Käyrien kaarevuus ja kiertymä 3-ulotteisessa avaruudessa

LuK-tutkielma
Miitri Suorsa
2519405
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2020

Sisällys

Johdanto

Tutkielmassa tutustutaan vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^3$ määriteltyihin parametrisoituihin käyriin. Niille määritetään sekä kaarevuutta että kiertymää vastaavat funktiot, näytetään että saadut tulokset ovat loogisesti päteviä ja vastaavat yleistä intuitiota, ja lisäksi todistetaan muutama näiden funktioiden yksiselitteisyyteen liittyvä lause.

1 Määritelmiä

1.1 Parametrisoidut käyrät

Tässä tutkielmassa tarkastellaan pääosin parametrisoidussa muodossa esitettyjä käyriä. Aloitetaan määrittelemällä mitä nämä ovat.

Määritelmä 1.1. Olkoon $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3, -\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Nyt $\boldsymbol{\gamma}$ on parametrisoitu käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Lisäksi on tarpeen määritellä näiden käyrien derivaatat.

Määritelmä 1.2. Olkoon $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ parametrisoitu käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^3$ joka on määritelty avoimella välillä (α, β), ja olkoon sen derivaatta $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_3(t))$. Nyt $\boldsymbol{\gamma}$ on derivoituva jos $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ on määritelty kaikilla $t \in (\alpha, \beta)$.

Tässä tutkielmassa oletetaan lisäksi, että kaikki käsiteltävät käyrät ovat sileitä jollei toisin todeta. Funktio on sileä, jos sen on derivoituva äärettömän monta kertaa kaikissa pisteissä, joissa se on määritelty. Näiden tietojen avulla voidaan alkaa tutkia itse funktioita. Määritellään ensiksi niiden nopeus.

Lause 1.3. *Olkoon $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$ derivoituva parametrisoitu käyrä, ja $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ sen derivaatta. Nyt $H(t)$ on parametrisointia $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, t) \to \mathbb{R}^3$ vastaavan käyrän pituus, ja sen derivaatta $h(t)$ on muotoa $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$. Kutsumme tätä käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ nopeudeksi.*

Todistus. Määritellään ensiksi käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ kaarenpituus $H(x)$ välillä (α, x). Tiedetään, että kahden vektorin $\boldsymbol{x} = (x_1, y_1, z_1)$ ja $\boldsymbol{y} = (x_2, y_2, z_2)$ välinen etäisyys $\boldsymbol{v}$ saadaan laskemalla

$$\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Valitsemalla $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}(t_1)$ ja $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\gamma}(t_2)$, voidaan laskea kahden käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ pisteen välisen etäisyyden. Olkoon S jono jolla

$$S = (\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = x).$$

Lisäksi $\|s_{i+1} - s_i\| \to 0$ kaikilla $i \in [0, n-1]$ kun $n \to \infty$. Integraalin määritelmän perusteella saadaan

$$\begin{aligned} H(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\gamma}(s_i) - \boldsymbol{\gamma}(s_{i-1})\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\boldsymbol{\gamma}(s_i) - \boldsymbol{\gamma}(s_{i-1})}{(s_i - s_{i-1})} \right\| \cdot (s_i - s_{i-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \cdot (s_i - s_{i-1}) = \int_{\alpha}^{x} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| dt. \end{aligned} \tag{1}$$

$H(x)$ on nyt reaaliarvoinen funktio, joten sen muutosnopeus voidaan laskea sen derivaatan $h(x)$ avulla:

$$h(x) = \frac{d \int_{\alpha}^{x} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| dt}{dx} = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)\|. \tag{2}$$

Tämä todistaa lauseen. □

Tietämällä miten parametrisoidun käyrän nopeus lasketaan mielivaltaisessa pisteessä, voidaan tehdä seuraava määritelmä.

Määritelmä 1.4. Olkoon $\boldsymbol{\gamma}$ parametrisoitu käyrä. $\boldsymbol{\gamma}$ on *yksikkönopea* jos sen nopeus kaikkialla on 1. Lisäksi $\boldsymbol{\gamma}$ on *säännöllinen* jos sen nopeus ei ole koskaan nolla.

Koska haluamme tutkia käyriä, emme niinkään funktioita jotka muodostavat ne, on tärkeä löytää jokin tapa jonka avulla voidaan selvittää piirtävätkö kaksi funktiota saman kuvan. Tätä varten määritellään uudelleenparametrisoinnin käsite.

1.2 Uudelleenparametrisointi

Määritelmä 1.5. Olkoon $\boldsymbol{\gamma_1} : (\alpha_1, \beta_1) \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\gamma_2} : (\alpha_2, \beta_2) \to \mathbb{R}^3$ parametrisoituja käyriä. Jos on olemassa funktio $\phi : (\alpha_1, \beta_1) \to (\alpha_2, \beta_2)$ joka on sileä, jonka käänteisfunktio $\phi^{-1} : (\alpha_2, \beta_2) \to (\alpha_1, \beta_1)$ on myös sileä, ja jolla pätee

$$\boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t)) = \boldsymbol{\gamma_1}(t)$$

kaikilla $t \in (\alpha_1, \beta_1)$, sanotaan että funktio $\boldsymbol{\gamma_2}$ on funktion $\boldsymbol{\gamma_1}$ *uudelleenparametrisointi.*

Tämän määritelmän mukaan huomataan, että

$$\boldsymbol{\gamma_2}(\phi^{-1}(\phi(t))) = \boldsymbol{\gamma_1}(\phi^{-1}(t)) \Rightarrow \boldsymbol{\gamma_2}(t) = \boldsymbol{\gamma_1}(\phi^{-1}(t)).$$

Koska funktio ϕ^{-1} on määritelmänsä mukaan sileä, seuraa että kaikki käyrän uudelleenparametrisoinnit, mukaan lukien käyrä itse, voidaan johtaa toisistaan. Saatu ryhmä käyriä muodostaa perheen joilla on kaikilla sama kuva.

Edellä annettiin määritelmä yksikkönopeille käyrille. Herää kysymys, milloin mielivaltainen käyrä voidaan uudelleenparametrisoida tälläiseen muotoon? Jotta tähän kysymykseen voitaisiin vastata, on ensin tarpeen todistaa seuraavat aputulokset.

Lause 1.6. *Kaikki säännöllisen käyrän uudelleenparametrisoinnit ovat itse säännöllisiä.*

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{\gamma_1}$ ja $\boldsymbol{\gamma_2}$ toisistaan uudelleenparametrisoituja käyriä joilla pätee

$$\boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t)) = \boldsymbol{\gamma_1}(t). \tag{3}$$

Käänteisfunktion määritelmän perusteella pätee $\phi^{-1}(\phi(t)) = t$. Derivoimalla tämä yhtälö muuttujan t suhteen, saadaan ketjusääntö käyttäen

$$(\dot{\phi^{-1}})(\phi(t)) \cdot \dot{\phi}(t) = 1.$$

Nyt nähdään selvästi, että $\dot{\phi(t)} \neq 0$ kaikilla t. Derivoimalla myös yhtälö (3) muuttujan t suhteen, saadaan

$$\dot{\boldsymbol{\gamma_2}}(\phi(t)) \cdot \dot{\phi}(t) = \dot{\boldsymbol{\gamma_1}}(t).$$

Koska $\dot{\phi(t)} \neq 0$ kaikilla t kuten juuri todistimme, seuraa

$$\dot{\boldsymbol{\gamma_1}}(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma_2}}(\phi(t)) = 0.$$

Näin ollen, jos $\boldsymbol{\gamma_1}$ on säännöllinen eli $\dot{\boldsymbol{\gamma_1}}(t) \neq 0$ kaikilla t, on $\boldsymbol{\gamma_2}$ myös säännöllinen. Tämän tiedon avulla, voidaan todistaa seuraava lauseen.

□

Lause 1.7. *Parametrisoidun käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ kaarenpituutta mittaava funktio $H(x)$ on sileä, jos $\boldsymbol{\gamma}$ on säännöllinen. Lisäksi, sen käänteisfunktio $H^{-1}(x)$ on myös sileä.*

Todistus. Käytetään funktion $H(x)$ määritelmää yhtälöstä (1). Kuten yhtälössä (2) todistettiin, on funktion $H(x)$ derivaatta $h(x)$ muotoa

$$h(x) = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)\|.$$

Koska $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, saadaan sen normi seuraavalla kaavalla:

$$\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)\| = \sqrt{\dot{\gamma_1}(x)^2 + \dot{\gamma_2}(x)^2 + \dot{\gamma_3}(x)^2} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Derivoimalla tämä muuttujan x suhteen saadaan:

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{2\dot{u} + 2\dot{v} + 2\dot{w}}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

Näin funktion $h(x)$ derivaatta on olemassa, paitsi kun $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 0$. Koska käyrä $\boldsymbol{\gamma}(x)$ on säännöllinen, pätee $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x)\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} > 0$ kaikilla x. Tämän perusteella, $h(x)$ on aina derivoituva. Tiedetään lisäksi, että kahden sileän funktion f ja g yhdiste $(f \circ g)$ on myös sileä. Funktio $\sqrt{x}$ on sileä kaikilla $x \neq 0$, ja funtkiot u, v, ja w ovat myös sileitä jos käyrä $\boldsymbol{\gamma}$ on sileä. Määritelemänsä mukaan se on, joten seuraa että $h(x)$ on sileä.

Koska $h(x) > 0$ kaikilla x, on $H(x)$ aidosti kasvava funktio. Näin ollen sillä on käänteisfunktio. Tiedetään että tämän käänteisfunktion $H^{-1}(x)$ derivaatta $h^{-1}(x)$ saadaan kaavalla

$$h^{-1}(x) = \frac{1}{h(H^{-1}(x))}.$$

Koska $h(x) \neq 0$ kaikilla x, on tämä derivaatta aina olemassa. Nyt saadaan

$$\frac{dh^{-1}(x)}{dx} = \frac{-\dot{h}(H^{-1}(x)) \cdot h^{-1}(x)}{h(H^{-1}(x))^2}$$

joka on myös olemassa kaikilla x. Kuten tehtiin funktion $h(x)$ kanssa, voidaan näyttää, että kaikki funktion H^{-1} derivaatat ovat määritelty jos $\boldsymbol{\gamma}(x)$ on säännöllinen.

$\square$

Lause 1.8. *Parametrisoidulla käyrällä $\boldsymbol{\gamma}$ on yksikkönopea uudelleenparametrisointi jos ja vain jos $\boldsymbol{\gamma}$ on säännöllinen.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että tälläinen uudelleenparametrisointi on olemassa, ja todistetaan, että $\boldsymbol{\gamma_1}$ on näin ollen säännöllinen. Olkoon $\boldsymbol{\gamma_2}$ parametrisoidun funktion $\boldsymbol{\gamma_1}$ yksikkönopea uudelleenparametrisointi jolla pätee:

$$\boldsymbol{\gamma_1}(\phi(t)) = \boldsymbol{\gamma_2}(t)$$

missä ϕ on Määritelmän 1.5 mukainen funktio. Nyt $\boldsymbol{\gamma_1}$ ja $\boldsymbol{\gamma_2}$ ovat toistensa uudelleenparametrisointeja. Derivoimalla tämä yhtälö muuttujan t suhteen, saadaan

$$\dot{\boldsymbol{\gamma_1}}(\phi(t)) \cdot \dot{\phi}(t) = \dot{\boldsymbol{\gamma_2}}(t) \Rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\gamma_1}}(\phi(t))\| \cdot \|\dot{\phi}(t)\| = \|\dot{\boldsymbol{\gamma_2}}(t)\|.$$

Oletuksen perusteella, $\boldsymbol{\gamma_2}$ on yksikkönopea, joten $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{2}}(\phi(t))\| = 1$ kaikilla t. Tätä tietoa käyttäen, yhtälö saadaan muotoon

$$\|\dot{\phi}(t)\| \cdot \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t)\| = 1.$$

Selvästi $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t) \neq 0$ kaikilla t. Nähdään nyt että jos käyrällä $\boldsymbol{\gamma}$ on yksikkönopea uudelleenparametrisointi, on $\boldsymbol{\gamma}$ säännöllinen.

Todistetaan seuraavaksi lause toisinpäin. Tällä kertaa oletetaan, että $\boldsymbol{\gamma_1}$ on säännöllinen. Olkoon $\boldsymbol{\gamma_2}$ uudelleenparametrisointi jolla pätee

$$\boldsymbol{\gamma_1}(t) = \boldsymbol{\gamma_2}(H(t))$$

jossa $H(t)$ on käyrän $\boldsymbol{\gamma_1}(t)$ kaarenpituutta mittaava funktio kuten määriteltiin yhtälössä (1). Koska $\boldsymbol{\gamma_1}(t)$ on säännöllinen, ovat $H(t)$ ja $H^{-1}(t)$ lauseen (1.7) perusteella sileitä, ja näin ollen kelpaavat uudelleenparametrisointi funktioiksi. Derivoimalla tämä yhtälö muuttujan t suhteen, saadaan

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{2}}(H(t)) \cdot h(t) \Rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t)\| = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{2}}(H(t))\| \cdot \|h(t)\| \\
\Rightarrow &\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t)\| = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{2}}(H(t))\| \cdot \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t)\| \Rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{2}}(H(t))\| = 1.
\end{aligned}$$

Nyt $\boldsymbol{\gamma_2}$ on yksikkönopea. Nähdään, että valitsemalla H uudelleenparametrisointi funktioksi saadaan aina yksikkönopea käyrä.

$\square$

Herää kysymys, onko tämä ainoa mahdollinen valinta? Onko annetun käyrän yksikkönopeiden uudelleenparametrisointien välillä jokin yhteys? Perehdytään tähän seuraavaksi.

Lause 1.9. *Olkoon $\boldsymbol{\gamma_1}$ säännöllinen parametrisoitu käyrä ja $\boldsymbol{\gamma_2}$ sen yksikkönopea uudelleenparametrisointi jolla pätee*

$$\boldsymbol{\gamma_1}(t) = \boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t)). \tag{4}$$

Nyt jos muuttuja $H(t)$ mittaa käyrän $\boldsymbol{\gamma_1}$ kaarenpituutta yhtälön (1) *mukaan, ja jos c on vakio, on voimassa*

$$H(t) = \pm\phi(t) + c. \tag{5}$$

Todistus. Olettamuksen pohjalta, $\boldsymbol{\gamma_2}$ on yksikkönopea. Tätä tietoa käyttäen yhtälö (4) voidaan derivoida muuttujan t suhteen:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{2}}(\phi(t)) \cdot \dot{\phi}(t) \Rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t)\| = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{2}}(\phi(t))\| \cdot \|\dot{\phi}(t)\| \\
\Rightarrow &\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{1}}(t)\| = \|\dot{\phi}(t)\| \Rightarrow \|h(t)\| = \|\dot{\phi}(t)\| \Rightarrow \dot{\phi}(t) = \pm h(t).
\end{aligned}$$

Integroimalla saatu tulos muuttujan t suhteen, saadaan

$$\phi(t) = \pm H(t) + c$$

jossa c on vakio. Näin lause on todistettu.

$\square$

Koska $\phi(t)$ on aina muotoa $\pm H(t) + c$, nähdään nyt selvästi että Lause (1.8) on voimassa riippumatta siitä, miten uudelleenparametrisointi funktio valitaan. Näillä tiedoilla varustettuna voidaan siirtyä itse asiaan, ja alkaa tutkimaan käyriä ja niiden kaarevuutta.

2 Kaarevuus

2.1 Mitä on kaarevuus?

Jotta käyrälle voitaisiin määritellä kaarevuus, on tarpeen olettaa että niitä vastaavat parametrisoidut funktiot ovat sileitä. Lisäksi kaarevuuden määritelmän halutaan täyttää seuraavat intuitioon perustuvat olettamukset:

1. Jos kahta käyrää vastaavat parametrisoidut funktiot ovat toistensa uudelleenparametrisointeja, on käyrillä sama kaarevuus.

2. Suoran viivan kaarevuus on nolla.

3. Ympyrän kaarevuus on vakio.

Ensimmäisen olettamus on tarpeen, sillä olemme kiinnostuneita tutkimaan itse käyriä ja niiden piirtämiä kuvia, emmekä niinkään funktioita joihin ne pohjautuvat. Myöhemmin todistetaan, että olettamus on voimassa myös toisinpäin (kunhan eräs toinen ehto johon palataan myöhemmin on myös voimassa). Toinen ja kolmas olettamus taas takaavat, että löydetty määritelmä vastaa ainakin näiden kuvioiden osalta mitä intuitiivisesti oletettiin.

2.2 Kaarevuuden määritelmä

Jos parametrisoitu käyrä $\boldsymbol{\gamma}$ muodostaa suoran, on sen oltava muotoa $\boldsymbol{\gamma}(t) = (a \cdot t + x_0, b \cdot t + y_0, c \cdot t + z_0)$ jossa a, b, c, x_0, z_0, ja y_0 ovat vakioita. Derivoidaan tämä funktio kahdesti muuttujan t suhteen:

$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\frac{d^2(a \cdot t + x_0)}{d^2 t}, \frac{d^2(b \cdot t + y_0)}{d^2 t}, \frac{d^2(c \cdot t + z_0)}{d^2 t}) = (0, 0, 0).$$

Ottamalla saadusta tuloksesta normin (kaarevuuden halutaan olevan skalaari arvo) saadaan

$$\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = 0.$$

Nähdään selvästi että $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ on nolla kaikilla t riippumatta siitä minkälainen suora on valittu. Oletetaan seuraavaksi että $\boldsymbol{\gamma}$ muodostaa ympyrän. Tällöin sen on oltava muotoa $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, jossa

$$\begin{aligned}
x(t) &= (c_1 + r \cdot \cos(t) \cdot a_1 + r \cdot \sin(t) \cdot b_1) \\
y(t) &= (c_2 + r \cdot \cos(t) \cdot a_2 + r \cdot \sin(t) \cdot b_2) \\
z(t) &= (c_3 + r \cdot \cos(t) \cdot a_3 + r \cdot \sin(t) \cdot b_3).
\end{aligned}$$

Tässä r on ympyrän säde, (c_1, c_2, c_3) sen keskipiste, ja vektorit $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ muodostavat yhdessä tason johon ympyrä piirtyy. Lisäksi pätee $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 1$ ja $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Oletetaan myös, että c_1, c_2, c_3, ja r ovat vakioita. Derivoidaan nyt nämä yhtälöt kaksi kertaa muuttujan t suhteen:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= (-r \cdot \cos(t) \cdot a_1 - r \cdot \sin(t) \cdot b_1) \\
\ddot{y}(t) &= (-r \cdot \cos(t) \cdot a_2 - r \cdot \sin(t) \cdot b_2) \\
\ddot{z}(t) &= (-r \cdot \cos(t) \cdot a_3 - r \cdot \sin(t) \cdot b_3).
\end{aligned}$$

Kuten yllä, otetaan saadusta tuloksesta normi:

$$\begin{aligned}
\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| &= \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2 + \ddot{z}(t)^2} \\
&= r \cdot \sqrt{c^2 \cdot \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a} + s^2 \cdot \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{b} + 2 \cdot c \cdot s \cdot \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}
\end{aligned}$$

jossa $c = \cos(t)$ ja $s = \sin(t)$. Koska $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ovat kohtisuoria yksikkövektoreita, saadaan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a} &= 1 \\
\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{b} &= 1 \\
\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} &= 0.
\end{aligned}$$

Tätä tietoa käyttäen, voimme laskea yllä saadun tuloksen loppuun asti:

$$\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = r \cdot \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} = r$$

Nähdään selvästi, että $\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$ on vakio kaikilla t riippumatta miten ympyrä valitaan. Yhdistämällä nämä kaksi tulosta huomataan, että $\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$ täyttää olettamukset 2 ja 3 jotka asetettiin kaarevuudelle kappaleen alussa. Herää kysymys, kelpaako tämä kaarevuuden määritelmäksi? Jotta tähän kysymykseen voitaisiin vastata, täytyy ensin selvittää onko olettamus 1 voimassa.

Olkoon $\boldsymbol{\gamma_1}$ ja $\boldsymbol{\gamma_2}$ parametrisoituja käyriä joilla pätee

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\gamma_1}(t) = (t^3, t, 0)\\
&\boldsymbol{\gamma_2}(x) = (x^3/a^3, x/a, 0)\\
&\phi(t) = a \cdot t\\
&\phi^{-1}(t) = t/a.
\end{aligned}$$

Lisäksi $t \geq 0$. Nyt $\boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t)) = (t^3, t, 0) = \boldsymbol{\gamma_1}(t)$, joten nämä käyrät ovat toistensa uudelleenparametrisointeja. Lasketaan seuraavaksi niiden toisenasteen derivaatat:

$$\begin{aligned}
&\|\ddot{\boldsymbol{\gamma_1}}(t)\| = 6 \cdot t\\
&\|\boldsymbol{\gamma}_2''(x)\| = 6 \cdot x/a^3\\
&\|\boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))\| = 6 \cdot t/a^2.
\end{aligned}$$

Tässä merkitään derivaattaa muuttujan x suhteen kirjoittamalla $()''$. Lisäksi merkintä $\boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))$ kuvastaa derivaatan $\boldsymbol{\gamma}_2''(x)$ arvoa pisteessä $\phi(t)$. Huomataan että $\|\ddot{\boldsymbol{\gamma_1}}(t)\| \neq \|\boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))\|$ kaikilla $a \neq 1$. Nyt on näytetty käänteisesimerkin avulla, että olettamus 1 ei ole voimassa tällä kaarevuuden määritelmän valinnalla. Jotta se saataisiin toimimaan, tulee käyrät joita käsitellään rajoittaa niihin jotka ovat yksikkönopeita.

Lemma 2.1. *Olkoon $\boldsymbol{\gamma_1}(t)$ parametrisoitu käyrä ja $\boldsymbol{\gamma_2}(x)$ sen uudelleenparametrisointi. Jos molemmat käyrät ovat yksikkönopeita, on niiden kaarevuus sama.*

Todistus. Todistetaan, että kaarevuus on sama kaikille käyrän $\boldsymbol{\gamma_1}(t)$ yksikkönopeille uudelleenparametrisoinneille $\boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t)) = \boldsymbol{\gamma_1}(t)$. Lausetta (1.9) soveltaen nähdään, että ϕ on aina muotoa

$$\phi(t) = \pm t + c$$

jossa c on vakio. Nyt yhtälö saadaan muotoon $\boldsymbol{\gamma_1}(t) = \boldsymbol{\gamma_2}(\pm t + c)$. Derivoidaan se kahdesti muuttujan t suhteen:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\gamma_1}}(t) = \pm \boldsymbol{\gamma_2}'(\pm t + c)\\
&\ddot{\boldsymbol{\gamma_1}}(t) = \pm(\pm \boldsymbol{\gamma}_2''(\pm t + c)) = \boldsymbol{\gamma}_2''(\pm t + c).
\end{aligned}$$

Nähdään nyt selvästi, että

$$\kappa_1(t) = \|\ddot{\boldsymbol{\gamma_1}}(t)\| = \|\boldsymbol{\gamma}_2''(\pm t + c)\|.$$

□

Kaarevuuden κ_1 arvo on sama kaikille yksikkönopeille uudelleenparametrisoinneille. Kuten aikaisemmin todistettiin, täyttää funktion toisen derivaatan itseisarvo kaarevuuden olettamukset 2 ja 3, ja jos kyseessä on yksikkönopea käyrä, olettamus 1 täyttyy myös. Nyt voidaan määritellä mielivaltaisen käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ kaarevuuden arvoksi jonkin sen yksikkönopean uudelleenparametrisoinnin kaarevuus.

Määritelmä 2.2. Olkoon $\boldsymbol{\gamma}$ parametrisoitu käyrä ja $\boldsymbol{\gamma_2}$ sen yksikkönopea uudelleenparametrisointi, jolle $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t))$. Käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ kaarevuus on

$$\kappa(t) = \|\boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))\|.$$

Lasketaan seuraavaksi tälle yleinen kaava.

Lause 2.3. *Olkoon $\boldsymbol{\gamma}$ parametrisoitu käyrä. Nyt sen kaarevuus κ parametrin arvolla t on muotoa*

$$\kappa(t) = \frac{\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^3}.$$

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{\gamma_2}$ käyrä $\boldsymbol{\gamma}$ yksikkönopea uudelleenparametrisointi jolla pätee $\boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t)) = \boldsymbol{\gamma}(t)$. Kuten edellä määriteltiin, voidaan käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ kaarevuus κ laskea kaavalla

$$\kappa(t) = \|\boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))\|. \tag{6}$$

Derivoimalla yhtälön $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t))$ kahdesti muuttujan t suhteen saadaan

$$\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\dot{\phi}(t)} = \boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t)) \Rightarrow \left(\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) - \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \frac{\ddot{\phi}(t)}{\dot{\phi}(t)}\right) / \dot{\phi}(t)^2 = \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t)).$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (6) saadaan

$$\kappa(t) = \|\boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))\| = \left\| \left(\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) - \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \frac{\ddot{\phi}(t)}{\dot{\phi}(t)}\right) / \dot{\phi}(t)^2 \right\|.$$

Lauseen (1.9) perusteella $\phi(t)$ on muotoa $\phi(t) = \pm H(t) + c$, ja sen derivaatan neliö taas

$$\dot{\phi}(t)^2 = h(t)^2 = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^2 = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Derivoidaan tämä yhtälö muuttujan t suhteen:

$$\dot{\phi}(t) \cdot \ddot{\phi}(t) = \ddot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Sijoitetaan tämä yllä olevaan yhtälöön:

$$\kappa(t) = \left\| \frac{\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \dot{\phi}(t)^2 - \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \ddot{\phi}(t) \cdot \dot{\phi}(t)}{\dot{\phi}(t)^4} \right\| = \left\| \frac{\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}) - \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\ddot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}})}{(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}})^2} \right\|.$$

Tiedetään, että $\mathbb{R}^3$ vektoreille pätee

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Olkoon $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ ja $\boldsymbol{b} = \ddot{\boldsymbol{\gamma}}$. Nyt saamme

$$\kappa(t) = \left\| \frac{\ddot{\gamma}(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})}{(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})^2} \right\| = \left\| \frac{\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma})}{(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})^2} \right\|.$$

Ristitulon määritelmän mukaan ristitulo $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ on kohtisuorassa sekä vektorin $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ että $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ kanssa. Käyttäen ristitulon normisääntöä käyttäen saadaan laskettua

$$\|\dot{\gamma} \times (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})\| = \|\dot{\gamma}\| \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|.$$

Sijoitetaan tämä yllä olevaan yhtälöön:

$$\kappa(t) = \left\| \frac{\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma})}{(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})^2} \right\| = \frac{\|\dot{\gamma}\| \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})^2\|} = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

Tämä todistaa lauseen, ja antaa kaavan jota käyttäen mielivaltaisen käyrän kaarevuus voidaan laskea ilman että sille ensin löydettäisiin yksikkönopea uudelleenparametrisointi joka on usein vaikeaa jollei mahdotonta kirjoittaa eksplisiittisesti.

□

2.3 Määrääkö kaarevuus käyrän?

Palataan kappaleen alussa tehtyihin olettamuksiin kaarevuudesta. Kuten todistettiin, on olettamus 1 voimassa kaikilla käyrille, ja vaikka helposti voisi ajatella että se pätee myös toisinpäin, paljastuu että näin ei itseasiassa ole. Todistetaan tämä yksinkertaisella esimerkillä. Olkoon $\boldsymbol{\gamma}$ parametrisoitu käyrä jolla pätee

$$\boldsymbol{\gamma} = (a \cdot \sin(t), a \cdot \cos(t), b \cdot t).$$

Asettamalla $b = 0$, käyrä piirtää ympyrän jolloin sen kaarevuuden tulisi olla vakio. Lasketaan ensin kaava kyseisen käyrän kaarevuudelle Lausetta (2.3) käyttäen:

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|\ddot{\gamma}(t) \times \dot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} \\
&= \frac{\|(-a \cdot \sin(t), -a \cdot \cos(t), 0) \times (a \cdot \cos(t), -a \cdot \sin(t), b)\|}{\|(a \cdot \cos(t), -a \cdot \sin(t), b)\|^3} \\
&= \frac{\|((-a \cdot \cos(t)) \cdot b, a \cdot \sin(t) \cdot b, a^2 \cdot (\sin(t)^2 + \cos(t)^2)\|}{(a^2 \cdot (\cos(t)^2 + \sin(t)^2) + b^2))^3} \\
&= \frac{\|(-a \cdot \cos(t) \cdot b, a \cdot \sin(t) \cdot b, a^2)\|}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} \\
&= \frac{\sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot (\cos(t)^2 + \sin(t)^2) + a^4}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{\sqrt{a^2 \cdot b^2 + a^4}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} \\
&= \sqrt{\frac{a^2 \cdot (b^2 + a^2)}{(a^2 + b^2)^3}} = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{\|a\|}{a^2 + b^2}.
\end{aligned}
$$

Nähdään että kaarevuus κ ei riipu muuttujasta t, vaan on kaikkialla vakio. Kun $b = 0$:

$$\kappa(t) = \frac{1}{\|a\|}.$$

Kun taas $b \neq 0$, on kyseessä kierre. Tässä kuitenkin huomataan ongelma: Koska molempien käyrien kaarevuus on vakio, on mahdollista löytää ympyrä ja kierre joilla on kaikkialla sama kaarevuus. Esimerkiksi kun

$$a_1 = \frac{a_2^2 + b_2^2}{\|a_2\|} \text{ ja } b_1 = 0 \text{ niin } \kappa_1(t) = \frac{\|a_2\|}{a_2^2 + b_2^2} = \kappa_2(t).$$

Tämä on vastoin haluamaamme tulosta, jossa jokaista kaarevuus funktiota vastaa tarkalleen yksi käyrä. Jotta tämä olisi mahdollista, tulee käyrillä olla jokin muu ominaisuus joka erottaa ne toisistaan. Perehdytään tähän seuraavassa kappaleessa.

3 Kiertymä

3.1 Kiertymän määritelmä

Geometrisesti, käyrän kaarevuus voidaan tulkita kertomaan kuinka vahvasti se poikkeaa suorasta viivasta. Jos käyrän tangentin ja normaalin ajatellaan muodostavan taso, voidaan samankaltainen arvo määrittää kuvastamaan kuinka vahvasti käyrä poikkeaa siitä. Tätä kutsutaan käyrän kiertymäksi, ja se pystytään johtamaan suoraan kaarevuuden määritelmästä.

Olkoon $\boldsymbol{\gamma}$ yksikkönopea käyrä ja $\boldsymbol{m} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ sen derivaatta. Yksikkönopeuden määritelmän mukaan, kaikilla t pätee:

$$\|\boldsymbol{m}(t)\| = 1. \tag{7}$$

Oletetaan lisäksi, että käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ kaarevuus ei ole koskaan nolla, eli kaikilla t pätee:

$$\kappa(t) = \|\dot{\boldsymbol{m}}(t)\| \neq 0.$$

Kaaren normaali voidaan nyt määritellä seuraavalla kaavalla:

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \dot{\boldsymbol{m}}(t). \tag{8}$$

Derivoimalla saatu yhtälö muuttujan t suhteen seuraa:

$$\dot{\boldsymbol{n}}(t) = \frac{\ddot{\boldsymbol{m}}(t) \cdot \kappa(t) - \dot{\boldsymbol{m}}(t) \cdot \dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)^2}.$$

Koska $\kappa(t) = \|\dot{\boldsymbol{m}}(t)\|$, on normaali $\boldsymbol{n}$ nyt vektorin $\dot{\boldsymbol{m}}(t)$ suuntainen yksikkövektori. Lisäksi voidaan todistaa että $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Toisin sanoen, pystytään näyttämään että $\boldsymbol{n}$ todella on käyrän normaali ja näin ollen kohtisuorassa sen tangettia vastaan . Pistetulon määritelmän mukaan on voimassa

$$\boldsymbol{m}(t) \cdot \boldsymbol{m}(t) = 1$$

joka voidaan derivoida muuttujan t suhteen:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{m}(t) \cdot \boldsymbol{m}(t)) = 0.$$

Pistetulon derivointisääntöä käyttäen, tämä yhtälö voidaan johtaa muotoon

$$\boldsymbol{m}(t) \cdot \frac{d}{dt}(\boldsymbol{m}(t)) + \boldsymbol{m}(t) \cdot \frac{d}{dt}(\boldsymbol{m}(t)) = 0$$

johon tekemällä sijoitus $\dot{\boldsymbol{m}}(t) = \boldsymbol{n}(t)$ saadaan

$$\boldsymbol{m}(t) \cdot \boldsymbol{n}(t) = 0.$$

Näin ollen $\boldsymbol{m}$ ja $\boldsymbol{n}$ ovat kohtisuoria toisiaan vastaan. Määritellään lisäksi niiden ristitulo:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}.$$

Tätä vektoria kutsutaan käyrän binormaaliksi. Koska kaikki kolme vektoria ovat yksikkövektoreita, muodostavat ne yhdessä ortogonaalisen kannan. Derivoidaan yllä oleva yhtälö:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{b}}(t) &= \dot{\boldsymbol{m}}(t) \times \boldsymbol{n}(t) + \boldsymbol{m}(t) \times \dot{\boldsymbol{n}}(t) \\ &= \kappa(t) \cdot \boldsymbol{n}(t) \times \boldsymbol{n}(t) + \boldsymbol{m}(t) \times \dot{\boldsymbol{n}}(t) \\ &= \boldsymbol{m}(t) \times \dot{\boldsymbol{n}}(t).\end{aligned}$$

Täten binormaalin derivaatta $\dot{\boldsymbol{b}}$ on kohtisuorassa vektoreiden $\boldsymbol{m}$ ja $\dot{\boldsymbol{n}}$ kanssa, täytyy sen olla muotoa

$$\dot{\boldsymbol{b}} = \tau \cdot \boldsymbol{n}$$

jossa $\tau \in \mathbb{R}$. Tätä funktiota kutsutaan käyrän kiertymäksi. Yleisemmin pätee

$$\begin{aligned}\tau = \frac{\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|^2} &= (\boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{m} \times \ddot{\boldsymbol{m}} \cdot \kappa - \boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}} \cdot \dot{\kappa}) \cdot \dot{\boldsymbol{m}} \cdot \kappa^{-3} \\ &= (\boldsymbol{m} \times \ddot{\boldsymbol{m}} \cdot \kappa) \cdot \dot{\boldsymbol{m}} \cdot \kappa^{-3} = \kappa^{-2} \cdot (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \dddot{\boldsymbol{\gamma}}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\gamma}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Nyt kiertymä voidaan laskea kaikille yksikkönopeille käyrille, ja kuten kaarevuuden tapauksessa, tästä voidaan johtaa kiertymä kaikille käyrille.

Määritelmä 3.1. Olkoon $\boldsymbol{\gamma}$ parametrisoitu käyrä ja $\boldsymbol{\gamma_2}$ sen yksikkönopea uudelleenparametrisointi, jolle $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma_2}(\phi(t))$. Käyrän $\boldsymbol{\gamma}$ kiertymä on

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t)) \times \boldsymbol{\gamma}_2'''(\phi(t))) \cdot \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))}{\|\boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))\|^2}.$$

Lasketaan lisäksi yleinen kaava.

Lemma 3.2. *Olkoon $\boldsymbol{\gamma}$ käyrä jonka kaarevuus κ on aina erisuuri kuin nolla. Nyt sen kiertymä τ saadaan kaavasta*

$$\tau = \frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}\|^2}. \tag{10}$$

Todistus. Olkoon funktio $\boldsymbol{\gamma_2}(x)$ käyrän $\boldsymbol{\gamma}(t)$ yksikkönopea uudelleenparametrisointi jolla pätee

$$\boldsymbol{\gamma}_2(\phi(t)) = \boldsymbol{\gamma}(t). \tag{11}$$

Käyttämällä kaavaa (9), tämän käyrän kiertymäksi saadaan

$$\tau(x) = \kappa(x)^{-2} \cdot (\boldsymbol{\gamma}_2'(x) \times \boldsymbol{\gamma}_2'''(x)) \cdot \boldsymbol{\gamma}_2''(x).$$

Todistetaan, että kaava (10) tuottaa saman tuloksen:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_2) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}_2}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_2\|^2} = \frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_2) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}_2}{(\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2\|\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}_2\|)^2} \\ &= \frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_2) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}_2}{\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}_2\|^2} = \frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_2) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}_2}{\kappa^2}.\end{aligned}$$

Koska $\boldsymbol{\gamma}_2$ on yksikkönopea, pätee $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_2\| = 1$ ja $\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}_2\| = \kappa$. Derivoidaan yhtälö (11) muuttujan t suhteen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}(t) &= \boldsymbol{\gamma}_2(\phi(t)) \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= \boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t))\dot{\phi}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))\dot{\phi}(t)^2 + \boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t))\ddot{\phi}(t) \\ \dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= \boldsymbol{\gamma}_2'''(\phi(t))\dot{\phi}(t)^3 + 3\boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))\dot{\phi}(t)\ddot{\phi}(t) + \boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t))\dddot{\phi}(t).\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= \boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t))\dot{\phi}(t) \times \boldsymbol{\gamma}(t)_2''(\phi(t))\dot{\phi}(t)^2 + \boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t))\dot{\phi}(t) \times \boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t))\ddot{\phi}(t) \\ &= \dot{\phi}(t)^3(\boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t)) \times \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t)))\end{aligned}$$

ja

$$\dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot (\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)) = \dot{\phi}(t)^6 \cdot \boldsymbol{\gamma}_2'''(\phi(t)) \cdot (\boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t)) \times \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t))).$$

Jaetaan alempi yhtälö ylemmän neliöllä:

$$\begin{aligned}\frac{\dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot (\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t))}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^2} &= \frac{\dot{\phi}(t)^6 \cdot \boldsymbol{\gamma}_2'''(\phi(t)) \cdot (\boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t)) \times \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t)))}{\|\dot{\phi}(t)^3(\boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t)) \times \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t)))\|^2} \\ &= \frac{\boldsymbol{\gamma}_2'''(\phi(t)) \cdot (\boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t)) \times \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t)))}{\|(\boldsymbol{\gamma}_2'(\phi(t)) \times \boldsymbol{\gamma}_2''(\phi(t)))\|^2}.\end{aligned}$$

Tämä todistaa lauseen.

□

Nyt mielivaltaiselle käyrällä pystytään määrittämään sekä kaarevuuden että kiertymän arvot. Saadut tulokset voidaan tiivistää seuraavaan yhtälöpariin:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{m}} &= \kappa \cdot \boldsymbol{n} \\ \dot{\boldsymbol{b}} &= \tau \cdot \boldsymbol{n}.\end{aligned} \tag{12}$$

Tässä oletetaan, että tutkittava käyrä on yksikkönopea ja sen kaarevuus ei ole koskaan nolla. Tiedetään lisäksi, että käyrän tangentti, normaali, ja binormaali muodostavat ortogonaalisen kannan. Binormaalin määritelmän mukaan on voimassa $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$. Nyt normaalin määritelmäksi voidaan johtaa

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{m}.$$

Derivoidaan saatu yhtälö ja tehdään kaavan (12) mukaiset sijoitukset:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{n}} &= \dot{\boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{m} + \boldsymbol{b} \times \dot{\boldsymbol{m}} \\ \Rightarrow \dot{\boldsymbol{n}} &= \tau \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m} + \kappa \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}. \end{aligned}$$

Kuten tehtiin yllä, muistamalla että kantavektoreiden väliset riippuvuudet tämä yhtälö voidaan johtaa muotoon

$$\dot{\boldsymbol{n}} = -\kappa \cdot \boldsymbol{m} - \tau \cdot \boldsymbol{b}.$$

Näitä yhtälöitä käyttäen on helppo johtaa geometriset tulkinnat sekä kaarevuudelle että kiertymälle. Nähdään myös, että jos kaarevuus on nolla, on käyrän tangentti vakio kuten haluttiin. Lisäksi jos kiertymä on nolla, on käyrän binormaali vakio. Tämä voidaan tulkita geometrisesti tasokäyränä. Tämän tulos voidaan myös todistaa yksinkertaisella laskulla.

Lemma 3.3. *Olkoon $\boldsymbol{\gamma}$ yksikkönopea käyrä jonka kaarevuus κ on aina erisuuri kuin nolla. Nyt käyrän kiertymä τ on nolla kaikkialla jos ja vain jos $\boldsymbol{\gamma}$ on tasokäyrä.*

Todistus. Lemman 3.2 mukaan

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}.$$

Nähdään selvästi, että kiertymä on määritelty vain jos $\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| \neq 0$. Kaarevuuden määritelmästä saadaan

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}.$$

Nähdään, että jos $\kappa \neq 0$, seuraa $\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\| \neq 0$. Näin ollen kiertymä on määritelty vain jos $\kappa \neq 0$. Tämä on syy jonka takia kyseinen olettamus on tarpeen.

Todistetaan ensiksi, että tasokäyrän kiertymä on nolla kaikkialla. Määritellään taso $\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_0}) = 0$, jossa $\boldsymbol{a}$ on mielivaltainen piste tasolla, $\boldsymbol{a_0}$

vakio piste tasolla, ja $\boldsymbol{r}$ tason yksikkönormaali. Käyrä $\boldsymbol{\gamma}(t)$ on tämän tason mukainen tasokäyrä, jos kaikilla t pätee

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\gamma}(t) - \boldsymbol{a_0}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a_0}.$$

Koska vektorit $\boldsymbol{r}$ ja $\boldsymbol{a_0}$ ovat molemmat vakioita, on niiden pistetuloa myös vakio. Merkitään sitä $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a_0} = d$. Derivoidaan yhtälö:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t) &= d \\ \Rightarrow \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Tangentin määritelmän mukaan pätee $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{m}$. Derivoidaan yhtälö uudestaan:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{m} &= 0 \\ \Rightarrow \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{m}} &= 0. \end{aligned}$$

Yhtälön 12 mukaan pätee $\dot{\boldsymbol{m}} = \kappa \boldsymbol{n}$. Koska lisäksi $\kappa \neq 0$, voidaan näyttää että pätee:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boldsymbol{r} \cdot \kappa \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \\ \Rightarrow \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} &= 0. \end{aligned}$$

Vektorit $\boldsymbol{n}$ ja $\boldsymbol{m}$ ovat molemmat kohtisuoria tason normaalin $\boldsymbol{r}$ suhteen. Lisäksi $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m} = \boldsymbol{b}$, joten $\boldsymbol{b} = a \cdot \boldsymbol{r}$. Kaavojen (7) ja (8) mukaan, yksikkönopean käyrän normaali sekä tangentti ovat yksikkövektoreita. Näin ollen binormaali $\boldsymbol{b}$ on myös yksikkövektori. Sijoittamalla $a = \pm 1$ yhtälöön saadaan $\boldsymbol{b} = \pm \boldsymbol{r}$, jonka perusteella $\boldsymbol{b}$ on vakio vektori. Nyt jos $\dot{\boldsymbol{b}} = 0$, seuraa $\tau \cdot \boldsymbol{n} = 0$ ja $\tau = 0$. Tämä todistaa halutun väitteen, jonka mukaan tasokäyrän kiertymä on nolla kaikkialla.

Todistetaan seuraavaksi väite toisinpäin. Olkoon $\tau = 0$. Nyt $\dot{\boldsymbol{b}} = 0$ ja $\boldsymbol{b}$ on vakio. Lasketaan nyt pistetulon $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t)$ derivaatta:

$$\boldsymbol{b} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{m} = 0.$$

Tästä seuraa että $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t) = d$ on vakio. Valitaan nyt vakio vektori $\boldsymbol{a_0}$ siten että $\boldsymbol{a_0} \cdot \boldsymbol{b} = d$. Saadaan taso

$$\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_0}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = d.$$

Kuten todistettiin, kaikilla t pätee $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t) = d$. Näin ollen $\boldsymbol{\gamma}$ on tasokäyrä.

□

Olettamuksien mukaan, nämä tulokset pätevät ainoastaan yksikkönopeille käyrille. Huomataan kuitenkin, että käyrän mielivaltainen uudelleenparametrisointi on tasokäyrä jos ja vain jos alkuperäinen käyrä on myös tasokäyrä. Lisäksi kiertymä pysyy samana riippumatta siitä miten valitsemme uudelleenparametrisoinnin. Näin ollen saadut tulokset voidaan yleistää kaikille käyrille.

3.2 Kiertymä ja kaarevuus yhdessä

Lopuksi todistetaan tärkeä tulos johon on jo pari kertaa viitattu. Paljastuu, että tietämällä ainoastaan käyrän kaarevuus- ja kiertymäfunktioiden arvot kaikissa sen pisteissä on mahdollista laske sen piirtämä kuva (kunhan tietyt ehdot ovat voimassa). Toisin sanoen, kaikille kaarevuus ja kiertymä pareille on olemassa niille karakteristinen kaari. Kuten tullaan todistamaan, sama pätee myös toisinpäin. Määritellään ensiksi euklidinen muunnos.

Määritelmä 3.4. Olkoon R rotaatio-matriisi jolla pätee

$$R = R_z R_y R_x = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ja $\boldsymbol{t}$ translaatio-vektori jolla pätee

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}.$$

Nyt $M(\boldsymbol{\gamma}) = R\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{t}$ on euklidinen muunnos.

Tätä määritelmää käyttäen voidaan todistaa itse lause.

Lause 3.5. *Olkoon $\boldsymbol{\gamma_1}(t)$ ja $\boldsymbol{\gamma_2}(t)$ yksikkönopeita käyriä joiden kaarevuutta vastaa funktio $\kappa(t) \neq 0$ ja kiertymää funktio $\tau(t)$ kaikilla t. Nyt on olemassa euklidinen muunnos M jolla pätee kaikilla t:*

$$\boldsymbol{\gamma_1}(t) = M(\boldsymbol{\gamma_2}(t)).$$

Todistus. Olkoon vektorit $\boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{n_1}$, ja $\boldsymbol{b_1}$ käyrän $\boldsymbol{\gamma_1}$ tangentti, normaali, ja binormaali. Käyrälle $\boldsymbol{\gamma_2}$ vastaavat vektorit ovat $\boldsymbol{m_2}$, $\boldsymbol{n_2}$, ja $\boldsymbol{b_2}$. Valitaan seuraavaksi jokin muuttujan t mahdollinen arvo t_0. Koska kannat $K_1 = \{\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{b_1}\}$ ja $K_2 = \{\boldsymbol{m_2}, \boldsymbol{n_2}, \boldsymbol{b_2}\}$ ovat molemmat ortonormaaleja, on olemassa rotaatio-matriisi R_{t_0} jolla pätee $K_1(t_0) = R_{t_0} \cdot K_2(t_0)$. Valitaan nyt translaatio-vektori $\boldsymbol{t_{t_0}}$ siten että seuraava yhtälö on voimassa:

$$\boldsymbol{\gamma_1}(t_0) = R_{t_0}\boldsymbol{\gamma_2}(t_0) + \boldsymbol{t_{t_0}}.$$

Yhdistämällä nämä saadaan seuraava muunnos:

$$M_{t_0}(\boldsymbol{\gamma}) = R_{t_0}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{t_{t_0}}.$$

Määritelmän mukaan pätee

$$\boldsymbol{\gamma_1}(t_0) = M_{t_0}(\boldsymbol{\gamma_2}(t_0)).$$

Lisäksi, kuten asetimme yllä, on voimassa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m_1}(t_0) &= R_{t_0}\boldsymbol{m_2}(t_0) \\ \boldsymbol{n_1}(t_0) &= R_{t_0}\boldsymbol{n_2}(t_0) \\ \boldsymbol{b_1}(t_0) &= R_{t_0}\boldsymbol{b_2}(t_0). \end{aligned} \tag{13}$$

Nähdään nyt että kaikille muuttujan t pisteille löytyy muunnos M_t joka toteuttaa halutun ehdon. Todistetaan seuraavaksi että tämä muunnos on sama kaikissa pisteissä. Olkoon

$$A(t) = \boldsymbol{m_1}(t) \cdot R_{t_0}\boldsymbol{m_2}(t) + \boldsymbol{n_1}(t) \cdot R_{t_0}\boldsymbol{n_2}(t) + \boldsymbol{b_1}(t) \cdot R_{t_0}\boldsymbol{b_2}(t).$$

Yhtälöiden 13 mukaan pätee $A(t_0) = 3$. Lisäksi $A(t) \leq 3$ kaikilla t ja

$$A(t) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{m_1}(t) = R_{t_0}\boldsymbol{m_2}(t) \\ \boldsymbol{n_1}(t) = R_{t_0}\boldsymbol{n_2}(t) \\ \boldsymbol{b_1}(t) = R_{t_0}\boldsymbol{b_2}(t) \end{cases}.$$

Näin ollen lause voidaan todistaa näyttämällä että funktio $A(t)$ on vakio. Toisin sanoen, $\dot{A}(t) = 0$. Saadaan

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{1}} \cdot R_{t_0}\boldsymbol{m_2} + \dot{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{1}} \cdot R_{t_0}\boldsymbol{n_2} + \dot{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{1}} \cdot R_{t_0}\boldsymbol{b_2} \\ &+ \boldsymbol{m_1} \cdot R_{t_0}\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{n_1} \cdot R_{t_0}\dot{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{b_1} \cdot R_{t_0}\dot{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{2}}. \end{aligned}$$

Yhtälöiden (12) nojalla seuraa

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \kappa\boldsymbol{n_1} \cdot R_{t_0}\boldsymbol{m_2} + (-\kappa\boldsymbol{m_1} - \tau\boldsymbol{b_1}) \cdot R_{t_0}\boldsymbol{n_2} + \tau\boldsymbol{n_1} \cdot R_{t_0}\boldsymbol{b_2} \\ &+ \boldsymbol{m_1} \cdot R_{t_0}\kappa\boldsymbol{n_2} + \boldsymbol{n_1} \cdot R_{t_0}(-\kappa\boldsymbol{m_2} - \tau\boldsymbol{b_2}) + \boldsymbol{b_1} \cdot R_{t_0}\tau\boldsymbol{n_2} = 0. \end{aligned}$$

Nähdään että on olemassa muunnos M jolla on voimassa $\boldsymbol{\gamma_1}(t) = M(\boldsymbol{\gamma_2}(t))$ kaikilla t. Muunnoksen määritelmän perusteella, kyseisen yhtälö voidaan myös esittää muodassa

$$\boldsymbol{\gamma_1}(t) = R\boldsymbol{\gamma_2}(t) + \boldsymbol{t}.$$

Derivoimalla muuttujan t suhteen saadaan

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{1}}(t) = R\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{2}}(t).$$

Nähdään nyt että

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m_1}(t) &= R\boldsymbol{m_2}(t) \\ \boldsymbol{n_1}(t) &= R\boldsymbol{n_2}(t) \\ \boldsymbol{b_1}(t) &= R\boldsymbol{b_2}(t) \end{aligned}$$

kaikilla t kuten oletettiin.

$\square$

Lähdeluettelo

[1] Andrew Pressley, Elementary differential geometry, Springer-Verlag, London, 2001.