



## KOMPOZİT EĞRİSEL KİRİŞLERİN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİNDE BURULMA RİJİTLİĞİNİN ETKİSİ

Ümit N. Arıbaş<sup>1</sup>, Murat Yılmaz<sup>1</sup> ve Mehmet H. Omurtag<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

### ABSTRACT

The objective of this study is to investigate the influence of torsional rigidity on the precision of the results for the static and free vibration analysis of circular elastic beams with laminated cross-sections. The element matrix is based on the Timoshenko beam theory. The Poisson's ratios and the Coupling effects are incorporated in the constitutive relations. The curved element involves two nodes and each node has three translations, three rotations, two shear forces, one axial force, two bending moments and a torque. A standard deviation of five successive rotation result of a composite section, obtained by ANSYS, is used in determining the average torsional rigidity of the cross-section. The static and free vibration analyses are performed on circular composite beams using the determined torsional rigidities. The results are compared by SAP2000 and ANSYS with a convergence analysis.

### ÖZET

Bu çalışmada, tabakalı kompozit dairesel kirişlerin statik ve serbest titreşim analizlerinde çarpılma etkisi gözetilen burulma rijitliği ile elde edilen sonuçların hassasiyeti incelenmiştir. Eleman matrisi Timoshenko kiriş teorisine dayanmaktadır. Poisson oranları ve Couple etkiler bünye bağıntılarına dahil edilmiştir. Analizlerde kullanılan eğrisel çubuk sonlu eleman iki düğüm noktasına sahiptir. Her düğüm noktasında üç öteleme, üç yer değiştirme, iki kesme kuvveti, bir eksenel kuvvet, iki eğilme momenti ve bir burulma momenti olmak üzere 12 serbestlik derecesi vardır. Her bir kompozit kesitteki dönme ANSYS ile elde edildikten sonra, beş farklı dönme açısı kullanılarak kesitin ortalama burulma rijitliği standart sapma yöntemi ile belirlenmiştir. Elde edilen burulma rijitlikleri bünye bağıntısında yerleştirilerek kompozit dairesel kirişlerin statik ve serbest titreşim analizleri incelenmiştir. SAP2000 ve ANSYS sonuçlarıyla yakınsama analizi yapılmıştır.

### GİRİŞ

Farklı malzemelerin üstün özelliklerini bir arada kullanarak daha iyi dayanıma ve performansa sahip elemanlar elde etmek, havacılık, tıp, mekanik ve inşaat gibi geniş bir uygulama alanına sahiptir. Kompozit malzemelerin, etkileyici dayanım, rijitlik ve hafiflik özelliklerine bağlı olarak giderek artan şekilde kullanılmaya başlanması mühendislerin bu malzemelerin yapısal davranışları üzerinde artan bir düzeyde çalışmalarına sebebiyet verdi.

[2] klasik birinciden, ikinci dereceden, üçüncü dereceden teoriler kullanarak simetrik ve anti-simetrik cross-ply tabakalı kompozit kirişlerin eğilmesini incelemiş, elde edilen sonuçları karşılaştırmıştır. [3] düzlem eğrisel tabakalı elastik kirişlerin eğilme altında sonlu deformasyonlarını elde etmek için bir analitik metot türetmiştir. [4] düzlem gerilme altındaki tabakalı ortotropik kirişler için bir Timoshenko kiriş teorisi sunmuştur. [5] tabakalı kompozit kirişlerin statik analizini incelemiştir. [6] simetrik ve anti-simetrik tabakalı cross-ply kompozit

kirişlerin statik davranışını incelemiştir. [7] anizotropik tabakalı cross-ply ve angle-ply kompozit kirişlerin doğal frekanslarını ve Euler burkulma yükünü parabolik kayma deformasyon teorisi kullanarak incelemiştir. Anizotropik kirişin bünye bağıntılarını üç boyutlu anizotropik cismin bünye bağıntılarından indirgeyerek elde etmiştir. [8] tabakalı eğrisel uzay çubukların izotermal koşullar altında Timoshenko kiriş teorisine dayalı titreşim davranışını Poisson etkilerini, malzeme anizotropisini, çubuk eğrisini, döneleylemsizliği, kesme ve eksenel deformasyonlarını gözönüne alarak incelemiştir. [9] simetrik tabakalı cross-ply silindirik helisel yayların serbest titreşim analizini birinci-dereceden kayma deformasyon teorisi ile çalışmıştır. [10] kompozit silindirik helisel elastik çubukların zamana bağlı yükler altında dinamik davranışını incelemiştir. [11] simetrik tabakalı cross-ply kirişlerin dinamik analizi üzerinde çalışmıştır. [12] kompozit kirişlerin serbest titreşim hesabı için döneleylemsizlikleri, Couple etkileri ve Poisson etkisini göz önüne alan bir dinamik rijitlik matrisi formüle etmişlerdir. [13] fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel uzay kirişlerin birinci-dereceden kayma teorisine dayanarak serbest titreşim analizi için formülasyon sunmuştur. [15-22] kompozit plak ve kirişlerin davranışı üzerine çalışmışlardır.

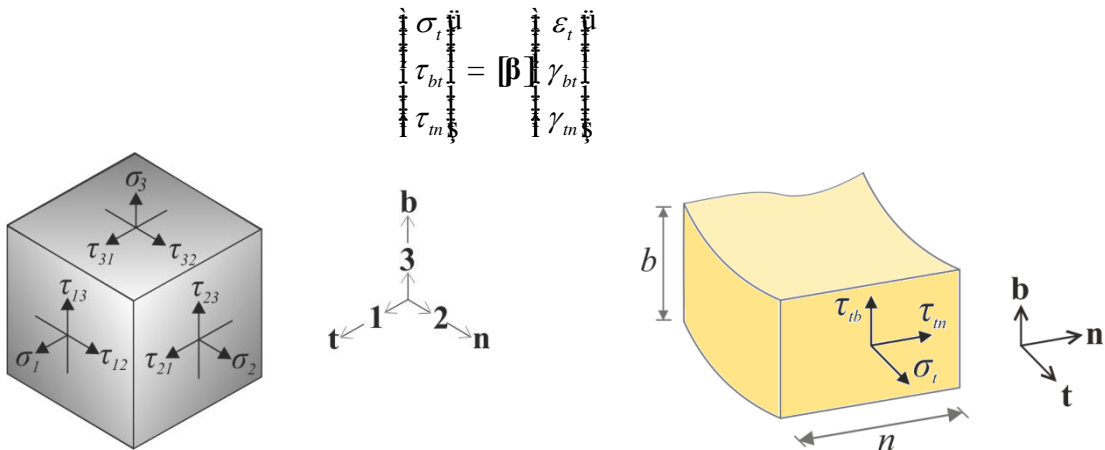
Kompozit eleman sayısal analizinde, gerekli yakınsaklığı sağlamak için bünye bağıntıları ile bunlara doğrudan etki eden rijitlik değerlerinin hesabı çok önemlidir. Literatürde tabakalı kompozit çubuk kuramı kullanılarak geleneksel yöntemle hesaplanan burulma rijitliğinde çarpılmanın hesaba katılması ya da katılmamasına bağlı olarak sonuçlar değişir. Özellikle eğrisel, kompozit çubuklarda burulma rijitliği sonuçlar üstünde çok etkindir. Bu çalışmada, çarpılma etkisini de gözetererek ortalama burulma rijitliği ANSYS SOLID186 elemanlarından elde edilen veriler kullanılarak hesaplanmıştır. Kompozit kesitin ortalama burulma rijitliği değerleri bünye bağıntılarında kullanılarak, eğrisel kompozit kirişlerin statik ve serbest titreşim hesabı yapılmıştır. Kesitin hassas burulma rijitliği hesabı yapıldığı durumda sonuçların SAP2000 ve ANSYS sonuçlarına yakınsaması incelenmiştir.

### ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

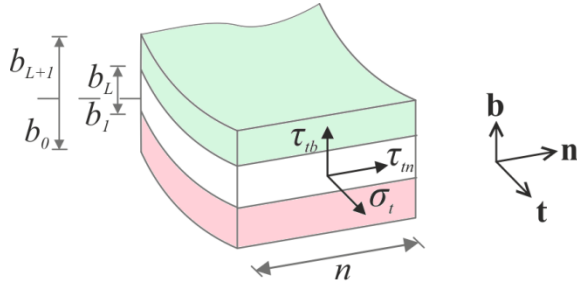
Ortotropik malzemenin hacminde,  $\sigma$  gerilme tensörünü,  $\varepsilon$  şekil değiştirme tensörünü ve  $\mathbf{E}$  elastisite matrisini ifade etmek üzere,  $\sigma = \mathbf{E} : \varepsilon$  gerilme şekil değiştirme bağıntısını verir [15]. Kompozit elemanda arzu edilen en iyi yapısal verimi elde etmek için, malzemelerin açısıl doğrultularını global akslardan farklı doğrultularda tasarlamak gerekebilir. Farklı doğrultulara sahip ortotropik malzemelerin global akslardaki malzeme sabitlerini hesaplamak için dönüşüm hesabı yapılmalıdır. Reuter dönüşümü  $\mathbf{R}$  ile dönüştürülmüş elastisite matrisi [15];

$$\bar{\sigma} = \mathbf{T}^{-1} : \mathbf{E} : \mathbf{T}^T : \bar{\varepsilon} = \bar{\mathbf{E}} : \bar{\varepsilon} \quad ; \quad \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{T}^{-1} : \mathbf{E} : \mathbf{T}^T \quad ; \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{R} : \mathbf{T} : \mathbf{R}^{-1}$$

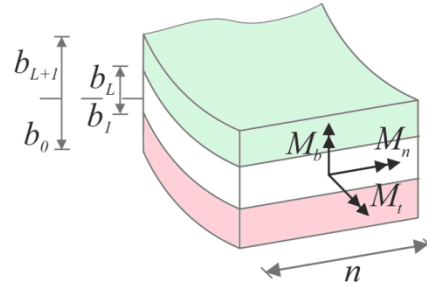
Üç boyutlu cismin gerilme şekil değiştirme bağıntıları gerilmeler üzerinde yapılan kabullerle klasik çubuk kuramına indirgenerek [8] ve açısıl doğrultular için Poisson oranları hesaba katılarak [7] her bir tabakanın gerilme şekil değiştirme bağıntısı elde edilir (Şekil 2);



Şekil 1. Frenet takımında gerilme bileşenleri



Şekil 2. Ortotropik tabakada gerilmeler



Şekil 3. Kompozitin Frenet Koordinant takımında gerilme ve moment bileşenleri

Kesme düzeltme katsayısı 5/6 alınmıştır.  $u_t^*, u_n^*, u_b^*$  kiriş ortamındaki yer değiştirmeler,  $u_t, u_n, u_b$  kiriş eksenini üstündeki yer değiştirmeler ve  $\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b$  kesit dönmeleri olmak üzere, kinematik bağıntılar  $u_t^* = u_t + b \Omega_n - n \Omega_b$ ,  $u_n^* = u_n - b \Omega_t$  ve  $u_b^* = u_b + n \Omega_t$  kullanılarak gerilmelere geçilirse:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \tau_{tb} \\ \tau_m \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u_{t,t} \\ u_{t,n} + u_{n,t} \\ u_{t,b} + u_{b,t} \end{Bmatrix} + b \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega_{t,t} \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} -\Omega_{b,t} \\ \Omega_{t,t} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Burada, alt indislerde virgülden sonraki kısım belirtilen eksene göre türevi ifade etmektedir. Tabakalı kesitin kuvvet ve moment değerleri, tabakalardaki gerilmelerin analitik integrasyonu ile tabaka kalınlığı boyunca toplanılması ile elde edilir (Şekil 3);

$$\begin{aligned} T_t &= \int_{L=1}^N \left( \int_{b_{L-1}}^{b_L} \sigma_t db \right) dn \\ M_t &= \int_{L=1}^N \left( \int_{b_{L-1}}^{b_L} (-b \tau_m) dn \right) + \left( \int_{b_{L-1}}^{b_L} n \tau_{tb} db \right) \\ T_n &= \int_{L=1}^N \left( \int_{b_{L-1}}^{b_L} \tau_m db \right) dn ; \quad M_n = \int_{L=1}^N \left( \int_{b_{L-1}}^{b_L} b \sigma_t db \right) dn \\ T_b &= \int_{L=1}^N \left( \int_{b_{L-1}}^{b_L} \tau_{tb} db \right) dn ; \quad M_b = - \int_{L=1}^N \left( \int_{b_{L-1}}^{b_L} n \sigma_t db \right) dn \end{aligned}$$

burada,  $N$  tabaka adetini,  $n_L$  tabaka genişliğini,  $b_{L-1}$  ve  $b_L$   $L$  tabakasının alt ve üst koordinatlarını ifade etmektedir. Bünye bağıntıları matris formunda yazıldığında:

$$\begin{Bmatrix} u_{t,t} \\ u_{t,n} + u_{n,t} \\ u_{t,b} + u_{b,t} \\ \Omega_{t,t} \\ \Omega_{n,t} \\ \Omega_{b,t} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{C}_{mf} \\ \mathbf{C}_{fm} & \mathbf{C}_f \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_t \\ T_n \\ T_b \\ M_t \\ M_n \\ M_b \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ANSYS sonucu ve standart sapma hesabı ile elde edilen burulma rijitlikleri (1) de yerleştirilir. Ortotropik malzeme için Timoshenko teorisine dayalı homojen uzaysal çubuğun bünye bağıntıları [22], [1], [23],

$$\begin{aligned} -\mathbf{T}_{,s} - \mathbf{q} + \rho A \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} & \mathbf{u}_{,s} + \mathbf{t}' \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{C}_T \mathbf{T} - \mathbf{C}_{TM} \mathbf{M} &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{,s} - \mathbf{t}' \mathbf{T} - \mathbf{m} + \rho I \ddot{\boldsymbol{\Omega}} &= \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_{,s} - \mathbf{C}_{MT} \mathbf{T} - \mathbf{C}_M \mathbf{M} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

burada,  $\mathbf{u}$  ( $u_t, u_n, u_b$ ) ve  $\mathbf{\Omega}$  ( $\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b$ ) yer değiştirme ve kesitin dönme vektörü,  $\ddot{\mathbf{u}}$  ve  $\ddot{\mathbf{\Omega}}$  yer değiştirme ve dönmelerin ivmeleri,  $\mathbf{T}$  ( $T_t, T_n, T_b$ ) ve  $\mathbf{M}$  ( $M_t, M_n, M_b$ ) kuvvet ve moment vektörü,  $\rho$  malzeme yoğunluğu,  $A$  kesit alanı,  $\mathbf{I}$  atalet momentleri,  $\mathbf{C}$  kompians matrisidir. Yayılı dış kuvvet ve momenti ifade eden  $\mathbf{q}$  ve  $\mathbf{m}$ , serbest titreşim analizi için  $\mathbf{q} = \mathbf{m} = \mathbf{0}$  alınır. Alan denklemlerine karşı gelen fonksiyonel [24];

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = - [\mathbf{u}, \mathbf{T}_s] [\mathbf{M}_s, \mathbf{\Omega}] + [\mathbf{t}' \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] + \frac{1}{2} \{ [\mathbf{C}_T \mathbf{T}, \mathbf{T}] + [\mathbf{C}_{TM} \mathbf{M}, \mathbf{T}] + [\mathbf{C}_{MT} \mathbf{T}, \mathbf{M}] + [\mathbf{C}_M \mathbf{M}, \mathbf{M}] \} \\ - \frac{1}{2} \rho A \omega^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}] - \frac{1}{2} \rho \omega^2 [\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}] + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{\Omega} \, dV + [\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}] + \int_{\mathcal{V}} \hat{\mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{M} \, dV$$

### KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Sonlu eleman formülasyonunda doğrusal şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Düğüm noktalarında tanımlı eğrilikler eleman boyunca şekil fonksiyonları ile ifade edilmişlerdir [1]. Kirişin doğal frekansları standart özdeğer problemi çözülmüştür:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Burada,  $[\mathbf{K}]$  ve  $[\mathbf{M}]$  sırasıyla tüm yapının sistem ve kütle matrislerini belirtmektedir.  $\mathbf{u}$  özvektör (mod şekli) ve  $\omega$  açısal doğal frekans değerleridir.

### KOMPOZİT KESİTİN BURULMA RİJİTLİĞİNİN ANSYS İLE ELDE EDİLMESİ

Kompozit kesitlerin ortalama burulma rijitlikleri çarpılma etkisini gözeterak ANSYS SOLID186 elemanlarından elde edilen veriler ile hesaplanmıştır. SOLID186 elemanlara uygulanan burulma momenti altında kesitteki dönmeler ölçülmüştür (Şekil 4). Kesitin kompozit olması nedeniyle aksenal dönme değerleri kesit yüzünde sabit değildir. Bu nedenle 15 farklı noktadaki dönme değeri beş grup halinde standart sapma yöntemiyle aksenal dönme açısı ve burulma rijitliği elde edilmiştir.

$A$  ve  $B$  noktalarının  $O$  referans noktasına göre yer değiştirmeleri:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta}' \mathbf{r}_{OA} \quad , \quad \mathbf{u}_B = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta}' \mathbf{r}_{OB}$$

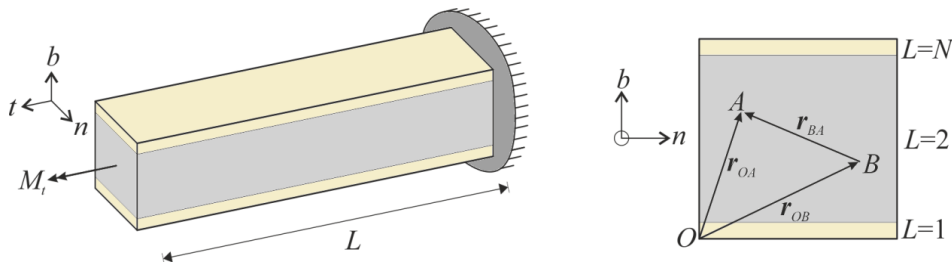
burada,  $\mathbf{u}_A$ ,  $\mathbf{u}_B$  ve  $\mathbf{u}_O$  sırasıyla  $A$ ,  $B$  ve  $O$  noktalarının yer değiştirme vektörlerini tanımlamaktadır.  $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e}_t$  kesitin aksenal dönme açısı ve  $\mathbf{e}_t$  birim vektördür.  $\mathbf{r}_{OA}$  ve  $\mathbf{r}_{OB}$   $A$  ve  $B$  noktalarının  $O$  referans noktasına konum vektörleridir. Kesitin ortalama aksenal dönme açısı;

$$\theta \mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{r}_{BA}' \cdot \mathbf{u}_{AB}}{\|\mathbf{r}_{BA}\|} \quad ; \quad \mathbf{u}_{AB} = \mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B \quad ; \quad \mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_{OA} - \mathbf{r}_{OB} \quad (2)$$

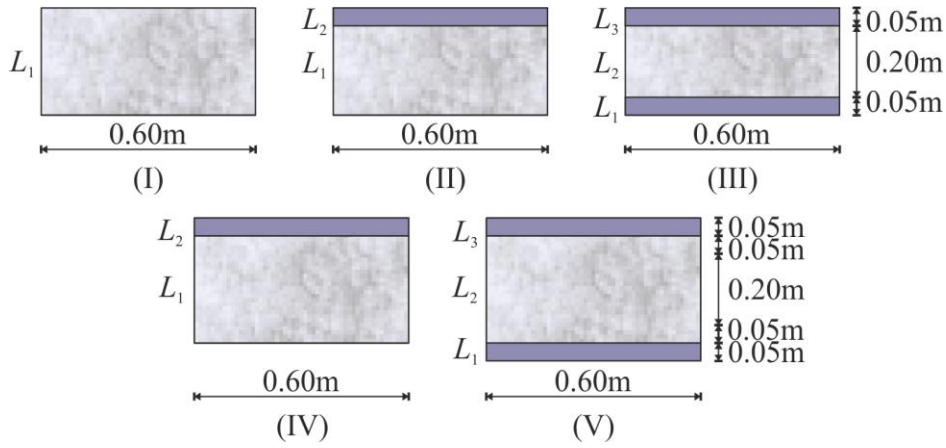
Denklem (2) kullanılarak, burulma rijitliği değeri;

$$GI_t = \frac{M_t L}{\theta}$$

Uygulanan burulma momenti  $M_t$ , kirişin uzunluğu  $L$ 'dir. Bu hesap kesitte seçilen farklı nokta grupları için tekrarlanarak, elde edilen burulma rijitliği değerlerine standart sapma hesabı uygulanıp, kompozit kesitin ortalama burulma rijitliği değeri hesaplanır.



Şekil 4. Kiriş kesitinde standart sapma hesabı için noktaların seçimi (A, B, O).

Şekil 5. Burulma rijitliği hesabında incelenen kesit tipleri ( $L_i$  = tabaka numarası).

### SAYISAL SONUÇLAR

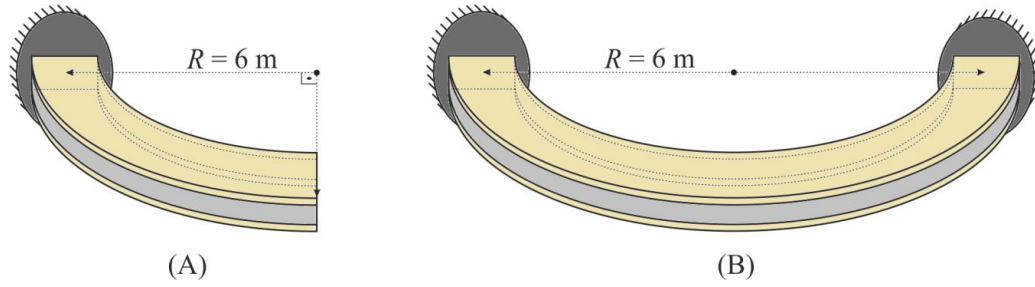
Çubuk kuramında çarpılma gözlemlenmeden hesaplanan geleneksel burulma rijitliği  $\Sigma GI_t$ , eğrisel kompozit kirişlerin analizinde yetersiz kaldığı için kesitte çarpılma etkisini gözetilecek biçimde ANSYS SOLID186 elemanları kullanılarak kesit dönmesi hesaplandı. Sonra ortalama burulma rijitlikleri  $\bar{GI}_t$ , beş farklı kesit dönme değeri için standart sapma yöntemiyle belirlendi ve bu sonuç geleneksel burulma rijitliği  $\Sigma GI_t$  ile karşılaştırıldı. Ortalama burulma rijitliği kullanılarak kompozit kesitte kayma modülü oranları, eğrilik ve kiriş merkez açısına bağlı olarak yakınsama analizleri yapıldı.

#### Burulma Rijitliği Yakınsama Analizi

Bu araştırmada kullanılan izotrop tabakalı simetrik, anti-simetrik kompozit kesitlerin (Şekil 5) burulma rijitlikleri incelenmiştir. Geleneksel burulma rijitliği  $\Sigma GI_t$  ve ortalama burulma rijitliği  $\bar{GI}_t$  karşılaştırılmıştır (Çizelge 1). Kompozit kesit yüksekliği %25 azaldığında  $\Sigma GI_t$  ve  $\bar{GI}_t$  farkı %70.60'a çıkmaktadır. Anti-simetrik ve simetrik kesitlerde geleneksel burulma rijitliği ve ortalama burulma rijitliği arasındaki fark sırasıyla %70.60 ve %64.29'a çıkmaktadır. Zayıf malzemenin yerleştirildiği orta tabakanın yüksekliği arttıkça fark %35.98'e inmektedir. Sabit kesit yüksekliğinde takviye arttıkça izotropik durumdaki fark olan %51.38'in üzerine çıkmaktadır. Kompozit kesiti oluşturan malzemelerin kayma modülleri arasındaki oran 5.38 den 6.46 değerine çıkarak %20 arttığında fark %70.60'a çıkmaktadır.

Çizelge 1. Geleneksel burulma rijitliği  $\Sigma GI_t$  ve ortalama burulma rijitliği  $\bar{GI}_t$  ( $\text{Nm}^2$ ).

Kesit	$L_1 / L_2 / L_3$	$\Sigma GI_t$	$\bar{GI}_t$	% Fark
I	C25	70312502	46448160 ± 39792	51.38
	C35	77343752	51115200 ± 20681	51.31
	C45	84375002	55762220 ± 22502	51.31
II	C25 / ST44	135830053	79618860 ± 186879	70.60
	C35 / ST44	142401995	85638140 ± 191295	66.28
	C45 / ST44	148888021	91461360 ± 194622	62.79
III	ST44 / C25 / ST44	226762298	138026800 ± 16845	64.29
	ST44 / C35 / ST44	230928965	144656400 ± 19365	59.64
	ST44 / C45 / ST44	235095632	150801800 ± 19772	55.90
IV	C25 / ST44	161084191	110943600 ± 285425	45.19
V	ST44 / C25 / ST44	315984884	232384000 ± 27513294	35.98



Şekil 6. Yakınsama analizinde incelenen eğrisel kiriş geometrileri ve mesnet koşulları.

### Kompozit Dairesel Kirişlerin Statik ve Dinamik Problemlerinde Yakınsama Analizi

İzotrop tabakalı kompozit dairesel kirişlerin (Şekil 5) çeyrek ve yarım çember geometrilerinde statik ve dinamik davranışı incelenmiştir (Şekil 6). Eğrisel kirişin yarıçapı 6m'dir. Statik analizde kirişe 9 kN/m yük etkimektedir. Kullanılan ortalama burulma rijitliği Çizelge 1'de mevcuttur. Çeyrek ve yarım çember için sırasıyla 60 ve 80 çubuk eleman kullanılmıştır. Sonuçlar Çizelge 2 ve Çizelge 3'te verilmiştir. Ortalama burulma rijitliği ile hesaplanan en büyük çökmeler ANSYS SOLID186 elemanı sonuçlarıyla uyum içindedir. Tabaka sayısı azaldıkça her iki çözüm arasındaki fark %1.17'ye çıkmaktadır. Kompozitteki malzemelerin kayma modülü değerleri birbirine yaklaştıkça fark %0.92 ye kadar çıkmaktadır. Tabaka sayısı arttıkça  $\mathcal{G}I_t$  ile elde edilen doğal frekanslar ANSYS SOLID186 sonuçlarına yakınsaktır (%0.01~%0.28). Çarpılmanın gözlemlenmediği  $\Sigma GI_t$  ile elde edilen doğal frekanslarda bozulma %6.10 değerine çıkmaktadır. İzotrop malzemede  $\mathcal{G}I_t$  ile elde edilen doğal frekans değerleri ANSYS sonuçları arasındaki fark (~%0.5) malzemenin değişmesinden etkilenmemiştir.

Çizelge 2. Statik problem yakınsama analizi.

$$(\%Fark_1 = (\Sigma GI_t - ANSYS) \cdot 100 / ANSYS); (\%Fark_2 = (\mathcal{G}I_t - ANSYS) \cdot 100 / ANSYS)$$

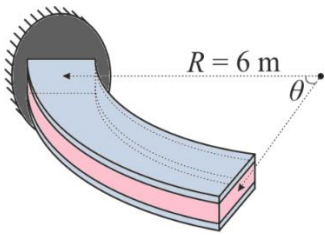
Problem	Kesit	Tabaka		En büyük çökme $u_b$ , (m)			
		$L_1 / L_2 / L_3$	$\Sigma GI_t$	$\mathcal{G}I_t$	ANSYS	%Fark <sub>1</sub>	%Fark <sub>2</sub>
A	I	C25	0.171	0.185	0.183	-6.42	1.17
		C35	0.156	0.168	0.167	-6.51	1.06
		C45	0.143	0.154	0.153	-6.51	1.06
	II	C25 / ST44	0.084	0.094	0.093	-9.75	0.89
		C35 / ST44	0.079	0.087	0.087	-9.29	0.91
		C45 / ST44	0.074	0.082	0.082	-8.89	0.92
	III	ST44 / C25 / ST44	0.036	0.041	0.041	-12.41	0.68
		ST44 / C35 / ST44	0.036	0.041	0.040	-11.47	0.69
		ST44 / C45 / ST44	0.035	0.040	0.040	-10.68	0.71
B	I	C25	0.109	0.112	0.111	-1.30	0.72
		C35	0.099	0.101	0.101	-1.30	0.72
		C45	0.091	0.093	0.092	-1.30	0.72
	II	C25 / ST44	0.053	0.055	0.054	-2.45	0.49
		C35 / ST44	0.050	0.051	0.051	-2.30	0.51
		C45 / ST44	0.047	0.048	0.048	-2.17	0.53
	III	ST44 / C25 / ST44	0.021	0.022	0.022	-3.62	0.27
		ST44 / C35 / ST44	0.021	0.022	0.022	-3.26	0.33
		ST44 / C45 / ST44	0.021	0.022	0.022	-2.95	0.38

Kompozitteki malzemelerin kayma modülleri arasındaki oran arttıkça ANSYS ile hesaplanan doğal frekans değerleri  $\Sigma GI_t$  ile elde edilen değerler arasındaki fark %6.10 olurken,  $\mathcal{G}I_t$  ile elde edilen sonuçlarda fark %0.38'de kalmaktadır.

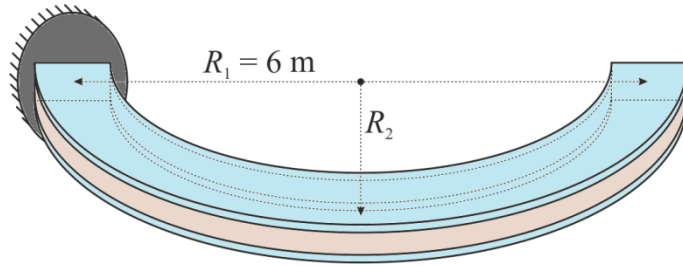
Çizelge 3. Serbest titreşim problemi yakınsama analizi.

$$(\%Fark_1 = (\Sigma GI_t - ANSYS) \cdot 100 / ANSYS); (\%Fark_2 = (\mathcal{G}I_t - ANSYS) \cdot 100 / ANSYS)$$

Problem	Kesit	Tabaka L <sub>1</sub> / L <sub>2</sub> / L <sub>3</sub>	1. Mod doğal frekans (Hz)				
			$\Sigma GI_t$	$\mathcal{G}I_t$	ANSYS	%Fark <sub>1</sub>	%Fark <sub>2</sub>
A	I	C25	2.13	2.05	2.07	2.92	-0.50
		C35	2.23	2.16	2.17	2.92	-0.49
		C45	2.33	2.25	2.26	2.92	-0.49
	II	C25 / ST44	2.59	2.47	2.48	4.59	-0.38
		C35 / ST44	2.67	2.55	2.56	4.36	-0.38
		C45 / ST44	2.75	2.63	2.64	4.16	-0.39
	III	ST44 / C25 / ST44	3.52	3.31	3.31	6.10	-0.26
		ST44 / C35 / ST44	3.53	3.34	3.34	5.58	-0.27
		ST44 / C45 / ST44	3.55	3.36	3.37	5.16	-0.28
B	I	C25	2.52	2.49	2.50	0.80	-0.19
		C35	2.64	2.62	2.62	0.80	-0.19
		C45	2.76	2.73	2.74	0.80	-0.19
	II	C25 / ST44	3.08	3.04	3.04	1.34	-0.11
		C35 / ST44	3.18	3.14	3.14	1.26	-0.12
		C45 / ST44	3.28	3.23	3.24	1.20	-0.13
	III	ST44 / C25 / ST44	4.29	4.21	4.20	1.98	0.03
		ST44 / C35 / ST44	4.30	4.23	4.23	1.79	-0.01
		ST44 / C45 / ST44	4.32	4.25	4.25	1.63	-0.03



Şekil 7. Kompozit eğrisel konsol kiriş ( $\theta = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ ).



Şekil 8. Kompozit eğrisel konsol kiriş. ( $R_2 = 1.5m, 3.0m, 4.5m, 6.0m$ )

### Kompozit Dairesel Kirişte Merkez Açısının Burulma Rijitliğine Etkisi

İzotropik tabakalı kompozit dairesel kirişin (Şekil 7) merkez açısı  $\theta = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$  değerleri için statik ve serbest titreşim analizi yapılmıştır. Merkez açısının  $\mathcal{G}I_t$  ile elde edilen sonuçlarında hassasiyete etkisi incelenmiştir. Statik analizde serbest uca 10 kN'luk tekil yük etkimektedir. Kesit 0.6' 0.3m boyutunda ve üç izotropik tabakadan oluşmaktadır (Şekil 5-III). Tabaka malzemeleri sırasıyla ST44 / C35 / ST44'tür. 80 çubuk eleman kullanılarak analiz yapılmıştır (Çizelge 4). İzotropik tabakalı kompozit dairesel kirişin statik ve serbest titreşim analizlerinde  $\theta$  açısı artarken  $\mathcal{G}I_t$  ile elde edilen sonuçlar kesitte çarpılmanın gözetilmediği SAP2000 çözümlerine yakın kalırken ( $\sim\%0.44$ ), ANSYS sonuçlarına göre biraz farklı

kalmıştır (%0.82~%4.00).  $\mathcal{G}_I$  ile elde edilen sonuçların SAP2000 ve ANSYS çözümlerine yakınsaması sırasıyla %0.27~%0.44 ve %0.82~%4.00 değerlerinde iken  $\Sigma GI_I$  ile elde edilen sonuçların SAP2000 ve ANSYS çözümlerine yakınsaması sırasıyla %1.17~%30.18 ve %0.78~%27.67 değerlerindedir.

Çizelge 4.  $\theta$  açısının statik ve serbest titreşim analizlerinde burulma rijitliğine etkisi.

$$(\%Fark_1 = (\mathcal{G}_I - \text{SAP2000}) \cdot 100 / \text{SAP2000}); (\%Fark_2 = (\mathcal{G}_I - \text{ANSYS}) \cdot 100 / \text{ANSYS})$$

	$\theta$	$\Sigma GI_I$	$\mathcal{G}_I$	SAP2000	ANSYS	%Fark <sub>1</sub>	%Fark <sub>2</sub>
En büyük çökme $u_b$ , (m)	45°	0.00160	0.00168	0.00167	0.00166	0.38	1.43
	90°	0.01137	0.01337	0.01331	0.01304	0.43	2.52
	135°	0.03210	0.04257	0.04239	0.04115	0.43	3.45
	180°	0.06015	0.08649	0.08615	0.08316	0.40	4.00
1. mod frekans (Hz)	45°	13.36	13.15	13.21	13.26	-0.44	-0.82
	90°	3.52	3.32	3.33	3.36	-0.35	-1.13
	135°	1.68	1.51	1.51	1.53	-0.30	-1.50
	180°	1.04	0.89	0.90	0.91	-0.27	-1.81

#### Kompozit Eğrisel Kirişte Eğriselliğin Burulma Rijitliğine Etkisi

İzotropik tabakalı kompozit eğrisel kirişin (Şekil 8)  $R_2 = 1.5\text{m}, 3.0\text{m}, 4.5\text{m}, 6.0\text{m}$  yarıçap değerleri için statik ve serbest titreşim analizi yapılmış ve eğriselliğin  $\mathcal{G}_I$  ile elde edilen sonuçlarda hassasiyete etkisi incelenmiştir. Statik analizde serbest uca 10 kN tekil yük etkimektedir. Kesit  $0.6' \times 0.3\text{m}$  boyutunda ve üç izotropik tabakadan oluşmaktadır (Şekil 5-III). Tabaka malzemeleri sırasıyla ST44 / C35 / ST44'tür. 80 çubuk eleman kullanılarak analiz yapılmıştır (Çizelge 5).

Çizelge 5. Eğriselliğin statik ve serbest titreşim analizlerinde burulma rijitliğine etkisi

$$(\%Fark = (\mathcal{G}_I - \text{SAP2000}) \cdot 100 / \text{SAP2000}).$$

	$R_2$	$\Sigma GI_I$	$\mathcal{G}_I$	SAP2000	%Fark
En büyük çökme $u_b$ , (m)	1.5	0.03023	0.03348	0.03347	0.03
	3.0	0.03716	0.04671	0.04662	0.20
	4.5	0.04712	0.06454	0.06433	0.32
	6.0	0.06015	0.08649	0.08615	0.40
Mod I frekans (Hz)	1.5	1.83	1.75	1.75	-0.07
	3.0	1.51	1.38	1.38	-0.16
	4.5	1.25	1.10	1.10	-0.23
	6.0	1.04	0.89	0.90	-0.27

İzotropik tabakalı kompozit eğrisel kirişin statik ve serbest titreşim analizlerinde  $\mathcal{G}_I$  ile elde edilen sonuçların SAP2000 çözümlerine yakınsaması %0.03~%0.40 değerlerinde iken  $\Sigma GI_I$  ile elde edilen sonuçların SAP2000 çözümlerine yakınsaması %4.32~%30.18 değerlerindedir.  $R_2$  yarıçap değeri arttıkça  $\mathcal{G}_I$  ile elde edilen sonuçlar ve SAP2000 çözümleri arasındaki fark %0.40 değerine çıkmıştır.



## SONUÇLAR

Literatürde tabakalı kompozit çubuk kuramında çarpılma gözlemlenmeden hesaplanan geleneksel burulma rijitliği  $\Sigma GI_t$ , özellikle burulma etkisinin gözlemlendiği eğrisel kompozit kirişlerin analizinde yetersiz kalmaktadır. Bu çalışmada, çarpılma etkisini de gözleterek ortalama burulma rijitliği  $\mathcal{G}I_t$ , ANSYS SOLID186 elemanlarından elde edilen veriler kullanılarak hesaplanmıştır. Buradan elde edilen sonuç mevcut yazılıma veri olarak girilerek eğrisel kompozit kirişlerde statik ve serbest titreşim hesabı yapılmıştır. Bu çalışmada geleneksel yöntemle hesaplanan burulma rijitliği ile sayısal olarak hesaplanan ortalama burulma rijitliği arasındaki fark, kesit tabakaları izotrop olan anti-simetrik ve simetrik düzendeki kompozit kirişler için, sırasıyla %70.60 ve %64.29 dur. Sandviç kesitli çubukta, zayıf malzemenin yerleştirildiği orta tabakanın yüksekliği arttıkça, geleneksel ve ortalama burulma rijitliği arasındaki fark %64.29 dan %35.98 e doğru gerilemektedir. İki tabakalı kompozit kesitte, malzemelerin kayma modülleri arasındaki oran 5.38 den 6.46 değerine çıkarak %20 arttığı durumda  $\Sigma GI_t$  ile  $\mathcal{G}I_t$  arasındaki fark artarak %70.60 a çıkmaktadır.

İzotropik tabakalı dairesel kirişlerin statik ve serbest titreşim analizlerinde mevcut yazılım içinde kullanılan  $\mathcal{G}I_t$  ile elde edilen sonuçlar, ANSYS ve SAP2000 sonuçları ile uyumlu bulundu (%0.01~%1.17). İzotropik tabakalı çeyrek çember kirişin statik ve serbest titreşim analizlerinde ANSYS SOLID186 elemanlar kullanılarak elde edilen sonuçlarda %1'in altında yakınsama sırasıyla 8691 ve 8583 serbestlik derecesi ile elde edilirken, bu çalışmada 360 ve 120 serbestlik derecesi ile elde edilmektedir. İzotropik tabakalı yarım çember kirişin statik ve serbest titreşim analizlerinde ise ANSYS SOLID186 elemanlar kullanılarak elde edilen sonuçlarda %1'in altında yakınsama sırasıyla 17025 ve 10872 serbestlik derecesi ile elde edilirken, bu çalışmada 600 ve 240 serbestlik derecesi ile elde edilmektedir.

İzotropik tabakalı dairesel kirişlerde merkez açının artmasıyla ANSYS çözümleriyle fark %4.00'a çıkarken, SAP2000 çözümleri ile fark etkilenmemektedir (%0.27~%0.44). Kompozit kiriş geometrisi daireselleştikçe SAP2000 çözümlerine fark %0.40'a çıkmaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] M.H. Omurtag, A.Y. Aköz, The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading, *Computers and Structures*. 43 (1992) 325-331. doi.org/10.1016/0045-7949(92)90149-T.
- [2] A.A. Khdeir, J.N. Reddy, An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams, *Composite Structures*. 37 (1997) 195-203. doi.org/10.1016/S0263-8223(97)80012-8.
- [3] C.W. Lin, Finite deformation of 2-d thin circular curved laminated beams, *Hsiuping Journal*. 22 (2010) 19-34.
- [4] G.J. Kennedy, J.S. Hansen, R.R.A. Martins, A Timoshenko beam theory with pressure corrections for layered orthotropic beams, *International Journal of Solids and Structures*. 48 (2011) 2373-2382. doi:10.1016/j.ijsolstr.2011.04.009.
- [5] R.M. Aguiar, F. Moleiro, C.M. Mota Soares, Assessment of mixed and displacement-based models for static analysis of composite beams of different cross-sections, *Composite Structures*, 94 (2012) 601-616. doi:10.1016/j.compstruct.2011.08.028.
- [6] T.P. Vo, HT. Thai, Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories, *Composite Structures*. 94 (2012) 2513-2522. doi:10.1016/j.compstruct.2012.02.010.

- [7] A. Bhimaraddi, K. Chandrashekhara, Some observations on the modelling of laminated composite beams with general lay-ups, *Composite Structures*. 19 (1991) 371-380. doi:10.1016/0010-4361(92)90203-7.
- [8] V. Yıldırım, Governing equations of initially twisted elastic space rods made of laminated composite materials, *International Journal of Engineering Science*. 37 (1999) 1007-1035. doi:10.1016/s0020-7225(98)00106-2.
- [9] V. Yıldırım, E. Sancaktar, Linear free vibration analysis of cross-ply laminated cylindrical helical springs, *International Journal of Mechanical Sciences*. 42 (2000) 1153-1169. doi:10.1016/s0020-7403(99)00041-7.
- [10] B. Temel, F.F. Çalım, N. Tütüncü, Forced vibration of composite cylindrical helical rods, *International Journal of Mechanical Sciences*. 47 (2005) 998-1022. doi:10.1016/j.ijmecsci.2005.04.003.
- [11] M. Aydoğdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences*. 47 (2005) 1740-1755. doi:10.1016/j.ijmecsci.2005.06.010.
- [12] L. Jun, H. Hongxing, S. Rongying, Dynamic finite element method for generally laminated composite beams, *International Journal of Mechanical Sciences*. 50 (2008) 466-480. doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.09.014.
- [13] A. Yousefi, A. Rastgoo, Free vibration of functionally graded spatial curved beams, *Composite Structures*. 93 (2011) 3048-3056. doi:10.1016/j.compstruct.2011.04.024.
- [14] S.W. Tsai, *Mechanics of Composite Materials, Part II Theoretical Aspects*, Rapor no: AFML-TR-66-149, Wright-Patterson Air Force, OHIO, 1966.
- [15] R.M. Jones, *Mechanics of Composite Materials (second edition)*, CRC Press, (1999).
- [16] J.R. Vinson, R.L. Sierakowski, *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials (Second Edition)*, Springer, 2002.
- [17] L.P. Kollár, G.S. Springer, *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press, 2003.
- [18] H. Altenbach, J. Altenbach, W. Kissing, *Mechanics of Composite Structural Elements (1st edition)*, New York: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [19] E.J. Barbero, *Finite Element Analysis of Composite Materials*, CRC Press, 2007.
- [20] V.S. Kale, N.K. Chhapkhane, Analysis of the response of a laminate to imposed forces using classical lamination theory and finite element technique, *International Journal of Engineering Science and Technology*, 5 (2013) 1419-1426.
- [21] V.V. Vasiliev, E.V. Morozov, *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements (Third Edition)*, Elsevier, 2013.
- [22] A.Y. Aköz, M.H. Omurtag, A.N. Doğruoğlu, The mixed finite element formulation for three-dimensional bars, *Int. J. Solids Structures*. 28 (1991) 225-234. doi:10.1016/0020-7683(91)90207-v.
- [23] N. Eratlı, M. Yılmaz, K. Darılmaz, M.H. Omurtag, Dynamic analysis of helicoidal bars with non-circular cross-sections via mixed fem, *Structural Engineering and Mechanics*. 57 (2016) 221-238.
- [24] J.T. Oden, J.N. Reddy, *Variational Method in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, 1976.