Itseisarvo, jana ja pistejoukon yhtälö lukion matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Joose Heinonen
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2019

Sisältö

Johdanto

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston Avoin oppikirja -projektia, jossa tuotetaan avointa oppimateriaalia lukion matematiikan kursseille. Tutkielma kattaa pitkän matematiikan Analyyttinen geometria (MAA5) -kurssin aiheista itseisarvon, janan ja pistejoukon yhtälön.

Tutkielman tavoitteena on luoda oppimateriaalia, jossa opiskeltava teoria rakennetaan pohdintatehtävien kautta samalla kehittäen opiskelijan matemaattista ajattelua. Tehtävissä kiinnitetään huomiota siihen, että opiskelijat esimerkiksi selittävät omaa ajatusprosessiaan tai analysoivat ja vertailevat valmiita ratkaisuja. Näin haastetaan opiskelija todella kehittämään ymmärrystään opiskeltavista aiheista pelkän mekaanisen kaavan pyörittelyn sijaan. Tällaiset tehtävätyypit ovat myös matematiikan sähköistymisen myötä entistä ajankohtaisempia.

Tutkielma koostuu viidestä eri osasta. Ensimmäisessä osassa avataan oppikirjan tavoitteita, jotka pohjautuvat lukion opetussuunnitelman perusteisiin sekä projektiryhmän kanssa tieteellisistä artikkeleista valittuihin yhteisiin tavoitteisiin. Tätä seuraa niin ikään tieteellisiin artikkeleihin nojautuva osio, jossa perustellaan oppimateriaalissa tehtyjä ratkaisuja. Kolmantena osiona on opiskelijalle suunnattu varsinainen oppimateriaali, jota seuraa puolestaan opettajalle suunnattu oppimateriaalin käyttöä tukeva opettajan opas. Lopussa on vielä oppimateriaalissa esiintyvien tehtävien vastaukset.

Oppimateriaali on suunniteltu käytettäväksi yhdessä opettajan kanssa, mutta sitä on mahdollista hyödyntää myös itseopiskelumateriaalina. Tällöin opiskelijan voi olla hyödyllistä tutustua myös opettajan oppaan sisältöihin, jotta tehtävien taustalla olevat ajatukset tulevat varmasti ymmärretyiksi.

1 Oppikirjan tavoitteet

1.1 Opetussuunnitelma

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (2015) asetetaan Analyyttinen geometria (MAA5) -kurssin tavoitteiksi, että opiskelija

- ymmärtää, kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille
- ymmärtää pistejoukon yhtälön käsitteen ja oppii tutkimaan yhtälöiden avulla pisteitä, suoria, ympyröitä ja paraabeleja
- syventää itseisarvokäsitteen ymmärtämystään ja oppii ratkaisemaan sellaisia yksinkertaisia itseisarvoyhtälöitä ja vastaavia epäyhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä pistejoukon yhtälön tutkimisessa sekä yhtälöiden, yhtälöryhmien, itseisarvoyhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemisessa sovellusongelmissa.

Kaikki yllä mainitut tavoitteet liittyvät kokonaan tai osittain myös tähän oppikirjan osaan, jossa käsiteltävistä asioista pistejoukon yhtälö ja itseisarvoyhtälön ratkaiseminen on listattu myös opetussuunnitelmassa kurssin keskeisten sisältöjen joukkoon. [8] Itseisarvokäsitteen ymmärryksen syventäminen ja pistejoukon yhtälön käsitteen ymmärtäminen ovatkin tämän kirjan osan keskeisimpiä aihesisältöjä analyyttisen geometrian yleiseen luonteeseen johdattamisen ohella. Itseisarvoyhtälöistä käsitellään tässä kirjan osassa vain yksinkertaisemmat tyyppiä $|f(x)| = a$ olevat yhtälöt. Haastavammat itseisarvoyhtälöt ja itseisarvoepäyhtälöt käsitellään muissa kirjan osissa.

Kurssikohtaisten tavoitteiden ohella yleisiä matematiikan opetuksen tavoitteita opetussuunnitelmassa ovat muun muassa opetuksen perustuminen opiskelijoita kiinnostaviin aihepiireihin sekä ohjaaminen matematiikan kielen käyttämiseen ja matemaattisten käsitteiden merkityksien hahmottamiseen. Yksi tavoitteista on myös opiskelijoiden tutustuttaminen matemaattisen ajattelun malleihin, joita käsitellään seuraavaksi. [8]

1.2 Habits of Mind

Oppikirjan tekoon valittiin muutama yleinen tavoite artikkelista *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. Artikkelin mukaan matematiikan opetuksessa ja sen suunnittelussa on keskitytty liikaa siihen, mitä matemaattisia tuloksia oppilaille milloinkin opetetaan. Aihesisällöt on pyritty pitämään ajankohtaisina, mutta todellisuudessa tulevaisuuden matemaattisia ongelmia ei välttämättä vielä edes tunneta, eikä niitä osata ennustaa. Tämän vuoksi tiettyjen matemaattisten mekanismien ja tulosten opettelun sijaan opetuksessa olisi tärkeämpää keskittyä matemaattisen ajattelun kehittämiseen eli niihin ajattelun malleihin, joita matemaatikot käyttävät luodessaan kyseisiä tuloksia. [1]

Artikkelissa esitellään useita matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisukykyä kehittäviä ajattelun malleja. Näistä valittiin oppikirjan tavoitteiksi ajattelun mallit, joiden mukaan oppilaiden tulisi olla visualisoijia ("visualizers"), kuvailijoita ("describers") ja kokeilijoita ("experimenters"). [1] Visualisointi on luonnollinen valinta analyyttisen geometrian kurssille, sillä kurssilla yhdistellään jatkuvasti algebrallista ja geometrista esitystapaa. Artikkelin mukaan kyky kuvailla omaa ajatteluaan ja toimintaansa esimerkiksi jossain matematiikan tehtävässä on puolestaan tärkeä osa myös itse tehtävän ymmärtämistä. Kokeellisuus taas on matematiikan tutkimuksessa keskeisessä roolissa, mutta harvinaisempaa koulumatematiikassa. Kun opiskelijat kohtaavat uusia matemaattisia ongelmia, heidän tulisi olla kokeilunhaluisia ja soveltaa aiemmissa ongelmissa toimineita ratkaisustrategioita myös uusiin ongelmiin. [1] Tutkiva lähestymistapa ja oman ajattelun selittäminen kehittävät sekä käsitteellistä että proseduraalista tietoa [10].

1.3 Tehtävätyypit

Oppikirjassa painotettavien ajattelun mallien lisäksi valittiin myös kolme erilaista tehtävätyyppiä, joita kirjaan tulee sisällyttää. Tehtävätyypit ovat Malcolm Swanin artikkelista *Collaborative Learning in Mathematics*, jossa esitellään useita erilaisia tehtävätyyppejä matematiikan oppimisen tehostamiseksi. Näistä valittiin kirjaan sisällytettäviksi tehtävätyypeiksi erilaisten ratkaisutapojen vertaaminen, ratkaisun välivaiheiden järjestäminen ja matemaattisten väitelauseiden arvioiminen. [11] Tässä kirjan osassa näistä esiintyvät ratkaisutapojen vertaaminen sekä väitteiden arvioiminen. Molemmat näistä tehtävätyypeistä kehittävät sekä käsitteellistä että proseduraalista tietoa [10].

Erilaisten ratkaisutapojen vertailutehtävässä annetaan valmiiksi vähintään kaksi vaihtoehtoista ratkaisumenetelmää samaan ongelmaan. Tehtävänä voi olla esimerkiksi arvioida ja vertailla menetelmien tehokkuutta tai yleistettävyyttä. Tällaisilla tehtävillä voidaan johdatella opiskelijoita pois vastauskeskeisestä tehtävien suorittamisesta ja keskittyä matemaattisen ajattelun kehittämiseen. Ymmärrys siitä, että samaan ongelmaan voi olla useita erilaisia ratkaisutapoja, auttaa matematiikan opiskeluun liittyvissä ongelmissa. Se voi rohkaista opiskelijaa yrittämään, vaikka hän ei heti tietäisi, millä menetelmällä tehtävä tulisi ratkaista. Se voi myös auttaa opiskelijaa löytämään eri tilanteisiin tehokkaampia ratkaisutapoja ja sitä kautta kehittymään ongelmanratkaisijana. [11] Myös virheellisten ratkaisujen vertaaminen oikeisiin ratkaisuihin kehittää matemaattista ajattelua ja auttaa vähentämään mahdollisia väärinkäsityksiä [4].

Väitelauseiden arvioimistehtävässä esitetään erilaisia matemaattisia väittämiä tai yleistyksiä. Tehtävänä on perustella, ovatko väitteet totta aina, joskus, vai ei koskaan. Usein väitteiden perustelu vaatii omaa kantaa tukevien esimerkkien tai vastaesimerkkien keksimistä kyseiselle väitteelle. Tämän tyyppisten tehtävien avulla voidaan kehittää opiskelijan kykyä sekä kuvailla omaa ajatteluaan että esittää matemaattisia perusteluja ja todistuksia. [11]

2 Oppimateriaalin perustelu

2.1 Oppikirjan rakenne ja tehtävätyypit

Oppikirja koostuu pohdinta-, harjoitus- ja mallitehtävistä sekä teoriaosuuksista, joihin kuuluvat muun muassa määritelmät, lauseet ja esimerkit. Kirjan keskiössä ovat pohdintatehtävät, joiden kautta opiskeltava teoria rakennetaan. Jokaista määritelmää ja lausetta edeltää pohdintatehtävä, jossa pyritään tuomaan esiin kyseisen määritelmän tai lauseen taustalla oleva matemaattinen ajattelu. Joissain pohdintatehtävissä esitellään myös uusia ratkaisutapoja tehtäville. Kirja on rakennettu sillä oletuksella, että pohdintatehtävät tehdään ja ymmärretään, joten niiden avulla opiskeltavaa teoriaa ei aina ole selitetty muuten. Pohdintatehtävien ymmärtäminen on kirjan avulla opiskelun kannalta siis ehdottoman tärkeää.

Kirjan pohdintatehtävät edustavat ongelmalähtöistä oppimista, jossa nimensä mukaisesti esitetään ongelmat ennen selityksien antamista sen sijaan, että annettaisiin kaava ja testattaisiin sen ymmärtämistä tehtävillä. Tehtävät on suunniteltu niin, että ne pohjautuvat opiskelijan aiempiin tietoihin ja etenevät askel kerrallaan kohti uutta teoriaa. Tällaisella ongelmalähtöisellä ja konstruktivistisella lähestymistavalla voidaan tehdä opetuksesta tehokkaampaa. [11]

Harjoitustehtävissä puolestaan syvennetään pohdintatehtävissä opittua teoriaa ja harjoitellaan opittujen menetelmien soveltamista. Puhtaasti mekaaniset laskutehtävät on pyritty pitämään minimissään ja jokainen harjoitustehtävä tarjoaa aina jonkin uuden näkökulman tai huomion. Pohdintatehtävien tapaan myös harjoitustehtävillä pyritään matemaattisen ajattelun kehittämiseen.

Oppikirjan tavoitteiden mukaisesti opiskelijoiden tulisi olla visualisoijia, kuvailijoita ja kokeilijoita. Visualisointia kehitetään esimerkiksi itseisarvotehtävissä, joissa on hyödynnetty itseisarvon visuaalista lukusuoraesitystä. Joissain tehtävissä on valmiiksi annettu visuaalinen malli, jota opiskelija täydentää tai hyödyntää muilla tavoin tehtävän ratkaisussa. Toisissa tehtävissä opiskelijan täytyy itse muodostaa tehtävään sopiva visuaalinen malli, kuten esimerkiksi lukusuora ja sille sopiva asteikko. Janaan ja pistejoukon yhtälöön liittyvissä tehtävissä visualisointia kehitetään käyttämällä algebrallisten esitystapojen ohella runsaasti myös koordinaatistoesityksiä. Näissä tehtävissä hyödynnetään myös GeoGebra-ohjelmistoa, joka helpottaa matematiikan visualisointia [3].

Opiskelijan kykyä kuvailla omaa ajatteluaan kehitetään useissa tehtävissä. Opiskelijaa esimerkiksi pyydetään perustelemaan vastauksensa, kuvailemaan havaintojaan tai selittämään sanallisesti yhtälöitä tai tehtävissä tekemiään päätelmiä. Lisäksi tehtävissä, joissa vertaillaan erilaisia ratkaisutapoja, opiskelijaa pyydetään perustelemaan, millä tavalla hän itse ratkaisisi tehtävän. Tällaiseen kysymykseen ei tietenkään ole oikeita tai vääriä vastauksia, mutta opiskelijan itsearviointitaidot sekä kyky kuvailla omaa ajatteluaan kehittyvät.

Kokeellisuutta puolestaan kehitetään erityisesti pohdintatehtävissä, joissa opiskelija tutkii valmiiden GeoGebra-pohjien avulla janoja tai pistejoukkojen yhtälöitä. Myös väitetehtävät edustavat selkeästi tutkivaa oppimista, kun opiskelijat tutkivat, pitääkö väite paikkaansa vai ei. Tällaisilla tehtävillä pyritään myös rohkaisemaan opiskelijoita kokeellisuuteen.

2.2 Etäisyys lukusuoralla

Oppikirjassa lähdetään rakentamaan itseisarvon käsitettä tarkastelemalla etäisyyksiä lukusuoralla. Useimmat opiskelijat ovat hyödyntäneet lukusuoraa matematiikan opiskelussaan jo peruskoulun ensimmäisistä luokista lähtien [6], joten lukusuora sopii hyvin lähestymistavaksi uuteen aiheeseen. Itseisarvoihin liittyvät tehtävät opetetaan usein proseduraalisesti, minkä vuoksi opiskelijoiden käsitteellinen tieto aiheesta voi jäädä vajaaksi [2]. Käsitteellisen tiedon puute aiheuttaa ongelmia etenkin haastavammissa itseisarvotehtävissä [5]. Tämän vuoksi oppikirjassa pyritään erityisesti vahvistamaan opiskelijoiden käsitteellistä tietoa itseisarvosta. Itseisarvokäsitteen ymmärryksen syventäminen on myös yksi lukion opetussuunnitelman perusteissa asetetuista kurssitavoitteista [8].

Käsitteellistä tietoa voidaan syventää hyödyntämällä itseisarvon etäisyystulkintaa. Melinda Curtis (2016) havaitsi tutkimuksessaan, että opiskelijat menestyivät itseisarvotehtävissä paremmin, kun he käsittelivät itseisarvoa etäisyytenä lukusuoralla. [2] Luvun itseisarvo määritelläänkin yleensä luvun etäisyytenä nollasta lukusuoralla, mutta usein tämä geometrinen tulkinta unohdetaan nopeasti ja se korvataan itseisarvoyhtälöihin siirryttäessä algebrallisella määritelmällä, jonka mukaan $|x| = x$, kun $x \geq 0$ ja $|x| = -x$, kun $x < 0$ [5]. Kuitenkin myös itseisarvoyhtälöitä voidaan ratkaista lukusuoran avulla [9].

Pohdinnat A.1 ja A.5 pohjautuvat Curtisin tutkimuksessaan käyttämiin tehtäviin [2]. Tehtäviä on kuitenkin muokattu siten, että ne on pyritty opetussuunnitelman mukaisesti liittämään opiskelijoita kiinnostaviin aihepiireihin [8]. Oppikirjassa itseisarvo määritellään luvun etäisyytenä nollasta, minkä jälkeen itseisarvon ja etäisyyden yhteyttä korostetaan vielä esimerkissä A.3. Itseisarvolle esitetään siis sanallinen määritelmä, jota visualisoidaan määritelmän jälkeisessä esimerkissä. Tämän jälkeen esitetään vielä algebrallinen määritelmä. Näin saadaan esiteltyä itseisarvon käsite monipuolisesti erilaisia esitystapoja käyttäen, ja siten myös syvennettyä opiskelijoiden käsitteellistä ymmärrystä itseisarvosta. [5]

Pohdinnassa A.5 on pyritty erityisesti korostamaan kahden luvun välisen etäisyyden yhteyttä kyseisten lukujen väliseen erotukseen. Curtisin mukaan opiskelijoilla on ollut vaikeuksia ymmärtää, miksi esimerkiksi yhtälöä $|x+1| = 4$ ratkaistaessa etsitään lukuja, joiden etäisyys luvusta -1 on 4, vaikka yhtälössä esiintyy positiivinen luku 1. Opiskelijat saattavat oppia, että vastaavissa tapauksissa merkki vaihtuu, mutta eivät välttämättä ymmärrä, miksi niin tehdään. Sen vuoksi on tarpeen korostaa, että kahden luvun välinen etäisyys liittyy nimenomaan kyseisten lukujen väliseen erotukseen. [2]

Itseisarvotehtäviin liittyy useita yleisiä virhekäsityksiä, joita ovat muun muassa itseisarvon algebrallisessa määritelmässä esiintyvän luvun $-a$ tulkitseminen negatiiviseksi luvuksi, sekä käsitys, että luvun itseisarvo on aina positiivinen [2], [9]. Myös lukujen $|a-b|$ ja $|b-a|$ yhtäsuuruuden käsittäminen voi olla haasteellista varsinkin itseisarvon algebrallisen määritelmän perusteella [5]. Näihin yleisiin ongelmakohtiin on kiinnitetty huomiota huomautuksissa A.4 ja A.8 sekä harjoitustehtävässä 2, jossa tutkitaan myös muita itseisarvon yleisiä ominaisuuksia, kuten osamäärän itseisarvoa. Tulon itseisarvon ominaisuus $|ab| = |a||b|$ puolestaan johdetaan pohdinnassa A.9. Näitä ominaisuuksia tutkimalla saadaan syvennettyä opiskelijoiden ymmärrystä itseisarvon käsitteestä.

2.3 Itseisarvoyhtälö

Itseisarvoyhtälöistä käsitellään tässä kirjan osassa vain muotoa $|f(x)| = a$ olevat yhtälöt, sillä useampia itseisarvoja sisältävien yhtälöiden, kuten $|f(x)| = |g(x)|$, ratkaisemiseen on helpompi siirtyä vasta kun funktioiden kuvaajien piirtäminen on käsitelty [9]. Itseisarvoyhtälöihin siirryttäessä opiskelijoiden tulee oppia yhdistämään algebrallinen yhtälö $|x - b| = c$ sanalliseen ilmaukseen "x on c:n yksikön päässä b:stä kumpaan tahansa suuntaan". Tähän ongelman sanallistamiseen johdatetaan pohdinnan A.11 avulla ja pohdinnassa A.12 opetellaan ratkaisemaan itseisarvoyhtälöitä tätä sanallistamista sekä lukusuoraa hyödyntäen. [5] Näissä pohdintatehtävissä esiintyy pelkästään sellaisia itseisarvoyhtälöitä, joissa muuttujan x kerroin on ± 1, sillä tällaisten itseisarvoyhtälöiden esittäminen lukusuoralla on varsin luonnollista. Siten lukusuoraesityksen opettelu on helpointa aloittaa tällaisista yhtälöistä. Mallitehtävässä A.13 näytetään, että lukusuoran avulla voidaan ratkaista myös itseisarvoyhtälöitä, joissa muuttujan x kerroin on erisuuri kuin ± 1. [5]

Proseduraalisissakin tehtävissä on hyvä pyrkiä siihen, että ne kehittävät ymmärrystä taustalla olevista käsitteistä [10]. Siksi pohdinnassa A.12 sekä harjoitustehtävässä 4 on pyritty käsittelemään monipuolisesti erilaisia muotoa $|f(x)| = a$ olevia itseisarvoyhtälöitä. Harjoitustehtävässä 5 puolestaan on itseisarvoyhtälön sijaan annettu itseisarvoyhtälön ratkaisu lukusuoralle piirrettynä, ja tehtävänä on ratkaisujoukon avulla päätellä, mikä itseisarvoyhtälö on kyseessä. Tällainen käänteinen ongelma vaatii Curtisin mukaan korkeamman tason ajattelua. [2]

Ensimmäinen algebrallinen ratkaisutapa itseisarvoyhtälölle esitetään pohdinnassa A.14, jossa käsitellään samaa yhtälöä kuin mallitehtävässä A.13. Tehtävien yhteydessä mainitaan, että itseisarvoyhtälöt voidaan ratkaista useilla erilaisilla menetelmillä. Näin selvennetään opiskelijoille, että matematiikan tehtäviin voi olla useita eri lähestymistapoja. Pohdinnassa A.14 tehtävänä onkin vertailla kahta vaihtoehtoista ratkaisua, joista toisessa on hyödynnetty lukusuoraa ja toisessa taas algebrallista menetelmää. Pohdintatehtävän a)- ja b)-kohdissa kysytään tarkentavia kysymyksiä, joilla varmistetaan, että opiskelija on ymmärtänyt molemmat ratkaisutavat. Sen jälkeen pyydetään perustelemaan, kummalla tavalla opiskelija itse ratkaisisi kyseisen tehtävän. Oikeaa vastausta kysymykseen ei ole, mutta perusteluja vaatimalla pakotetaan opiskelija vertailemaan ratkaisutapoja entistä tarkemmin ja pohtimaan myös sitä, kumpi menetelmistä sopii juuri opiskelijalle itselleen paremmin. Näin opiskelija pääsee arvioimaan omaa työskentelyään, mitä painotetaan myös lukion opetussuunnitelmassa [8].

Lisäksi tehtävässä pyydetään vielä pohtimaan, kummalla tavalla opiskelija ratkaisisi tehtävän $|x^2 + 2x + 3| = 5$. Tällaisia toisen asteen itseisarvoyhtälöitä ei käsitellä tässä kirjan osassa, eikä yhtälöä vaadita tässäkään tehtävässä ratkaisemaan. Tehtävässä tulee pikemminkin pohtia, riippuuko käytettävä ratkaisumenetelmä kyseessä olevasta yhtälöstä. Yksinkertaisimpien itseisarvoyhtälöiden kohdalla lukusuoramenetelmän ja algebrallisen menetelmän tehokkuudessa ei ole merkittäviä eroja, mutta haastavammissa yhtälöissä lukusuoran hyödyntäminen voi osoittautua monimutkaiseksi tai jopa mahdottomaksi. Kyseessä oleva toisen asteen itseisarvoyhtälö voidaan ratkaista lukusuoran avulla ajattelemalla itseisarvolauseke luvun $x^2 + 2x$ etäisyytenä luvusta -3, mutta tällöin lukusuoran hyödyntäminen ei ole enää kovin intuitiivista. Voidaan siis nähdä, että haastavammissa itseisarvoyhtälöissä algebrallinen ratkaisutapa osoittautuu tehokkaammaksi. Tämän vuoksi on hyvä ymmärtää myös algebrallisen menetelmän tärkeys, vaikka tässä kirjan osassa painotetaankin enemmän lukusuoramenetelmää.

Harjoitustehtävässä 6 vertaillaan myös erilaisia ratkaisutapoja itseisarvoyhtälölle. Aiemmin opittujen ratkaisutapojen eli lukusuoramenetelmän ja algebrallisen menetelmän lisäksi tehtävässä esitellään myös uutena ratkaisutapana kokeilumenetelmä. Kokeilumenetelmällä tehtyyn ratkaisuun on jätetty virhe, joka on tarkoitus huomata tehtävän b)-kohdassa. Näin tuodaan esiin kokeilumenetelmän riskit. Ei riitä, että löytää kokeilemalla yhden ratkaisun, vaan pitää muistaa etsiä kaikki ratkaisut. Virheellisten ratkaisujen esiintuominen auttaa vähentämään virhekäsitysten muodostumista [4].

2.4 Etäisyys koordinaatistossa

Koordinaatisto on opiskelijoille tuttu käsite MAA4-kurssilta [8], mutta kertauksen vuoksi käsite esitellään lyhyesti ja käydään läpi tärkeimmät koordinaatistoon liittyvät termit. Aiemmissa kappaleissa itseisarvoja käsiteltiin usein lukusuoran avulla, joten koordinaatisto on luontevaa esitellä kahden toisiaan vastaan kohtisuorasti asetetun lukusuoran muodostumana. On tärkeää, että matemaattisten käsitteiden välille luodaan yhteyksiä. Sen vuoksi opiskelijaa muistutetaan siitä, että kappaleessa A.1 tutkittiin kahden luvun välistä etäisyyttä lukusuoralla, ja kerrotaan, että seuraavaksi käsitellään kahden pisteen välistä etäisyyttä koordinaatistossa. Itse asiassa kahden luvun välinen etäisyys lukusuoralla voidaan ajatella kahden koordinaatiston pisteen välisen etäisyyden erikoistapauksena, jossa tarkasteltavat pisteet $(a, 0)$ ja $(b, 0)$ sijaitsevat koordinaatiston x-akselilla. Tällöin kahden pisteen välisen etäisyyden lausekkeesta $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ saadaan $\sqrt{(a - b)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(a - b)^2} = |a - b|$ eli lukujen a ja b välinen etäisyys lukusuoralla. [2] Tämän yhteyden vahvistamiseksi myös aiheita käsittelevien kappaleiden nimiksi on annettu yhtenevästi Etäisyys lukusuoralla ja Etäisyys koordinaatistossa.

Kahden koordinaatiston pisteen välisen etäisyyden eli pisteitä yhdistävän janan pituuden kaavaan johdatellaan pohdinnassa A.16. Tavoitteena on erityisesti saada opiskelija ymmärtämään, kuinka janan pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla muodostamalla suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat koordinaatiston akseleiden suuntaiset ja hypotenuusa on kyseinen jana. Janan pituuden kaavan täsmällinen johtaminen voi olla haastavaa ja siksi aihetta käsitellään kevyemmin esimerkkitapauksen avulla. Haluttaessa tai esimerkiksi eriyttävänä tehtävänä voidaan käydä myös kaavan täsmällinen johtaminen läpi opettajan oppaassa olevan pohdinnan B.1 avulla.

Janan pituuden kaavan ja suorakulmaisen kolmion ominaisuuksien yhteyttä havainnollistetaan vielä kuvien avulla lauseessa A.17 ja esimerkissä A.18. Näin pyritään kehittämään opiskelijan ymmärrystä algebrallisten ja geometristen käsitteiden välisistä yhteyksistä, mikä on lukion opetussuunnitelmassa yksi kurssin tavoitteista [8]. Näitä yhteyksiä tuodaan esiin myös harjoitustehtävissä, joissa analyyttisen geometrian käsitteitä hyödynnetään yhdessä Geometria (MAA3) ja Vektorit (MAA4) -kursseilla opittujen käsitteiden kanssa. Janatehtävät voidaan usein ratkaista myös vektoreiden avulla, sillä kahden pisteen välille voidaan muodostaa yhtälailla niin jana kuin vektorikin. Vektoreita käsitellään erityisesti harjoitustehtävissä 10 ja 11, mutta jo harjoitustehtävässä 8 palautetaan mieleen paikkavektorin käsite. Harjoitustehtävässä 10 vertaillaan kahta eri ratkaisutapaa, joista toisessa on käytetty janan pituuden kaavaa ja Pythagoraan lausetta, kun taas toisessa on hyödynnetty vektoreita ja pistetulon ominaisuuksia. Harjoitustehtävässä 11 puolestaan opiskelijan tulee osoittaa vektoreiden avulla, että janan pituudelle pätee aiemmin johdettu kaava $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Näillä tehtävillä luodaan jälleen yhteyksiä matematiikan eri käsitteiden välille ja edistetään siten oppimista [11].

Pohdinnassa A.19 tutkitaan janan keskipisteen koordinaattien määräytymistä tehtävää varten luodun GeoGebra-pohjan avulla. GeoGebra on erityisesti opetuskäyttöön suunniteltu matematiikkaohjelmisto, jota voidaan hyödyntää ongelmalähtöisen ja tutkivan oppimisen välineenä. Ohjelmiston käyttö helpottaa matematiikan visualisointia ja kannustaa opiskelijaa kokeellisuuteen. Se myös yhdistää geometrisen ja algebrallisen esitystavan. [3] Nämä seikat huomioon ottaen GeoGebra soveltuu hyvin niin tämän oppikirjan tavoitteisiin, kuin myös opetussuunnitelmassa asetettuihin tavoitteisiin [8]. Tehtävässä käytetyn GeoGebra-pohjan avulla pyritään visuaalisesti havainnollistamaan opiskelijalle, miten janan keskipisteen koordinaatit riippuvat janan päätepisteiden koordinaateista. GeoGebra-pohjassa janan päätepisteitä voidaan muuttaa, jolloin keskipisteen koordinaatit muuttuvat päätepisteiden mukana. Päätepisteiden ja keskipisteen koordinaattien välisen yhteyden havainnollistamiseksi GeoGebra-pohjassa on piirretty näiden pisteiden x-koordinaatteja vastaavat pisteet x-akselille ja y-koordinaatteja vastaavat pisteet y-akselille. Tämä auttaa huomaamaan, että keskipisteen x-koordinaatti sijaitsee päätepisteiden x-koordinaattien puolivälissä ja vastaavasti keskipisteen y-koordinaatti sijaitsee päätepisteiden y-koordinaattien puolivälissä.

2.5 Pistejoukon yhtälö

Yksi opetussuunnitelman asettamista tavoitteista on, että opiskelija osaa käyttää teknisiä apuvälineitä pistejoukon yhtälön tutkimisessa [8]. Niinpä pistejoukon yhtälön käsitteeseen tutustutaan GeoGebran avulla pohdinnassa A.20. Tehtävässä tutkitaan erään pistejoukon pisteitä ja pohditaan, mikä yhteys kyseisillä pisteillä on. GeoGebra sopii hyvin tällaisen intuitiivisen käsityksen muodostamisen tueksi [3]. Tehtävän pistejoukkona on suora $y = x - 2$, sillä tällaisessa pistejoukossa pisteen koordinaattien välisen yhteyden havaitseminen on helppoa. Suora ei kuitenkaan ole tehtävää varten luodussa GeoGebra-pohjassa näkyvillä, vaan näkyvillä on ainoastaan yksi piste, jota voidaan liikuttaa kyseisen suoran mukaisesti. Tällä tavalla pyritään vahvistamaan käsitystä, että kyseessä on joukko pisteitä. Pisteen käsite on tuttu edellisestä kappaleesta, ja pohdintatehtävässä ikään kuin konstruoidaan näistä tietyn ehdon toteuttavista pisteistä suora.

Teknisiä apuvälineitä käytettäessä on kuitenkin riskinä, että opiskelija luottaa sokeasti teknologiaan, eikä osaa kyseenalaistaa sen tuottamia tuloksia, jos opiskelija ei itse ymmärrä tulosten taustalla olevia konsepteja [7]. Tästä annetaan varoittava esimerkki tehtävässä 13, jonka a)-kohdassa esitetty piste näyttäisi GeoGebran jäljitystoiminnon mukaan kuuluvan tehtävässä olevaan pistejoukkoon. Tämä johtuu kuitenkin vain GeoGebran tavasta pyöristää jäljitystoiminnon näyttämien pisteiden koordinaatit, ja todellisuudessa kyseinen piste ei kuulu pistejoukkoon. Sijoittamalla pisteen koordinaatit pistejoukon yhtälöön havaitaan, että piste ei toteuta yhtälöä.

Pohdinnassa A.24 tarkastellaan erilaisten pistejoukkojen kuvaajia ja tehtävänä on yhdistää annettu pistejoukon yhtälö sitä vastaavaan kuvaajaan. Tavoitteena on tutustua pistejoukkojen piirtämiseen ja havaita, että pistejoukkojen piirtäminen voi vaatia, että pistejoukon yhtälöstä ratkaistaan joko muuttuja y tai x tai molemmat. Tehtävässä opiskelija saattaa myös havaita, että pistejoukon yhtälön kuvaaja ei välttämättä ole funktio. Näitä pistejoukon ja funktion välisiä yhteyksiä ja eroavaisuuksia pohditaan myös tehtävässä 15. Näin luodaan yhteyksiä matematiikan eri käsitteiden välille, mikä tekee oppimisesta tehokkaampaa [11].

Lähdeluettelo

[1] Cuoco, A., Coldenberg, E.P., & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375-402.

[2] Curtis, Melinda A. (2016). Solving Absolute Value Equations and Inequalities on a Number Line. *Electronic Theses, Projects, and Dissertations.* Paper 411.

[3] Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. *ComSIS, 6(2),* 192.

[4] Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction, 22(3)*, 206–214.

[5] Ellis, M., & Bryson, J. (2011). A conceptual approach to absolute value equations and inequalities. *Mathematics Teacher, 104(8)*, 592-598.

[6] Keranto, T., & Sarenius, V-M. (2009). The Number Line as a Teaching Aid in the Grades 1-2: Textbook Analysis and Pupil Interview. *Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives*, 206-217.

[7] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60(1),* 1-64.

[8] Opetushallitus. (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

[9] Ponce, G. (2008). Using, seeing, feeling and doing absolute value for deeper understanding. *The Mathematics Teaching in the Middle School, 14(4),* 234-240.

[10] Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2012). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition.* Oxford University Press.

[11] Swan, M. Collaborative Learning in Mathematics, 162-176.

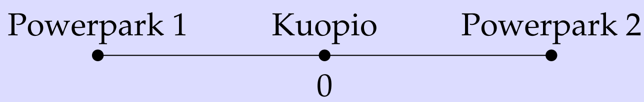
A Oppimateriaali

A.1 Etäisyys lukusuoralla

Pohdinta A.1 Huvipuisto Powerpark sijaitsee noin 330 kilometriä Kuopiosta länteen. Huvipuiston omistajat havaitsevat asiakaskyselyssään, että Kuopion itäpuolella asuvat ihmiset eivät juurikaan vieraile Powerparkissa pitkän välimatkan vuoksi. Kuopion itäpuolella asuvia palvellakseen huvipuiston omistajat päättävät rakennuttaa toisen Powerparkin, jonka etäisyys Kuopiosta on sama kuin alkuperäisellä Powerparkilla, mutta itään päin.

a) Mikä on etäisyys Kuopiosta uuteen Powerparkiin?

b) Jos Kuopio asetetaan lukusuoralla koordinaatin nolla kohdalle, mitkä ovat vanhan Powerparkin (Powerpark 1) ja uuden Powerparkin (Powerpark 2) koordinaatit? Selitä, miten päättelit vastauksen.



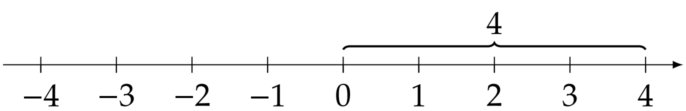
c) Vertaa Kuopion ja uuden Powerparkin välistä etäisyyttä uuden Powerparkin koordinaattiin lukusuoralla. Mitä havaitset?

d) Vertaa Kuopion ja vanhan Powerparkin välistä etäisyyttä vanhan Powerparkin koordinaattiin lukusuoralla. Mitä havaitset?

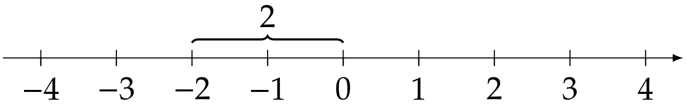
e) Mikä on edellä tekemiesi havaintojen perusteella luvun x etäisyys nollasta lukusuoralla?

Määritelmä A.2 Luvun *itseisarvo* on luvun etäisyys nollasta lukusuoralla. Luvun a itseisarvolle käytetään merkintää $|a|$.

Esimerkki A.3 Luvun 4 itseisarvo eli etäisyys nollasta on 4. Siis $|4| = 4$.



Luvun -2 itseisarvo eli etäisyys nollasta on 2. Siis $|-2| = 2$.



Jos luku a on positiivinen tai nolla, niin luvun a itseisarvo on luku a itse. Jos taas luku a on negatiivinen, niin luvun a itseisarvo on luvun a vastaluku $-a$.

Siis

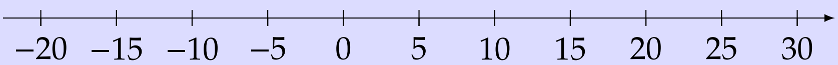
$$|a| = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geq 0 \\ -a, \text{ kun } a < 0\,. \end{cases}$$

Huomautus A.4 Merkintä $-a$ tarkoittaa luvun a vastalukua. Kun luku a on negatiivinen eli $a < 0$, niin luvun a vastaluku $-a$ on positiivinen. Siis $|a| \geq 0$ kaikilla luvuilla a.

Pohdinta A.5 Suomen keskilämpötila vuonna 2016 oli noin 3 °C. Vuoden ylin Suomessa mitattu lämpötila 29 °C mitattiin heinäkuussa Utsjoella.

a) Kuinka suuri lämpötilaero on keskilämpötilan ja ylimmän mitatun lämpötilan välillä? Esitä tämän lämpötilaeron lauseke.

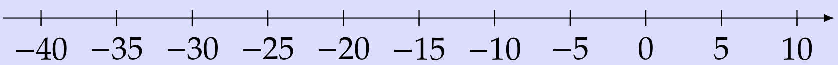
b) Esitä tämä lämpötilaero lukusuoralla.



Vuoden alin lämpötila -41 °C mitattiin tammikuussa Muoniossa.

c) Kuinka suuri lämpötilaero on keskilämpötilan ja alimman mitatun lämpötilan välillä? Esitä tämän lämpötilaeron lauseke.

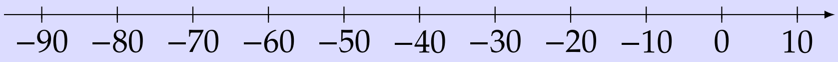
d) Esitä tämä lämpötilaero lukusuoralla.



Kaikkien aikojen alin maapallolla mitattu lämpötila on −89 °C (Antarktis, 21.7.1983).

e) Kuinka suuri lämpötilaero on Suomen vuoden 2016 alimman lämpötilan −41 °C ja maailman kaikkien aikojen alimman mitatun lämpötilan välillä? Esitä tämän lämpötilaeron lauseke.

f) Esitä tämä lämpötilaero lukusuoralla.

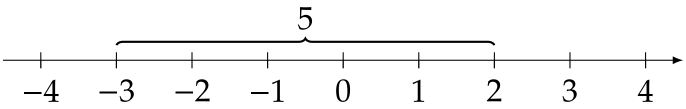


g) Mikä laskutoimitus liittyy kahden luvun välisen etäisyyden määrittämiseen? Selitä, miten kyseinen laskutoimitus liittyy etäisyyteen.

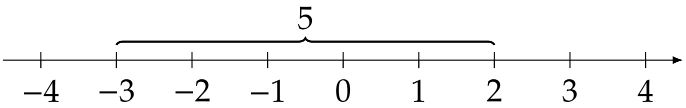
Tehtävässä esiintyvät lämpötilat on pyöristetty yhden asteen tarkkuuteen. Esimerkiksi alin maapallolla mitattu lämpötila on virallisesti −89,2 °C.

Määritelmä A.6 Lukujen a ja b välinen etäisyys on lukujen a ja b erotuksen itseisarvo $|a-b|$.

Esimerkki A.7 Lukujen $a = -3$ ja $b = 2$ välinen etäisyys on $|a-b| = |-3-2| = |-5| = 5$.



Lukujen $a = 2$ ja $b = -3$ välinen etäisyys on $|a-b| = |2-(-3)| = |2+3| = |5| = 5$.



Huomautus A.8 Luvun a etäisyys luvusta b on sama kuin luvun b etäisyys luvusta a, joten $|a-b| = |b-a|$.

Pohdinta A.9 Sievennä lausekkeet $|ab|$ ja $|a||b|$, kun

a) luvut a ja b ovat positiivisia tai nollia,

b) luvut a ja b ovat negatiivisia,

c) luvut a ja b ovat erimerkkisiä.

d) Mitä havaitset?

Lause A.10 Itseisarvon ominaisuuksia

Luvun itseisarvo on aina epänegatiivinen.

$$|a| \geq 0$$

Lukujen tulon itseisarvo on lukujen itseisarvojen tulo.

$$|ab| = |a||b|$$

Lukujen osamäärän itseisarvo on lukujen itseisarvojen osamäärä.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

1. Kirjoita lauseke ilman itseisarvoja.

a) $|\sqrt{3} - 2|$

b) $|\pi - e|$

c) $|x + 3|$

2. Tutki, onko väite totta aina, joskus, vai ei koskaan. Perustele vastauksesi. Jos väite on totta vain joskus, millä luvuilla väite pätee?

a) $|x|$ on positiivinen

b) $|a| = -a$

c) Kahden luvun välinen etäisyys voi olla negatiivinen

d) $|x - b| = |b - x|$

e) $|a + b| = |a| + |b|$

f) $|a - b| = |a| - |b|$

g) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

3. Vertaa lukujen -2 ja 3 välistä etäisyyttä lukujen 9 ja 4 väliseen etäisyyteen. Mitä havaitset? Selitä, mistä havaintosi johtuu.

A.2 Itseisarvoyhtälö

Pohdinta A.11 Valpuri asuu kahdeksankerroksisen kerrostalon viidennessä kerroksessa. Titta asuu samassa talossa, mutta kolmen kerroksen päässä Valpurista.

a) Missä kerroksessa Titta asuu?

b) Esitä kyseinen ongelma lukusuoran avulla.

c) Kirjoita kyseistä ongelmaa kuvaava matemaattinen yhtälö.

Yhtälöä, jossa muuttuja on itseisarvolausekkeen sisällä, kutsutaan itseisarvoyhtälöksi. Seuraavaksi tarkastellaan muotoa $|f(x)| = a$ olevien itseisarvoyhtälöiden ratkaisemista graafisesti lukusuoran avulla.

Pohdinta A.12 Tutki itseisarvoyhtälöitä a)-f).

(i) Esitä itseisarvoyhtälö sanallisesti.

(ii) Esitä itseisarvoyhtälö lukusuoralla.

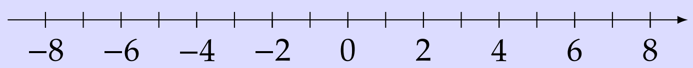
(iii) Mitkä ovat yhtälön ratkaisut?

a) $|x| = 4$

(i) Sanallisesti: ______________________________

____

(ii)

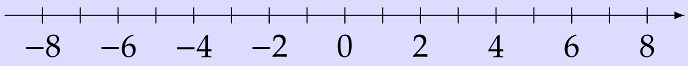


(iii) $x =$ _____ tai $x =$ _____

b) $|x - 0| = 3$

(i) Sanallisesti: ______________________________

____

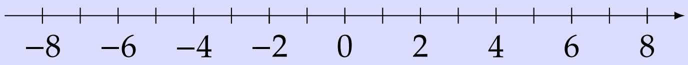
(ii) 

(iii) $x =$ _____ tai $x =$ _____

c) $|x - 2| = 5$

(i) Sanallisesti: ______________________________

____

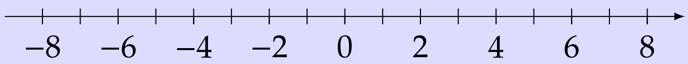
(ii) 

(iii) $x =$ _____ tai $x =$ _____

d) $|2 - x| = 5$

(i) Sanallisesti: ______________________________

____

(ii) 

(iii) $x =$ _____ tai $x =$ _____

e) $\left|x + \frac{7}{3}\right| = 2$

(i) Sanallisesti: ______________________________

____

(ii) 

(iii) $x =$ _____ tai $x =$ _____

f) $|x - b| = c$

(i) Sanallisesti: ______________________________

____

Mikä yhtälössä esiintyvistä luvuista merkitään ensimmäisenä lukusuoralle? _____

Mikä yhtälössä esiintyvistä luvuista kertoo etäisyyden? _____

(ii) Esitä ratkaisu lukusuoralla.

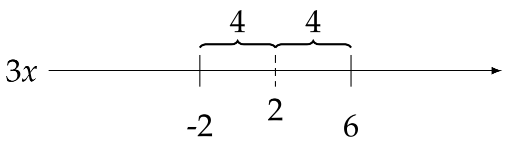
(iii) $x =$ ______ tai $x =$ ______

Edellä ratkaistiin itseisarvoyhtälöitä, joissa muuttujan x kerroin on ± 1. Itseisarvoyhtälöitä, joissa muuttujan kerroin on erisuuri kuin ± 1, voidaan myös ratkaista lukusuoran avulla.

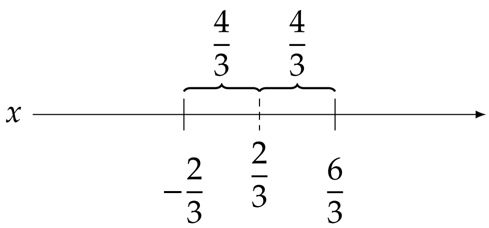
Mallitehtävä A.13 Ratkaise itseisarvoyhtälö $|3x - 2| = 4$.

Tarkastellaan ensin luvun $3x$ etäisyyttä luvusta 2. Yhtälön mukaan tämä etäisyys on 4.

Muodostetaan graafinen esitys, jonka avulla ratkaistaan $3x$.



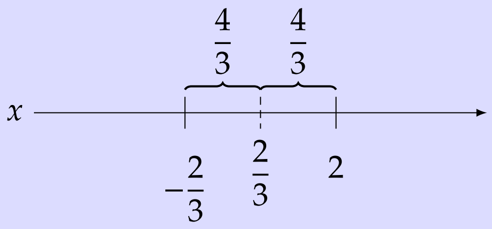
Siis $3x = -2$ tai $3x = 6$. Jaetaan nämä ratkaisut vielä kertoimella 3, jolloin saadaan itseisarvoyhtälön ratkaisuiksi $x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 2$.



Vastaus: $x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 2$

Kuten monet matemaattiset ongelmat, myös itseisarvoyhtälöt voidaan ratkaista useilla erilaisilla menetelmillä. Seuraavassa pohdintatehtävässä esitetään kaksi erilaista ratkaisutapaa mallitehtävän A.13 yhtälölle.

Pohdinta A.14 Tutustu Einon ja Aapelin tapoihin ratkaista itseisarvoyhtälö $|3x-2| = 4$ ja vastaa alla oleviin kysymyksiin.

Eino	Aapeli
$\lvert 3x-2\rvert = 4$ $3\lvert x-\frac{2}{3}\rvert = 4 \quad \Vert :3$ $\lvert x-\frac{2}{3}\rvert = \frac{4}{3}$  Vastaus: $x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 2$	$\lvert 3x-2\rvert = 4$ $3x-2 = 4$ tai $3x-2 = -4 \quad \Vert +2$ $3x = 6$ tai $3x = -2 \quad \Vert :3$ $x = \frac{6}{3}$ tai $x = -\frac{2}{3}$ $x = 2$ Vastaus: $x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 2$

a) Mitä itseisarvon ominaisuutta Eino hyödyntää sieventäessään yhtälöä?

b) Millä menetelmällä Aapeli poistaa itseisarvomerkit?

c) Kummalla tavalla itse ratkaisisit tehtävän? Perustele valintasi.

d) Kummalla tavalla ratkaisisit tehtävän $|x^2 + 2x + 3| = 5$?

Edellä havaittiin, että lukusuoramenetelmän lisäksi itseisarvoyhtälöitä voidaan ratkaista myös algebrallisesti. Etenkin haastavammissa itseisarvoyhtälöissä algebrallisen ratkaisumenetelmän käyttäminen voi olla hyödyllistä tai jopa välttämätöntä. Itseisarvoyhtälön algebrallinen ratkaisu perustuu edellisestä luvusta tuttuun itseisarvon algebralliseen määritelmään, joka voidaan itseisarvofunktion tapauksessa kirjoittaa muodossa

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{kun } f(x) < 0\,. \end{cases}$$

Mallitehtävä A.15 Ratkaise itseisarvoyhtälö $|x+3| = 7$ algebrallisesti.

Kirjoitetaan itseisarvolauseke $|x+3|$ määritelmän mukaisesti kahdessa osassa, jolloin itseisarvomerkeistä päästään eroon:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, \text{ kun } x+3 \geq 0 \\ -(x+3), \text{ kun } x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3, \text{ kun } x \geq -3 \\ -x-3, \text{ kun } x < -3\,. \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälö kahdessa osassa.

Kun $x \geq -3$, niin

$$\begin{aligned} |x+3| &= 7 \\ x+3 &= 7 \quad \| -3 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Ratkaisu $x = 4$ toteuttaa myös vaaditun ehdon $x \geq -3$.

Kun $x < -3$, niin

$$\begin{aligned} |x+3| &= 7 \\ -x-3 &= 7 \quad \| +3 \\ -x &= 10 \quad \| : (-1) \\ x &= -10. \end{aligned}$$

Ratkaisu $x = -10$ toteuttaa myös vaaditun ehdon $x < -3$.

Vastaus: $x = -10$ tai $x = 4$

2. tapa:

Luvut, joiden itseisarvo on 7, ovat 7 ja -7. Yhtälö $|x+3| = 7$ toteutuu, kun lausekkeen $x+3$ arvo on 7 tai -7.

$$\begin{aligned} x+3 = 7 \quad &\text{tai} \quad x+3 = -7 \quad \| -3 \\ x = 4 \quad &\text{tai} \quad x = -10 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -10$ tai $x = 4$

4. Selitä sanallisesti, mitä kyseinen itseisarvoyhtälö tarkoittaa etäisyytenä. Ratkaise yhtälö sekä lukusuoran avulla että algebrallisesti.

a) $|x-1| = 0$

b) $|\pi - x| = 2$

c) $|x-10| = -7$

d) $|5x+2| = 8$

e) $3|x-3| = 12$

5. Alla olevalle lukusuoralle on merkitty erään itseisarvoyhtälön ratkaisu.

a) Kirjoita ratkaisua vastaava yhtälö.

b) Selitä, miten päädyit ratkaisuun.

6. Vilja, Lumi ja Nestori etsivät ratkaisua itseisarvoyhtälölle $|5 - x| = 3$.

Vilja: Itseisarvossa on kyse etäisyydestä. Luvun 5 etäisyys x:stä on sama kuin x:n etäisyys luvusta 5. Yhtälö voidaan siis muuttaa muotoon $|x - 5| = 3$. Nyt vain piirretään lukusuora ja etsitään sieltä luvut, joiden etäisyys luvusta 5 on 3.

Lumi: Minä en miettinyt itseisarvoa etäisyytenä. Käytin itseisarvon algebrallista määritelmää ja kirjoitin yhtälön vasemman puolen kahdessa eri osassa:

$$|5 - x| = \begin{cases} 5 - x, & \text{kun } 5 - x \geq 0 \\ -(5 - x), & \text{kun } 5 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 5 - x, & \text{kun } 5 \geq x \\ -5 + x, & \text{kun } 5 < x \end{cases} = \begin{cases} 5 - x, & \text{kun } x \leq 5 \\ -5 + x, & \text{kun } x > 5 \end{cases}$$

Nyt pitää vielä ratkaista yhtälöt $5 - x = 3$ ja $-5 + x = 3$.

Nestori: Minä sain tehtävän jo ratkaistua! Kokeilin vain eri lukuja x:n paikalle. Vastaus on 2.

a) Laske tehtävä loppuun sekä Viljan että Lumin ehdottamalla tavalla. Päästäänkö molemmilla menetelmillä samaan vastaukseen?

b) Nestori ratkaisi tehtävän nopeasti kokeilemalla, mutta mitä Nestori unohti ratkaisussaan?

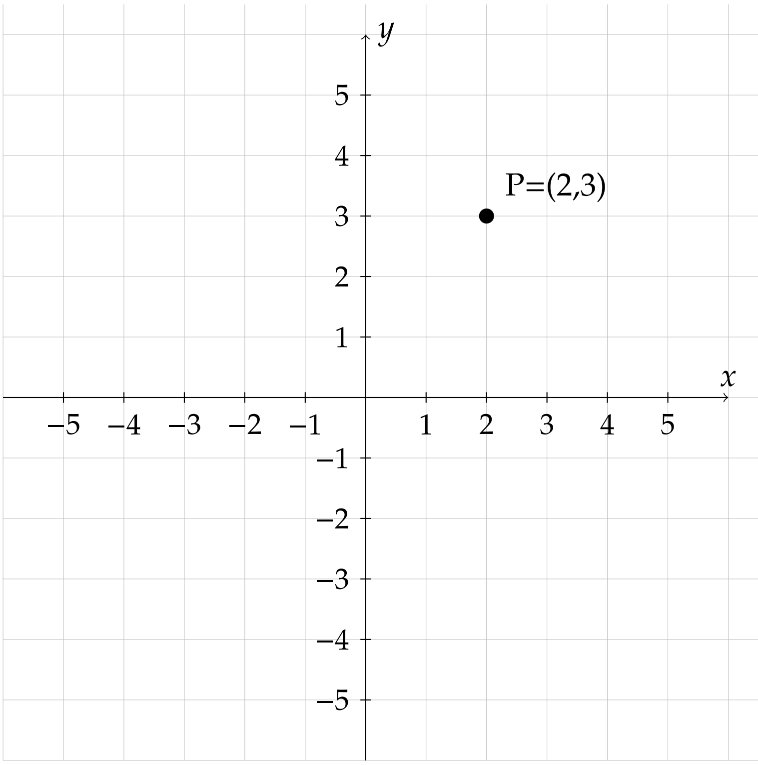
c) Millä menetelmällä itse ratkaisisit tehtävän?

d) Lisätehtävä: Keksi vielä erilaisia tapoja ratkaista yhtälö $|5 - x| = 3$.

A.3 Etäisyys koordinaatistossa

Koordinaatisto on tuttu käsite MAA4-kurssilta. Kun kaksi lukusuoraa asetetaan kohtisuorasti toisiaan vastaan, syntyy *tason suorakulmainen koordinaatisto*. Koordinaatiston akselit leikkaavat toisensa pisteessä $(0, 0)$, jota kutsutaan *origoksi*. Usein vaaka-akselia kutsutaan x-akseliksi, pystyakselia y-akseliksi ja koordinaatistoa xy-koordinaatistoksi.

Koordinaatiston pistettä P merkitään lukuparina $P = (x, y)$. Esimerkiksi pisteen $P = (2, 3)$ x-koordinaatti on 2 ja y-koordinaatti on 3.



Kappaleessa A.1 tutkittiin kahden luvun välistä etäisyyttä lukusuoralla. Seuraavaksi tutkitaan, kuinka voidaan selvittää kahden koordinaatiston pisteen välinen etäisyys eli pisteitä yhdistävän janan pituus.

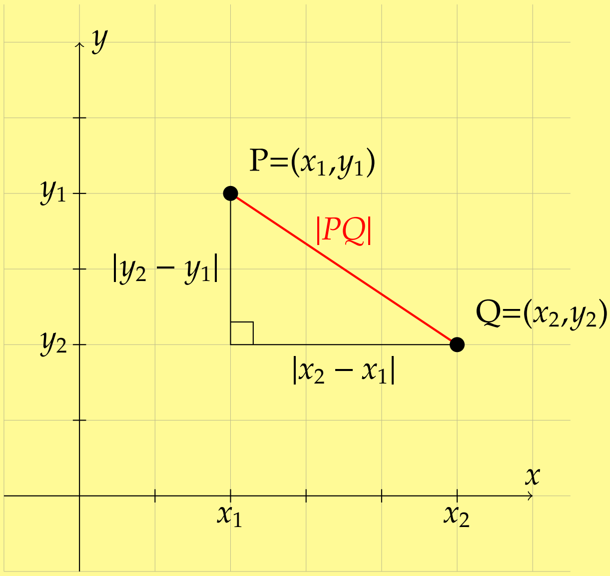
Pohdinta A.16 a) Piirrä koordinaatistoon kolmio, jonka kärkipisteet ovat $A = (1, 5)$, $B = (3, 5)$ ja $C = (3, 2)$.

b) Laske kolmion sivujen AB, AC ja BC pituudet.

c) Piirrä koordinaatistoon pisteet $D = (-2, 3)$ ja $E = (0, 4)$. Laske pisteiden välisen janan DE pituus.

d) Selitä sanallisesti, kuinka voit laskea kahden pisteen välisen janan pituuden koordinaatistossa.

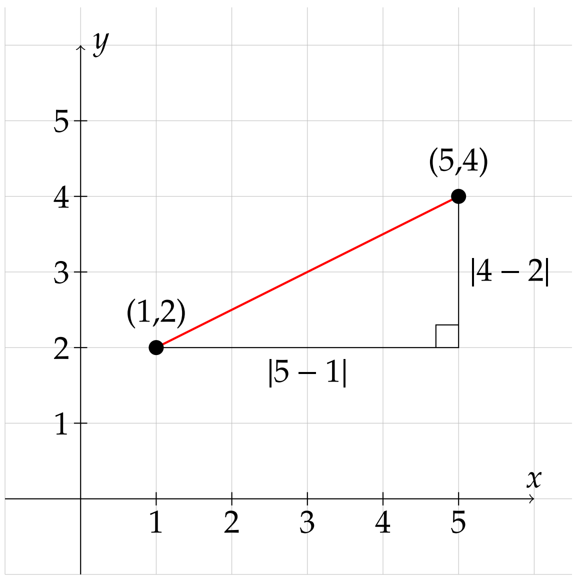
Lause A.17 Pisteiden $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ välinen etäisyys eli janan PQ pituus on $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Pisteiden välinen etäisyys on siis x-koordinaattien erotuksen neliön ja y-koordinaattien erotuksen neliön summan neliöjuuri. Toisin sanoen pisteiden välisen janan pituus voidaan laskea, kun janan päätepisteiden koordinaatit tunnetaan.

Esimerkki A.18 Pisteiden $P = (1, 2)$ ja $Q = (5, 4)$ välisen janan pituus on

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$



Jos jana on x-akselin suuntainen, niin sen päätepisteiden y-koordinaatit ovat samat eli $y_1 = y_2$. Tällöin janan pituuden lauseke palautuu kappaleessa A.1 käsiteltyyn kahden luvun välisen etäisyyden lausekkeeseen. Tarkastellaan esimerkiksi x-akselilla sijaitsevia pisteitä $(a, 0)$ ja $(b, 0)$. Tällöin pisteiden välisen janan pituuden lausekkeesta $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ saadaan $\sqrt{(a - b)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(a - b)^2} = |a - b|$ eli lukujen a ja b välinen etäisyys lukusuoralla.

Janan keskipiste on piste, joka jakaa janan kahteen yhtä suureen osaan. Seuraavaksi tutustutaan janan keskipisteen koordinaattien selvittämiseen.

Pohdinta A.19 Tutki GeoGebra-sovelluksen avulla janan PQ keskipistettä C.

a) Mitkä ovat janan keskipisteen C koordinaatit, kun piste $P = (2, 1)$ ja piste $Q = (5, 3)$?

b) Mitkä ovat janan keskipisteen C koordinaatit, kun piste $P = (-1, 4)$ ja piste $Q = (4, -2)$?

c) Miten voit laskea pisteitä $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ yhdistävän janan keskipisteen koordinaatit?

Pisteitä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) yhdistävän janan keskipiste on $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$. Keskipisteen x-koordinaatti on siis janan päätepisteiden x-koordinaattien keskiarvo. Vastaavasti keskipisteen y-koordinaatti on janan päätepisteiden y-koordinaattien keskiarvo.

7. Mikä on pisteen $(12, -5)$ etäisyys

a) origosta,

b) pisteestä (x, y)?

8. Määritä pisteiden P ja Q välisen janan keskipiste C, kun

a) piste $P = (-3, -2)$ ja piste $Q = (-1, 4)$,

b) pisteen P paikkavektori on $\overline{OP} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$ ja pisteen Q paikkavektori on $\overline{OQ} = 8\bar{i} + \bar{j}$.

9. Kolmion kärkipisteiden koordinaatit ovat $A = (3, 1)$, $B = (4, 4)$ ja $C = (-1, 4)$.

a) Osoita, että kolmio on tasakylkinen.

b) Määritä kolmion lyhimmän sivun keskipiste ja tästä pisteestä piirretyn keskijanan pituus.

c) Miten voit päätellä, että kohdassa b) määritetty keskijana on myös yksi kolmion korkeusjanoista?

d) Mikä on kolmion pinta-ala?

10. Kolmion kärkipisteiden koordinaatit ovat $A = (4, 0)$, $B = (2, 1)$ ja $C = (3, 4)$. Paula ja Mira tutkivat eri menetelmiä käyttäen, onko kolmio suorakulmainen. Tutustu Paulan ja Miran ratkaisuihin ja vastaa alla oleviin kysymyksiin.

<table>
<tr><th>Paula</th><th>Mira</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{(2-4)^2+(1-0)^2}\\ &= \sqrt{(-2)^2+1^2}\\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|BC| &= \sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}\\ &= \sqrt{1^2+3^2}\\ &= \sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|AC| &= \sqrt{(3-4)^2+(4-0)^2}\\ &= \sqrt{(-1)^2+4^2}\\ &= \sqrt{17}\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2\\ (\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2=(\sqrt{17})^2\\ 5+10=17\\ 15=17\\ \text{epätosi}\end{gathered}$$

Vastaus: Kolmio ei ole suorakulmainen.

</td><td>

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j}\\ &= (2-4)\overline{i}+(1-0)\overline{j}\\ &= -2\overline{i}+\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= (x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j}\\ &= (3-2)\overline{i}+(4-1)\overline{j}\\ &= \overline{i}+3\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j}\\ &= (3-4)\overline{i}+(4-0)\overline{j}\\ &= -\overline{i}+4\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}\cdot\overline{BC} &= -2\cdot 1+1\cdot 3\\ &= 1\\ &\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}\cdot\overline{AC} &= -2\cdot(-1)+1\cdot 4\\ &= 6\\ &\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC}\cdot\overline{AC} &= 1\cdot(-1)+3\cdot 4\\ &= 11\\ &\neq 0\end{aligned}$$

Vastaus: Kolmio ei ole suorakulmainen.

</td></tr>
</table>

a) Mitkä kolme arvoa Paula laskee ensin?

b) Miten Paula päättelee, että kolmio ei ole suorakulmainen?

c) Mitä Mira laskee ensin?

d) Miten Mira päättelee, että kolmio ei ole suorakulmainen?

e) Kummalla tavalla itse ratkaisisit tehtävän?

11. Osoita vektoreiden avulla, että pisteiden $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ välisen janan pituudelle pätee kaava

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

A.4 Pistejoukon yhtälö

Pohdinta A.20 Tutki GeoGebra-sovelluksen avulla pisteen P koordinaatteja.

a) Liikuta pistettä P ja kirjaa ylös kolme eri koordinaattiparia, jotka piste P toteuttaa.

b) Mikä yhteys näillä pisteillä on?

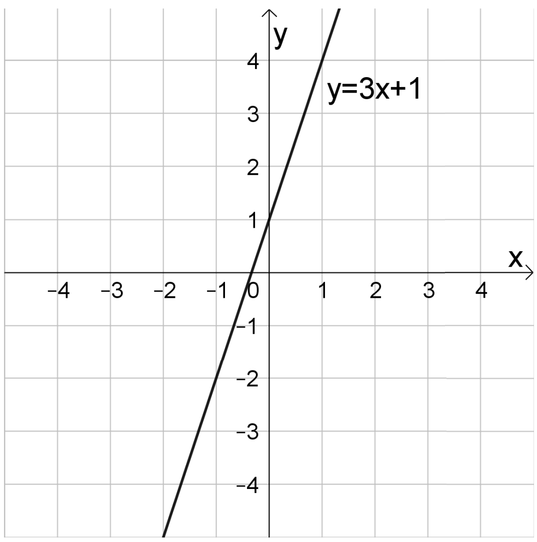
c) Muodosta yhtälö, joka kuvaa pisteen P koordinaattien välistä yhteyttä.

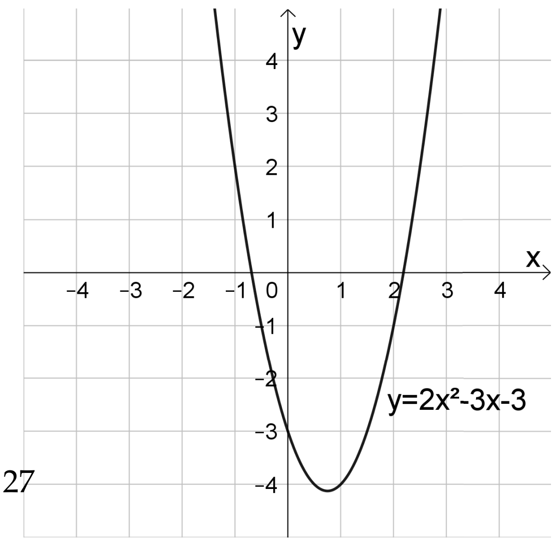
Pistejoukko on joukko koordinaatiston pisteitä, jotka toteuttavat jonkin tietyn ehdon. Analyyttisessa geometriassa pistejoukkoja tutkitaan pistejoukkojen yhtälöiden avulla.

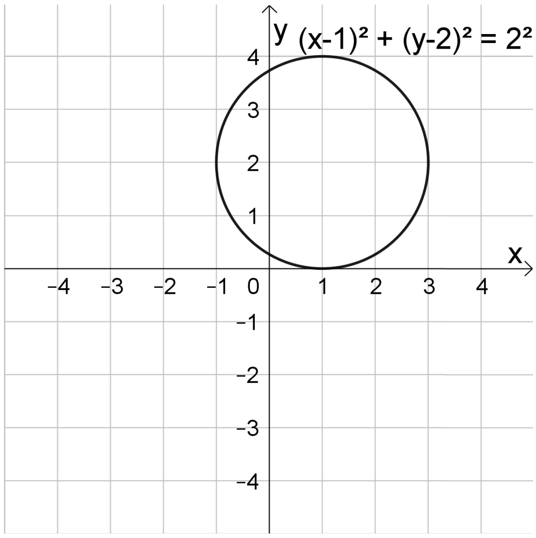
Määritelmä A.21 *Pistejoukon yhtälö* on muuttujien x ja y yhtälö, jolla on seuraava ominaisuus:

Piste (x, y) kuuluu pistejoukkoon, jos ja vain jos pisteen koordinaatit toteuttavat yhtälön.

Esimerkki A.22 Esimerkiksi suora, paraabeli ja ympyrä ovat pistejoukkoja. Suora $y = 3x + 1$ muodostuu pisteistä, joiden koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Paraabeli $y = 2x^2 - 3x - 3$ muodostuu pisteistä, joiden koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön. Ympyrä $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$ muodostuu pisteistä, joiden koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön.







Mallitehtävä A.23 Pistejoukon yhtälö on $y - x^2 = 2x$. Tutki, kuuluvatko pisteet $(-1, 0)$ ja $(1, 3)$ pistejoukkoon.

Sijoitetaan pisteen $(-1, 0)$ koordinaatit $x = -1$ ja $y = 0$ yhtälöön $y - x^2 = 2x$.

$$\begin{aligned} y - x^2 &= 2x \\ 0 - (-1)^2 &= 2 \cdot (-1) \\ 0 - 1 &= -2 \\ -1 &= -2 \\ &\text{epätosi} \end{aligned}$$

Koska pisteen $(-1, 0)$ koordinaatit eivät toteuta yhtälöä, piste $(-1, 0)$ ei kuulu pistejoukkoon.

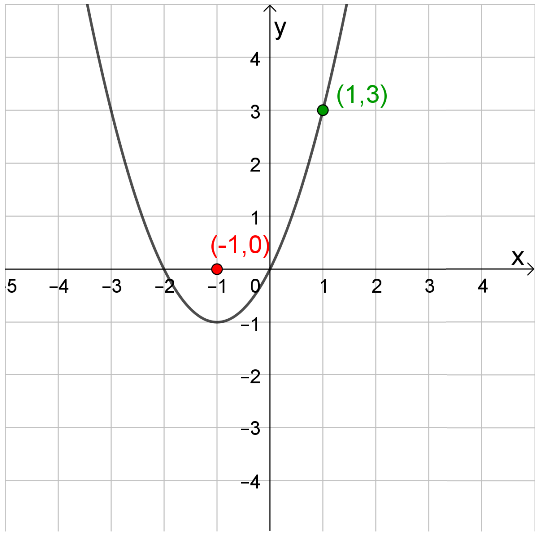
Sijoitetaan pisteen $(1, 3)$ koordinaatit $x = 1$ ja $y = 3$ yhtälöön $y - x^2 = 2x$.

$$\begin{aligned} y - x^2 &= 2x \\ 3 - 1^2 &= 2 \cdot 1 \\ 3 - 1 &= 2 \\ 2 &= 2 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Koska pisteen $(1, 3)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön, piste $(1, 3)$ kuuluu pistejoukkoon.

Mallitehtävän A.23 pistejoukon yhtälö $y - x^2 = 2x$ voidaan sieventää muotoon $y = x^2 + 2x$, jolloin havaitaan, että kyseessä on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja.

MAA2-kurssilta muistetaan, että toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli. Mallitehtävän pistejoukko koostuu siis paraabelin $y = x^2+2x$ pisteistä. Kuten tehtävässä pääteltiin, piste $(1,3)$ kuuluu pistejoukkoon, mutta piste $(-1,0)$ ei kuulu.



Pohdinta A.24 Yhdistä pistejoukon yhtälö sitä vastaavaan kuvaajaan. Perustele vastauksesi.

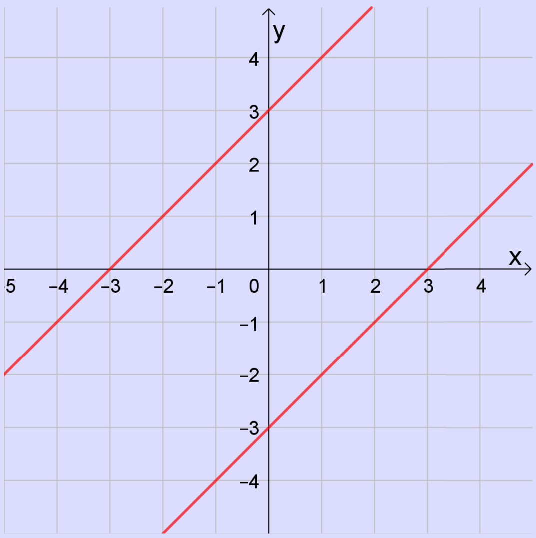
a) $x^2 + xy = 0$

b) $x^2 + y = 0$

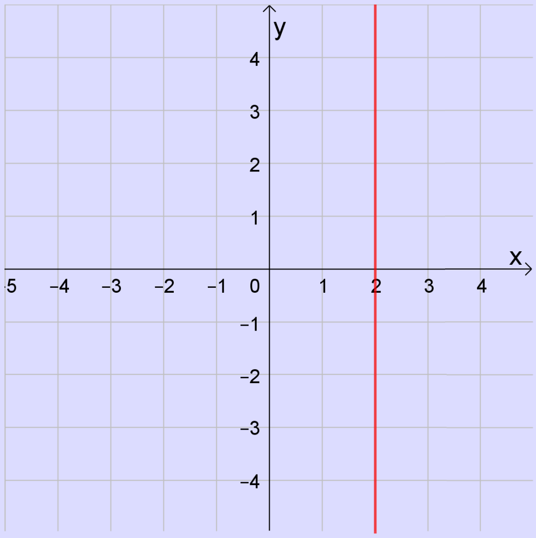
c) $|y - x| = 3$

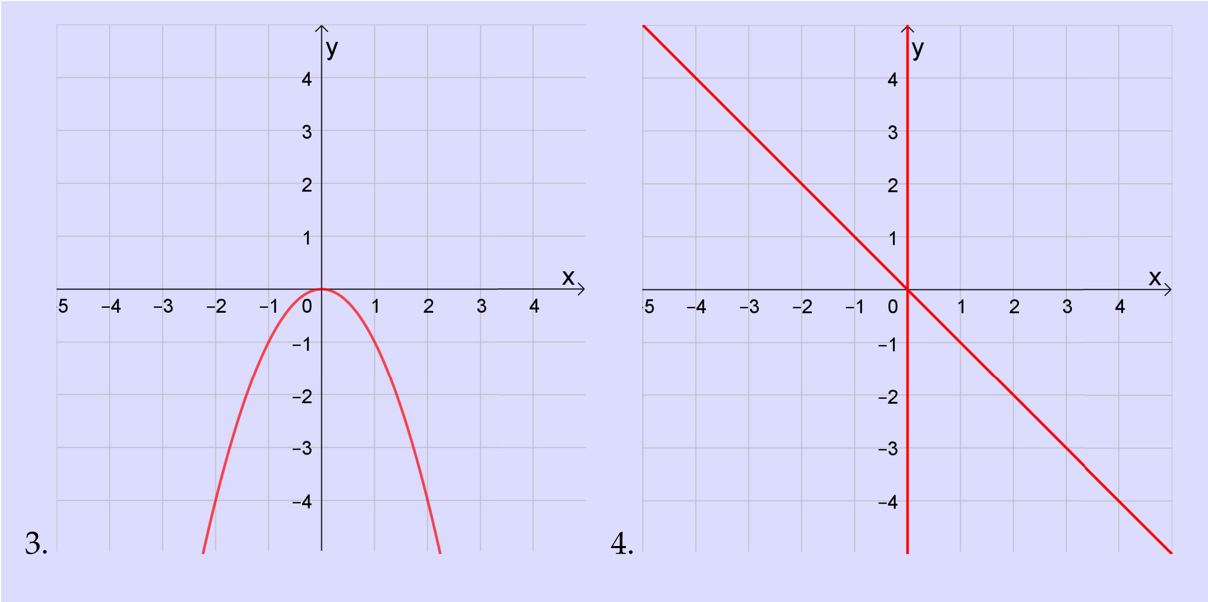
d) $x = 2$

1.



2.





12. Pistejoukon yhtälö on $2xy + y^2 = 0$.

a) Tutki, kuuluvatko pisteet $(-2, 4)$ ja $(6, 2)$ pistejoukkoon.

b) Piirrä pistejoukko.

13. Piirrä GeoGebralla pistejoukko, jonka pisteet toteuttavat yhtälön $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^3 + 3xy^2 = 0$. Kuuluuko piste

a) $(0,6; 0,18)$,

b) $(1, 0)$

pistejoukkoon?

14. Pistejoukko muodostuu pisteistä, joiden x-koordinaatin etäisyys y-koordinaatista on 2.

a) Muodosta pistejoukon yhtälö.

b) Etsi kolme pistettä, jotka kuuluvat pistejoukkoon.

c) Piirrä pistejoukko.

15. Tutki, onko väite totta aina, joskus, vai ei koskaan. Perustele vastauksesi.

a) Funktio on jonkin pistejoukon yhtälön kuvaaja.

b) Pistejoukon yhtälön kuvaaja on jokin funktio.

c) Piste $(1, 2)$ kuuluu pistejoukkoon, jonka yhtälö on $3x^2 + 2xy + y^2 = ax^2 + y$.

d) Piste $(5, 3)$ kuuluu pistejoukkoon, jonka yhtälö on $y^2 - x^2 = x + a^2$.

B Opettajan opas

B.1 Ajankäyttösuunnitelma

Seuraava tuntijako on tehty vaihtoehtoisesti joko 75 minuutin tai 45 minuutin pituisia oppitunteja varten. Lähtökohtana on, että aiheiden käsittelyyn olisi aikaa kolme 75 minuutin oppituntia tai viisi 45 minuutin oppituntia.

Etäisyys lukusuoralla	1 x 75 min	tai	1 x 45 min
Itseisarvoyhtälö	1 x 75 min	tai	2 x 45 min
Etäisyys koordinaatistossa	0,5 x 75 min	tai	1 x 45 min
Pistejoukon yhtälö	0,5 x 75 min	tai	1 x 45 min

B.2 Etäisyys lukusuoralla

Pohdinta A.1

Tavoitteena on lähteä rakentamaan itseisarvon käsitettä tarkastelemalla etäisyyksiä lukusuoralla. Tehtävän b)-kohdassa on tarkoitus havaita, että koordinaatit ovat toistensa vastaluvut, sillä luku ja sen vastaluku ovat lukusuoralla yhtä kaukana nollasta.

Tehtävän c)- ja d)-kohdissa on tarkoitus havaita, että etäisyys on aina ei-negatiivinen, jolloin lukusuoran positiivisella puolella luvun etäisyys nollasta on luku itse. Lukusuoran negatiivisella puolella luvun etäisyys nollasta on puolestaan luvun vastaluku.

Tehtävän e)-kohdassa opiskelijat ehkä vastaavat, että luvun x etäisyys nollasta on x. Tällöin voidaan kysyä, mikä on etäisyys, jos x on negatiivinen. Voiko etäisyys olla negatiivista? Tästä tehtävästä päästään luontevasti itseisarvon määritelmään.

Oppituntia keventävänä sivuhuomiona voidaan todeta, että jos uusi Powerpark rakennettaisiin 330 kilometriä Kuopiosta itään, se päätyisi Venäjän puolelle! Vaihtoehtoisesti voidaan myös pyytää nopeimmin tehtävän suorittaneita opiskelijoita selvittämään itse, minne uusi Powerpark tulisi näillä tiedoilla rakentaa.

Pohdinta A.5

Tehtävän tavoitteena on lämpötilaeroja tarkastelemalla päätyä havaintoon, että kahden luvun välinen etäisyys lukusuoralla on kyseisten lukujen välisen erotuksen itseisarvo. Etäisyyden ja erotuksen yhteyden korostaminen on tärkeää, sillä se syventää käsitteellistä ymmärrystä ja auttaa opiskelijoita ymmärtämään itseisarvoyhtälöitä, jotka ovat muotoa $|x + b| = c$. Lämpötilaerojen lausekkeita muodostaessa tulee huomioida, että lämpötilaerolla tarkoitetaan lämpötilojen erotuksen itseisarvoa. Lämpötilaero ei siis voi olla negatiivinen.

Pohdinta A.9

Tehtävän tavoitteena on havaita lukujen tulon itseisarvolle pätevä ominaisuus $|ab| = |a||b|$.

Tehtävä 2

Tehtävä voidaan toteuttaa itsenäisen työskentelyn sijaan myös ryhmissä, jolloin opiskelijat voivat keskustella väitteistä yhdessä. Tehtävä antaa myös hyviä eriyttämismahdollisuuksia sen mukaan, miten tarkkoja ja matemaattisesti päteviä perusteluja millekin väitteelle vaaditaan. Esimerkiksi d)-kohdan väite voidaan perustella joko itseisarvon algebrallisen määritelmän avulla tai samalla tavalla kuin Huomautuksessa A.8. Kohdissa e) ja f) voidaan johdattelevina kysymyksinä kysyä, päteekö väite, kun toinen tai molemmat luvuista ovat positiivisia, negatiivisia tai nollia.

B.3 Itseisarvoyhtälö

Pohdinta A.11

Tarkoituksena on johdattaa itseisarvoyhtälöihin arkielämän esimerkin avulla. Tehtävässä tulee havaita, että annettujen tietojen perusteella Titan asuinkerrokselle on kaksi eri vaihtoehtoa. Kohdassa c) matemaattisen yhtälön muodostamista voi helpottaa tehtävän ilmaiseminen sanallisesti muodossa "kerroksen x etäisyys kerroksesta 5 on 3".

Pohdinta A.12

Tehtävän tavoitteena on oppia ratkomaan itseisarvoyhtälöitä lukusuoran avulla. Muotoa $|x - b| = c$ olevissa yhtälöissä tärkeää on niin sanotun ankkuripisteen eli luvun b paikantaminen lukusuoralta. Kun b on sijoitettu lukusuoralle, lähdetään etsimään lukuja, joiden etäisyys luvusta b on c.

Pohdinta A.14

Kohdassa d) esitetyn toisen asteen itseisarvoyhtälön ratkaiseminen lukusuoran avulla on mahdollista, jos ajatellaan lauseke $x^2 + 2x + 3$ lukujen $x^2 + 2x$ ja -3 erotuksena, mutta tämä ei välttämättä kuitenkaan ole kovin mielekästä. Haastavammissa itseisarvoyhtälöissä algebrallinen menetelmä voi siis usein olla paras.

Tehtävä 5

Tehtävässä voidaan lähteä liikkeelle miettimällä, mikä luku on yhtä kaukana sekä luvusta 2 että luvusta 8. Näin löydetään ankkuripiste $b = 5$.

Tehtävä 6

Tehtävän b)-kohdassa voidaan huomauttaa siitä, että kokeilumenetelmä voi yksinkertaisissa itseisarvotehtävissä olla nopea tapa löytää ratkaisut, mutta tällöin on tiedettävä, kuinka monta ratkaisua yhtälöllä on, jotta tiedetään kaikkien löytyneen. Kohdan d) lisätehtävä puolestaan tarjoaa hyvän haasteen etevimmille opiskelijoille. Erilaisia ratkaisutapoja voisivat olla esimerkiksi neliöön korottaminen, yhtälön ratkaiseminen graafisesti määrittämällä funktion $|5 - x| - 3$ nollakohdat tai piirtämällä kuvaajat $y_1 = |5 - x|$ ja $y_2 = 3$ ja määrittämällä kuvaajien leikkauspisteiden x-koordinaatit. Neliöön korottamisen kohdalla voitaisiin vielä pohtia, toimisiko kyseinen menetelmä toisen asteen itseisarvoyhtälön ratkaisemisessa.

B.4 Etäisyys koordinaatistossa

Pohdinta A.16

Tehtävän tavoitteena on ymmärtää janan pituuden laskukaava ja sen geometrinen tulkinta. Erityisen tärkeää on siis käydä tehtävän d)-kohta huolellisesti läpi ja varmistaa, että opiskelija ymmärtää, kuinka kahden pisteen välisen janan pituus lasketaan suorakulmaista kolmiota ja Pythagoraan lausetta hyödyntäen. Tarvittaessa voidaan käydä läpi myös täsmällinen todistus janan pituuden kaavalle esimerkiksi oheisen tehtävän avulla.

Pohdinta B.1 Johdetaan kaava, jonka avulla voidaan laskea pisteiden $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ välisen janan pituus $|PQ|$.

a) Oleta aluksi, että pisteitä $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ yhdistävä jana ei ole kummankaan koordinaattiakselin suuntainen. Piirrä koordinaatistoon suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on jana PQ ja kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

b) Mikä on x-akselin suuntaisen kateetin pituus?

c) Mikä on y-akselin suuntaisen kateetin pituus?

d) Miten koordinaattien suuruusjärjestys tulee ottaa huomioon kateettien pituuksia määritettäessä?

e) Laske hypotenuusan PQ pituus.

f) Osoita, että kohdassa e) johtamasi kaava pätee myös silloin, kun pisteitä $P = (x_1, y_1)$ ja $Q = (x_2, y_2)$ yhdistävä jana on koordinaattiakselin suuntainen.

Pohdinta A.19

Tehtävän tavoitteena on ymmärtää janan keskipisteen koordinaattien yhteys janan päätepisteiden koordinaatteihin. Tehtävän c)-kohdassa tulee ensin ymmärtää, että keskipisteen x-koordinaatti sijaitsee aina päätepisteiden x-koordinaattien puolivälissä ja vastaavasti keskipisteen y-koordinaatti sijaitsee päätepisteiden y-koordinaattien puolivälissä. GeoGebra-sovelluksen on tarkoitus auttaa tämän yhteyden havaitsemisessa.

Tehtävä 9

Tehtävässä voi olla tarpeen kerrata keskijanan ja korkeusjanan määritelmät. Tehtävän b)-kohdassa määritetty keskijana on samalla myös korkeusjana, sillä keskijana on piirretty tasakylkisen kolmion kannan keskipisteestä.

Tehtävä 10

Tehtävässä voi olla tarpeen kerrata kahden pisteen välisen vektorin muodostaminen sekä kahden vektorin välinen pistetulo.

B.5 Pistejoukon yhtälö

Pohdinta A.20

Tehtävän b)-kohdassa haetaan pisteiden välistä yhteyttä sanallisesti. Jokaisen pisteen x-koordinaatti on kahden verran suurempi kuin y-koordinaatti. Voidaan todeta myös, että kaikki pisteet sijaitsevat samalla suoralla.

Kun c)-kohdassa kysytty yhtälö on saatu muodostettua, voidaan vielä huomauttaa, että kyseessä on suoran yhtälö. Kaikki pistejoukkoon kuuluvat pisteet sijaitsevat siis samalla suoralla.

Pohdinta A.24

Tehtävä on tarkoitus tehdä ilman laskinta tai geometriaohjelmaa. Tavoitteena on huomata, että joidenkin pistejoukkojen piirtäminen voi vaatia, että pistejoukon yhtälöstä ratkaistaan muuttuja y tai x tai molemmat. Samalla nähdään esimerkkejä erilaisten pistejoukkojen kuvaajista. Lisätehtävänä voidaan pohtia, mitkä tehtävän kuvaajista ovat funktioita ja mitkä puolestaan eivät.

Tehtävä 12

Tehtävän pistejoukko voidaan piirtää myös laskinta tai geometriaohjelmaa käyttäen. Tällöin tulee kuitenkin huomioida, että jotkin ohjelmat saattavat vaatia, että pistejoukon yhtälöstä ratkaistaan ensin muuttuja y.

Tehtävä 13

Käyttämällä GeoGebran ”piste objektilla” -toimintoa ja GeoGebran oletusasetusta, joka pyöristää luvut kahden desimaalin tarkkuuteen, näyttäisi siltä, että a)-kohdan piste kuuluu pistejoukkoon. Tämä johtuu kuitenkin vain GeoGebran tavasta pyöristää koordinaatit. Sijoittamalla pisteen koordinaatit pistejoukon yhtälöön havaitaan, että piste ei kuulu pistejoukkoon.

C Tehtävien vastaukset

1.

a) $2 - \sqrt{3}$

b) $\pi - e$

c) $\begin{cases} x + 3, & \text{kun } x \geq -3 \\ -x - 3, & \text{kun } x < -3 \end{cases}$

2.

a) Joskus. Väite pätee, kun $x \neq 0$.

b) Joskus. Väite pätee, kun $a < 0$.

c) Ei koskaan.

d) Aina.

e) Joskus. Väite ei päde, kun toinen luvuista on positiivinen ja toinen luvuista on negatiivinen. Muulloin väite pätee.

f) Joskus. Väite pätee, kun $a \leq b \leq 0$ tai $0 \leq b \leq a$.

g) Joskus. Väite pätee, kun $b \neq 0$.

3. Etäisyydet ovat samat.

4.

a) $x = 1$

b) $x = \pi - 2$ tai $x = \pi + 2$

c) Ei ratkaisua.

d) $x = -2$ tai $x = \dfrac{6}{5}$

e) $x = -1$ tai $x = 7$

5. a) $|x - 5| = 3$

6.

a) Molemmat ratkaisutavat ovat oikein, joten molemmilla päästään samaan vastaukseen. Vastaus on $x = 2$ tai $x = 8$.

b) Toinen ratkaisuista puuttuu.

7.

a) 13

b) $\sqrt{(x-12)^2+(y+5)^2}$

8.

a) $(-2, 1)$

b) $\left(5, \frac{7}{2}\right)$

9.

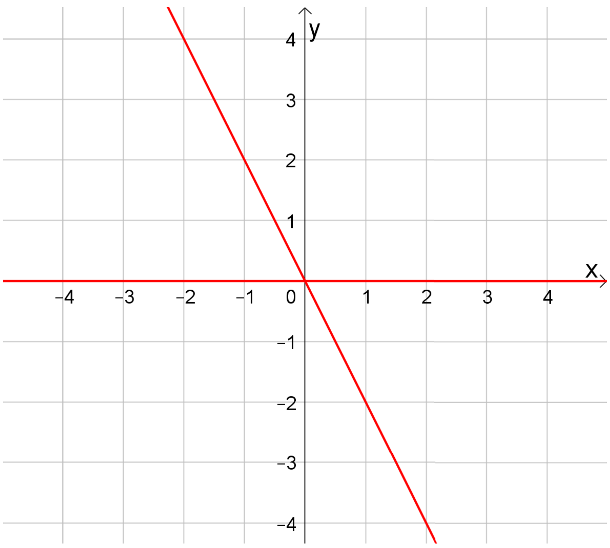
b) Keskipiste on $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ja keskijanan pituus on $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

d) $\frac{15}{2}$

12.

a) Piste $(-2, 4)$ kuuluu, piste $(6, 2)$ ei kuulu.

b)



13.

a) Ei kuulu.

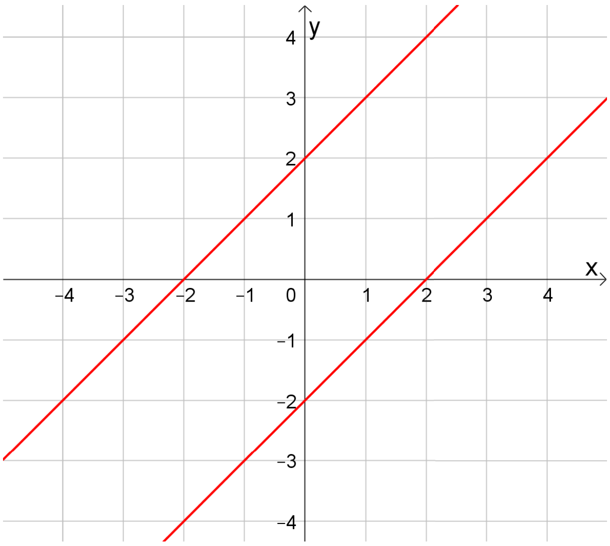
b) Kuuluu.

14.

a) $|x - y| = 2$

b) Esimerkiksi $(-1, -3)$, $(1, 3)$ ja $(2, 0)$.

c)



15.

a) Aina.

b) Joskus. Väite pätee, kun pistejoukon yhtälön kuvaaja on funktio. Kaikkien pistejoukkojen, kuten esimerkiksi ympyröiden, kuvaajat eivät kuitenkaan ole funktioita.

c) Joskus. Väite pätee, kun $a = 9$.

d) Ei koskaan.