View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by University of Oulu Repository - Jultika

Ramseyn teoria

Pro Gradu -tutkielma
Shiori Sasaki
2270074
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2020

Sisältö

Johdanto

Tässä Pro Gradu -tutkielmassa käsitellään Ramseyn teorian perusteita. Ramseyn teoria luokitellaan kombinatoriikan osa-alueeseen, joka tutkii tietyt ominaisuudet toteuttavia joukkoja. Ramseyn teoriassa joukon alkiot jaetaan eri luokkiin ja etsitään ehtoa, jolla löytyy tietynlainen struktuuri. Karkeasti ottaen Ramseyn teorian tulokset kertovat, että tietynlainen struktuuri löytyy, kun joukko on tarpeeksi suuri. Matemaatikko Theodore Motzkin on kuvaillut Ramseyn teoriaa seuraavasti: "complete disorder is impossible", eli täysi kaaos on mahdotonta. [3, s.29] Ramseyn teorian tuloksia on hyödynnetty verkkoteorian ja kombinatoriikan lisäksi moniin matematiikan muihin osa-alueisiin sekä tietojenkäsittelytieteeseen.

Tämä tutkielma koostuu kolmesta osasta: Tutkielman ensimmäisessä luvussa käydään läpi tarvittavia esitietoja, kuten verkkoihin liittyvät määritelmät sekä Ramseyn teorian lauseiden todistuksessa usein hyödynnettävää kyyhkyslakkaperiaatetta. Toisessa luvussa käsitellään verkkoihin liittyvää Ramseyn teoriaa ja todistetaan Ramseyn lause. Verkko koostuu alkioiden joukosta ja niiden välisistä suhteista. Ramseyn lause kertoo, että tarpeeksi suuresta verkosta aina löytyy täydellinen osaverkko tai sen komplementti. Sen jälkeen tarkastellaan Ramseyn lukua sekä sen eräitä ylärajoja antavia lauseita ja määritetään joitakin tarkkoja Ramseyn lukuja. Kolmennessa luvussa tarkastellaan Ramseyn teoriaa, joka liittyy kokonaislukuihin. Tässä keskitytään kahteen olennaiseen Ramseyn teorian tulokseen, van der Waerdenin sekä Hales-Jewett'n lauseeseen. Van der Waerdenin lause käsittelee lukujonon väritystä ja Hales-Jewett'n lause käsittelee hyperkuution väritystä.

Luvussa 2 esitetyt verkkoihin liittyvät lauseet ja määritelmät on laadittu pääosin teoksen [2] pohjalta ja luvun 3 kokonaislukuihin liittyvä Ramseyn teoria teosten [3] ja [4] pohjalta. Lähdeteoksena käytetyt kirjallisuudet löytyvät viimeisen sivun lähdeluettelosta.

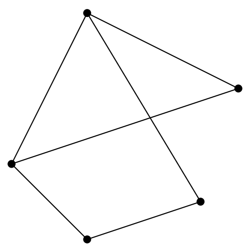
1 Esitietoja

1.1 Verkko

Käydään tässä kappaleessa läpi toisessa luvussa käytettävät verkkoteorian peruskäsitteet. Verkkoteoriassa verkolla tarkoitetaan datarakennetta, joka koostuu alkioista sekä niiden välisistä suhteista. Määritellään alla verkko tarkemmin ja perehdytään verkkoteorian käsitteisiin esimerkkien ja kuvien avulla.

Määritelmä 1.1. Verkko G on kahden joukon pari (V, E), jossa $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \neq v_2,\ v_1, v_2 \in V\}$. Joukon V alkiota kutsutaan solmuksi ja joukon E alkiota kaareksi. Merkitään tarkemmin verkon G solmujen joukkoa $V = V(G)$ ja kaarien joukkoa $E = E(G)$.

Havainnollisuuden vuoksi verkkoa kuvataan usein seuraavan kuvan mukaisesti niin, että solmut merkitään pisteillä ja kaaret niiden välisillä särmillä.



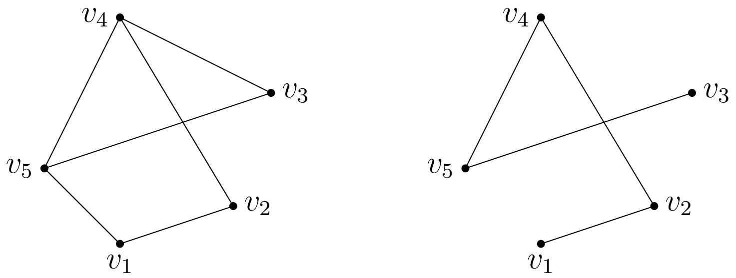
Kuva 1: Verkko

Määritelmä 1.2. Jos $V' \subseteq V$ ja $E' \subseteq E$, niin paria $G' = (V', E')$ kutsutaan verkon $G = (V, E)$ osaverkoksi ja merkitään $G' \subseteq G$. Sanotaan, että verkko G sisältää osaverkon G'.

Määritelmä 1.3. Kun verkon G solmujen joukon alkioiden lukumäärä on n eli $|V(G)| = n$, verkkoa G kutsutaan n-solmuiseksi verkoksi.

Määritelmä 1.4. Kun $\{v_1, v_2\} \in E$, sanotaan, että solmut v_1, v_2 ovat naapureita.

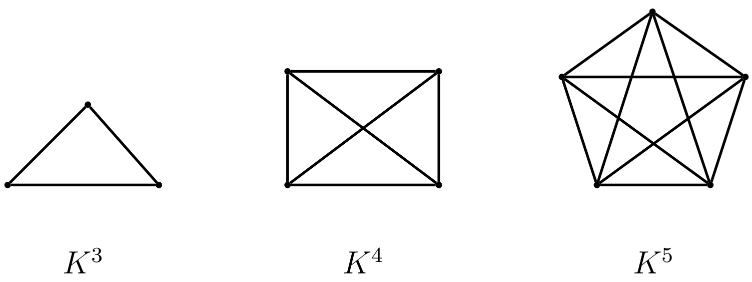
Esimerkki 1.5. Alhaalla kuvan 2 vasemmalla puolella on 5-solmuinen verkko G ja oikealla sen osaverkko G'. Solmut v_1 ja v_5 ovat naapureita verkossa G, muttei verkossa G'.



Kuva 2: 5-solmuinen verkko G ja sen osaverkko G'

Määritelmä 1.6. Verkko on täydellinen, kun verkon kaikki solmuparit ovat naapureita. Täydellistä n-solmuista verkkoa merkitään K^n.

Esimerkki 1.7. Seuraavaan kuvaan on piirretty 3-solmuinen, 4-solmuinen ja 5-solmuinen täydellinen verkko.



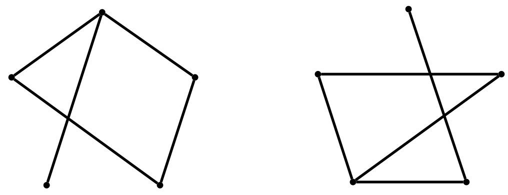
Kuva 3: Täydelliset verkot K^3, K^4, K^5

Määritelmä 1.8. Joukon X kaikkien k-alkioisten osajoukkojen joukko merkitään $[X]^k$, eli $[X]^k := \{A \mid A \subseteq X \text{ ja } |A| = k\}$

Joukko $[X]^1$ on sama kuin joukko X itse. Joukko $[X]^2$ on kahden alkion joukkojen joukko.

Määritelmä 1.9. Verkon $G = (V, E)$ komplementti on verkko $(V, [V]^2 \backslash E)$, josta käytämme merkintää $\overline{G}$.

Esimerkki 1.10.



Kuva 4: Verkko G ja sen komplementti $\overline{G}$

1.2 Kyyhkyslakkaperiaate

Seuraavaksi tarkastellaan kyyhkyslakkaperiaatetta, joka on olennainen periaate monessa Ramseyn teoriaan liittyvässä lauseessa.

Lause 1.11. *(Kyyhkyslakkaperiaate) Jos $n < m$ ja m esinettä laitetaan n laatikkoon, niin ainakin yhdessä laatikossa on vähintään $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ esinettä.*

Todistus. Olkoon laatikossa i olevien esineiden lukumäärä a_i. Tehdään vastaoletus, että kaikissa laatikoissa on vähemmän kuin $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ esinettä, eli

$$a_i < \lceil \frac{m}{n} \rceil \ \ (1 \leq i \leq n)$$

Oikea ja vasen puoli ovat molemmat kokonaislukuja, joten siitä seuraa

$$a_i \leq \lceil \frac{m}{n} \rceil - 1 \ \ (1 \leq i \leq n)$$

, jolloin

$$m = \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} (\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1) = n(\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1)$$

Verrataan tämän epäyhtälön vasenta ja oikeaa puolta.

$$m \leq n(\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1) \Leftrightarrow \frac{m}{n} \leq \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1 \Leftrightarrow \frac{m}{n} + 1 \leq \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil,$$

mikä on ristiriita. □

Kun $m > n$ eli esineiden määrä on enemmän kuin laatikoiden määrä, lauseen 1.11 nojalla ainakin yhdessä laatikossa on vähintään 2 esinettä. Tarkastellaan seuraavaksi kyyhkyslakkaperiaatetta, kun esineitä on äärettömän monta.

Lause 1.12. *Kun laitetaan äärettömän monta esinettä* m *laatikkoon, ainakin yhdessä laatikossa on äärettömän monta esinettä.*

Todistus. Jos kaikissa m laatikossa olisi äärellisen monta esinettä, kaikkien laatikoiden esineiden määrän summa olisi äärellinen, mikä on ristiriita. $\square$

2 Ramseyn teoria verkoilla

2.1 Ramseyn lause

Tässä luvussa tarkastellaan verkkoihin liittyvää Ramseyn teoriaa. Ramseyn lause pohtii minkälaisia ominaisuuksia löytyy suuresta verkosta. Se myös tarkastelee kuinka suuri verkon pitäisi olla, jotta siitä löytyisi tietynlainen osastruktuuri. Aloitetaan pohdinta Ramseyn lauseen erikoistapauksella, jossa verkon solmuja on kuusi. Sen jälkeen todistetaan Ramseyn lause, joka kertoo, että tarpeeksi suuresta verkosta löytyy täydellinen osaverkko K^r tai sen komplementti $\overline{K^r}$ (r: positiivinen kokonaisluku).
Seuraavassa Ramseyn lauseen erikoistapauksessa henkilöt ja niiden väliset ystävyyssuhteet muodostavat verkkorakenteen. Lausetta havainnollistetaan verkkoyhteisöpalvelu Facebookin ystävyyden avulla, jolloin ystävyyden määrittely on selkeää.

Lause 2.1. *(Ramseyn lauseen erikoistapaus)*
Olkoon X minkä tahansa kuuden hengen ryhmä verkkoyhteisöpalvelu Facebookissa. Tällöin löytyy joko kolmen hengen osajoukko $Y \subset X$, jonka jäsenet ovat keskenään kavereita tai kolmen hengen osajoukko $Z \subset X$, jonka mitkään kaksi jäsentä eivät ole kavereita.

Todistus. Nimetään joukon X henkilöt a, b, c, d, e ja f. Tällöin kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla on olemassa kolmen hengen osajoukko $S \subset \{b, c, d, e, f\}$, jossa joukon S jäsenet ovat kaikki henkilön a kavereita tai kukaan joukon S jäsenestä ei ole henkilön a kaveri. Oletetaan, että joukon S jäsenet ovat henkilön a kavereita. Tarkastetaan osajoukon S sisäinen kaveruus. Jos osajoukosta löytyy kaveripari, olkoot ne s_1 ja s_2, joukko $\{a, s_1, s_2\}$ muodostaa etsimämme joukon Y. Jos taas ketkään osajoukon S jäsenistä eivät ole kavereita, S itse on kyseinen osajoukko Z. Näin aina löytyy joko osajoukko Y tai Z.
Tarkastellaan seuraavaksi toista tapausta, jossa kukaan joukon S jäsenestä ei ole henkilön a kaveri. Jos osajoukosta S löytyy pari s_1, s_2, jotka eivät ole

keskenään kavereita, joukko $\{a, s_1, s_2\}$ muodostaa osajoukon Z. Jos joukossa S ei ole sellaista paria, joukon S jäsenet ovat kaikki keskenään kavereita, jolloin joukko S on etsimämme osajoukon Y. Tässäkin tapauksessa siis löytyy aina joko osajoukko Y tai Z. □

Lause 2.1 voidaan ilmaista verkkoteorian käsitteitä käyttäen seuraavasti: 6-solmuinen verkko sisältää täydellisen verkon K^3 tai verkon $\overline{K^3}$. Seuraava tulos, Ramseyn lause, kertoo, että mikä tahansa riittävän suuri verkko sisältää joko verkon K^r tai verkon $\overline{K^r}$.

Lause 2.2. *(Ramsey 1930)*
Olkoon $r \in \mathbb{N}$. On olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$ siten, että kaikki vähintään n-solmuiset verkot sisältävät osaverkkona joko verkon K^r tai verkon $\overline{K^r}$.

Todistus. Väite pätee selvästi, kun $r \leq 1$. Olkoon $r \geq 2$. Määritellään apumuuttuja $n := 2^{2r-3}$ ja verkko G, joka on n-solmuinen tai suurempi. Muodostetaan joukot $V_1, V_2, ..., V_{2r-2}$ sekä solmut $v_i \in V_i$ seuraavien ehtojen mukaan:

(i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ $(i = 1, 2, ...2r-2)$;

(ii) $V_{i+1} \subseteq V_i \setminus \{v_i\}$ $(i = 1, 2, ...2r-3)$;

(iii) v_i on joko naapuri joukon V_{i+1} kaikkien solmujen kanssa tai ei ole naapuri joukon V_{i+1} minkään solmun kanssa. $(i = 1, 2, ..., 2r-3)$;

Olkoon $V_1 \subseteq V(G)$ mikä tahansa 2^{2r-3}-solmuinen joukko ja valitaan mielivaltainen solmu $v_1 \in V_1$. Seuraavaksi valitaan joukko V_2, joka täyttää ehdot $(i) - (iii)$. Tällaisen joukon V_2 löytäminen on mahdollista, sillä ehdon (ii) joukon $|V_1 \setminus \{v_1\}|$ alkioiden määrä on $2^{2r-3} - 1$ ja nämä alkiot ovat joko solmun v_1 kanssa naapureita tai sitten eivät ole, joten kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla joko naapureiden tai ei-naapureiden joukolla on vähintään $\left\lceil \frac{2^{2r-3}-1}{2} \right\rceil = 2^{2r-4}$ alkiota. Tästä joukosta voidaan valita juuri 2^{2r-4}-solmuinen joukko V_2 ja mielivaltainen solmu $v_2 \in V_2$. Toistamalla prosessia $2r-3$ kertaa saadaan jono $V_1, V_2, ..., V_{2r-2}$ ja $v_i \in V_i$ $(i = 1, 2, ..., 2r-3)$.

Alkio v_i ($i = 1, ..., 2r - 3$) on tällöin ehdon (iii) mukaan joko naapuri seuraavan joukon V_{i+1} kaikkien solmujen kanssa tai ei naapuri joukon V_{i+1} minkään alkion kanssa. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla näistä $2r - 3$ solmusta vähintään $\lceil \frac{2r-3}{2} \rceil = r - 1$ käyttäytyy samalla tavalla. Nämä $r - 1$ solmua ja solmu $v_{2r-2} \in V_{2r-2}$ muodostavat etsimämme osaverkon K^r tai sen komplementtijoukon $\overline{K^r}$. □

Edellisessä lauseessa määrittelemämme verkko G ei ole välttämättä pienin verkko, joka täyttää lauseen ehdon. Esimerkiksi lauseen 2.2 todistuksen apumuuttujasta tulee $n = 2^{2\times 3-3} = 8$, kun $r = 3$, mutta lauseessa 2.1 todistettiin, että 6-solmuinen verkko sisältää jo joko verkon K^3 tai verkon $\overline{K^3}$. Ramseyn lauseen ehdon täyttävää pienintä lukua n kutsutaan Ramseyn luvuksi ja merkitään tätä symbolilla $R(r)$. Lauseen 2.2 todistus kertoo, että $R(r) \leq 2^{2r-3}$. Todistus antaa Ramseyn luvulle ylärajan, muttei sen tarkkaa arvoa. Tarkan Ramseyn luvun määrittäminen on hankalaa ja löydettyjä lukuja on vain muutamia. Tarkastelemme niitä tarkemmin seuraavassa kappaleessa.
Tähän asti verkon solmuparit on jaettu kahteen luokkaan: Ne olivat joko naapureita (jolloin muodostuu kaari) tai sitten eivät. Seuraavaksi tarkastellaan minkälaisia ominaisuuksia verkosta löytyy, kun lisätään luokkien määrää.

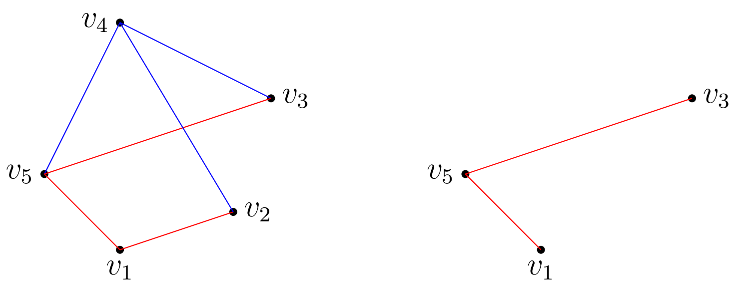
Määritelmä 2.3. Joukon X alkiot jaetaan c eri luokkaan. Verkkoteoriassa käytetään perinteisesti luokkina eri värejä. Puhutaan tällöin joukon X c-värityksestä, joka jakaa joukon X alkiot c eriväriseen luokkaan.

Määritelmä 2.4. Annetaan joukolle X c-väritys. Tällöin osajoukko Y on monokromaattinen, jos kaikki joukon Y alkiot ovat samanvärisiä. Vastaavasti, kun on annettu joukolle $[X]^k$ c-väritys, osajoukko $Y \subseteq X$ on k-monokromaattinen, jos kaikki joukon $[Y]^k$ alkiot ovat samanvärisiä.

Esimerkki 2.5. Kun $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ja joukolle $[X]^2$ on annettu c-väritys, osajoukko $Y = \{v_1, v_3, v_5\} \subseteq X$ on 2-monokromaattinen, jos joukon $\{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_3, v_5\}\}$ alkiot ovat samanvärisiä.

Määritelmä 2.6. Osaverkko $H \subseteq G$ on monokromaattinen, jos osaverkon H kaaret ovat samanvärisiä, kun verkon $G = (V, E)$ kaarien joukolle E on annettu c-väritys.

Esimerkki 2.7. Alhaaalla vasemmalla on verkko G, jonka kaarien joukolle $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$ on annettu 2-väritys sinisellä ja punaisella. Tällöin oikealla oleva osaverkko $H \subseteq G$, jossa $V(H) = \{v_1, v_3, v_5\}$, $E(H) = \{\{v_1, v_5\}, \{v_3, v_5\}\}$, on monokromaattinen, koska sen kaaret $\{v_1, v_5\}$ ja $\{v_3, v_5\}$ ovat samanvärisiä.



Kuva 5: 5-solmuinen verkko G ja sen osaverkko H

Lause 2.8. *Olkoon k, c positiivisia kokonaislukuja ja X ääretön joukko. Joukko $[X]^k$ väritetään c eri väreillä, tällöin joukolla X on ääretön k-monokromaattinen osajoukko.*

Todistus. Todistetaan induktiolla k:n suhteen, kun c on vakio.
$k = 1$. Annetaan c-väritys äärettömälle joukolle $[X]^1 = X$. Väite on tosi, sillä kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla ainakin yhdellä värillä on äärettömän monta alkiota.
Induktio-oletus: Väite on tosi lukua $k(> 1)$ aidosti pienemmille luvuille.
Joukko $[X]^k$ väritetään c eri väreillä. Muodostetaan joukon X osajoukkojen jono $X_0, X_1, X_2 \ldots$ ja valitaan alkiot $x_i \in X_i$, jotka täyttävät seuraavat ehdot: $(i = 0, 1, 2, \ldots)$

(i) $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$

(ii) Kaikki k-joukot $\{x_i\} \cup Z$, jossa $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$, ovat samanvärisiä. Liitetään alkioon x_i tämä väri.

Olkoon $X_0 := X$ ja valitaan mielivaltainen alkio $x_0 \in X_0$. Annetaan c-väritys joukolle $[X_0 \setminus \{x_0\}]^{k-1}$ värittämälla joukon alkiot samalla värillä kuin sen ja joukon $\{x_0\}$ yhdisteen väri joukon $[X_0]^k$ c-värityksessä. Koska $X_0 \setminus \{x_0\}$ on ääretön joukko ja väritetty c eri väreillä, induktio-oletuksen nojalla joukolla $X_0 \setminus \{x_0\}$ on ääretön $(k-1)-$monokromaattinen osajoukko. Olkoon tämä osajoukko X_1. Tällöin ehto (i) $X_1 \subseteq X_0 \setminus \{x_0\}$ selvästi pätee. Myös ehto (ii), eli kaikki k-joukot $\{x_0\} \cup Z$, jossa $Z \in [X_1]^{k-1}$, ovat samanvärisiä, toteutuu johtuen joukkojen X_1 ja $[X_0 \setminus \{x_0\}]^{k-1}$ c-värityksen määritelmistä. Valitaan mielivaltainen alkio $x_1 \in X_1$ ja liitetään alkioon x_1 joukon X_1 $(k-1)$-monokromaattisyyden väri.
Seuraavaksi määritetään c-väritys joukolle $[X_1 \setminus \{x_1\}]^{k-1}$ värittämälla joukon alkiot samalla värillä kuin sen ja joukon $\{x_1\}$ yhdisteen väri joukon $[X_0]^k$ c-värityksessä. Samalla tavalla saadaan ääretön monokromaattinen joukko X_2 ja sen alkio x_2.
Toistamalla saadaan alkioiden jono $x_0, x_1, x_2 \ldots$. Koska c on äärellinen ja alkioita x_i on äärettömän monta, on kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla ainakin yksi väri, joka on liitetty äärettömän moneen alkioon. Nämä alkiot muodostavat joukon X äärettömän k-monokromaattisen osajoukon. □

Alla esitetään lausen 2.8 äärellinen versio. Todistus löytyy mm. Reinhard Diestelin kirjasta Graph Theory. [2, s.193]

Lause 2.9. *Olkoon $k, c, r \geq 1$ kokonaislukuja. On olemassa luonnollinen luku $n \geq k$ siten, että joukolle $[X]^k$ annetusta c-värityksestä riippumatta kaikki n-alkioiset joukot X sisältävät k-monokromaattisen r-alkioisen osajoukon.*

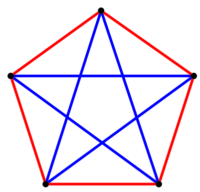
2.2 Ramseyn luvut

Lauseessa 2.2 todistettiin että, on olemassa sellainen n, jolla n-solmuinen tai suurempi verkko G sisältää osaverkon K^r tai $\overline{K^r}$. Pienintä tällaista lukua n kutsutaan Ramseyn r-luvuksi. Solmujen naapuruussuhde jakaa kaaret kahteen luokkaan, joten se on periaatteessa sama asia kuin kaarien värittäminen kahdella värillä. Tässä kappaleessa käytetään puna-sini-väritystä, jota on perinteisesti käytetty Ramseyn teoriassa. Tämän kappaleen tarkoitus on määrittää pari tarkkaa Ramseyn lukua ja tarkastella lauseita, jotka auttavat määrittelemään niitä. Lopuksi katsotaan minkälaisia tarkkoja lukuja on tähän mennessä määritelty.

Määritelmä 2.10. Ramseyn luku $R(s,t)$ on pienin kokonaisluku n, jolla minkä tahansa verkon K^n kaarien puna-sini-väritys sisältää joko punaisen osaverkon K^s tai sinisen osaverkon K^t.

Huomautus 2.11. Määritelmästä seuraa, että $R(s,t) = R(t,s)$

Esimerkki 2.12. Määritetään Ramseyn luku $R(3,3)$, eli mikä on pienin solmujen määrä, jotta verkko sisältää punaisen tai sinisen kolmion K^3 riippumatta annetusta puna-sini-värityksestä. Lauseesta 2.1. seuraa $R(3,3) \leq 6$. Alla on verkon K^5 puna-sini-väritys, josta ei löydy punaista eikä sinistä kolmiota. Eli $5 < R(3,3) \leq 6$, josta seuraa, että $R(3,3) = 6$



Kuva 6: Verkon K^5 kaarien puna-sini-väritys, joka ei sisällä punaista eikä sinistä verkkoa K^3

Lause 2.13. *Olkoon $s \geq 2$, tällöin $R(s,2) = R(2,s) = s$*

Todistus. Selvästi $R(s,2) \geq s$, sillä jos solmuja on vähemmän kuin s, voidaan värittää kaikki kaaret punaisella, jolloin verkko ei sisällä punaista verkkoa K^s eikä sinistä verkkoa K^2. Tarkastellaan s-solmuista verkkoa. Jos siinä on vähintään yksi sininen kaari, se sisältää sinisen verkon K^2. Jos taas kaikki kaaret olisivat punaisia, ne muodostaisivat punaisen verkon K^s. Joka tapauksessa siis löytyy joko punainen osavekko K^s tai sininen osaverkko K^2, eli $R(s,2) = s$. Huomautuksen 2.11 nojalla $R(s,2) = R(2,s) = s$ □

Ramseyn luvun $R(s,t)$ tarkka arvo tunnetaan siis, kun $s = 2$ tai $t = 2$. Seuraavaksi tarkastellaan Ramseyn lukua, kun $s, t > 2$. Tällöin ei ole yleistä lauseketta, joka antaa suoraan tarkkaa Ramseyn lukua. Voidaan kuitenkin laskea Ramseyn luvun eräs yläraja seuraavan lauseen avulla.

Lause 2.14. *Olkoon $s, t > 2$ positiivisia kokonaislukuja. Tällöin*

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Todistus. Olkoot $A := R(s-1,t)$ ja $B := R(s,t-1)$. Valitaan $A+B$ kappaletta mielivaltaista solmua sekä yksi näistä solmuista v. Todistetaan, että tästä $(A+B)$-solmuisesta verkosta löytyy punainen K^s tai sininen K^t. Annetaan ensin solmusta v lähteville $A+B-1$ kaarelle puna-sini-väritys. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla jommankumman värin kaarien määrä on vähintään $\lceil \frac{A+B-1}{2} \rceil$.
Jos $A \geq B$, niin $\lceil \frac{A+B-1}{2} \rceil \geq \lceil \frac{B+B-1}{2} \rceil = B$.
Jos $A < B$, niin $\lceil \frac{A+B-1}{2} \rceil > \lceil \frac{A+A-1}{2} \rceil = A$.
Jommallakummalla värillä on siis vähintään joko $A = R(s-1,t)$ tai $B = R(s,t-1)$ kappaletta kaaria. Oletetaan, että tämä väri on punainen ja sillä on vähintään $A = R(s-1,t)$ kaaria. Muut tapaukset voidaan todistaa samalla tavalla. Solmusta v lähtee vähintään A kaarta, joten näiden kaarten toisessa päässä on vähintään A solmua. Tarkastellaan näiden solmujen muodostamaa verkkoa. Koska tämän verkon solmujen määrä on vähintään $A = R(s-1,t)$, Ramseyn luvun määritelmän mukaan verkosta löytyy joko punainen K^{s-1} tai sininen K^t. Edellisessä tapauksessa voidaan lisätä solmu v punaiseen verkkoon K^{s-1}, jolloin muodostuu etsimämme punainen verkko K^s. Jälkimmäisessä tapauksessa sininen verkko K^t on suoraan se verkko mitä me halusimme löytää $(A+B)$-solmuisesta verkosta. □

Lauseen 2.14 antama Ramseyn luvun yläraja pienenee, kun epäyhtälön oikean puolen termit ovat parillisia lukuja.

Lause 2.15. *Olkoon $s, t > 2$ positiivisia kokonaislukuja siten, että $R(s-1,t), R(s,t-1)$ ovat parillisia. Tällöin $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$.*

Todistus. Olkoot $A := R(s-1,t)$ ja $B := R(s,t-1)$. Valitaan $(A+B-1)$-solmuinen mielivaltainen verkko ja mielivaltainen puna-sini-väritys ja todistetaan, että verkosta löytyy osaverkkona punainen verkko K^s tai sininen verkko K^t.

Solmusta i lähtevien punaisten kaarien määrää merkitään symbolilla r_i. Koska jokainen kaari lasketaan kaaren molemmissa päissä, on summa $\sum r_i$ parillinen. Jos kaikki luvut r_i olisivat parittomia, $\sum r_i$ olisi myös pariton, koska solmujen määrä $A+B-1$ on pariton. Joten joku luvuista r_i on parillinen. Olkoon tätä vastaava solmu j. Olkoot solmusta j lähtevä punaisien kaarien päässä olevien solmujen joukko X ja sinisien kaarien päässä olevat Y. Joukon X määritelmän mukaan $|X| = r_j$ on parillinen. Koska $|X|+|Y| = A+B-2$ on parillinen, $|Y|$ on myös parillinen.

(i) Kun $|X| \geq A-1$, seuraa tästä, että $|X| \geq A$, koska sekä $|X|$ että A ovat parillisia. Tästä epäyhtälöstä $|X| \geq A = R(s-1,t)$ seuraa, että verkosta X löytyy joko punainen osaverkko K^{s-1} tai sininen osaverkko K^t. Jälkimmäisessä tapauksessa K^t on suoraan etsimämme osaverkko. Edellisessä tapauksessa lisätään solmu j verkkoon K^{s-1} ja saadaan punainen K^s.

(ii) Kun $|X| < A-1$, seuraa tästä, että $|Y| = A+B-2-|X| > B-1$. Tästä seuraa, että $|Y| \geq B = R(s,t-1)$, koska luvut $|Y|$ ja B ovat parillisia. Verkosta Y löytyy siis joko punainen osaverkko K^s tai sininen osaverkko K^{t-1}. Edellisessä tapauksessa punainen verkko K^s on etsimämme osaverkko ja jälkimmäisessä tapauksessa voidaan muodostaa sininen verkko K^t lisäämällä solmu j verkkoon K^{t-1}. $\square$

Kun lasketaan Ramseyn luvun ylärajaa edellisen lauseen 2.15 lausekkeen avulla, tarvitaan pienempiä Ramseyn lukuja $R(s-1,t), R(s,t-1)$. Seuraavan lauseen avulla Ramseyn luvun eräs yläraja voidaan laskea suoraan lukujen s,t arvoista.

Lause 2.16. *Olkoon $s,t \geq 2$ positiivisia kokonaislukuja. Tällöin*

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla lukujen s, t suhteen. Olkoon $s = 2$. Tällöin väitteen epäyhtälö pätee, sillä Lauseen 2.13 nojalla $R(s,t) = R(2,t) = t$ ja

$$\binom{s+t-2}{s-1} = \binom{2+t-2}{2-1} = \binom{t}{1} = t.$$

Vastaava toteutuu, kun $t = 2$.
Induktio-oletus: Olkoon $s, t > 2$. Väite pätee kaikille pareille (s', t'), jotka täyttävät ehdon $4 \leq s' + t' < s + t$.
Lauseen 2.14 nojalla $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Soveltamalla induktio-oletusta oikealla puolella, saadaan

$$\begin{aligned}
R(s,t) &\leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \\
&= \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} \\
&= \frac{(s+t-3)!}{(s-2)!(t-1)!} + \frac{(s+t-3)!}{(s-1)!(t-2)!} \\
&= \frac{(s+t-2)!}{(s-1)!(t-1)!} \\
&= \binom{s+t-2}{s-1}
\end{aligned}$$

□

Lauseesta 2.16 seuraa, että $R(s,t) < \infty$, sillä lauseen 2.16 oikea puoli antaa aina äärellisen luvun.

Esimerkki 2.17. Voidaan nyt suoraan laskea Ramseyn luvun $R(s,t)$ ylärajoja soveltamalla edellistä lausetta 2.16. Tarkastellaan taas Ramseyn lauseen erikoistapausta (Lause 2.1), eli luku $R(3,3)$. Lauseen 2.16 nojalla

$$R(3,3) \leq \binom{3+3-2}{3-1} = \binom{4}{2} = 6,$$

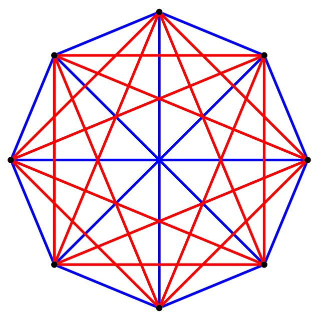
mikä on sama tulos lauseen 2.1 todistuksen kanssa.

Esimerkki 2.18. Määritellään seuraavaksi Ramseyn luku $R(4,3)$. Lauseen

2.13 , 2.15 sekä esimerkin 2.17 nojalla

$$\begin{aligned} R(4,3) &\leq R(4-1,3)+R(4,3-1)-1 \\ &= R(3,3)+R(4,2)-1 \\ &= 6+4-1=9 \end{aligned}$$

Todistetaan, että Ramseyn luku $R(4,3)$ on juuri 9. Meidän pitää löytää 8-solmuinen sinipunainen verkko, josta ei löydy punaista osaverkkoa K^4 eikä sinistä osaverkkoa K^3. Seuraavan kuvan mukainen 8-solmuinen verkko on yksi tällaisista verkoista. Tarkastetaan ensin, ettei tässä verkossa ole sinistä osaverkkoa K^3. Kuvanmukaisessa verkossa K^8 on kahta erityyppistä sinistä kaarta, kahdeksankulmion sivu ja lävistäjä. Tarkastetaan kolmioita, joissa on kaksi sinistä sivua. Kolmiossa voi olla kaksi kahdeksankulmion sivua tai toinen kahdeksankulmion sivu ja toinen lävistäjä. Kuvasta huomataan, että molemmissa tapauksissa kolmas sivu on punainen, joten verkosta ei löydy sinistä verkkoa K^3. Tarkastellaan seuraavaksi neliötä, jonka sivut ovat kaikki punaisia. Kuvassa on kaksi tällaista neliötä. Kummassakin neliössä lävistäjät ovat sinisiä, joten tässä verkossa K^8 ei ole myöskään punaista verkkoa K^4. Ramseyn luku $R(4,3)$ on siis aidosti suurempi kuin 8 ja yhdistämällä tämän edellä olevaan tulokseen $R(4,3) \leq 9$, saadaan $R(4,3) = 9$.



Kuva 7: Verkon K^8 kaarien puna-sini-väritys, jossa ei ole osaverkkona punaista verkkoa K^4 eikä sinistä verkkoa K^3

Ramseyn luvun tutkimuksessa on johdettu useita Ramseyn luvun ylärajoja antavia lausekkeita, joista osaa me tarkastelimme tässä kappaleessa.

Ei ole kuitenkaan löytynyt sellaista algoritmia, jolla voi laskea suoraan tarkkaa Ramseyn lukua $R(s,t)$, kun $s,t > 2$. Edellä määrittelimme kaksi tarkkaa Ramseyn lukua $R(3,3) = 6$ ja $R(4,3) = 9$, mutta yleensä tarkan Ramseyn luvun laskeminen on hankalaa. Alla taulukossa 1 on kaikki tarkat Ramseyn luvut $R(s,t)$, jossa $s,t > 2$, jotka tunnetaan tällä hetkellä. [6]

s	t	$R(s,t)$
3	3	6
3	4	9
3	5	14
3	6	18
3	7	23
3	8	28
3	9	36
4	4	18
4	5	25

Taulukko 1: Tarkat Ramseyn luvut $R(s,t)$, kun $s,t > 2$

3 Ramseyn teoria kokonaisluvuilla

Edellisessä kappaleessa tarkasteltiin verkkoja ja niissä esiintyviä osastruktuureja. Tässä kappaleessa tarkastellaan verkkojen sijaan kokonaislukuja ja niihin liittyvää Ramseyn teoriaa. Tämän osa-alueen yksi merkittävimmistä tuloksista on van der Waerdenin lause sekä Hales-Jewett'n lause. Näiden lauseiden ymmärtämiseksi ja todistamiseksi käydään ensin läpi tarvittavat määritelmät esimerkkeineen.

3.1 Määritelmät

Määritelmä 3.1. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään $[n] := \{1, 2, ..., n\}$.

Määritelmä 3.2. Olkoon $n, t \in \mathbb{N}$. Hyperkuutio C_t^n määritellään seuraavasti.

$$C_t^n := \{(x_1, ..., x_n) |\ x_i \in \{0, 1, ..., t-1\}\} = \{0, 1, ..., t-1\}^n$$

Määritelmä 3.3. Hyperkuution C_t^n jana on pisteiden joukko $\{\boldsymbol{x_0}, ..., \boldsymbol{x_{t-1}}\}$, jossa pisteet $\boldsymbol{x_i} = (x_{i1}, ..., x_{in})$ täyttävät seuraavat ehdot:
(i) Löytyy ainakin yksi koordinaatti $1 \leq j \leq n$, jolle pätee $x_{sj} = s$ kaikilla $0 \leq s < t$.
(ii) Muilla koordinaateilla $x_{0j} = x_{1j} = ... = x_{t-1,j}$

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan hyperkuutiota C_3^2 ja sen janoja. Hyperkuutio C_3^2 on muotoa

$$\begin{aligned} C_3^2 &= \{(x_1, x_2) |\ x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}\} \\ &= \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\} \end{aligned}$$

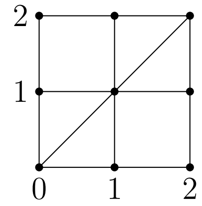
Hyperkuution C_3^2 jana on muotoa $\{\boldsymbol{x_0} = (x_{01}, x_{02}), \boldsymbol{x_1} = (x_{11}, x_{12}), \boldsymbol{x_2} = (x_{21}, x_{22})\}$, joka täyttää edellisen määritelmän 3.3 ehdot, eli

$$\{(0,0), (1,0), (2,0)\}, \{(0,1), (1,1), (2,1)\}, \{(0,2), (1,2), (2,2)\}$$

ovat janoja, joissa ensimmäinen koordinaatti täyttää ehdon (i) ja toinen koordinaatti täyttää ehdon (ii).

$$\{(0,0),(0,1),(0,2)\},\{(1,0),(1,1),(1,2)\},\{(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

ovat myös janoja, joissa toinen koordinaatti täyttää ehdon (i) ja toinen täyttää ehdon (ii). Kun molemmat koordinaatit täyttävät ehdon (i), saadaan jana $\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$. Hyperkuutio C_3^2 ja sen janat ovat piirretty seuraavaan kuvaan.



Kuva 8: Hyperkuution C_3^2 janat

Huomautus 3.5. Edellisessä esimerkissä pisteiden joukko $\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$ ei ole määritelmän 3.3 mukaan jana.

Määritelmä 3.6. Määritellään relaatio $\sim$ joukossa C_{t+1}^n seuraavasti:

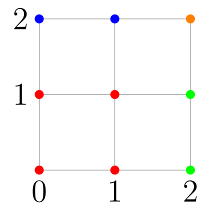
$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$$

jos ja vain jos $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_{n-i}, t, ..., t), \boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_{n-i}, t, ..., t) \in C_{t+1}^n$, jossa $0 \leq i \leq n$ ja $x_1, ..., x_{n-i}, y_1, ..., y_{n-i} \neq t$. Tällöin relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa C_{t+1}^n. Kaikki keskenään ekvivalentit alkiot muodostavat joukon C_{t+1}^n osajoukon, jota sanotaan t-ekvivalenssiluokaksi.

Määritelmä 3.7. Väritetään hyperkuution C_{t+1}^n alkiot eri väreillä. Hyperkuution C_{t+1}^n väritys on kerroksinen, kun samaan t-ekvivalenssiluokkaan kuuluvat alkiot ovat samanvärisiä.

Esimerkki 3.8. Tarkastellaan esimerkin 3.4 hyperkuution C_3^2 2-ekvivalenssiluokkia. Pisteet $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$, joissa ei esiinny

$t = 2$ muodostavat ekvivalenssiluokan. Joukko $\{(0,2),(1,2)\}$ on ekvivalenssiluokka, jossa $t = 2$ esiintyy vain viimeisessä koordinaatissa. Joukko $\{(2,2)\}$ on myös eräs ekvivalenssiluokka. Muut pisteet $(2,0),(2,1)$ eivät kuulu mihinkään ekvivalenssiluokkaan. Väritetään pisteet $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ punaisella, pisteet $(0,2),(1,2)$ sinisellä ja piste $(2,2)$ oranssilla alla olevan kuvan mukaisesti. Tällöin väritys on kerroksinen pisteiden $(2,0),(2,1)$ värityksestä riippumatta.



Kuva 9: Hyperkuution C_3^2 2-ekvivalenssiluokat

Määritelmä 3.9. Määritellään hyperkuution C_t^n k-ulotteinen aliavaruus, kun $1 \leq k \leq n$. Olkoon $\{1,...,n\} = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_k$ erillisten joukkojen yhdiste, missä $B_i \neq \emptyset$ kaikilla $1 \leq i \leq k$. Olkoon

$$f : B_0 \to \{0,...,t-1\}$$

minkä tahansa funktio. Määritellään funktio $\hat{f} : C_t^k \to C_t^n$,

$$\hat{f}(y_1,...,.y_k) = (x_1,...,x_n),$$

jossa

$$\begin{aligned} x_i &= f(i), \;\; i \in B_0 \\ x_i &= y_j, \;\; i \in B_j \end{aligned}$$

Funktion $\hat{f}$ arvojoukkoa kutsutaan hyperkuution C_t^n k-ulotteiseksi aliavaruudeksi.

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan hyperkuution C_3^5 2-ulotteista aliavaruutta, kun $B_1 = \{1, 2\}, B_2 = \{3, 4\}, B_0 = \{5\}$ sekä $f(5) = 1$. Tällöin hyperkuution C_3^5 2-ulotteinen aliavaruus saadaan funktion $\hat{f} : C_3^2 \to C_3^5$,
$(y_1, y_2) \mapsto (x_1, ..., x_5) = (y_1, y_1, y_2, y_2, f(5))$ arvojoukkona.

$$(0,0) \mapsto (0,0,0,0,1)$$

$$(0,1) \mapsto (0,0,1,1,1)$$

$$(0,2) \mapsto (0,0,2,2,1)$$

$$(1,0) \mapsto (1,1,0,0,1)$$

$$(1,1) \mapsto (1,1,1,1,1)$$

$$(1,2) \mapsto (1,1,2,2,1)$$

$$(2,0) \mapsto (2,2,0,0,1)$$

$$(2,1) \mapsto (2,2,1,1,1)$$

$$(2,2) \mapsto (2,2,2,2,1)$$

Huomautus 3.11. 1-ulotteinen aliavaruus on jana. Esimerkiksi kun $B_1 = \{1, 2, 3\}, B_0 = \{4, 5\}$ ja $f(4) = 2, f(5) = 0$, hyperkuution C_3^5 1-ulotteinen aliavaruus saadaan funktion $\hat{f} : C_3^1 \to C_3^5$,
$(y_1) \mapsto (x_1, ..., x_5) = (y_1, y_1, y_1, f(4), f(5))$ arvojoukkona.

$$(0) \mapsto (0,0,0,2,0)$$

$$(1) \mapsto (1,1,1,2,0)$$

$$(2) \mapsto (2,2,2,2,0)$$

Nämä kolme pistettä muodostaa määritelmän 3.3 mukaan janan.

Määritelmä 3.12. Hyperkuution C_{t+1}^n k-ulotteista aliavaruutta sanotaan kerroksiseksi, jos sen väritys on kerroksinen, kun aliavaruus samaistetaan luonnollisesti hyperkuution C_{t+1}^k kanssa. Jana $\{\boldsymbol{x_0}, ..., \boldsymbol{x_t}\}$ on kerroksinen, kun ensimmäiset t pistettä $\boldsymbol{x_0}, ..., \boldsymbol{x_{t-1}}$ ovat samanvärisiä.

Esimerkki 3.13. Esimerkissä 3.10 2-ulotteinen aliavaruus on kerroksinen, kun pisteet $(0,0,0,0,1), (0,0,1,1,1), (1,1,0,0,1)$, $(1,1,1,1,1)$ ovat samanvärisiä ja pisteet $(0,0,2,2,1), (1,1,2,2,1)$ ovat samanvärisiä.

3.2 Hales-Jewett'n lause

Olemme nyt valmiita käsittelemään Hales-Jewett'n lausetta.

Lause 3.14. *(Hales-Jewett, 1963) Olkoon r, t luonnollisia lukuja. Tällöin on olemassa luonnollinen luku $N' = HJ(r,t)$ siten, että kaikilla $N \geq N'$ hyperkuution C_t^N r-väritys sisältää monokromaattisen janan.*

On selvää, että Hales-Jewett'n lause on tosi, kun $t = 1$. Ennen kuin todistetaan Hales-Jewett'n lause kaikille t:n arvoille, tarkastellaan erikseen tapausta $t = 2$.

Todistus. [*Hales-Jewett'n lauseelle, kun* $t = 2$] Tarkasteltava hyperkuutio on muotoa

$$C_2^n = \{(x_1, ..., x_n)| \ x_i \in \{0,1\}\}$$

Annetaan hyperkuutiolle r-väritys. Valitaan seuraavat hyperkuution C_2^n pisteet $\boldsymbol{x_0}, ..., \boldsymbol{x_n}$, jossa pisteen $\boldsymbol{x_i}$ ensimmäiset i koordinaatit ovat 1 ja loput 0, eli $\boldsymbol{x_0} = (0, .., 0)$, $\boldsymbol{x_1} = (1, 0, ..., 0)$,..., $\boldsymbol{x_n} = (1, ..., 1)$. Kun $n \geq r$, kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla löytyy kaksi samanväristä pistettä. Nämä kaksi pistettä muodostavat määritelmän mukaan 3.3 janan. Tämä on etsimämme monokromaattinen jana. Siis $HJ(r, 2) = r$. □

Hales-Jewett'n lauseen todistamisen helpottamiseksi otetaan käyttöön seuraavia merkintöjä tietyille väitteille.

$HJ(t)$: Olkoon r luonnollinen luku. On olemassa luonnollinen luku $N' = HJ(r,t)$ siten, että kaikilla $N \geq N'$ hyperkuution C_t^N r-väritys sisältää monokromaattisen janan.

$LHJ(t)$: Olkoon r, k luonnollisia lukuja. On olemassa luonnollinen luku $M' = LHJ(r,t,k)$ siten, että kaikilla $M \geq M'$ hyperkuution C_{t+1}^M r-väritys sisältää kerroksisen k-ulotteisen aliavaruuden.

Lause 3.15. $HJ(t) \Rightarrow LHJ(t)$

Todistus. Oletetaan, että $HJ(t)$, eli Hales-Jewett'n lause pätee luvuille r, t. Todistamme väitteen $LHJ(t)$ induktiolla luvun k suhteen.
$k = 1$: Oletuksen nojalla löytyy ehdon täyttävä luonnollinen luku $HJ(r,t)$, joten merkitään tätä lukua $M' := HJ(r,t)$. Olkoon $M \geq M'$ ja väritetään C_{t+1}^M r eri värillä. Hyperkuution C_{t+1}^M sisällä on C_t^M, josta löytyy monokromaattinen jana oletuksen nojalla. Tämä monokromaattinen jana sekä sen jatkeessa oleva piste hyperkuutiossa C_{t+1}^M muodostavat kerroksisen janan, eli 1-ulotteisen aliavaruuden.

Induktio-oletus: Väite $LHJ(t)$ on tosi arvolla k
Induktioväite: Väite $LHJ(t)$ on tosi arvolla $k+1$.

Olkoon $m := LHJ(r,t,k)$. Avaruudessa C_{t+1}^m on $(t+1)^m$ pistettä, joten hyperkuutiolle C_{t+1}^m on mahdollista antaa $r^{(t+1)^m}$ erilaista r-väritystä. Merkitään tätä lukua $s := r^{(t+1)^m}$. Se, että on olemassa monokromaattinen jana hyperkuutiossa C_t^m on yhtäpitävä sen kanssa, että on olemassa kerroksinen jana hyperkuutiossa C_{t+1}^m, joten $HJ(s,t) = LHJ(s,t,1)$. Merkitään tätä lukua $m' := HJ(s,t) = LHJ(s,t,1)$.
Induktioväitteen todistamiseksi tulee löytää tarpeeksi suuri ulottuvuus M, jolla hyperkuution C_{t+1}^M r-väritys sisältää kerroksisen $(k+1)$-ulotteisen aliavaruuden. Todistetaan, että luku $m + m'$ toteuttaa tämän ehdon. Olkoon $\chi : C_{t+1}^{m+m'} \to \{0, ..., r-1\}$ hyperkuution $C_{t+1}^{m+m'}$ r-väritys. Määritellään luontevasti $C_{t+1}^{m+m'} = C_{t+1}^{m'} \times C_{t+1}^m$ ja $\boldsymbol{xy} := (x_0, ..., x_{m'}, y_0, ..., y_m) \in C_{t+1}^{m+m'}$, kun $\boldsymbol{x} = (x_0, ...x_{m'}) \in C_{t+1}^{m'}$, $\boldsymbol{y} = (y_0, ...y_m) \in C_{t+1}^m$.

Johdetaan hyperkuution $C_{t+1}^{m'}$ väritys χ^* seuraavasti:

$$\chi^*(\boldsymbol{x}) = \chi^*(\boldsymbol{x'}), \text{ joss } \chi(\boldsymbol{xy}) = \chi(\boldsymbol{x'y}) \text{ kaikilla } \boldsymbol{y} \in C_{t+1}^m$$

Värityksessä χ^* on enintään s eri värejä. Se johtuu tämän värityksen χ^* määritelmästä sekä siitä, että hyperkuution C_{t+1}^m erilaisten r-väritysten lukumäärä on s. Koska määriteltiin, että $m' = LHJ(s,t,1)$, hyperkuutio $C_{t+1}^{m'}$ sisältää kerroksisen janan. Olkoot tämän janan pisteet $\boldsymbol{x_0}, ..., \boldsymbol{x_t}$.

Seuraavaksi johdetaan hyperkuution C_{t+1}^m väritys χ^{**} seuraavalla tavalla:

$$\chi^{**}(\boldsymbol{y}) = \chi(\boldsymbol{x_i y}) \ (0 \leq i \leq t-1)$$

Näin voidaan määritellä, koska x_i on kerroksisen janan t ensimmäistä pistettä, eli $\chi^*(\boldsymbol{x_0}) = ... = \chi^*(\boldsymbol{x_{t-1}})$ ja värityksen χ^* määritelmän perusteella se tarkoittaa, että $\chi(\boldsymbol{x_0 y}) = ... = \chi(\boldsymbol{x_{t-1} y})$. Induktio-oletuksen nojalla hyperkuutiossa C_{t+1}^m on kerroksinen k-ulotteinen aliavaruus $S \subseteq C_{t+1}^m$. Olkoot joukon S t-ekvivalenssiluokat $S_0, S_1, ...S_k$. Määritellään seuraavaksi

$$T := \{\boldsymbol{x_i s} | \ 0 \leq i \leq t, s \in S\} \subseteq C_{t+1}^{m'+m}$$

Tällöin joukot $T_j = \{\boldsymbol{x_i s} | \ 0 \leq i < t, s \in S_j\}, 0 \leq j \leq k$ ja $T_{k+1} = \{(t, ..., t)\}$ muodostavat joukon T t-ekvivalenssiluokat. Todistetaan, että joukko T on kerroksinen, eli sen ekvivalenssiluokat ovat monokromaattisia. Otetaan alkiot $\boldsymbol{x_i s}, \boldsymbol{x_{i'} s'} \in T_j$ $(0 \leq j \leq k)$, tällöin värityksen χ^{**} määritelmästä seuraa, että

$$\chi(\boldsymbol{x_i s}) = \chi^{**}(\boldsymbol{s}) \text{ sekä } \chi(\boldsymbol{x_{i'} s'}) = \chi^{**}(\boldsymbol{s'})$$

Koska joukko S on kerroksinen ja alkiot s, s' kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan

$$\chi^{**}(\boldsymbol{s}) = \chi^{**}(\boldsymbol{s'})$$

Joten

$$\chi(\boldsymbol{x_i s}) = \chi(\boldsymbol{x_{i'} s'})$$

Joukko T on etsimämme kerroksinen $(k+1)$-ulotteinen aliavaruus. $\square$

Lause 3.16. *Kerroksinen k-ulotteinen avaruus, joka on väritetty enintään k:lla eri väreillä, sisältää monokromaattisen janan.*

Todistus. k-ulotteinen avaruus samaistetaan hyperkuution C^k_{t+1} kanssa luonnollisella tavalla (määritelmän 3.9 kuvauksella $\hat{f}$). Tarkastellaan hyperkuution C^k_{t+1} seuraavia pisteitä $\boldsymbol{x_0}, ..., \boldsymbol{x_k}$.

$$\boldsymbol{x_i} = (x_{i1}, ..., x_{ik}), \text{ missä } x_{ij} = \begin{cases} t & \text{jos } j \leq i \\ 0 & \text{jos } j > i \end{cases}$$

Pisteen $\boldsymbol{x_i}$ i viimeistä koordinaattia saavat arvon t ja loput arvon 0, eli $\boldsymbol{x_0} = (0, ..., 0), \boldsymbol{x_1} = (0, ..., 0, t), ..., \boldsymbol{x_k} = (t, ..., t)$. Nämä ovat hyperkuution kärkipisteitä. Kun hyperkuutio C^k_{t+1} väritetään k:lla eri väreillä, niistä $k+1$ pisteestä löytyy kaksi samanväristä pistettä kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla. Olkoon nämä kaksi pistettä $\boldsymbol{x_u}$ ja $\boldsymbol{x_v}$, jossa $u < v$. Määritellään $\boldsymbol{y_0}, ..., \boldsymbol{y_t}$ seuraavasti:

$$\boldsymbol{y_s} = (y_{s1}, ..., x_{sk}), \text{ missä } y_{si} = \begin{cases} 0 & \text{jos } i \leq u \\ s & \text{jos } u < i \leq v \\ t & \text{jos } u < i \end{cases}$$

Piste $\boldsymbol{y_s}$ on siis muotoa $(y_{s1}, ..., x_{sk}) = (0...0, s, ..., s, t, ..., t)$ jossa ensimmäiset u koordinaatit ovat 0, seuraavat $v - u$ koordinaatit ovat s ja loput t, eli

$$\boldsymbol{y_0} = (0, ...0, 0, ..., 0, t, ...t)$$

$$\boldsymbol{y_1} = (0, ...0, 1, ..., 1, t, ...t)$$

$$...$$

$$\boldsymbol{y_t} = (0, ...0, t, ...t, t, ..., t)$$

Pisteiden $\boldsymbol{y_s}$ määritelmästä seuraa, että $\boldsymbol{x_u} = \boldsymbol{y_0}$ ja $\boldsymbol{x_v} = \boldsymbol{y_t}$. Koska $\boldsymbol{x_u}$ ja $\boldsymbol{x_v}$ olivat samanvärisiä, $\boldsymbol{y_0}$ ja $\boldsymbol{y_t}$ ovat myös samanvärisiä. Pisteet $\boldsymbol{y_0}, ...\boldsymbol{y_{t-1}}$ kuuluvat hyperkuution C^k_{t+1} samaan ekvivalenssiluokkaan, joten ne ovat samanvärisiä. Pisteet $\boldsymbol{y_0}, ..., \boldsymbol{y_t}$ ovat siis kaikki samanvärisiä ja määritelmän 3.3 mukaan ne muodostavat janan. Tämä on etsimämme monokromaattinen jana. $\square$

Lause 3.17. $LHJ(t) \Rightarrow HJ(t+1)$

Todistus. Oletetaan, että väite $LHJ(t)$ on tosi, eli kaikilla luonnollisilla luvuilla r, t on olemassa luonnollinen luku N' siten, että hyperkuution C_{t+1}^N r-väritys sisältää k-ulotteisen kerroksisen aliavaruuden kaikilla $N \geq N'$. Tämä pätee kaikilla $1 \leq k \leq N$. Otetaan k:n arvoksi r, jolloin löytyy kerroksinen r-ulotteinen aliavaruus. Koska tämä kerroksinen r-ulotteinen aliavaruus on väritetty enintään r eri väreillä, lauseen 3.16 nojalla se sisältää monokromaattisen janan. $\square$

Yhdistämällä lauseet 3.15 ja 3.17 saadaan $HJ(t) \Rightarrow HJ(t+1)$. Tämä tulos ja Hales-Jewett'n lauseen todistus arvolle $t = 2$ yhdessä antavat induktiotodistuksen Hales-Jewett'n lauseelle.

Määritelmä 3.18. Pienintä luonnollista lukua N', joka täyttää lauseen 3.14 ehdon, kutsutaan Hales-Jewett'n luvuksi. Tässä kirjoitelmassa merkintä $HJ(r, t)$ on tarkoittanut tähän asti mitä tahansa luonnollista lukua, jolla toteutuu Heles-Jewett'n lauseen ehto, mutta tätä käytetään myös usein merkitsemään kyseistä pienintä lukua.

On selvä, että $HJ(r, 1) = 1$ ja on helppo tarkastaa, että $HJ(r, 2) = r$. Ensimmäinen epätriviaali Hales-Jewett'n luvusta on $HJ(2, 3)$. Tälle pätee $HJ(2, 3) = 4$. [4] Muille Hales-Jewett'n luvuille ei ole määritelty tarkkoja arvoja, mutta niiden alarajoja ja ylärajoja tutkitaan ja parannetaan.

Perinteinen 3×3 -ristinolla päättyy aina tasapeliin, ellei toinen pelaaja tee virheitä. Voidaan laajentaa ristinolla n-ulotteiseksi, jolloin voidaan samaistaa pelilauta hyperkuution C_t^n kanssa. $HJ(2, 3) = 4$ tarkoittaa sitä, ettei peli koskaan päädy tasapeliin, kun pelataan kahdestan laudalla C_3^4, sillä hyperkuutiosta C_3^4 löytyy aina monokromaattinen jana. Hales-Jewett'n lause kertoo, että riippumatta värien (pelaajien) määrästä tai laudan leveydestä löytyy tarpeeksi suuri ulottuvuus n, jolla löytyy aina pelin voittaja .

3.3 Van der Waerdenin lause

Vuoden 1930 Ramseyn tutkielman julkaisua edelsi kokonaislukuja ja niiden osastruktuuria koskeva tulos, van der Waerdenin lause. Van der Waerdenin lause tarkastelee kokonaislukuja sekä niiden värityksiä. Mietitään esimerkiksi lukujen $1, 2, ..., n$ väritystä kahdella värillä. Onko tarpeeksi isoa lukua n, jotta lukujonosta löytyy tietyn pituinen monokromaattinen aritmeettinen lukujono? Van der Waerdenin lause antaa vastauksen tähän kysymykseen.

Määritelmä 3.19. Lukujonoa (a_n) kutsutaan aritmeettiseksi, kun jonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio, eli on olemassa vakio d siten, että $a_{n+1} - a_n = d$ kaikilla n.

Lause 3.20. *(van der Waerden, 1927) Olkoon p, r luonnollisia lukuja On olemassa sellainen luonnollinen luku $n = n(p, r)$ siten, että joukon $[n]$ r-väritys sisältää monokromaattisen aritmeettisen p-termisen lukujonon.*

Ennen kuin tarkastellaan van der Waerdenin lauseen todistusta, määritellään van der Waerdenin luku ja tarkastellaan yksinkertaista tapausta, missä $p = 3$ ja $r = 2$.

Määritelmä 3.21. Pienintä kokonaislukua n, joka täyttää Lauseen 3.20 ehdon, kutsutaan van der Waerdenin luvuksi ja merkitään tätä $W(p, r)$.

On helppo tarkistaa että, $W(p, 1) = p$ ja $W(2, r) = r + 1$.

Esimerkki 3.22. Tarkastellaan van der Waerdenin luku $W(3, 2)$ ja todistetaan, että $W(3, 2) = 9$, eli pienin kokonaisluku n siten, että kahdella värillä väritetystä joukosta $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ löytyy 3-terminen monokromaattinen aritmeettinen lukujono, on 9.
Ensin osoitetaan, että $W(3, 2) \geq 9$. Riittää löytää joukon $\{1, 2, ..., 8\}$ 2-väritys, josta ei löydy monokromaattista 3-termistä aritmeettista lukujonoa. Käytetään taas perinteistä kahta väriä, punaista ja sinistä. Väritetään luvut 1,2,5,6 sinisellä ja loput luvut 3,4,7,8 punaisella (alhaalla luvut on väritetty punaisella ja sinisellä).

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

On helppo tarkistaa, että tästä lukujonosta muodostetut 3-termiset monokromaattiset lukujonot eivät ole artimeettisia.

Seuraavaksi todistetaan, että $W(3,2) \leq 9$. Tehdään vastaoletus: On olemassa joukon $\{1, 2, ..., 9\}$ väritys kahdella värillä, josta ei löydy 3-termistä monokromaattista aritmeettista lukujonoa. Tällöin 3:n ja 5:n on oltava erivärisiä. Jos ne olisivat samanvärisiä, olkoot punaisia, 1:n on oltava myös punainen jotta aritmeettinen lukujono 1,3,5 ei olisi monokromaattinen vastaoletuksen mukaisesti. Samalla tavalla 4:n ja 7:n on oltava punaisia. Silloin lukujonosta 1,4,7 tulee kuitenkin monokromaattinen aritmeettinen, mikä on vastaoletuksen kanssa ristiriitaista. Eli 3 ja 5 eivät voi siis molemmat olla punaisia. Aivan samalla tavalla molemmat eivät voi olla sinisiä, joten niiden on oltava erivärisiä.

Samalla logiikalla voidaan johtaa, että lukupari 5 ja 7 sekä 4 ja 6 ovat erivärisiä. Värien symmetrisyyden vuoksi voidaan olettaa, että 3 on punainen. Tällöin edellä johdettujen nojalla 5 on sininen ja 7 punainen. On kaksi mahdollista vaihtoehtoa 3,4,5,6,7 väritykselle.

3, 4, 5, 6, 7 (3,4,7 punainen, 5,6 sininen)

3, 4, 5, 6, 7 (3,6,7 punainen, 4,5 sininen)

Tarkastellaan ensimmäistä tapausta. Koska 3 ja 4 ovat punaisia, luvun 2 pitää olla sininen, jottei ne muodosta monokromaattista aritmeettista lukujonoa. Koska 4 ja 7 ovat punaisia, 1:n on oltava sininen. 9:n on oltava punainen, koska 1 ja 5 ovat sinisiä. Jotta lukujono 7,8,9 ei olisi monokromaatinen, 8:n on oltava sininen. Saatiin seuraavanlainen lukujono.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (3,4,7,9 punainen, 1,2,5,6,8 sininen)

Nyt aritmeettinen lukujono 2,5,8 on monokromaattinen, mikä on kontradiktio. Toisesta tapauksesta voidaan johtaa kontradiktio samalla tavalla. Vastaoletus on siis epätosi. Kahdesta ylhäällä johdetusta epäyhtälöstä

$W(3,2) \leq 9$, $W(3,2) \geq 9$ seuraa, että $W(3,2) = 9$.

Todistetaan nyt van der Waerdenin lause yleisesti. Van der Waerden todisti alunperin lauseen kaksinkertaisella induktiolla, mutta tässä se todistetaan käyttämällä edellä todistettua Hales-Jewett'n lausetta.

Todistus. Hales-Jewett'n lauseen nojalla löytyy N', jolla r värillä väritetty hyperkuutio C_p^N sisältää monokromaattisen janan, kun $N \geq N'$. Tarkastellaan seuraavaa kuvausta f hyperkuution C_p^N pisteistä luonnollisille luvuille

$$(x_1, ..., x_N) \mapsto \sum_{i=1}^{N} x_i(t-1)^{i-1} = x_1 + x_2(t-1) + ... + x_N(t-1)^{(N-1)}$$

Olkoot monokromaattisen janan pisteet $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_p}$, missä $\boldsymbol{x_i} = (x_{i1}, ..., x_{iN})$, $(i = 1, ..., p)$ ja näitä pisteitä vastaavat luvut $f(\boldsymbol{x_1}), ..., f(\boldsymbol{x_p})$. Todistetaan, että tämä lukujono on artimeettinen tarkastelemalla lukujonon kahta vierekkäistä termiä

$f(\boldsymbol{x_{k+1}}) - f(\boldsymbol{x_k})$

$= (x_{k+1,1} - (x_{k1})) + (x_{k+1,2} - (x_{k2}))(t-1) + ... + (x_{k+1,N} - (x_k N))(t-1)^{(N-1)}$

Janan määritelmästä seuraa, että $(x_{k+1,s} - (x_{ks}))$ on joko 0 tai 1, joten $f(\boldsymbol{x_{k+1}}) - f(\boldsymbol{x_k})$ on k :sta riippumaton vakio. $f(\boldsymbol{x_1}), ..., f(\boldsymbol{x_p})$ on siis monokromaattinen p-terminen aritmeettinen lukujono. $\square$

Tähän mennessä löydettyjä tarkkoja van der Waerdenin lukuja ovat $W(3,2) = 9, W(4,2) = 35, W(5,2) = 178, W(6,2) = 1132, W(3,3) = 27$ sekä $W(3,4) = 76$.

Vuonna 2001 Gowers on antanut van der Waerdenin luvulle ylärajan. [4, s.41]

$$W(p,r) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{p+9}}}}}$$

Kun $r = 2$, saadaan

$$W(p,2) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{p+9}}}}}$$

Vuonna 1998 Graham on esittänyt seuraavanlaisen konjektuurin, joka on vielä ratkaisematon. [4, s.41]

$$W(p,2) < 2^{p^2}$$

Lähdeluettelo

[1] B. Bollobás: *Modern Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] R. Diestel: *Graph Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[3] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer: *Ramsey Theory*. Wiley-Interscience, 1990.

[4] N. Hindman, E. Tressler: *The First Nontrivial Hales-Jewett Number is Four*. Ars Combinatoria, 2014.

[5] B. M. Landman, A. Robertson: *Ramsey Theory on Integers*. American Mathematical Society, 2003.

[6] Wikipedia. Vapaa tietosanakirja. Saatavissa: `https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_theory`, luettu 14.2.2020