Epäsuora todistus ja induktiotodistus lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Janita Puhakka
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2020

Sisältö

1 Johdanto

Tämän hetkinen maailma teknistyy ja matematisoituu vauhdilla, jonka vuoksi opiskelijoilta vaaditaan entistä enemmän matemaattisten perustaitojen hallintaa. Tämä näkyy myös matematiikan opetuksen kehittymisenä suuntaan, jossa painotetaan opiskelijan kriittisen ja itsenäisemmän ajattelun hallintaa. Kehittyvän opetuksen tavoitteena on kohdentaa opiskelijan oppiminen tavoitteelliseen, aktiiviseen, itseohjautuvaan ja monimuotoiseen toimintaan. Toiminnan ohjaamana opiskelijalle korostuu entistä enemmän kokeilevan ja tutkivan matematiikan osaamisen tärkeys. [23] Tämä Pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston *Avoin oppikirja* -projektia, minkä tarkoituksena on vastata oppimateriaalin avulla matematiikan opetuksen edistämiseen ja kehittämiseen.

Työryhmämme koostuu viidestä matematiikan opiskelijasta ja kahdesta ohjaajasta. Lukion pitkän matematiikan kurssi *Lukuteoria ja logiikka* jaettiin työryhmän opiskelijoiden kesken viiteen aihealueeseen, joista jokainen opiskelija sai vastuulleen muodostaa yhden aiheen kokonaisuuden. Aiemmin alkanutta todistamisen kokonaisuutta jatketaan tämän oppimateriaalin osalla, joka koostuu käänteisestä todistuksesta, ristiriitatodistuksesta ja induktiotodistuksesta. Todistamista koskevassa opettajajohtoisessa opetuksessa kiinnitetään yleensä liian vähän huomiota todistuksen sisältämiin ominaisuuksiin ja rakenteeseen, joiden perusteella opiskelijat seuraavat todistuksia askel askeleelta ymmärtämättä todistuksen ideaa. Tämän seurauksena opiskelijoita harvoin kannustetaan omien ideoiden kehittämiseen. [12] Tämän Pro gradu -tutkielman tavoitteena on tuottaa oppimateriaalia, jonka avulla opiskelijat rakentavat omaa ymmärtämistään matemaattisista todistuksista ja todistamisesta.

Tutkielma koostuu perusteluosasta, varsinaisesta oppimateriaaliosasta, opettajan oppaasta ja harjoitustehtävien vastauksista. Perusteluosassa esitetään oppimateriaalin tavoitteet ja tehtävätyypit sekä oppimateriaalin perustelut, mitkä pohjautuvat tieteellisiin artikkeleihin. Varsinaisen oppimateriaalin tarkoituksena on tukea opiskelijan itsenäisempää oppimista ja syvällisempää ymmärrystä. Oppimateriaalissa jokaiselle aiheelle on oma kokonaisuus, joka rakentuu teoriaa eteenpäin vievien pohdintatehtävien ympärille. Opettajanopas tarjoaa opettajalle käyttöön ajankäyttösuunnitelman, oppimateriaalin oppimistavoitteet sekä pohdintatehtävien ratkaisut ja vinkit. Tutkielman päättää oppimateriaalin harjoitustehtävien vastaukset.

2 Oppimateriaalin tavoitteet ja tehtävätyypit

Tässä luvussa esitellään oppimateriaalille asetetut tavoitteet, joiden perustana toimivat vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteet [22] ja työryhmämme valitsemat neljä oppimistavoitetta artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [6]. Näitä kaikkia tavoitteita tuetaan erilaisilla pohdinta- ja harjoitustehtävillä, jotka pohjautuvat artikkelin *Collaborative Learning in Mathematics* -tehtävätyyppeihin [29].

2.1 Lukion opetussuunnitelma

Lukiokoulutusta koskevat säädökset esitetään opetushallituksen koostamassa lukion opetussuunnitelman perusteissa [22]. Opetussuunnitelman perusteiden asettaman opetuksen tavoitteen mukaan opiskelijalle on tarjottava mahdollisuus työskentelyyn, joka yhdistää opiskelijan tiedot ja taidot sekä opiskelijan kokemukset ympäristössä oleviin ilmiöihin. Oppimateriaalin aihealueet korostavat matematiikan luonteen omaista tutkimiseen ja ongelmanratkaisuun perustuvaa oppimista, joka edistää opiskelijan kriittistä ja luovaa ajattelua. Opetussuunnitelman oppimiskäsitystä tavoitteellisesta ja itseohjautuvasta opiskelijasta tuetaan oppimateriaalin sisällöllä, joka asettaa opiskelijan pohtivien tehtävien pariin sekä rohkaisee etsimään omia matemaattisia ratkaisuja tieteellisiin ongelmiin.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa määritellään myös kurssikohtaiset oppimistavoitteet ja keskeiset sisällöt. Oppimateriaali on koostettu lukion pitkän matematiikan syventävälle kurssille *Lukuteoria ja logiikka* (MAA11), jonka kurssikohtaisiin säädöksiin kuuluvat seuraavat tavoitteet ja keskeiset sisällöt: opiskelija tutustuu todistusperiaatteisiin ja harjoittelee niiden käyttöä, syventää ymmärrystä lukujonoista ja niiden summista, osaa tutkia ja selittää kuinka algoritmit toimivat sekä käyttää ohjelmistoja algoritmien tutkimisessa [22, 23].

Oppimateriaalissa on otettu huomioon myös luonnosvaiheessa ollut uusi opetussuunnitelma [23], joka yhtenä oppimista ohjaavana tavoitteena painottaa tulkitsevaa, analysoivaa ja arvioivaa oppimisprosessia. Huomattavana erona oppimisen kannalta aikaisempaan opetussuunnitelmaan on, että luonnos korostaa opiskelijan pitkäjänteistä työskentelyä ja tietoteknistä osaamista, ja että kurssi kantaa nimeä *Algoritmit*. Luonnoksen merkittävin uudistus on, että todistaminen omana oppimiskokonaisuutena on jätetty pois. Muutos huomioidaan oppimateriaalissa siten, että opettajalle ja opiskelijalle tarjotaan käyttöön materiaalia todistamisen oppimiskokonaisuudesta.

Matematiikassa korostuu molempien opetussuunnitelmien tavoitteiden mukaisesti eri tavoin esitetyn datan tulkinta, uusien tietojen yhdistäminen kokemusten pohjalta sekä erilaisten ratkaisujen kehittäminen uusia tapoja hyödyntäen. On siis luontevaa ymmärtää tekniset työvälineet, kuten opiskelijan ajattelua tukevat digitaaliset kuvat, hahmotelmat tai piirrokset, osaksi matemaattista hahmottamista. Matemaattisena ohjelmistona hyödynnetään erityisesti GeoGebraa, joka mahdollistaa erilaisten kuvaajien, lukujonojen ja todistusmenetelmien rakenteellisten ominaisuuksien hahmottamisen. Lisäksi GeoGebran käyttöä halutaan korostaa, sillä se on yksi matematiikan sähköisessä ylioppilaskirjoituksessa käytettävä ohjelmisto.

2.2 Habits of mind -tavoitteet

Matematiikka on universaali kieli, joka opiskelijalle näyttäytyy erilaisilla ammateilla ja arkielämän tapahtumilla. Matematiikka kehittyykin suuntaan, jossa matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä tuodaan voimakkaammin esille. Matematiikan luonteen muutos voidaan havaita läheisimmin nykyisissä matematiikan ylioppilaskirjoituksissa, joissa teknisen laskemisen lisäksi opiskelijoilta halutaan pohtivampaa, selittävämpää ja tietoteknisempää matematiikkaa. Tämän vuoksi oppimateriaalin yhtenä lähtökohtana toimii artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [6] valitut neljä ajattelua tukevaa oppimistavoitetta. Artikkeli esittelee nämä tavoitteet erilaisina ajattelutottumuksina, joiden avulla opiskelijalle annetaan eväät käyttää, ymmärtää, muuttaa ja tehdä päätöksiä matemaattisen ajattelun avulla. Uudistamalla oppimateriaali näiden ajattelutottumusten ympärille saadaan uutta hyötyä matemaattiseen ajatteluun perinteisen vastauskeskeisyyden sijaan.

Seuraavaksi esitellään työryhmämme valitsemat neljä oppimistavoitetta, jotka valikoitiin oppimistavoitteiden ja oppimateriaalin aiheiden yhteensopivuuden perusteella. Valitsemamme ajattelutottumukset sointuvat yhteen ja osaltaan tukevat opetussuunnitelmissa asetettuja tavoitteita.

Mallien etsiminen (pattern sniffers)

Tässä ajattelutottumuksessa mallien etsimisellä tarkoitetaan opiskelijan taipumusta etsiä piilossa olevien mallien avulla oikoreittejä matemaattisiin tilanteisiin. Havaittujen mallien tulisi siirtyä opiskelijan jokapäiväiseen elämään ja auttaa opiskelijaa etsimään yksinkertaisempia ratkaisuja sekä havainnollistamaan arjen ongelmatilanteita. Erityisesti mallien etsiminen on nähtävissä oppimateriaalin induktiotodistusosassa, missä toistuviin malleihin yhdistetään erilaisia matematiikan ja arkielämän tilanteita. Tällainen läpi oppimateriaalin hyödynnettävä etsivätaito kehittää opiskelijaa etsimään samankaltaisuuksia annetuista tehtävistä.

Nikkarointi (tinkerers)

Nikkaroinnin ajatellaan olevan matemaattisen tutkimuksen sydän. Tämä juontuu siitä, että matematiikassa halutaan matemaatikon tavoin omata kyky pilkkoa tehtäviä pienempiin osiin, ottaa ideoita erilleen ja yhdistää ne takaisin paikoilleen. Opiskelijan kyky havaita mitä tapahtuu, jos jotain jätetään pois tai pilkotaan pienempiin vaiheisiin ja yhdistetään uudelleen uudeksi kokonaisuudeksi, on tärkeää niin arkielämän kuin matemaattisten tilanteiden kannalta.

Oppimateriaalilla halutaan opettaa ja korostaa opiskelijalle matematiikan tutkivaa luonnetta, jossa erilaisten kokeilujen tekeminen on sallittua. Opiskelija pääsee harjoittelemaan nikkarointia tehtävillä, joissa pätevistä todistuksista pois otetut osat on lisättävä takaisin paikoilleen tai opiskelijan on itse hahmotettava puuttuvat osat. Näin opiskelija oppii käsittelemään matemaattisten väitteiden päteviä todistuksia ja todistusmenetelmien loogisuutta.

Kuvaileminen (describers)

Nykypäivänä matemaattinen osaaminen korostuu entisestään ja sillä on suuri merkitys opiskelijan elämään ja työmahdollisuuksiin. Kuvaileminen kehittää opiskelijaa antamaan tarkkoja perusteluja annettujen prosessien vaiheista, ymmärtämään omia havaintojaan sekä käyttämään matematiikan kieltä. Omien tarkkojen perustelujen antaminen on tärkeää etenkin matematiikassa, sillä matematiikan luonteeseen kuuluu mielipiteistä keskustelu sekä toisten tekemien matemaattisten todistusten analysointi.

Kuvailemalla opiskelija kehittää kuvailemis- ja perustelutaitojaan, joita tarvitaan opiskelijan tekemien laskujen ja todistusten välivaiheiden selittämisessä. Tämä on nähtävissä konkreettisesti nykyisissä matematiikan ylioppilaskirjoituksissa, joissa opiskelijaa pyydetään perustelemaan ja selittämään tekemiään havaintoja. Perustelemisen lisäksi opiskelijalle tarjotaan mahdollisuus kehittää tapaansa kirjoittaa ylös omia ajatuksiaan, oletuksia, väitteitä ja tuloksia tekemästään matematiikasta.

Visualisointi (visualizers)

Matematiikassa joitakin asioita on hankala hahmottaa visuaalisesti niiden teoreettisen luonteen takia. Tällaisiin ongelmiin pureudutaan visualisoinnilla. Opiskelijan on tärkeää harjoittaa erilaisten prosessien visuaalista näkemistä omalla tavallaan, mikä erityisesti todistamisessa luo mahdollisuuksia erilaisille oppijoille. Toisaalta visualisointi voidaan mieltään opiskelijan taitona ajatella eteenpäin tehtävän välivaiheita, mikä todistamisen osalta kehittää opiskelijan taitoa nähdä tehtävä kokonaisuutena. Erityisesti oppimateriaalissa visualisointia käytetään matemaattisen - ja yleisen induktiotodistuksen rakenteen erottamiseen.

Matematiikan visualisointiin luonnollisesti liittyy erilaiset ohjelmistot. Ohjelmistojen avulla annetusta datasta voidaan rakentaa taulukoita ja kuvaajia, joita tulisi hyödyntää tehtävien ratkaisuissa. Visualisointi yhdistetään vahvasti Geogebran käyttöön, jonka avulla opiskelija pystyy luontevasti hyödyntämään dataa tehtävien hahmottamisessa ja todistusten rakentamisessa.

2.3 Tehtävätyypit

Oppimateriaali muodostuu teoriaa avaavien pohdintatehtävien ympärille, joissa opiskelija haastetaan oppimaan keskustelun ja oman pohdinnan kautta. Oppimateriaalin tehtävien tehtävätyypit toteutetaan artikkelin *Collaborative Learning in Mathematics* [29] mukaisesti, sillä ne tukevat oppimateriaalin koostavia tehtäviä ja tavoitteita sekä edistävät opitun asian ymmärtämistä. Seuraavaksi esitellään työryhmämme valitsemat kolme tehtävätyyppiä kyseisestä artikkelista.

Päättelyn ja ratkaisujen analysointi (analysing reasoning and solutions)

Oppimateriaalin tehtävät, jotka edellyttävät päättelyn ja ratkaisujen analysointia, on laadittu siirtämään pääpaino vastauskeskeisyydestä tilanteeseen, jossa opiskelija keskittyy vaihtoehtoisten ratkaisutapojen analysointiin ja päättelyketjujen järjestämiseen. Lisäksi päättelyssä tehtyjen virheiden korjaamiseksi opiskelija tulkitsee muiden ratkaisuja, tunnistaa niistä mahdolliset virheet ja korjaa ne. Näin opiskelija asettuu kriittiseen ja neuvovaan rooliin. Erilaisten ratkaisutapojen analysoiminen ja päättelyvirheiden korjaaminen toisen ratkaisussa luo itsevarmuutta opiskelijalle matemaattisena osaajana ja kokonaisuuksien hahmottajana.

Yleistyvänä tehtävätyyppinä uusimmissa matematiikan ylioppilaskirjoituksissa käytetään päättelyn ja ratkaisujen analysointia. Opiskelijan oppimisen painopiste pyritään siirtämään loogiseen ja rakenteelliseen päättelyyn teknisen tarkkuuden sijasta. Opiskelijaa tulisikin opetussuunnitelman tavoitteen tavoin rohkaista kokeilevaan ja tutkivaan matematiikkaan, erilaisien ratkaisujen keksimiseen ja niiden kriittiseen arviointiin [22]. Siksi looginen ja rakenteellinen päättely näkyvätkin vahvasti matemaattisessa todistamisessa.

Matemaattisten väitteiden ja lauseiden arviointi (evaluating mathematical statements)

Opiskelijan matemaattisen osaamisen olennainen taito on erilaisten matemaattisten väitteiden ja lauseiden arviointi. Taitoa kehitetään perustelemalla ovatko väitteet aina, toisinaan vai eivät koskaan totta ja niihin aina sisältyy vastaesimerkkien, todistusten sekä selitysten tuottaminen opiskelijan logiikan tukemiseksi. Erityisesti matemaattisissa todistuksissa voidaan pyytää lisäämään ehtoja tai muuttamaan todistuksia niin, että ne ovat aina päteviä. Jotta ymmärtäisi todistusten paikkaansapitävyyden, tulee oppia tarkastelemaan todistuksia monien eri ehtojen avulla monista eri näkökulmista. Tällainen kehittää opiskelijan kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa omia perusteluja sekä pakottaa opiskelijaa kohtaamaan yleisiä vaikeuksia ja väärinkäsityksiä.

Omien ongelmatehtävien luominen (creating problems)

Matematiikan syvällinen oppiminen kehittyy luontevasti sosiaalisessa vuorovaikutuksessa, jossa opiskelija tekee ongelmatehtävän toiselle opiskelijalle ratkaistavaksi. Kyseinen oppimisprosessi on keino oppia hahmottamaan matemaattisia kokonaisuuksia ja ymmärtämään asioita perusteellisemmin. Prosessissa ongelman kehittäjä toimii opettajan ja selittäjän roolissa, mikä kehittää opiskelijan taitoa selittää ja järkeillä ongelmiaan sanallisesti. Joissain tapauksissa saatu ratkaisu ei kuitenkaan ole ainoa ratkaisu, jolloin opiskelijoiden välille syntyy edistävää vuorovaikuttavaa keskustelua. Ongelmatehtävien luominen on oppimisen kannalta tärkeää, sillä ne kannustavat opiskelijaa kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin [22].

3 Oppimateriaalin perustelut

Tässä osassa perustellaan oppimateriaalissa tehdyt valinnat pohjautuen tieteellisiin artikkeleihin. Joidenkin artikkelien tutkimuksissa on tuotu esille opiskelijoilla huomattuja oppimisen ongelmakohtia ja toimintatapoja, joihin kiinnitetään huomiota oppimateriaalin pohdintatehtävissä joko artikkelin ehdottamin keinoin tai muulla tavoin.

3.1 Epäsuora todistus

3.1.1 Käänteinen todistus

Artikkelissa *Selkeyttä todistamiseen koulumatematiikasssa* todetaan, että epäsuoran todistuksen idea ja todistusprosessin selkeä rakentaminen kuuluvat matemaattiseen yleissivistykseen [19]. Tämä näkyy myös opetussuunnitelmassa asetetuissa sisällöllisissä tavoitteissa [22]. Opiskelijat omaavat hyvän kyvyn päätellä asioita ja perustella väittämiään sosiaalisissa tilanteissa, mutta todistuksien teknisten ominaisuuksien ja käsitteiden ymmärtäminen ei onnistu luonnostaan [11, 13]. Siksi käänteisessä todistamisessa opiskelijan huomio halutaan heti alusta asti kiinnittää todistuksen rakenteen pätevyyteen ja sen sisältämiin käsitteisiin.

Opiskelijan tulee ymmärtää tarve todistukselle, jotta todistuksen idea voidaan onnistuneesti sisäistää [9, 27]. Pohdintatehtävässä A.1 aiemmin opittu suora todistaminen ei ole järkevää, minkä seurauksena opiskelija päätyy huomaamaan uuden todistusmenetelmän tarpeellisuuden. Siten pohdinta toimii opiskelijan tutkivan ajettelun herättäjänä.

Käänteisen todistamisen kappaleessa hyödynnetään vaiheittain eteneviä pohdintatehtäviä, joiden avulla käänteiselle todistamiselle rakennetaan vahva perusta. Kyseisten vaiheiden avulla opiskelija tutkii todistuksen rakennetta, perustelee todistusmenetelmän pätevyyden ja lopuksi rakentaa niiden avulla matemaattisen todistuksen. Opiskelijalle tällaisten vaiheiden on huomattu olevan paras keino syvällisen oppimisen saavuttamiseksi, sillä niiden myötä käänteisesti todistettava lause huomataan todeksi ja myös miksi se on totta [11].

Stylianideksen ja kollegoiden käänteistä todistusta koskevassa tutkimuksessa opiskelijoiden huomattiin suoriutuvan paremmin sanallisessa kontekstissa kuin symbolisessa. Lisäksi symbolisessa päättelyssä opiskelijoiden looginen kykenevyys havaittiin alhaisemmaksi. Näin ollen tutkimuksen perusteella voidaan sanoa, että opetuksessa tulisi hyödyntää opiskelijoiden sanallisen päättelyn vahvuuksia. Tästä on myös hyötyä myöhemmin, sillä sanallinen päättely auttaa opiskelijoita ymmärtämään paremmin rakenteellisesti samanlaisia symbolisia konteksteja. [28] Näistä syistä käänteisen todistuksen ideaa lähestytään pohdinnalla A.2, jossa opiskelija hyödyntää sanallista ongelmanratkaisua.

Vaikka todistamisen apuna käytettävää logiikkaa pidetään usein tarpeettomana [19], tulee opiskelijan kuitenkin ymmärtää kontraposition lain merkitys todistusmenetelmässä, jotta todistusmenetelmän idea sisäistettäisiin kokonaan [17, 19]. Tästä syystä onkin tärkeää, että logiikkaa hyödynnetään täsmällisen matemaattisen esityksen ymmärtämiseksi [19]. Lisäksi annetun väitteen ja sen kontraposition loogisen ekvivalenttiuden ymmärtäminen on tärkeää, sillä ilman sen ymmärtämistä opiskelijoilla on huomattu olevan vaikeuksia uskoa todistuksen paikkaansapitävyyteen [28]. Pohdintatehtävä A.3 perustuu logiikan perusteiden soveltamisen lisäksi todistustavan analysointiin [29]. Näin opiskelija ymmärtää, että ei ole olemassa vain yhtä oikeaa tapaa todistaa.

Miazakin toimintamallin mukaan todistuksen rakenteen ymmärtämiseksi opiskelijan tulisi aluksi kiinnittää huomiota todistuksen elementteihin ja sen jälkeen elementtien välisiin suhteisiin. Tällä tavalla opiskelija omaksuisi parhaiten yksinkertaisten todistusten rakenteiden yhteyksiä. [21] Kyseistä toimintamallia hyödynnetään pohdinnassa A.4, jossa palataan pohdinnan A.1 lauseen todistamiseen uuden todistusmenetelmän avulla. Vuokaaviolla muodostetaan todistettavan lauseen käänteisen todistuksen symbolinen rakenne, minkä avulla opiskelija pystyy näkemään, kuinka oletukset ja erilaiset johtopäätökset liittyvät toisiinsa [21]. Pohdinnassa Miazakin toimintamalliin yhdistyy myös Heinzen ja Reissin esittämät menetelmätiedon kolme näkökulmaa, joita hyödyntämällä opiskelija oppii tuottamaan matemaattisia todistuksia. Ensimmäisenä näkökulmana otetaan huomioon todistusjärjestelmä, jonka mukaan matemaattinen todistus on päättelymalli, joka koostuu deduktiivisista perusteluista. Seuraavaksi huomioidaan todistusrakenne, jonka perusteella todistus aloitetaan tietyistä oletuksista ja päätetään tiettyyn väitteeseen. Lopuksi tarkastellaan loogista ketjua, jonka avulla todistuksen jokainen vaihe voidaan päätellä aikaisempien vaiheiden avulla. [12]

Käänteiseen todistamiseen on valittu kolme harjoitustehtävää. Harjoitustehtävissä 1 ja 2 hyödynnetään koodinvaihtotehtävää, jossa matemaattisella kielentämisellä kannustetaan opittavan asian todelliseen sisäistämiseen [15]. Matemaattisella kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisua matematiikan luonnollisen kielen, symbolisen kielen ja kuviokielen avulla [14]. Näissä harjoitustehtävissä yllä esiteltyjen kielten välillä liikkuminen nähdään koodinvaihtona, missä matematiikan symbolikielellä esitetty ratkaisu kuvataan luonnollisella kielellä ja päinvastoin. Viimeinen harjoitustehtävä on sanallinen tehtävä, missä opiskelijalle annetaan arkielämän esimerkki käänteisestä todistamisesta. Kaikissa harjoitustehtävissä keskitytään erityisesti todistuksien teknisiin ominaisuuksiin, käsitteiden ymmärtämiseen ja loogiseen päättelyyn.

3.1.2 Ristiriitatodistus

Tutkimusten perusteella voidaan yksimielisesti sanoa, että epäsuora todistus, erityisesti ristiriitatodistus, koetaan opiskelijoiden keskuudessa haastavaksi [7, 8, 13, 17, 24]. Haasteita, joita todistamisessa havaitaan ovat: vaikeus aloittaa todistusta, matemaattisen kielen ja sen merkintöjen puutteellinen käyttö ja opiskelijan vaillinainen todistamiskäsitys [7]. Varsinkin matemaattisten lauseiden totuuden määrittäminen todistamalla on yleisesti ottaen hankalaa ja vaikka opiskelijat olisivatkin motivoituneita, eivät he välttämättä onnistuisi lauseiden todistuksissa [9]. Siksi ristiriitatodistuksissa onkin tärkeää hyödyntää opiskelijoilla olevaa aiempaa tietoa ja ymmärrystä loogisista perustyökaluista.

Formaalien ristiriitatodistuksien hankaluudesta huolimatta opiskelijat käyttävät sujuvasti ristiriitaista kumoamista omissa väitteissään. Tämä viittaa siihen, että päätelmien tekeminen ei tuota todistuksien ongelmaa. [24] Samankaltaisia tuloksia havaitsi myös Demiray, missä opiskelijat onnistuneesti perustelivat ristiriitaisuutta sisältäviä pohdintoja [7]. Todistaminen usein mielletäänkin ongelmanratkaisuna, missä päättelyjä todennetaan järkeviksi [19]. Lisäksi ongelmanratkaisuun liittyy todistamisajattelua, kun kuvataan ratkaisussa esiintyviä päättelyprosesseja [18]. Pohdinnassa A.5 opiskelija hyödyntää ongelmanratkaisutaitojaan arkielämään liittyvässä ristiriitatodistuksessa. Näin pohdinta luo perustaa opiskelijan ymmärrykselle todistusmenetelmästä ennen formaalin rakenteen tutkimista.

Usein opiskelijat muistavat joitain matemaattisia käsitteitä, mutta he kuitenkin tukeutuvat liiaksi opettajan antamaan tietoon sen sijaan, että muodostaisivat omia merkityksellisiä päätelmiä. Matemaattinen todistus edellyttääkin opiskelijalta uusien päätelmien luomiseksi useiden aiempien päättelyiden ymmärtämistä. [4] Pohdinta A.6 hyödyntää todistuksen analysointiin ainoastaan opiskelijan aiemmin oppimaa tietoa, jotta päättelyiden hahmottaminen ja rakenteen ymmärtäminen olisi luontevampaa. Kappaleen kokonaisuutta on luontevaa jatkaa pohdinnalla A.7, jossa opiskelija perustelee todistusmenetelmän pätevyyden logiikan perusteiden avulla. Todistusmenetelmän teoreettinen ymmärtäminen vaatii sekä huomiota asioiden yhteyksiin ja loogisiin lähtökohtiin, mutta myös todistusmenetelmän loogisuuteen [5].

Pohdinnassa A.8 analysoidaan luvun $\sqrt{2}$ irrationaalisuustodistusta. Tehtävän kysymyksillä opiskelijan huomio kohdistetaan todistuksen perusteleviin välivaiheisiin, jotka pohjautuvat aiemmin opittuun tietoon, kuten rationaaliluvun esittämiseen murtolukuna, murtoluvun tekijöihin ja luvun ja sen neliön parillisuuteen. Jos ristiriitatodistuksien sisältämiä vaikeuksia halutaan ehkäistä, on erityisen tärkeää yhdistää menetelmän perusajatus opiskelijoiden aikaisempaan kokemukseen [8]. Tehtävän väitelause on muutettu perinteisen "osoita, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku" sijaan selkeämpään muotoon, jossa on selkeästi nähtävissä oletus ja väite. Tällainen klassinen esitysmalli kiinnittää huomiota todistuksen täsmällisyyteen hyödynnettäessä annettua rakennetta [19]. Lisäksi artikkelissa *Why is proof by contradiction difficult?* tuodaan esille, että luvun $\sqrt{2}$ irrationaalisuustodistukseen harvoin liittyy todistamisen tarvetta, kun opiskelijaa pyydetään lukemaan tai tuottamaan kyseinen todistus [24]. Siksi pohdinnan todistuksen tarkoituksena on myös toimia ennakkotietona harjoitustehtävään 4, jossa opiskelija huomaa konkreettisesti kyseisen todistuksen tarpeellisuuden.

Harjoitustehtäviä kappaleeseen on otettu mukaan kolme. Harjoitustehtävässä 4 opiskelijan toiminta rakentuu todistusajatteluun kuuluvien perustelujen miettimisen ja esittämisen ympärille. Opiskelija joutuu hyödyntämään todistusajatteluaan epäpätevän todistuksen korjaamiseen. Tällä pyritään ehkäisemään todistamisen ajattelua toimintana, jonka tarkoituksena on ensisijaisesti varmistaa hyvät arvosanat, ei tarkistaa tai selittää matemaattisia lauseita [24]. Toisen tehtävän tarkoituksena on varmistaa, että opiskelija ymmärtää ristiriitatodistuksen. Tehtävässä kiinnitetään erityisesti huomiota ristiriitatodistuksen rakenteeseen ja välivaiheiden järjestyksen loogisuuteen [29]. Viimeinen tehtävä antaa mahdollisuuden kehittää opiskelijoiden matemaattisen kirjoittamisen, aiempien käsitteiden ja kokonaislukujen ominaisuuksien hallintaa, samalla yhdistäen ne ristiriitatodistuksen muodostamiseen.

3.2 Induktiotodistus

Opiskelijoilla on yleisesti huomattu olevan vaikeuksia ymmärtää matemaattisen todistamisen käsitettä. Käsitteen ymmärtämistä vaikeuttaa opiskelijoilta usein puuttuva matemaattisen sisällön tuntemus, joka näkyy matemaattisessa kirjoittamisessa ja tehtävien analysoimisessa. Lisäksi opiskelijoilla on huomattu olevan erityisesti vaikeuksia tehtävien eri vaiheiden seuraamisessa, matemaattisten symboleiden käytössä sekä tutkittavien lauseiden oikeinymmärryksessä. [3] Näihin vaikeuksiin pyritään erityisesti kiinnittämään huomiota oppimateriaalin induktiotodistus -kappaleessa.

Pohdinnassa A.9 matemaattista induktiotodistusta lähestytään tutun pelin avulla. Pelin idea on esitetty artikkelissa *Playing with Dominos* dominoefekti -oppitilanteena, jonka avulla voidaan yhdistää opiskelijan arkielämän tilanne matemaattisen induktiotodistuksen lähtökohtiin [16]. Myös Ernest esitteli induktiotodistuksen havainnollistamisen dominojen avulla [10]. Pohdinnassa oppitilanteeseen yhdistetään matemaattisten mallien etsiminen [6], jolla tuetaan opiskelijoiden tapaa yhdistää todistuksen logiikka jokapäiväiseen arkielämään ja yleiseen päättelyyn [3]. Pohdinnassa pyritään siihen, että opiskelija hahmottaisi annettujen tilanteiden avulla matemaattisen induktiotodistuksen lähtökohtia ja rakenteen muodostumista.

Shmuel Avital ja Shlomo Libeskind esittelevät artikkelissa *Mathematical induction in the classroom: didactical and mathematical issues* induktiotodistusta hahmottelevan esimerkin. Esimerkissä havainnollistetaan väitteen totuuden tutkimista tietyillä luvuilla hyödyntäen aina edellisen vaiheen totuutta, minkä myötä opiskelija ymmärtää koko väitteen totuuden vaativan äärettömän monen implikaatiovaiheen todistamista yhdellä kertaa. [2] Kyseisen esimerkin ideaa sovelletaan pohdintatehtävässä A.10. Pohdinnassa opiskelija muodostaa päättelyn edellisen vaiheen hyödyntämiselle ja sen avulla päättelee lukuun $n + 1$ siirtymisen luvun n kautta. Tämän pohjalta opiskelija tutkii luvun totuuden muodostumista edellisen luvun avulla.

Jotta opiskelija voi onnistuneesti kirjoittaa ja ymmärtää matemaattisia induktiotodistuksia, hänellä tulee olla ymmärrys suorittaa useita alatehtäviä, jotka liittyvät alkuaskeleeseen ja induktioaskeleeseen. On myös ymmärrettävä miksi nämä alatehtävät yhdessä todistavat alkuperäisen väitteen. [1] Stylianideksen ja kollegoiden tutkimuksessa opiskelijoilla huomattiin olevan vaikeuksia ymmärtää, että alkuaskel ja induktioaskel yhdessä tuottavat äärettömän monen väitteen totuuden [26]. Tähän ymmärrykseen kiinnitetään huomiota pohdinnalla A.12. On huomattu, että opiskelijat oppivat todistustekniikan aluksi mekaanisena algoritmina, jossa todistustekniikkaa hyödynnetään tietyn tyyppisten väitteiden todistamiseen. Seuraavassa prosessi -vaiheessa opittua todistustekniikkaa hyödynnetään erilaisiin ongelmiin ja viimeisessä väite -vaiheessa ymmärretään, että todistustekniikalla saavutetaan matemaattisen väitteen totuus. [30] Pohdinnan keskeisenä tarkoituksena on auttaa opiskelijaa ymmärtämään syvällisemmin induktiotodistuksen väite -vaihe.

Matemaattista induktiotodistamista jatketaan pohdinnalla A.13, jossa opiskelija luokittelee matemaattisen induktiotodistuksen vaiheisiin oikeat välivaiheet [29]. Alussa opiskelija usein oppii tuottamaan todistuksia seuraamalla mekaanisia vaiheita, mutta myöhemmin todistusten rakentamista ulkomuistista kuitenkin halutaan vähentää. Siksi on tärkeä antaa opiskelijalle mahdollisuus hyödyntää todistustekniikan rutiinia perustana todistuksen syvälliseen ymmärtämiseen. [30] Tämän edistämiseksi pohdinnassa luokittelun avulla autetaan opiskelijaa hahmottamaan todistuksen rakennetta ja ymmärtämään jokaisen välivaiheen merkitys väitteen induktiotodistuksessa.

Yleisen induktiotodistuksen käsittely aloitetaan pohdinnalla A.14, jossa visuaalisen esityksen avulla tutkitaan induktiotodistuksen alkuaskelta. Visuaalisuudella on huomattu olevan johdonmukaisempi vaikutus opiskelijoiden sisäiseen matemaattiseen ymmärrykseen ja todistuksen rakenteeseen [1, 6]. Kyseisessä pohdinnassa opiskelija konkreettisesti oppii, kuinka yleinen induktiotodistus eroaa matemaattisesta induktiotodistuksesta. Alkuaskeleen hahmottamista jatketaan pohdinnassa A.17, jossa opiskelijan tulee väitettä tutkimalla ratkaista väitteen alkuarvo. Osaltaan tehtävään yhdistetään myös väitteen paikkaansapitävyyden tutkiminen. Väitteen paikkaansapitävyyden esimerkit ovat tärkeitä, koska ne antavat opiskelijoille itsevarmuutta uskoa väitteen paikkaansapitävyyteen [3]. On kuitenkin oltava tarkkana, sillä opiskelijoilla on huomattu olevan tapana tehdä näitä esimerkkejä formaaliin todistukseen [25]. Tämän välttämiseksi pohdinnassa todistamista käsitellään vain alkuaskeleen osalta.

Induktiotodistuskokonaisuuteen valittiin seitsämän harjoitustehtävää. Ensimmäisessä tehtävässä hyödynnetään todistuksen välivaiheiden järjestämistä [29], minkä avulla opiskelija vahvistaa ymmärrystään induktiotodistuksesta. Toisessa tehtävässä muodostetaan sanallisen selityksen avulla formaali matemaattinen todistus. Tällä tavalla ennaltaehkäistään opiskelijoiden yleistä tapaa noudattaa vain tarkasti induktiotodistuksen ehtoja ymmärtämättä todistamisen tarkoitusta [26]. Lisäksi tehtävä kehittää etenkin opiskelijan matemaattista ymmärtämistä ja matemaattisen kielen käyttöä. Kolmas harjoitustehtävä yhdistää visuaalisuuden ja matemaattisen induktiotodistamisen [6]. Tehtävässä opiskelijan tulee osata yhdistää visuaalisia perusteluja matemaattisen todistamisen tueksi. Neljäs tehtävä on valitsemamme tehtävätyypin mukainen [29], missä opiskelijan tehtävänä on etsiä virhe analysoimalla pätevää ja virheellistä todistusta. Seuraavassa harjoitustehtävässä opiskelija hyödyntää osaamistaan yleisen jäsenen lausekkeen todistamiseen täydentämällä annettuun todistusrunkoon perustelevat välivaiheet. Välivaiheiden avulla opiskelijan huomio kiinnitetään erityisesti jonon muodostavien lausekkeiden käyttöön ja todistuksen sisällölliseen ymmärtämiseen, sillä monilla heikommin menestyvillä opiskelijoilla on todettu olevan hankaluuksia oivaltaa matemaattisia ominaisuuksia induktiotodistamisessa [20]. Toiseksi viimeinen harjoitustehtävä keskittyy väitteen alkuarvon hahmottamiseen. Viimeinen tehtävä tarjoaa opiskelijoille haastetta Fibonaccin lukujonon avulla.

Viitteet

[1] Andrew, L. (2007). Reasons Why Students Have Difficulties with Mathematical Induction. *Online Submission.*

[2] Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: Didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics*, 429-438.

[3] Baker, J. D. (1996). Students' difficulties with proof by mathematical reasoning. Paper presented at *the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.*

[4] Barnard, T., & Tall, D. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. In *L. Puig & A. Guiterrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 2–41.

[5] Brown, S. A. (2018). Are indirect proofs less convincing? A study of students' comparative assessments. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 1-23.

[6] Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402.

[7] Demiray, E., & Bostan, M. I. (2017). Pre-service middle school mathematics teachers' evaluations of discussions: the case of proof by contradiction. *Mathematics Education Research Journal*, 29(1), 1-23.

[8] Epp, S. S. (1998). A unified framework for proof and disproof. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 708-713.

[9] Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-899.

[10] Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 173-189.

[11] Hanna, G., de Villiers, M., & International Program Committee. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM*, 40(2), 329-336.

[12] Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.*

[13] Jourdan, N., & Yevdokimov, O. (2016). On the Analysis of Indirect Proofs: Contradiction and Contraposition. *Australian Senior Mathematics Journal*, 30(1), 55-64.

[14] Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2010). Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. *Teoksessa E. Ropo & H. Silfverberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat.* Tampere: Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisusarja A31, 77-90.

[15] Joutsenlahti, J., Sarikka, H., Kangas, J., & Harjulehto, P. (2013). Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa. In *Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Assosiation.* Jyväskylä, 59-70.

[16] Kaplan, G. (2009). Playing with Dominoes: Proof by Induction. *Mathematics Teacher*, 102(6), 426-431.

[17] Lin, F. L., Lee, Y. S., & Wu Yu, J. Y. (2003). Students' understanding of proof by contradiction. In *N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 2003 joint meeting of PME and PMENA*, 4, 443-449.

[18] Malinen, P. (1998). Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun. *Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P.(toim.) Matematiikka–näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti & koulutuksen tutkimuslaitos, 99-110.

[19] Malinen, P. (1996). Selkeyttä todistamiseen koulumatematiikassa. *Dimensio*, 60(5), 22-24.

[20] Michaelson, M. T. (2008). A literature review of pedagogical research on mathematical induction. *Australian Senior Mathematics Journal*, 22(2), 57.

[21] Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs. *ZDM*, 47(7), 1211-1224.

[22] Opetushallitus. (2015) *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.*

[23] Opetushallitus. (2019) *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019 luonnos.*

[24] Reid, D. A., & Dobbin, J. (1998). Why is proof by contradiction difficult?. In *PME conference*, 4, 4-41.

[25] Stavrou, S. G. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1.

[26] Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145-166.

[27] Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical thinking and learning*, 10(2), 103-133.

[28] Stylianides, A. J., Stylianides, G. J., & Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 133-162.

[29] Swan, M. (2006). Collaborative learning in mathematics. *A Challenge to our Beliefs.*

[30] Weber, K. (2003). A Procedural Route toward Understanding the Concept of Proof. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 395-401.

A Epäsuora todistus ja induktiotodistus

A.1 Käänteinen todistus

Pohdinta A.1 Matti yritti todistaa lauseen "jos kokonaisluvun neliö on parillinen, niin kokonaisluku on parillinen" suoralla todistuksella.

Todistus. Oletuksen mukaan on olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}$, että $a^2 = 2k$.
Nyt

$$\begin{aligned} a^2 &= 2k \quad \mid \pm \sqrt{} \\ a &= \pm\sqrt{2k}, \text{ missä } 2k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

- Mitä todistuksen perusteella voidaan sanoa luvun a parillisuudesta?
- Onnistuiko Matti todistamaan lauseen?

Äskeisessä pohdinnassa konkreettisesti huomattiin, että välttämättä suoratodistaminen ei ole aina toimivaa tai järkevää, ja sen vuoksi on kehitettävä uusia todistusmenetelmiä.

Pohdinta A.2 Maija saapui kotiin koulupäivän jälkeen. Kotona äiti kysyi Maijalta, että mitä hän aikoo tehdä tänään. Maija vastasi: "jos sataa, niin olen sisällä leikkimässä". Tähän äiti vastasi, että "kuulostaa loogiselta". Kuitenkin hetken päästä Maija huutaa äidilleen ikkunasta, että "olen ulkona leikkimässä".

Mitä äiti voi päätellä säästä Maijan puheiden perusteella? Selitä, miten päädyit vastaukseesi.

Edellä hyödynnettiin käänteistä todistamista ongelmanratkaisutilanteessa. Tämän kappaleen tarkoituksena on tutustua käänteiseen todistukseen, joka on toinen epäsuoraan todistamiseen kuuluvista todistusmenetelmistä. Käänteistä todistusta hyödynnetään esimerkiksi pohdinnan A.1 lauseen todistamisessa, mihin palataan myöhemmin uudestaan. Lähdetään tutkimaan tarkemmin, kuinka käänteinen todistus muodostuu ja miksi se on pätevä todistusmenetelmä.

Pohdinta A.3 Lause "jos luku $5n - 7$ on parillinen, niin luku n on pariton" voidaan osoittaa todeksi suoran todistuksen sijaan käänteisellä todistuksella. Tarkastele todistusta ja vastaa kysymyksiin.

Käänteinen todistus

Todistus. Vastaväite: Luku n on parillinen eli on olemassa $k \in \mathbb{Z}$, että $n = 2k$.
Nyt

$$\begin{aligned} 5n - 7 &= 5(2k) - 7 \\ &= 10k - 7 \\ &= 10k - 8 + 1 \\ &= 2(5k - 4) + 1 \end{aligned}$$

Koska $k \in \mathbb{Z}$, niin $5k - 4 \in \mathbb{Z}$. Siten luku $5n - 7$ on pariton. Tällöin alkuperäinen lause on totta. □

a) Mistä ja minkä konnektiivin avulla vastaväite on muodostettu?

b) Mihin todistettavan lauseen osaan ja minkä konnektiivin avulla käänteisen todistuksen lopputulos voidaan yhdistää?

c) Olkoon A: "Luku $5n - 7$ on parillinen" ja B: "n on pariton". Näiden avulla formalisoituna todistettava lause on $A \Rightarrow B$ ja käänteisen todistuksen sisältämä yhdistetty lause on $\neg B \Rightarrow \neg A$. Ovatko nämä lauseet loogisesti ekvivalentit?

d) Mihin tautologiaan c)-kohdan lauseet viittaavat? Kyseisen tautologian perusteella, milloin lause $A \Rightarrow B$ on totta?

Käänteinen todistus eli kontrapositiotodistus

Lause $P \Rightarrow Q$ voidaan osoittaa todeksi osoittamalla, että lause $\neg Q \Rightarrow \neg P$ on tosi.

Todistuksen rakenne: Oletetaan, että väite Q ei ole totta eli muodostetaan vastaväite $\neg Q$ ja johdetaan sen avulla $\neg P$. Tällöin on saatu osoitettua, että lause $P \Rightarrow Q$ on totta.

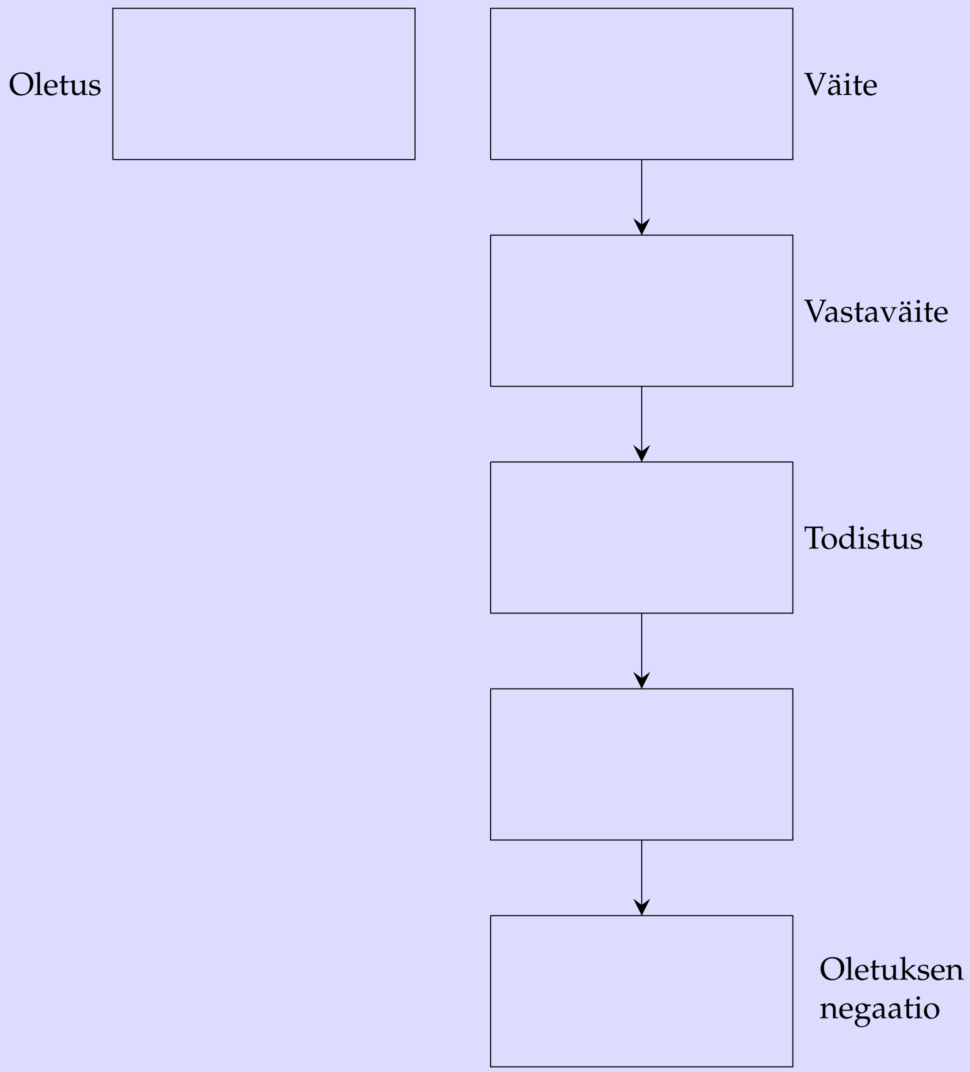
Logiikan perusteet -osiossa opittiin, että lauseet $P \Rightarrow Q$ ja $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ovat loogisesti ekvivalentit. Tällöin $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ on tautologia. Käänteinen todistus siis perustuu tautologiaan, joka tunnetaan kontraposition lakina.

Pohdinta A.4 Pohdinnassa A.1 Matti ei onnistunut todistamaan lausettaan. Nyt käytössä on uusi todistusmenetelmä. Muodosta Matin lauseen käänteisen todistuksen rakenne yhdistämällä annetut välivaiheet vuokaavioon oikeille paikoille.

Välivaiheet:

a parillinen	$a^2 = 4k^2 + 4k + 1$
a^2 parillinen	$a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, missä $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$
$a^2 = (2k+1)^2$	a pariton eli $a = 2k + 1$, missä $k \in \mathbb{Z}$

Vuokaavio:



Harjoitustehtävät

1. Alla on esitetty jonkin lauseen käänteinen todistus. Mikä annetuista vaihtoehdoista kuvaa todistuksessa todistettavaa lausetta?

> *Todistus.* Vastaväite: a ja b ovat parittomia, jolloin on olemassa sellaiset $k, l \in \mathbb{Z}$, että $a = 2k + 1$ ja $b = 2l + 1$.
> Nyt
> $$\begin{aligned} ab &= (2k+1)(2l+1) \\ &= 4kl + 2k + 2l + 1 \\ &= 2(kl + k + l) + 1, \end{aligned}$$
> missä $kl + k + l \in \mathbb{Z}$. Siten luku ab on pariton. □

Vaihtoehdot:

1. Jos kahden luvun tulo on parillinen, niin molemmat luvuista ovat parittomia.
2. Jos kahden luvun tulo on parillinen, niin jompikumpi luvuista on parillinen.
3. Kahden parittoman luvun tulo on pariton.
4. Jos kahden luvun tulo on pariton, niin jompikumpi luvuista on parillinen.

2. Muodosta Matildan selityksestä matemaattisesti esitetty käänteinen todistus.

> Todistan väitteen, jos $7n + 9$ on parillinen, niin n on pariton, käänteisellä todistuksella. Muodostan vastaväitteen, jonka mukaan n on parillinen. Sijoitan luvun $n = 2k$ lukuun $7n + 9$. Avaan sulkeet ja jaan luvun yhdeksän kahden luvun summaksi. Otan yhteiseksi tekijäksi luvun kaksi. Nyt luku on selvästi pariton, joten alkuperäinen väite pätee.

3. Matematiikan kurssilla on 24 opiskelijaa. Opiskelijoilla on yhteensä 100 kirjaa laukuissaan. Osoita, että ainakin yhdellä opiskelijalla on enemmän kuin 4 kirjaa laukussaan.

A.2 Ristiriitatodistus

Tässä kappaleessa perehdytään ristiriitatodistukseen, joka on käänteisen todistuksen lisäksi toinen epäsuoraan todistamiseen kuuluva todistusmenetelmä. Todistusmenetelmä nimensä mukaisesti perustuu ristiriitaan, joka on aina epätosi lause. Kuitenkaan sitä mistä ja miten ristiriita löydetään, ei voida tietää varmasti.

Pohdinta A.5 Opettaja ja kolme opiskelijaa keskustelevat matematiikan oppitunnilla. Tutki keskustelua ja vastaa kysymyksiin.

Opettaja: "Kuinka voitte tietää, että tänään ei ole itsenäisyyspäivä?"

Opiskelija 1: "Olisin kotona katsomassa Tuntematonta sotilasta."

Opiskelija 2: "Meillä ei olisi koulua."

Opiskelija 3: "Päivämäärä olisi 6.12."

Opettaja: "Joten, jos olisi itsenäisyyspäivä, niin sanomienne asioiden tulisi olla totta."

1. Mitä jokainen opiskelija oletti päivästä?
2. Ovatko opiskelijoiden asiat tosia ja mitä sen avulla voidaan päätellä päivästä?

Ristiriitatodistuksesta käytetään myös latinankielistä nimitystä *reductio ad absurdum*, joka tarkoittaa palautumista järjettömään. Edellisessä pohdinnassa huomattiin, että opiskelijat olisivat olleet kahdessa paikassa samaan aikaan, mikä olisi ollut järjetöntä. Ristiriitatodistuksessa halutaan päätyä mahdottomaan tilanteeseen, jolloin syntyisi tarvittu ristiriita.

Pohdinta A.6 Lause "jos n on pariton, niin $n+1$ on parillinen" voidaan osoittaa todeksi ristiriitatodistuksella. Tutkia todistusta ja vastaa kysymyksiin.

Ristiriitatodistus

Todistus. Vastaväite: Luku $n+1$ on pariton eli on olemassa $l \in \mathbb{Z}$, että $n+1 = 2l+1$. Lisäksi oletuksen mukaan on olemassa $k \in \mathbb{Z}$, että $n = 2k+1$. Tutkitaan kahden peräkkäisen luvun $n+1$ ja n erotusta:

$$\begin{aligned} 1 &= n+1-n \\ &= 2l+1-(2k+1) \\ &= 2l-2k \\ &= 2(l-k), \end{aligned}$$

missä $l-k \in \mathbb{Z}$. On päädytty ristiriitaan, joten vastaväite on epätotta ja väite totta. $\square$

- Minkä muodostamisesta todistus lähtee liikkeelle?
- Mitä tietoa todistuksessa on hyödynnetty vastaväitteen lisäksi? Mitä todistuksessa tutkitaan erotuksen avulla?
- Millaiseen lopputulokseen todistuksessa päädytään ja minkä asian kanssa se on ristiriidassa?

Ristiriitatodistus

Lause $P \Rightarrow Q$ voidaan osoittaa todeksi osoittamalla, että lauseesta $(P \wedge \neg Q)$ seuraa epätosi asia eli ristiriita R.

Todistuksen rakenne: Oletetaan, että väite Q ei ole totta eli muodostetaan vastaväite $\neg Q$. Johdetaan vastaväitteen ja oletuksen P avulla jokin ristiriita R.

Pohdinta A.7 Alla on esitetty ristiriitatodistuksen perusteleva totuustaulu. Vastaa kysymyksiin hyödyntäen logiikan perusteita.

1. Ristiriita on aina epätosi lause. Millaisia totuusarvoja se saa? Lisää totuusarvot alla olevaan totuustauluun.
2. Täydennä totuustaulu loppuun. Mitkä totuustaulun lauseista ovat loogisesti ekvivalentit?
3. Muodosta kohdan 2 lauseiden välille ekvivalenssi. Tutki sen saamia totuusarvoja ja perustele milloin lause $P \Rightarrow Q$ on totta.

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	R	$P \Rightarrow Q$	$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$

Ristiriitatodistuksessa siis muodostetaan vastaväite, jossa oletetaan, että väite ei pidä paikkaansa. Vastaväitteen ja oletuksen avulla päädytään ristiriitaan tunnettujen tosiasioiden kanssa. Tällöin vastaväite on epätosi ja väite on totta.

Ristiriitatodistuksessa on oltava tarkkana. On mietittävä huolella mitä todistaa ja millaisia oletuksia ja asioita tiedetään todeksi.

Pohdinta A.8

Alla on todistettu, että "jos luvun x neliö on 2, niin luku x on irrationaaliluku". Tarkastele todistusta niin, että ymmärrät jokaisen välivaiheen.

Todistus.

Vastaväite: x on rationaaliluku. Vastaväitteen mukaan on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n ($n \neq 0$), että $x = \frac{m}{n}$. Saatetaan murtoluku supistettuun muotoon tekemällä kaikki mahdolliset supistukset. Tällöin murtoluku ei enää supistu, joten enintään toinen kokonaisluvuista on parillinen.

Saadaan

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 \\ \left(\frac{m}{n}\right)^2 &= 2 \\ \frac{m^2}{n^2} &= 2 \\ m^2 &= 2n^2. \end{aligned}$$

Nyt luku m^2 on parillinen, joten myös luku m on parillinen. On siis olemassa sellainen kokonaisluku k, että $m = 2k$.

Saadaan

$$\begin{aligned} m^2 &= 2n^2 \\ (2k)^2 &= 2n^2 \\ 4k^2 &= 2n^2 \\ 2k^2 &= n^2. \end{aligned}$$

Nyt luku n^2 on parillinen, joten myös luku n on parillinen. On päädytty ristiriitaan. □

Vastaa kysymyksiin:

1. Miksi murtoluvun supistumattomuudesta voidaan päätellä enintään toisen kokonaisluvun parillisuus?
2. Mitä tietoa todistuksessa käytetään hyväksi, joka on edellisessä kappaleessa osoitettu?
3. Miksi todistuksessa syntyy ristiriita ja mitä siitä voidaan päätellä?
4. Mikä luku x on nyt todistettu irrationaaliluvuksi?

Harjoitustehtävät

4. Matematiikan kokeessa yhtenä tehtävä oli todistaa ristiriitatodistuksella, että $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku. Matti oli päättänyt kokeilla tehtävää. Kokeen takaisin saadessa Matti oli saanut palautteeksi, että todistus ei ollut pätevä.

Millainen ristiriita todistuksessa syntyi, jota Matti ei ollut huomannut? Mitä neuvoisit Mattia muuttamaan todistuksessa, jotta todistuksesta tulisi pätevä?

Todistus:

Vastaväite: $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ on rationaaliluku.

Rationaaliluku voidaan esittää muodossa $\dfrac{m}{n}$, missä $n \neq 0$ ja $m,n \in \mathbb{Z}$. Murtoluku $\dfrac{m}{n}$ ei supistu.

Nyt saadaan, että

$\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{m}{n}$ (kerrottu ristiin)

$\sqrt{2}\cdot n = m\cdot(1-\sqrt{2})$ (avattu sulkeet)

$\sqrt{2}\cdot n = m - \sqrt{2}\cdot m$ ($+\sqrt{2}\cdot m$)

$\sqrt{2}\cdot n + \sqrt{2}\cdot m = m$ (yhteinen tekijä $\sqrt{2}$)

$\sqrt{2}\,(n+m) = m$ (jaettu $n+m$)

$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n+m}$.

Koska $m \in \mathbb{Z}$ ja $n+m \in \mathbb{Z}$, niin $\sqrt{2}$ voidaan esittää murtolukuna. Eli $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ on rationaaliluku.

5. Järjestä seuraavan todistuksen välivaiheet oikeaan järjestykseen. Perustele vastauksesi.

Osoitettava lause: jos x ($x \neq 0$) on irrationaaliluku, niin sen käänteisluku on irrationaaliluku.

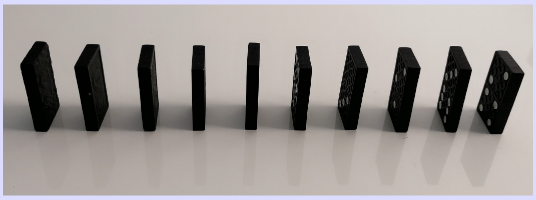
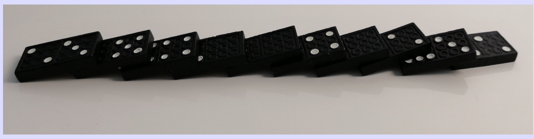
1. $\frac{1}{x} = \frac{m}{n}$
2. x on rationaaliluku
3. $x = \frac{n}{m}$
4. Ristiriita, sillä oletuksen mukaan x on irrationaaliluku
5. Vastaväite: $\frac{1}{x}$ on rationaaliluku
6. $\frac{1}{x}$ voidaan esittää muodossa $\frac{m}{n}$, missä kokonaisluvut $m \neq 0$ ja $n \neq 0$.
7. $xm = n$

6. Osoita ristiriitatodistuksella, että lukua 512 ei voida esittää yhden parittoman ja kahden parillisen luonnollisen luvun summana.

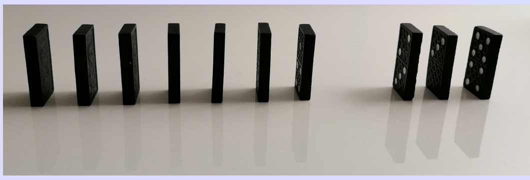
A.3 Induktiotodistus

Pohdinta A.9 Alla on kuvattu erilaisia tilanteita dominoista. Dominoiden avulla voidaan muodostaa dominoefekti, jossa kaikki dominot kaatuvat järjestyksessä. Millaisia ehtoja tarvitaan, että dominoefekti toimisi?

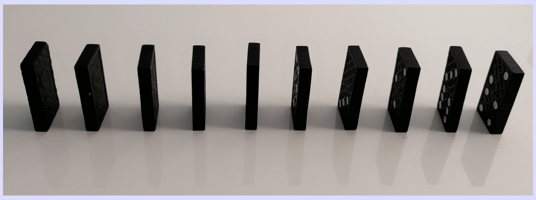
Tilanne 1: Dominot on asetettu paikoilleen ja kaikki dominot kaatuvat.

Tilanne 2: Dominot on asetettu paikoilleen ja 8. domino ei kaadukkaan.




Tilanne 3: Dominot on asetettu paikoilleen ja 6. domino kaatuu.




Dominoefekti on yksi esimerkki käytännön sovelluksesta, missä havaitaan yhtäläisyyksiä matemaattiseen induktioon. Matemaattinen induktio on todistusmenetelmä, jolla pyritään osoittamaan, että väite on totta kaikilla positiivisilla luonnollisilla luvuilla.

Pohdinta A.10 Yritetään todistaa väite 3^n on pariton kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ alla olevan esityksen avulla. Vastaa annettuihin kysymyksiin.

Esitys:

$$
\begin{aligned}
3^1 &= 3, \text{ mikä on pariton.}\\
3^2 &= \underline{\hspace{1cm}} \cdot 3^1 = \underline{\hspace{0.8cm}} \cdot \underline{\hspace{0.8cm}} = 9, \text{ mikä on pariton.}\\
3^3 &= \underline{\hspace{1.5cm}} = \underline{\hspace{1.5cm}} = 27, \text{ mikä on pariton.}\\
3^4 &= \underline{\hspace{1.5cm}} = \underline{\hspace{1.5cm}} = 81, \text{ mikä on pariton.}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

a) Mitä todistetaan ensimmäisenä? Miksi?

b) Täydennä toisen rivin tyhjiin kohtiin tapa, jonka avulla toisen rivin lopputulos voitaisiin esittää edellisen rivin avulla. Voiko samanlaisen päättelyn tehdä myös lopuille riveille? Täydennä loput tyhjät kohdat kyseisellä tavalla.

c) Tutkitaan esitystä jollakin luvulla n. Miten esityksen perusteella luku 3^{n+1} voitaisiin esittää edellisen luvun 3^n avulla? Entä mitä pitäisi tietää luvusta 3^n, että luvun 3^{n+1} voitaisiin sanoa olevan pariton?

Pohdinnassa A.10 huomataan, että kyseisen esityksen avulla kaikkien positiivisten luonnollisten lukujen läpi käyminen veisi ikuisuuden. Esityksestä voidaan huomata säännönmukaisuus, jonka avulla jokainen luku voidaan osoittaa parittomaksi edellisen luvun avulla.

Lause A.11 Matemaattinen induktiotodistus

Olkoon $P(n)$ positiiviseen luonnolliseen lukuun n liittyvä väite. Väite $P(n)$ on tosi kaikilla positiivisilla luonnollisilla luvuilla n, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) **Alkuaskel** Väite $P(1)$ on tosi.
2) **Induktioaskel** Muodostetaan induktio-oletus eli oletetaan, että väite $P(n)$ on tosi jollakin $n \in \mathbb{N}_+$ ja todistetaan induktio-oletuksen avulla, että tällöin myös $P(n+1)$ on totta. Väitettä $P(n+1)$ kutsutaan induktioväitteeksi.

Matemaattisen induktiotodistuksen ehdoista 1 ja 2 seuraa, että väite $P(n)$ on totta kaikilla $n \in \mathbb{N}_+$, sillä ehdon 1 perusteella väite on totta, kun $n = 1$, joten ehdon 2 perusteella väite on totta, kun $n = 2$. Edelleen kohdan 2 perusteella väite on totta, kun $n = 3$ ja niin edelleen. Näin muodostuu väitteiden ketju, jossa $P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \cdots$. Tällainen etenevä ketju on helposti havaittavissa myös aiemmin tutkitussa dominoefektissä.

Pohdinta A.12 Alla on esitetty pohdinnan A.10 väitteen matemaattinen induktiotodistus. Tarkastele todistusta ja vertaa sitä edellisen pohdinnan esitykseen. Vastaa annettuihin kysymyksiin.

Todistus.
Alkuaskel: $3^1 = 3$, mikä on pariton. Väite on totta, kun $n = 1$.

Induktio-askel:

Induktio-oletus: Oletetaan, että 3^n on pariton jollakin positiivisella luonnollisella luvulla n. Tällöin on olemassa $k \in \mathbb{N}_+$, että $3^n = 2k + 1$.

Induktioväite: 3^{n+1} on pariton.

Induktioväitteen todistaminen:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \text{ (hyödynnetään induktio-oletusta)} \\ &= 3 \cdot (2k + 1) \\ &= 6k + 3 \\ &= 6k + 2 + 1 \\ &= 2(3k + 1) + 1, \text{ missä } 3k + 1 \in \mathbb{N}_+. \end{aligned}$$

On osoitettu, että väite on totta luvulla $n + 1$.

Alkuaskel ja induktioaskel osoittavat, että väite pätee kaikilla positiivisilla luonnollisilla luvuilla. □

- Alkavatko todistus ja edellisen pohdinnan esitys samalla tavalla?
- Jos $n = 1$, niin mikä on todistuksessa hyödynnettävä induktio-oletus ja mitä sen avulla osoitetaan? Mitä riviä todistuksen induktioaskel tällöin kuvaa edellisen pohdinnan esityksessä?
- Jos $n = 2$, niin mikä on todistuksessa hyödynnettävä induktio-oletus ja mitä sen avulla osoitetaan? Mitä riviä todistuksen induktioaskel tällöin kuvaa edellisen pohdinnan esityksessä?
- Edellisten kohtien tavoin, millä luvulla n todistuksen induktioaskel kuvaa esityksen neljättä riviä?

Toistamalla pohdinnan A.12 todistuksen prosessia luvuilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ huomataan, että alkuaskel ja induktioaskel riittävät todistamaan kyseisen väitteen kaikilla positiivisilla luonnollisilla luvuilla.

Pohdinta A.13 Todistetaan matemaattisella induktiotodistuksella, että $n^2 + n$ on parillinen kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sijoita välivaiheet annettuihin laatikoihin oikeaan järjestykseen.

Alkuaskel

Induktioaskel

Induktio-oletus

Induktioväite ja sen todistaminen

Loppupäätelmä

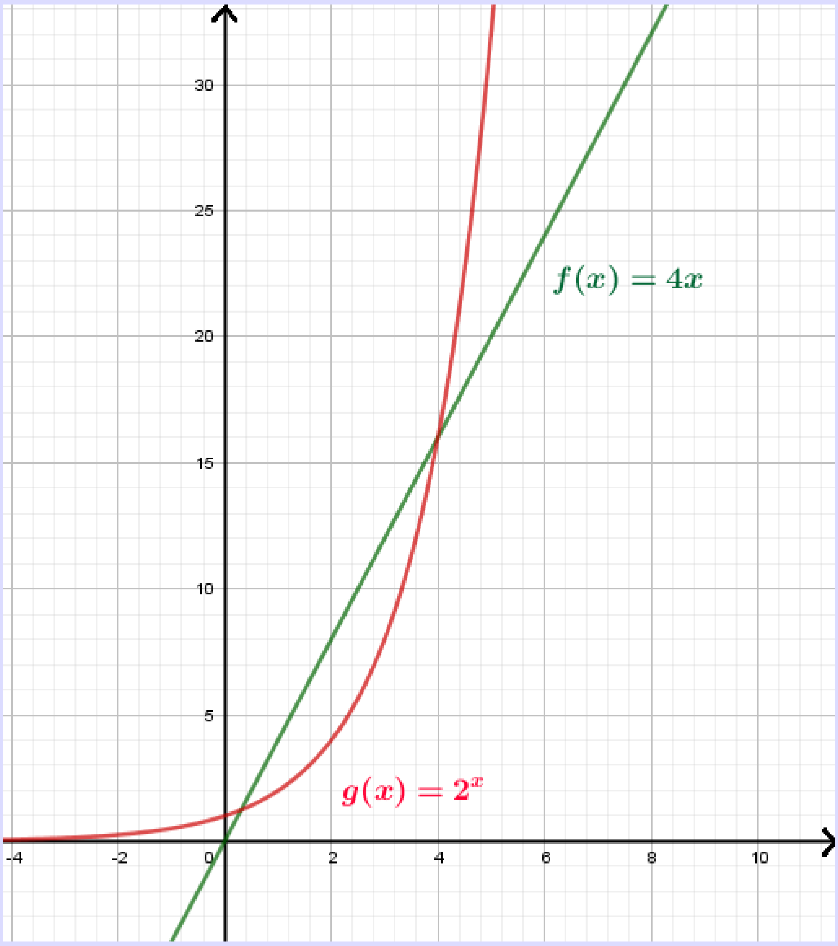
Välivaiheet:

1) Oletetaan, että $n^2 + n$ on parillinen jollakin positiivisella luonnollisella luvulla. Tällöin on olemassa $t \in \mathbb{N}_+$, että $n^2 + n = 2t$.
2) $1^2 + 1 = 2$, mikä on parillinen. Väite on totta, kun $n = 1$.
3) $= n^2 + n + 2n + 2$ (hyödynnetään induktio-oletusta)
4) Alkuaskel ja induktioaskel osoittavat, että väite pätee kaikilla positiivisilla luonnollisilla luvuilla.
5) $(n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1$
6) $= 2(t + n + 1)$, missä $t + n + 1 \in \mathbb{N}_+$.
7) On osoitettu, että väite on totta luvulla $n + 1$.
8) On osoitettava, että $(n + 1)^2 + (n + 1)$ on parillinen.
9) $= 2t + 2n + 2$

Induktiotodistuksella voidaan todistaa väitteitä muillekkin kuin positiivisille luonnollisille luvuille. Tällöin puhutaan matemaattisen induktion sijaan yleisestä induktiosta.

Pohdinta A.14 Tutkitaan seuraava väitettä:

$$4n < 2^n, \text{ missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$



Vastaa seuraaviin kysymyksiin järjestyksessä:

1) Päteekö väite kaikilla kokonaisluvuilla?
2) Mikä matemaattisen induktiotodistuksen ehto ei enää päde kyseiselle väitteelle?
3) Perustele kuvaajien avulla, mistä kokonaisluvusta lähtien väite pätee kaikilla kokonaisluvuilla n.
4) Muotoile epäyhtälöä koskeva väite uudelleen. Mitä ehtoa tulisi muuttaa väitteen induktiotodistamisessa?

Lause A.15 Olkoon $P(n)$ kokonaislukuun lukuun n liittyvä väite. Väite $P(n)$ on tosi kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq n_0$, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1) **Alkuaskel** Väite $P(n_0)$ on tosi.
2) **Induktioaskel** Muodostetaan induktio-oletus eli oletetaan, että väite $P(n)$ on tosi jollakin $n \geq n_0$ ja todistetaan induktio-oletuksen avulla, että tällöin myös $P(n+1)$ on totta.

Huomautus A.16 Induktiotodistuksen aloituskohta n_0 voi olla mikä tahansa negatiivinen tai positiivinen kokonaisluku tai nolla. Sen arvo riippuu aina tehtävänannosta.

Pohdinta A.17 Tutki seuraavaa väitettä.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = 1 - \frac{1}{n}, \text{missä } n \text{ on jokin kokonaisluku.}$$

a) n lähtee liikkeelle jostakin kokonaisluvusta. Väitettä tutkimalla, mistä kokonaisluvusta n lähtee liikkeelle? Perustele valintasi.

b) Osoita, että väite pätee valitsemallasi kokonaisluvulla.

c) Minkä yleisen induktiotodistuksen vaiheen b)-kohdassa muodostit?

Harjoitustehtävät

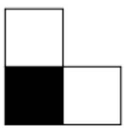
7. Avaa Geogebra-ohjelma: Induktiotodistus. Tehtävässä on annettu väite, jonka induktiotodistuksen vaiheet ovat menneet sekaisin. Tehtävänäsi on järjestää vaiheet oikeaan järjestykseen.

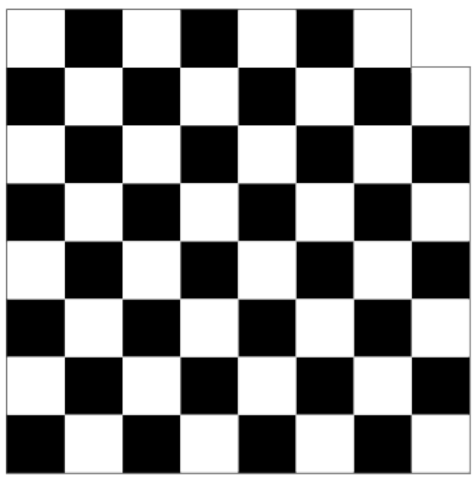
8. Matilda on yrittänyt osoittaa erään väitteen matemaattisella induktiolla, mutta ei ole osannut kirjoittaa siitä matemaattista esitystä. Kirjoita Matildan sanallinen selitys matemaattiseksi todistukseksi.

> Todistan matemaattisella induktiolla väitteen $2+4+6+8+\ldots+2n$ on $n(n+1)$ kaikilla positiivisilla luonnollisilla luvuilla. Ensimmäiseksi alkuaskeleella katson päteekö väite luvulla yksi. Ensimmäinen jäsen saadaan sijoittamalla luku yksi vasemmalle puolelle yhtälöä n.teen termiin, mistä saadaan kaksi. Samoin yhtälön oikealta puolelta saadaan kaksi sijoittamalla n.n paikalle luku yksi. Molemmilta puolilta yhtälöä saadaan sama luku, joten väite on tosi, kun n saa arvon yksi.
>
> Seuraavaksi induktioaskel. Induktio-oletuksessa oletetaan, että väite pätee jollakin mielivaltaisella positiivisella luonnollisella luvulla. Sitten induktioväite eli, että väite pätee myös luvulla $n+1$. Todistan induktioväitteen lähtemällä liikkeelle yhtälön vasemmalta puolelta, jolloin yhtälön vasemmalle puolelle lisätään $2(n+1)$ termi. Hyödynnän induktio-oletusta, jolloin osa $2+4+\cdots+2n$ voidaan korvata $n(n+1)$:llä. Tämän jälkeen otan yhteiseksi tekijäksi luvun $n+1$, jolloin saan induktioväitteen vasemman puolen. Nyt väite pätee myös luvulla $n+1$. Olen alkuaskeleella ja induktioaskeleella todistanut, että alkuperäinen väite pätee.

9. Osoita matemaattisella induktiolla, että $2^n \times 2^n$ ($n \in \mathbb{N}_+$) kokoinen shakkilauta, josta puuttuu yksi laatta voidaan koota trominoista.

Tromino on tasossa oleva monikulmio. Se on muodostettu kolmesta yhtä suuresta neliöstä, jotka ovat liitetty toisiinsa kiinni reunasta reunaan. Alla on esitetty tehtävässä esiintyvä tromino ja esimerkki tehtävänannon mukaisesta shakkilaudasta.





10. Matilda ja Matti yrittävät todistaa induktiolla väitettä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $\sum_{t=1}^{n} t^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Matti huomasi omassa todistuksessaan virheitä Matildan todistukseen verrattaessa. Etsi Matin todistuksen virheet ja korjaa ne.

Matildan ratkaisu:

Todistetaan väite induktiolla.

Alkuaskel: Nyt $\sum_{t=1}^{n} t^3 = 1^3 = 1$. Toisaalta $\frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = 1$. Väite on totta, kun $n = 1$.

Induktioaskel:

Induktio-oletus: $\sum_{t=1}^{n} t^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$, jollakin mielivaltaisella $n \in \mathbb{Z}_+$.

Induktioväite: On osoitettava, että $\sum_{t=1}^{n+1} t^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$.

Induktioväitteen todistaminen:

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n+1} t^3 &= \sum_{t=1}^{n} t^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \text{(hyödynnetty induktio-oletusta)} \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4(n+1)}{4} \right) \\
&= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Induktioväite on tosi.

Alkuaskel ja induktioaskel todistavat, että väite pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla. □

Matin ratkaisu:

Todistetaan väite induktiolla. Väite pätee, kun $n=1$, sillä laskimella saadaan

$$\sum_{t=1}^{1} \left(t^3\right) \rightarrow 1 \text{ ja } \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} \rightarrow 1.$$

Todistetaan induktioväite:

$$\sum_{t=1}^{n+1} \left(t^3\right) = \sum_{t=1}^{n} \left(t^3\right) + (t+1)^3.$$

Laskimesta saadaan, että

$$\sum_{t=1}^{n} \left(t^3\right) + (t+1)^3 \rightarrow t^3 + 3 \cdot t^2 + 3 \cdot t + \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + 1$$

$$\operatorname{factor}\left(t^3 + 3 \cdot t^2 + 3 \cdot t + \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + 1\right)$$

$$\rightarrow \frac{4 \cdot t^3 + 12 \cdot t^2 + 12 \cdot t + n^4 + 2 \cdot n^3 + n^2 + 4}{4}$$

Toisaalta laskimesta saadaan, että

$$\operatorname{expand}\left(\frac{(n+1)^2 \cdot (n+1+1)^2}{4}\right) \rightarrow \frac{n^4}{4} + \frac{3 \cdot n^3}{2} + \frac{13 \cdot n^2}{4} + 3 \cdot n + 1$$

Alkuaskeleen ja induktioväitteen perusteella väite pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla.

□

11. Rekursiivisen lukujonon jäsenet määräytyvät edellisten jäsenien avulla ja lukujonolle voidaan mahdollisesti muodostaa yleisen jäsenen lauseke, joka riippuu ainoastaan positiivisesta luonnollisesta luvusta n. Eräs lukujono muodostuu seuraavasti:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 5a_{n-1}, \text{ kun } n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Täydennä kyseisen lukujonon yleisen jäsenen lausekkeen $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ induktiotodistukseen puuttuvat välivaiheet.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla.

Alkuaskel: Lukujonon muodostumisesta saadaan, että $a_1 =$ ____. Toisaalta $a_1 =$ ________________ $= 2 \cdot 5^0 = 2$. Väite pätee, kun $n = 1$.

Induktioaskel:

____________: $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$, jollakin $n = 1, 2, 3, \ldots$

Induktioväite: $a_{n+1} =$ ________________ $= 2 \cdot$ __________

Induktioväitteen todistaminen:

Nyt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5a_{(n+1)-1} \quad (\text{hyödynnetty } a_n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) \\ &= 5 \cdot \_\_\_\_\_\_\_ \quad (\text{hyödynnetään } a_n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 5^{n-1} \quad (\text{hyödynnetään } 5 \cdot 5^{n-1} = \_\_\_\_\_\_\_) \\ &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{aligned}$$

Väite pätee luvulla $n + 1$.

Näin ollen alkuperäinen väite pätee. □

12. Tarkastellaan väitettä $1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, missä n on jokin kokonaisluku.

a) Mistä kokonaisluvusta n lähtee liikkeelle? Muotoile yhtälöä koskeva väite uudelleen.

b) Todista a)-kohdassa muodostamasi väite induktiolla.

13. Joskus rekursiivisen lukujonon yleisen jäsenen lausekkeen säännön muodostaminen ei onnistu tai on hyvin hankalaa. Fibonaccin lukujono on yksi esimerkki tällaisesta lukujonosta. Fibonaccin lukujonossa kahden ensimmäisen jäsenen jälkeen lukujonon jokainen jäsen määritetään rekursiivisesti kahden peräkkäisen jäsenen summana. Fibonaccin lukujono määritellään rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{cases} f_1 = 1, \text{ kun } n = 1, \\ f_2 = 1, \text{ kun } n = 2, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ kun } n \geq 3. \end{cases}$$

a) Piirrä Geogebralla Fibonaccin lukujonon 10 ensimmäistä jäsentä ja tutki sen ja Fibonaccin jonon määrittelyn avulla, mitä on $f_{n+2} + f_{n+1}$.

b) Osoita induktiolla, että

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1, \text{ kaikilla } n \in \mathbb{Z}_+.$$

B Opettajan opas

Opettajan oppaassa on esitelty opettajalle käytettäväksi suuntaa-antava ajankäyttösuunnitelma, oppimateriaalin aiheiden oppimistavoitteet ja lisäksi ohjeistusta pohdintatehtäviin.

B.1 Ajankäyttösuunnitelma

Oppituntien tulisi rakentua tunnilla tehtävien pohdintatehtävien ympärille. Pohdintatehtäviä voidaan pohtia yksin, pareittain tai yhteisesti. Tällä tavoin opiskelijoille annetaan mahdollisuus itsenäiseen etenemiseen, mutta opettajan tehtäväksi jää varmistaa, että sekä taitavimmat että heikoimmat opiskelijat saavat pohdintatehtävien ymmärtämiseen tarvitsemansa tuen. Oppimateriaalissa olevia harjoitustehtäviä voi tehdä oppitunnin aikana, antaa kotitehtäviksi tai säästää kertaustunnille.

Ajankäyttösuunnitelma on tehty vastaamaan sekä 45 minuutin ja 75 minuutin oppitunteja. Ajankäyttösuunnitelman voi tarvittaessa muuttaa itselleen sopivaksi.

Tunnin aihe	45min	75min
Käänteinen todistus	1.5	1
Ristiriita todistus	1.5	1
Induktio todistus	2	2

B.2 Käänteinen todistus

Kappaleen keskeiset oppimistavoitteet ovat, että opiskelija:

- ymmärtää käänteisen todistuksen rakenteen,
- osaa hyödyntää käänteistä todistusta erilaisiin todistustehtäviin.

Pohdinta A.1

Tehtävän tarkoituksena on saada opiskelijat huomaamaan, että Matin todistuksen avulla ei saada todistettua annettua lausetta. Näin opiskelijat hahmottavat käänteisen todistusmenetelmän tarpeellisuuden. Opiskelijoille voi huomauttaa tutkimaan ongelmaa suoran todistuksen rakenteen avulla.

Ratkaisu: Todistuksen perusteella $a = \pm\sqrt{2k}$. Tämän perusteella ei voida sanoa, että onko luku a parillinen. Voidaankin siis päätellä, että Matti ei onnistunut todistamaan lausetta suoralla todistuksella.

Pohdinta A.2

Tehtävä on esimerkki arkielämän tilanteesta, jossa hyödynnetään käänteisen todistuksen ideaa ongelmanratkaisussa. Tehtävässä opiskelijat hyödyntävät Maijan lauseen ja sen kontraposition yhteyttä. Opiskelijoiden tulisi myös pystyä selittämään ratkaisuun päätymistään.

Ratkaisu: Maijan puheiden perusteella äiti voi päätellä, että ulkona ei sada.

Pohdinta A.3

Tehtävässä analysoidaan käänteistä todistusta, josta opiskelijan tulisi ymmärtää väitteen, oletuksen ja niiden negaatioiden yhteys sekä kontraposition lain merkitys. Tehtävän tarkoituksena on saada opiskelijalle käsitys todistusmenetelmän rakenteesta ja pätevyydestä. Opiskelijat voi ohjata kertaamaan logiikan perusteita, erityisesti loogista ekvivalenttiutta ja kontraposition lakia.

Ratkaisu:

a) Vastaväite muodostetaan väitteestä negaation avulla.

b) Lopputulos voidaan yhdistää oletukseen negaation avulla.

c) Lauseet $A \Rightarrow B$ ja $\neg B \Rightarrow \neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit eli lauseet tarkoittavat samaa. Tämän voi tarkistaa halutessaan totuustaululla.

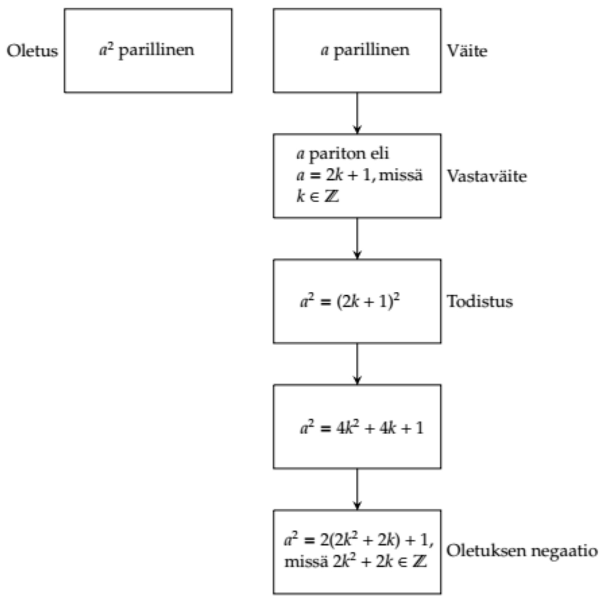
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

d) Kontraposition lakiin. Sen perusteella lause $A \Rightarrow B$ on totta täsmälleen silloin, kun lause $\neg B \Rightarrow \neg A$ on totta.

Pohdinta A.4

Tehtävässä muodostetaan pohdinnan A.1 käänteinen todistus vuokaavion avulla. Tehtävän tarkoituksena on erityisesti laittaa opiskelija pohtimaan todistuksen muodostavia symbolisia välivaiheita ja loogisuutta. Tehtävällä varmistetaan opiskelijan ymmärrys käänteisestä todistamisesta.

Ratkaisu:



B.3 Ristiriitatodistus

Kappaleen keskeiset oppimistavoitteet ovat, että opiskelija:

- tutustuu ristiriitatodistamiseen,
- osaa hyödyntää ristiriitatodistamista yksinkertaisissa todistustehtävissä.

Pohdinta A.5

Tehtävä johdattelee opiskelijan ristiriitatodistukseen arkielämän esimerkin avulla. Tehtävän avulla pyritään saamaan opiskelija hoksaamaan ristiriitatodistuksen ideaa loogisen päättelyn avulla.

Ratkaisu:

1. Jokainen opiskelija oletti, että on opettajan väite ei ole totta eli olisi itsenäisyyspäivä (vastaväitteen muodostaminen).
2. Opiskelijoiden asiat eivät ole tosia, sillä he ovat oppitunnilla. Syntyy haluttu ristiriita, jonka mukaan opiskelijat olisivat sekä vapaalla että oppitunnilla yhtä aikaa. Tästä voidaan päätellä, että opettajan väite on totta eli kyseisenä päivänä ei ole itsenäisyyspäivä.

Pohdinta A.6

Tehtävässä opiskelija analysoi annetun lauseen ristiriitatodistusta. Tehtävän on tarkoitus tutustuttaa opiskelija ristiriitatodistukseen liittyviin ominaisuuksiin.

Ratkaisu:

- Vastaväitteen muodostamisesta.
- Oletusta. Erotuksen avulla voidaan tutkia millainen luku 1 on.
- Todistuksessa päädytään tilanteeseen, missä luku 1 on parillinen. Tämä on ristiriidassa sen tosiasian kanssa, että luku 1 on pariton.

Pohdinta A.7

Tehtävässä tutkitaan ristiriitatodistuksen perustelevaa totuustaulua. Tehtävän tarkoituksena on hahmottaa opiskelijalle todistusmenetelmän pätevyys. Jos tehtävä tuottaa hankaluuksia, voi opiskelijaa ohjeistaa palaamaan logiikan perusteisiin. Tehtävä on hyvin teoreettinen, jonka vuoksi perustelujen ja päättelyiden sanallista selittämistä totuustaulun ymmärtämisen tueksi kannattaa korostaa.

Ratkaisu:

1. Ristiriita saa vain totuusarvoja 0.
2.

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	R	$P \Rightarrow Q$	$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1

3. Lauseet $P \Rightarrow Q$ ja $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$.

4. Koska lauseet $P \Rightarrow Q$ ja $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$ ovat loogisesti ekvivalentit, niin $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R)$ on tautologia. Siten lause $P \Rightarrow Q$ on totta täsmälleen silloin, kun lause $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$ on totta.

Pohdinta A.8

Tehtävässä tarkastellaan perinteistä luvun $\sqrt{2}$ irrationaalisuustodistusta. Tehtävän tarkoituksena on, että opiskelija ymmärtäisi todistettavan lauseen sisältämän tiedon ja hahmottaisi todistuksen johdonmukaisen päättelyketjun.

Ratkaisu:

1. Koska murtoluku ei enää supistu, niin osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä tekijöitä, esimerkiksi $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l+1}$. Tällöin toisen luvuista täytyy olla parillinen luku ja toisen pariton luku.

2. n^2 on parillinen, niin n on parillinen.

3. Todistuksessa saatiin, että molemmat kokonaisluvuista m ja n ovat parillisia. Tällöin osoittajalla ja nimittäjällä on yhteisiä tekijöitä eli $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa murtoluvun supistumattomuuden kanssa, jonka mukaan enintään toinen kokonaisluvuista olisi parillinen. Ristiriidasta seuraa, että vastaväite on epätotta ja väite on totta.

4. Luku $x = \sqrt{2}$.

B.4 Induktiotodistus

Kappaleen keskeiset oppimistavoitteet ovat, että opiskelija:

- ymmärtää induktiotodistuksen rakenteen,
- osaa hyödyntää induktiotodistamista todistustehtävissä
- syventää ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista

Pohdinta A.9

Tehtävän tarkoituksena on tutustua matemaattisen induktiotodistamisen ideaan käytännön esimerkin kautta. Opiskelijoita voi ohjeistaa tarkastelemaan muodostettuja ehtoja siten, että niitä olisi mahdollisimman vähän. Tehtävän voi teettää myös toiminnallisena, jolloin opiskelijat kasaavat yhden toimivan rakennelman, yhden epäonnistuneen rakennelman sekä yhden rakennelman, jossa dominorakenteelle ei tehdä mitään. Tällöin opettajan rooli on auttaa kysymyksillä selvittämään tarvittavat tiedot.

Ratkaisu: Ensimmäisen dominon pitäisi kaatua. Lisäksi dominoilla ei saa olla liian suuria välejä eli ensimmäisen dominon kaatumisesta pitäisi seurata toisen dominon kaatuminen, toisesta kolmannen ja niin edelleen. Tarvittavia ehtoja olisi, että ensimmäinen domino kaatuisi ja dominon kaatumisesta seuraisi seuraavan dominon kaatuminen.

Pohdinta A.10

Tehtävän tarkoituksena on johdatella opiskelija pohtimaan matemaattisen induktiotodistuksen ominaisuuksia ja tarvetta. Tehtävässä opiskelijan tulisi huomata seuraavan rivin syntyminen edellisen rivin avulla, mikä tulisi yhdistää väitteen yleisen tavan muodostumiseen. Lisäksi tehtävässä on tärkeä ymmärtää, että luvun parittomuus muodostuu edellisen luvun parittomuudesta. Tehtävän c)-kohdassa opiskelijaa voi ohjeistaa tutkimaan esitystä luvuilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ratkaisu:

- Ensimmäisenä todistetaan, että väite pätee luvulla yksi, koska luku n lähtee liikkeelle siitä (alkuaskel).
- Välivaiheet:

$$
\begin{aligned}
3^2 &= 3 \cdot 3^1 = 3 \cdot 3 = 9 \\
3^3 &= 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27 \\
3^4 &= 3 \cdot 3^3 = 3 \cdot 27 = 81
\end{aligned}
$$

- Esityksen perusteella luku $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$, missä luvun 3^n tulisi olla pariton.

Pohdinta A.12 Tehtävässä opiskelijan tulisi hahmottaa, että alkuaskel ja induktioaskel yhdessä muodostavat väitteen totuuden kaikilla luvulla n. Tehtävässä opiskelijan tulisi ymmärtää, että induktioaskelta hyödynnetään moneen kertaan, jolloin yleisellä tavalla voidaan osoittaa, että mistä tahansa luvusta päästään seuraavaan lukuun.

Ratkaisu:

- Molemmat tavat alkavat samalla tavalla (väitteen päteminen luvulla 1).
- Todistuksen mukaan induktio-oletuksena hyödynnetään tietoa, että 3^1 on pariton. Sen avulla on osoitettu, että 3^2 on pariton. Tällöin todistuksen induktioaskel kuvaa pohdinnan A.10 tavan toista riviä.
- Todistuksen mukaan induktio-oletuksena hyödynnetään tietoa, että 3^2 on pariton. Sen avulla on osoitettu, että 3^3 on pariton. Tällöin todistuksen induktioaskel kuvaa pohdinnan A.10 tavan kolmatta riviä.
- Sama päättely pätee myös neljännelle riville, jolle luku $n = 3$.

Pohdinta A.13

Tehtävässä tarkoituksena on luokitella annetut todistuksen vaiheet oikeisiin laatikoihin. Luokittelun avulla opiskelijalle havainnollistetaan todistuksen muodostavia osia ja rakennetta. Tehtävä toimii matemaattisen induktiotodistuksen kokoavana tehtävänä.

Ratkaisu:

Vaiheet oikeassa järjestyksessä: 2, 1, 8, 5, 3, 9, 6, 7, 4

Pohdinta A.14

Tehtävässä tutkitaan alkuaskeleen alkuarvoa. Tehtävän tarkoituksena on, että opiskelija itse havaitsee alkuarvon muuttumisen ja sen vaikutuksen induktiotodistukseen.

Ratkaisu:

1) Väite ei päde kokonaisluvuilla 1, 2, 3 ja 4.

2) Matemaattisen induktiotodistuksen alkuaskel ei toimi, sillä väite ei päde luvulla 1.

3) Väite pätee kaikilla kokonaisluvulla $n \geq 5$.

4) $4n < 2^n$, missä kokonaisluku $n \geq 5$. Induktiotodistuksen alkuaskeleen alkuarvoa.

Pohdinta A.17

Tehtävässä jatketaan alkuarvon hahmottamista. Tutkimalla annettua väitettä opiskelijan tulisi määrittää väitteen alkuarvo, jolloin opiskelijalle konkreettisesti havainnollistuu, että alkuarvo määräytyy aina tehtäväkohtaisesti. Jos tehtävä tuottaa hankaluuksia, voi opiskelijalle huomauttaa termistä $\frac{1}{n \cdot (n-1)}$, jonka perusteella termit muodostuvat.

Ratkaisu:

a) $n \geq 2$, mikä huomataan ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan termin sekä yhtälön oikean puolen perusteella.

b) $\frac{1}{(2-1) \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ ja $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Väite pätee, kun $n = 2$.

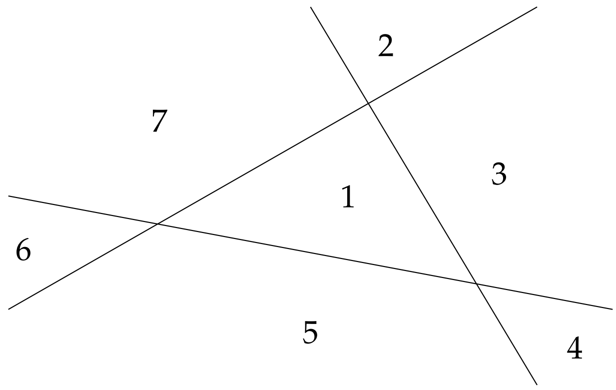
c) Alkuaskeleen.

Lisätehtävä

Seuraava tehtävä on tarkoitettu lisätehtäväksi haastetta kaipaavalle opiskelijalle. Siinä yhdistyy voimakkaasti käsitteellinen ja visuaalinen ymmärtäminen. Tehtävässä suositellaan GeoGebran käyttöä pyydettyjen tilanteiden hahmottamiseksi.

Tehtävä:

Tasoon piirretään n määrä suoria siten, että tasossa ei saa olla kahta yhdensuuntaista suoraa eikä mitkään kolme suoraa koskaan leikkaa toisiaan samassa pisteessä. Olkoon s_n niiden alueiden lukumäärä, johon suorat jakavat tason, esimerkiksi $s_3 = 7$, sillä



a) Laske s_1, s_2, s_3, s_4 ja s_5. Piirrä kuva jokaisesta tilanteesta.

b) a)-kohdan perusteella muodosta alueiden lukumäärää s_n vastaava lauseke.

c) Muodosta b)-kohdassa tekemän lausekkeesi avulla tehtävää kuvaava väite ja todista väite paikkaansapitäväksi induktiolla.

Vastaus:

a) $s_1 = 2, s_2 = 4, s_3 = 7, s_4 = 11$ ja $s_5 = 16$.

b) $s_n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$.

c) Niiden alueiden lukumäärä, johon suorat jakavat tason on $s_n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

C Tehtävien vastaukset

1. Vaihtoehto 2

3. Vastaväite: Kaikilla opiskelijoilla on tasan 4 kirjaa laukuissaan.

4. $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku, ei rationaaliluku.

5. 5, 6, 1, 7, 3, 2, 4

6. Vastaväite: Luku 512 voidaan ilmaista yhden parittoman ja kahden parillisen luonnollisen luvun summana.

9. Voit jakaa $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ shakkilaudan neljään $2^n \times 2^n$ shakkilautaan.

10. Korjattavat virheet: $\sum_{t=1}^{n+1} t^3 = \sum_{t=1}^{n} t^3 + (n+1)^3$ ja sen avulla lasketut välivaiheet. Lisäksi induktio-oletus puuttuu ja sen hyödyntämistä ei ole perusteltu.

11. Vaiheet järjestyksessä: 2, $2 \cdot 5^{1-1}$, induktio-oletus, $2 \cdot 5^{(n+1)-1}$, 5^n, $5 \cdot a_{n-1}$, a_n, $2 \cdot 5^{n-1}$, 5^n, $2 \cdot 5^n$

12. a) $n \geq 0$

13. Huomaa a)-kohdan pohdinnan perusteella, että $f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1}$. Lisäksi $\sum_{k=1}^{n+1} f_k = \sum_{k=1}^{n} f_k + f_{n+1}$.