Steiner-Minkowskin kaava

Pro gradu -tutkielma
Inkeri Sairanen
2373188
Matemaattisten tieteiden yksikkö
Ohjaaja: Ville Suomala
Oulun yliopisto
Kevät 2019

Sisältö

Johdanto

Kuvitellaan, että kuutio halutaan päällystää kullalla siten, että kultaa on joka kohdassa yhtä paksusti. Mikä on kuution pintaan tulevan kullan tilavuus? Mikä on päällystetyn kuution kokonaistilavuus?

Jos tiedetään kuution särmän pituus ja kultapinnoitteen paksuus, saadaan kullan ja koko systeemin tilavuudet laskettua helposti. Kolmiulotteinen avaruus on vielä helppo hahmottaa, mutta kun siirrytään korkeampiin ulottuvuuksiin, eivät lausekkeet enää olekaan niin intuitiivisia. On kuitenkin tiettyjä ominaisuuksia, jotka ovat yhteisiä kaikille epätyhjille monitahokkaille eli polytoopeille yllä kuvatun kaltaisessa tilanteessa myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Tämän tutkielman luvussa 1 esitellään erilaisia joukkoja ja niiden ominaisuuksia euklidisessa avaruudessa. Joukot, joita tutkielmassa käsitellään, ovat pääosin konvekseja eli kuperia joukkoja. Konveksin joukon mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää janalla toisiinsa siten, että janan kaikki pisteet kuuluvat myös kyseiseen joukkoon. Myös joukon ympäristön käsite on merkittävä tutkielman kannalta. Joukon r-ympäristöön kuuluvat kaikki pisteet, jotka ovat enintään pituuden r etäisyydellä joukosta. Alun esimerkissä kuutio ja kulta muodostavat yhdessä kuution ympäristön.

Luvussa 2 syvennytään tutkimaan polytooppeja ja konvekseja joukkoja. Joukoille määritellään mitta, jolla niiden tilavuuksia pystytään laskemaan ja todistetaan, että tilavuusfunktio on jatkuva. Lopuksi esitellään pinta-alan käsite avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Viimeisessä luvussa mennään viimein itse aiheeseen. Lauseessa 3.9 osoitetaan, että on olemassa tiettyjä ominaisuuksia, jotka pätevät kaikkien polytooppien ympäristöille riippumatta ympäröivän euklidisen avaruuden ulottuvuudesta. Itse Steiner-Minkowskin kaava (lause 3.11) onkin yksinkertaisuudessaan lauseen 3.9 yleistys kaikille konvekseille joukoille.

Joitakin määritelmiä ja todistuksia havainnoimaan on lisätty kuvia. Vaikka piirrokset kuvaavat vain yksittäistapauksia avaruudessa $\mathbb{R}^2$, auttavat ne ymmärtämään todistuksia.

Tutkielmassa on käytetty pääasiassa teosta [1]. Muita lähteitä on käytetty pääasiassa yksittäisten todistusten ja määritelmien kirjoittamisen apuna.

1 Määritelmiä ja peruskäsitteitä

Määritellään alkuun muutamia tärkeitä käsitteitä ja esitellään käytettyjä merkintätapoja. Käsittelemme tutkielmassa koko ajan euklidista avaruutta $\mathbb{R}^n$.

1.1 Etäisyyksiä ja joukkoja euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Määritelmä 1.1 (Euklidinen avaruus)**.** Euklidinen n-ulotteinen avaruus määritellään seuraavasti:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on määritelty sisätulo

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

ja normi (vektorin pituus)

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}$$

Määritelmä 1.2. Kahden pisteen $x, y \in \mathbb{R}^n$ välinen etäisyys on epänegatiivinen luku

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Määritelmä 1.3. Kahden epätyhjän osajoukon $A, B \subset \mathbb{R}^n$ välinen etäisyys on epänegatiivinen luku

$$d(A, B) = inf\ \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Voidaan myös merkitä $d(x, B) = d(\{x\}, B)$.

Määritelmä 1.4. Olkoot $r > 0$ ja $a \in X$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Merkitään a:n suljettua r-ympäristöä $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$. Ympäristön voi määrittää myös joukon $A \subset X$ ympärille seuraavalla tavalla:

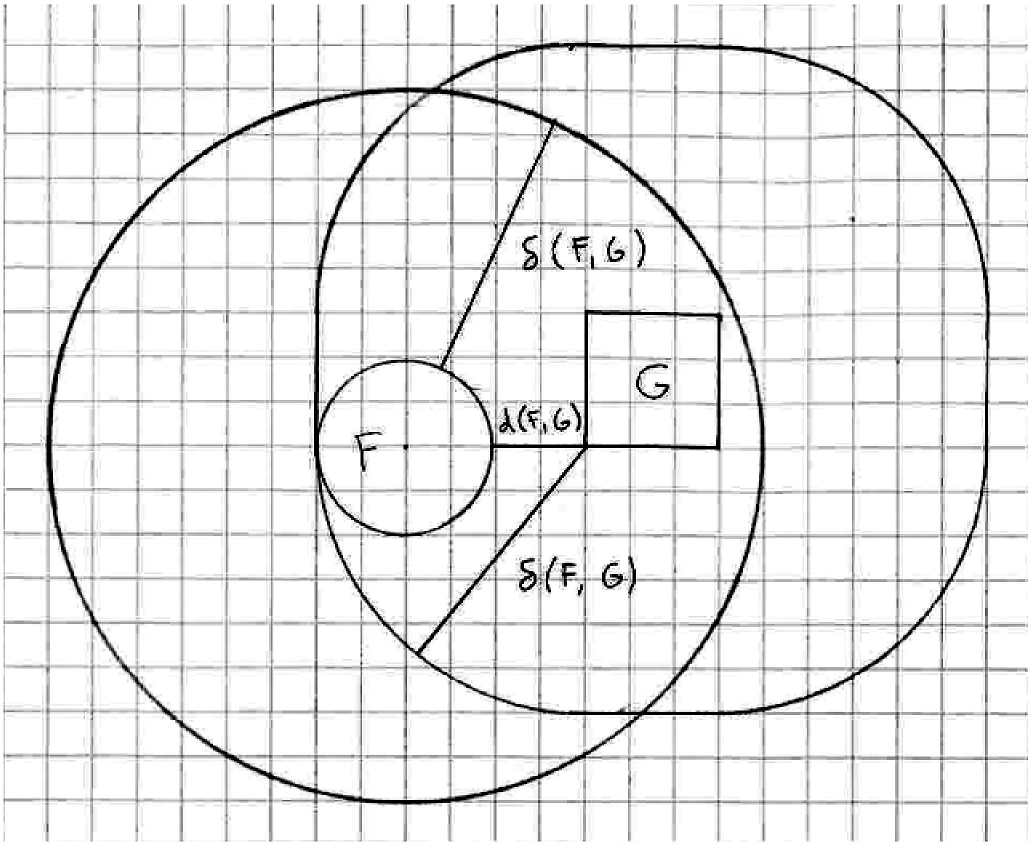
$$B(A, r) = \{x \in X \mid d(x, A) \leq r\}.$$

Merkintä 1.5. Käytetään n-ulotteisesta yksikköpallosta $B(0, 1)$ merkintää $B^n(0, 1)$.

Määritelmä 1.6. Olkoon $F, G \subset \mathbb{R}^n$. Joukkojen F ja G välinen *Hausdorffin etäisyys* määritellään seuraavasti:

$$\delta(F, G) = \inf\{\rho \mid F \subset B(G, \rho) \text{ ja } G \subset B(F, \rho)\}.$$

On hyvä olla tarkkana merkintöjen $d(F, G)$ ja $\delta(F, G)$ kanssa sekaannusten välttämiseksi.



Kuva 1: Joukkojen F ja G välinen etäisyys $d(F, G)$ ja Hausdorffin etäisyys $\delta(F, G)$.

Määritelmä 1.7. Määritellään a-keskinen ja r-säteinen pallopinta S seuraavasti:

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}.$$

Merkintä 1.8. Käytetään avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteiden a ja b välisestä janasta merkintää $[a, b]$.

Merkintä 1.9. Käytetään avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteiden a ja b kautta kulkevasta suorasta merkintää $\langle a, b \rangle$.

Määritelmä 1.10. Lineaarisen vektoriavaruuden X ulottuvuus $\dim X$ on sama kuin avaruuden kantavektorien lukumäärä.

Esimerkki 1.11. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Esimerkki 1.12. Jos $\dim X = 0$, X on *piste*.

Esimerkki 1.13. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. 2-ulotteinen avaruus on *taso*.

Esimerkki 1.14. *Suoran* ulottuvuus on 1. Tällainen avaruus on esimerkiksi $\mathbb{R}$.

1.2 Joukkojen ominaisuuksia

Määritelmä 1.15. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Piste x on joukon A *kasautumispiste*, jos

$$A \cap B(x,r) \backslash \{x\} \neq \emptyset$$

kaikilla $r > 0$.

Määritelmä 1.16. Joukko $A \in \mathbb{R}^n$ on *avoin*, jos kaikille $a \in A$ pätee $B(a,r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Joukko $B \in \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos $\mathbb{R}^n \backslash B$ on avoin.

Huomautus 1.17. Joukko on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.

Määritelmä 1.18. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Jos pisteelle $a \in A$ pätee

$$B(a,r) \cap A \neq \emptyset \neq B(a,r) \cap \mathbb{R}^n \backslash A$$

kaikilla $r > 0$, niin a kuuluu joukon A *reunaan* ∂A.

Huomautus 1.19. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos ja vain jos $\partial A \subset A$.

Määritelmä 1.20. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukon A sisus $\mathring{A}$ on joukko $A \backslash \partial A$.

Määritelmä 1.21. Joukkojen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *karteesinen tulo* on joukko

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Määritelmä 1.22. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukko A on *kompakti*, jos jokaiselle A:n avoimelle peitteelle on olemassa äärellinen osapeite. Tällöin joukko A on myös *jonokompakti*, eli jokaisella joukon jonolla on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä.

Huomautus 1.23. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.

Merkintä 1.24. Käytetään euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikkien epätyhjien kompaktien joukkojen joukosta merkintää $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1.25. *Joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos ja vain jos $B(F,0) = F$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $B(F, 0) = F$. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ joukon F kasautumispiste. Nyt määritelmän 1.15 perusteella kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa piste $f \in F$, jolle $f \in B(x, \epsilon)$, eli $d(f, x) < \epsilon$ ja $d(x, F) < \epsilon$. Näin ollen $d(x, F) = 0$, koska ϵ voidaan valita mielivaltaisen läheltä nollaa. Nyt siis $x \in B(F, 0)$. Koska oletettiin, että $B(F, 0) = F$, niin $x \in F$, ja huomautuksen 1.17 nojalla F on suljettu.

Olkoon sitten F suljettu. Nyt on selvää, että $F \subset B(F, 0)$, sillä yllä todistettiin, että joukon F kaikki pisteet kuuluvat joukkoon $B(F, 0)$. Täytyy siis enää todistaa, että $B(F, 0) \subset F$. Olkoon $x \in B(F, 0)$, eli $d(x, F) = 0$. Nyt jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita alkio $x_n \in F$ siten, että $d(x_n, x) < 1/n$. Tällöin $x_n \to x$, kun $n \to \infty$, ja koska F oletettiin suljetuksi, eli se sisältää suppenevien jonojensa raja-arvot (määritelmä 1.22 ja huomautus 1.23), niin $x \in F$, eli $B(F, 0) \subset F$. Näin päästään johtopäätökseen, että $B(F, 0) = F$. □

Lause 1.26. *Hausdorffin etäisyys määrittää metriikan joukossa $\mathcal{K}$.*

Todistus. Olkoot $D, F, G \in \mathcal{K}$ mielivaltaisia kompakteja joukkoja. Nyt täytyy todistaa, että Hausdorffin etäisyys δ toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $\delta(F, G) \geq 0$
2. $\delta(F, G) = 0 \ \Leftrightarrow \ F = G$
3. $\delta(F, G) = \delta(G, F)$
4. $\delta(F, G) \leq \delta(F, E) + \delta(E, G)$

Väite 1 seuraa suoraan δ:n ja joukon ρ-ympäristön määritelmästä.
Väite 2: Jos $\delta(F, G) = 0$, niin määritelmän mukaan $F \subset B(G, 0)$ ja $G \subset B(F, 0)$. Koska joukot F ja G ovat kompakteja, niin lemman 1.25 mukaan $B(G, 0) = G$ ja $B(F, 0) = F$. Tästä seuraa, että $F = G$. Jos taas $F = G$, niin lemmasta 1.25 ja joukkojen F ja G kompaktiudesta seuraa, että $F \subset B(G, 0)$ ja $G \subset B(F, 0)$, jolloin $\delta(F, G) = 0$.
Väite 3: $\delta(F, G) = \inf\{\rho \mid F \subset B(G, \rho) \text{ ja } G \subset B(F, \rho)\} = \delta(G, F)$.
Väite 4: Olkoon $\delta(F, E) = r$ ja $\delta(E, G) = s$. Nyt $F \subset B(E, r)$ ja $E \subset B(G, s)$, sekä $F \subset B(G, r + s)$, samoin kuin $G \subset B(F, r + s)$. Näin ollen

$$\delta(F, G) \leq |s + r| \leq |s| + |r| = \delta(F, E) + \delta(E, G).$$

□

Lemma 1.27. *Kaikille joukoille $F, G \subset \mathbb{R}^n$ ja $\rho, \sigma > 0$ pätee*

$$\delta(B(F, \rho), B(G, \sigma)) \leq \delta(F, G) + |\rho - \sigma|.$$

Todistus. Olkoot $x \in B(F, \rho)$ ja $f \in F$, jolloin $d(x, f) \leq \rho$. Olkoot myös $g \in G$ ja $\epsilon > 0$ mielivaltainen, jolloin $d(g, f) \leq \delta(F, G) + \epsilon$. Tästä seuraa, että $d(x, g) \leq \rho + \delta(F, G) + \epsilon$. Olkoon y piste, joka sijaitsee janalla $[x, g]$ etäisyydellä σ pisteestä g. Nyt siis $y \in B(G, \sigma)$ ja $d(x, y) \leq \rho + \delta(F, G) + \epsilon - \sigma$. Koska $d(x, y) = \delta(B(F, \rho), B(G, \sigma))$, niin $\delta(B(F, \rho), B(G, \sigma)) \leq \delta(F, G) + \rho - \sigma$.

Koska ei tiedetä, kumpi luvuista ρ ja σ on suurempi, otetaan niiden erotuksesta itseisarvo, jolloin se jää epänegatiiviseksi. Nyt siis

$$\delta(B(F, \rho), B(G, \sigma)) \leq \delta(F, G) + |\rho - \sigma|.$$

□

Määritelmä 1.28 (Konveksius)**.** Euklidisen avaruuden X osajoukko C on *konveksi*, jos mille tahansa pisteparille $x, y \in C$ pätee $[x, y] \subset S$, missä $[x, y] = \{\rho x + (1 - \rho)y \mid \rho \in [0, 1]\}$.

Lemma 1.29. *Konveksien joukkojen $S, T \subset \mathbb{R}^n$ leikkaus $S \cap T$ on konveksi.*

Todistus. Olkoon $x, y \in S \cap T$. Nyt, koska S ja T ovat konvekseja, ja sisältävät pisteet x ja y, niin pisteiden välinen jana $[x, y]$ kuuluu määritelmän 1.28 mukaan kumpaankin joukkoon, eli joukkojen leikkaukseen $S \cap T$. Näin ollen myös leikkaus on konveksi. □

Huomautus 1.30. Lemma 1.29 pätee myös tilanteisiin, jossa tarkastellaan useamman kuin kahden konveksin joukon leikkausta. Todistus on täysin vastaava.

Lause 1.31 (Minkowskin summa)**.** *Jos S ja T ovat konvekseja joukkoja euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin joukko*

$$\lambda S + \mu T = \{\lambda s + \mu t \mid s \in S, t \in T\}$$

on konveksi mille tahansa $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Todistus. Todistetaan ensin, että λS ja μT ovat konvekseja joukkoja. Olkoon $s_1, s_2 \in S$, jolloin määritelmän 1.28 mukaan $\rho s_1 + (1 - \rho)s_2 \in S$, kun $\rho \in [0, 1]$. Valitaan nyt $\lambda s_1, \lambda s_2 \in \lambda S$. S:n konveksiudesta seuraa, että

$$\rho \lambda s_1 + (1 - \rho)\lambda s_2 = \lambda(\rho s_1 + (1 - \rho)s_2) \in \lambda S,$$

eli λS on konveksi joukko. Samoin myös μT on konveksi.

Todistetaan sitten, että joukko $Q = S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$ on konveksi. Valitaan

$$\begin{aligned} q_1 &= s_1 + t_1 \quad \text{ja} \\ q_2 &= s_2 + t_2. \end{aligned}$$

Nyt, koska S ja T ovat konvekseja, niin

$$\begin{aligned} &\rho s_1 + (1-\rho)s_2 \in S \quad \text{ja} \\ &\rho t_1 + (1-\rho)t_2 \in T, \end{aligned}$$

kun $\rho \in [0, 1]$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} &\rho(s_1 + t_1) + (1-\rho)(s_2 + t_2) \\ =&\rho s_1 + (1-\rho)s_2 + \rho t_1 + (1-\rho)t_2 \in S + T = Q, \end{aligned}$$

eli $\rho q_1 + (1-\rho)q_2 \in Q$. Näin ollen siis Q on konveksi joukko.

Koska siis λS ja μT ovat konvekseja joukkoja ja kahden konveksin joukon summa on konveksi, niin joukko $\lambda S + \mu T$ on konveksi. □

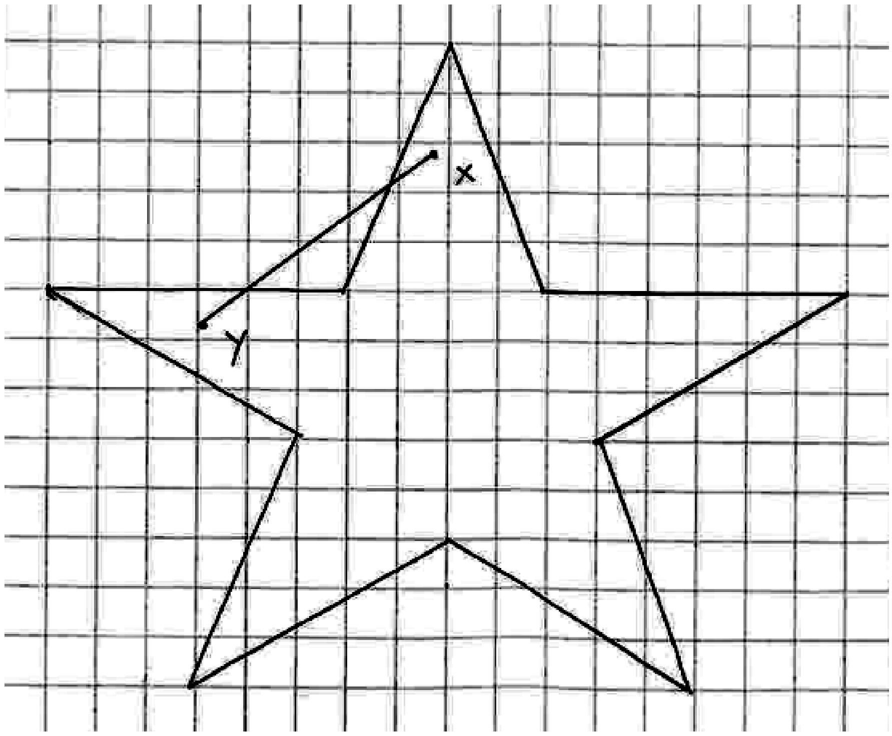
Esimerkki 1.32. Ympyrä ja säännölliset monikulmiot ovat konvekseja. Esimerkiksi tähden muotoinen joukko ei ole konveksi.

Määritelmä 1.33. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko U on sen *aliavaruus*, jos kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $u, v \in U$ pätee $\lambda u + \mu v \in U$.

Määritelmä 1.34. Olkoon U avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätriviaali lineaarinen aliavaruus ja $v \in \mathbb{R}^n$. Joukko

$$V = v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *affiini aliavaruus*.



Kuva 2: Tähden muotoinen joukko avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Huomataan, että joukko ei ole konveksi, sillä pisteiden x ja y välisen janan kaikki pisteet eivät kuulu joukkoon.

Huomautus 1.35. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ affiini aliavaruus V on aito aliavaruus vain, jos $0 \in V$.

Määritelmä 1.36. Sellaista affiinia aliavaruutta $H \subset X$, jolle $\dim H = \dim X - 1$, kutsutaan *hypertasoksi*.

Esimerkki 1.37. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ hypertaso on kaksiulotteinen taso. Kaksiulotteisessa avaruudessa hypertaso on suora.

Määritelmä 1.38. Osat, joihin hypertaso H jakaa ympäröivän avaruuden $\mathbb{R}^n$, kutsutaan *puoliavaruuksiksi*. Puoliavaruus $X \in \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos se sisältää sen muodostavan hypertason. Jos $X \cap H = \emptyset$, puoliavaruus X on avoin.

Määritelmä 1.39. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettujen puoliavaruuksien äärellinen leikkaus on *monitahokas*. *Polytooppi* on kompakti monitahokas, jonka sisus on epätyhjä.

Huomautus 1.40. Koska polytooppi on kompakti, sillä on epätyhjä reuna.

Huomautus 1.41. Kaksiulotteisen avaruuden polytooppia kutsutaan monikulmioksi.

Määritelmä 1.42. Olkoon $H \subset X$ hypertaso ja $C \subset X$ konveksi kompakti joukko. Jos $H \cap C \neq \emptyset$ ja $H \cap \mathring{C} = \emptyset$, niin H *sivuaa* joukkoa C.

Määritelmä 1.43. Olkoon $P \subset X$ polytooppi ja $H \subset X$ polytooppia sivuava hypertaso. $F = P \cap H$ on polytoopin P *tahko.*

Huomautus 1.44. Polytoopin tahkot ovat suljettuja joukkoja.

Määritelmä 1.45. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukon A *konveksi verho* on suppein konveksi joukko, joka sisältää joukon A. Merkitään siis

$$\mathcal{E}(A) = \bigcap \{B \mid A \subset B, B \text{ on konveksi}\}.$$

Huomautus 1.46. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksi verho $\mathcal{E}(A)$ on huomautuksen 1.30 nojalla konveksi joukko.

Huomautus 1.47. Polytooppi on sen kärkipisteiden konveksi verho. Lisäksi äärellisen joukon konveksi verho on monitahokas.

Määritelmä 1.48. Jokaiselle $a \in \mathbb{R}^n$ ja $\eta \in]0, \infty[$ kuvausta

$$H_{a,\eta} : x \to a + \eta(x - a)$$

kutsutaan *a-keskiseksi ja η-säteiseksi homotetiaksi.*

2 Tarpeellisia lauseita

Esitellään seuraavaksi muutamia lauseita, joista on hyötyä tutkielman viimeisessä kappaleessa.

Lause 2.1. *Olkoon* $\mathbb{R}^n$ *euklidinen avaruus,* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $\epsilon > 0$. *Joukolle* $B(A, \epsilon)$ *pätee tällöin*

$$B(A, \epsilon) = A + B(0, \epsilon),$$

jos A *on kompakti.*

Todistus. Koska A on kompakti, ja täten myös suljettu, niin jokaiselle $x \in B(A, \epsilon)$ on olemassa sellainen $a \in A$, että $d(x, A) = d(x, a) \leq \epsilon$. Nyt $x \in B(A, \epsilon)$ ja $x \in A + B(0, \epsilon)$, joten $B(A, \epsilon) = A + B(0, \epsilon)$. $\square$

Merkitään tässä tutkielmassa $\mathcal{P}$:llä kaikkien kompaktien konveksien monitahokkaiden joukkoa ja $\mathcal{P}^\bullet$:llä kaikkien polytooppien joukkoa. Käytetään myös merkintää $\mathcal{K}$ kaikkien kompaktien joukkojen joukosta, merkintää $\mathcal{C}$ kompaktien konveksien joukkojen joukosta ja olkoon vielä $\mathcal{C}^\bullet = \{C \in \mathcal{C} \mid \dim C = \dim X\} = \{C \in \mathcal{C} \mid \mathring{C} \neq \emptyset\}$.

Määritelmä 2.2. Olkoon A suljettu konveksi joukko avaruudessa $\mathbb{R}^n$, ja olkoon x joukon A reunapiste. Pisteen x *kertaluku* ω määräytyy niiden hypertasojen mukaan, jotka sivuavat joukkoa A pisteessä x: Näiden hypertasojen leikkaus muodostaa affiinin aliavaruuden, jonka ulottuvuus ω on.

Jos pisteen x kertaluku on 0, on x joukon A *kärkipiste*. Jos taas $\omega = n-1$, sanotaan, että joukko A on *sileä* pisteessä x.

Merkintä 2.3. Käytetään pisteen x kertaluvusta merkintää ω_x.

Esimerkki 2.4. Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ympyrän kaikki reunapisteet ovat sileitä. Niiden kaikkien kertaluku on 1, sillä ympyrällä ei ole kärkipisteitä.

Esimerkki 2.5. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ kuution tahkojen sisusten pisteiden järjestysluku on 2, sillä kuution tahkot ovat 2-ulotteisia tasoja. Särmien kertaluku on 1, sillä särmät ovat 1-ulotteisia suoria ja kärkipisteiden kertaluku on pisteen ulottuvuus eli 0. Kuution tahkojen sisukset ovat sileitä, sillä $\omega_x = 2 = 3 - 1$, kun x kuuluu tahkon sisukseen.

Jatkossa jaottelemme polytoopin reunapisteet i-tahkoihin, missä i on pisteen kertaluku.

2.1 Kompaktin joukon tilavuus

Tässä vaiheessa aletaan kaivata jotain tapaa, jolla mitata euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja. Siksi määritellään nyt osajoukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *Lebesguen mitta* $\lambda(A)$. Lebesguen mitta on epänegatiivinen reaaliluku tai ääretön.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ suorakaide määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} I &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ 1 \leq i \leq n\}, \end{aligned}$$

ja sille määritellään Lebesguen mitta

$$\lambda(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n),$$

joka on samalla joukon I tilavuus.

Määritelmä 2.6. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ sisältämän kompaktin joukon $K \subset \mathbb{R}^n$ *tilavuus* $\mathcal{L}^n(K)$ on

$$\mathcal{L}^n(K) = \mathcal{L}(K) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) \mid K \subset \bigcup I_k\}.$$

Huomautus 2.7. Mittaa $\mathcal{L}^n$ käytetään myös avaruuden $\mathbb{R}^m$, $m \geq n$ n-ulotteisten affiinien aliavaruuksien ja niiden osajoukkojen mittaamiseen.

Merkintä 2.8. Jos halutaan tarkentaa, minkä ulotteisen joukon tilavuudesta on kyse, merkitään joukon ulottuvuus d tilavuusfunktion yläindeksiin: $\mathcal{L}^d$.

Avaruudessa $\mathbb{R}$ käytetään tilavuuden sijaan termiä pituus ja avaruudessa $\mathbb{R}^2$ termiä pinta-ala. Tätä ei kuitenkaan tule sekoittaa yleiseen pinta-alan käsitteeseen, joka esitellään luvussa 2.2.

Merkintä 2.9. Olkoon joukko $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Lemma 2.10. *Olkoon $a \in \mathbb{R}_+^*$ ja $K \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$\mathcal{L}(K + a) = \mathcal{L}(K).$$

Todistus. Tarkastellaan joukkoa $K + a$. Nyt määritelmän 2.6 nojalla

$$\mathcal{L}(K + a) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k + a) \mid K + a \subset \bigcup I_k + a\}.$$

Nyt

$$I + a = [a_1 + a, b_1 + a] \times [a_2 + a, b_2 + a] \times \ldots \times [a_n + a, b_n + a],$$

joten

$$\begin{aligned}\lambda(I+a) &= (b_1+a-(a_1+a))(b_2+a-(a_2+a))\dots(b_n+a-(a_n+a))\\ &= (b_1-a_1+a-a)(b_2-a_2+a-a)\dots(b_n-a_n+a-a)\\ &= (b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)\\ &= \lambda(I).\end{aligned}$$

Näin voidaan tehdä kaikille joukoille I_k, joten $\lambda(I_k+a)=\lambda(I_k)$. Tästä seuraa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(K+a) &= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_k+a) \mid K+a\subset\bigcup I_k+a\}\\ &= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_k) \mid K\subset\bigcup I_k\}\\ &= \mathcal{L}(K).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.11. *Olkoon $t\in\mathbb{R}_+^*$ ja $K\subset\mathbb{R}^n$. Nyt*

$$\mathcal{L}(tK)=t^n\mathcal{L}(K).$$

Todistus. Tutkitaan joukkoa tK. $K\subset\bigcup I_k$ jos ja vain jos $tK\subset\bigcup tI_k$, jolloin määritelmän 2.6 mukaan

$$\mathcal{L}(tK)=\inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(tI_k) \mid tK\subset\bigcup tI_k\}.$$

Nyt

$$tI=[ta_1,tb_1]\times[ta_2,tb_2]\times\ldots\times[ta_n,tb_n],$$

josta seuraa, että

$$\begin{aligned}\lambda(tI) &= (tb_1-ta_1)(tb_2-ta_2)\dots(tb_n-ta_n)\\ &= t^n(b_1-a_1)\dots(b_n-a_n)\\ &= t^n\lambda(I).\end{aligned}$$

Näin ollen myös $\lambda(tI_k) = t^n\lambda(I_k)$ ja

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(tK) &= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(tI_k) \mid tK \subset \bigcup tI_k\} \\
&= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} t^n\lambda(I_k) \mid tK \subset \bigcup tI_k\} \\
&= t^n \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_k) \mid K \subset \bigcup I_k\} \\
&= t^n\mathcal{L}(K).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.12. *Olkoon $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ ja $K \subset \mathbb{R}^n$. Nyt*

$$\mathcal{L}(H_{a,\eta}(K)) = \eta^n\mathcal{L}(K).$$

Todistus. Todistetaan, että $\mathcal{L}(H_{a,\eta}(K)) = \mathcal{L}(\eta K)$. Nyt

$$\begin{aligned}
H_{a,\eta}(K) &= \{\ a + \eta(k-a)\ |k \in K,\ a \in \mathbb{R}^n\} \\
&= a + \eta K
\end{aligned}$$

ja lemman 2.10 nojalla

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(H_{a,\eta}(K)) &= \mathcal{L}(a + \eta K) \\
&= \mathcal{L}(\eta K).
\end{aligned}$$

Näin ollen lemman 2.11 mukaan

$$\mathcal{L}(H_{a,\eta}(K)) = \eta^n\mathcal{L}(K).$$

□

Huomautus 2.13. Erikoistapauksia: Tyhjän joukon tilavuus $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$. 0-ulotteisen avaruuden $X = \{0\}$ tilavuus määritellään asettamalla $\mathcal{L}^0(X) = 1$.

Määritelmä 2.14. n-ulotteisen yksikköpallon $B^n(0,1)$ tilavuudesta käytetään merkintää

$$\mathcal{L}^n(B^n(0,1)) = \beta(n).$$

Esimerkki 2.15. Eri ulotteisten yksikköpallojen tilavuuksia.

(i) $\beta(0) = 1$.

(ii) $\beta(1) = \mathcal{L}^1([-1,1]) = 2$.

(iii) $\beta(2) = \mathcal{L}^2(B^2(0,1)) = \pi$.

Lemma 2.16. *Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakteja konvekseja joukkoja. Nyt*

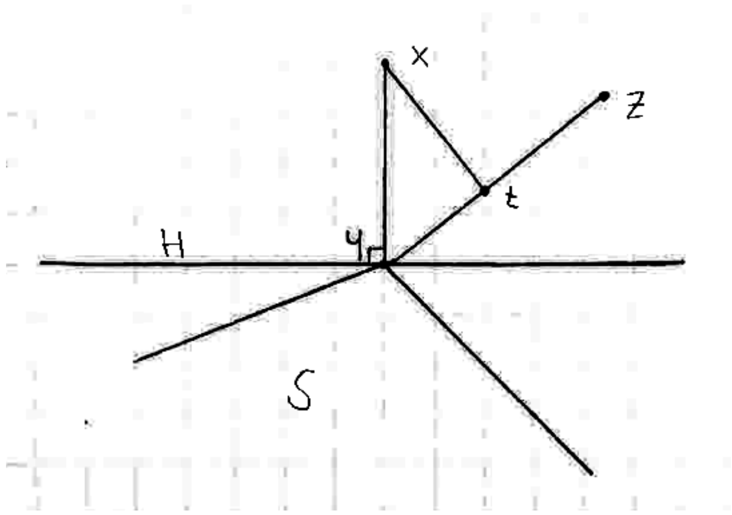
$$\mathcal{L}(A \times B) = \mathcal{L}(A)\mathcal{L}(B).$$

Todistus. Katso viite [6]. $\square$

2.1.1 Tilavuusfunktion jatkuvuus

Lemma 2.17. *Olkoon X erään euklidisen avaruuden affiini aliavaruus, olkoon $S \subset X$ konveksi joukko ja olkoot $x \in X$ ja $y \in S$ sellaisia, että $x \neq y$ ja $d(x,S) = d(x,y)$. Merkitään H:lla sitä hypertasoa, joka sisältää y:n ja on ortogonaalinen vektoria $(y-x)$ kohtaan. Nyt se H:n määräämä puoliavaruus, joka ei sisällä pistettä x, sisältää koko joukon S.*

Todistus. Todistetaan vastaväitteellä: olkoon $z \in S$ piste, joka ei kuulu kyseiseen puoliavaruuteen. Kulma $\angle \vec{yx}, \vec{yz}$ on terävä, joten väliltä $[y,z]$ löytyy sellainen piste t, että $d(x,t) < d(x,y)$. Oletuksen mukaan kuitenkin $d(x,y) = d(x,S)$, joten piste t ei voisi kuulua joukkoon S. Tämä on ristiriita, sillä S on konveksi, jolloin väli $[y,z] \ni t$ kuuluu myös kokonaan joukkoon. Näin ollen joukko S kuuluu kokonaan hypertason H määrittämään puoliavaruuteen. $\square$



Kuva 3: Lemman 2.17 mukainen esimerkkitilanne avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

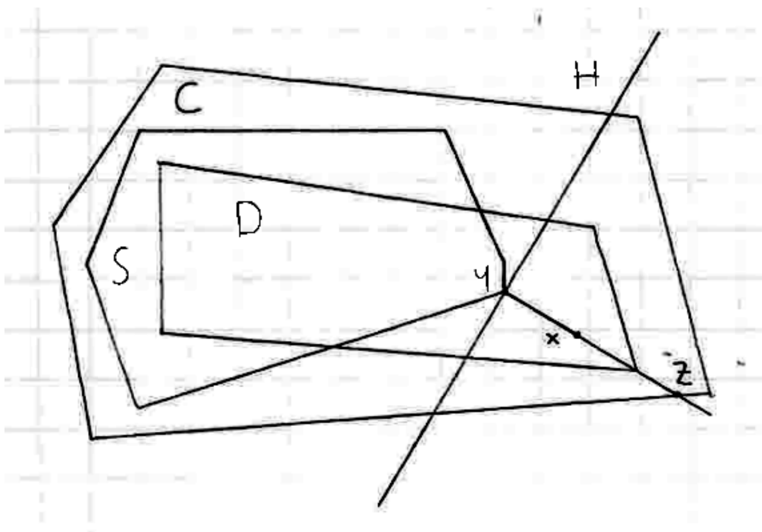
Lemma 2.18. *Olkoot A, C ja D sellaisia kompakteja konvekseja joukkoja, joille $\mathring{C} \neq \emptyset$, $D \subset C \subset A$, $\partial A \cap C = \emptyset$ ja $\partial C \cap D = \emptyset$. Tällöin on olemassa sellainen $\eta > 0$, että jokaiselle konveksille joukolle S, jolle pätee $\delta(C, S) \leq \eta$, pätee myös $D \subset S \subset A$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $S \subset A$. Olkoon $\eta = d(\partial A, C)$. Nyt $\eta > 0$, sillä $\partial A \cap C = \emptyset$ ja joukot ovat kompakteja. Olkoon sitten $x \in S$. Jos $x \in C$, niin oletusten perusteella $x \in A$. Jos taas $x \notin C$, niin $d(x, C) \leq \eta$. Nyt, koska η on joukon A reunan pienin etäisyys joukosta C, niin on oltava $x \in A$, eli $S \subset A$.

Osoitetaan sitten, että $S \supset D$. Olkoon nyt $\eta = d(\partial C, D)$. Oletetaan, että jollekin sellaiselle joukolle S, jolle $\delta(S, C) \leq \eta$, on olemassa piste $x \in D \backslash S$. Valitaan piste $y \in S$ siten, että $d(x, y) = d(x, S)$. Nyt tiedetään lemman 2.17 perusteella, että $S \subset H$, missä H on toinen niistä puoliavaruuksista, jotka määräytyvät sen hypertason mukaan, joka on ortogonaalinen suoran $\langle x, y \rangle$ suhteen pisteessä y (Kuva 2). Koska $x \in \mathring{C}$, voidaan valita piste $z \in \langle x, y \rangle \cap \partial C$ siten, että z ei sijaitse puoliavaruudessa H. Tämä piste toteuttaa ehdon

$$d(z, S) = d(z, y) > d(z, x) \geq \eta$$

luvun η määritelmän mukaan; mutta koska $z \in C$, syntyy ristiriita oletusta $C \subset B(S, \eta)$ vastaan, koska oletuksen mukaan $d(z, S) \leq \eta$. Näin ollen siis pistettä $x \in D \backslash S$ ei löydy, eli $D \subset S$. □



Kuva 4: Lemman 2.18 konstruktio.

Lemma 2.19. *Jokaiselle $\epsilon > 0$ ja $C \in \mathcal{C}^\bullet$ on olemassa sellainen $P \in \mathcal{P}^\bullet$, että $P \subset C \subset B(P, \epsilon)$ (erityisesti $\delta(P, C) \leq \epsilon$).*

Todistus. Koska C on kompakti, se voidaan peittää k pallolla $\bigcup_1^k B(a_i, \epsilon)$, $a_i \in C$. Olkoon P konveksi verho $\mathcal{E}(a_1 \ldots a_k)$. Nyt $P \subset C$ ja $C \subset \bigcup_1^k B(a_i, \epsilon) \subset B(P, \epsilon)$, eli $P \subset C \subset B(P, \epsilon)$. □

Lemma 2.20. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. Jos $a \in A$, niin $A \subset H_{a,\eta}(A)$ kaikille $\eta \geq 1$ ja*

$$\lim_{\eta \to 1} \delta(H_{a,\eta}(A), A) = 0.$$

Todistus. Olkoon $x \in A$. Nyt $a + ax \in A$ ja $a + \eta ax \in H_{a,\eta}(A)$. Koska piste $a + ax \in [a, a + \eta ax]$ aina, kun $\eta \geq 1$, niin $x \in H_{a,\eta}(A)$, eli $A \subset H_{a,\eta}(A)$.

Tarkastellaan sitten Hausdorffin etäisyyttä $\delta(H_{a,\eta}(A), A)$. Koska $A \subset H_{a,\eta}(A)$, niin

$$\begin{aligned}
\delta(H_{a,\eta}(A), A) &= \inf\{\rho \mid H_{a,\eta}(A) \subset B(A, \rho)\} \\
&= \max\{d(A, h) \mid h \in \partial H_{a,\eta}(A)\} \\
&= (\eta - 1) \max\{d(a, x) \mid x \in A\}.
\end{aligned}$$

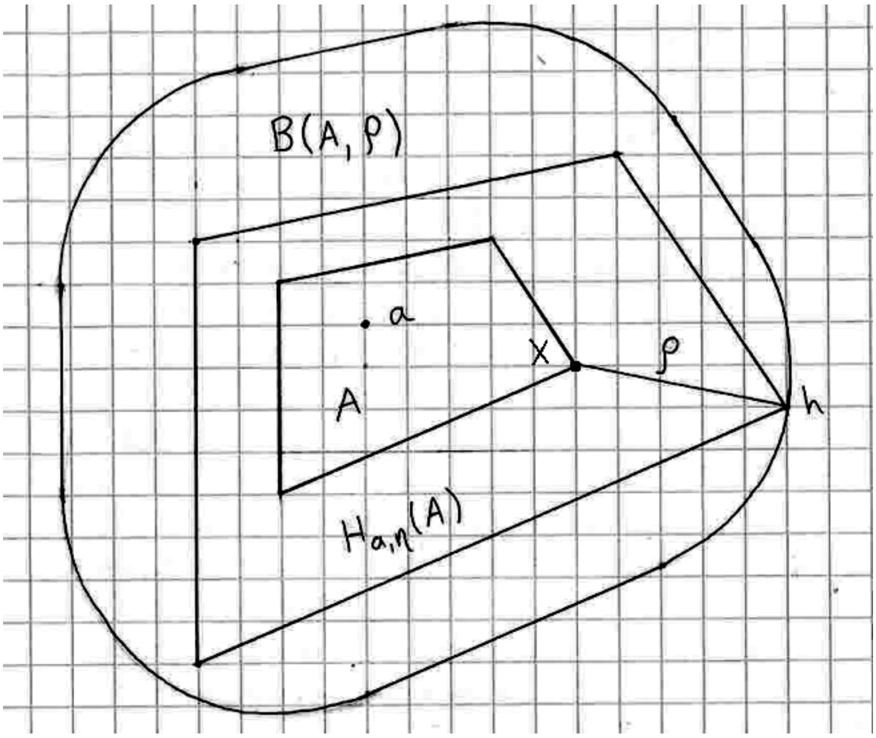
Nyt koska A on kompakti ja siten myös rajoitettu, niin

$$\lim_{\eta \to 1} \delta(H_{a,\eta}(A), A) = \lim_{\eta \to 1} (\eta - 1) \max\{d(a, x) \mid x \in A\}$$

ja koska $(\eta - 1) \to 0$, kun $\eta \to 1$, niin

$$\lim_{\eta \to 1} (\eta - 1) \max\{d(a, x) \mid x \in A\} = 0.$$

□



Kuva 5: Lemman 2.20 konstruktio.

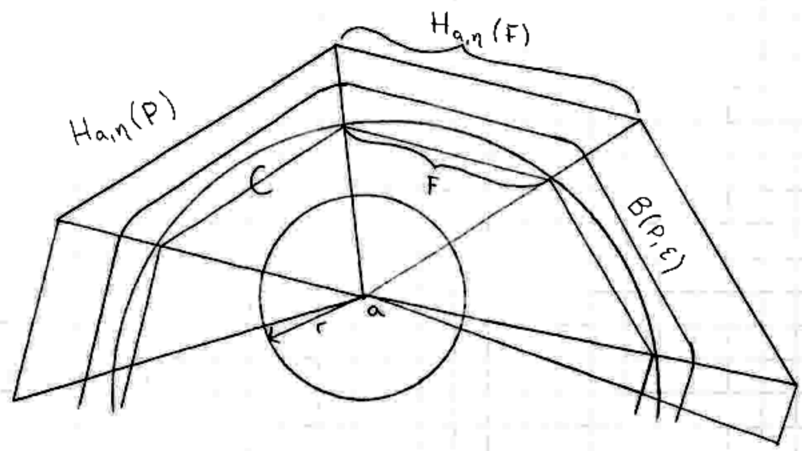
Lemma 2.21. *Jokaiselle* $C \in \mathcal{C}^\bullet$, $a \in \mathring{C}$ *ja* $\eta > 1$ *on olemassa sellainen* $P \in \mathcal{P}^\bullet$, *että* $P \subset C \subset H_{a,\eta}(P)$, $(\partial C) \cap P = \emptyset$ *ja* $C \cap \partial H_{a,\eta}(P) = \emptyset$.

Todistus. Valitaan $r > 0$ siten, että $B(a,r) \subset \mathring{C}$ ja ϵ siten, että $0 < \epsilon < r(\eta - 1)$; nyt voidaan lemman 2.19 nojalla valita sellainen $P \in \mathcal{P}^\bullet$, että $P \subset C \subset B(P,\epsilon)$. Lemman 2.18 mukaan P sisältää pallon $B(a,r)$, jos ϵ on tarpeeksi pieni. Konstruktion nojalla P:n tahkon F ja $H_{a,\eta}(F)$:n välinen etäisyys on suurempi tai yhtä suuri kuin $(\eta - 1)r > \epsilon$; tästä seuraa, että

$$H_{a,\eta}(P) \supset B(P,\epsilon) \supset C.$$

Valitaan sitten lemman 2.19 perusteella polytooppi P siten, että $P \subset C \subset B(P, \frac{\epsilon}{2})$. Olkoon myös $P' = H_{a,\gamma}(P)$. Jos $0 < \gamma < 1$, niin $P' \subset P$ ja $P' \cap \partial P = \emptyset$. Jos vielä γ on tarpeeksi lähellä lukua 1, niin $\delta(P', P) < \frac{\epsilon}{2}$. Näin ollen $P' \subset C \subset B(P', \epsilon)$, ja polytooppi P' toteuttaa kaikki lemman ehdot, ja $\partial C \cap P' = \emptyset$.

Nyt koska $\delta(P, H_{a,\eta}(P)) > \epsilon$ ja $\delta(P, B(P,\epsilon)) = \epsilon$, niin $B(P,\epsilon) \cap \partial H_{a,\eta}(P) = \emptyset$. Näin ollen $C \cap \partial H_{a,\eta}(P) = \emptyset$. $\square$



Kuva 6: Lemman 2.21 konstruktio.

Lause 2.22. *Tilavuusfunktio $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ on jatkuva.*

Todistus. Olkoon $C \subset \mathbb{R}^n$, $\mathring{C} \neq \emptyset$ ja $\epsilon > 0$. Lemman 2.21 nojalla voidaan löytää sellaiset polytoopit $P, P' \subset \mathbb{R}^n$, että $P \subset C \subset P'$, missä $P' = H_{a,\eta}(P)$ ($a \in P$, $\eta > 1$), $\partial C \cap P = \emptyset$ ja $\partial P' \cap C = \emptyset$ sekä

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P') - \mathcal{L}(P) &= \eta^n \mathcal{L}(P) - \mathcal{L}(P) \\ &= \mathcal{L}(P)(\eta^n - 1) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

(lemma 2.12). Lemman 2.18 perusteella nähdään, että tarpeeksi pienelle luvulle $\gamma > 0$ epäyhtälöstä $\delta(C, D) \leq \gamma$ seuraa $P \subset D \subset P'$, missä $|\mathcal{L}(D) - \mathcal{L}(C)| \leq \mathcal{L}(P') - \mathcal{L}(P) \leq \epsilon$. $\square$

2.2 Polytoopin pinta-ala

Olkoot R_i ($i \in \mathbb{N}$) suljettuja puoliavaruuksia ja $P = \bigcap_i R_i$ polytooppi euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Polytoopin P tahkot F_i ovat polytooppeja, joiden tilavuus on $\mathcal{L}^{\dim F_i}(F_i)$. Polytoopin P reunalla ∂P on luonnollinen $(n-1)$-ulotteinen tilavuus $\sum_i \mathcal{L}^{n-1}(F_i)$, jota kutsutaan P:n *alaksi.*

Määritelmä 2.23. n-ulotteisen polytoopin $P = \bigcap_i R_i$ ala $\mathcal{A}(P)$ on positiivinen reaaliluku

$$\mathcal{A}(P) = \sum_i \mathcal{L}^{n-1}(F_i).$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ kutsutaan $\mathcal{A}(P)$:ta P:n piiriksi alan sijaan.

Esimerkki 2.24. Yksikköpallon $B^3(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ ala on $\mathcal{L}^2(S^2(0,1)) = 4\pi$.

Esimerkki 2.25. Yksikköympyrän ala (piiri) $\mathcal{A}(B^2(0,1))$ on $\mathcal{L}^1(S^1(0,1)) = 2\pi$.

Esimerkki 2.26. Janan $[a,b]$ ala on $\mathcal{L}^0(\{a,b\}) = 2$.

3 Steiner-Minkowskin kaava

Olkoon P polytooppi ja λ positiivinen reaaliluku. Tässä kappaleessa tutkitaan polytoopin P λ-ympäristön tilavuutta $\mathcal{L}(B(P,\lambda))$. Voidaan päätellä, että ulottuvuuden ollessa 2 voimme jakaa alueen $B(P,\lambda)$ kolmeen osaan: P itse, suorakulmioihin, joiden korkeus on λ ja pituus P:n sivun pituus, sekä λ-säteisen ympyrän sektoreihin. Toisena mainittujen komponenttien ala on $\lambda\mathcal{A}(P)$. Kolmantena, kun yhdistetään kaikki ympyräsektorit, huomataan, että ne muodostavat yhdessä kokonaisen ympyrän, jonka säde on λ, eli ala on $\pi\lambda^2$. Nyt polytoopin P λ-ympäristölle voidaan määrittää tilavuus

$$\mathcal{L}(B(P,\lambda)) = \mathcal{L}(P) + \mathcal{A}(P)\lambda + \pi\lambda^2.$$

Havaitaan, että kyseessä on toisen asteen polynomi muuttujan λ suhteen. Tapauksessa, jossa $d = 3$, huomataan, että $B(P,\lambda)$ jakautuu luonnollisesti neljään osajoukkoon: P:hen, λ:n korkuisiin jokaiselle tahkolle muodostuviin suoriin suuntaissärmiöihin, särmien ja ympyräsektoreiden karteesisiin tuloihin sekä pallosektoreihin, jotka yhdessä muodostavat λ-säteisen pallon. Nyt joukon $B(P,\lambda)$ tilavuuden lausekkeessa kolmas komponentti on muotoa $a_3\lambda^2$ ja neljäs $a_4\lambda^3$, eli kyseessä on kolmannen asteen polynomi. Tässä kappaleessa ja erityisesti lauseessa 3.9 todistetaan nämä huomiot yleistettynä ulottuvuuteen n.

Seuraavissa esimerkeissä on havainnollistettu muutaman erilaisen joukon ja niiden λ-ympäristöjen tilavuuksia.

Esimerkki 3.1. Olkoon avaruudessa $\mathbb{R}$ jana l, jonka pituus (tilavuus) $\mathcal{L}(l) = a$. Olkoon myös $\lambda > 0$. Nyt suoran ja sen λ-ympäristön yhteispituus on

$$\mathcal{L}(B(l,\lambda)) = 2\lambda + a.$$

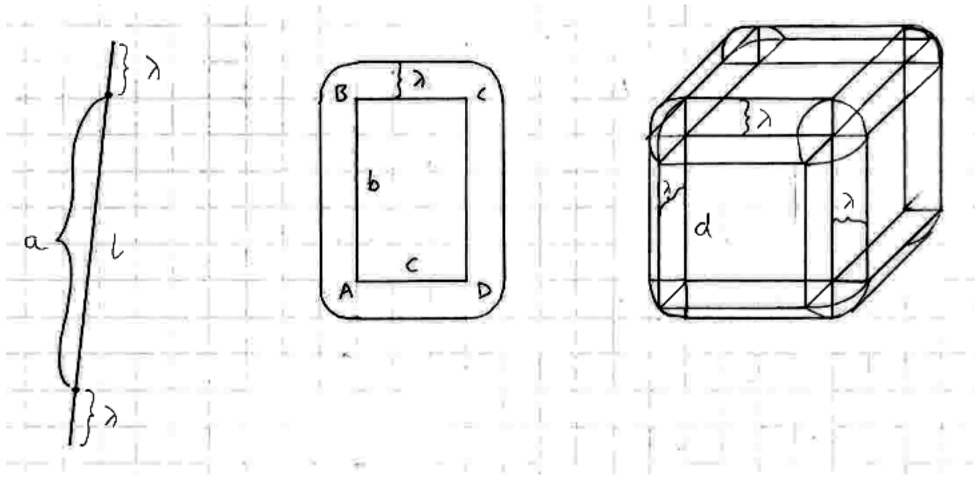
Esimerkki 3.2. Olkoon avaruudessa $\mathbb{R}^2$ suorakulmio $ABCD$, jonka sivujen pituudet ovat $\mathcal{L}(AB) = \mathcal{L}(CD) = b$ ja $\mathcal{L}(BC) = \mathcal{L}(DA) = c$. Olkoon $\lambda > 0$. Nyt suorakulmion ja sen λ-ympäristön yhteispinta-ala on

$$\mathcal{L}(B(ABCD,\lambda)) = \pi\lambda^2 + 2(b+c)\lambda + bc.$$

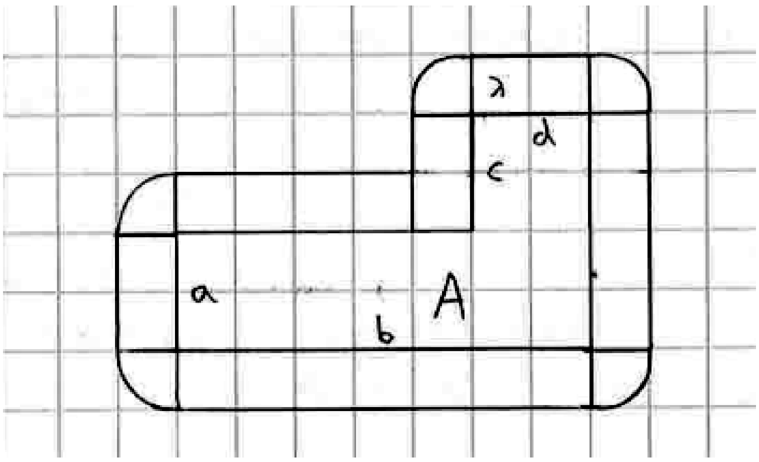
Esimerkki 3.3. Olkoon avaruudessa $\mathbb{R}^3$ kuutio P, jonka sivun pituus on d. Olkoon edelleen $\lambda > 0$. Nyt kuution ja sen ympäristön yhteistilavuus on

$$\mathcal{L}(B(P,\lambda)) = \frac{4}{3}\pi\lambda^3 + 2d\pi\lambda^2 + 6d^2\lambda + d^3.$$

Huomataan, että edellä esitellyissä tapauksissa korkeimman asteen termi on λ-säteisen pallon tilavuus ($\mathcal{L}^n(B^n(0,\lambda)) = \beta(n)\lambda^n$).



Kuva 7: Vasemmalla Esimerkin 3.1 esitys, keskellä Esimerkin 3.2 esitys ja oikealla Esimerkin 3.3 esitys kuvin.



Kuva 8: Esimerkkitapaus joukosta ja sen ympäristöstä, kun joukko ei ole konveksi.

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan Kuvan 8 joukkoa A. Selvästi A ei ole konveksi. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(A) &= ab + cd \\
\mathcal{A}(A) &= a + b - d + c + d + a + c + b = 2(a + b + c) \\
\mathcal{L}(B(A,\lambda)) &= ab + cd + a\lambda + b\lambda + (a + c)\lambda + d\lambda + c\lambda \\
&\quad + (b - d - \lambda)\lambda + \frac{5}{4}\pi\lambda^2 \\
&= ab + cd + 2(a + b + c)\lambda - \lambda^2 + \frac{5}{4}\pi\lambda^2 \\
&= \mathcal{L}(A) + \mathcal{A}(A)\lambda + \pi\lambda^2 + \frac{1}{4}\pi\lambda^2 - \lambda^2.
\end{aligned}$$

Huomataan, että kaava

$$\mathcal{L}(B(A,\lambda)) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{A}(A)\lambda + \pi\lambda^2$$

ei päde tässä tilanteessa. Konveksius vaikuttaa siis olennaiselta kaavan pätemisen kannalta.

Määritelmä 3.5. Joukon $A \subset X$ *normaalikartio* CN_x pisteen $x \in \partial A$ suhteen määritellään seuraavasti:

$$CN_x = \{y \in X \mid \vec{xy} \cdot \vec{xz} \leq 0 \text{ jokaiselle } z \in A\}.$$

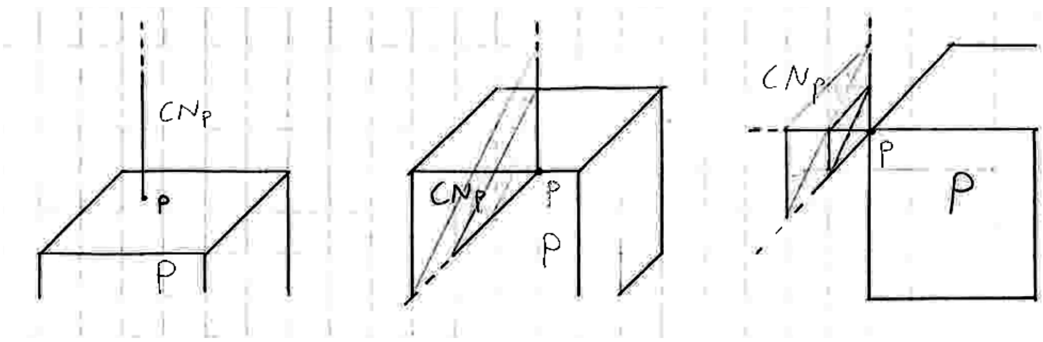
Esimerkki 3.6. Tarkastellaan kuution P normaalikartioita pisteen $p \in \partial P$ suhteen avaruudessa $\mathbb{R}^3$ (Kuva 9).

(i) Jos pisteen p kertaluku $\alpha = 2$, eli piste on kuution tahkon sisuksessa, on pisteen normaalikartio CN_p p:stä lähtevä puolisuora, joka on tahkoa vastaan kohtisuora.

(ii) Jos pisteen p kertaluku $\alpha = 1$, eli piste sijaitsee kuution särmällä (ei kärkipisteessä), niin normaalikartio koostuu pisteestä p lähtevien ja kohtisuorassa tahkoja vastaan olevien puolisuorien väliin jäävästä kaksiulotteisesta alueesta.

(iii) Jos pisteen p kertaluku $\alpha = 0$, eli piste sijaitsee kuution kärkipisteessä, niin CN_p muodostuu kärkipisteeseen tulevien särmien jatkeiden sisään jäävästä kolmiulotteisesta alueesta.

Normaalikartio muodostuu joukon ulkopuolelle ja sen ulottuvuus on sitä suurempi, mitä pienempi pisteen kertaluku α on.



Kuva 9: Esimerkin 3.6 tapaukset. Vasemmalla kohta (i), keskellä kohta (ii) ja oikealla kohta (iii).

Lemma 3.7. *Polytoopin jokainen tahko sisältää pisteen x, jonka kertaluku on 0. Toisin sanoen jokaiseen tahkoon sisältyy kärkipiste.*

Todistus. Jokaisella d-ulotteisen avaruuden polytoopilla P on tahko, jonka ulottuvuus on $d-1$. Todistetaan induktiolla, että jokaisessa edellä mainitun polytoopin tahkossa on piste, jonka kertaluku on 0. Osoitetaan ensin, että väite pätee 1-ulotteisen avaruuden polytoopille. Tällainen polytooppi on suora, jonka tahkot ovat $1-1=0$ -ulotteiset, eli niiden kertaluku on 0. Näin ollen väite pätee tässä tapauksessa.

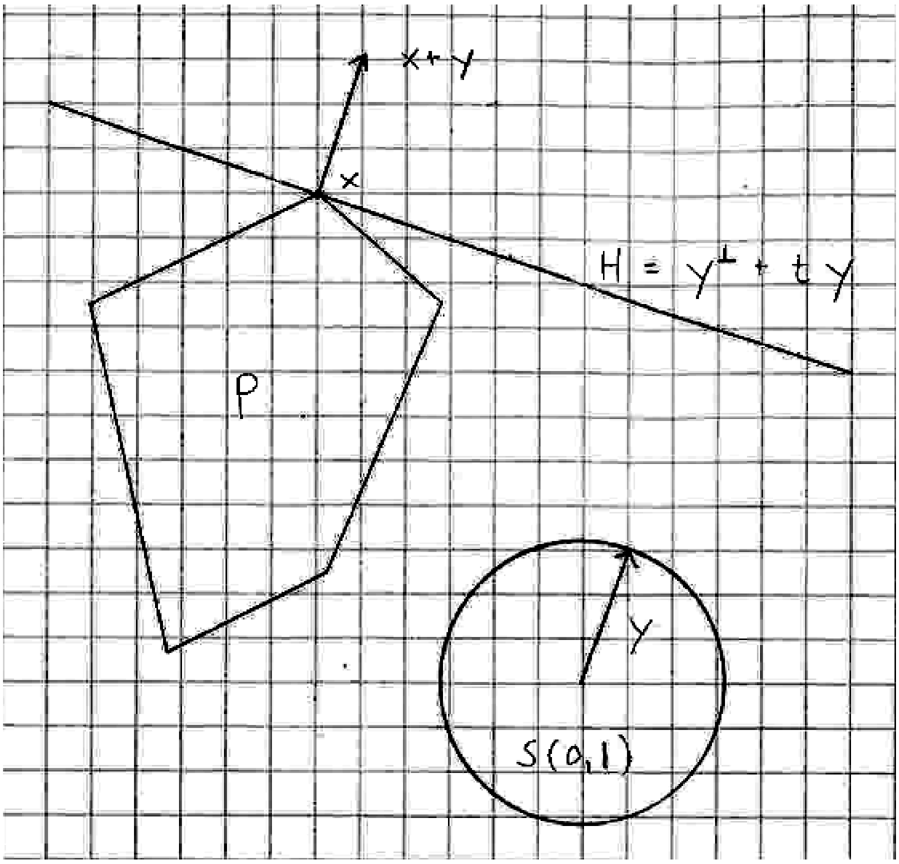
Tehdään induktio-oletus, että $d-1$ -ulotteisen polytoopin tahkosta löytyy piste x, jonka kertaluku on 0 ja osoitetaan, että tämä pätee myös d-ulotteiselle polytoopille. Nyt d-ulotteisella polytoopilla P on tahko, joka on $d-1$ -ulotteinen polytooppi. Induktio-oletuksen mukaan $d-1$ -ulotteisen polytoopin tahkosta löytyy kärkipiste, joten kyseinen kärkipiste sijaitsee myös polytoopin P tahkossa. □

Lemma 3.8. *Olkoon $P \subset \mathbb{R}^n$ polytooppi, pisteen $x \in \partial P$ normaalikartio CN_x ja $S_x = CN_x \cap S(x,1)$. Olkoon myös $\Omega_0 = \{x \in \partial P \mid \omega_x = 0\}$, eli joukko Ω_0 koostuu polytoopin P kärkipisteistä. Nyt*

$$\bigcup_{x\in\Omega_0} S_x = S(x,1).$$

Todistus. Osoitetaan, että kaikille $y \in S(0,1)$ on olemassa sellainen kärkipiste $\{x\} \subset \Omega_0$, että $y \in S_{\{x\}}$. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $H = y^\perp + ty$ hypertaso. Valitaan t siten, että $(y^\perp + ty) \cap P \neq \emptyset$, mutta $(y^\perp + t'y) \cap P = \emptyset$ kaikilla $t' > t$. Nyt siis t on suurin mahdollinen luku, jolla hypertaso H leikkaa polytooppia P. Koska P on kompakti, niin $\mathring{P} \cap H = \emptyset$, joten hypertaso H sivuaa polytooppia P. Olkoon $F = H \cap P$, jolloin F on tahkon määritelmän mukaan eräs P:n tahko. Koska lemman 3.7 mukaan jokainen tahko sisältää kärkipisteen, niin valitaan $\{x\} \in \Omega_0$ siten, että $x \in F$. Nyt y ja P ovat eri puolilla hypertasoa H, mistä seuraa, että $x + y \in S_x$, eli $y \in S_{\{x\}}$.

Näin ollen siis jokaiselle $y \in S(0, 1)$ on olemassa sellainen polytoopin P kärkipiste x, että $y \in S_{\{x\}}$ □



Kuva 10: Kuva lemman 3.8 mukaisesta tilanteessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

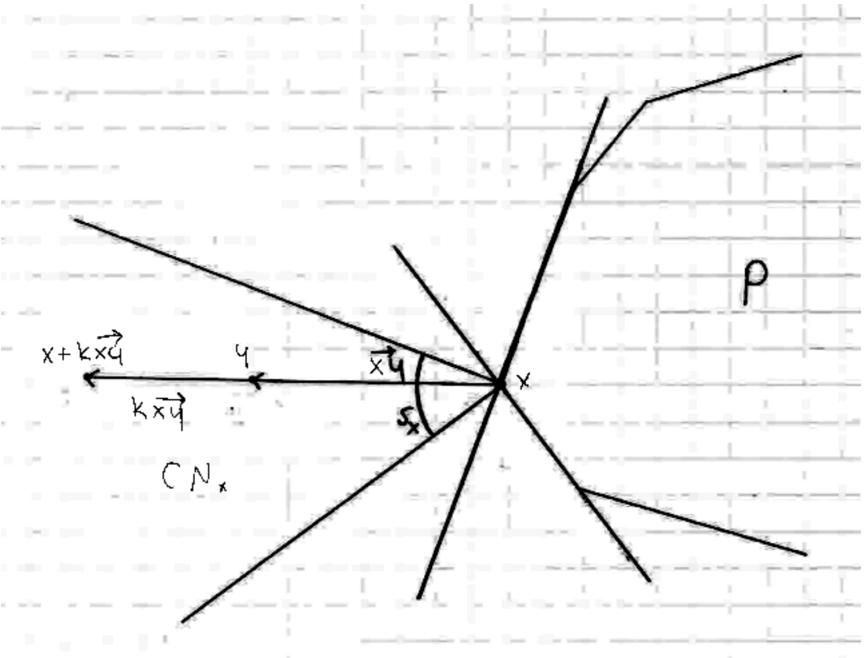
Lause 3.9. *Kaikkiin d-ulotteisiin polytooppeihin P voidaan yhdistää sellaiset vakiot $\mathcal{L}_i(P) \in \mathbb{R}_+^*$ $(i = 0, 1, \ldots, d)$, että jokaiselle $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ympäristön $B(P, \lambda)$ tilavuus saadaan lausekkeesta*

$$\mathcal{L}(B(P, \lambda)) = \sum_{i=0}^{d} \mathcal{L}_i(P)\lambda^i.$$

Erityistapauksina $\mathcal{L}_0(P) = \mathcal{L}(P), \mathcal{L}_1(P) = \mathcal{A}(P), \mathcal{L}_d(P) = \beta(d)$.

Todistus. Olkoon $y \notin P$ ja $x \in P$. Olkoon lisäksi x piste, jolle $d(x, y) = d(y, P)$. Tällainen piste löytyy, sillä P on kompakti, eli se on suljettu joukko. Nyt jokaiselle $k \geq 0$ saadaan $d(x + k\vec{xy}, P) = kd(x, y)$. Olkoon pisteen $x \in \partial P$ normaalikartio CN_x ja $S_x = CN_x \cap S(x, 1)$. Nyt

$$B(P, \lambda) \backslash \mathring{P} = \bigcup_{x \in \partial P} \bigcup_{\xi \in S_x} [x, x + \lambda\xi].$$



Kuva 11: Polytoopin P normaalikartio pisteessä $x \in \partial P$.

Merkitään ω_x:llä pisteen $x \in \partial P$ kertalukua ja määritellään joukko Ω_i seuraavasti:

$$\Omega_i = \{x \in \partial P \mid \omega_x = i\} \qquad (i = 0, 1, \ldots, d - 1).$$

Huomataan, että Ω_i on P:n i-tahkojen sisusten yhdiste. Asetetaan luvuille $i = 0, 1, \ldots, d$

$$B_i(\lambda) = \bigcup_{x \in \Omega_i} \bigcup_{\xi \in S_x} [x, x + \lambda\xi].$$

Koska $\bigcup_{i=0}^{d-1} \Omega_i = \partial P$, niin $B(P, \lambda) \backslash \mathring{P} = \bigcup_{i=0}^{d-1} B_i(\lambda)$. Yhdiste on erillinen, sillä $S_x \cap S_y = \emptyset$, jos $x \neq y$. Nyt voidaan esittää

$$\mathcal{L}(B(P,\lambda)) = \mathcal{L}(P) + \sum_{i=0}^{d-1} \mathcal{L}(B_i(\lambda)).$$

On tärkeää huomata, että x:n käydessä läpi tahkon F sisusta $\mathring{F}$, joukko $S_x - x$ pysyy vakiona. Tämä on seurausta siitä, että kartio CN_x on määritelty niiden hypertasojen kautta, joihin x:n sisältävät tahkot kuuluvat. Voimme näin ollen asettaa $S_F = S_x - x$ kaikille $x \in F$, ja $D_F = \bigcup_{\xi \in S_F} [0, \xi]$.

Annetulle i-tahkolle F on voimassa

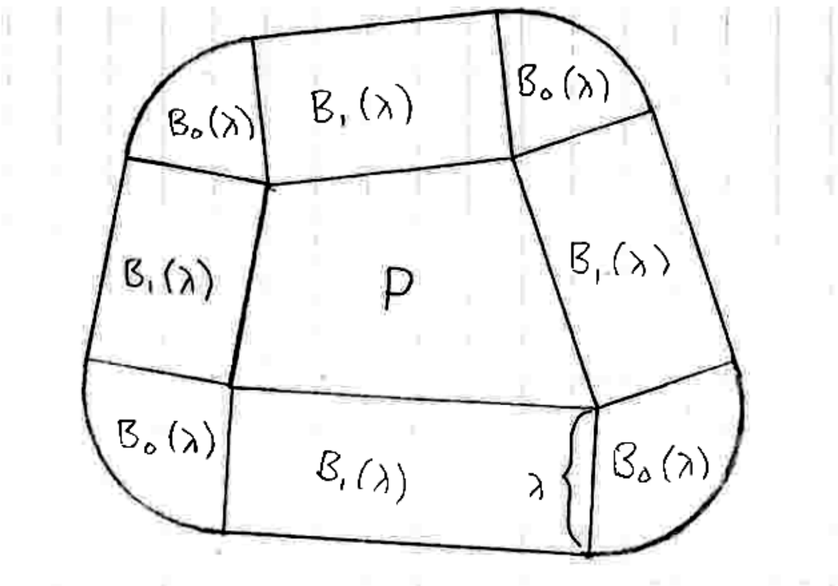
$$\bigcup_{x \in \mathring{F}} \bigcup_{\xi \in S_x} [x, x + \lambda\xi] = \mathring{F} \times ([0,\lambda] S_F).$$

Saamme lisäksi lemmojen 2.16 ja 2.11 nojalla

$$\mathcal{L}(\mathring{F} \times ([0,\lambda]S_F)) = \mathcal{L}^i(\mathring{F}) \mathcal{L}^{d-i}([0,\lambda]S_F) = \mathcal{L}^i(F)\mathcal{L}^{d-i}(D_F)\lambda^{d-i}.$$

Merkitään sitten polytoopin P i-tahkojen joukkoa Φ_i:llä. Ylläolevan perustelun nojalla saamme $\mathcal{L}(B_i(\lambda)) = \mathcal{L}_{d-i}(P)\lambda^{d-i}$, missä

$$\mathcal{L}_{d-i} = \sum_{F \in \Phi_i} \mathcal{L}^i(D_F).$$



Kuva 12: $\mathbb{R}^2$:ssa $\mathcal{L}(\cup B_0(\lambda)) = \pi\lambda^2$.

Erityisesti tapauksessa $i = d - 1$

$$\mathcal{L}_1(P) = \sum_{F \in \Phi_{d-1}} \mathcal{L}^{d-1}(F) = \mathcal{A}(P).$$

Lemman 3.8 nojalla $\bigcup_{\{x\} \in \Phi_0} S_{\{x\}} = S$ eli $\bigcup_{F \in \Phi_0} D_F = B(0,1)$, mistä $\mathcal{L}_d(P) = \mathcal{L}(B(0,1)) = \beta(d)$, sillä F on piste, ja $\mathcal{L}^0(F) = 1$. □

Lause 3.10. *Jos $a \in X$ ja $r > 0$ ovat annettuja, ovat funktiot $\mathcal{L}_i(\cdot)$ rajoitettuja niiden polytooppien joukon yli, jotka sisältyvät palloon $B(a,r)$.*

Todistus. Olkoon $\lambda > 0$. Nyt koska $P \subset B(a,r)$, niin $B(P,\lambda) \subset B(a,\lambda + r)$ ja $\mathcal{L}(B(P,\lambda)) \leq \beta(d)(r+d)^d$. Koska lauseen 3.9 nojalla $\mathcal{L}(B(P,\lambda)) = \sum_i \mathcal{L}_i(P)\lambda^i$ ja $\mathcal{L}(B(P,\lambda)) \leq \mathcal{L}(B(a, r+\lambda)) = \beta(d)(r+\lambda)^d$, niin saadaan

$$\mathcal{L}_i(P)\lambda^i \leq \beta(d)(r+\lambda)^d,$$

josta seuraa, että

$$\mathcal{L}_i(P) \leq \beta(d)\frac{(r+\lambda)^d}{\lambda^i}$$

kaikille i. □

Lause 3.9 voidaan yleistää koskemaan kaikkia konvekseja joukkoja arvioimalla niitä polytooppeina.

Lause 3.11 (Steiner-Minkowskin kaava)**.** *Kaikkiin d-uloitteisiin konvekseihin joukkoihin $C \in \mathcal{C}^\bullet$ voidaan liittää sellaiset skalaarit $\mathcal{L}_i(C)$, $i = 0, 1, \ldots, d$, että kaikille $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ saadaan*

$$\mathcal{L}(B(C,\lambda)) = \sum_{i=0}^{d} \mathcal{L}_i(C)\lambda^i.$$

Funktiot $\mathcal{L}_i : \mathcal{C}^\bullet \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia; lisäksi $\mathcal{L}_0(C) = \mathcal{L}(C)$, $\mathcal{L}_1(C) = \mathcal{A}(C)$ ja $\mathcal{L}_d = \beta(d)$ kaikille joukoille $C \in \mathcal{C}^\bullet$.

Todistus. Kirjoitetaan C muodossa $\lim_{n\to\infty} P_n$, missä $P_n \in \mathcal{P}^\bullet$ ja $P_n \subset P_{n+1}$ kaikille n. Näin voidaan tehdä, sillä lemman 2.21 nojalla voidaan löytää sellaisia polytooppeja P_n, jotka ovat Hausdorffin metriikan suhteen mielivaltaisen lähellä joukkoa C.

Koska jokainen P_n on rajoitettu, on lauseen 3.10 mukaan myös $\mathcal{L}_i(P_n)$ rajoitettu kaikilla i; voidaan siis olettaa, käyttäen tarvittaessa osajonoa, että on olemassa sellainen k_i $(i = 0, 1, \ldots, d)$, että $k_i = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_i(P_n)$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(B(P_n, \lambda)) = \sum_{i=0}^{d} k_i \lambda^i.$$

Lauseen 2.22 perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(B(P_n, \lambda)) = \mathcal{L}(\lim_{n\to\infty} B(P_n, \lambda))$$

ja lemman 1.27 mukaan

$$\lim_{n\to\infty} B(P_n, \lambda) = B(\lim_{n\to\infty} P_n, \lambda) = B(C, \lambda)$$

mistä $\mathcal{L}(B(C, \lambda)) = \sum_{i=0}^{d} k_i \lambda^i$.

Siten $\mathcal{L}(B(C, \lambda))$ on muuttujan λ polynomi, ja koska sen arvot riippuvat ainoastaan joukosta C, eivätkä valitusta jonosta, pätee sama myös yhtäsuuruuteen $k_i = \mathcal{L}_i(C)$. Lisäksi kuvaus $\mathcal{C}^\bullet \times \mathbb{R}_+ \ni (C, \lambda) \mapsto \mathcal{L}(B(C, \lambda)) \in \mathbb{R}$ on jatkuva, joten annetun polynomin $\mathcal{L}(B(C, \lambda))$ kertoimien täytyy myös olla jatkuvia lauseiden 1.31 ja 2.22 mukaan.

Lopuksi, arvot $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_d$ ovat seurausta jatkuvuudesta sekä lauseesta 3.9.

$\square$

Lähdeluettelo

[1] Berger, Marcel: Geometry I-II. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1987).

[2] Jennings, Brian: "Compact Set." Verkkosivulla MathWorld – A Wolfram Web Resource (Eric W. Weisstein). http://mathworld.wolfram.com/CompactSet.html. Sivulla vierailtu 10.1.2017.

[3] Kahanpää, Lauri: Kurssin *Funktionaalianalyysi* luentomoniste, sivut 151-200. Jyväskylän yliopisto. http://users.jyu.fi/~laurikah/FAN/FAN151__200.pdf. Sivulla vierailtu 14.1.2019.

[4] Jones, Frank: Lebesgue Integration on Euclidean Space. Jones and Barlett Publishers International (2001).

[5] Kauranen, Erno: Kurssin *Metriset avaruudet* luentomoniste. Jyväskylän yliopisto. http://users.jyu.fi/~ereekaur/Metriset_avaruudet. Sivulla vierailtu 16.11.2018.

[6] Cohn, Donald: Measure Theory, 2. painos. Springer Science+Business Media (2013).