



Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Diagramas de Voronoi, ¿qué centro de salud tengo más cerca?

Voronoi Diagram, Which health center is closest to me?

Alumna: Lucía Ortega del Campo

Especialidad: Matemáticas

Directores: Pilar Sabariego y Daniel Sadornil

Curso académico: 2019/2020

Fecha: marzo de 2020

Resumen

En este Trabajo de Fin de Máster se muestra la posibilidad de trabajar las matemáticas en contexto y conseguir que el alumnado se muestre activo, interesado y participativo en la asignatura de Matemáticas. En concreto, se ha trabajado el concepto de Diagrama de Voronoi, que consiste en realizar una partición del plano, delimitando las zonas más cercanas a cada conjunto de puntos. Concretamente, para que el alumnado pudiese conocer una aplicación de este en la vida real, se ha realizado el Diagrama de Voronoi de los Centros de Salud de la ciudad de Santander.

Palabras clave: Matemáticas en contexto, Competencias, Taller de Matemáticas, Diagramas de Voronoi.

Abstract

This Master Thesis shows the possibility of teaching Mathematics in a contextualized way, thus getting students to be more active, interested and participative in the Mathematics subject. Specifically, the Voronoi Diagram has been taught for this research, which consists on the partition of a plane into regions close to each of a given set of objects. Concretely, for the students to know the application of this tool in real life, the Voronoi Diagram of the health centers of Santander has been carried out.

Key words: Mathematics in context, Competencies, Math workshop, Voronoi Diagram.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	1
2. CONTEXTO Y COMPETENCIA	3
2.1 TALLER DE MATEMÁTICAS DE 3º ESO	6
3. DIAGRAMA DE VORONOI	9
4. DIAGRAMA DE VORONOI EN EL AULA	17
4.1 PREPARACIÓN Y DISEÑO	17
4.2 DESARROLLO	22
4.3 RESULTADOS	27
5. CONCLUSIONES	37
6. BIBLIOGRAFÍA	39
7. ANEXOS	42
7.1 ANEXO A	42
7.2 ANEXO B	47
7.3 ANEXO C	48
7.4 ANEXO D	51
7.5 ANEXO E	52
7.6 ANEXO F	53
7.7 ANEXO G	54

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, muchos profesores siguen entrando en el aula para ser meros transmisores de información, y sus clases se basan en explicar conceptos y hacer ejercicios, sin tener en cuenta que de esta forma no se alcanza uno de los objetivos principales que marca el currículo: la adquisición de competencias por parte de los alumnos.

Este Trabajo de Fin de Máster surge como una posibilidad de trabajar las matemáticas desde un contexto real, de manera que los alumnos vean el sentido de lo que están aprendiendo y se sientan los protagonistas de su propia formación, consiguiendo que estén motivados e interesados por el aprendizaje de las matemáticas. Con este fin, se pensó que introducir el concepto de Diagrama de Voronoi podía proporcionar tanto al profesor como al alumnado una forma distinta de vivir las matemáticas dentro del aula. Además, se consideró que tiene una dificultad adecuada para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. Por otro lado, era necesario que los alumnos supiesen hacer mediatrices con cierta destreza y como estas aparecen en los contenidos de 3º ESO, se pensó que se debía llevar a cabo en este curso. Concretamente, la experiencia se realizó en la asignatura de Taller de Matemáticas por ser esta la asignatura ideal para acoger e introducir por primera vez esta forma de trabajar las matemáticas.

Un Diagrama de Voronoi consiste en dividir una superficie en tantas zonas como puntos tengamos, de manera que a cada punto le asignemos la región formada por todo lo que está más cerca de él que de ningún otro. Además de enseñarles esta definición, los alumnos han podido interiorizar este concepto desde la práctica, con la ayuda de diversos ejemplos y algunas de las posibles aplicaciones que tiene. Teniendo en cuenta lo expuesto, uno de los objetivos del presente Trabajo de Fin de Máster es mostrar a los alumnos la utilidad de las matemáticas para resolver una cuestión de la vida real como es determinar qué centro de salud se encuentra más cerca de un sitio fijado.

Tras esta breve introducción, se señalan a continuación los contenidos de los diferentes capítulos que componen esta memoria. En primer lugar, el capítulo 2, en el cual se realiza un repaso del origen de las competencias clave y el porqué de su protagonismo en el currículo, así como el beneficio de trabajar las matemáticas desde un contexto específico. En el capítulo 3, se describe qué es el Diagrama de Voronoi, cómo se construye y algunas de las numerosas aplicaciones que tiene. En el capítulo 4, se explican todos los preparativos de la actividad, cómo fueron transcurriendo las clases y los resultados obtenidos, tanto de las clases, como del cuestionario y de la prueba final que se realizó a los alumnos. En el capítulo 5, se exponen las conclusiones obtenidas de todo el trabajo. En el capítulo 6, se encuentran todos los documentos, libros y páginas web consultadas desde que comenzó esta propuesta. Por último, en el capítulo 7, encontramos los anexos que contienen todo el material elaborado para la realización de este trabajo.

2. CONTEXTO Y COMPETENCIA

En 1970 entra en vigor la Ley General de Educación (LGE) que reguló y estructuró todo el sistema educativo español. Más tarde, en el año 1990, llegó la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) pero en ninguna de ellas se podían encontrar los términos “competencia” o “competencias”, como las aptitudes que debe adquirir un estudiante durante la etapa escolar (MECD, 2004).

Fue la Ley Orgánica de Educación (LOE), promulgada en el 2006, la que introdujo el término de competencias básicas en el currículo de secundaria. Uno de los motivos de este cambio de paradigma fue seguir el consejo de la Unión Europea, que haciendo caso a organizaciones internacionales, propuso introducir las competencias a todos los estados miembros. En aquel momento se establecieron ocho competencias básicas: competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico, competencia digital y tratamiento de la información, competencia social y ciudadana, competencia cultural y artística, competencia para aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal (Castillo & Cabrerizo, 2010; Ferrer, 2011)

En la actualidad, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) es la que establece las competencias básicas denominándolas competencias clave, las cuales dejan de ser ocho y pasan a ser siete. Con respecto a las antes mencionadas, se tiene que la competencia matemática se amplía a competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, la competencia cultural y artística se renombra como competencia en conciencia y expresiones culturales, y la competencia en autonomía e iniciativa personal aparece como sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

En el informe DeSeCo (2005) se define competencia como “la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma

adecuada”. Por otro lado, se puede encontrar en el BOE, Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, que “la competencia supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz”, y además añade que “las competencias se conceptualizan como un «saber hacer» que se aplica a una diversidad de contextos académicos, sociales y profesionales”.

De todas las competencias clave antes mencionadas, la competencia matemática va a ser la protagonista en este trabajo. El informe PISA de la OCDE (2003) define competencia matemática como “la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”. Por otro lado, Alsina (2011) señala que “la competencia matemática implica la utilización de elementos y razonamientos matemáticos para enfrentarte a situaciones de la vida real y el desarrollo de esta consigue que podamos interpretar toda la información que llega hasta nosotros, utilizando de manera espontánea las destrezas y actitudes que hacen que seamos competentes matemáticamente hablando”.

Según Bolívar (2008) las competencias que siempre han estado presentes en el mundo empresarial y en la formación profesional comienzan a ser protagonistas en los currículos de todas las etapas de la educación y añade que “las competencias se convierten en los logros del aprendizaje, en lugar de la adquisición de conocimientos, afectando a los objetivos, al papel del profesor, a las actividades de enseñanza y a la propia evaluación”. Para poder realizar este cambio en el currículo educativo, se necesita que el profesor haga un cambio en la programación del curso, en la metodología y en la forma de evaluar. El cambio en la metodología se podría conseguir dejando atrás las clases magistrales y haciendo clases más prácticas y atractivas para los alumnos, donde estos cobren el protagonismo junto con su aprendizaje y por tanto, el profesor se convierte en guía, orientador y facilitador de dicho aprendizaje (Castillo & Cabrerizo, 2010).

En cuanto al cambio que el profesor debe realizar en la metodología y, debiendo convertirse en guía del aprendizaje, se puede decir que incluir las actividades colaborativas en el aula puede ser beneficioso. Esto se debe a que trabajar en el aula de manera cooperativa y colaborativa, es decir, realizar actividades en grupo, presenta diversas ventajas para el alumnado. Por ventajas entendemos facilitar la adquisición de conocimientos y aumentar el rendimiento académico, mejorar la relación alumno-alumno y alumno-docente, fomentar la aceptación, el respeto, la empatía, la autoestima y la ayuda entre compañeros. Además, esta forma de trabajar acerca al alumnado a la realidad de su futuro profesional, ya que hoy en día el trabajo en equipo es la forma en la que trabajan muchas empresas (AulaPlaneta, 2018).

La introducción de las competencias en el currículo ha tenido como consecuencia que el contexto adquiera un papel protagonista en las actividades de matemáticas que se desarrollan en el aula, ya que para que el alumnado consiga alcanzar de algún modo la competencia matemática, es necesario hablar de matemáticas en contexto y se entiende por contexto “una situación más o menos problemática que puede ser objeto de estudio y que genera preguntas o problemas que necesitan las matemáticas para contestarlas o resolverlas” (Alsina, 2011).

Esto puede llevarse a cabo porque se pueden enseñar las matemáticas con la ayuda de las herramientas que ésta nos proporciona para resolver problemas presentes en diferentes contextos, es decir, realizando actividades cómo podrían ser: estimación de distancias, compras y descuentos, producción, venta y ganancia, etc.; siendo ésta la manera más fácil de que los alumnos vean la utilidad de las matemáticas en la vida real (Barreras, 2010).

Zamora (2013) expone que los estudiantes mediante la experimentación y realización de actividades dinámicas adquieren conocimientos con mayor facilidad, ya que los alumnos aprenden sintiendo, actuando, viendo, escuchando y pensando. Además, los alumnos mediante las actividades antes citadas pueden apreciar mucho mejor la conexión y la relación que hay entre los

contenidos que aparecen en el currículo (aplicación del interés simple y el interés compuesto, geometría del plano, resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas, etc..) y la vida real. El trabajo que realizan en equipo intentando encontrar soluciones a los problemas que les van surgiendo les aporta un aprendizaje eficiente, difícil de olvidar y ven el sentido de su aprendizaje porque lo están relacionando con cosas útiles aumentando de esta manera su interés y participación.

En general, la enseñanza de las matemáticas ha variado muy poco en los últimos años, ya que, en muchos casos, las clases se basan en explicar conceptos y realizar ejercicios más o menos difíciles. Esto hace que los alumnos no muestren interés por su aprendizaje, ya que no saben por qué ni para qué lo tienen que aprender. Por ello, los profesores de matemáticas deben conseguir que los alumnos vean la utilidad de las matemáticas en su vida cotidiana y futuro profesional impartíéndolas de una forma más atractiva, y de esta manera se conseguirá que en estos alumnos desmotivados se despierte el interés por el aprendizaje de las matemáticas (Barreras, 2010).

2.1 TALLER DE MATEMÁTICAS DE 3º ESO

La asignatura de Taller de Matemáticas de 3º ESO se elige libremente ya que es una de las optativas ofertadas en este curso académico. Normalmente, los alumnos eligen esta materia en lugar de cursar la segunda lengua extranjera propuesta por el centro o porque les gustan mucho las matemáticas.

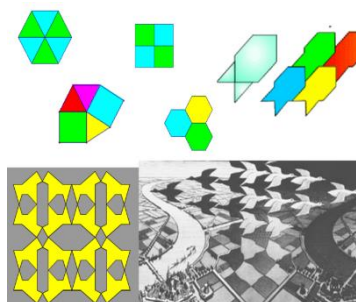
En la Orden ECD/96/2015, de 10 de Agosto, por la que se dictan instrucciones para la implantación de la Educación Secundaria Obligatoria en la comunidad Autónoma de Cantabria, encontramos que “el profesorado desarrollará la programación potenciando una metodología que considere, entre otros aspectos, la actividad del alumno, la creatividad, el trabajo a partir de situaciones-problema, la resolución de problemas cercanos a sus necesidades, las situaciones de aprendizaje que pongan en marcha procesos cognitivos variados, el uso de ma-

teriales diversos, y la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación”. Dentro del apartado que trata la asignatura de Taller de Matemáticas, se puede observar que esta asignatura está considerada como “una materia de refuerzo instrumental”, es decir, está pensada para aquellos alumnos que presentan dificultades en la asignatura troncal de Matemáticas. Sin embargo, se habla de no trabajar los bloques de contenidos por separado, sino de llevar a cabo actividades que los engloben en su mayoría, de esta manera se podrá trabajar todo el currículo durante todo el curso, y utilizar en cada una de las actividades todos los recursos disponibles. De esta manera, no queda en el olvido el bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas”, en él se contemplan contenidos como planificación del proceso de resolución de problemas, planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en diferentes contextos, estrategias y procedimientos puestos en práctica, práctica de los procesos de matematización, utilización de medios tecnológicos,... consiguiendo así que la asignatura contribuya a todas las competencias clave y especialmente a la competencia matemática.

Por tanto, esta es la asignatura en la que el profesor puede aprovechar para comenzar a realizar las actividades y trabajos diferentes que se han mencionado anteriormente. Ayudando de manera indirecta a que los alumnos adquieran habilidades matemáticas que les beneficien en la asignatura troncal.

Se pueden encontrar actividades que profesores de Educación Secundaria Obligatoria ya han introducido en el aula, por ejemplo:

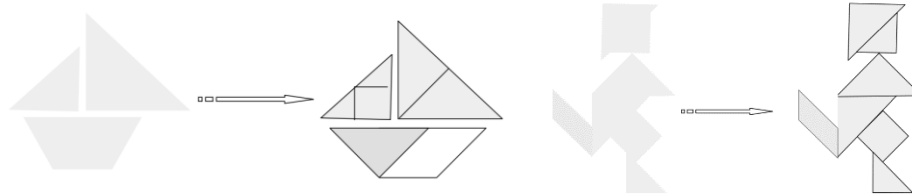
- Creación de mosaicos. Con ayuda de las matemáticas utilizando polígonos regulares, trazado de rectas y movimientos en el plano (Grupo de Innovación Educativa 'Pensamiento Matemático', s.f.).



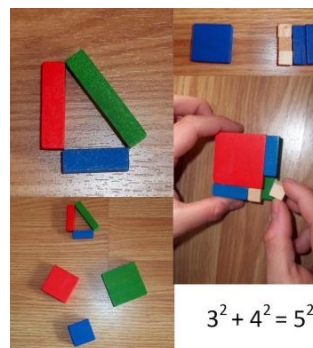
- Construcción de Bandas de Möbius con papel y tijeras. Se juega con ellas para visualizar sus propiedades. (Grupo de Innovación Educativa 'Pensamiento Matemático', s.f.)



- Construcción de figuras utilizando las piezas del Tangram. Hay diferentes niveles de dificultad según el curso en el que se imparta (Alfonso, y otros, 2000)



- El Teorema de Pitágoras con regletas. Utilizando materiales manipulativos se consigue que la demostración del teorema sea más fácil de entender (Martín, s.f.)



3. DIAGRAMA DE VORONOI

Un Diagrama de Voronoi es una construcción geométrica que permite realizar una partición del plano o del espacio. Esta partición consiste en “dividir el espacio en tantas regiones como puntos u objetos tengamos de tal forma que a cada punto le asignemos la región formada por todo lo que está más cerca de él que de ningún otro” (Grima, 2011)

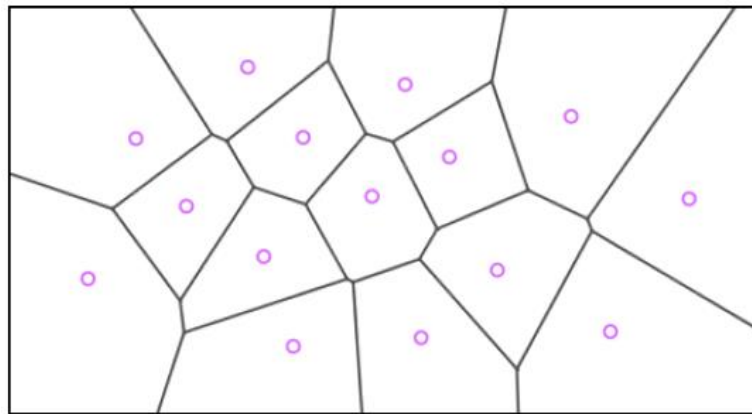


Imagen 1: Diagrama de Voronoi de quince puntos

Recibe este nombre debido a que fue estudiado y definido por el matemático ucraniano Georgy Voronoi en 1907. También es conocido como Polígonos de Thiessen en honor al meteorólogo estadounidense Alfred H. Thiessen, que en 1911 los utilizó para la predicción del tiempo atmosférico (Expósito, 2018).

Un Diagrama de Voronoi se construye según el número de puntos u objetos que tengamos. Si encima de una mesa tenemos solamente un objeto, su región de Voronoi será toda la mesa. Si en la mesa tenemos dos objetos, obtendremos dos regiones de Voronoi, las cuales se pueden obtener trazando la mediatriz entre los dos objetos, ya que es la mediatriz la que separa los puntos de la mesa según éstos estén más cerca de un objeto u otro. Por tanto, el Diagrama de Voronoi, sería la unión de las dos regiones. A continuación, se muestra cómo resultarían los diagramas con dos y tres objetos:

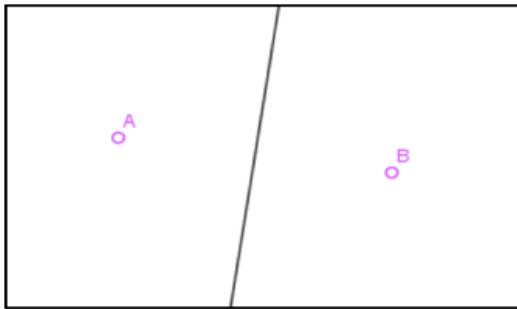


Imagen 2: Diagrama de Voronoi de los objetos A y B

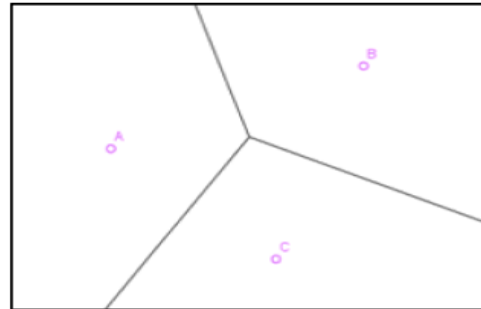


Imagen 3: Diagrama de Voronoi de los objetos A, B y C.

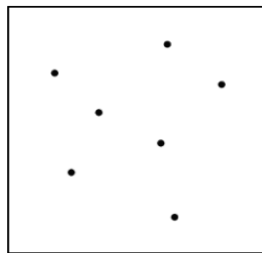
Si continuamos aumentando el número de puntos u objetos y lo abordamos de esta manera puede llegar a ser realmente costoso. Por ello, se debe recurrir a otras herramientas que nos permiten calcularlo. En concreto, existen algoritmos para construir Diagramas de Voronoi. Entre los diversos algoritmos existentes, se pueden destacar algunos como, por ejemplo: algoritmo de “Fuerza Bruta”, algoritmo de “Fortune” y algoritmo “Divide y Vencerás” (Grima, 2011; Rodríguez, 2013; Expósito, 2018)

A grandes rasgos, el primero consiste en realizar todas las mediatrices de los segmentos que unen todos los puntos entre sí y después definir las regiones de Voronoi. El segundo consiste en hacer un barrido de izquierda a derecha o de abajo hacia arriba formando el diagrama a medida que van apareciendo puntos u objetos nuevos que afectan a las regiones ya calculadas previamente. Por último, el tercer algoritmo consiste en dividir el conjunto de puntos, en grupos de dos o tres puntos, después realizar el Diagrama de Voronoi de todos los grupos y posteriormente unir estos diagramas entre sí modificando las regiones comunes.

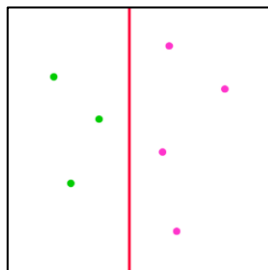
El algoritmo “Divide y Vencerás” ha sido el seleccionado para enseñar a los alumnos en esta experiencia por ser considerado el más fácil de entender y también de realizar. Esta consideración se debe a que parte de este algoritmo consiste en resolver Diagramas de Voronoi de dos y tres puntos, y como hemos visto

anteriormente estos casos son fáciles de realizar, por lo que los alumnos no encontrarán dificultades en ello. Por ser el algoritmo elegido para la experiencia, se va a mostrar detalladamente como se realiza un ejemplo completo.

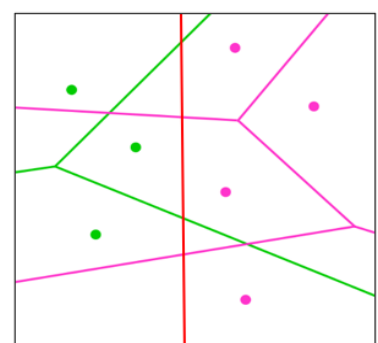
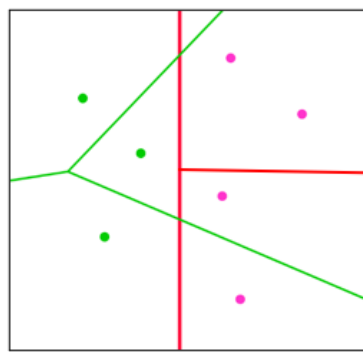
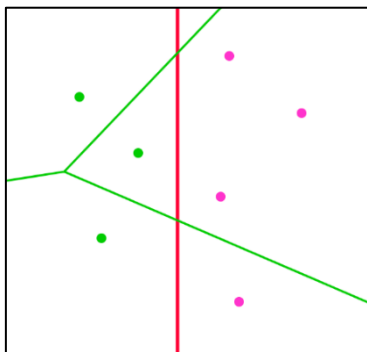
Se tiene la siguiente nube compuesta por siete puntos,



Se comienza dividiendo la nube de puntos en dos partes y se diferenciarán usando distintos colores.



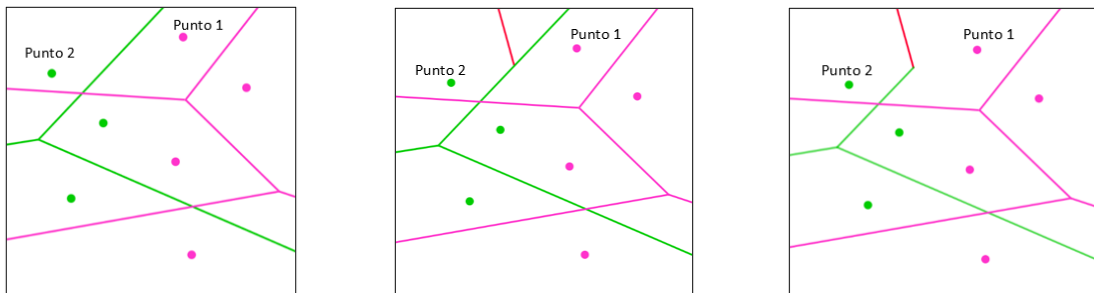
Realizando este reparto, se puede hacer el Diagrama de Voronoi de la parte izquierda, compuesta por tres puntos, por ser uno de los casos fáciles de resolver que se han tratado con anterioridad. En el lado derecho nos encontramos con cuatro puntos, por tanto, se tendrían que dividir en dos grupos de dos puntos, se realiza el diagrama de cada uno por separado y después se unen.



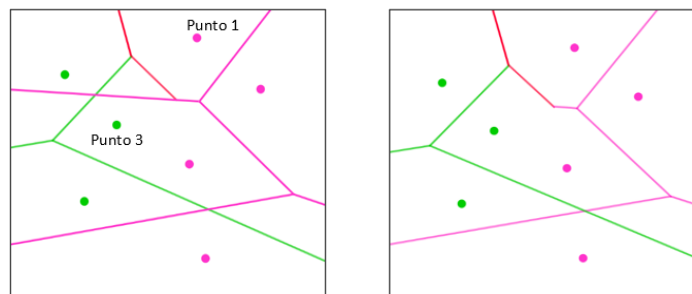
La unión de los diagramas rosas se efectúa de forma análoga a la unión de los Diagramas de Voronoi verde y rosa que se detalla a continuación.

Se elimina la línea de separación roja. Posteriormente, se comienza de arriba hacia abajo seleccionando el primer punto que se encuentre y se calcula la mediatriz con cada uno de los puntos del otro color que estén en su región de Voronoi, sin olvidarse de eliminar las partes de las rectas que no se necesitan.

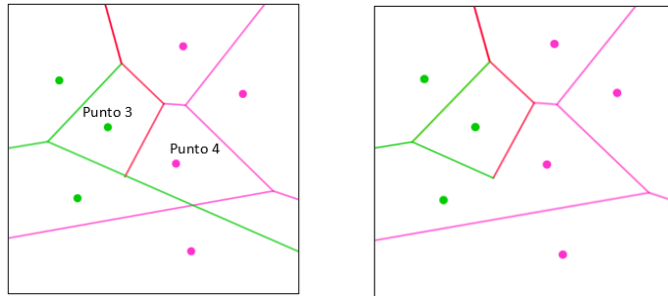
Se puede observar, en las siguientes imágenes, que el Punto 1 tiene al Punto 2 en su región de Voronoi, por lo tanto, se realiza la mediatriz entre ambos y se eliminan las partes de las rectas que no se necesitan. Como el Punto 1 no tiene más puntos en su región de Voronoi y el Punto 2 está solo en su región de Voronoi, seguimos con el punto 3.



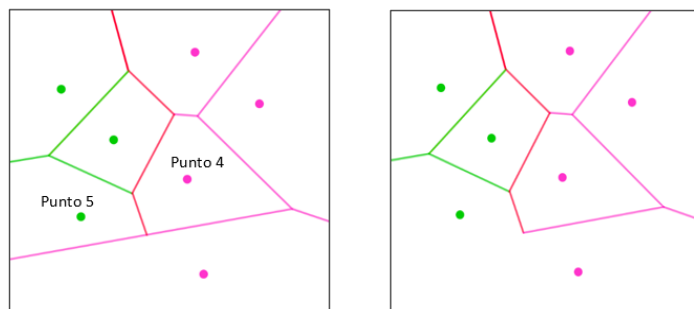
Se procede de la misma manera. Tenemos que el Punto 1 está en la región del Punto 3. Por tanto, hallamos la mediatriz de ambos puntos y eliminamos las partes del diagrama que dejan de tener sentido, tal y como se hizo en el caso anterior.



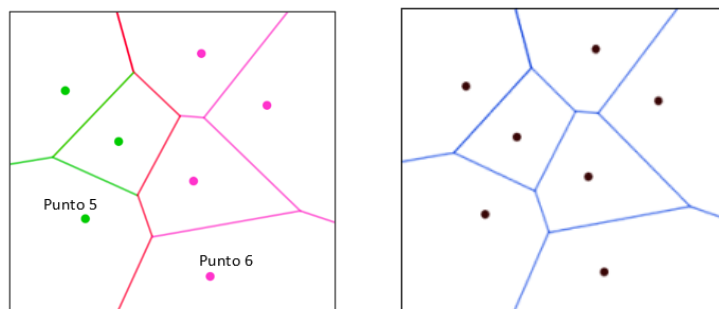
El Punto 4 también está en la región de Voronoi del Punto 3, así que procedemos del mismo modo. El Punto 3 no tiene más puntos del otro color en su región por lo que pasamos al siguiente punto: el Punto 4.



El Punto 5 está en la región de Voronoi del Punto 4. Realizamos la mediatriz correspondiente, eliminamos las partes del diagrama anterior que dejan de ser útiles y pasamos al siguiente punto porque no hay más puntos verdes en la región de Voronoi del Punto 4.

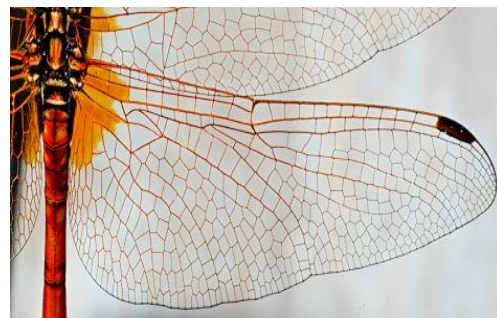
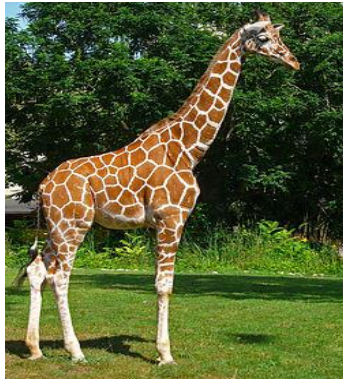


Para terminar, el Punto 6 está en la región de Voronoi del Punto 5. Por lo que procedemos del mismo modo y terminamos de unir los diagramas verde y rosa, formando el diagrama de Voronoi de los siete puntos.



APLICACIONES DEL DIAGRAMA DE VORONOI

Este concepto matemático se puede encontrar en multitud de lugares o situaciones. En la naturaleza, se pueden encontrar los ejemplos más visuales como pueden ser: la piel de las jirafas, un terreno seco, las hojas de determinadas plantas o las alas de las libélulas. La razón por la que se producen estas formas es, por ejemplo, en la piel de la jirafa se tiene que el pelo más grueso corresponde con el centro de cada mancha y en la tierra seca, las grietas se forman cuando la tierra se parte por las zonas más secas y, por tanto, el centro de cada fragmento son las zonas más húmedas.



Siguiendo en la naturaleza, pero a nivel microscópico, tenemos las células epiteliales, responsables de formar la capa externa de la piel, recubrir los vasos sanguíneos y los órganos de todos los animales, las cuales han dejado de representarse como prismas, ya que Luis M. Escudero y su equipo de la Universidad de Sevilla, ha identificado, gracias al uso de modelos computacionales que utili-

zan diagramas de Voronoi, que estas células forman una nueva forma geométrica, a la que han denominado escutoide. Un escutoide se representa como se muestra en la siguiente imagen:

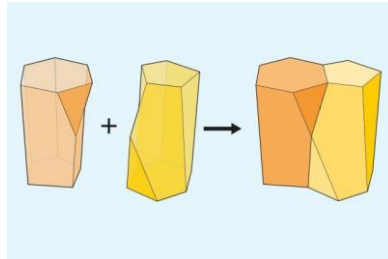


Imagen 4: Representación de un escutoide

El descubrimiento llevado a cabo por Luis M. Escudero y sus colaboradores ha revolucionado el diagnóstico automatizado de ciertas formaciones tumorales. Mediante el proceso computacional antes citado, que consiste en realizar diagramas de Voronoi de puntos generados al azar repetidas veces e ir apilando los resultados, han construido un tejido epitelial y muscular ideal. Esto les sirve para comparar el tejido real con el tejido creado, de manera que, si se parecen, el tejido real está sano y, por el contrario, si no se parecen, puede indicar el comienzo de un proceso tumoral (Expósito, 2018; Buceta, Escudero, Grima, & Márquez, 2018).

Yendo hacia otras situaciones reales y prácticas nos encontramos con numerosos ejemplos. Se puede saber, utilizando Diagramas de Voronoi, cuál es la farmacia más cercana dependiendo de dónde se esté en una ciudad, cuál es el establecimiento de comida rápida más próximo, averiguar cuál es el aeropuerto más cercano cuando un avión tiene problemas, el dominio del campo que tiene cada equipo durante un partido de fútbol, ...

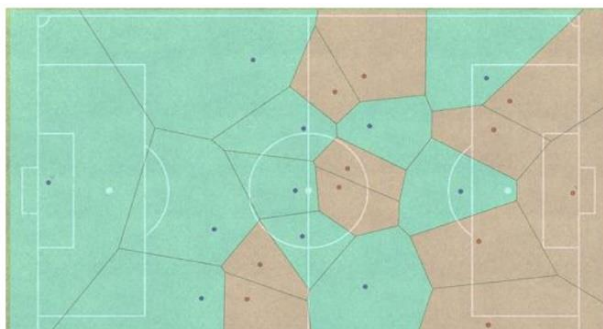


Imagen 5: Diagrama de Voronoi de dos equipos en un campo de fútbol (Grima, 2011)



Imagen 6: Diagrama de Voronoi de los Burger King de la ciudad de Madrid.

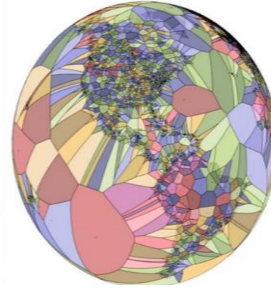


Imagen 7: Diagrama de Voronoi de los aeropuertos del mundo (Davies, 2015)

El uso de Diagramas de Voronoi se puede hallar también en robótica para diseñar el camino a seguir por un robot y evitar que este colisione, en los servicios urbanos para ubicar servicios deseados (parada de autobús) o no deseados (vertederos), en la colocación de sistemas de seguridad (cámaras, sensores, ...) siendo uno de los objetivos asegurar el mayor espacio con el menor número posible de dispositivos, en el trayecto seguido por los japoneses en el ataque a Pearl Harbor, en el estudio de la estructura de los huesos generando modelos que representan dichas estructuras, en aplicaciones en climatología para determinar la lluvia media por zonas, etc. (Expósito, 2018).

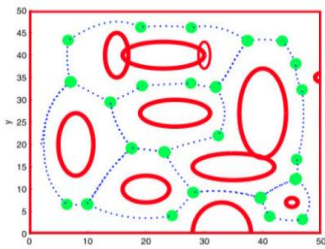


Imagen 8: Uso en robótica

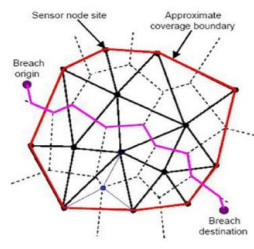


Imagen 9: Uso sistemas de seguridad



Imagen 10: Trayectoria de los japoneses en Pearl Harbor

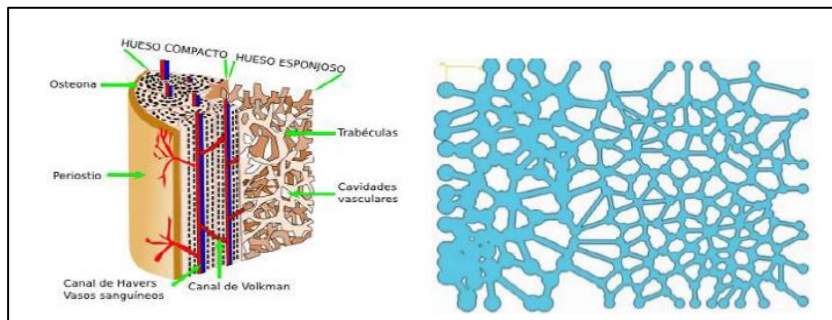


Imagen 11: Estructura de los huesos

4. DIAGRAMA DE VORONOI EN EL AULA

Uno de los objetivos, de este Trabajo de Fin de Máster, es introducir en el aula el concepto de Diagrama de Voronoi y hacerlo posible utilizando distintas actividades. Aprovechando las prácticas del Máster, realizadas en el Colegio Esclavas del Sagrado Corazón situado en la ciudad de Santander, se ha podido trabajar esta actividad con alumnos del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Concretamente, se ha llevado a cabo con los alumnos de la asignatura Taller de Matemáticas, que es una de las asignaturas optativas que se ofertan en este curso. Como en la asignatura de taller de matemáticas se trabajan las matemáticas de forma diferente a como se está acostumbrado a ver en la asignatura troncal de matemáticas, era la asignatura perfecta para realizar esta actividad, con la que además el alumnado puede ver una de las conexiones existentes entre las matemáticas y la vida real.

4.1 PREPARACIÓN Y DISEÑO

La realización de esta actividad en esta asignatura fue decidida conjuntamente por mi tutor de prácticas en el centro, los profesores responsables de dicha materia y mis directores de TFM, siendo uno de ellos mi tutor de prácticas en la universidad. Para tomar esta decisión, se tuvo en cuenta que los alumnos que iban a participar en este proyecto necesitaban haber trabajado en este curso o en cursos anteriores el concepto de mediatriz y tener cierta soltura con el manejo de la escuadra, el cartabón y el compás. Los alumnos de Taller de Matemáticas de 3º ESO cumplían estos requisitos y por eso fueron los candidatos idóneos.

Durante el curso escolar 2018/2019, en la asignatura de Taller de Matemáticas, había matriculados 28 alumnos. Como un solo profesor no podía atender debidamente a todos los alumnos, dividieron la asignatura en dos grupos, uno de 15 y otro de 13 alumnos. Realizaron un reparto homogéneo, por lo que en ambos grupos encontramos alumnos aplicados, interesados por la materia y que

van bien académicamente, y también alumnos totalmente desmotivados y desinteresados por esta y por todas las materias en general.

Dentro del horario de 3º ESO, ambos grupos de Taller de Matemáticas tenían clase los lunes a tercera hora, y los miércoles a sexta hora. Esto debía tenerse en cuenta para la preparación de las actividades porque los alumnos rinden de manera diferente según la hora, el momento y el día en que se imparta la asignatura.

Dado que había dos grupos, se consideró interesante y beneficioso para mi experiencia que pudiese trabajar con ambos. Como hemos visto hay varios algoritmos para realizar el Diagrama de Voronoi. En un primer momento se planteó enseñar un algoritmo a cada grupo para ver qué algoritmo resultaba más fácil de entender, pero finalmente se decidió enseñar el mismo algoritmo en ambos grupos. Nos decidimos por el algoritmo “divide y vencerás” ya que nos pareció con diferencia el más adecuado para realizar en el aula, por ser el más intuitivo y el más fácil de llevar a cabo. Además, realizando el mismo algoritmo con ambos grupos, se obtendrían resultados de una experiencia doble y se podrían obtener mejores conclusiones.

Para enseñar a realizar un Diagrama de Voronoi implementando un algoritmo, es necesario, tener en cuenta el nivel y curso de los alumnos, así se podrá presentar y explicar de la forma más adecuada posible y hacer que sea atractivo y fácil de aprender. Primero, se pensó que una explicación del algoritmo y un par de ejemplos de cómo llevarlo a cabo servirían para que ellos pudiesen realizar otro Diagrama de Voronoi de forma autónoma. Sin embargo, rápidamente se pensó que sería conveniente que pudiesen tener accesible en todo momento, mientras realizaran la actividad, una ficha donde estuvieran escritos los pasos del algoritmo. Por ello, se realizó un documento, que se puede visualizar en el Anexo B, el cual es bastante esquemático, donde se enumeran los pasos del algoritmo.

De nuevo, poniéndonos en el lugar del alumnado, vimos que proporcionarles la información de este modo era prácticamente inservible porque no contenía imágenes que ejemplificaran y ayudaran visualmente. Entonces se añadieron imágenes, que ayudarían visualmente a entenderlo mejor y poder saber en cada momento qué se estaba haciendo, en qué paso se encontraban y qué paso vendría después, resultando, tras varias modificaciones, la llamada “guía del algoritmo” que se muestra en el Anexo C.

Una vez elaborada la guía del algoritmo que se quería proporcionar a los alumnos, se pensó en cómo se les quería presentar esta actividad, para que desde el principio les llamara la atención y despertara interés. La forma en la que se presentó la actividad consistió en no decirles qué concepto matemático se iba a trabajar y proporcionándoles imágenes donde apareciese en la vida real el Diagrama de Voronoi. De esta manera, entre todos en clase se llegaría a averiguar lo que tienen en común todas las imágenes y se les diría que esta estructura en matemáticas recibe el nombre de Diagrama de Voronoi. Dado que en el centro se dispone de proyector en todas las aulas, se consideró que elaborar una presentación de Power Point, la cual podemos encontrar en el Anexo A, podía ser el material más adecuado para la presentación de estas imágenes y poder añadir en ella el resto de las aportaciones que se considerasen necesarias. Por ejemplo: su definición, quién descubrió los Diagramas de Voronoi, cómo se construye para dos y tres puntos, se les pondría en la situación de cómo realizar uno con muchos más puntos, la herramienta necesaria para construirlo con todos los pasos necesarios y finalmente unos ejemplos llamativos con los que se les pretendía acercar hacia la actividad que ellos tendrían que realizar. Entre los ejemplos elegidos tenemos “Los Lunnis y el caramelo” que trata de averiguar de qué Lunni es el caramelo.



Imagen 12: Diagrama de Voronoi de los Lunnis (Grima, 2011)

El Diagrama de Voronoi puede aplicarse, como ya se ha mencionado anteriormente, a numerosos campos. Esto, seguramente, resultará llamativo y de utilidad al alumnado. La idea inicial era realizar la actividad con los Centros Educativos de la ciudad de Santander y que pudiesen ver a qué centro corresponde ir dependiendo de donde se viva en Santander, pero este ejercicio no mostraría la realidad actual, ya que, por ejemplo, a este Centro Concertado acuden alumnos de numerosos municipios de Cantabria, con lo cual esto podría confundirles. Por tanto, tras debatirlo con los profesores que impartían la asignatura de Taller de Matemáticas en el centro, se decidió realizar la actividad con los Centros de Salud que se encuentran en la ciudad de Santander. Además, resultó que el número de Centros de Salud era menor que el de Centros Educativos, por lo que la actividad les resultaría más fácil y llevadera.

Es aquí cuando se pensó cómo se llevaría a cabo la parte manipulativa de la actividad. Se tuvo claro desde el principio que los alumnos realizarían un Diagrama de Voronoi utilizando escuadra, cartabón y compás, pero no se sabía muy bien cómo abordarlo. La actividad trataba de situar los Centros de Salud en un mapa de la ciudad de Santander, pero trabajar sobre el mapa iba a ser más confuso para los alumnos. Por ello, se necesitaba pasar dichos puntos a un papel en blanco donde ellos pudiesen trabajar de manera más sencilla y se decidió utilizar papel cebolla; este papel nos iba a permitir pasar los puntos del mapa a un papel en blanco. De la misma manera nos serviría después para pasar el Diagrama de Voronoi realizado al mapa y ver el resultado final.

Por lo tanto, se necesitó comprar papel cebolla en una papelería y buscar un mapa de la ciudad de Santander. Este mapa debía aportar suficiente información, pero no demasiada, para tratar de realizar el Diagrama de Voronoi de los Centros de Salud. Se encontró en la Oficina de Turismo situada en el Paseo de Pereda en Santander, el cual se puede visualizar en el Anexo D.

Una vez que terminaran esta actividad manipulativa, se les plantearía la posibilidad de que pudiesen comprobar si su trabajo estaba bien hecho, es decir, que pudiesen autocorregirse. Se pensó, que una buena opción podía ser realizar la misma actividad con el programa GeoGebra, pero de una manera más

sencilla, no se tendría la necesidad de hacer el algoritmo de nuevo ya que este programa dispone de un comando que realiza Diagramas de Voronoi de los puntos que se le indiquen. Estos alumnos están acostumbrados a trabajar con este programa, por lo que no les costaría efectuar acciones como cargar una imagen del mapa de Santander en el programa, situar los Centros de Salud y realizar el Diagrama de Voronoi de dichos puntos utilizando dicho comando. Esta parte solo se llevaría a cabo en caso de disponer de tiempo suficiente para realizarlo todo.

Finalmente, al ser una actividad nueva, se quería saber qué opinaban los alumnos, por lo que se elaboró un cuestionario, que se puede ver en el Anexo E, donde pudiesen contestar y opinar libremente, ya que era anónimo. Por otro lado, se elaboró una prueba final no anónima, que se encuentra en el Anexo F, donde pudiesen plasmar lo aprendido y ver si además de realizar la actividad les había quedado clara su utilidad.

Al tratarse de una actividad nueva, no se tenían referencias de temporalización, por lo que se tuvo que hacer una estimación del número de clases que se consideraban necesarias para realizarlo. Lo ideal hubieran sido cinco clases, pero como era tiempo que se quitaba a los profesores responsables de ambos grupos se acertó a cuatro clases. Además, coincidía con el número de clases que quedaban hasta el periodo vacacional de Semana Santa, lo que nos serviría para no interrumpir la actividad por este parón. Por lo tanto, el reparto de actividades se estableció de la siguiente manera:

- **Primera clase:** Presentación de la actividad.
- **Segunda clase:** Diagrama de Voronoi manipulativo de los centros de salud.
- **Tercera clase:** Diagrama de Voronoi manipulativo de los centros de salud.
- **Cuarta clase:** Diagrama de Voronoi con GeoGebra, cuestionario y prueba final.

4.2 DESARROLLO

Los profesores responsables de la asignatura cedieron cuatro días de clase en cada uno de los grupos para la realización de este proyecto, por lo que se trabajó dos semanas lectivas consecutivas con cada grupo. En ambos casos se comenzó la actividad en lunes.

Los alumnos se enteraron el primer día de que iban a trabajar las próximas cuatro sesiones con una profesora de prácticas y se les comunicó que trabajarían una actividad distinta a la que estaban realizando esos días en clase, por lo que dejarían aparcada por el momento esa actividad y la retomarían después de la cuarta clase. La actividad que estaban realizando en ese momento del curso era una ficha online, que combinaba ejercicios inmediatos con ejercicios que debían realizar en GeoGebra e introducir el resultado con una imagen en la ficha. Se mostraron muy receptivos y contentos al saber que realizarían una actividad diferente. Comenzaron a hacer preguntas sobre lo que se iba a realizar y solamente se les pudo adelantar que iba a ser necesario que para la siguiente clase se acordasen de llevar escuadra, cartabón y compás, ya que se iba a trabajar con ese material.

En su clase habitual de informática se llevó a cabo la primera sesión. Este aula disponía de proyector y era lo único que se necesitaba para esta clase, dado que lo primero que se iba a utilizar para dar comienzo a la actividad era la presentación de diapositivas (disponible en el anexo A) que se había elaborado previamente.

Empezamos jugando. Tenían que observar las imágenes y decir qué eran y qué tenían todas ellas en común. Rápidamente hubo una lluvia de respuestas, donde todos dijeron que veían una jirafa, unas rocas, tierra seca, una libélula y parte de una hoja. Se les preguntó qué es lo que tenían todas en común, entonces pusieron cara de extrañeza ya que desconocían la respuesta y lo primero que se les ocurrió decir fue que todas formaban parte de la naturaleza. Cuando se les volvió a preguntar, diciéndoles que se fijaran un poquito más, sus ojos se

abrieron como platos y la mayoría dijo: “todas las fotos tienen esas formas raras”. Efectivamente, esas “formas raras” era lo que tenían en común y se les corrigió diciéndoles que la forma correcta de nombrarlo era figuras que son polígonos irregulares. Se les explicó por qué se formaban esos polígonos en cada uno de los casos. Por ejemplo, en el caso de la jirafa se les contó que el pelo más denso y grueso lo tenían justo en el centro de cada una de las zonas marrones y que en las zonas blancas se encontraba el pelo más fino. En la imagen de la tierra seca, se les explicó que la tierra se agrietaba por las partes más secas y, por lo tanto, la zona más húmeda de la tierra coincidía con el centro de cada uno de los polígonos que se formaban.

Continuamos con el juego y se les enseñó la imagen mostrada anteriormente de los personajes infantiles de “Los Lunnis y el caramelo” sin el Diagrama de Voronoi que aparece en dicha imagen. El caramelo se lo quedaría el Lunni que estuviera más cerca y, por lo tanto, debían averiguar quién estaba más cerca. Primero dudaban entre los tres más cercanos y después solamente se quedaron con dos. Unos alumnos decían que estaba más cerca el naranja y otros que estaba más cerca el morado. No se ponían de acuerdo ya que no era fácil decidirlo. Entonces se les enseñó la misma imagen, pero con el Diagrama de Voronoi de los Lunnis. Se tenía una región por cada Lunni y, como es obvio, el caramelo estaba dentro de una de ellas, entonces la solución era clara y todos contestaron emocionados que el caramelo era para el naranja. Fue el momento de contarles que ese reparto de la imagen recibe el nombre de Diagrama de Voronoi, porque lo descubrió el matemático Georgy Voronoi. Después se les explicó lo que era un Diagrama de Voronoi con la definición más intuitiva y fácil de entender, resaltando que la región de cada Lunni determinaba los puntos que estaban más cerca de él que de ningún otro.

La presentación siguió y se les planteó distintas situaciones que condujeron hasta el concepto de mediatriz. Una de estas situaciones planteadas fue que pensarán como repartirían el aula para dos alumnos de manera que todos los puntos de la zona correspondiente a cada uno estén más cerca de uno que del otro. Rápidamente, dos de ellos tomaron la iniciativa de levantarse y se colocaron

por la clase, y enseguida señalaron el punto medio entre ambos. Pero se les dijo que esa respuesta no era del todo correcta pues solo estaban señalando al punto medio entre ambos y debían de determinar dos zonas o regiones, una para cada alumno. Todos se quedaron pensativos y uno de los compañeros que estaba sentado hizo un gesto con la mano con el que visualmente se intuía una línea entre los dos y otro de los alumnos dijo que eso era la mediatriz. El resto de los alumnos lo entendieron muy rápido.

Se les presentó otra situación proponiéndoles que pensaran cómo quedaría repartida la clase para tres alumnos. Lo tuvieron que pensar un poco más, pero llegaron sin dificultad al resultado. Complicamos la actividad mostrándoles una nube de puntos y dijeron que era muy difícil. Fue en ese momento cuando se les contó que se les iba a enseñar una herramienta para poder realizarlo, que recibe el nombre de algoritmo “divide y vencerás”. Habían estado muy participativos hasta el momento y en esta parte estuvieron muy atentos e interesados. Durante la explicación les costó entender qué parte de las mediatrices eran las necesarias y la fase en la que se unen los diagramas de ambas partes. Tras resolver, en ese momento todas las dudas, parecía que estaban entendiendo cómo aplicar el algoritmo. Además, tuvieron claro desde el principio que realizar un algoritmo consistía en respetar el orden de los pasos y que había que completar cada paso completa y correctamente para poder pasar al siguiente.

Aunque no quedaba mucho tiempo de la clase, se pudo enseñar a los alumnos las distintas aplicaciones de los Diagramas de Voronoi que se habían preparado. Les llamó mucho la atención el ejemplo de los aeropuertos del mundo y les gustó muchísimo el ejemplo interactivo creado en GeoGebra de los jugadores de fútbol, donde se veía con claridad que al mover los jugadores por el campo cambiaba el diagrama que formaban.

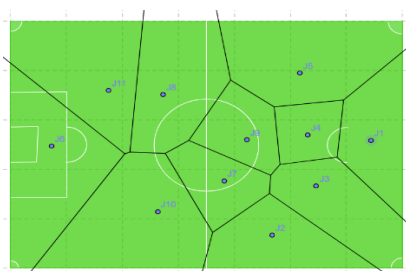


Imagen 13: Diagrama de Voronoi interactivo (GeoGebra, s.f.)

La segunda clase, también se trabajó en el aula de informática porque las mesas eran lo suficientemente grandes para que los alumnos pudiesen realizar la actividad cómodamente. Trabajaron en parejas y en grupos de tres, por lo que a cada grupo se le proporcionó una guía del algoritmo, el mapa de la ciudad de Santander, folios y papel cebolla. A los alumnos, se les informó en la toma de contacto y se les recordó en la primera clase, que tenían que traer a clase escuadra, cartabón y compás. Como a muchos de ellos se les olvidó, se tuvo que ir al aula de plástica a por los materiales que faltaban. Los compases que había estaban estropeados por lo que hubo grupos que tuvieron que compartirlos, lo que hizo que fueran más lentos.

Una vez hechos los grupos y repartido el material, se comenzó la actividad. Lo primero que se hizo fue situar los centros de salud en el mapa. El listado de centros de salud y su situación se mostraron con el proyector que había en el aula. Eran seis, por lo que esta parte fue bastante rápida. Cuando los terminaron de situar, los calcularon con el papel cebolla y de este los pasaron a un folio en blanco. Todos los integrantes de cada grupo querían participar y esto hizo que no respetaran los turnos. Los miembros del grupo que miraban y querían hacerlo también movían y confundían al que lo estaba haciendo. Tardaron más de lo previsto porque algún grupo tuvo que coger papeles nuevos y repetir esta parte ya que los puntos no estaban situados correctamente al haberse movido o el folio no estaba en condiciones para seguir trabajando con él. Entre dudas de un grupo y de otro no dio tiempo a avanzar más en la actividad, pero, al menos, cuando tocó el timbre todos los grupos habían conseguido tener el folio blanco con los puntos que representaban los centros de salud. Por lo tanto, ya tenían listo el papel para realizar el diagrama en la siguiente clase.

La tercera clase, se utilizó íntegramente para realizar el diagrama y pasar el resultado al mapa. La realización del diagrama fue costosa, para unos grupos más que para otros. Tenían muchas dudas sobre cómo empezar, qué parte hacer primero o qué líneas borrar. Había grupos que por no tener organización y limpieza les llevó mucho más tiempo realizarlo. Hubo un par de grupos que a mitad de actividad se desanimaron, entonces se les tuvo que ayudar más que al

resto. Cuando llegó el final de la clase, había grupos que lo habían pasado al mapa, otros que solo lo tenían terminado en el papel y otros que no habían logrado terminarlo.

En la cuarta y última clase se realizaron varias actividades. Disponíamos de 50 minutos de clase, lo que no dejaba mucho tiempo para cada una, pero se consiguieron realizar las tres que se habían preparado. La primera fue, realizar el Diagrama de Voronoi de los centros de salud de nuevo, pero esta vez utilizando el programa GeoGebra. Tuvieron que cargar la imagen del mapa de Santander en GeoGebra, situar los centros y con el comando Voronoi (“lista de puntos”) el mismo programa les daba el diagrama final. Esto les sirvió para autocorregirse y ver si lo que habían hecho en la clase anterior estaba bien. Todos los alumnos lo realizaron sin ningún problema y muy rápido, se notaba que estaban acostumbrados a utilizar el programa. Les gustó mucho descubrir que en GeoGebra se hacía tan fácil y rápidamente.

Después de la actividad en GeoGebra, lo primero que se hizo fue la prueba final cuya finalidad era comprobar si habían aprendido e interiorizado el concepto de Diagrama de Voronoi. Lo segundo que realizaron fue el cuestionario final, que al ser anónimo serviría para tener una opinión sincera de lo que les había parecido la actividad. Pidieron hacer la prueba final en grupo, pero se les explicó que realizándolo individualmente podríamos valorar mejor si tras haber trabajado en grupo todos habían adquirido los mismos conocimientos. Lo entendieron rápidamente y así se hizo. Cuando tocó el timbre que marcaba el final de la clase, había alumnos que aún no habían rellenado por completo el cuestionario final, pero se quedaron hasta que lo terminaron, lo que se les agradeció mucho.

Esta cuarta y última clase con ellos coincidió que era la última hora de la mañana, por lo que al sonar el timbre suelen irse muy rápido, pero hubo alumnos que no mostraron tanta prisa y expresaron que les había gustado mucho la actividad y que habían sido unas clases entretenidas.

4.3 RESULTADOS

En este apartado se van a mostrar y analizar los resultados de esta actividad realizada con los alumnos de la asignatura de Taller de Matemáticas de 3º ESO. En primer lugar, se tratarán los resultados de los Diagramas de Voronoi de los centros de salud realizados a mano por los diferentes grupos de alumnos. En segundo lugar, los Diagramas de Voronoi realizados con el programa GeoGebra. En tercer lugar, se corregirá la prueba final y se observará lo que han aprendido. En cuarto y último lugar, se verán las opiniones del alumnado acerca de la actividad.

En esta experiencia han participado 28 alumnos. Estos alumnos, como se ha dicho anteriormente, están repartidos en dos clases, en las que hay 13 y 15 alumnos. En la clase compuesta por 13 alumnos se formaron cinco parejas y un grupo de tres y, en la clase de 15 alumnos se formaron tres grupos de tres y tres parejas. Es decir, a pesar de que las clases tenían distinto número de alumnos, en ambas han salido seis grupos. Por lo que se han elaborado 12 Diagramas de Voronoi.

❖ Diagramas de Voronoi de los centros de salud hechos manualmente

En cuanto a los Diagramas de Voronoi de los centros de salud construidos de forma manipulativa, se han obtenido en la primera clase cinco diagramas completos y correctos y uno sin realizar y, en la segunda clase, tres grupos han logrado hacer el diagrama completo y correcto, otro de los grupos llegó hasta la mitad aproximadamente y otros dos no consiguieron hacer casi nada. En definitiva, ocho de los doce grupos han llegado a la solución correcta del Diagrama de Voronoi de los centros de salud de la ciudad de Santander, quedando uno de los cuatro restantes a mitad de proceso. En cuanto a los resultados según como han formado los grupos, se puede decir que trabajar en parejas ha beneficiado al resultado, ya que de las ocho parejas solamente dos no han llegado a completarlo y dos de los cuatro grupos de tres alumnos no lo han resuelto. Uno de los grupos que no consiguió hacer casi nada estaba

formado por dos alumnos que mostraron desinterés y desmotivación por la actividad en cuanto se comenzó la segunda sesión. La falta de rapidez al tener muchas dudas, compartir material entre grupos o tener material defectuoso fueron algunos de los motivos por los que el resto de los grupos no consiguieron terminar el diagrama.

A continuación, se muestran algunos de los Diagramas de Voronoi conseguidos por los alumnos, así como los que no llegaron a completarse:

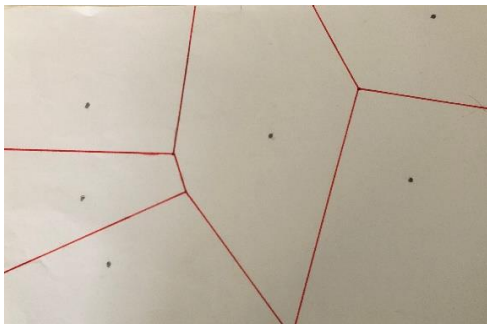


Imagen 14: Diagrama de Voronoi de los seis puntos pasados a papel blanco desde el mapa de Santander con el papel cebolla.



Imagen 15: Diagrama de Voronoi de los seis centros de salud sobre el mapa de Santander.

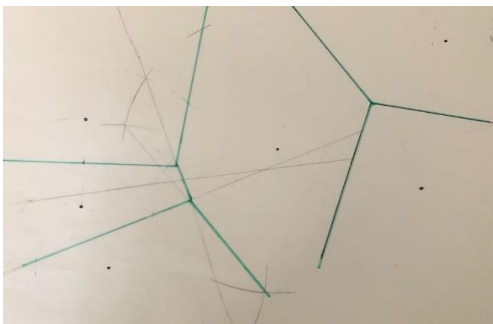


Imagen 16: Diagrama de Voronoi de los seis puntos pasados a papel blanco desde el mapa de Santander con el papel cebolla.



Imagen 17: Diagrama de Voronoi de los seis centros de salud sobre el mapa de Santander.

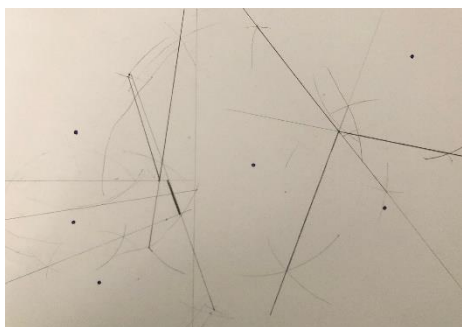


Imagen 18: Diagrama de Voronoi incompleto.

❖ Diagramas de Voronoi de los centros de salud hechos con GeoGebra

Después de los Diagramas de Voronoi hechos manualmente, los alumnos realizaron la misma actividad con el programa GeoGebra y resultó que todos los grupos menos un grupo realizaron la actividad correctamente. Este grupo estaba formado por los dos alumnos que estaban desmotivados y que tampoco consiguieron terminar el diagrama de forma manual. Por otro lado, que el resto de los grupos lo realizaran correctamente era de esperar pues tienen mucha destreza con este programa ya que lo usan habitualmente.

Las imágenes siguientes muestran algunos de los resultados de los Diagramas de Voronoi hechos con el programa GeoGebra:



❖ Prueba final

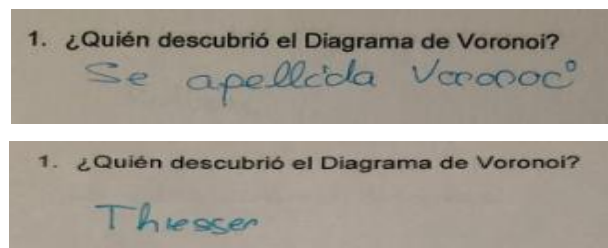
Con la prueba final que se realizó a los alumnos se ha podido comprobar lo que han aprendido los alumnos sobre el Diagrama de Voronoi y si han retenido la información que se les proporcionó en la primera sesión. Por lo tanto, se han corregido las pruebas y a continuación se muestran las respuestas de los alumnos en las cinco preguntas que constituyen la prueba.

Pregunta 1: ¿Quién descubrió el Diagrama de Voronoi?

Esta pregunta fue respondida correctamente por veinte alumnos contestando que fue Voronoi o George Voronoi quien lo descubrió. Cuatro alumnos no

contestaron a la pregunta y otros cuatro dijeron que Thiessen lo descubrió. Esta última respuesta es de procedencia desconocida ya que en ningún momento se les proporcionó esa información, lo cual nos hace pensar que los alumnos estaban interesados en el tema porque lo buscaron por su cuenta. Además, esta información resulta fácil de encontrar ya que aparece en la Wikipedia.

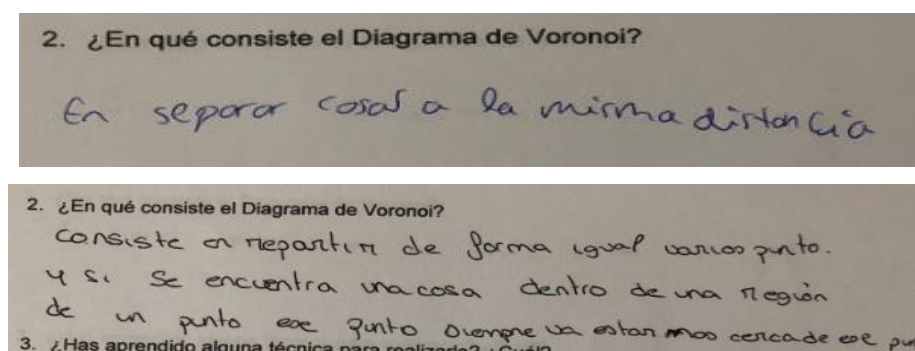
La primera imagen muestra una respuesta que se ha considerado correcta y la segunda es uno de los cuatro casos mencionados anteriormente.



Pregunta 2: ¿En qué consiste el Diagrama de Voronoi?

Doce alumnos contestan mal a esta pregunta, once alumnos se acercan a la explicación, dos saben decir en qué consiste y tres alumnos no contestan a la pregunta.

Se muestran a continuación dos respuestas incorrectas, aunque la segunda imagen muestra que el alumno recuerda una de las características principales de los Diagramas de Voronoi.

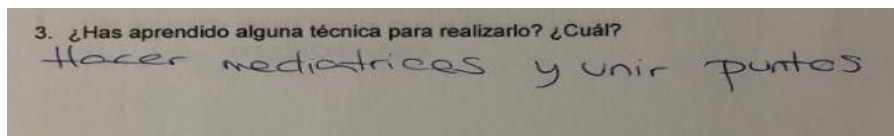


Pregunta 3: ¿Has aprendido alguna técnica para realizarlo? ¿cuál?

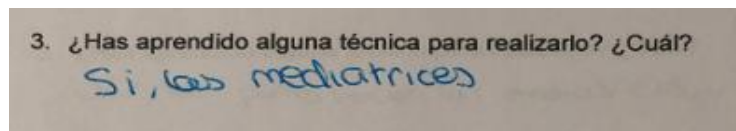
Solamente un alumno ha contestado correctamente a esta pregunta, indicando que la técnica que ha aprendido ha sido el algoritmo “divide y vencerás”.

Por otro lado, diecisiete alumnos consideran que la mediatriz es la técnica aprendida para realizar el Diagrama de Voronoi.

Las siguientes imágenes muestran dos respuestas no del todo correctas de los alumnos:



3. ¿Has aprendido alguna técnica para realizarlo? ¿Cuál?
Hacer mediatrices y unir puntos

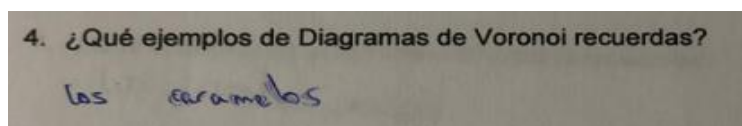


3. ¿Has aprendido alguna técnica para realizarlo? ¿Cuál?
Si, las mediatrices

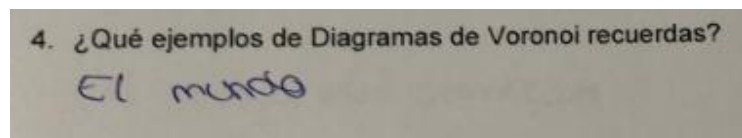
Pregunta 4: ¿Qué ejemplos de Diagramas de Voronoi recuerdas?

Las respuestas de veinte alumnos han sido correctas para esta pregunta, la cual tenía varias opciones posibles ya que se mostraron varios ejemplos. Seis alumnos han contestado de forma incorrecta y dos han dejado la pregunta en blanco.

Se aprecia en las siguientes respuestas que hay alumnos que no saben cómo plasmar en su respuesta los ejemplos que se les enseñaron.



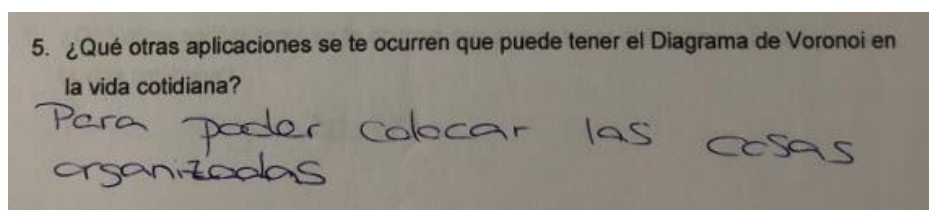
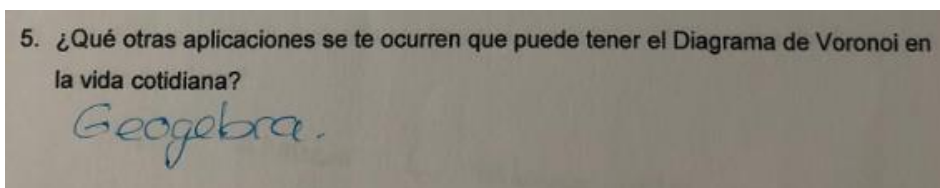
4. ¿Qué ejemplos de Diagramas de Voronoi recuerdas?
los caramelos



4. ¿Qué ejemplos de Diagramas de Voronoi recuerdas?
El mundo

Pregunta 5: ¿Qué otras aplicaciones se te ocurren que puede tener el Diagrama de Voronoi en la vida cotidiana?

Para esta pregunta también había muchas respuestas posibles. Esto facilitaba que los alumnos contestaran correctamente, pero no fue así ya que doce alumnos han dado una aplicación incorrecta y solamente nueve alumnos han dado aplicaciones posibles. Además, tenemos cinco alumnos que han dejado la pregunta sin responder y dos alumnos que han interpretado mal la pregunta ya que su respuesta ha sido “GeoGebra”. Entre las respuestas erróneas se han elegido las siguientes:



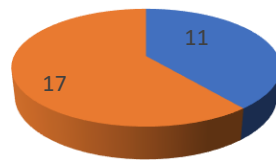
Finalmente, cabe mencionar que las preguntas sin responder son siempre de los dos mismos alumnos. Esto era de esperar por su actitud durante todas las sesiones y tal y como dijeron en el centro son alumnos desmotivados que no están interesados por ninguna actividad académica sea de matemáticas o no.

❖ Cuestionario final

En este cuestionario final los alumnos tuvieron que valorar la actividad de forma anónima. Antes de responder a las cuestiones se les preguntó sobre asuntos como su sexo, si les gustaban las matemáticas y su última nota en dicha materia. Conocer estos datos resulta interesante, aunque a priori pueden parecer irrelevantes. Serán necesarios para extraer conclusiones más completas, es decir, al estar trabajando la actividad en una asignatura optativa como es Taller de Matemáticas, es interesante conocer si a los alumnos están ahí porque les gustan las matemáticas o si, por el contrario, lo han elegido solamente porque no querían cursar la segunda lengua extranjera.

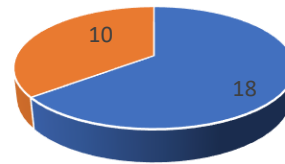
De las dos primeras preguntas se obtuvieron los siguientes datos:

Sexo alumnado



■ CHICAS ■ CHICOS

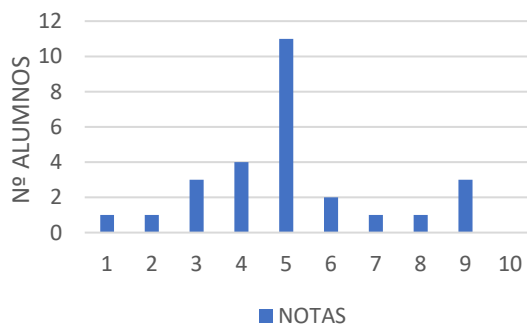
¿Les gustan las mates?



■ SI ■ NO

La siguiente cuestión trataba sobre la nota que tuvieron los alumnos en Matemáticas en la última evaluación. Se les preguntó sobre su nota porque se consideró que podía servir para sacar conclusiones junto con los resultados. Las notas de los alumnos fueron las siguientes:

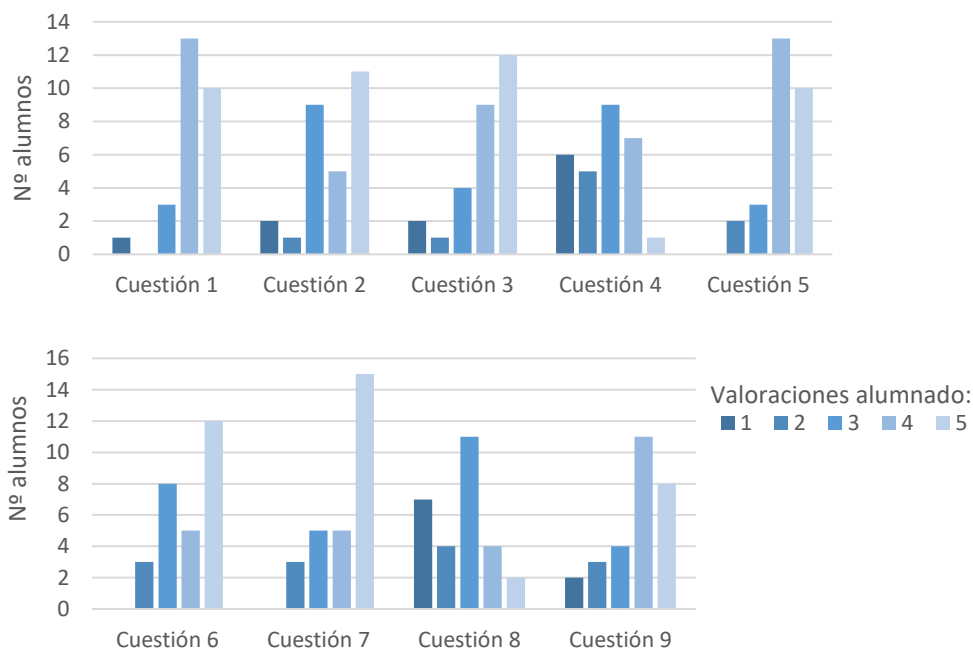
NOTAS ALUMNOS



Se puede apreciar en el gráfico que la nota que más abunda es la de cinco. Esto podría indicarnos que el nivel que tienen los alumnos en la asignatura de Matemáticas es medio-bajo. Solamente hay siete alumnos que tengan nota de seis o mayor y hay nueve alumnos que tienen suspensa la materia.

Después se les planteó unas cuestiones sobre la actividad. Estas cuestiones tenían que evaluarlas dando valores de 1 a 5, siendo 1 la puntuación mínima y 5 la puntuación máxima. En total había nueve cuestiones y las valoraron de la siguiente forma:

Resultados del Cuestionario



En la primera cuestión “Ha sido fácil seguir las clases”, la mayor parte de los alumnos han considerado que las clases han sido fáciles de seguir ya que prácticamente todos han valorado esta cuestión con más de tres puntos.

En la segunda cuestión “Ha sido interesante”, un gran número de alumnos, valorando con 4 y 5 puntos, han considerado muy interesante la actividad. Otros 9 alumnos le han dado puntuación media y solamente tres alumnos piensan que no ha sido interesante.

En cuanto a la cuestión 3 “Los ejemplos te han facilitado la comprensión”, hay alumnos que consideran que los ejemplos no les han facilitado la comprensión, aunque la mayor parte de ellos opinan con valoraciones de 4 y 5 puntos que les han servido de ayuda.

Sobre la cuarta cuestión “El Diagrama de Voronoi te parece útil”, se puede decir que no ha resultado clara la utilidad del diagrama. Tenemos que once alumnos no lo consideran útil y dieciséis alumnos ven una utilidad media.

La cuestión 5 en la que los alumnos valoraban si “Las clases han sido entretenidas”, ha resultado que prácticamente todos los alumnos manifiestan que han estado entretenidos en las clases de esta actividad.

En la cuestión 6 “Es fácil hacer mediatrices”, diecisiete alumnos creen que es fácil hacer una mediatriz y a once alumnos no les parece tan fácil.

La cuestión 7 en la que se valoraba si “Es fácil hacer el Diagrama de Voronoi con tres puntos”, se tiene que, aproximadamente la mitad de los alumnos, dando una valoración de cinco puntos, tienen claro que es fácil hacer el Diagrama de Voronoi de tres puntos. Y la otra mitad, tiene más repartida su opinión, no teniéndolo tan claro.

Respecto a la Cuestión 8 “Es fácil hacer el Diagrama de Voronoi con siete puntos” la mayor parte del alumnado considera que es difícil hacer el diagrama de Voronoi de siete puntos. Se tienen seis alumnos que opinan que es fácil.

Por último, en la cuestión 9 “Es una actividad interesante para el resto de los alumnos del centro” la mayor parte de los alumnos opinan que esta actividad tendría que hacerla el resto de los alumnos del centro. Y cinco alumnos no lo aconsejan.

Una vez obtenidos los resultados de la prueba final y del cuestionario se van a extraer algunas conclusiones en relación con ambos.

Los alumnos opinan que las clases han sido fáciles de seguir. Esto implicaría que entendieron todas las explicaciones de la primera sesión, lo cual no se ha reflejado en las respuestas de la prueba escrita que se les realizó.

Por otro lado, esta facilidad para seguir las clases que han manifestado incluye también la realización del Diagrama de Voronoi y según los resultados de los Diagramas no ha sido así para todos los alumnos, ya que hemos visto que no todos los alumnos llegaron a construirlo.

A pesar de que la gran mayoría de los alumnos han considerado interesante la actividad no han demostrado haber prestado mucha atención cuando se les explicó en qué consistían los Diagramas de Voronoi, ya que solamente dos alumnos contestaron bien a esta pregunta. La respuesta de otros muchos alumnos no es del todo incorrecta, porque se intuye que saben qué son, cómo se calculan o qué necesitan saber para calcularlos, aunque no han sabido expresarse y esto podría deberse a una falta de capacidad para expresar ideas.

Según el alumnado, los ejemplos facilitaron la comprensión, pero cuando se les ha pedido que propusieran otras aplicaciones solamente nueve alumnos han sido capaces de dar buenos ejemplos y el resto propusieron aplicaciones erróneas. Esto explicaría lo comentado anteriormente sobre la cuarta cuestión, en la cual hubo opiniones diversas, no quedando claro qué opinan sobre la utilidad de los Diagramas de Voronoi.

Casi la mitad de los alumnos no tuvieron muy claro que fuera fácil hacer mediatrices, sin embargo, se pudo observar en las sesiones correspondientes a la parte manipulativa que prácticamente todos los alumnos sabían hacer correctamente mediatrices.

Ocurre lo mismo en las opiniones de la cuestión siete, que trata sobre la facilidad o dificultad para construir Diagramas de Voronoi de tres puntos, en la que los alumnos no lo consideran del todo fácil, aunque prácticamente todos lo realizaron sin problema.

5. CONCLUSIONES

Se ha conseguido llevar al aula una actividad matemática donde los alumnos han podido conocer y aprender una aplicación de las matemáticas en la vida real. Es decir, se ha dado a conocer un concepto matemático trabajándolo desde uno de sus contextos para facilitar el aprendizaje de este al alumnado.

Sin embargo, queda en duda si todos han sido capaces de interiorizar su utilidad, ya que con la observación diaria del trabajo realizado en el aula y la interacción con el alumnado se puede decir que la actividad ha resultado ser bastante fructífera, pero tras corregir la prueba final no podemos verificar por completo lo observado y vivido en el aula. Por lo que no se puede asegurar que los alumnos han entendido las explicaciones o si se ha conseguido que los alumnos interioricen este concepto matemático, permitiéndoles ver una utilidad de las matemáticas en la vida real.

Tal vez, uno de los motivos sea que muchos de los alumnos lo hayan interiorizado, pero no hayan sabido expresarlo o plasmarlo en la prueba final, ya que como se ha dicho anteriormente puede que muestren dificultades para expresarse correctamente. Otra de las posibles causas de que lo vivido y lo observado no coincida con los resultados obtenidos en la prueba, puede ser que, al ser una actividad que no repercute en su nota final, los alumnos no se esforzaran completamente en la realización de la prueba escrita.

En cuanto al trabajo en grupo, se puede decir que ha beneficiado a la actividad cuando se ha trabajado en parejas porque se han obtenido mejores resultados que trabajando en grupos de tres. Cabe mencionar que fueron los propios alumnos los que formaron las parejas y grupos de tres, por lo que para experiencias futuras sería conveniente que el profesor realizase estas agrupaciones una vez conocido el alumnado, intentando que los grupos estén equilibrados y, que los alumnos más aventajados puedan ayudar a otros que no lo estén tanto y que los grupos vayan rotando a lo largo del curso, para que los alumnos trabajen con distintos compañeros, ya que, como se ha plasmado en el

apartado “competencias y contexto”, es importante y necesario que los alumnos se acostumbren al trabajo colaborativo y aprendan a trabajar con diferentes compañeros.

Por otro lado, esta actividad ha sido diferente de las que este alumnado estaba acostumbrado a realizar en la asignatura de Taller de Matemáticas, por ello se considera que este ha sido uno de los motivos que ha hecho que los alumnos se mostraran motivados e interesados durante las clases y que mostraran en todo momento un interés alto por el aprendizaje del Diagrama de Voronoi.

En cuanto a las competencias que han adquirido durante las sesiones, que son uno de los objetivos principales de todas las actividades propuestas, se podría decir que en esta actividad se han trabajado la competencia digital, social y aprender a aprender debido a la forma de la que se ha desarrollado y al uso de diferentes materiales y recursos. Y la competencia matemática que viene dada por la comprensión e interiorización del concepto de Diagrama de Voronoi, que, como hemos visto en los resultados, han logrado la mayor parte de los alumnos.

Por último, como autoevaluación y para que sirva como puntos de mejora para experiencias futuras sería conveniente disponer de más tiempo para realizar esta actividad. Si fuera así, se podrían explicar con más detalle los ejemplos de Diagramas de Voronoi en la vida real y también ampliar estos, intentando hacer las clases más atractivas. Además, los alumnos podrían aprovechar ese tiempo extra para realizar los diagramas con más tranquilidad, pudiendo borrar y repetir cuando se equivocaran e incluso empezar de nuevo. En cuanto a la prueba final, se podría valorar la realización de una prueba tipo test, para que la falta de expresión, de alguno de ellos, no les impida demostrar los conocimientos adquiridos.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Alfonso, C., Botella, M., Devesa, A. F., Fargueta, R. M., Gutiérrez, C., López, F., . . . Torres, J. (2000). *Talleres y juegos matemáticos*. Obtenido de <https://www.orientacionandujar.es/wp-content/uploads/2015/02/Completo-taller-de-juegos-matem%C3%A1ticos-para-Infantil-y-Primaria.pdf> Recuperado el 28 de enero de 2020.
- Alsina, Á. (2011). *Educación Matemática en Contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE-Horsori.
- AulaPlaneta. (17 de Abril de 2018). *aulaPlaneta*. Obtenido de <https://www.aulaplaneta.com/2018/04/17/recursos-tic/los-beneficios-del-trabajo-en-equipo/> Recuperado el 7 de enero de 2020.
- Barreras Alconchel, M. (2010). *Matemáticas desde los contextos*.
- Bolívar, A. (2008). *El discurso de las competencias en España: educación básica y educación superior*.
- Buceta, J., Escudero, L., Grima, C., & Márquez, A. (31 de julio de 2018). *Naukas*. Obtenido de <https://naukas.com/2018/07/31/la-cronica-de-los-escutoides-contada-por-sus-autores/> Recuperado el 12 de noviembre de 2019.
- Cantabria. Orden ECD/96/2015, de 10 de Agosto, por la que se dictan instrucciones para la implantación de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria. Boletín Oficial de Cantabria, 18 de agosto de 2015, 158, pp. 22696-22784. Disponible en <https://boc.cantabria.es/boces/ver-AnuncioAction.do?idAnuBlob=290641> Recuperado el 8 de enero de 2020.
- Castillo, S., & Cabrerizo, J. (2010). *Evaluación educativa de aprendizajes y competencias*. Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
- Davies, J. (2015). Obtenido de <https://www.jasondavies.com/maps/voronoi/airports/> Recuperado el 1 de Febrero de 2020.
- España. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, 295, de 10 de diciembre de 2013, pp. 97858-97921. Disponible en

<https://www.boe.es/eli/es/lo/2013/12/09/8/dof/spa/pdf> Recuperado el 9 de enero de 2020.

España. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 29 enero de 2015, 25, pp. 6986-7003. Disponible en <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf> Recuperado el 9 de enero de 2020.

Expósito, C. (2018). Obtenido de <https://mediateca.educa.madrid.org/streaming.php?id=ao42v1d17a7mtt3h&documentos=1&ext=.pdf> Recuperado el 1 de febrero de 2020.

Ferrer, A. (2011). *Análisis de las competencias básicas como núcleo curricular en la educación obligatoria española*.

GeoGebra (s.f) Obtenido de <https://www.geogebra.org/classic/rtufAtTW>. Recuperado el 2 de febrero de 2020.

Grima, C. (23 de diciembre de 2011). *Naukas*. Obtenido de <https://naukas.com/2011/12/23/cada-uno-en-su-region-y-voronoi-en-la-de-todos/> Recuperado el 10 de diciembre de 2019.

Grupo de Innovación Educativa 'Pensamiento Matemático'. (s.f.). Obtenido de <http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/WEBGIE/taleres.html> Recuperado el 28 de enero de 2020.

Martín, M. (s.f.). *Matemáticas fáciles para todos*. Obtenido de <https://aprendiendomatematicas.com/actividades-matematicas-secundaria/> Recuperado el 29 de enero de 2020.

MECD. (2004). *EVOLUCIÓN DEL SISTEMA EDUCATIVO ESPAÑOL*. MADRID.

OCDE. (2003). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*.

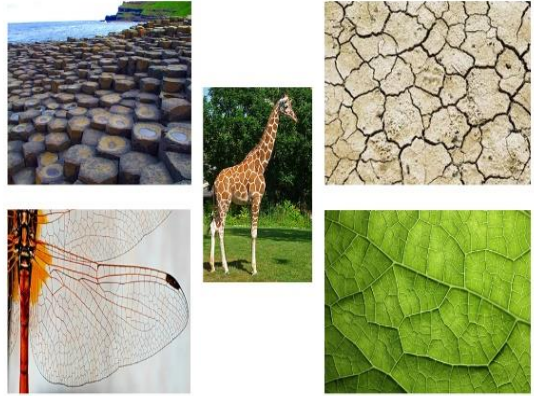
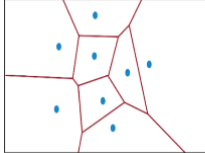

OCDE. (2005). *La definición y selección de competencias clave. Resumen Ejecutivo*. Obtenido de <https://www.deseco.ch/bfs/deseeco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.Download-File.tmp/2005.dsceexecutivesummary.sp.pdf>. Recuperado el 17 de diciembre de 2019.

Rodríguez, E. A. (15 de marzo de 2013). Obtenido de <https://www.tamps.cinvestav.mx/~ertello/gc/sesion16.pdf> Recuperado el 2 de diciembre de 2019.

Zamora Cintas, P J. (2013). La contextualización de las Matemáticas. Obtenido de <http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/2323/Trabajo.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Recuperado el 17 de diciembre de 2019.

7. ANEXOS

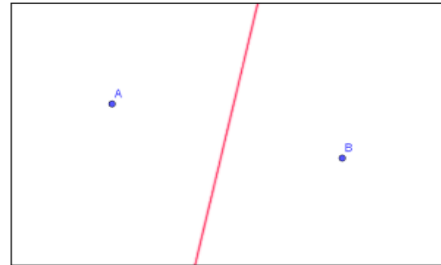
7.1 ANEXO A

<h1>Taller de Matemáticas</h1> <p>3º ESO</p> <p>Lucía Ortega</p>	
<p>¿Quién está más cerca del caramelo?</p> 	<p>¿Quién está más cerca del caramelo?</p> 
  <p>Diagrama de Voronoi Dividir el espacio en tantas regiones como puntos tengamos de forma que a cada punto le asignemos la región formada por todo lo que está más cerca.</p>	<p>Georgy Voronoi</p> <p>1868-1908</p> 

¿Cómo se construye?



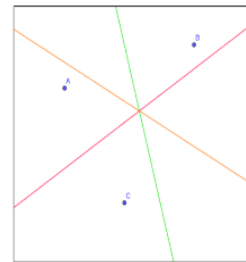
¿Mediatriz?



¿Y ahora?

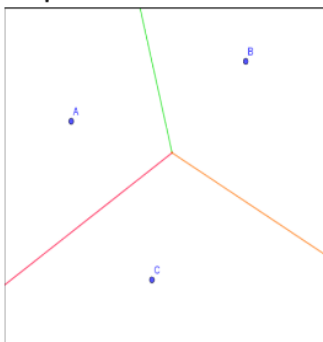


También con mediatrices, pero...

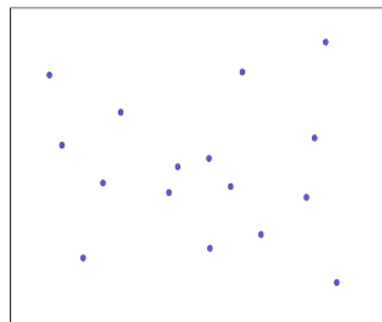


¿Qué hacemos ahora?

Eliminamos las partes de las rectas que no necesitamos



¿Creéis que podríamos con este?

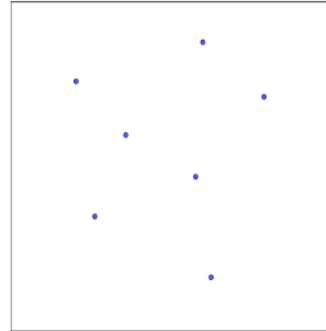




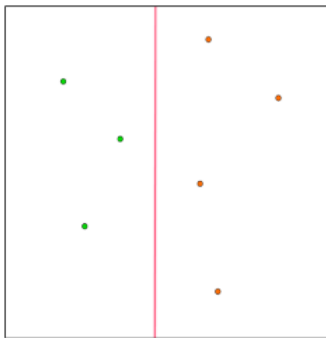
Herramienta
para construirlo

ALGORITMO "DIVIDE Y VENCERÁS"

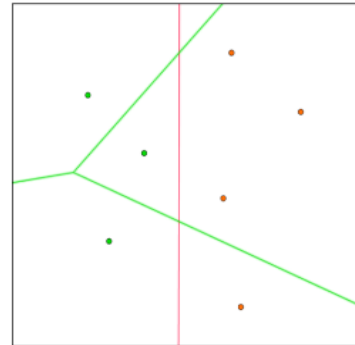
ALGORITMO "DIVIDE Y VENCERÁS"



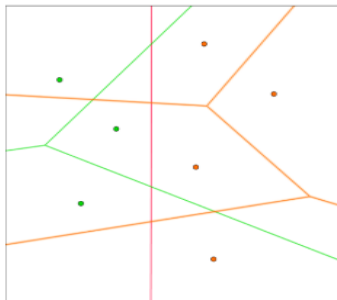
ALGORITMO "DIVIDE Y VENCERÁS"



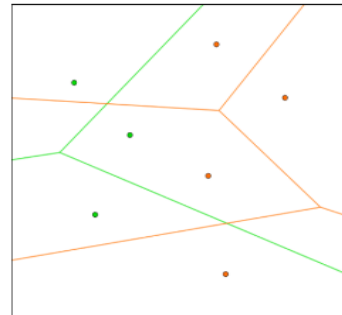
ALGORITMO "DIVIDE Y VENCERÁS"

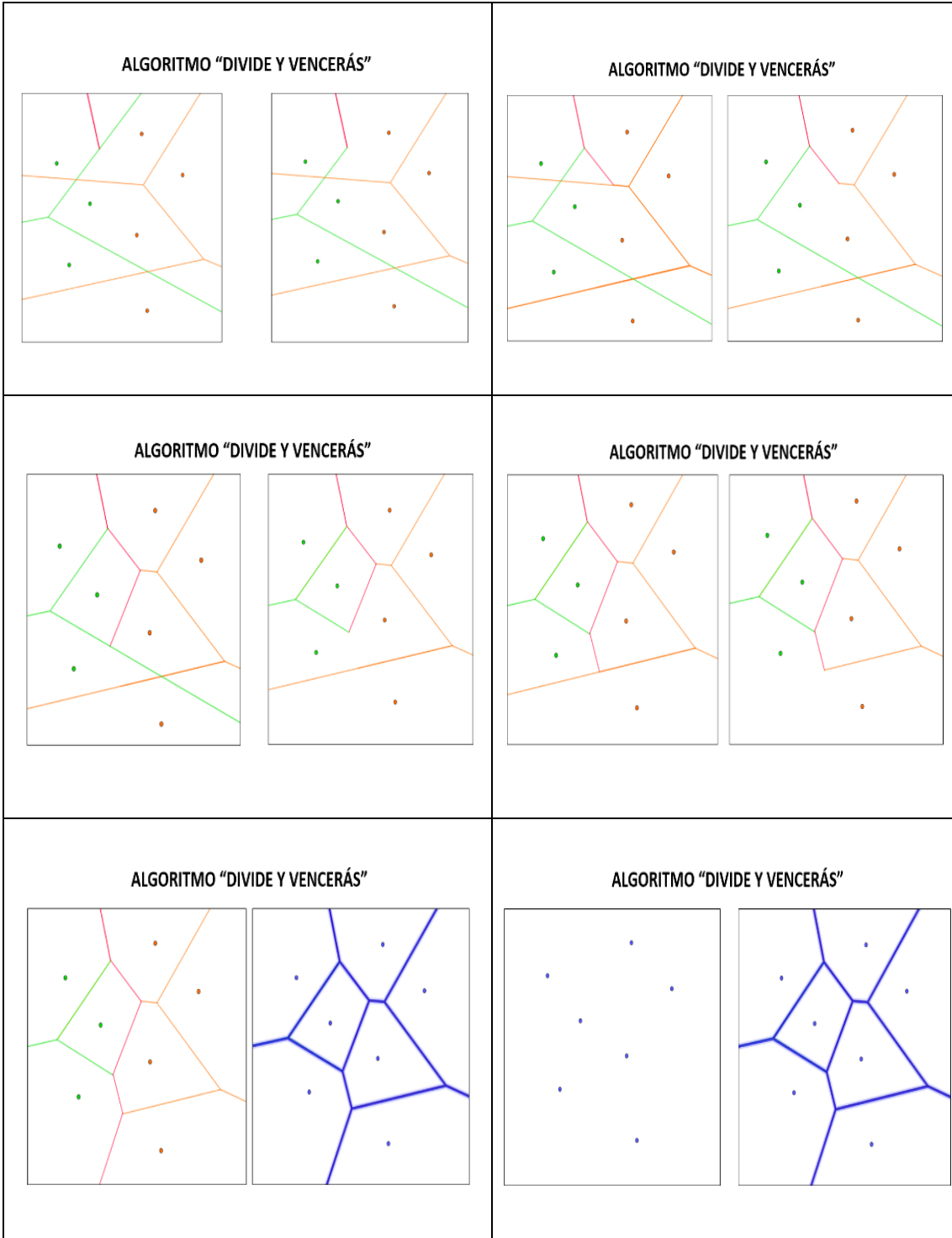


ALGORITMO "DIVIDE Y VENCERÁS"



ALGORITMO "DIVIDE Y VENCERÁS"

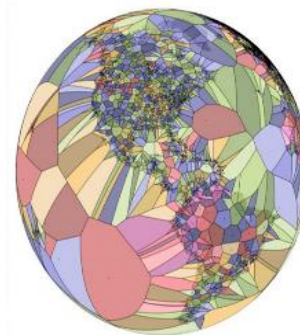




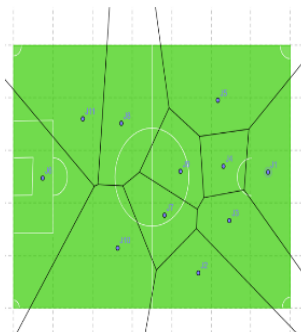
➤ APLICACIONES



➤ APLICACIONES



➤ APLICACIONES



<https://www.geogebra.org/classic/rtuFATW>

7.2 ANEXO B

TALLER DE MATEMÁTICAS 3º ESO - ACTIVIDAD DIAGRAMA DE VORONOI

ALGORITMO “DIVIDE Y VENCERÁS”

➤ Paso 1

Dividimos la nube de puntos en dos partes.

➤ Paso 2

Diferenciamos las partes pintando los puntos de ambas partes de diferente color.

➤ Paso 3

Realizamos el Diagrama de Voronoi de cada una de las partes, diferenciando ambos diagramas utilizando colores diferentes.

➤ Paso 4

Vemos que queda pendiente ver cómo sería la parte central.

➤ Paso 5

Seleccionamos de la parte central el primer punto de un color con el primer punto del otro color y realizamos su mediatriz. Eliminamos las partes de las rectas que no necesitamos.

Este paso debemos repetirlo hasta que definamos la parte central del Diagrama.

7.3 ANEXO C

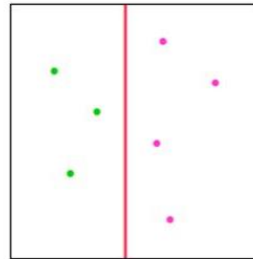
TALLER DE MATEMÁTICAS 3º ESO - ACTIVIDAD DIAGRAMA DE VORONOI

ALGORITMO "DIVIDE Y VENCERÁS"

Paso 1

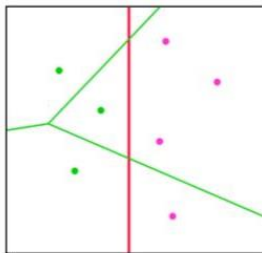
Dividimos la nube de puntos en dos partes.

Diferenciamos las partes pintando los puntos de ambas partes de diferente color.

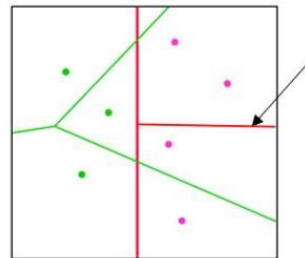


Paso 2

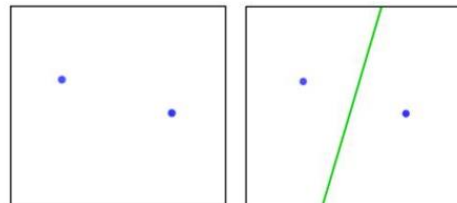
Realizamos el Diagrama de Voronoi de cada una de las partes con colores diferentes.



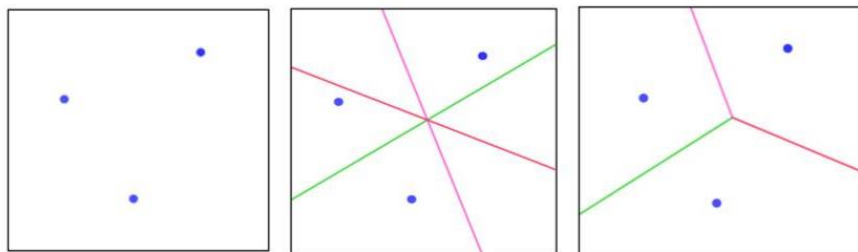
Si alguna de las partes tiene más de tres puntos dividiremos esa parte de nuevo (**PASO 1**).



Paso 2A: Diagrama de Voronoi de 2 puntos.



Paso 2B: Diagrama de Voronoi de 3 puntos



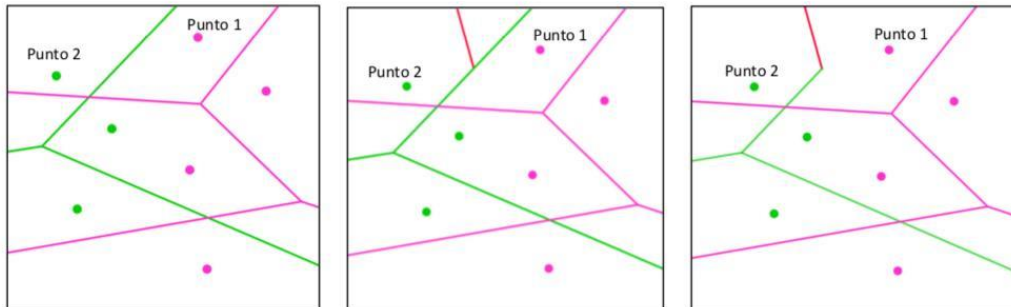
¿Cómo se unen los Diagramas de Voronoi de ambas partes?

Paso 3

Eliminamos la recta que divide ambas partes.

Paso 3A: De arriba hacia abajo seleccionamos el primer punto que nos encontramos y calculamos la mediatriz con cada uno de los puntos del otro color que están en su región de Voronoi.

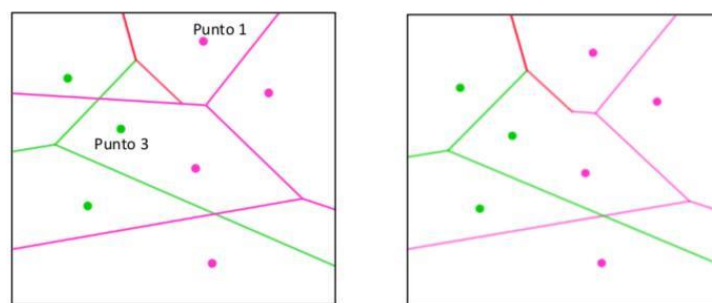
Eliminamos las partes de las rectas que no necesitamos.



El Punto 2 está en la región de Voronoi del Punto 1

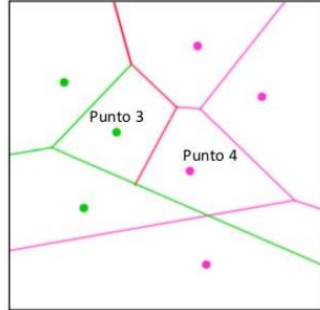
El Punto 1 no tiene más puntos verdes en su región

Paso 3B: Repetimos el “Paso 3A” tantas veces como sea necesario. Avanzando de arriba hacia abajo, parándonos en cada punto que encontremos y haciendo las mediatrices entre cada punto y todos los del otro color que estén en su región de Voronoi.



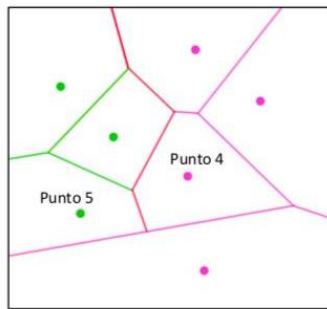
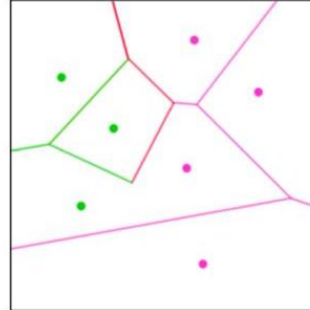
El Punto 1 está en la región de Voronoi del Punto 3

El Punto 2 no tiene puntos rosas en su región

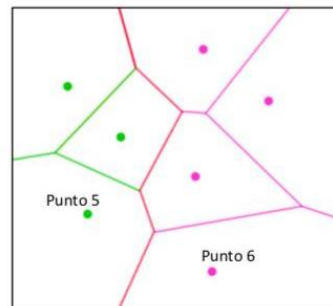
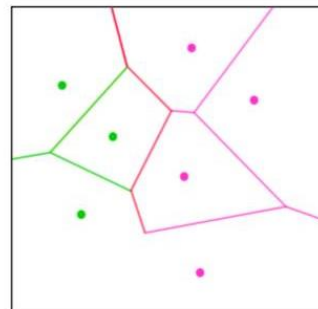


El Punto 4 está en la región de Voronoi del Punto 3

El punto 3 no tiene más puntos rosas en su región



El Punto 5 está en la región de Voronoi del Punto 4



El Punto 6 está en la región de Voronoi del Punto 5

7.4 ANEXO D



7.5 ANEXO E

CUESTIONARIO FINAL ACTIVIDAD DIAGRAMA DE VORONOI

CURSO:
SEXO: F M
¿Te gustan las matemáticas? SI NO
Nota de matemáticas en la última evaluación:

EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD					
1: Puntuación mínima 5: Puntuación máxima	1	2	3	4	5
Ha resultado fácil seguir las clases					
Ha sido interesante					
Los ejemplos te han facilitado la comprensión					
El Diagrama de Voronoi te parece útil					
Las clases han sido entretenidas					
Es fácil hacer mediatrices					
Es fácil hacer el Diagrama de Voronoi con tres puntos					
Es fácil hacer el Diagrama de Voronoi con siete puntos					
Es una actividad interesante para el resto de los alumnos del centro					
COMENTARIOS:					

7.6 ANEXO F

PRUEBA FINAL DIAGRAMA DE VORONOI

ALUMNO/A:
CURSO:

1. ¿Quién descubrió el Diagrama de Voronoi?
2. ¿En qué consiste el Diagrama de Voronoi?
3. ¿Has aprendido alguna técnica para realizarlo? ¿Cuál?
4. ¿Qué ejemplos de Diagramas de Voronoi recuerdas?
5. ¿Qué otras aplicaciones se te ocurren que puede tener el Diagrama de Voronoi en la vida cotidiana?

7.7 ANEXO G



COMITÉ DE ÉTICA DE PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN

D^a MARGARITA SERNA VALLEJO, en calidad de presidenta del citado Comité,

CERTIFICA

Que una vez analizada por este Comité la solicitud del investigador Dña. Lucía Ortega del Campo cuyos datos se refieren a continuación:

Título del proyecto: Diagrama de Voronoi ¿qué centro de salud tengo más cerca?

Ámbito: Educación

Características definitorias (Tesis doctoral, Proyecto, etc.): TFM

Código dado por el Comité de Ética de Proyectos de Investigación: CE TFM 10/2020.

Y valorada la documentación aportada que pone de manifiesto que la investigación implica a personas, ya sea directamente por la realización de entrevistas, cuestionarios, etc., y/o indirectamente por la necesidad de que algunos individuos permitan el acceso a ciertos datos, se estima que el citado proyecto

X Cumple con los requisitos éticos necesarios de idoneidad en relación con los objetivos del estudio.

X Están justificados los riesgos y molestias previsibles para los sujetos concernidos por la investigación-

X Es adecuado el procedimiento previsto para obtener el consentimiento informado.

X Contempla el cumplimiento de la normativa en vigor en el ámbito de estudio en el que la investigación se incardina.

Razones por las que este Comité ha decidido por unanimidad **valorar positivamente** el Proyecto por considerar que se ajusta a las normas éticas esenciales requeridas por la legislación en vigor.

Quedando constancia de esta decisión en el Acta de la reunión ordinaria online del Comité celebrada el 23 de enero de 2020.