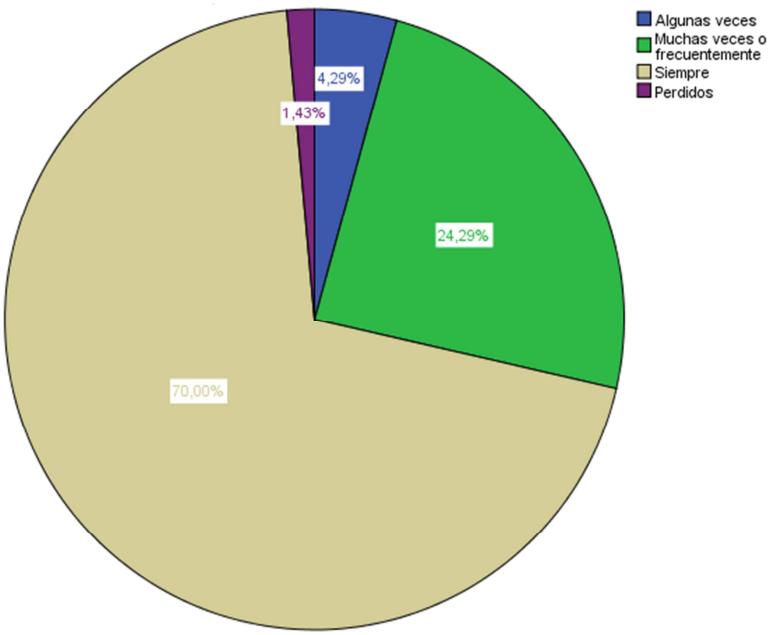


La opción Siempre tiene una mayor concentración de porcentaje, 72.9 %; Nunca, 0 %; Raras o pocas veces, 1.4 %; Algunas veces, 4.3 %; Muchas veces o frecuentemente, 20.0 %, y No sabe o no responde, 1.4 %.

TABLA 9. ¿ES PACIENTE Y COMPRENSIVO CUANDO LOS ESTUDIANTES NO COMPRENDEN LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS RACIONALES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	0	0	0	0
	Raras o pocas veces	0	0	0	0
	Algunas veces	3	4,3	4,3	4,3
	Muchas veces o frecuentemente	17	24,3	24,6	29,0
	Siempre	49	70,0	71,0	100,0
	Total	69	98,6	100,0	
Perdidos	No sabe o no responde	1	1,4		
Total		70	100,0		

GRÁFICA 8. ¿ES PACIENTE Y COMPRENSIVO CUANDO LOS ESTUDIANTES NO COMPRENDEN LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS RACIONALES?

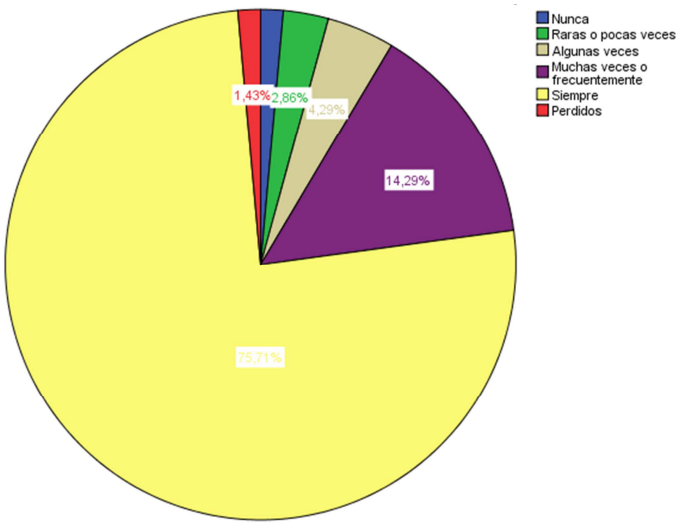


En la opción de Siempre hay una mayor concentración de porcentaje, 70.0 %; Algunas veces, 4.3%; Muchas veces o frecuentemente, 24.3 %; Nunca y Raras o pocas veces, 0 %, y No sabe o no responde, 1.4 %.

TABLA 10. ¿ES ABIERTO A LAS SUGERENCIAS O RECOMENDACIONES HECHAS POR AMIGOS Y COMPAÑEROS DOCENTES, Y LAS ACEPTA Y TOMA EN CUENTA PARA MEJORAR EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES CON SUS OPERACIONES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	1	1,4	1,4	1,4
	Raras o pocas veces	2	2,9	2,9	4,3
	Algunas veces	3	4,3	4,3	8,7
	Muchas veces o frecuentemente	10	14,3	14,5	23,2
	Siempre	53	75,7	76,8	100,0
	Total	69	98,6	100,0	
Perdidos	No sabe o no responde	1	1,4		
Total		70	100,0		

GRÁFICA 9. ¿ES ABIERTO A LAS SUGERENCIAS O RECOMENDACIONES HECHAS POR AMIGOS Y COMPAÑEROS DOCENTES, Y LAS ACEPTA Y TOMA EN CUENTA PARA MEJORAR EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES CON SUS OPERACIONES?

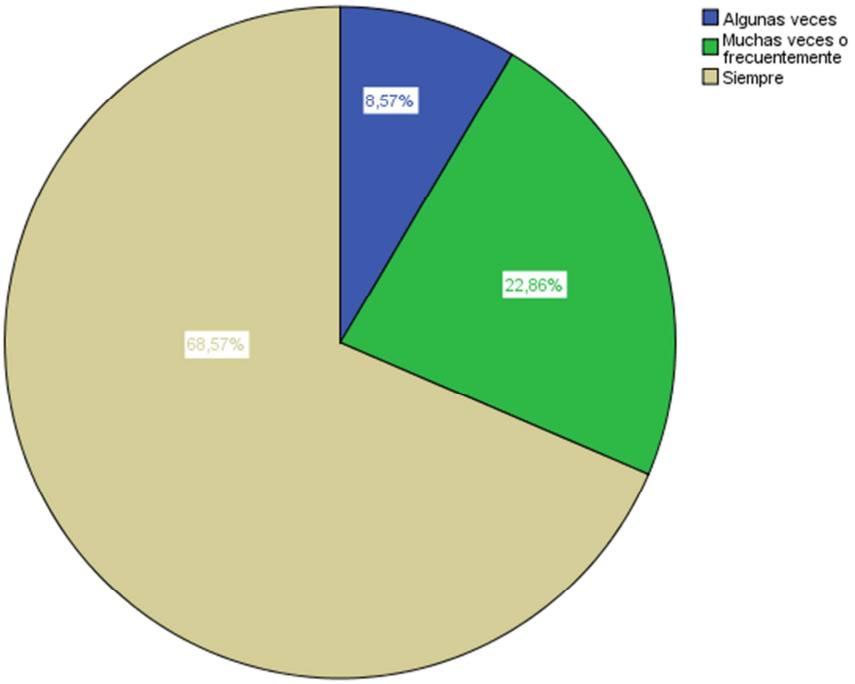


La mayor concentración de porcentaje, 75.7 %, se encuentra en la opción de Siempre; para Nunca, 1.4 %; Raras o pocas veces, 2.9 %; Algunas veces, 4.3 %; Muchas veces o frecuentemente, 14.3 %, y No sabe o no responde, 1.4 %.

TABLA 11. ¿ES ABIERTO A LAS SUGERENCIAS O RECOMENDACIONES HECHAS POR SUS ESTUDIANTES, Y LAS ACEPTA Y TOMA EN CUENTA PARA MEJORAR EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES CON SUS OPERACIONES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	0	0	0	0
	Raras o pocas veces	0	0	0	0
	Algunas veces	6	8,6	8,6	8,6
	Muchas veces o frecuentemente	16	22,9	22,9	31,4
	Siempre	48	68,6	68,6	100,0
	Total	70	100,0	100,0	

GRÁFICA 10. ¿ES ABIERTO A LAS SUGERENCIAS O RECOMENDACIONES HECHAS POR SUS ESTUDIANTES, Y LAS ACEPTA Y TOMA EN CUENTA PARA MEJORAR EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES CON SUS OPERACIONES?

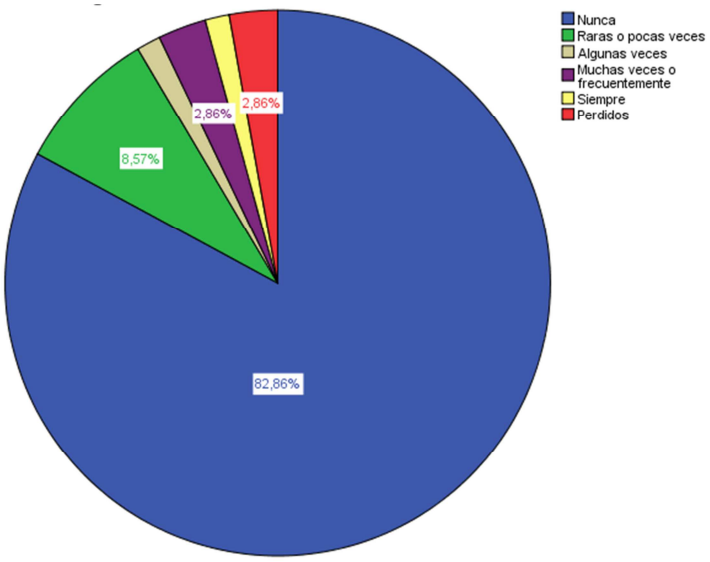


Para la opción Siempre se da una mayor concentración de porcentaje, 68.6 %; Algunas veces, 8.6 %; Muchas veces o frecuentemente, 22.9 %; Nunca y Raras o pocas veces, 0 %.

TABLA 12. ¿LE MOLESTA O INCOMODA QUE UN ESTUDIANTE LE CORRIJA O LE HAGA CAER EN LA CUENTA DE ALGÚN ERROR COMETIDO EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	58	82,9	85,3	85,3
	Raras o pocas veces	6	8,6	8,8	94,1
	Algunas veces	1	1,4	1,5	95,6
	Muchas veces o frecuentemente	2	2,9	2,9	98,5
	Siempre	1	1,4	1,5	100,0
	Total	68	97,1	100,0	
Perdidos	No sabe o no responde	2	2,9		
Total		70	100,0		

GRÁFICA 11¿LE MOLESTA O INCOMODA QUE UN ESTUDIANTE LE CORRIJA O LE HAGA CAER EN LA CUENTA DE ALGÚN ERROR COMETIDO EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES?

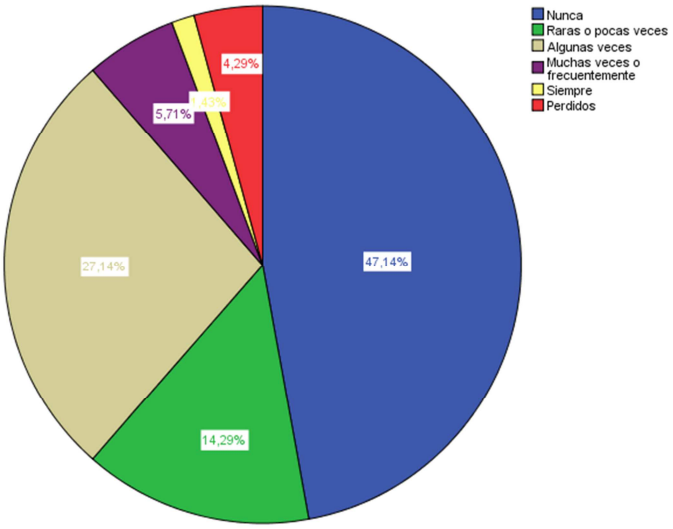


La opción más representativa es la de Nunca, con 82.9 %; Raras o pocas veces, 8.6 %; Algunas veces, 1.4 %; Muchas veces o frecuentemente, 2.9 %; Siempre, 1.4 %, y No sabe o no responde, 1.4 %.

TABLA 13. ¿LE PARECE COMPLICADO EXPLICAR CIERTOS TEMAS, ESPECIALMENTE LOS NÚMEROS RACIONALES?

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nunca	33	47,1	49,3	49,3
	Raras o pocas veces	10	14,3	14,9	64,2
	Algunas veces	19	27,1	28,4	92,5
	Muchas veces o frecuentemente	4	5,7	6,0	98,5
	Siempre	1	1,4	1,5	100,0
	Total	67	95,7	100,0	
Perdidos	No sabe o no responde	3	4,3		
Total		70	100,0		

GRÁFICA 12. ¿LE PARECE COMPLICADO EXPLICAR CIERTOS TEMAS, ESPECIALMENTE LOS NÚMEROS RACIONALES?



En las tres opciones de Nunca, Raras o pocas veces y Algunas veces, se encuentra el mayor porcentaje, 88.5 %; Nunca, 47.1 %; Raras o pocas veces, 14.3 %; Algunas veces, 27.1 %; Muchas veces o frecuentemente, 5.7 %; Siempre, 1.4 %, y No sabe o no responde, 4.3 %.

Conclusiones derivadas del análisis cuantitativo

En las preguntas del cuestionario, se tomaron en consideración a los docentes sin discriminar edad, profesión o experiencia laboral, con el fin de evitar posibles sesgos al comparar variables demasiado heterogéneas. Además, la cantidad de docentes licenciados difiere de los profesionales no licenciados. Lo mismo ocurre con las demás variables (edad, experiencia laboral), lo cual aumenta el sesgo.

Al considerar las preguntas en su orden, se observa que la mayoría de los docentes (81.4%) consideran que algunas veces (41.4%) y muchas veces o frecuentemente (40%), la enseñanza de los números racionales es de difícil comprensión para los estudiantes, lo que es más o menos igual para ambas opciones. Algunas veces (31.4%) y muchas veces (45.7%), con mayor tendencia en esta última, los docentes usan alguna estrategia especial cuando enseñan los números racionales y sus operaciones.

Respecto a las dificultades de comprensión de los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales y sus operaciones, más de la mitad de los docentes (67.1%) se inclinan por las opciones de muchas veces (30%) y siempre (37.1%), con preferencia por la última. También se observa una muy marcada predilección por la opción siempre (68.6%) respecto a la preparación de las clases de matemáticas y especialmente lo relacionado con los números racionales.

Como en el caso anterior, la mayoría de los docentes (72.9%) siempre se preocupan por cambiar de estrategia con el fin de obtener una mejor comprensión, cuando los estudiantes les dicen que no entienden las operaciones con los números racionales.

En su gran mayoría (70%), los docentes siempre son pacientes y comprensivos cuando los estudiantes no comprenden las operaciones con los números racionales, con una tendencia menor hacia la opción de muchas veces (24.3%). De igual modo, siempre (75.7%) son abiertos a las sugerencias o recomendaciones hechas por amigos y compañeros docentes, y las aceptan y toman en cuenta para mejorar en la enseñanza de los números racionales

con sus operaciones, similar comportamiento se presenta cuando las sugerencias o recomendaciones son hechas por los mismos estudiantes, pero en una proporción sólo ligeramente menor (68.6%).

A la mayoría de docentes (82.9%) nunca les molesta que un estudiante les corrijan o les hagan caer en la cuenta de algún error cometido en la enseñanza de los números racionales. A menos de la mitad de los docentes consultados (47.1%) nunca les parece difícil explicar temas como el de los números racionales, mientras que algo más de un cuarto de ellos (27.1 %) sólo algunas veces les parece complicado.

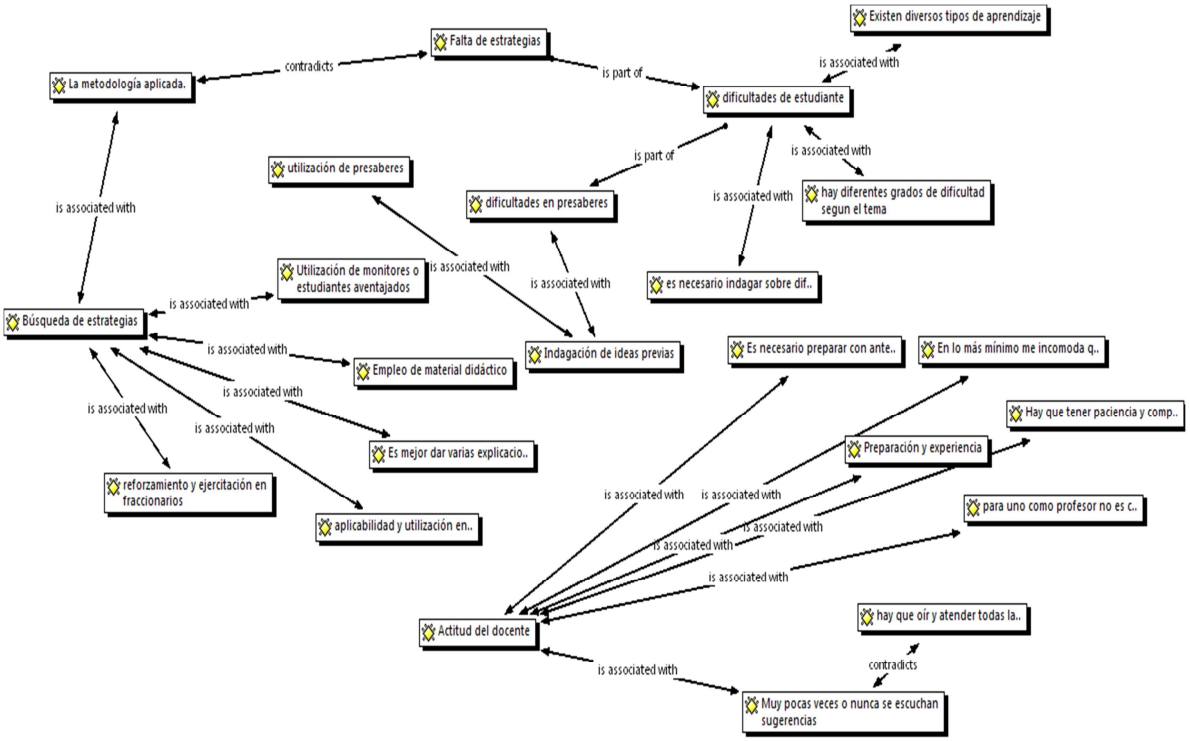
Si se toman todas las respuestas en su conjunto, se puede observar que la tendencia es favorable, puesto que es muy escaso el porcentaje que indica un comportamiento desfavorable de los docentes hacia los estudiantes o hacia la enseñanza de los números racionales, lo que hace pensar que las cosas marchan bien, lo cual sería alentador si reflejara la realidad completa, por lo tanto, es necesario un análisis complementario exhaustivo, que pueda indicar el verdadero estado de la situación, lo cual se buscó mediante el taller.

7.2 Análisis categorial

Tal como se expresó en la metodología del estudio, se aplicaron dos técnicas cualitativas y de cada una de ellas se hizo un primer análisis categorías de tal manera que posteriormente se pudieran contrastar las categorías entre el taller y la entrevista.

El taller dio como resultado 23 categorías emergentes, de las cuales, las tres categorías que tuvieron una mayor frecuencia fueron: Búsqueda de estrategias, Dificultades de estudiante y Actitud del docente. A continuación, se observa la respectiva red con sus relaciones:

FIGURA 1. CATEGORÍAS RESULTANTES DEL TALLER



Retomando lo que dice Brousseau (1998), en las categorías emergentes se pueden evidenciar tres tipos de dificultades: didácticas, ontológicas y epistemológicas.

Dificultades didácticas

Entre las principales estrategias utilizadas por los docentes, se destacan la utilización de monitores o estudiantes aventajados, el empleo de material didáctico, la aplicabilidad y la utilización en el entorno, la ejercitación en fraccionarios, la búsqueda de varias explicaciones y el uso de diferentes metodologías.

Algunos de los relatos de los docentes sobre la búsqueda de estrategias, son los siguientes:

Respecto a la utilización de monitores o estudiantes aventajados, uno de los docentes dice: “Sí, trabajo con monitores, con los alumnos que más entiendan o busco otras

estrategias” (docente participante). Esto se hace porque los estudiantes se entienden mejor entre ellos mismos, usan un lenguaje particular y peculiar que muchas veces no es compartido con los docentes.

En la teoría de la “Zona de desarrollo próximo”, Vygotsky (1989) define este concepto de la siguiente manera:

> La Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) es la distancia en el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más eficaz (pág. 133).

Vygotsky considera que la ZDP define las funciones que todavía no han madurado, pero que están en proceso de maduración y que al alcanzar su desarrollo pleno, se llega el nivel óptimo de desarrollo.

Al respecto, otro de los docentes dice: “Para las operaciones, es mejor emplear el lenguaje del estudiante; por ejemplo, numerador ‘arriba’, denominador ‘abajo’, luego emplear la mímica o expresión corporal ‘movimiento de los brazos’” (docente participante).

De acuerdo con Chevallard (citado en Gómez (2005)):

> Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El “trabajo” que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica.

En esta forma, Chevallard busca un equilibrio en la relación ternaria que hay entre docente, alumno y el saber matemático, lo cual conforma un sistema didáctico.

El “empleo de material didáctico” es clave para muchos docentes, uno de ellos dice: “Busco nuevos ejemplos y nuevas formas de presentarlos (Real, gráfica, vídeos)”

(docente participante), otro agrega: “El diseño de diapositivas en PowerPoint con los temas a enseñar me ha reportado ganancias significativas en el proceso” (docente participante), en este caso, es significativo el uso de la tecnología como material didáctico, puesto que los jóvenes pertenecen a una generación llamada “generación digital”, por lo cual conviene utilizar el computador como herramienta de enseñanza para las matemáticas, y usar un software educativo (JClic, MicroMundos Pro, GeoGebra, entre otros), Monereo y otros (2002) dicen que:

> Si examinamos detenidamente toda la potencialidad de las aplicaciones edumáticas, no las podemos considerar “un recurso educativo más”; el ordenador, como señala Martí (1992), es un meta-medio porque puede expresar, manipular y combinar cualquier tipo de símbolo utilizado por otros medios (lingüísticos, icónicos, sonoros, matemáticos, cinéticos, etc.). Esta característica le confiere un conjunto de propiedades peculiares altamente aprovechables en contextos educativos y muy especialmente en el ámbito de la enseñanza de estrategias de aprendizaje (págs. 309-310).

El empleo del computador puede ser útil para potenciar las estrategias didácticas del docente, pero sin caer en el riesgo de mecanizar las tareas, puesto que de esa manera se relegan a un segundo plano los procesos cognitivos del estudiante, porque, si el estudiante se limita a alimentar el computador con datos y esperar las respuestas del aparato, ya no es necesario pensar en lo que la máquina está haciendo, y se limita a obtener resultados.

El uso de la tecnología, como el computador, que es una poderosa herramienta de trabajo y de enseñanza, no debe circunscribir a un único uso, como el manejo de aplicaciones o software educativos, o para hacer las tareas con ayuda de los buscadores de internet, lo cual es muy útil, pero se deja de lado la comprensión de los procesos. Además, es preciso valorar la computadora, en conjunto con internet, para el trabajo cooperativo en el salón de clases y fuera de las aulas. A este respecto, Monereo *et al.* (2002) mencionan como principales características del trabajo cooperativo las que:

> …hacen referencia al uso estratégico de los procedimientos de aprendizaje, que facilitan la discusión, entre los alumnos y con el profesor, sobre la naturaleza del aprendizaje y las actividades académicas. También permite negociar las propias opiniones y poner énfasis en los aspectos metacognitivos, favoreciendo la reflexión y la autoevaluación (pág. 102).

Johnson y Johnson (citados en Monereo et al., 2002), consideran cuatro principios en los que se basa el trabajo en grupos cooperativos, que son los siguientes:

1. Favorecer una interdependencia positiva entre los miembros de un grupo.
2. Durante la realización del trabajo, el profesor tendrá que ofrecer retroalimentación, tanto grupal como individualmente.
3. Se espera que cada miembro del grupo lleve a cabo el trabajo asignado y colabore con los compañeros cuando lo necesiten.
4. Es necesario que los grupos tengan tiempo de discutir si el trabajo que está efectuando cada miembro del grupo se complementa con el de los otros y si se están alcanzando los objetivos propuestos.

Es evidente que se deben buscar alternativas que permitan superar una educación tradicionalista que no propicia el uso de recursos novedosos, tal como lo menciona Gómez (2002):

> Existen diversos factores que se oponen a la enseñanza tradicional, entre los que podemos destacar dos: la rápida evolución del conocimiento y de la técnica y a su vez la rápida obsolescencia de las mismas –que reducen la utilidad de los contenidos en favor de la capacidad de renovación– y el desarrollo de las comunicaciones y los ordenadores que posibilitan nuevas formas de aprendizaje y comunicación o interacción entre el profesor y el alumno. (p. 27).

La “aplicabilidad y utilización en el entorno” es primordial para algunos docentes, como se observa en el siguiente relato: “Falta fundamentación y relación con la cotidianidad e

interacción lúdica para inducir y afianzar el conocimiento" (docente participante), otro sostiene que…

> La mejor manera es la cotidianidad y la demostración enseñar con ejemplos de la vida diaria", en cuanto a esta estrategia didáctica es esencial en el sentido de que el estudiante se puede encontrar mucho más motivado e interesado por aprender, puesto que muchos de ellos le preguntan al profesor "¿y eso para qué me sirve en la vida? (docente participante).

El profesor muchas veces no sabe responder esa pregunta. A este respecto, Monereo *et al.* (2002) piensan que:

> La utilidad de la matemática se manifiesta a través de su dilatado ámbito de aplicación (trabajo, vida doméstica, comercio, etc.) y, también, porque se puede considerar que esta disciplina está en el fundamento mismo del desarrollo científico y esto no sucede de manera tan constitutiva, por ejemplo, en otros saberes culturales. Por otro lado, su concisión y universalidad vienen dadas porque la matemática se convierte en un poderoso medio de comunicación sin ambigüedades que hace que trascienda las fronteras de la diversidad idiomática, unificando las posibles distintas formas de expresión con el uso compartido de notación simbólica (p. 219).

En este sentido, la modelización matemática no se aborda en el aula de clase de forma comprensiva y accesible a los estudiantes, y es precisamente de la cotidianidad de donde provienen las fórmulas que el profesor escribe en el tablero. Por ejemplo, Eratóstenes, en el siglo III a. C., pudo calcular la circunferencia de la Tierra utilizando el ángulo de la sombra producida por la torre de Sienna y la distancia de ésta a la ciudad de Alejandría. Este es uno de los innumerables ejemplos que se pueden encontrar en la historia de la matemática, y corresponde a un problema práctico de la vida de los griegos. Hay muchas definiciones de modelación en matemáticas, entre las cuales podemos encontrar las de Giordano, Weir, Fox, Biembengut, Hein (citados por Villa (2007), pero únicamente interesa aquí desde el punto de vista didáctico. Según Bassanezi (citado en Posada y Villa

(2006), “un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación.

En el *reforzamiento* y la *ejercitación* en fraccionarios, para algunos docentes es necesario utilizar este tipo de estrategia con el fin de que los estudiantes puedan afianzar el conocimiento. Al respecto, uno de ellos dice que “se debe reforzar continuamente en las clases y ejercitarlos, más que todo la lógica de los fraccionarios en estudiantes mayores” (docente participante). Otro comenta que se necesita la “ejercitación a partir de situaciones y problemas” (docente participante). Además de lo mencionado por los maestros, conviene considerar las actividades lúdicas como una forma de ejercitación de las operaciones con números racionales. Al respecto, se puede hacer una distinción entre ejercicios y problemas o situaciones problemáticas, que se confunden como si fueran sinónimos. Como mencionan Monereo *et al.* (2002), son cuestiones o conceptos con algunas diferencias entre ellos:

> Concretamente, siguiendo autores como Schoenfeld (1988) y posteriormente, entre otros, Alfieri (1993) o Pozo y cols. (1994), recordamos que un problema, a diferencia de un ejercicio, es una situación que precisa de una solución pero que, generalmente, no tiene un camino de solución rápido y directo, sino que se debe ir haciendo una toma de decisiones (y, por tanto, modificando y comprobando) a lo largo de la propia resolución. De esta manera, se infiere que lo que puede ser un problema para un alumno, puede no serlo para otro, situación que diversifica claramente el panorama escolar (p. 221).

Los docentes suelen asignar a los estudiantes ejercicios que confunden con problemas, pero esos “problemas”, que en realidad son ejercicios, son simplemente planteamientos que se resuelven de una forma algorítmica y mecánica, que no requieren que el alumno razone en lo más mínimo.

Otra estrategia empleada por los docentes es “dar varias explicaciones”. Así lo da a entender uno de ellos: “Una estrategia que me ha resultado es la de graficar nuevamente

la fracción, así ya lo hayan hecho desde la primaria. Luego, trabajo la clasificación" (docente participante). Otro dice: "Siempre se dan las explicaciones necesarias" (docente participante), en todo caso, muchas veces es necesario explicar de nuevo o varias veces, pero no se debe explicar de la misma manera siempre, ya que puede suceder que el estudiante no entienda el tema por su dinámica propia, sino por la forma como se explica. Según Duval (citado en D'Amore, 2004):

> … por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje (p. 6).

De acuerdo con la afirmación de Duval y con lo expuesto por los maestros, el recurrir a varias explicaciones o a varias formas de representar el concepto se entiende como el uso intencional de varias representaciones semióticas para el aprendizaje de los objetos matemáticos.

En la estrategia que consiste en "usar diferentes metodologías", la mayoría de los docentes están de acuerdo en su uso, aunque no especifican cuáles son las estrategias que usan, como se puede ver en los relatos siguientes: "De acuerdo a los vacíos que tengan y al tipo de estudiantes, se buscan estrategias distintas" (docente participante) o bien: "Casi permanentemente es necesario recurrir a tácticas diferentes que permitan afianzar la comprensión por parte de los estudiantes" (docente participante). Estas afirmaciones suponen que hay muchas estrategias, pero la dificultad radica en saber utilizar la más adecuada de acuerdo con el contexto y a la situación. Al respecto, Gómez (2005) dice que:

> Las estrategias docentes y, en particular, las de las áreas denominadas "de ciencias" tienen que estar fundamentadas en principios pedagógicos y estar al servicio de unos objetivos bien delimitados. Esto obliga a revisar periódicamente los objetivos curriculares, a redefinir el concepto de asignatura y a organizar los planes de estudio

(tanto los contenidos como las metodologías didácticas) para mantenerlos a la altura de los cambios sociales (p. 28).

Para “la carencia de estrategias didácticas”, algunos de los docentes dicen: “No tengo muchas estrategias, me hace falta conocer otras” (docente participante), “En lo posible siempre trato de explicar de la mejor manera para que me entiendan, pero específicamente con racionales, a veces no encuentro suficientes estrategias para hacerme entender” (docente participante). Es preocupante que los docentes no encuentren las suficientes estrategias para hacerse entender por los estudiantes, pues esto interfiere con el aprendizaje del estudiante. La dificultad del docente para enseñar por la falta de estrategias es, a la larga, en una dificultad del estudiante para aprender. Al respecto, Monereo *et al.* (2002) examinan posturas de varios autores respecto a las estrategias de enseñanza, entre los cuales considera a Nisbet *et al.* (citados en Monereo *et al.*, 2002), quienes mencionan algunas características con respecto al profesor estratégico. Tienen pequeñas diferencias en sus puntos de vista, pero coinciden en que el profesor como enseñante estratégico:

- ✓ Es un pensador y un especialista en la toma de decisiones.
- ✓ Es un experto en su materia.
- ✓ Planifica y tiene en cuenta las ideas y concepciones previas inadecuadas de sus alumnos para tomarlas como punto de referencia de su intervención.
- ✓ Es un modelo que explicita sus procesos de pensamiento para que puedan ser aprendidos por sus alumnos.
- ✓ Es un mediador que guía el pensamiento de los alumnos hacia metas apropiadas.
- ✓ Enseña a construir la propia imagen cognitiva.
- ✓ Insiste en la reflexión sobre los procesos de pensamiento seguidos por los alumnos para resolver problemas en el aula.

- ✓ Proporciona procedimientos de trabajo y de investigación.
- ✓ Establece sistemas de evaluación.

Una de las principales actitudes del docente es raras veces escuchan sugerencias, al respecto, un docente dice: “hay que oír y atender todas las sugerencias, para uno como profesor no es complicado, hay que tener paciencia y comprensión, preparación y experiencia, en lo más mínimo me incomoda que me corrijan y es necesario preparar con anterioridad” (docente participante), otros profesores se refieren al problema de la siguiente manera:

“Muy pocas veces o nunca se escuchan sugerencias” (docente participante). “Escasamente los estudiantes plantean sugerencias con relación a la orientación de temáticas, básicamente trato de implementar estrategias o metodologías ante las falencias del grupo” (docente participante); “Son muy pocas las oportunidades que tenemos para socializar nuestras experiencias docentes, pero cuando lo puedo hacer con otros docentes, aprovecho para aprender y enriquecer mi labor” (docente participante). Los profesores reconocen que los estudiantes no suelen hacer sugerencias respecto a la orientación de las clases y aceptan sin ninguna crítica lo que los profesores les proponen. Y, los docentes no suelen compartir sus experiencias con otros docentes, de modo que no enriquecen su quehacer pedagógico.

Hay docentes que toman la actitud contraria, como quienes dicen que: “Antes de ser docente, soy un ser humano y tengo mis limitaciones, hay que oír y atender todas las sugerencias y correcciones si es del caso” (docente participante), “Es bueno estar en disposición de escucha, ya que siempre se aprende de quien le ha generado aportes constructivos” (docente participante). Para algunos profesores, conviene prestar atención a las críticas de los estudiantes o de los docentes, con el fin de mejorar la enseñanza:

Algunos docentes dicen: “No es complicado, es una acción que requiere esfuerzo y dedicación y ante todo comprender a cada estudiante” (docente participante), “No es

complicado, sólo se necesita encontrar la manera de llegar a los estudiantes con claridad para todos" (docente participante). Varios docentes piensan que para ellos no es complicado enseñar los números racionales, pero parece que no se sabe si para el estudiante es complicado entender la explicación que reciben.

Varios docentes dicen que "Hay que tener paciencia y comprensión, aunque hay alumnos que no presentan interés alguno" (docente participante); "Es importante tener paciencia con los alumnos para conseguir una buena relación entre las partes" (docente participante). A pesar de estas afirmaciones, en ocasiones, los docentes pierdan la paciencia, y por eso se lamentan.

Respecto a la preparación y la experiencia, los docentes concuerdan en que "La vocación del docente debe llevar a que todos los estudiantes comprendan, también debe haber mucha preparación para hacerse entender" (docente participante); "Cada día es un reto el proceso de enseñanza aprendizaje, pero para estos retos existe la preparación y la experiencia" (docente participante). Para algunos autores, es importante la preparación y la experiencia, pero hay que prestar especial atención a la pedagogía y a la didáctica, pues no basta con dominar el tema. Al respecto, Shulman (1987, citado por Francis, 2005) piensa que:

> La persona que se dedica a la docencia tiene un conocimiento base que, al menos, incluye siete categorías: el conocimiento del contenido, de lo pedagógico general, de lo curricular, de lo pedagógico del contenido, de los aprendices y sus características, de los contextos educativos y de los fines educativos (pág. 3).

Estas categorías son redefinidas por Grossman (citada por Francis, 2005) en cuatro áreas generales: "el conocimiento pedagógico general, el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento del contexto" (p. 3).

Respecto a la actitud docente, varios profesores coinciden en decir que: "En lo más mínimo me incomoda que un alumno me haga caer en cuenta de algo o me corrija"

(docente participante); “El ser humano se puede equivocar y con humildad se aceptan los errores” (docente participante). Puede ocurrir que a un docente no le gusta que un alumno lo corrija, lo cual invita a revisar la actitud en función de promover una actitud autocrítica en los estudiantes y abrirse a sus formas de aprendizaje.

Los docentes piensan que “Es necesario preparar con anterioridad para obtener logros satisfactorios y poder avanzar con quienes tienen dificultad en el área” (docente participante), “Para poder orientar una clase se debe preparar y pensar como el estudiante para asumir qué posibles preguntas existan” (docente participante). En esta forma, los docentes concuerdan en que es necesaria la preparación de las clases, puesto que no se puede improvisar. Por mayor dominio que se tenga del tema, para ellos no es conveniente la improvisación, puesto que surgen contingencias que no se pueden resolver sin una adecuada preparación.

Respecto a la actitud del docente, Gómez (2005), da algunas recomendaciones:

1. Es preciso insistir en la importancia social del trabajo del educador matemático.
2. Debemos ser los primeros en exigir la máxima calidad y seriedad científica en nuestro trabajo.
3. Es preciso reorientar la formación inicial y la formación permanente del educador matemático buscando, el equilibrio entre el componente matemático y el psicopedagógico.
4. Es preciso insistir en el trabajo cooperativo (págs. 128-129).

Dificultades ontogenéticas

Monereo *et al.* (2002) se refieren a dos enfoques respecto a las estrategias de aprendizaje, cuyos pioneros fueron los modelos de procesamiento de la información representados por autores como Danserau, Weinstein y Mayer o Zimmerman y Schunk, (citados en Monereo *et al.*, 2002), el primer modelo dice que:

> Desde su perspectiva, las estrategias varían según la información sea procesada a un nivel más superficial y fonológico (estrategias de repetición) o más profundo y semántico (estrategias de elaboración y de organización), existiendo, aparte, unas estrategias de apoyo relacionadas con los procesos motivacionales (p. 29).

El otro modelo se enmarca en el "aprendizaje situado o contextualizado", que es un concepto reciente. Liderados por autores como Pressley o Bransford *et al*. (citados por Monereo, 2002), cuyo modelo se basa en los enfoques socio-culturales defendidos por Vygotsky, Bruner y Rogoff, de acuerdo con el aprendizaje situado "una estrategia es una acción socialmente mediada y mediatizada por instrumentos, como son los procedimientos" (p. 29).

El aprendizaje situado se basa en la teoría de la Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky y en la teoría cognitivista, y se apoya en el "andamiaje" para la construcción del conocimiento, que sostiene que éste debe partir de los saberes previos de los estudiantes, en una íntima relación con el entorno.

Algunas de las principales dificultades encontradas por los docentes en los estudiantes están relacionadas con sus pre-saberes y los diversos tipos de aprendizaje. Hay diferentes grados de dificultad en el aprendizaje, según el tema, y los docentes reconocen que es preciso indagar sobre las dificultades de los estudiantes. Entre los relatos de los docentes, tenemos:

Las dificultades en pre–saberes son abordadas por algunos docentes: "Todo depende de la predisposición del alumno y del conocimiento sobre las matemáticas que tengan" (docente participante); "Se insiste constantemente en su aprendizaje, pero es notoria la falta de dominio de conceptos de grados inferiores" (docente participante). En este caso, se nota que para muchos docentes los estudiantes deben tener claros muchos conceptos adquiridos con anterioridad, lo que no siempre ocurre.

En el X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (2009), según Garrido *et al.* (2009), se hace mención a los presaberes al decir que “es importante que para el diseño de las situaciones problema se tenga en cuenta los conocimientos previos del estudiante. Para Piaget, estos influyen en la interpretación de ellas”.

Los docentes de secundaria acostumbran responsabilizar a los docentes de primaria de las dificultades que traen los estudiantes. A su vez, los docentes de universidad culpan a los de secundaria y así sucede en todo el ciclo propedéutico.

Entre los relatos respecto a los tipos de aprendizaje, los docentes son conscientes de que: “Depende de cada estudiante, según capacidades pensantes” (docente participante); “Puesto que la población es cambiante y las fortalezas, debilidades y exigencia debe ser acordes a las características del grupo como tal” (docente participante). En este sentido, no todos los estudiantes tienen las mismas capacidades y estilos para aprender, por lo cual, es importante que el docente oriente la clase tomando en cuenta a los estudiantes menos aventajados y aproveche a los más aventajados como monitores. Garrido (2009) continúa la reflexión al respecto diciendo que “las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden ser de diferente naturaleza”, algunas de las cuales, según Socas (citado en Garrido *et al.*, 2009), son “las que tienen que ver con los procesos cognitivos de los estudiantes, éstas se refieren al desarrollo intelectual de los estudiantes, de sus capacidades y limitaciones propias de su desarrollo cognitivo”.

Monereo *et al.* (2002) se refieren a las capacidades cognitivas que conciben como “un conjunto de disposiciones genéticas que tenemos desde el momento de nacer (y probablemente antes) y que nos permiten ejecutar una serie de conductas muy relacionadas con nuestra supervivencia” (p. 25). El autor dice que los seres humanos nacemos con capacidades parecidas, a excepción de aquéllos que pueden presentar alguna deficiencia congénita. Añade que, con el tiempo, se va adquiriendo un conjunto de procedimientos gracias a la interacción con el entorno cultural y sus interlocutores y, a raíz de estos procedimientos, las capacidades se hacen más versátiles y sofisticadas, y

pueden evolucionar en habilidades que, a diferencia de las capacidades, pueden ser analizadas conscientemente a través de los procedimientos.

Para algunos docentes, “es necesario indagar sobre las dificultades presentadas por los estudiantes”, de modo que “Para poder continuar con procesos es necesario indagar sobre dificultades para lograr avances” (docente participante); otro docente opina al respecto: “Pienso que una de las cosas más importantes que uno debe hacer como docente, es la de indagar las fortalezas y debilidades que nuestros alumnos tienen en relación con los números racionales o con cualquier tema relacionado con matemáticas” (docente participante). Aunque muchos docentes se preocupan por indagar las dificultades presentadas por los estudiantes para el aprendizaje de los números racionales, hay muchos que no les interesa averiguar sobre dichas dificultades, ignorando con ello un valioso recurso para su quehacer pedagógico. Abrate, Pochulu y Vargas (2006) hacen referencia a las dificultades de los estudiantes con los números racionales de la siguiente manera:

> Es sabido y manifestado por los Profesores de Matemática que la operatoria con números racionales origina una serie de dificultades para los alumnos, las que se extienden a lo largo de todos los años del Nivel Medio.
>
> Una de estas dificultades comienza cuando el estudiante se ve enfrentado a que un mismo número admite múltiples representaciones.
>
> Es obvio que esta dificultad radica en la conceptualización misma del número racional, donde muchos de los alumnos aún no tienen un concepto claro de fracción, ni siquiera en un contexto muy concreto (p. 110).

Dificultades epistemológicas

Respecto al uso de pre–saberes, los docentes piensan que “En este caso, trato de simplificar un poco más el concepto retomando presaberes para encontrar el vacío o el punto que genera el no entendimiento de la explicación” (docente participante); otro docente expone el proceso que sigue de menor a mayor complejidad:

> En primer lugar, se trabaja con los números naturales, luego con los números enteros. Dominados estos dos sistemas, se puede entrar a los números racionales que es el conjunto numérico que contiene a los anteriores (el concepto de fraccionario y decimal es indispensable).

Con respecto a estas manifestaciones de los docentes, es posible comprender la importancia que le otorgan a los presaberes para lograr un aprendizaje significativo. Según Ausubel (1963), "un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe". En este caso, es preciso partir de los presaberes de los estudiantes, para que no se conviertan en un obstáculo para el aprendizaje. Por otro lado, puede haber cierta dificultad para el estudiante cuando se ven primero los números naturales y luego los enteros, porque muchos de ellos extienden estos conceptos a los racionales, y suman las fracciones como si fueran números enteros.

La indagación de ideas previas es abordada por los docentes cuando sostienen que "Debe conocerse previamente el 'nivel' de preconceptos que tienen los estudiantes frente a los números racionales, para diseñar estrategias que les permitan 'desaparecer' las dificultades que traen" (docente participante). "Tanto en el conocimiento de los presaberes que traen los alumnos, como el por qué no entienden, tienen una importancia fundamental, dado que este conjunto numérico abarca todas las operaciones y funcionalidad de los conceptos matemáticos desarrollados en el tiempo" (docente participante). La indagación de ideas previas al igual que el uso de los presaberes, son cuestiones claves y no son tan recientes. Aristóteles (384-322 a. C.) hace mención de ello en su Metafísica (nombre puesto por Andrónico de Rodas en el siglo I a. C. en la primera edición de las obras de Aristóteles) de la siguiente manera:

> El que aprende la geometría tiene necesariamente conocimientos previos, pero nada sabe de antemano de los objetos de la geometría y de lo que se trata de aprender. Las demás ciencias se encuentran en el mismo caso. Por consiguiente, si como se pretende, hay una ciencia de todas las cosas, se abordará esta ciencia sin poseer

> ningún conocimiento previo. Porque toda ciencia se adquiere con el auxilio de conocimientos previos[8], totales o parciales, ya proceda por vía de demostración, ya por definiciones; porque es preciso conocer antes, y conocer bien, los elementos de la definición (Aristóteles, 1969, pág. 45).

Para una definición actual de ideas previas se puede citar a Carretero (citado en Porta, 2007):

> Las concepciones previas no son correctas desde el punto de vista científico. Son específicas de dominio. Suelen ser dependientes de la tarea utilizada para identificarlas/evaluarlas. En general, forman parte del conocimiento implícito del sujeto. Son construcciones personales. Suelen ser guiadas por la percepción, la experiencia y el conocimiento cotidiano del alumno. No todas poseen el mismo nivel de especificidad. Tienen cierto grado de estabilidad. Tienen un grado de coherencia y solidez variable: pueden constituir representaciones difusas y más o menos aisladas o pueden formar parte de un modelo mental explicativo (pág. 146).

Para los grados de dificultad de un tema, los docentes piensan que "El tema es sencillo de comprender hasta que se encuentran con la adición y la sustracción" (docente participante) o bien, "Les cuesta expresar los números racionales de diferentes formas y realizar operaciones entre ellos" (docente participante).

Con respecto a la primera observación, se observa que a los estudiantes se les dificulta más la adición y la sustracción que la multiplicación y la división, lo que ocurre debido a que la suma y la resta de fraccionarios a veces la realizan como si fueran números enteros, o sea; suman numerador con numerador y denominador con denominador.

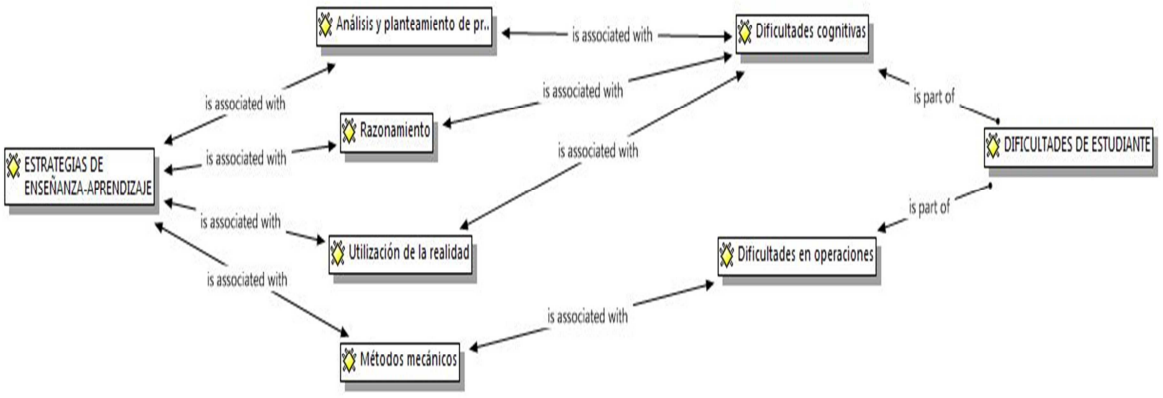
De acuerdo con un artículo de Garrido *et al.* (2009), otra de las dificultades son "las asociadas a la complejidad de las matemáticas, éstas se presentan por la utilización de

[8] "Toda ciencia, todo conocimiento inteligible, proviene de un conocimiento anterior." Esta proposición fundamental es la primera frase de los *Segundos Analíticos*. Esta es una parte de la obra de Lógica de Aristóteles que está agrupada en un conjunto llamado *Organon*.

símbolos y signos, y el uso de expresiones verbales, que pueden tener un significado diferente en el lenguaje habitual".

En el taller, se les pidió a los maestros que narraran "alguna experiencia que haya tenido en la enseñanza de los números racionales. Escriba paso a paso las actividades realizadas y los logros obtenidos por los estudiantes" (ver instrumento) y el segundo punto: "En cada una de las siguientes situaciones problema propuestas, responda las siguientes preguntas: ¿Para qué me serviría este ejercicio con mis estudiantes? ¿Qué conceptos relacionados con los números racionales estaría enseñando? ¿Cómo les enseñaría a resolver esta situación?" (ver instrumento). En este último ítem, se propusieron cinco problemas diferentes, cada uno de los cuales hace referencia a un subconstructo de los números racionales (parte-todo, medida, operador, cociente y razón), según la definición de Kieren (1980). En el análisis surgieron dos redes semánticas, la primera con dos categorías y seis subcategorías y la segunda, con tres categorías y trece subcategorías. A continuación, se hace el respectivo análisis de la primera red:

FIGURA 2. ANÁLISIS CATEGORIAL SOBRE ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA RESPECTO A LAS DIFICULTADES DEL ESTUDIANTE



La categoría Estrategias de Enseñanza-Aprendizaje está compuesta por cuatro subcategorías: Análisis y planteamiento de problemas, razonamiento, métodos mecánicos y utilización de la realidad. Éstas provienen de algunos de los relatos de los docentes:

Dificultad epistemológica

Para la subcategoría *Análisis y planteamiento de problemas*, uno de los docentes dice: "Un lenguaje claro determina procesos analíticos claros" (docente participante), otro dice: "Todos los problemas siempre van a tener la misma finalidad: comprensión de un enunciado, aplicación de una teoría" (docente participante). Un lenguaje claro puede permitir la comprensión del enunciado, para lo cual se precisa una lectura analítica, pues el estudiante puede leerlo sin asimilar una sola palabra. Muchas veces se requiere más de una lectura para comprenderlo, dependiendo de la dificultad del problema. En este sentido, Polya (1945) propone cuatro pasos para resolver un problema:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Tanto docentes como estudiantes han aplicado estos pasos de manera intuitiva, sin conocer de antemano la formalización hecha por Polya en 1945.

Respecto a la subcategoría *Razonamiento*, los docentes dicen: "Sirve para afianzar razonamiento lógico y observación" (docente participante), "Desarrollo de habilidades lógicas y de razonamiento, bien sea abstracto, espacial" (docente participante). Se ha pensado que las matemáticas pueden ayudar a desarrollar la lógica y el razonamiento, pero esto depende del tipo de planteamiento matemático, pues autores como Schoenfeld (1988), y posteriormente, Alfieri (1993) o Pozo y cols. (1994), distinguen entre ejercicios y problemas. Para ellos, un ejercicio no requiere un proceso de razonamiento complejo, es algo mecánico y algorítmico, mientras que un problema sí requiere ese proceso. Por eso, el docente debe plantear a los estudiantes problemas y no solo ejercicios, y se trata también ubicarlos en situaciones a–didácticas que, según Brousseau (1986, citado por Fandiño, 2009), son las situaciones en las cuales la intervención del docente es escasa,

con un enfoque de tipo constructivista, en el cual el estudiante busca y construye el conocimiento.

La subcategoría *Métodos mecánicos*, contradice la anterior en relación con la característica de los algoritmos y los ejercicios de ser mecanismos que automatizan operaciones. No obstante, sirven para desarrollar la lógica y el razonamiento, siempre y cuando el estudiante los comprenda y no solo que los mecanice, aunque algunos docentes dicen que "el lenguaje matemático y los algoritmos marcan la comprensión y el entendimiento del problema" (docente participante), y también que "algunos programas de computador permiten complementar el trabajo involucrando conceptos asociados" (docente participante). El uso del computador, como el de los algoritmos, puede convertirse en un método mecánico en el que las operaciones se automatizan. Es el computador quien resuelve el problema o el ejercicio y no el estudiante, pues éste solo necesita saber manejar la aplicación o el programa de computador. Por supuesto, no se trata de desdeñar un recurso didáctico tan poderoso como es el computador que, si es bien empleado, es una herramienta poderosa de enseñanza y de aprendizaje, pues, según Martí (1992), "el ordenador, es un meta-medio porque puede expresar, manipular y combinar cualquier tipo de símbolo utilizado por otros medios". Y uno de estos medios es el matemático. El autor recalca la potencialidad de las aplicaciones edumáticas en las estrategias de aprendizaje.

Dificultad didáctica

En la subcategoría *Utilización de la realidad*, los docentes ofrecen algunos relatos como los siguientes: "Comprender desde la realidad el concepto de fracción" (docente participante); "lograr que cada uno de los estudiantes experimenten con material real" (docente participante). En esta forma, indican que para ellos es importante que los alumnos trabajen los números racionales en relación con la vida cotidiana, pues, de esta forma, pueden motivarse al ver la utilidad inmediata de lo aprendido. Fandiño (2009) hace algunas sugerencias sobre la manera de utilizar las fracciones de una forma

espontánea, usando el lenguaje cotidiano y ocasiones reales en que se presenten las fracciones.

Dificultad ontogenética

La categoría *Dificultades del Estudiante* se subdivide en dos subcategorías: *Dificultades cognitivas* y *Dificultades en operaciones*, que están relacionadas con las anteriores subcategorías, como se puede observar en la respectiva red semántica. Algunos de los relatos de los profesores son:

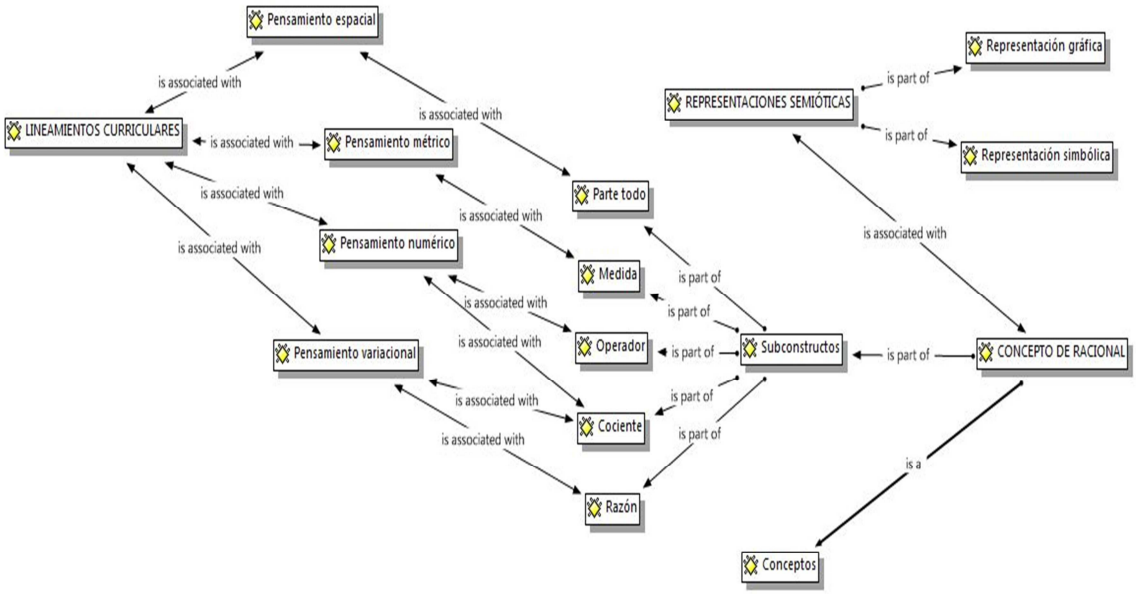
"Se presentan muchos casos en los cuales los estudiantes no manejan la parte conceptual y por ende la demostración y terminología" (docente participante); "En la parte de suma y resta con diferente denominador se puede complicar un poco. En la división y producto no se presenta dificultad" (docente participante). A los estudiantes se les dificulta mucho más la suma y la resta con racionales, mientras que el producto y la división no tienen mayores inconvenientes, pues la suma y la resta la hacen de la misma forma que cuando operan con los números naturales o con los enteros. Hay una inercia en este sentido, difícil de cambiar. Como dice Fandiño (2009), en la literatura se observa que los estudiantes tienen dificultad conceptual para realizar operaciones entre fracciones. Más adelante, la autora propone varios ejemplos, como los estudiantes realizan con facilidad las operaciones con racionales que involucran el producto y la división, mientras que en la adición y la sustracción, suman o restan los numeradores entre sí, y los denominadores también. Fandiño (2009) se refiere a la dificultad de los estudiantes en el manejo de los racionales, no como la ausencia de conocimientos, sino como su presencia (obstáculos), de la siguiente forma:

> La investigación en didáctica de la matemática ha evidenciado ampliamente cómo, a la base de los nuevos aprendizajes, hay obstáculos didácticos o epistemológicos que son verdaderos conocimientos, adquiridos previamente en otros campos, que funcionaron bien en estos pero que revelan un fracaso cuando se intenta aplicarlos en nuevas situaciones. La investigación de Fischbein de los años 80 mostró precisamente

> esto, mientras la teoría de los obstáculos iniciada por Brousseau de los años 70 se impuso en la explicación de este fenómeno; con frecuencia todo está vinculado a problemas de gestión semiótica, como evidenció Duval en los años 80. (p. 147).

A continuación, se considera la segunda red semántica, en la cual se observan tres categorías y trece subcategorías:

FIGURA 3. ANÁLISIS CATEGORIAL SOBRE LINEAMIENTOS CURRICULARES



La categoría Representaciones Semióticas se divide en dos subcategorías: Representación gráfica y Representación simbólica, para las cuales los profesores ofrecen algunos relatos en la siguiente clasificación.

Dificultad didáctica

Los docentes piensan que se pueden utilizar “Representaciones gráficas con figuras geométricas” (docente participante), para la “Representación de números racionales y sus operaciones” (docente participante). Por lo general, los docentes cuando representan

gráficamente una fracción acuden a una pizza o una torta o simplemente a un círculo, o a un cuadrado o un rectángulo, que dividen en partes iguales, lo cual permite elaborar ejemplos con fracciones "egipcias", en las que el numerador es menor que el denominador, y por consiguiente, son fracciones propias. Esto puede confundir al estudiante cuando se encuentra con fracciones impropias, pues puede llevarlos a la *paradoja cognitiva* de Duval (citado por Fandiño, 2009), que dice que el maestro espera que el alumno construya el concepto (noética) a partir de las representaciones semióticas, pero sólo si el estudiante conociera de antemano el concepto, sería capaz de reconocer en esas representaciones semióticas el concepto, pero como no lo conoce, únicamente puede ver representaciones semióticas.

Lo anterior deriva en la siguiente categoría con la cual está relacionada, como se puede observar en la red semántica, la categoría *Concepto de racional* está dividida en dos subcategorías: *Conceptos* y *Subconstructos*, esta última se subdivide en cinco subcategorías: Parte todo, medida, operador, cociente y razón.

Los cinco subconstructos están relacionados con la categoría *Lineamientos curriculares* a través de sus respectivos pensamientos (espacial, métrico, numérico, variacional y aleatorio). Éstos conforman las subcategorías. Estos cinco tipos de pensamientos en los lineamientos curriculares indican que los números racionales sólo se tratan en profundidad en el pensamiento numérico, en los demás tipos de pensamientos se mencionan muy poco o simplemente no se mencionan, pero ello no quiere decir que en los demás tipos de pensamiento no se utilicen. Por ejemplo, como se puede observar en la red semántica, el subconstructo *parte-todo* está relacionado con el pensamiento espacial, pues, por lo general, cuando se divide un todo en partes iguales, siempre se recurre a una figura geométrica, como ya se mencionó antes, o también, el subconstructo *razón* relacionado con el pensamiento aleatorio, pues la razón es una relación o proporción, en la cual una cantidad puede cambiar aumentando o disminuyendo guardando una proporcionalidad directa o inversa con respecto a la otra. Conviene aclarar que en el

análisis con Atlas.ti, el pensamiento aleatorio no surgió como una categoría, como era de esperarse.

Con respecto a la enseñanza del número racional, Obando (2003) dice que:

> El trabajo escolar en el número racional inicia con el estudio de las fracciones, a través de estrategias metodológicas y conceptuales centradas en la partición y el conteo, y en la mecanización de reglas y algoritmos; en consecuencia, en el proceso de conceptualización de las fracciones, la medición no es el eje central, ni hay un tratamiento cuidadoso del tipo de magnitud y del tipo de unidad. Estos elementos, como se verá a continuación, son fuente de dificultades en los procesos de conceptualización de los alumnos.
>
> La enseñanza actual enfatiza en actividades de partir y contar, y por tanto, los alumnos centran el proceso de conceptualización en el número natural y no en la fracción como tal. En efecto, al centrar la atención en el número de partes que representa el numerador y el número de partes que representa el denominador –y no en la relación cuantitativa entre las cantidades de magnitud de la parte y el todo–, se piensa la fracción como dos números naturales separados por una rayita (vínculo) y no como una relación cuantitativa entre la parte y el todo (p. 56-57).

Dificultad epistemológica

Para la subcategoría *Subconstructos*, algunos relatos de los docentes son: “una fracción representa una unidad dividida en partes iguales” (docente participante); “reconocen que un racional no sólo representa las partes que se toman de una unidad, sino también de un todo, además representa el cociente entre dos números, al igual que el resultado de una medida” (docente participante). Se observa que los profesores utilizan la noción *parte-todo*, así el subconstructo sea otro. Entiéndase éste, según Kieren (1980), como algo entero que es roto en partes iguales. Para este autor, tres subconstructos (cociente, razón y medida) tienen una estrecha relación con el subconstructo parte-todo, a excepción del subconstructo “operador”, que tiene una función multiplicativa. Cabe recordar que estos

cinco subconstructos fueron definidos por Kieren en 1980, a partir de siete interpretaciones iniciales para los números racionales.

En la subcategoría *Conceptos*, algunos relatos de los docentes son: “El concepto de fraccionario, fracción, los términos: numerador, denominador” (docente participante); “Se debe aplicar el concepto de número fraccionario” (docente participante). Ya se dijo anteriormente que hay una estrecha relación entre esta categoría y la anterior, como dice Duval: “no hay noética sin semiótica”. Además, según Fandiño (2009), tanto el aprendizaje de conceptos como el aprendizaje semiótico son dos de los cinco elementos claves en el aprendizaje matemático, los otros tres son: el aprendizaje de algoritmos, el aprendizaje estratégico y el aprendizaje comunicativo.

Recientemente se ha investigado en las ciencias cognitivas otro tipo de aprendizaje, se trata del aprendizaje perceptivo que, según Carey (2011):

> Durante años, se ha esperado que los estudiantes aprendan primero las reglas –los teoremas, el orden de las operaciones, las leyes de Newton– y después traten de resolver la lista de problemas al final del capítulo.
>
> Sin embargo, una investigación reciente ha arrojado que los verdaderos expertos poseen algo por lo menos tan valioso como un dominio de las reglas: comprensión instantánea del tipo de problema que enfrentan. Como el maestro de ajedrez que “ve” el mejor movimiento, han desarrollado un excelente ojo.
>
> Hoy, un pequeño grupo de científicos cognitivos argumenta que las escuelas y los estudiantes podrían aprovechar mucho más esta habilidad, llamada aprendizaje perceptivo. Después de todo, el cerebro es una máquina de reconocimiento de patrones, y cuando se concentra adecuadamente, puede rápidamente profundizar la comprensión de un principio por parte de una persona, sugieren nuevos estudios.

En el mismo artículo, el autor ofrece un ejemplo práctico de la utilización de este tipo de aprendizaje, que se puede aplicar a nuestro caso de interés:

> En un estudio del 2010, varios investigadores hicieron que estudiantes de sexto año, en una escuela pública de Filadelfia, utilizaran un programa de entrenamiento de la percepción para practicar el trabajo con fracciones. En el módulo computacional, una fracción aparecía como un bloque. Los estudiantes usaron una "rebanadora" para cortar ese bloque en fracciones y un "clonador" para copiar esas rebanadas. Usaron estos trozos para construir un bloque nuevo a partir del original para representar fracciones diferentes. En una prueba posterior, con problemas que los estudiantes no habían visto antes, el grupo tuvo un 73 por ciento de aciertos. Un grupo de comparación formado por alumnos de primero de secundaria, a quienes se les había enseñado a resolver dichos problemas como parte de las clases habituales, logró sólo un 25 por ciento de aciertos en el examen.

En este ejemplo, aunque se puede observar que el empleo del computador como herramienta para facilitar ese tipo de aprendizaje es útil, lo más importante es la estrategia didáctica que se utiliza para la enseñanza de las fracciones y recalcar los buenos resultados obtenidos.

8. Conclusiones

De acuerdo con los objetivos específicos, respecto a los cuales se refieren estas conclusiones, y según lo obtenido en la encuesta y en el taller, las dificultades manifestadas por los maestros respecto al aprendizaje del número racional y de las operaciones con los números racionales se refieren a un conocimiento acumulado de conceptos anteriores, puesto que la actividad de clase se organiza en torno a una secuencia de temas que pretende recoger lo que el estudiante debe saber sobre la disciplina.

Para los maestros que piensan que los estudiantes deben tener otros conocimientos antes que los números racionales, consiste en explicar a los estudiantes los contenidos esenciales a la asignatura a partir del seguimiento de los lineamientos y estándares como la organización de contenidos por grado y por campos temáticos.

Se da una tensión entre los programas académicos y las dificultades que presentan los estudiantes para comprender los conceptos matemáticos, debido en gran parte a la planeación rígida de las instituciones educativas y con las que el maestro se compromete a cumplir a cabalidad.

Se observa una visión técnica de la enseñanza (Porlán, 1997), con una hipótesis de causalidad según la cual la enseñanza da lugar al aprendizaje, lo que significa que todo aquello que es bien enseñado ha de ser automáticamente bien aprendido por los

estudiantes y si esto no se logra se debe a que los estudiantes presentan dificultades para el aprendizaje.

Con esta visión mecánica de la enseñanza con respecto al aprendizaje, las dificultades para enseñar las operaciones con números racionales, se refieren a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

El desarrollo de las matemáticas en el transcurso de la historia ha dado cuenta de las múltiples relaciones entre las matemáticas y el mundo real (Posada & Villa, 2007), lo que incluye los números racionales y sus operaciones, entre otras cosas porque es precisamente este conjunto numérico el que más posibilidades reales ofrece de aplicación.

Cuando los docentes exponen, como dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales, el poco acercamiento que puede hacerse de estos conceptos con la vida cotidiana, se debe precisamente a que se parte de los procesos de abstracción antes que de situaciones reales.

La visualización en la didáctica de la matemática ha sido ampliamente discutida y estudiada por los investigadores en la enseñanza de la matemática, lo que no se escapa a la reflexión y al análisis de los maestros en torno a las posibilidades representacionales que ofrece la tecnología para la enseñanza.

Se puede reconocer que, para los maestros, una de las dificultades en la enseñanza de la matemática se refiere a la necesidad de recurrir a representaciones externas para comprender los conceptos matemáticos y, de allí, las posibles representaciones que ofrece la tecnología se convierte en una herramienta mediadora importante.

9. Recomendaciones

La aplicación de la matemática y especialmente de los números racionales en la vida diaria es clave para los docentes y para los estudiantes. Al respecto, el proceso de modelización matemática es considerado como una actividad científica en matemáticas que interviene en la obtención de modelos propios de las demás ciencias. En los últimos años, se han venido adelantando investigaciones (Bassanezi; Biembengut & Hein, citados por Villa (2007)) que permiten la adaptación de esta actividad científica en la enseñanza de las matemáticas, de tal manera que sea una estrategia didáctica para abordar conceptos matemáticos en el aula.

La utilización de la tecnología y especialmente de las herramientas informáticas como material didáctico es un valioso recurso para el docente. También es pertinente considerar que el conocimiento matemático se recibe y se transmite mediante dos canales de información: el auditivo y el visual (y, de manera complementaria, por el tacto). Los enunciados verbales y las organizaciones visuales gráficas o simbólicas son los medios usados con mayor frecuencia en la transmisión y la recepción del conocimiento matemático. De ahí que los dos sentidos mencionados tengan una importancia primordial en los procesos que intervienen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Y esto es así por la función de los enunciados declarativos y las expresiones gráficas o simbólicas en la formación y comunicación del conocimiento matemático.

El trabajo colaborativo es crucial, pues el estudiante se debe acostumbrar a convivir con los demás compañeros y a cooperar con ellos, sobre todo porque hay modalidades de estudio, como la educación a distancia o virtual, que requiere que los participantes colaboren entre ellos –ya sea de manera asincrónica (correo electrónico, foros, etc.) o sincrónica (video conferencia, chat, etc.)–, en todos los trabajos y tareas que el docente

proponga, por eso, es conveniente que los estudiantes se acostumbren a este tipo de trabajo.

El reconocimiento de los pre–saberes de los estudiantes es primordial si se quiere obtener un aprendizaje en profundidad, para lo cual es necesario en todo el proceso de enseñanza indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes, para poder planear y preparar las clases.

Se recomienda que los docentes compartan sus experiencias docentes sobre la enseñanza de los números racionales, con el fin de aprovechar lo mejor de cada una de ellas. Para conseguir ese propósito, se pueden programar reuniones periódicas, y no dejar los encuentros al azar, y se deben llevar a cabo compromisos consensuados.

Es preciso que los docentes indaguen sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales, pues ello puede ayudarles a obtener una visión clara sobre la mejor manera en que deben abordar la enseñanza. Tanto la enseñanza como el aprendizaje están estrechamente relacionados entre sí, y de las condiciones del proceso de enseñanza depende el éxito del aprendizaje.

Es recomendable que los docentes se interesen por la investigación y participen en investigaciones educativas, porque esa actividad puede servirles para mejorar su actividad docente.

10. Referencias

Abrate, R. S., Pochulu, M. D., & Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en matemáticas. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Álvarez, C. (22 de octrubre de 2010). Necesitamos profesores más preparados. *El Espectador*, p. 21.

Aristóteles. (1969). *Metafísica.* México DF: Porrúa.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions. Thousand Oaks.* California: Sage Publications, Inc.

D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución.* Barcelona: Uno.

D'Amore, B., Fandiño, M. I., Marazzani, & Sbaragli. (2008). *La didáctica y la dificultad en matemática.* Trento: Erickson.

Dickson, L. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* México: Trillas.

Escolano, R., & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática (1)*, 17-35.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Fernández, C., & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales, 15(1)*, 11-22.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. (Tesis maestría).* Obtenido de Instituto Politécnico Nacional, México: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/flores_2010.pdf

Flores, R., & Martínez, G. (2009). *Una construcción de significado de la operatividad de los números fraccionarios.* Obtenido de X Congreso Nacional de Investigación Educativa, área 5: educación y conocimientos disciplinares: http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1594-F.pdf

Francis, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 5(2)*, 1-18.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* México DF: CINVESTAV-IPN.

Garrido, L., Baquero, A., & Baiz, L. (2009). Interpretación del cambio y la variación a través de situaciones problemas con relaciones funcionales. En *10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa – ASOCOLME.

Garrido, L., Baquero, A., & Baiz, L. (2009). Interpretación del cambio y la variación a través de situaciones problemas con relaciones funcionales. En ASOCOLME, *X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME).

Gil, D., Pessoa, A. M., Fortuny, J. M., & Azcárate, C. (2001). *Formación del profesorado de las ciencias y la matemática. Tendencias y experiencias innovadoras.* Madrid: Editorial Popular.

Gómez, M. A. (2005). La transposición didáctica: Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 1*, 83-115.

Guzmán, R. J. (29 de Noviembre de 2010). Cómo aprenden los profesores. *El Espectador*, p. 8.

ICFES. (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Resumen ejecutivo.* Bogotá: Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación.

Kieren, T. (1980). *Recent Research on Number Learning.* Columbus: Eric/Smeac.

Kieren, T. (1980). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En T. K. (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-149). Columbus, OH: Eric/Smeac.

Luelmo, M. (2004). Concepciones matemáticas de los docentes de primaria en relación con la fracción como razón y como operador multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle, Distrito Federal 6(22)*, 83-102.

Meza, A., & Barrios, A. (2010). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones.* Obtenido de 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa: http://funes.uniandes.edu.co/1174/1/674_Propuesta_Didctica_Asocolme2010.pdf

Monereo, C., Pérez, M. L., Miquel, E., Castelló, M., Barberà, E., Gómez, M. A., y otros. (2002). *Estrategias de aprendizaje.* Madrid: Antonio Machado Libros.

Moreno, A., & Flores, P. (2000). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento a los números racionales. En G. y. (Eds.), *IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 211-214). Cádiz: "THALES". U. Cádiz y SAEM THALES.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación Parte-todo. *Revista EMA, 8(2)*, 1-27.

Obregón, I. (2007). *Magia y belleza de las matemáticas y algo de su historia.* Bogotá: Intermedio Editores.

Orduz, R. (28 de Septiembre de 2010). Sin calidad en la educación no hay innovación. *El Espectador*, p. 42.

Perera, P. B., & Valdemoros, M. E. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de Educación Primaria (tesis doctoral).* México: CINVESTAV.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.* México DF: Editorial Trillas. Serie de Matemáticas.

Porlán, R. (1997). *Constructivismo y escuela.* Barcelona: Gedisa.

Porta, S. (2007). *Las ideas previas y las situaciones de enseñanza.* Obtenido de Quehacer Educativo: http://www.quehacereducativo.edu.uy/docs/14cc07c3_86-028.pdf

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006). Razonamiento Algebraico y Modelación Matemática. En G. O. F. Posada, *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico vol.2* (pp. 127- 163). Medellín: Gobernación de Antioquia.

Ruíz, E., & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME, 9(2)*, 299-324.

Salazar, M., Martinic, S., & Maz, A. (2011). Diseño de una investigación para identificar los significados de fracción que ponen de manifiesto los profesores de primaria en Chile. Obtenido de Comité Interamericano de Educación Matemática, CIAEM - XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática: http://cimm.ucr.ar.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/paper/view/2472

Sánchez, Á. (2000). *Diccionario Jeroglíficos Egipcios.* Madrid: Aldebarán Ediciones.

Tamayo, O. E., Vasco, C. E., Suárez de la Torre, M. M., Quiceno, C. H., & García, L. I. (2011). *La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación.* Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.

Valdemoros, M., & Ruíz, E. (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME, 11(1)*, 127-157.

Vasco, C. E. (2010). Problemas y retos de la educación por competencias en las matemática de 5° grado (Conferencia). En *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla.* Barranquilla: Universidad del Norte.

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.

Vygotsky, L. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

11. Anexos

A. CUESTIONARIO

Objetivo: El propósito del presente cuestionario es ayudar a determinar las posibles dificultades que se presentan en la enseñanza de la matemática, y más específicamente lo relacionado con los números racionales con sus operaciones, este cuestionario hará parte de una tesis de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Manizales.

Tipo de establecimiento: Público ☐ Privado ☐

Modalidad del establecimiento: Varones ☐ Femenino ☐ Mixto ☐

Género: Masculino ☐ Femenino ☐

Profesión: _____

Último título de formación: _____

Grados en los que dicta la materia de Matemáticas: _____

Materias que dicta diferentes a Matemáticas: _____

Experiencia docente en matemáticas: _____

Cantidad promedio de alumnos por clase de Matemáticas: _____

Preguntas

Instrucciones: En cada una de las preguntas, se debe escoger la opción que corresponda a su predilección o parecer, utilizando la siguiente escala:

0: No sabe o no responde

1: Nunca

2: Raras o pocas veces

3: Algunas veces

4: Muchas veces o frecuentemente

5: Siempre

1. ¿Considera que la enseñanza de los números racionales es un tema de difícil comprensión para los estudiantes?

   0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

   Argumente su respuesta:

   _____

   _____

   _____

   _____

2. ¿Hace uso de alguna estrategia diferente o especial cuando enseña los números racionales con sus operaciones?

   0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

   Argumente su respuesta:

   _____

   _____

   _____

   _____

3. ¿Indaga acerca de las dificultades de comprensión que poseen los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales con sus operaciones?

   0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

   Argumente su respuesta:

   _____

   _____

   _____

   _____

4. ¿Prepara las clases de matemáticas y más específicamente lo relacionado con los números racionales?

   0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Argumente su respuesta:

_____

_____

_____

_____

5. ¿Si se da cuenta o los estudiantes le dicen que no están entendiendo las operaciones con los números racionales, usted se preocupa por cambiar de estrategia para explicar con el fin de una mejor comprensión?

0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Argumente su respuesta:

_____

_____

_____

_____

6. ¿Es paciente y comprensivo cuando los estudiantes no comprenden las operaciones con los números racionales?

0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Argumente su respuesta:

_____

_____

_____

_____

7. ¿Es abierto a las sugerencias o recomendaciones hechas por amigos y compañeros docentes, y las acepta y toma en cuenta para mejorar en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones?

   0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

   Argumente su respuesta:

   _____

   _____

   _____

   _____

8. ¿Es abierto a las sugerencias o recomendaciones hechas por sus estudiantes, y las acepta y toma en cuenta para mejorar en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones?

   0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

   Argumente su respuesta:

   _____

   _____

   _____

   _____

9. ¿Le molesta o incomoda que un estudiante le corrija o le haga caer en la cuenta de algún error cometido en la enseñanza de los números racionales?

   0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

   Argumente su respuesta:

   _____

   _____

   _____

   _____

10. ¿Le parece complicado explicar ciertos temas, especialmente los números racionales?

    0☐ 1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

    Argumente su respuesta:

    _____

    _____

    _____

    _____

¿Aceptaría continuar colaborando con esta investigación?

Sí ☐ No ☐

Muchas gracias por la colaboración prestada.

B. TALLER

Objetivo: El propósito del presente taller es indagar acerca de las dificultades que manifiestan los docentes en la enseñanza de las operaciones con números racionales. Este taller hará parte de una investigación para una tesis de la maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Manizales.

1. Narre alguna experiencia que haya tenido en la enseñanza de los números racionales. Escriba paso a paso las actividades realizadas y los logros obtenidos por los estudiantes.

2. En cada una de las siguientes situaciones problema propuestos, responda las siguientes preguntas:

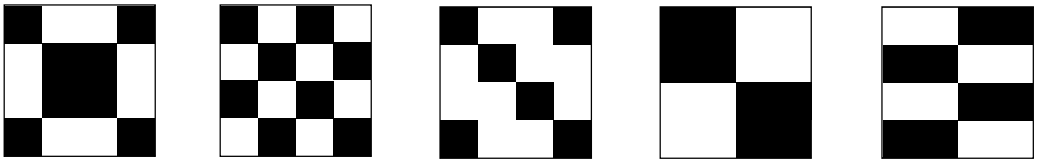
¿Para qué me serviría este ejercicio con mis estudiantes?

¿Qué conceptos relacionados con los números racionales, estaría enseñando?

¿Cómo les enseñaría a resolver esta situación?

a. Un arquitecto está diseñando un estilo de baldosa utilizando dos colores (negro y blanco), obteniendo los siguientes diseños:

A B C D E

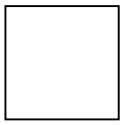


¿En cuál baldosa se utiliza diferentes cantidades de color negro y blanco? (**Fuente:** Elaboración propia).

b. Si una jarra con agua puede llenar cinco vasos, ¿cuántas jarras se necesitan para llenar 20 vasos? (**Fuente:** Elaboración propia).

c. Dos tanques de 2000 y 1600 galones de capacidad se encuentran llenos con agua. El número de galones que se deben sacar del tanque de mayor capacidad para que la relación entre las cantidades de agua del mayor al menor sea 6 a 5, es. (**Fuente:** Londoño, N. y Bedoya, H. (1988). *Serie Matemática Progresiva. Análisis Matemático*. Bogotá: Editorial Norma S. A.).

d. Un padre le deja de herencia a sus cuatro hijos un terreno como el siguiente:



En el dibujo de arriba, marque cómo se puede distribuir el terreno, de modo que todos los hijos reciban lo mismo, realice por lo menos cuatro distribuciones diferentes.

A continuación, escriba cuánto le corresponde a cada uno. (**Fuente:** Elaboración propia).

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

e. En la mitad del terreno de una finca se siembra pasto, en la tercera parte de lo que queda se siembra café y en las tres quintas partes del resto se siembra maíz. La parte de la finca que queda sin sembrar es. (**Fuente:** Londoño, N. y Bedoya, H. (1988). *Serie Matemática Progresiva. Análisis Matemático*. Bogotá: Editorial Norma S. A.).

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Muchas gracias por la colaboración prestada.