



SİĞ KÜRESEL KABUKLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN ANALİZİ

Murat Altekin¹ ve Selami Gökdağ²

^{1,2}Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

Geometrically nonlinear bending of circular shallow spherical shells is investigated numerically. Transverse shear deformation is considered in the study. Material of the shell is assumed homogeneous and isotropic. Clamped or simply supported shells are examined. The thickness of the shell is uniform. The influences of the conical angle, the thickness of the shell, and the parameter of loading zone on the deflection and on the stress resultants are studied. The analysis is made by means of the finite difference method. Newton-Raphson method is employed in the solution of the nonlinear algebraic equations.

ÖZET

Bu çalışmada dairesel sığ küresel kabukların geometrik doğrusal olmayan eğilme analizi sayısal olarak yapılmaktadır. Enine kayma şekil değiştirmesinin göz önüne alındığı çalışmada kabuk malzemesinin homojen ve izotrop olduğu kabul edilmektedir. Ankastre veya basit mesnetli olmak üzere iki mesnetlenme hali araştırılmaktadır. Kabuk kalınlığı sabittir. Dönel simetrik düzgün yayılı dış basınç altında konik açısının, kabuk kalınlığının ve yükleme bölgesi parametresinin çökme ve kesit tesirleri üzerindeki etkileri araştırılmaktadır. Analiz sonlu farklar yöntemiyle yapılmaktadır. Doğrusal olmayan cebirsel denklemlerin çözümünde Newton-Raphson yöntemi kullanılmaktadır.

GİRİŞ

Sığ küresel kabuklar farklı disiplinler tarafından (örneğin, inşaat, havacılık ve uzay, gemi inşaatı mühendisliği gibi) çeşitli amaçlar için yaygın şekilde kullanılan yapısal elemanlardır. Bu alanda son yıllarda yapılan çalışmalar ağırlıklı olarak doğrusal olmayan analiz kapsamında kabukların çeşitli yöntemlerle statik, dinamik ve burkulma analizini içermektedir [1-12].

Bu çalışmada enine kayma şekil değiştirmesi göz önüne alınarak dairesel plan şekline sahip sığ küresel kabukların geometrik doğrusal olmayan eğilme analizi yapılmaktadır. İncelenen problem geometri, yükleme, malzeme ve sınır koşulları bakımından dönel simetrik bir yapıda olduğundan kullanılan denklemler adi (sıradan) diferansiyel denklem takımı şeklindedir. İleri ve geri sonlu fark ifadeleri kullanılarak diferansiyel denklem takımı cebirsel denklem takımına dönüştürülmektedir. Cebirsel denklemlerin çözümü Newton-Raphson yöntemiyle yapılmaktadır. Kabuk çevresi boyunca basit mesnetli (S) veya ankastre (C) olarak modellenmektedir. Kabuk, taban düzleminde b yarıçaplı bir dairesel bölgeye etkiyen düzgün yayılı dış basınç yüküne maruz bırakılmaktadır. Kabuğun eğilme davranışında çeşitli parametrelerin ve sınır koşullarının etkisi incelenmektedir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Literatürde bir kabuğun sığ olarak nitelenebilmesi için basıklık oranının (derinlik parametresinin) $\eta \leq 1/8$ şartını sağlaması gerektiği belirtilmektedir [8]. Dolayısıyla konik açısı üstten sınırlı olmak durumundadır. Enine kayma şekil değiştirmesinin göz önüne alındığı bu çalışmada [1] numaralı kaynaktan alınan aşağıdaki denklemler kullanılmaktadır.

$$(r m_r)' - m_0 - r q_r = 0, \quad (r n_r)' - n_0 = 0 \quad (1)$$

$$(r w' n_r)' + \frac{r}{R} (n_r + n_0) + (r q_r)' + r q = 0 \quad (2)$$

$$m_r = D \left(\phi_r' + \frac{v}{r} \phi_r \right) \quad (3)$$

$$m_0 = D \left(v \phi_r' + \frac{1}{r} \phi_r \right), \quad q_r = C_0 (\phi_r + w') \quad (4)$$

$$\varepsilon_r = u' - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (w')^2 \quad (5)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{u}{r} - \frac{w}{R} \quad (6)$$

$$n_r = \frac{Et}{1-v^2} (\varepsilon_r + v \varepsilon_0) \quad (7)$$

$$n_0 = \frac{Et}{1-v^2} (v \varepsilon_r + \varepsilon_0) \quad (8)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-v^2)}, \quad C_0 = k^2 Gt \quad (9)$$

Sonlu fark yönteminin uygulanmasında her noktada hem deformasyonlar hem de kesit tesirleri tanımlanmaktadır. Bu sayede kesit tesirlerinin doğrudan elde edilmesi ve ayrıca mesnetteki sınır koşullarıyla kabuğun tepe noktasındaki düzenlilik koşullarının da sağlatılması mümkün kılınmaktadır. Sağlatılan sınır koşulları

$$\text{Basit mesnet: } w = u = m_r = 0 \quad (10)$$

$$\text{Ankastre mesnet: } w = u = \phi_r = 0 \quad (11)$$

şeklindedir. Düzenlilik koşulları ise

$$u = \phi_r = q_r = m_r - m_0 = 0 \quad (12)$$

şeklindedir. Eğilme analizinde sabit dış yük altında farklı derinlikteki ve kalınlıktaki kabukların deformasyon bileşenleriyle kesit tesirleri hesaplanmaktadır. Radyal doğrultuda sonlu fark ağı için yeterli nokta sayısı yakınsama çalışmasıyla belirlenmektedir. Çalışmada kullanılan parametreler ve boyutsuz ifadelerden bazıları aşağıdaki gibidir:

$$w = tW, \quad q = EQ, \quad m_r = Et^2 M_r, \quad n_r = Et N_r \quad (13)$$

$$c = \frac{a}{t}, \quad \eta = \frac{H}{2a}, \quad \alpha = \frac{b}{a}, \quad R \cong \frac{a^2}{2H}, \quad \sin(\beta) = 4\eta \quad (14)$$

SAYISAL SONUÇLAR

Çalışmada aksi bildirilmediği sürece $v=0.3$ ve $k^2=5/6$ değerleri kullanılmaktadır ve sonuçlar doğrusal olmayan (NL) analize göre elde edilmektedir.

Bu çalışmada bulunan çökme değerlerinin Sap2000 sonuçlarıyla ve [12] numaralı kaynakta gösterilen değerlerle uyumlu olduğu görülmektedir (Çizelge 1-5). Dikkate alınan parametrelere göre bu çalışmada sonlu fark yönteminde kabuk üzerinde radyal doğrultuda eşit aralıklı 101 nokta yeterli yakınsaklıkla sonuç vermektedir (Çizelge 1-4). 1 numaralı nokta mesnet üzerinde, n numaralı nokta ise kabuğun tepe noktasında bulunmaktadır. Dolayısıyla, radyal koordinatın artım yönünde nokta numarası azalmaktadır.

Doğrusal olmayan (NL) analizde yükleme 10 adımda etkililmektedir (Çizelge 2-4). Radyal doğrultuda kesit tesirlerinin değişimi iki farklı yükleme durumu için incelenmektedir (Şekil 1-4).

Çizelge 1 Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme ($\alpha=1$, $c=100$, $Q=1 \times 10^{-8}$)

	W ($\eta=0.05$)	W ($\eta=0.125$)		
(S)	0.00096499	0.00015052	(n=51)	(L)
	0.00096577	0.00015049	(n=101)	(L)
	0.0009659	0.0001511	[Sap2000]	(L)
(C)	0.00110587	0.00016188	(n=51)	(L)
	0.00110645	0.00016184	(n=101)	(L)
	0.001104	0.0001622	[Sap2000]	(L)

Çizelge 2 Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme ($\alpha=1$, $c=100$, $Q=6 \times 10^{-6}$)

	W ($\eta=0.070$)	W ($\eta=0.080$)	W ($\eta=0.090$)		
(S)	0.3278	0.2241	0.1737	(n=51)	(NL)
	0.3237	0.2231	0.1733	(n=101)	(NL)
	0.3243	0.2236	0.1769	[Sap2000]	(NL)
	0.2921	0.2232	0.1760	(n=51)	(L)
	0.2922	0.2233	0.1760	(n=101)	(L)
	0.2929	0.2239	0.1795	[Sap2000]	(L)
(C)	0.3078	0.2393	0.1893	(n=51)	(NL)
	0.3083	0.2392	0.1891	(n=101)	(NL)
	0.3144	0.2414	0.1931	[Sap2000]	(NL)
	0.3222	0.2440	0.1913	(n=51)	(L)
	0.3224	0.2442	0.1914	(n=101)	(L)
	0.3224	0.2444	0.1954	[Sap2000]	(L)

Çizelge 3 Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme ($\alpha=0.9$, $c=100$, $Q=6 \times 10^{-6}$)

	W ($\eta=0.070$)	W ($\eta=0.080$)	W ($\eta=0.090$)		
(S)	0.3046	0.2387	0.1913	(n=51)	(NL)

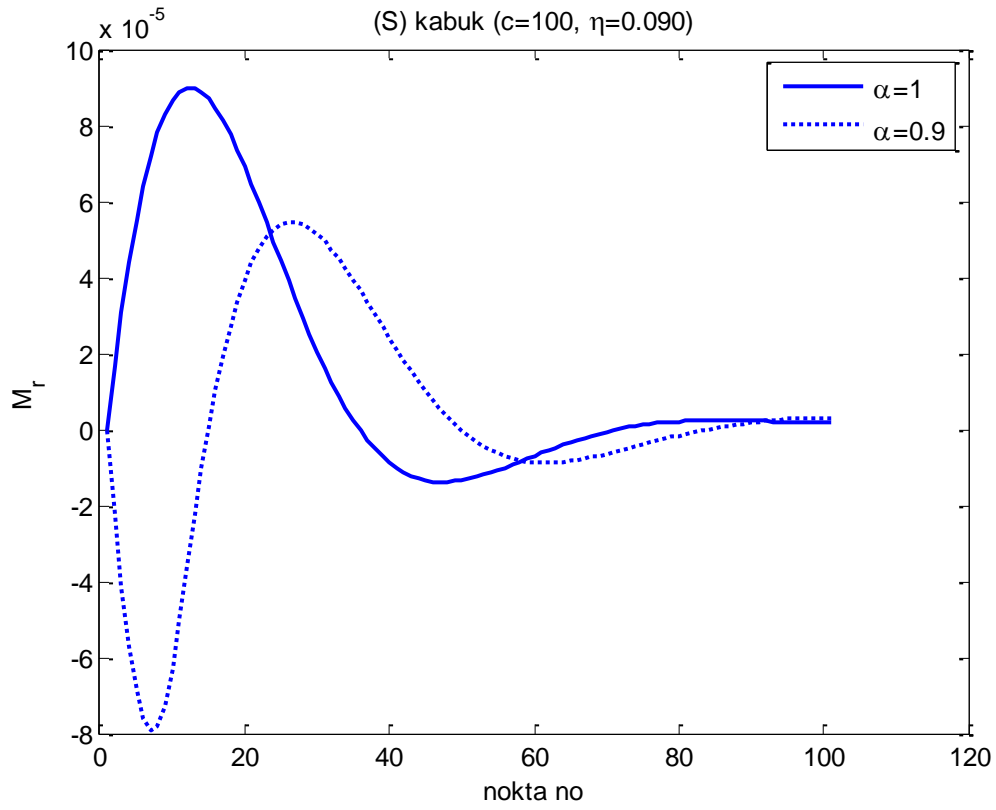
	0.3055	0.2405	0.1929	(n=101)	(NL)
	0.3123	0.2462	0.1990	[Sap2000]	(NL)
	0.3192	0.2446	0.1936	(n=51)	(L)
	0.3214	0.2463	0.1950	(n=101)	(L)
	0.3252	0.2497	0.2009	[Sap2000]	(L)
(C)	0.3063	0.2443	0.1954	(n=51)	(NL)
	0.3078	0.2449	0.1958	(n=101)	(NL)
	0.3148	0.2489	0.2008	[Sap2000]	(NL)
	0.3321	0.2521	0.1983	(n=51)	(L)
	0.3328	0.2527	0.1987	(n=101)	(L)
	0.3344	0.2544	0.2039	[Sap2000]	(L)

Çizelge 4 Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme ($\alpha=1$, $c=20$, $Q=6 \times 10^{-6}$)

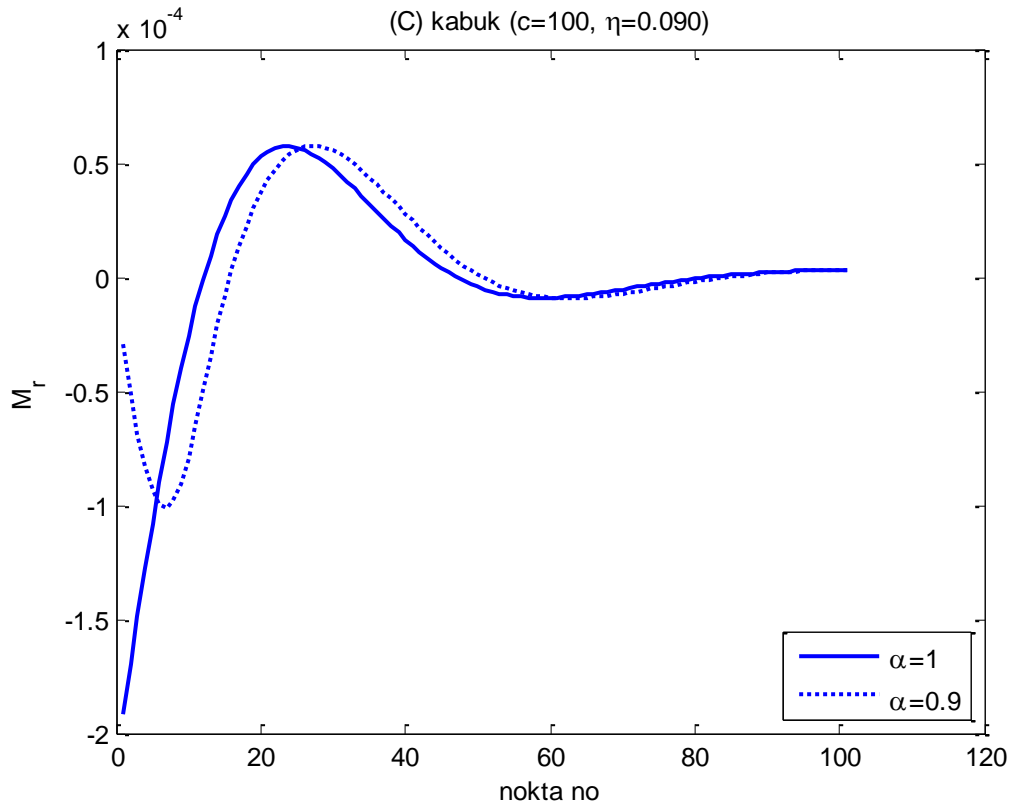
	W ($\eta=0.070$)	W ($\eta=0.080$)	W ($\eta=0.090$)		
(S)	0.0164	0.0121	0.0092	(n=51)	(NL)
	0.0164	0.0121	0.0092	(n=101)	(NL)
	0.0163	0.01194	0.00938	[Sap2000]	(NL)
	0.0163	0.0121	0.0092	(n=51)	(L)
	0.0163	0.0120	0.0092	(n=101)	(L)
	0.0162	0.0119	0.00936	[Sap2000]	(L)
(C)	0.0189	0.0143	0.0111	(n=51)	(NL)
	0.0188	0.0143	0.0111	(n=101)	(NL)
	0.0189	0.0142	0.0113	[Sap2000]	(NL)
	0.0186	0.0142	0.0110	(n=51)	(L)
	0.0186	0.0142	0.0110	(n=101)	(L)
	0.01862	0.0141	0.01124	[Sap2000]	(L)

Çizelge 5 Kabuğun tepe noktasındaki boyutsuz çökme ($\alpha=1$, $\Omega=4c\eta$, $\lambda=Qc^4$, $Q=1 \times 10^{-6}$)

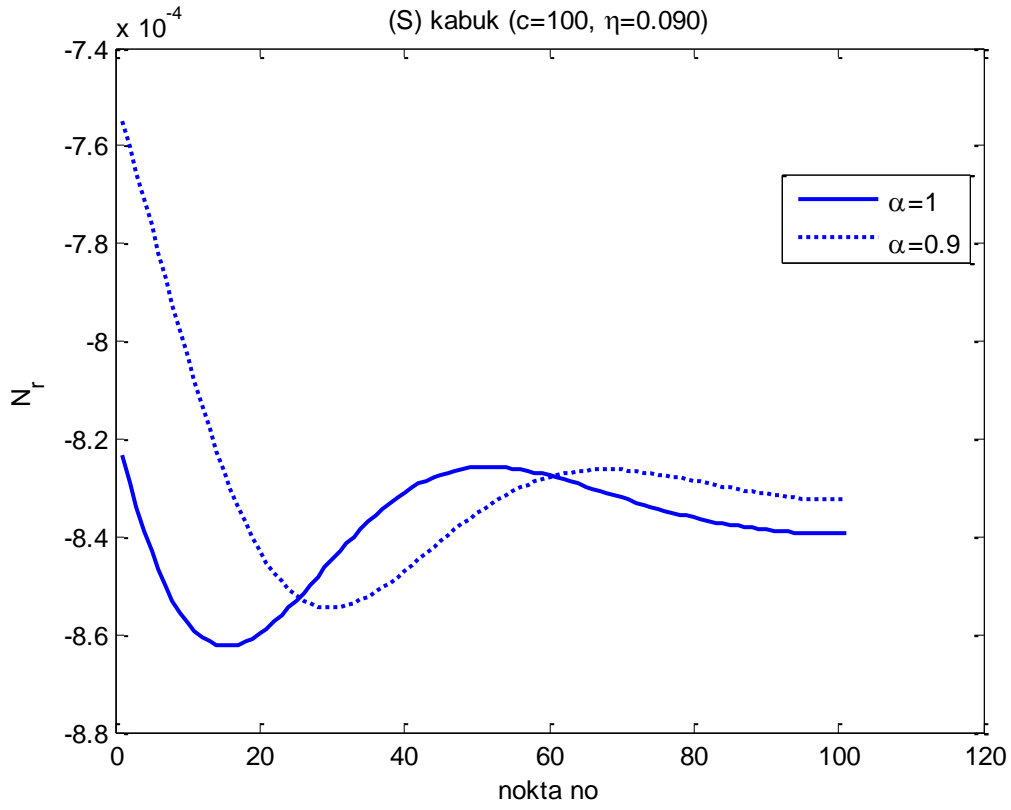
	W ($\lambda=5$, $\Omega=3$) (C)	W ($\lambda=3$, $\Omega=3$) (S)		
	0.4028	0.2407	(n=51)	(NL)
	0.4026	0.2405	(n=101)	(NL)
	0.402	0.240	[12]	(NL)



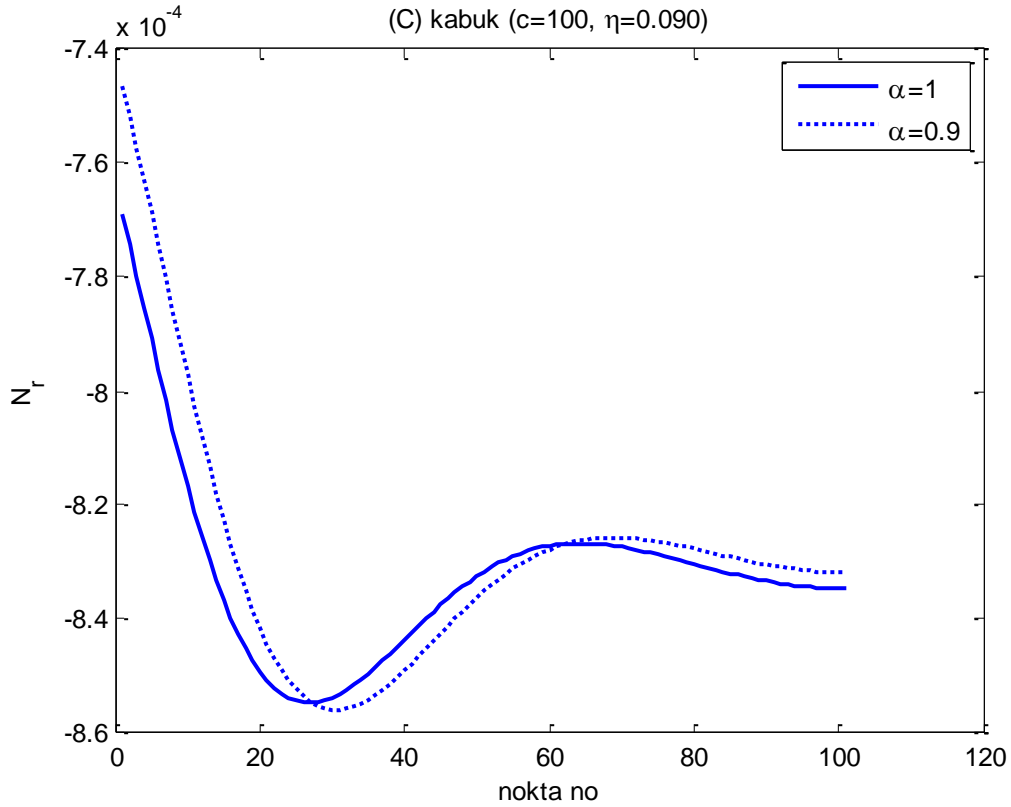
Şekil 1. M_r değerinin (S) kabukta radyal doğrultuda değişimi ($c=100$)



Şekil 2. M_r değerinin (C) kabukta radyal doğrultuda değişimi ($c=100$)



Şekil 3. N_r değerinin (S) kabukta radyal doğrultuda değişimi ($c=100$)



Şekil 4. N_r değerinin (C) kabukta radyal doğrultuda değişimi ($c=100$)

SONUÇLAR

Tamamı yüklü sıg küresel kabukta göz önüne alınan üç farklı derinlik parametresine göre konik açısı arttıkça kabuğun tepe noktasındaki çökme değeri azalmaktadır. Derinlik parametresi arttıkça doğrusal (L) ve doğrusal olmayan (NL) analize göre bulunan çökme değerleri birbirine yaklaşmaktadır. $\eta \geq 0.080$ için ankastre kabuğun tepe noktasının basit mesnetli kabuğa kıyasla daha büyük çökme yaptığı gözlenmektedir (Çizelge 2).

İncelenen kısmi yükleme durumunda ise tamamı yüklü kabuğa kıyasla kabuğun tepe noktasında $\eta \geq 0.080$ için daha büyük çökme meydana geldiği görülmektedir. Doğrusal olmayan analize göre bulunan çökme değerlerinin doğrusal analize göre hesaplananlardan daha küçük olduğu gözlenmektedir. Göz önüne alınan α ve η değerleri için mesnet koşullarının kabuğun tepe noktasındaki çökme üzerindeki etkisinin düşük olduğu tespit edilmektedir (Çizelge 3).

Tamamı yüklü kabukta kabuk kalınlığının artması durumunda doğrusal (L) ve doğrusal olmayan (NL) analize göre bulunan çökme değerleri birbirine çok yakın olmaktadır (Çizelge 4).

Yükleme bölgesindeki değişimden özellikle mesnet çevresindeki M_r ve N_r büyüklükleri etkilenmektedir. Ayrıca (S) kabuk için belirtilen kesit tesirleri yükleme bölgesinin değişimine karşı (C) kabuğa kıyasla daha hassastır (Şekil 1-4).

SİMGE LİSTESİ

a, c, t: kabuk taban yarıçapı, kalınlık parametresi, kabuk kalınlığı

b, n: yükleme bölgesinin yarıçapı, radyal doğrultuda nokta sayısı

r, q: radyal koordinat, düzgün yayılı dış yük

w, u: çökme, yatay radyal yer değiştirme

k^2 : kesme düzeltme katsayısı

$n_r, n_\theta, q_r, m_r, m_\theta$: kesit tesirleri

H, R: kabuğun tepe noktasıyla taban arasındaki düşey mesafe, kabuk yarıçapı

D, E, G: eğilme rijitliği, elastisite modülü, kayma modülü

Q, W: boyutsuz dış yük, boyutsuz çökme

M_r : boyutsuz eğilme momenti m_r

$\epsilon_r, \epsilon_\theta$: şekil değiştirmeler

ϕ_r : dönme

α, β : yükleme bölgesi parametresi, konik açısı

η, ν : derinlik parametresi (basıklık oranı), Poisson oranı

KISALTMA LİSTESİ

L: doğrusal

NL: doğrusal olmayan

KAYNAKLAR

- [1] Q.S. Li, J. Liu, J. Tang, Buckling of shallow spherical shells including the effects of transverse shear deformation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 45 (2003) 1519–1529.
- [2] H. Kunieda, Classical buckling load of spherical domes under uniform pressure. *Journal of Engineering Mechanics*. 118 (8) (1992) 1513-1525.
- [3] M. Altekin, R.F. Yukseler, Axisymmetric large deflection analysis of fully and partially loaded shallow spherical shells. *Structural Engineering and Mechanics*. 47 (4) (2013) 559-573.
- [4] C.D. Coman, A.P. Bassom, Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap, *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 81 (2016) 8-18.
- [5] G.P. Dube, S. Joshi, P.C. Dumir, Nonlinear analysis of thick shallow spherical and conical orthotropic caps using Galerkin's method, *Applied Mathematical Modelling*. 25 (9) (2001) 755-773.
- [6] A. Sofiyev, P. Özyiğit, Homojen olmayan sığ küresel kabuğun termal burkulma analizi, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University* 27 (2) (2012) 397-406.
- [7] Ö. Civalek, Geometrically nonlinear dynamic and static analysis of shallow spherical shell resting on two-parameters elastic foundations, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 113 (2014) 1-9.
- [8] N.C. Huang, Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. *Journal of Applied Mechanics* 31 (3) (1964) 447-457.
- [9] N.G. Duc, V.T.T. Anh, P.H. Cong, Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells on elastic foundations under uniform external pressure and temperature, *European Journal of Mechanics- A/Solids*. 45 (2014) 80-89.
- [10] L.A.D. Filho, A.M. Awruch, Geometrically non-linear static and dynamic analysis of shells and plates using the eight-node hexahedral element with one-point quadrature, *Finite Elements in Analysis and Design*. 40 (11) (2004) 1297-1315.
- [11] K.Y. Sze, X.H. Liu, S.H. Lo, Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells, *Finite Elements in Analysis and Design*. 40 (11) (2004) 1551-1569.
- [12] Y. Nath, P.C. Dumir, R.S. Bhatia, Non-linear static and dynamic analysis of circular plates and shallow spherical shells using the collocation method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 21(3) (1985) 565-578.