UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Y LAS MATEMÁTICAS

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

DEL NÚMERO RACIONAL

PRESENTADO POR:

CLAUDIA MARÍA CAMPUZANO

TUTORA

LIGIA INÉS GARCÍA

MANIZALES

2017

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIÓN

PALABRAS CLAVES

Representación, Semiósis, Magnitud, Mentales, Fracciones, Medida, Objetos matemáticos, Didáctica, Enseñanza, Metodología, División, Sistema, Aprendizaje, Concepto, Lúdica, Significativo, Todo, Partes.

1. INTRODUCCIÓN

El presente documento da cuenta del proceso investigativo llevado a cabo con el fin de indagar las representaciones semióticas que poseen los niños antes de acercarse al concepto de número racional en el contexto escolar.

A partir de la búsqueda de antecedentes y de la exploración que se hace con los niños, se pudo constatar que los niños poseen algunas nociones en torno al concepto de número racional antes de acercarse a este contenido escolar, que vale la pena tenerse en cuenta en el momento de su enseñanza formal.

En primera instancia, se realizaron algunas búsquedas sobre los fundamentos conceptuales de la enseñanza del número racional y un rastreo de las investigaciones realizadas en torno a la aparición de este concepto tanto en el contexto escolar como en contextos extraescolares.

Después de realizado el trabajo de campo, en donde se lograron reconocer las posibles representaciones que emplean los niños en torno al concepto de número antes del aprendizaje del raciona a partir de la realización de un taller y de la realización de una guía que se les presento a los niños en dos momentos ejecutados en el aula de clase.

Se espera con los resultados aportar algunos aspectos a tener en cuenta en la enseñanza de los números racionales, partiendo de las representaciones semióticas ya desarrolladas por los niños antes de aproximarse a este contenido desde la escuela.

Se espera también aportar al campo de la enseñanza de las matemáticas algunos lineamientos en el diseño de estrategias didácticas que privilegien la comprensión del número racional.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El aprendizaje de las matemáticas constituye, un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, e incluso, la comprensión de textos. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes: variados sistemas de escritura, notaciones simbólicas para los objetos, escritura algebraica y proposicional que toman el estatus del lenguaje paralelos al sistema natural para expresar las relaciones y operaciones, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficos cartesianos, diagramas, esquemas, entre otras.

De acuerdo con lo planteado por Duval (1999) para lograr la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas, se asumen los siguientes supuestos:

El primero es que no puede haber compresión en matemáticas si no se distingue el objeto de su representación. Desde esta perspectiva, es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, es decir, los números, las funciones, las rectas, con sus representaciones, así mismo las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras, pues se considera que un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes.

Es el objeto representado lo que importa y no sus diversas representaciones semióticas posibles. Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones inertes que no sugieren ninguna transformación productora.

El segundo argumento es más global y más psicológico. Se basa en la existencia de representaciones mentales, es decir, de todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener de un objeto, sobre una situación y sobre todo aquello que les está asociado. Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos no parece ser más que el medio del cual dispone el individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles al otro. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación.

Las representaciones semióticas son necesarias para la actividad matemática, en efecto, la posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Las transformaciones matemáticas no pueden efectuarse independientemente de un sistema semiótico de representación y este sistema de representación solo lo pueden cumplir las representaciones semióticas y no las representaciones mentales.

Por último, desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones semióticas no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptos (Vigotski, 1985; Piaget, 1968). A esto es necesario añadir el hecho de que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales.

En el campo disciplinar de la matemática, en el cual se ubica este estudio, en la construcción y representación de conceptos matemáticos, consideraremos ¨Objetos matemáticos y representaciones semióticas¨, es necesario establecer distinciones con otros tipos de conocimiento por las siguientes razones:

- Los objetos matemáticos, contienen los conceptos y los procesos de su construcción, porque las acciones, relaciones y propiedades de esas acciones son construcciones que permiten organizar el mundo. Por lo tanto, al hablar de un objeto matemático es preciso partir de su significado y también del uso que se hace de él.
- Los objetos matemáticos no son objetos sensoriales o instrumentalmente accesibles como lo son otros campos de aprendizaje.
- Por último y derivado de lo anterior, el acceso a los objetos matemáticos sólo se puede hacer a partir de las representaciones semióticas que, del mismo modo que los objetos matemáticos, deberán abordarse no sólo por su significado sino también por su uso.

Una de las preocupaciones de la didáctica de la matemática, está basada en reconocer la génesis cultural y personal del conocimiento matemático, debido a la naturaleza de los objetos matemáticos.

En el estudio de los objetos matemáticos, donde se incluyen procedimientos, situaciones y operaciones, se parte del reconocimiento de que dichos objetos no son accesibles al sujeto sino a través de sus representaciones y, por consiguiente, para comprender el aprendizaje del número racional como objeto matemático, es necesario partir de las representaciones internas y externas de estos objetos. Las representaciones internas requieren operaciones mentales de comprensión y se hacen visibles a partir de signos matemáticos, que son las representaciones externas o semióticas.

Se aborda el concepto de representaciones semióticas, por considerar los objetos matemáticos, en términos de Puig (2003), como producciones constituidas de signos y se convierten en el medio del cual disponemos para reconocer las representaciones internas que elabora el sujeto y, por lo tanto, cumplen la función de comunicación, pero también se encuentran ligadas a la actividad matemática misma.

De acuerdo con Duval (1999), un sistema representacional semiótico debe cumplir tres condiciones cognitivas: En primer lugar, la formación de la representación en segundo lugar el tratamiento de las representaciones está de acuerdo con las reglas de un sistema semiótico y, en tercer lugar hace posible el tránsito de un registro a otro. El tratamiento de los registros semióticos que hace el sujeto determina su aprendizaje y de allí surge la pregunta:

¿Cuáles son las nociones del número racional, que subyacen a las evidenciadas en las representaciones semióticas que poseen los niños antes de acercarse al concepto de numero racional?

Se parte del supuesto de que el aprendizaje de los objetos matemáticos se hace por medio de sus representaciones semióticas, y sólo a través de ellas, es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, por lo tanto, la disponibilidad y el uso de diversos sistemas de representación semiótica, su tratamiento y conversión que hace el sujeto, son imprescindibles para reconocer el aprendizaje del objeto matemático, en este caso del número racional.

Los contextos de representación, es decir, los sistemas en los que se ponen en juego las representaciones, son necesariamente semióticos, porque los signos matemáticos, las notaciones matemáticas expresadas de diversas formas, cumplen la función de ponerse en lugar del objeto matemático.

La función semiótica de la matemática supone tener en cuenta el recurso cognitivo que se encuentra implicado en ella, pues el sujeto necesariamente debe hacer uso de los diferentes sistemas de representación y elegir uno de ellos, dependiendo del propósito de la situación o de la demanda de la misma.

En síntesis, para este estudio es imprescindible considerar las representaciones semióticas que dan cuenta del objeto matemático, en este caso el número racional.

3. OBJETIVOS

3.1 General

Reconocer las representaciones y nociones que subyacen en los registros semióticos que poseen los niños de los grados segundo y tercero del Colegio de la Universidad Autónoma antes del aprendizaje del concepto del número racional.

3.2 Específicos

Identificar las nociones y representaciones semióticas que poseen los niños sobre el número racional.

Identificar el tratamiento que los niños hacen de las representaciones semióticas sobre el número racional.

4. MARCO TEÓRICO

4.1 Antecedentes

De acuerdo con la búsqueda de antecedentes realizada con respecto a la enseñanza y aprendizaje de los números racionales, se pueden reseñar las siguientes, dada su utilidad para este proceso investigativo:

El trabajo de investigación realizado en la Universidad de La Salle, acerca de las concepciones matemáticas de los docentes de primaria en relación con la fracción como razón y como operador multiplicativo sirvió como fuente de información para reconocer algunas concepciones que como maestros tenemos.

Se asume la teoría de los campos conceptuales propuesta por Vergnaud, plantea primordialmente, que una estructura matemática puede adquirir diferentes significados de acuerdo al contexto en el que se utilice, además, considera que para tener un contexto adecuado para dicha estructura es necesario conocer todos cada uno de los significados que puede adquirir.

Los significados planteados son cuatro: como medida, como cociente, como razón y como operador multiplicativo, siendo, estos dos últimos los más difíciles de adquirir. Esta investigación se centra en el estudio de los dos últimos significados considerados los más difíciles, por parte de los docentes, uno de los actores principales en el proceso de enseñanza aprendizaje. Al analizar los datos, se encontró que los docentes no han construido estos dos significados de la fracción, por lo que su conocimiento de éstos es incompleto y la enseñanza que puedan dar los mismos será deficiente, con lo que se determinaron las implicaciones educativas de los resultados encontrados para los estudiantes de primaria.

La utilidad de esta investigación para reconocer las representaciones semióticas de los niños, es que nos permite explorar la posibilidad de encontrar otras formas de representación que pueden ser utilizadas por los niños.

Una segunda investigación rastreada, hace parte de un trabajo realizado en México por la investigadora Martha Elena Valdemoro en el 2004 y posteriormente en el 2008, en donde se indaga con trabajadores ambulantes los conceptos que manejan de fracción, estas investigaciones son de gran importancia para este estudio, pues reflejan también concepciones que se tienen en torno al concepto de número racional en personas que no han accedido a su aprendizaje en el contexto escolar.

El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos, realizado en el 2008, se plantea como pregunta de investigación; ¿Qué tipo de tareas aritméticas pueden favorecer, en mejores condiciones, la construcción de diversos significados, nociones y conceptos de fracción en el adulto?

La indagación realizada alterno el uso de números naturales, fracciones y decimales, aquí abordaron exclusivamente el enriquecimiento semántico y conceptual de las fracciones en la resolución de problemas que permiten la reconstrucción de las experiencias vitales del sujeto. El estudio se realizó mediante un cuestionario exploratorio y dos entrevistas de corte didáctico aplicadas a esta mujer de 41 años de edad, de sexto grado, siendo la entrevista la mejor fuente de información de la misma.

Una vez establecieron que los avances de Lucina no son atribuibles a la enseñanza previa del maestro ni a la mediación orientadora de la entrevistadora, concluyen sobre este estudio de caso que han reunido las suficientes evidencias para comprobar la hipótesis: Es en la resolución de problemas aritméticos que replantean las experiencias laborales , comunitarias y familiares del adulto cuando se enriquecen y construyen eficazmente nuevos significados, nociones y conceptos ligados a la fracción.

A partir de este estudio se pudo comprobar que los niños y las personas acceden al uso de los números racionales por su aplicación a la solución de problemas, aspecto que es necesario tener en cuenta cuando ya se va a enseñar formalmente.

La tesis doctoral de Valdemoro realizada en el 2004, pretendió explorar cualitativamente el vínculo entre la construcción del lenguaje aritmético de las fracciones y el desarrollo de los conceptos ligados a tales números. Para este trabajo se aplicó un cuestionario exploratorio a un grupo de 37 estudiantes de grado 4 entre los 8 y 11 años de edad.

En el cuestionario estuvieron centrados diversos contenidos semánticos asignables a las fracciones. Específicamente en éste se exploró por el significado de cociente, atendiendo a su carácter de noción, derivadas de acciones y situaciones familiares para los niños y ofreciendo por ello un punto de partida bastante accesible a la enseñanza de las fracciones.

El propósito de dicha investigación fue identificar los componentes semánticos, sintácticos y de traducción involucrados en las respuestas de los estudiantes ante diversas situaciones de reparto. En el desarrollo de tal propósito se observó con cuidado aquellos componentes que afectasen el adecuado desenvolvimiento de los niños y el consiguiente aprendizaje a desarrollar.

El cuestionario exploratorio quedó integrado por 30 problemas distintos en los que contamos 3 tareas de reparto de diferente complejidad. Las tres tareas antes mencionadas incluyeron un número creciente de objetos a ser distribuidos y de sujetos intervinientes en el reparto, demandando del estudiante elaboraciones a desarrollar en distintos planos de representación.

Para la realización del posterior análisis de la información recogida en la investigación, se diseñó un modelo interpretativo. Dicho modelo presenta una naturaleza eminentemente lingüística, ya que permite identificar los 3 planos constituyentes de todo lenguaje: El semántico, el sintáctico y el pragmático.

Al desarrollar la investigación cualitativa es de mucha importancia establecer qué clase de seguimiento se da a un cuestionario que fija los avances iníciales a alcanzar en cierta indagación, eso es lo que muestran en este estudio en el terreno del uso de las fracciones y en vinculación con el significado de cociente intuitivo derivado de reparto.

Por último, algunos de los resultados analizados en este reporte pueden ser acogidos como nuevos interrogantes susceptibles de incorporación en futuras indagaciones y prácticas de enseñanza. Entre otros fenómenos se refiere a las dificultades de pasaje de un lenguaje a otro, al manejo de restricciones semánticas asociadas a las situaciones en las que las fracciones emergen como ¨divisiones indicadas¨, al uso del nexo lingüístico y en situaciones que implícitamente involucren a la suma de fracciones.

El trabajo realizado por estudiantes de la Universidad Distrital de Bogotá, sobre “Razón y proporción: un análisis desde los procesos de unitización y formación”, se realizó con estudiantes de grado 6, sobre las estrategias informales que utilizan los estudiantes cuando resuelven problemas de razón y proporción en donde se les propuso cinco actividades que involucran nociones sobre razón y proporción planteadas por Lamon (1994).

De los grupos seleccionados el grupo A: No recibió ninguna instrucción formal en razón y proporción y el grupo B: Si recibió información y se asume que las estrategias informales usadas por los niños en este tipo de problemas, son aquellas inventadas por los mismos niños que generalmente se apoyan en el conteo y no suelen ser abordados en la enseñanza escolar.

Las estrategias pueden ser abordadas para analizarlas desde los planteamientos de Lamon, quien centra su mirada en los procesos de unitización y formación, descubriendo diferentes tipos de unidades en dichas estrategias y estableciendo niveles aparentes de complejidad.

Al contrastar las estrategias de los estudiantes que recibieron instrucción formal y los que no, se puede observar que en los dos prevalece estrategias informales que parten de la reiteración de unidades compuesta s tanto experimentales como abstractas; aunque los estudiantes que recibieron alguna información formal tratan de tratan de relacionar sus estrategias con los procedimientos enseñados por el profesor. Se evidencia que la enseñanza de razón y proporción en la escuela se distancia de estas estrategias que constituye el conocimiento con que el niño llega a la escuela.

El análisis de los procesos de unitización y formación ofrecen una vía para la comprensión de la manera como los niños componen unidades variando en la complejidad del mismo, a su vez plantea actividades de clase partiendo de las estrategias informales de los estudiantes como una opción de tránsito hacia estrategias formales.

Otra investigación acerca de las dificultades en la comprensión y aplicación del concepto de número fraccionario, realizado en Bogotá, con estudiantes de quinto grado de básica primaria, se basó en las experiencias de los docentes y estudiantes y por la bibliografía consultada se evidencia la necesidad de plantear estrategias metodológicas donde se le permita al estudiante que observe, manipule, compare, invente, descubra, relacione y llegue a su propia conclusión optimizando así su rendimiento académico, la comprensión de las fracciones, el desarrollo de niveles de pensamiento y de la conciencia crítica que lo lleve a construir su propia realidad.

Este trabajo se realizó en 4 partes:

Fase 1: Se aplicó la prueba piloto y luego se corrigió. Fase 2: Se aplicó la prueba corregida, su objetivo era identificar las falencias que muestran los estudiantes en las fracciones. Fase 3: Identificadas las falencias, se elaboraron 4 juegos para superar dichas falencias. Fase 4: Verificación de juegos que cumplan dicha función.

La aplicación de la segunda prueba muestra que el grupo que intervino después alcanzó un nivel de mayor comprensión del concepto parte-todo y de representación gráfica.

Este trabajo se realizó con estudiantes de 5 grado de los colegios Jazmín occidental, centro educativo del norte y hombre del río.

Se tuvo en cuenta los procesos cognitivos, actitudinales y procedimentales de los estudiantes de manera que al analizar el desempeño de los educandos en las actividades propuestas, fuera posible determinar el grado de dificultad que presentan en la resolución de diversos tipos de problemas planteados.

El trabajo está enmarcado en una metodología descriptiva-estructurada con el fin de observar y analizar un fenómeno como lo es el manejo de los conceptos básicos en los fraccionarios y es estructurada porque se elaboró un instrumento y se convalidó con el fin de obtener resultados aproximados a una realidad.

Se trata de identificar las herramientas y habilidades simbólicas que utilizan los niños en el manejo del concepto de número racional, para esto, se elabora un problema en un contexto donde son valorados los conceptos de: Parte, todo, equivalencia e igualdad, operación, la fracción como medida, un resultado de una división, una razón y un operador.

Los resultados muestran que las dificultades de los estudiantes están en la comprensión y aplicación del concepto de parte-todo.

Además de los trabajos revisados, también se tuvieron en cuenta algunas reflexiones realizadas por Obando (1999) en su tesis de maestría permitió reconocer que una enseñanza de los números racionales enfocada desde una perspectiva de la matemática de las cantidades y que permita significar las fracciones desde las operaciones y relaciones que les dan sentido numérico, es clave en el aprendizaje de estos por parte de los alumnos.

Finalmente es importante destacar que esta investigación está inscrita dentro del programa de investigación “Formación de pensamiento matemático en el contexto escolar: implicaciones de la cultura del uno y la unidad” adelantado por los profesores Jorge Arce Chaves, Gloria Castrillón.

4.2 Los objetos matemáticos

Este estudio se ubica en el campo disciplinar de la enseñanza de la matemática, considerada como un sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades formativas que conforman la actividad de enseñanza y aprendizaje de la matemática, Godino (2000, citando a Sierra y castro, 2000). La didáctica de la matemática se encarga de estudiar los problemas que surgen en el proceso de enseñanza y de aprendizaje y propone acciones para su desarrollo que, en relación con el número racional, implica la comprensión de éste como objeto matemático.

Duval (1999 y 2006) plantea que no puede haber comprensión en ibíd. si no se distingue el objeto matemático de su representación, pues un mismo objeto matemático puede representarse de diferentes maneras. Para el concepto de racional, esta apreciación es de gran utilidad la multiplicidad de registros representacionales existentes y por la posibilidad que ofrecen de expresar los actos de pensamiento y a la vez enriquecer los procesos de construcción del conocimiento matemático.

Un objeto matemático es todo aquello que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas.(Godino, 2002). Esta idea es tomada de Blumer (Blumer, 1969 ed. 1982, p. 8): Un objeto es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo.

En trabajos anteriores se han considerado los siguientes tipos de objetos matemáticos:

- ✓ Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, textual…)

- ✓ Situaciones (problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios…)
- ✓ Acciones (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos…)
- ✓ Conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, medida, función, …)
- ✓ Propiedad o atributo de los objetos (enunciado sobre los conceptos)
- ✓ Argumentos (por ejemplo, los que se usa para validar o explicar los enunciados, por deducción o de otro tipo, …)

4.3 Aprendizaje de los objetos matemáticos

En los intentos por sintetizar las dificultades en el aprendizaje de conceptos (D´Amore 2001, 2003) se ha recurrido a la idea que se encuentra en la paradoja de Duval:

El aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, de otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos sólo pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve a la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿Cómo pueden ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados con las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifican actividades matemáticas y actividades conceptuales y se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.

Estas frases reclaman no solamente un cierto modo de concebir la idea de semiótica sino también su relación con la epistemología. Como apunta Radford: El problema epistemológico puede resumirse en la siguiente pregunta: ¿Cómo llegamos a conocer los objetos generales, dado que no tenemos acceso a éstos sino a través de representaciones que nosotros mismos nos hacemos de ellos?

4.4 El objeto matemático: el número racional

Existe un largo camino desde el primer contacto intuitivo que el niño tiene con medios y cuartos hasta el conocimiento del conjunto de los números racionales. Este proceso de aprendizaje se halla condicionado por la variedad de estructuras cognitivas a las que están conectadas las diferentes interpretaciones del concepto de fracción.

Para los antiguos egipcios, el problema de expresar las partes de todo fue el motor para la invención de las fracciones, junto con la necesidad de medir cantidades continuas, ya que los números naturales resultaban insuficientes. En la enseñanza, las fracciones se introducen como la relación parte todo pero, no es suficiente para mostrar la conexión entre las fracciones y la división.

El concepto de fracción respondió en su origen histórico a la necesidad de repartir objetos entre varias personas: El problema de repartir 1, 2, 7, o 9 hojas entre 10 personas, es una de las situaciones que aparecen resueltas en el Papiro Ahmes (civilización egipcia) como una de las referencias históricas más antiguas sobre la aparición de este concepto.

La equivalencia de fracciones es el medio por el cual se llega al concepto de número racional, de un alto nivel de abstracción. Al trabajar con números racionales, podemos elegir la representación fraccionaria que mejor responda a nuestras necesidades, esto es válido tanto para las operaciones como para la comparación.

Los números racionales son aquellos que podemos representar por fracciones, pero no es esta la única forma de representarlo. También podemos hacerlo a través de los decimales, los porcentajes, la notación científica o en forma mixta. Por ejemplo, el número racional que expresa la relación entre un cuadrado y un rectángulo formado por dicho cuadrado y su mitad puede representarse por 3/2 ó 1,5 ó 150% 1 ½.

El uso de los porcentajes se haya ligado a la fracción como operador, ya que es común verlo a asociado a situaciones del tipo:

El 25% de los 60 participantes obtuvo algún premio. Si el producto cuesta $120, se le rebaja un 20%.

Decimos esto porque en ambos casos, su cálculo involucra las operaciones de multiplicación y división.

Tal como sucede cada vez que tenemos que enseñar las operaciones con números, es importante discriminar el sentido de las operaciones de sus algoritmos. Es frecuente observar un tratamiento precoz de las técnicas para operar con fracciones antes de que se haya dado oportunidad al alumno de sentir la necesidad de tales técnicas.

Se ha visto que los niños se percatan fácilmente de que las fracciones son números y que, por su naturaleza llenan en parte los huecos que dejan los números enteros en la recta numérica.

Puede, pues, no resultarles claro que, dadas dos fracciones, o bien son equivalentes y representan por lo tanto, el mismo número, o uno de ellos representa un número mayor que la otra.

Las fracciones no solo se utiliza en contextos de medición, relación parte-todo, recta numérica.

Evidentemente también existen otros contextos, por ejemplo, para expresar cocientes, probabilidad de sucesos, composición de operadores naturales. Vemos que su uso no se halla restringido a un solo campo de aplicación, sino que se conecta con varias temáticas. Generalmente partimos de problemas, porque afirmamos, con Gerard Vergnaud, que un concepto adquiere su sentido en función de la multiplicidad de problemas a los cuales responde.

Según sus propias palabras: ¨No sólo en sus aspectos prácticos, sino también en sus aspectos teóricos, el conocimiento surge a través de los problemas a resolver y de las situaciones a dominar. Esto que vale la pena para la historia de las ciencias y tecnologías, también vale para el desarrollo de los instrumentos cognitivos de los niños. También debería ser válido para la educación, especialmente la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los momentos más importantes en el aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria se presenta con la introducción de las fracciones, decimales y la razón. La importancia de este hecho radica en que hay que pensar en la relaciones entre cantidades, en el uso de nuevos sistemas de símbolos para representar dichas relaciones y en la ampliación del sistema de numeración decimal. El inicio del trabajo con las fracciones en primaria es la introducción a un nuevo mundo matemático para los estudiantes que les va a llevar al desarrollo de una manera de pensar sobre las comparaciones relativas que se concretan en las situaciones de proporcionalidad al final de la educación básica primaria y al inicio de la secundaria. La importancia de desarrollar las fracciones, números decimales, porcentajes, razón y proporción de manera relacionada lo constituye el hecho de que forman una estructura que comparte ciertos aspectos matemáticos y psicológicos.

El conjunto de los números racionales constituye el dominio matemático desde el cual el currículum de primaria adapta el contenido matemático. Para el maestro es importante considerar las relaciones entre las características de este dominio matemático y los procesos de construcción del conocimiento de los aprendices. Por lo tanto, es necesario ver el contenido matemático en términos de lo que los aprendices deben saber hacer para construir la estructura conceptual que debemos asociar a los símbolos utilizados.

Por otra parte, la dificultad en la enseñanza-aprendizaje de los números racionales radica en que:

- Están relacionados con diferentes tipos de situaciones, medida, parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto utilizadas como cociente, como índice comparativo usadas como razón y como un operador.
- Puede representarse de varias maneras 4/7 de fracción, fracciones decimales, expresiones decimales, porcentajes.

El dominio de los racionales es por tanto un campo conceptual constituido por un campo de situaciones cuyo dominio progresivo requiere de una variedad de procedimientos, de conceptos y de sus representaciones simbólicas que están en estrecha conexión.

Un número racional a/b tiene muchas interpretaciones, lo que determina como objetivo de enseñanza que los estudiantes lleguen a dotar de significado a las diferentes interpretaciones, pero también establecer relaciones entre ellas. Cuatro son las interpretaciones que se pueden emplear: medida, reparto, operador y razón.

- Medida: relación entre una parte y un todo. Las situaciones que configuran esta interpretación del número racional implica situaciones de medida y por lo tanto consideran un todo dividido en partes. El racional indica la relación entre la parte y el todo.

El desarrollo de la idea de unidad se pone de manifiesto en las tareas que consisten en reconstruir la unidad dada la representación de la parte.

La otra idea importante en la interpretación de medida es la noción de parte equivalente. En este sentido, la parte puede estar subdividida en otras partes.

El tamaño de (la cantidad) una subparte dependen del número de partes que se realicen.

La manera en la que pensemos sobre la unidad y la parte nos proporcionará representaciones simbólicas diferentes, lo más importante en este tipo de actividades es el proceso a través del cual los alumnos hacen el reparto.

Por otra parte, la idea de división está intrínsecamente vinculada a la idea de número racional. Como hemos visto las fracciones se forman mediante divisiones. Las fracciones decimales se forman con divisiones en 10 partes de la unidad, y realizando divisiones sucesivas. En este caso, situar un número racional en la recta numérica depende de la división de la unidad en partes iguales.

El conocimiento informal de los estudiantes descansa en el uso de representaciones (internas y externas) junto con instrumentos cognitivos, como son la noción de unidad, y repartos equivalentes, y el uso de del lenguaje.

Junto con la idea de todo y reparto equitativo los alumnos utilizan la idea de contar como un mecanismo constructivo con lo que subraya el papel que pueden desempeñar las fracciones unitarias en el proceso de construcción del significado de números racionales.

De acuerdo con la historia de las matemáticas, en las actividades del hombre, además de contar objetos era necesario medirlos, por ejemplo qué tamaño tiene una cuerda o qué cantidad de agua tiene un recipiente. Es evidente que para dar solución a cualquiera de estos problemas es necesario partir de un patrón, por ejemplo un metro para la longitud de la cuerda o un litro para la cantidad del recipiente. Una vez detectado ese patrón existe miles de patrones que caben en el objeto a medir y es claro que el número de veces que este patrón cabe en dicho objeto no será exacto, sobrará una parte que no alcance a medir el metro o el litro, sino una fracción de éstos es decir, se hace necesario recurrir a números no enteros que pertenecen a una parte de enteros y se llaman los racionales.

Los niños pequeños pueden saber de medios de galón y cuartos de galón o sobre litro y medios litros. En los países en los que usa el sistema métrico decimal, las longitudes fraccionarias son fáciles de manejar, pero el mismo niño que sabe cuánta leche hay cuando se convierte medio litro en una vasija y después se vierte un litro de leche más se encuentra desconcertado con el jeroglífico ½ + ¼ , tenemos que el haber saltado tan rápidamente al sistema simbólico sin haber construido el sistema conceptual apropiado, este es uno de los obstáculos que se encuentra en la matemática general, si el niño no ha construido el concepto de número racional apropiado, la pregunta no puede resolverse al nivel simbólico pues en el nivel racional los fraccionarios no tienen denominadores ni numeradores.

Kieren (1993) identifica cuatro formas de conocer los contenidos matemáticos relativos a los números racionales.

- Conocimiento etnomatemático, que es el que poseen los estudiantes, derivado de las situaciones en las que normalmente viven. Por ejemplo, su conocimiento de repartos equitativos, partes en las que se reparte una pizza.
- Conocimiento intuitivo, que supone el uso de instrumentos cognitivos, representaciones y el uso informal del lenguaje.
- Conocimiento técnico-simbólico es el que resulta de trabajar con expresiones simbólicas los números racionales.
- Conocimiento axiomático-deductivo, corresponde al conocimiento de la estructura matemática.

Siguiendo lo planteado en el texto, que significa conocer el número racional, ¿Qué es lo que hace que una persona pueda conocer funcionalmente el número racional?

El término concepto matemático puede referirse a un objeto matemático o a una clase de objetos matemáticos; pero también está asociado a una definición formal. Para el caso de los números racionales en un número que satisface la condición ax=b en donde a y b son diferentes a 0.

El número racional puede significar un amplio número de cosas, según Wagner (1976) este concepto sugiere un mega concepto que entreteje varias ramas.

Los números racionales son fundamentales en la **medida** de cantidades continuas, también implica la **división** de cantidades continuas o también como la **comparación** entre dos cantidades (razón).

En cuanto al constructo de número racional, su conocimiento implica el control sobre dos dimensiones simbólicas en varias formas (fracciones y decimales), que implica también el conocimiento de algoritmos convencionales, la conexión con otros números naturales y particularmente con los números reales.

Se sostiene además que en las matemáticas escolares se trabaja ampliamente en la construcción de números naturales, pero también puede construir este conocimiento, al trabajar situaciones de cantidades discretas, tales como mayor que, menor que, de tal manera que genera mecanismos de conteo que puede ayudar a ser mas extensiva el control sobre el conteo de cantidades discretas.

Sin embargo la experiencia con los números racionales y el conteo de cantidades discontinuas es mucho más limitada, hay un pequeño contacto con la fracción en palabras como mitad, tercio, cuarto y porcentaje, pero el desarrollo de estos procesos y mecanismos se hace a través de tareas más complejas a lograr. *Además el conocimiento del número racional es uno de los incluidos que uno de los números naturales*.

Según Ohlsson, que parte del análisis de Kieren (1980), hace la siguiente clasificación:

- Los números racionales son fracciones que pueden ser comparadas, adicionadas o sustraídas.

- Los números racionales son fracciones decimales como una extensión natural de los números enteros.

- Los números racionales son clases de equivalencia de fracciones.

- Son números de la forma p/q, donde p y q son diferentes a 0.

- Son operadores multiplicativos (agrandadores y achicadores)

- Son elementos de un número infinito ordenado del campo cociente. Ellos son números de la forma $x = p/q$ donde x satisface la ecuación $qx = p$.

- Son medidas o puntos de la recta numérica.

Posteriormente, Behr, Lest, Post and Silver (1983) proponen 7 interpretaciones que llaman subconstructos de fracción:

- El subconstructo medida de la fracción que Behr (1983) propone como una reformulación del concepto parte – todo.

- El subconstructo razón (ratio). (comparación entre dos cantidades)

- El subconstructo razón (rate) que se define como una nueva cantidad que establece una relación entre otras dos cantidades.

- El subconstructo cociente, que supone el número racional como el resultado de una división.

- El subconstructo *coordinate linear,* que interpreta el numero racional como un punto en la recta numérica.

- El subconstructo decimal asociado con el sistema de numeración decimal.

- El subconstructo operador, que mira la fracción como una transformación.

Un tercer análisis del concepto de fracción ha sido propuesto por Nescher (1985), quien establece relación entre los siguientes conceptos:

- La fracción es una descripción de la relación parte – todo, es la descripción de una partición de un objeto en partes, la idea de un todo es una característica básica en esta representación.
- Es el resultado de una división entre dos números enteros.
- El número racional como *ratio,* implica una comparación entre dos cantidades.
- Como operador reconoce que actúa sobre la cantidad y cambia la cantidad.
- El numero racional como probabilidad.

Nescher (1985) reconoce parte – todo, división y razón como los esquemas conceptuales en el pensamiento acerca de las fracciones.

El análisis realizado por Kieren (1975, 1980), Behr (1983) y Nescher (1985) representan un considerable progreso en torno al conocimiento de la fracción. Coinciden en reconocer que cociente, operador, razón y algunas versiones de la relación parte – todo son conceptos centrales, pero difieren con respecto al objeto de análisis, pues en algunos casos son los números racionales y en otros son las fracciones, al igual que los criterios de análisis no han sido especificados.

Los números racionales son una estructura conceptual de una riqueza y complejidad que encuentran aplicabilidad en una gran cantidad de contextos: la ciencia, la técnica, el arte y la vida cotidiana. En cada uno de estos contextos, los números racionales se representan con una cantidad de representaciones.

Linares (2003, 1988) considera que el dominio de los números racionales es por tanto un campo conceptual constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones simbólicas que se encuentran en una estrecha relación (Vernaug).

Kieren, citado por Vasco (1994), dice que la expresión simbólica a/b puede modelar cuatro ideas matemáticas o significados: Medida, cociente, operador multiplicativo y razón. Agrega un quinto significado: La relación parte – todo, pero señala que este se puede encontrar en los cuatro significados, al identificar en cada contexto la unidad y sus partes correspondiente. De allí la importancia de trabajarlos de manera relacionada en la actividad matemática desarrollada en el aula, pues comparten aspectos matemáticos y psicológicos.

4.5 La enseñanza del número racional

El trabajo escolar en el número racional inicia con el estudio de las fracciones, a través de estrategias metodológicas y conceptuales centradas en la particiones y el conteo, y en la mecanización de reglas y algoritmos; en consecuencia, en el proceso de conceptualización de las fracciones, la medición ni es el eje central ni hay un tratamiento cuidadoso del tipo de magnitud y del tipo de unidad. Estos elementos son fuentes de dificultades en los procesos de conceptualización de los estudiantes.

Al poner la atención en actividades de partir y contar, los estudiantes centran el proceso de conceptualización en el número natural y no en la fracción como tal.

En efecto, al centrar la atención en el número de partes que representa el numerador y el denominador y no en la relación cuantitativa entre las cantidades de magnitud de la parte y el todo, se piensa en la fracción como 2 números naturales separados por una rayita y no como una relación de parte y todo.

Pero además, como el proceso de partición no se basa en la medida de la magnitud que se desea repartir, entonces debe realizarse a partir de procesos visuales que privilegian la congruencia geométrica entre las partes para garantizar su igualdad.

Otra consecuencia de que las actividades no pongan énfasis en la medición sino en el conteo, es precisamente que la noción de equivalencia entre fracciones queda significada en la congruencia de las partes en que se ha dividido cada unidad, lo cual constituye un significado muy débil, por demás basado en la percepción y no en las relaciones numéricas.

Luego, el trabajo centrado en las particiones y el conteo hace que el proceso de conceptualizar fracciones impropias sea de difícil comprensión para los estudiantes.

¨Si el denominador representa las cantidades en que divido la unidad y el numerador las partes que se toman¨. Entonces ¿cómo tomar una cantidad de partes que sea mayor de las que se obtuvieron al dividir la unidad?

En los procesos de enseñanza desarrollados en la escuela, muchas veces no se da un tratamiento cuidadoso del tipo de unidad ni del tipo de magnitud, lo que lleva a que se propongan de manera indiscriminada actividades en contextos de colecciones o de magnitudes continuas, desconociendo que los procesos de conceptualización en los niños son distintos en uno u otro contexto.

La fracción, como relación parte todo, puede ser definida como otra cantidad que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad de magnitud tomada como el todo y otra magnitud tomada como parte. Pensar en la fracción en el sentido antes denotado implica, fundamentalmente, la realización de procesos de medición para establecer la cuantificación de la parte y el todo, y por consiguiente la relación cuantitativa entre ambos. Igualmente, obliga a explicitar la magnitud sobre la cual se debe realizar la cuantificación. Hay en este sentido una diferencia importante entre la forma usual, ya que en ellos la medición no es un aspecto fundamental en el proceso de conceptualizar la fracción.

Otra forma de interpretar la fracción es como una razón entre dos cantidades. Claro está que no se trata de cualquier tipo de razón sino de la razón entre dos cantidades que puede ser interpretada como relación parte todo sólo cuando una es parte de la otra, o cuando sin estar una contenida en la otra, se miden en la misma unidad de medida.

Es importante destacar que al admitir como una posible interpretación de la razón la relación parte todo, ésta es sólo eso, una posible interpretación para una familia de razones, y que si se requiere que el alumno conceptualice esta familia como razones, se debe hacer que él se movilice desde esta primera interpretación (relación parte todo), a una significación de la razón más cercana a sus propiedades matemáticas.

La medida como acto de ¨medir¨ es importante en el proceso de conceptualizar los números racionales, pues de ella se derivan las fracciones, cuando lo que se mide no es múltiplo entero de veces la unidad patrón de medida usada. También como resultado de la comparación de dos mediciones puede surgir una razón.

Pero la medición con respecto a los números racionales merece ser estudiada en detalle, no sólo porque sea utilizada en la solución de numerosos problemas relacionados con éstos, sino también porque los sistemas de medidas tienen características que le dan identidad. En efecto, a simple vista se puede pensar que al realizar una medición se establece una relación parte todo, pero las características de los sistemas de medidas, y por consiguiente, la interpretación del resultado de la medición, la diferencian de la relación parte todo, aunque pueden confundirse fácilmente.

Como habrá podido notarse del análisis anterior, no hay límites claros entre cada una de las interpretaciones de la fracción, lo cual no quita que desde cada una se aporten elementos específicos en la conceptualización de los números racionales. Esta situación lo que pone de manifiesto es la necesidad de trabajar con todas ellas de una manera sistemática, de tal suerte que se aprovechen los puntos de contacto para crear en los estudiantes un cuerpo de conocimientos integrado entre sí, y potentes en cuanto a las posibilidades de su utilización en otro campos.

Ahora bien, se puede pensar en dos ejes fundamentales sobre los cuales organizar la enseñanza de los números racionales: desde la relación parte – todo y desde el operador fraccionario. El primero favorece las situaciones aditivas mientras que el segundo las situaciones multiplicativas. Sobre ambos ejes se pueden sustentar trabajos en las demás interpretaciones, incluida la familia de las razones, para así rescatar las posibilidades que cada de una de ellas ofrece en cuanto a la conceptualización de las fracciones y, en última instancia de los números racionales.

4.6 Las representaciones semióticas y el aprendizaje del número racional

El aprendizaje y la representación son dos funciones cognitivas estrechamente relacionadas, de acuerdo con Pozo (2005), ¨Aprender es adquirir y modificar representaciones sobre el mundo tanto interno como externo¨.

El concepto de representaciones ha tomado diversas interpretaciones en el enfoque filosófico y psicológico al cual se suscribe. A continuación, se hace un esbozo general del concepto, teniendo en cuenta que la pretensión de la autora se ubica en el concepto de representaciones semióticas.

Una primera postura es la de Piaget, que plantea la noción de representación como evocación de los objetos ausentes, es una oposición entre el plano de la acción y el de la representación. En su libro la formación del símbolo en el niño (1959), intenta establecer el puente entre la actividad sensorio-motora precedente a la representación según su teoría y las formas operatorias del pensamiento. La representación deriva de la imitación misma, pero, la imitación no constituye sino una de las fuentes de la representación, a la cual aporta sus significantes imaginados.

Desde esta postura Piagetiana se considera el juego como un conducto de la acción a la representación, en la medida en la que evoluciona en su forma inicial de ejercicio sensorio-motor a su forma secundaria de juego simbólico o juego de imaginación. Se puede pensar que el pensamiento lógico matemático sobre el cual centra la construcción del conocimiento matemático, asume este concepto.

Sobre el terreno del juego y la imitación, se puede seguir de una manera continua el paso de la asimilación y de la acomodación y de la acomodación sensorio-motora a la asimilación y acomodación mentales que caracterizan los comienzos de la representación. Ésta comienza cuando simultáneamente hay diferenciación y coordinación entre significantes y significados.

Al hablar de representación, según Piaget (1959), se debe pensar en la reunión de un significador que permite la evocación de un significado procurado por el pensamiento. La institución colectiva del lenguaje es el factor principal de formación y socialización de las representaciones.

En esta perspectiva, se propone que representaciones son consideradas como una forma de evocación de lo real, es decir, no es posible establecer otras formas representacionales que no estén estrechamente ligadas a un objeto susceptible de manipulación por parte del sujeto. De allí la insistencia en considerar la imagen como la única forma de elaborar las representaciones, reduciendo la riqueza que poseen las múltiples formas representacionales.

Para Perner (1994), la representación tiene un carácter nodal, donde interactúan el medio y el contenido. El medio es la imagen expresión de la simbolización y el contenido es de lo que da cuenta a través del medio representacional.

En esta misma posición, Manuel de Vega (1984) reconoce la representación interna o computacional, y propone una hipótesis dual de representación bajo dos formatos, uno proposicional y otro de imágenes. De acuerdo con el paradigma del procesamiento de la información, concibe las representaciones como una analogía entre el procesamiento en paralelo y el procesamiento serial. En el caso de los conceptos matemáticos, este autor excluye otros formatos representacionales como es el caso de los tabulares y gráficas.

Perner (1994) define que las representaciones se construyen en la relación entre el medio y el contenido y esta relación puede darse a partir de funciones literales con el contenido. Propone tres tipos de representaciones, de acuerdo con la correspondencia posible con el contenido pueden ser: primarias, secundarias o meta representaciones intrínsecas del sujeto.

Ambos autores, ubicados en la ciencia cognitiva dura, asume un paralelismo entre la mente y el ordenador, no reconocen en el sujeto sino dos formas representacionales, la imagen y las proposiciones, reduciendo los sistemas cognitivos a sistemas de cómputo, que codifican la información.

Tanto en Perner (1994) como en Manuel de Vega (1984), el concepto de representación da cuenta de una relación unidireccional entre el medio y el contenido representacional, asumiendo que no es posible pensar en una posible reelaboración permanente de las representaciones en la mente del sujeto, pues este es un fenómeno cognitivo que sólo se produce desde lo interno a lo externo.

Para Bruner (1964), el sujeto transforma la información que llega del medio externo a través de tres sistemas de información: innata, icónica y simbólica. El concepto de representación de Bruner da cuenta de los medios con los cuales se evidencian las representaciones internas, que se relacionan entre sí evolutivamente y por consiguiente deben enseñarse en este mismo orden. Es decir, los conceptos en el aula deben presentarse inicialmente de forma enactiva posteriormente icónica y finalmente simbólica.

Resnick(1990), por su parte, aborda el concepto de las representaciones adoptado por Bruner, en la enseñanza de la matemática, donde cobra especial importancia el reconocimiento de la manera como representan los niños los conceptos y las ideas, y para ello retoma lo planteado por este autor, partiendo de la existencia de tres modos de representación: enactiva que se expresa a través de una respuesta motriz, que para el caso de las matemáticas puede considerarse el contar con los dedos, por ejemplo, la icónica que sucede cuando se imagina una operación o manipulación abreviando los sucesos y la representación simbólica que se manifiesta en la escritura de operaciones matemáticas.

En los planteamientos de Bruner ya se asumen al menos tres registros representacionales, entendidos como formas de procesar la información, pero ubicada en una postura evolutiva Piagetiana, al considerar que las representaciones simbólicas son formas representacionales más elaboradas que la enactiva y la icónica.

Desde otra postura teórica, el concepto de representación mental tomado de Jhonson- Laird (1983) asume que tres formas en las que es posible codificar y representar mentalmente la información: los modelos mentales, las proposiciones y las imágenes, y sirven para comprender y explicar los fenómenos y anticipar y predecir sus comportamientos.

La idea de modelos mentales se inserta en una de las suposiciones básicas una especie de postulado de la psicología contemporánea, que es la de considerar que los seres humanos no captan el mundo directamente, sino que lo representan inter y mentalmente. Para este estudio, los modelos mentales concebidos por Jhonson Laird, reconoce que hay una diferencia entre el lenguaje de la mente y el lenguaje propiamente dicho, lo que establece una diferenciación entre las representaciones internas y las representaciones externas, además reconoce que cuando el sujeto elabora las representaciones reconoce otros aspectos motivacionales, afectivos y situacionales, lo que enriquece los componentes del modelo, que para el caso de los demás autores mencionados, la elaboración de las representaciones se reduce a una forma de procesar información.

Finalmente, surge un planteamiento en el estudio de las representaciones, de acuerdo con Duval (1999), fundamento en dos oposiciones clásicas que son la oposición interna y externa y la oposición consciente y no consciente, como consecuencia del estudio de las representaciones. Para el caso del aprendizaje de las matemáticas, las representaciones semióticas serán consideradas representaciones externas, aquellas que han sido objetivadas y son compartidas por otros sujetos y se consideran conscientes porque cumplen con una función intencional de comunicación.

El concepto de representación semiótica (Duval, 1999, 2006), obedece a un sistema particular de signos que pueden ser convertidos en representaciones análogas en otro sistema semiótico. Además, son consideradas representaciones externas y conscientes. Las representaciones semióticas cumplen la función de comunicación y de objetivación, además, cumplen con la función de tratamiento, es decir, de utilización práctica en un sistema semiótico.

Se reconoce, por otra parte, el carácter mediador de las representaciones semióticas en la construcción de los objetos matemáticos, pues éstas permiten ponerse en el lugar de dichos objetos y aportan a la conceptualización por parte del sujeto.

Hay tres actividades cognitivas fundamentales de la semiosis: La formación de las representaciones, el tratamiento de las representaciones cuando la transformación se produce en el mismo registro semiótico y la conversión de las representaciones, cuando se produce en un registro distinto. Estas dos últimas actividades están ligadas a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas y es su posibilidad de transformarse en otras representaciones conservando el contenido o parte del contenido inicial.

Las representaciones semióticas no tienen significado en sí mismas, pues el significado es producido por el estudiante cuando se establece una mediación apropiada a partir de los contextos de referencia. Esta mediación es determinada por las condiciones epistemológicas del conocimiento matemático y está en la base de los objetos matemáticos.

En la medida en que los procesos de tratamiento y conversión de los registros semióticos son procesos conscientes (Duval, 1999), permiten procesos de retención y selección.

5. TIPO DE ESTUDIO

De acuerdo con las diversas tendencias de investigación en educación matemática, este estudio se inscribe en un tipo de investigación cualitativa, pues está orientada a reconocer las representaciones semióticas que poseen los estudiantes acerca del número racional, antes de acceder a su enseñanza formal.

Sin embargo, las investigaciones actuales pueden catalogarse en puntos intermedios tanto del sistema positivista como del interpretativo, aspecto que no es ajeno a este estudio, pues es posible asumir dos momentos del proceso, antes de iniciar el momento de exploración de las representaciones semióticas empleadas por los estudiantes y un momento posterior que podría considerarse al final de la exploración.

De acuerdo con los objetivos planteados y con los supuestos que fundamentan el estudio, para determinar el aprendizaje del concepto de número racional, es necesario registrar las representaciones semióticas que emplean los niños al proponerles algunas situaciones que les demanda el uso de este campo numérico.

Sin embargo, la disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, su tratamiento como parte indispensable en la génesis y desarrollo de los objetos matemáticos no es espontánea. Para hacerla evidente, es necesario provocar el uso intencionado de diversos registros de representación, poniendo en situación a los estudiantes, de tal manera que se evidencie el tratamiento que hace de ellos dependiendo del contexto y de las situaciones a que se enfrenta.

Para el análisis de las representaciones semióticas del número racional, es necesario reconocer e interpretar la variedad de representaciones que se ponen en juego, consideradas como sistemas de representación externos, que serán incorporados en un sistema de prácticas operativas y discusivas globales, que se construyen a partir de situaciones problema y de las acciones requeridas para su solución en un contexto institucional dado.

5.1 Diseño metodológico

De acuerdo con las características de las investigaciones cualitativas, y por la naturaleza de este estudio de corte exploratorio, los momentos del estudio fueron los siguientes:

El diseño, al igual que la selección de la unidad de trabajo, la recolección de datos y el análisis va surgiendo desde el planteamiento mismo del problema, en este caso, se hizo una exploración previa que sirvió como pilotaje de los instrumentos, el aplicar un taller a estudiantes de primero, segundo, tercero y cuarto grado de básica primaria, para finalmente profundizar en los datos obtenidos por los estudiantes de tercer grado.

Los diseños cualitativos se enmarcan en los marcos interpretativos debido a la necesidad de hacer inferencias a partir de los datos obtenidos, en este caso, se reconoce que después de explorar a partir de talleres y de actividades de clase las nociones y concepciones que poseen los niños en torno al concepto de número racional, se pudieron identificar algunas representaciones semióticas empleadas por ellos, pues en todo momento de las actividades realizadas se les pedía que expresaran en forma verbal, escrita y gráfica la manera de representar las cantidades obtenidas.

5.2 Procedimiento

El estudio tuvo en cuenta los siguientes momentos:

1. Primer momento de selección de la unidad de análisis, ya que era necesario determinar con que grupo escolar se iba a trabajar, pues era necesario que cumpliera con los siguientes criterios:

- Que tuvieran un nivel escolar que les permitiera leer y escribir correctamente con el fin de poder evidenciar que tipo de representaciones semióticas emplean.

- Que no hubieran accedido al concepto de fracción que es el primero que se incluye en la enseñanza de los racionales, para poder determinar cómo lo incorporan en su discurso y sobre todo en la solución de problemas que llevaran consigo acciones como repartir.

2. Realización de talleres con los niños a partir de dos actividades de clase: la primera, fue las pruebas de exploración de representaciones, en donde se indagó la relación parte – todo, se les propuso algunas acciones de repartición. Posterior a ello se realizó un taller en donde se les presentaba a los niños de tercero algunas láminas o figuras que simulaban objetos repartidos o se realizaba la acción de repartir, con el fin de que los niños expresaran verbalmente y a través de dibujos lo que interpretaban o de qué manera expresaban las cantidades obtenidas.

3. El tercer momento, corresponde al análisis propiamente dicho, en donde en primera instancia se hizo un análisis literal de los hallazgos en los tres grupos iniciales con los

cuales se trabajó para luego profundizar en el análisis de la actividad realizada en el grado tercero.

5.3 Técnicas e instrumentos

Para la recolección de información se emplearon tres instrumentos: un taller y dos actividades realizadas en el aula de clase

1. El taller pretendía recoger las representaciones que poseen los niños en torno a la relación parte – todo. (Ver anexo A)

2. Las actividades realizadas en las clases, proponían algunas situaciones con el fin de identificar las posibles representaciones empleadas por los niños, así como la presentación de algunas representaciones semióticas.

6. ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

De acuerdo con los momentos del proceso investigativo, se hizo un análisis descriptivo de los observado en el primer taller desarrollado con los niños de primero, segundo, tercero y cuarto de básica primaria, con miras a identificar las posibles representaciones que empleaban los niños pero especialmente para evidenciar las posibles representaciones semióticas.

Las representaciones semióticas se convierten en un aspecto fundamental en la enseñanza matemática, debido a que el objeto matemático si se considera posible de ser representado debe estar compuesto por su representación y el contenido de la misma. De acuerdo con Castro, Rico y Romero (1997) "*el conjunto de signos, símbolos y reglas para expresar una estructura matemática han de responder a su carácter sistémico, por ello se habla de sistemas matemáticos de signos (*Kieran y Filloy, 1989*), sistemas de notación (*Kaput, 1992*) o sistemas semióticos (*Duval, 1999*);* que para este estudio nos permite referirnos a aquellos signos que son representaciones externas, son conscientes por parte del sujeto y pueden ser compartidas por un colectivo de estudiantes.

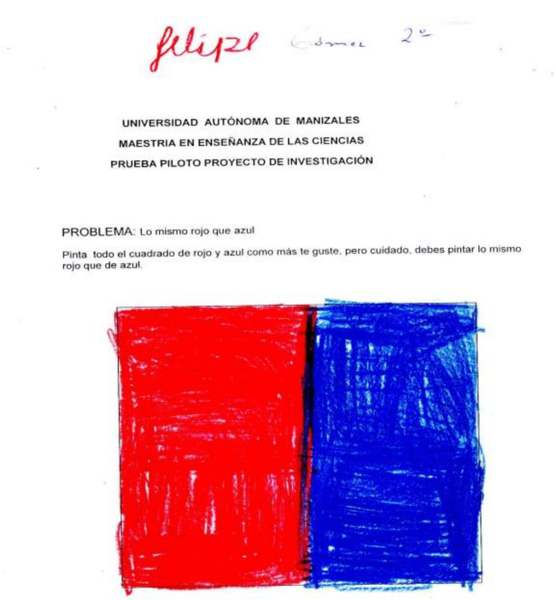


Ilustración 1 Problema

a. En cuanto a la relación parte - todo

En este sentido la fracción como relación parte–todo es interpretada como un número que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad tomada como unidad (todo) y otra cantidad tomada como parte.

Frente a la pregunta “Pinta esta pared lo mismo azul que rojo”, los niños realizan las siguientes acciones:

Dividen el cuadrado en dos partes y sombrea una de azul y otra de rojo.

Realiza varios cuadrados azules y rojos dentro del cuadrado.

Divide el cuadrado en cuatro partes no equivalentes de las cuales 2 son rojas y 2 son azules.

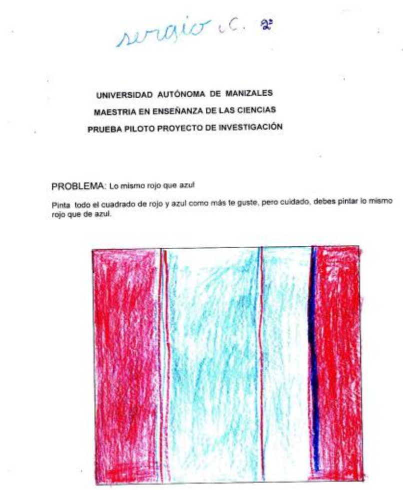
Tal como se evidencia en la siguiente imagen:

En este primer caso, el niño logra identificar que dividir el cuadrado en dos partes indica dividirlo a la mitad y pintar una parte roja y otra azul.

La noción parte – todo es la relación de una unidad o un todo con sus partes, teniendo como condición su división en partes iguales. Cuando una totalidad se divide en varias partes iguales, a la relación multiplicativa existente entre la magnitud de cada una de estas partes y la magnitud de la totalidad se suele llamar “fracción” de la magnitud total.

En el instrumento diseñado, Se enfrentó en primera instancia a los estudiantes a la necesidad de partir, distribuir, teniendo como condición “*en partes iguales”*, aunque explícitamente no se propone dividir en partes iguales, si se les dice que hay que pintar igual cantidad de azul que de rojo.

Ilustración 2 Problema UAM



Otro niño ante la misma instrucción realiza lo siguiente:

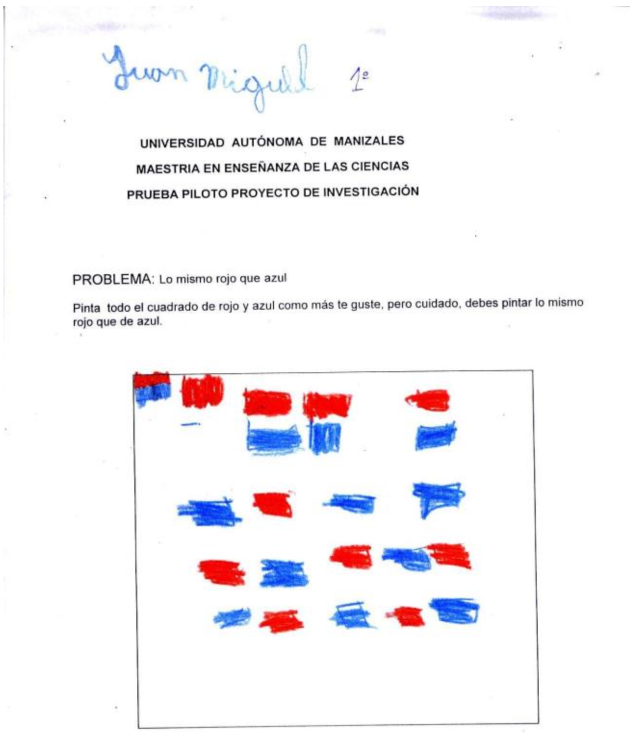
Divide la figura en 4 partes y dos de ellas las pinta de rojo, y las otras dos las colorea de azul; continúa manteniendo el concepto de igualdad, que para él significa pintar la misma cantidad de azul que de rojo, tal como se le dijo en la instrucción.

En las dos ocasiones anteriores, ambos estudiantes hacen particiones y logran agotar el todo, en este caso del cuadrado.

Se nota además que aunque en la instrucción no se dice en cuántas partes hay que dividir el todo, los niños en el primer caso lo parten en dos y en el segundo en cuatro partes.

Hay una acción concreta de partir objetos en “partes iguales”, pero esta acción no lleva a la utilización de operadores matemáticos porque no se considera la magnitud como aquello que hay que partir, sino que es un todo, que tiene una forma y es ella la que se hace necesario partir.

Ilustración 3 Problema Juan Miguel



En esta acción de dividir un todo en partes, tal como se les propone en el ejercicio, otro estudiante realiza lo siguiente:

Hace pequeñas divisiones en el todo, en este caso del cuadrado, pintando en lo posible igual número de partes azules que de rojas, pero no se agota el todo, como en las dos anteriores.

Se nota además que el niño, no reconoce el número de partes en las que hay que dividir el todo, sino que pretende "rellenar" el todo con igual cantidad de manchas azules que rojas. En este sentido, también se reconoce que el niño, se centra en la parte, para llegar al todo.

El concepto de fracción surge de la necesidad de dividir la unidad, pues históricamente los babilonios y los egipcios fraccionaban la unidad según sus sistemas de numeración, reconociendo la infinitud de veces en que la unidad puede ser "partida". Chamorro (2003).

Además de asumir que el todo se puede dividir en cualquier número de partes, los estudiantes también reconocen que mientras haya más partes en que tenga que dividir, estas serán más pequeñas, tal como se evidencia en la imagen anterior, en donde las porciones pintadas de azul y de rojo son más pequeñas en comparación con las dos imágenes anteriores en donde la unidad se divide en dos y en cuatro partes respectivamente.

b. Con respecto a la relación de la parte al todo

Se propone la siguiente situación: *Rodrigo, Ramiro, Sebastián y Matías comen galletitas. Cada uno me dio ½ galleta. ¿Cuántas tengo?*

Los niños responden "cuatro".

Lo anterior significa que los niños identifican el todo, como el número de sujetos que se encuentran comiendo galletas, por lo tanto asumen que hay 4 galletas y siguen manteniendo el todo, aun cuando se hayan dividido (media galleta) para compartirlas con él.

En este caso y de acuerdo con Valdemoros (2004), hay un centramiento en el todo, porque reconoce una parte, en este caso media galleta como un todo.

En otra situación propuesta:

Cuatro niños van a comer 3 galletas, ayúdales a repartir de tal forma que a todos les toque la misma cantidad.

La respuesta de los niños fue la siguiente:

"A cada uno le toca de a 3 pedazos"

Tal como ocurre con la situación anterior, el todo se asume como el número de galletas y esa misma cantidad es la que se reparte, aún cuando se siguen considerando que son porciones.

La relación parte – todo, también es la expresión del resultado de repartir equitativamente determinada cantidad de unidades entre cierto número de personas, en donde intervienen la cantidad a repartir y el número de personas a quien se va a repartir.

La ordinalidad como noción presente en la construcción del concepto de número, entra en conflicto al hablar de los números racionales, por no ser en palabras de Vasco, *"números de contar"*.

Veamos las siguientes situaciones planteadas:

Repartir 3 turrones entre 5 niños. ¿Cuánto le tocará a cada niño si queremos que todos reciban lo mismo?

5÷3 =5 hay que partirlos en pedacitos y a cada uno le toca 3 pedacitos.

Se sigue considerando el todo como la cantidad de personas, en este caso niños a los cuales hay que repartir y se recurre a la división como repartición en cantidades iguales.

También responden así:

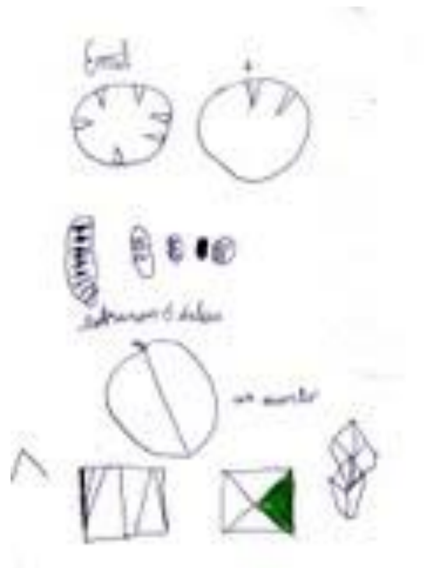
"5/3 a cada uno le daría un turrón y sobraría uno".

En este caso, el estudiante recurre a la repartición como cociente, pero no agota el todo en la repartición, al considerar que sobraría uno.

Cuando se les propone a los niños en una actividad de clase, varias acciones relacionadas con la relación parte – todo, se presentan las siguientes representaciones en los estudiantes:

"Se pide a los estudiantes que dibujen una pizza dividida en 8 partes y luego se coman 2 pedazos".

Ilustración 4 Pizza



Al respecto el estudiante 1 realiza lo siguiente:

El niño, reconoce una unidad en este caso la pizza y en ella representa 6 pedazos, pero en esa partición no agota el todo.

Otro de los aspectos importantes en el desarrollo de las nociones asociadas al proceso de partición es la comprensión de la relación entre el tamaño y la forma de la unidad y el número necesario para dividirla esto quiere decir que cuanto menor sea la unidad de medida, tantas más veces será preciso repetirla, hasta "cubrirla" toda.

La constitución de la unidad o magnitud es en primera instancia está ligada a lo visual, de acuerdo con la forma del objeto sobre el cual se está repartiendo, lo que nos lleva a corroborar lo que reiterativamente se ha dicho, la partición se asume por la forma del objeto a dividir y no por su magnitud.

Hay una acción concreta de partir objetos en “partes iguales”, pero esta acción no lleva a la utilización de operadores matemáticos porque no se considera la magnitud como aquello que hay que partir, sino que es un todo, que tiene una forma y es ella la que se hace necesario partir.

Ilustración 5 Partición Pizza

En el caso del estudiante 2, realiza lo siguiente:

El niño hace una partición exacta de la forma circular que simula una pizza en 8 partes iguales y sombrea 3 porciones.

El estudiante 3 realiza lo siguiente:

Además de hacer la partición extrae de la figura que simula la pizza las dos porciones que se le están pidiendo.

De acuerdo con Vasco (1994), la partición física y la selección de la unidad no es lo mismo que la partición matemática, en la partición física no se tiene en cuenta la magnitud que es la que se parte o divide, en tanto al realizar la acción matemática, si se tiene en cuenta la magnitud, como el largo, el área o la masa.

Ilustración 6 Partición Física

7. CONCLUSIONES

- Es de gran importancia formar en los niños desde la edad temprana la noción de parte-todo, ya que esta les permite tener bases que les facilita asimilar de una manera más significativa los nuevos objetos matemáticos.

- Cuando se indaga por la relación parte-todo, se nota en los niños que tienen una idea intuitiva del concepto de razón, de la cual se puede partir para acomodar allí los demás conceptos que subyacen al mismo.

- El maestro debe aprender a conocer muy bien los pre saberes de los niños, para así saber por dónde iniciar el proceso de enseñanza de las representaciones de mitades y cuartos, los cuales deben orientarse antes de las divisiones en partes iguales y desiguales.

- Es de gran utilidad emplear material concreto para la enseñanza de los racionales que le permitan al niño manipular y tener una experiencia más cercana con el concepto, de igual manera el docente debe tener un amplio conocimiento de este objeto matemático y su adecuada representación, para evitar caer en impedimentos mentales en los estudiantes.

8. RECOMENDACIONES

- La relación parte- todo hace parte de la concepción de número mucho antes de su enseñanza formal, lo que implica que debe avanzarse en la partición desde el grado preescolar en donde se inicia el proceso de acomodación y asimilación del conocimiento.

- Se debe explorar y analizar el orden que debe seguir el docente en la introducción de las representaciones semióticas en el momento de su enseñanza formal para evitar bloqueos o impedimentos mentales.

- Es de gran importancia trascender la partición con los niños, hasta que se supere la partición desde la forma y se explore más desde la medida como magnitud.

- El gran reto que tienen los docentes, es el de apropiarse de las matemáticas desde su parte epistemológica y didáctica y así poder generar en los niños un verdadero aprendizaje significativo, construyendo secuencias didácticas que propicien en ellos el aprendizaje de los diferentes significados y los lleve a uso más real de los significantes.

Nota: El mundo de los números racionales es muy amplio y vale la pena seguir explorando los interrogantes que se nos presentan al observar las nociones y representaciones de los estudiantes. Por eso, para otras investigaciones que bueno tener en cuenta:

¿Por qué los niños al representar las fracciones no llenan el todo?

¿Por qué en ocasiones el material empleado para la enseñanza se puede convertir en un impedimento para el aprendizaje significativo de las fracciones?

9. BIBLIOGRAFÍA

Beher, Merlín Y Leser, Thomas. (1993). *Ideas los números racionales y el rol de los sistemas representativos¨, en trabajo sobre la enseñanza de las fracciones*. Matemática Educativa, I.P.N. México.

Cortes Salazar, Héctor Manuel & Pérez Duarte, Luis F. (S.F) *Algunas dificultades en la comprensión y aplicación del concepto de número fraccionario.* Fundación Universitaria Panamericana. Colombia.

D¨ Amore, Bruno. (2006). *Objetos, significados y representaciones semióticas y sentido.* En Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa. (pág. 177-195).

Dickson, L. Brown, M. & Gibson, O.(1991). E*l aprendizaje de las matemáticas*. Labor.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Editorial Universidad Del Valle Colombia.

Hernández Sampieri, Roberto, Et. Al (1999). *Metodología de la investigación*. 2 edición. Mac Graw Hill. Interamericana. México.

Kieren, Thomas. E. (1980). *Recent research on number learning. En: Eric. Clearinghouse for science, mathematics and environmental education*. Colombus, Ohio. (page. 2- 175).

Llinares, S. & Sánchez, M.A. (1988*). Fracciones*. Síntesis. Madrid.

Llinares, S. (2003*). Fracciones, decimales y razón: desde la relación parte todo al razonamiento proporcional*. En Cap.7 Didáctica De Las Matemáticas. Chamorro, M. Prentice Hall. Madrid. (pag.187-220).

Luelmo Rivas, Marcela. (2004). *Concepciones matemáticas de los docentes de primaria en relación de la fracción como razón y como operador multiplicativo*. En: tesis. Universidad De La Salle.

Monroy, Deisy Delgado, Olaya, Luis Fernando & Gómez Velásquez, Mónica (S.F). *Razón y proporción: un análisis desde los procesos de unitización y formación*. Universidad Francisco José De Caldas. Bogotá. D.C.

Obando, Gilberto De Jesús. (1999). *Enseñanza de los números racionales*. En: Tesis De Maestría.

Obando, Gilberto De Jesús. (2003). *La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte - todo*. Revista Ema. Vol. 8. No. 2

Ohlsson, Stella. *Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts*. En: Learning Research and Development Center University Of Pitts Burgh¨. (page. 53-92).

Puig, H. (2003*). Investigaciones en matemáticas*. Departamento De Educación Matemática Educativa Del Centro De Investigaciones Y Estudios Avanzados. México.

Pujadas Mabel & Eguiluz, L. (2000). *Fracciones un quebradero de cabeza.* edit. Novedades Educativas. México.

Serrano Pérez, Gloria. (1994). *Investigación cualitativa*. Retos E Interrogantes.Ii. Técnicas Y Análisis De Datos. Edit. La Muralla, S.A. Madrid.

Valdemoros, M.E. (2004). *Lenguaje, fracciones y reparto.* En: Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa. Cap.7, (pág. 235-256).

Valdemoros, Marta Elena & Ruiz, Elena Fabiola. (2008). *El caso Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos*. En: Tesis. Universidad Autónoma. Bogotá .D.C.

Vergnaud, Gerard. (1993). *Conceptos y esquemas en una teoría operatoria de la representación.* En: Sánchez, Ernesto Y Zubieta, Gonzalo. Lecturas En Didáctica De Las Matemáticas. Escuela Francesa. Cinvestav, Departamento De Matemática Educativa. México.

Vizcarra Escolano, Rafael & Guarín Sallan, José. (2005). *Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria.* .En: Revista Iberoamericana De Educación Matemática. (pág. 17-35)