UNIVERZA NA PRIMORSKEM
PEDAGOŠKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

KATJA ROJNIK

KOPER 2020

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
PEDAGOŠKA FAKULTETA
Magistrski študijski program druge stopnje
Razredni pouk

Magistrsko delo

RAZUMEVANJE POJMA NESKONČNOST PRI UČENCIH NA RAZREDNI STOPNJI

Katja Rojnik

Koper 2020

Mentor:
izr. prof. dr. Darjo Felda
Somentorica:
dr. Sanela Mešinović, viš. pred.

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem mentorjema izr. prof. dr. Darju Feldi in dr. Saneli Mešinović, viš. pred., ki sta me ves čas pisanja magistrskega dela usmerjala, spodbujala in mi dajala koristne nasvete. Še enkrat najlepša hvala.

Zahvaljujem se ravnateljici, učiteljem in otrokom Osnovne šole Žalec, da so mi omogočili izvedbo empiričnega dela magistrskega dela.

Hvala fantu Kristjanu in prijateljicam za vso pomoč in spodbude ob pisanju magistrskega dela.

Posebej se želim zahvaliti družini, mami Simoni in očetu Jožetu, saj sta ves čas verjela vame in me spodbujala ter tako in drugače podpirala na poti do cilja. Hvala vama, da sem lahko svoja študentska leta preživljala brezskrbno in imela možnost udejstvovanja v vseh meni najljubših dejavnostih.

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisana Katja Rojnik, študentka magistrskega študijskega programa druge stopnje Razredni pouk,

izjavljam,

da je magistrsko delo z naslovom Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji:

- rezultat lastnega raziskovalnega dela,
- so rezultati korektno navedeni in
- nisem kršila pravic intelektualne lastnine drugih.

Podpis:

____

V Kopru, dne _____________________

IZVLEČEK

V magistrskem delu obravnavamo razlike v razumevanju pojma neskončnost med učenci na razredni stopnji.

Magistrsko delo je razdeljeno na dva ključna dela. V prvem, teoretičnem delu opredelimo neskončnost in opišemo, kako se je pojem razvijal čez čas. Osredotočimo se na področja v matematiki, kjer se neskončnost pojavlja in v zvezi z obravnavanim pojmom raziščemo učni načrt za matematiko. Ker je pojem izredno kompleksen, se v teoretičnem delu poglobimo tudi v razvoj in stopnje mišljenja otrok, mišljenje v sodobnem izobraževanju ter kritično mišljenje. V nadaljevanju teoretični del podpremo z empiričnim delom, v sklopu katerega smo izvedli raziskavo (intervju) z učenci prvih petih razredov osnovne šole. Vključeni so odgovarjali na vprašanja o neskončnosti in njenem pojavljanju na različnih področjih – v aritmetiki, geometriji in življenju.

Namen magistrskega dela je raziskati razumevanje pojma neskončnost v primerih iz matematike in življenja v povezavi s pojavljanjem te tematike v učnem načrtu za matematiko.

Rezultati so pokazali, da pri razumevanju različnih količin zrn – logični rabi neskončnosti, razumevanju najmanjšega in največjega naravnega števila ter razumevanju neskončnosti vesolja – ni opaziti pomembnejših razlik med razredi. Viden je upad delnega poznavanja pojma neskončnost med prvim in petim razredom ter sorazmerno pojavljanje vse bolj splošne opredelitve. Razumevanje geometrijske neskončnosti je delno povezano z obravnavo premice v učnem načrtu. Z učnim načrtom sta povezana tudi možnost preštevanja različnih količin zrn in splošno poznavanje neskončnosti.

Ključne besede: matematika, neskončnost, aritmetika, geometrija, mišljenje.

ABSTRACT

Understanding of the Concept of Infinity among Pupils at Primary Level

The master's thesis discusses the differences in how pupils at the primary level understand the concept of infinity.

The master's thesis is divided into two key sections. The first, i.e. theoretical, section defines infinity and describes how this concept has evolved over time. It focuses on the areas of mathematics which deal with infinity and examines the Mathematics curriculum in relation to this concept. As the concept is highly complex, the theoretical section also delves into children's cognitive development and levels, thinking in contemporary education, and critical thinking. Afterwards, the theoretical section is substantiated by the empirical section which contains a survey (interview) that was conducted among pupils of the first five grades of primary school. The interviewees answered questions about infinity and its presence in different areas – arithmetic, geometry and life.

The purpose of the master's thesis is to research the understanding of the concept of infinity in examples from mathematics and life in relation to how this topic is discussed in the Mathematics curriculum.

The results show that no significant differences have been observed between grades as regards the understanding of different quantities of grain – logical use of infinity, understanding of the biggest and smallest natural number, and understanding of the infinity of space. A decline has been observed in the partial knowledge of the concept of infinity between grades 1 and 5, and a proportional presence of an increasingly general definition. The understanding of geometric infinity is partly connected with the curriculum's discussion of the straight line. The ability to count different quantities of grain and general knowledge of infinity are also connected with the curriculum.

Keywords: mathematics**,** infinity, arithmetic, geometry, thinking.

KAZALO VSEBINE

KAZALO PONAZORIL

KAZALO PRILOG

1 UVOD

Pojem neskončnost v nas vedno vzbudi številne miselne procese, od tega, da se sprašujemo, kaj sploh je, do tega, da si jo želimo vedno znova čim boljše predstavljati. Z gotovostjo lahko trdimo, da je neskončnost izjemno težko dojemljiv koncept. Tudi matematiki so šele konec devetnajstega stoletja dodobra spoznali pojem (Cantor, 1878). Pri otrocih neskončnost spodbudi radovednost, pogosto že pred vstopom v šolo (Pehkonen in Hannula, 2006). Z idejo neskončnosti se najprej srečajo, ko govorijo o največjem številu, tistem, ki se kar nadaljuje in nadaljuje, četudi otroci še ne poznajo zaporedja števil (Holton in Symons, 2020).

Številni avtorji (Evans, 1983; Falk, Gassner, Ben-Zoor in Ben-Simon, 1986; Falk, 1986; Hartnett in Gelman, 1998; Firschbein, Tirosh in Hess, 1979; Wistedt in Martinsson, 1996) so v svojih raziskavah že ugotavljali, kako učenci na razredni stopnji razumejo neskončnost, vendar jih je večina bolj usmerjena v posamezen razred ali pa primerjajo zgolj razumevanje v določenih razredih osnovne šole. Mi smo se osredotočili na splošno razumevanje in med sabo primerjali vseh pet razredov razredne stopnje. Menimo, da so izsledki takšne raziskave lahko dober smerokaz za skupno pot učiteljev in učencev k splošnemu razumevanju in lažji predstavi tako abstraktnega pojma, kot je neskončnost. Učiteljem je lahko takšna raziskava v pomoč pri vpogledu v predstavo otrok o neskončnosti še pred obravnavo pojma.

V magistrskem delu želimo s pomočjo kvalitativne raziskave – strukturiranega individualnega razgovora z učenci – ugotoviti, kako učenci od prvega do petega razreda razumejo pojem neskončnosti ter kako se razumevanje iz razreda v razred spreminja. Pridobljene odgovore bomo med seboj primerjali in poskušali ugotoviti, v kolikšni meri so povezani s pojavljanjem oziroma nepojavljanjem proučevanega pojma v učnem načrtu za matematiko.

2 TEORETIČNI DEL

2.1 V neskončnost in naprej

Neskončnost je pojem, ki nas zaradi svoje abstraktnosti vznemirja in hkrati navdušuje (Pehkonen in Hannula, 2006). Uporabljamo ga pogosto in v različnih okoliščinah. Vedno znova se v nas postavljajo vprašanja o neskončnosti: »Kaj je neskončnost? Kako jo definiramo? Ali jo res potrebujemo? Ali lahko trdimo, da je vesolje neskončno?«. Čeprav je pojem danes že dobro uveljavljen v vsakdanjem življenju in se pogosto uporablja, še vedno težko razumemo njegov dejanski pomen. Ljudje ga najpogosteje povezujemo s časom in prostorom, čeprav oboje vključuje neizmerljive, brezmejne razsežnosti, ki otežujejo razumevanje (Allen, 1999). Neskončnost nas pritegne tudi zaradi možnosti, da razmišljamo širše, izven svojih okvirjev, da gremo preko nam znanega do nečesa več. Kakor hitro omenimo neskončnost, se zdi, da nas »zdrava pamet« zapusti (Clegg, 2003). Ni pa ta pojem uveljavljen le v vsakdanjem življenju in na področju matematike, ampak posega tudi na področje fizike, filozofije in vere. Kot nekakšen »nerešljiv« pojem tako že od nekdaj vzbuja radovednost pri filozofih, matematikih, umetnikih in teologih (Kos, 2013). Clegg (2003) trdi, da je neskončnost tisto, zaradi česar se nam zdi vesolje majhno. Govori tudi o tem, da ima neskončnost pravzaprav neko čudno sposobnost – lahko je skrivnostna in praktična hkrati. Neskončnost primerja s »črno skrinjo«, ki nam pomaga opraviti neko delo, kot npr. telefon ali računalnik, čeprav nas večina ne razume točno, kako. Podobno kot Clegg (2003) tudi Mamolo in Zazkis (2008) trdita, da za večino ljudi neskončnost ni povsem dojemljiva, predstavljamo si jo zgolj posredno, določena pa je preko pojma končnost in označuje tisto, kar ni končno.

Ker smo končna človeška bitja v vesolju, času in materiji, je bilo naše razmišljanje in občutenje o neskončnosti vedno povezano z verskim strahospoštovanjem, bodisi v smislu spraševanja, prestrašenosti ali navdiha. V tem smislu ima neskončnost izjemno močno afektivno-čustveno komponento. Hkrati je neskončnost znanstveni koncept z močno intelektualno komponento. Afektivno-čustvena komponenta je poudarjena v številnih zapisih, eden najslavnejših je zapis Blaisa Pascala, ki je pisal v času, ko si je Evropa prizadevala za neskončen znanstveni napredek (Achtner, 2005). V delu besedila je zapisal: »Če pomislim na kratko obdobje, v katerem se moje življenje prepleta z večnostjo, pred in za mano, in če upoštevam majhen prostor, v katerem prebivam, in če štejem samo tisto, kar vidim, kar se izgublja v neskončnem prostoru, o katerem ne vem ničesar, in le-ta ne ve ničesar o meni, potem me čudi, da živim tukaj in ne tam.« (Pascal, 1978, v Achtner, 2005, str. 1).

Kljub vsemu ne obstaja dosti zapisov, ki bi Boga naslavljali kot neskončnega, v večini primerov gre za metaforičen opis Boga kot neskončnega. Prvi, zelo znani teolog Origen, je v svojem delu »De principis« trdil, da je Bog končen. Zaradi teh besed ga je kritiziral Augustin, ki se je oklepal trditve, da je Bog neskončen. Svoj primer je prikazal s primerom neskončnega števila celih števil, ki jih Bog lahko pozna. Trditev o neskončnosti Boga sta podprla tudi Clement of Alexandria in Manucius Felix (Achtner, 2015). Kasneje pa je Gregory of Nyssa v svoji teoriji odprl številna nova obzorja, tako v teološkem, duhovnem, etičnem in intelektualnem pogledu na neskončnost. Med drugimi je bil trdno prepričan, da je Bog neskončen. Posledično je postavil vprašanje o odnosu do neskončnega Boga in podal trditev o tem, kako priti bližje neskončnemu Bogu, ne da bi ga kdaj dejansko dosegli (Achtner, 2015).

Neskončnost je tako obširen pojem, da se v virih pojavljajo različne definicije. V Velikem splošnem leksikonu (2006) je definirana s simbolom ∞, ki ni število, temveč oznaka s pomenom, ki presega področje matematike. Simbol je uporabljen, kadar členi navzgor neomejenega naraščajočega zaporedja realnih števil z dovolj velikimi indeksi presežejo vsako vnaprej izbrano število – gredo proti neskončnosti.

Neskončnost je lastnost, ideja, ki pomeni, da nekaj ni omejeno oziroma nima mej. Vsi primeri, s katerimi predstavimo neskončnost, so samo približek neskončnosti, da bi jo bolje razumeli (Gole, 2013).

Georg Cantor je ugotavljal in spoznal, da ni ene same neskončnosti, ampak jih je neskončno mnogo, zato jo je primerjal z množico naravnih števil (Smullyan, 1995). V knjigi Satan Cantor je takole predstavil neskončnost: »Beseda neskončnost je očitno pridevnik in prva stvar, v kateri se moramo strinjati; je vrsta stvari, kjer je ta pridevnik uporaben. Katere reči lahko določimo kot končne ali neskončne? No, v matematični uporabi tega izraza je odgovor, da so to množice ali zbirke stvari, ki jih lahko imenujemo končne ali neskončne.« (Smullyan, 1995, str. 141).

Cantor povezuje neskončnost tudi z obstojem prazne množice – množice, ki ima 0 elementov, torej je n nič. Pravi, da je množica končna, kadar obstaja tako naravno število n, da ima množica natančno n elementov. Iz tega izhaja, da je mogoče množico postaviti v bijektivno korespondenco s števili od 1 do n; če v tej ni naravnega števila n, je množica neskončna. To v praksi pomeni, da je 0-elementna množica končna, 1-elementna množica je končna, 2-elementna množica prav tako itn. Vendar pa v primeru, da je za poljubno naravno število n nemogoče, da ima množica natanko n elementov, pridemo do množice, ki je neskončna. Potemtakem lahko ugotovimo, da ko iz neskončne množice odstranimo n elementov, še vedno dobimo neskončno množico (Smullyan, 1995, str. 142–143).

V matematiki se pojavlja pri aritmetiki (števna neskončnost) in geometriji (geometrijska neskončnost). Zaporedno štetje, število za številom, je v nas že od otroštva naprej. To zaporedje kot tako je tako močno zasidrano v nas, da ga težko »razbijemo« (Clegg, 2013).

Koncept neskončnost, čeprav je nedostopen in kontraintuitiven, igra v matematiki pomembno vlogo, saj je to polje temeljnega raziskovanja intelektualnosti, ki ga odlikujeta natančnost in učinkovitost v oblikovanju resničnega sveta (Trzesicki, 2018).

V fiziki se vprašanja o neskončnosti pojavijo, ko se začnemo spraševati, ali obstaja neskončno mnogo zvezd, ali bo vesolje trajalo večno in ali je lahko nekaj neskončno deljivo (Heller in Woodin, 2011).

Psihologi v zvezi z obravnavanim pojmom trdijo, da je nemogoče koherentno govoriti o neskončnosti, drugi pa poročajo o meditativnih miselnih dojemanjih neskončnosti (Heller in Woodin, 2011).

V zvezi z neskončnostjo se pojavlja tudi precej paradoksov (Hotel neskončnost, Brivec, Ahil in želva, dihotomija, Galilejev paradoks idr.), ki kažejo na protislovje, saj težko razumemo nekaj, kar je v nasprotju z našo intuicijo (Gole, 2013) – nekaj, kar se nikjer ne začne, niti ne konča (Allen, 1999). Aristotel je, da bi se paradoksom dejanske neskončnosti izognil, ustvaril koncept potencialne neskončnosti. V obeh pojmih se še danes razpravlja. Aristotel je dovolil le uporabo potencialne neskončnosti, saj je bila v pomoč pri izogibanju najpogostejšim starodavnim paradoksom neskončnosti (Trzesicki, 2018).

Ko govorimo o zgodovinskem razvoju pojma neskončnosti, so se filozofi in matematiki v preteklosti spopadali s tem konceptom zgolj v njegovi potencialni obliki, in sicer več kot 1500 let. Moreno in Waldegg (1991) sta ugotovila, kako je slovnična analiza uporabe pojma neskončnosti povezana z grško kulturo. Grki so namreč ta pojem v matematičnem kontekstu uporabljali zgolj kot prislov, ki nakazuje na neskončno nadaljevanje dejanja in je bil uveljavljen vse do leta 1877, ko je Cantor definiral dejansko neskončnost, izraženo kot samostalnik. Njegovo idejo je bila skupnost matematikov sprejela šele leta za tem, saj so v začetku strogo zanikali njen obstoj.

Dejanska neskončnost je tista, ki vznemirja teologe zaradi svoje neracionalnosti. Krščanska ideja o neskončnem in razumskem Bogu je bila izziv za številne filozofe in teologe. Akvinski je sprejel Aristotelov odnos do dejanske neskončnosti, da bi lahko govoril o neskončnem Bogu, njegovi »iracionalnosti«, omejeni na količino ali na tisto, kar je končno glede na prostor (Trzesicki, 2018).

2.2 Neskončnost nekoč

Neskončnost kot taka se je pojavila šele v 19. stoletju, ko sta Georg Cantor (1945–1918) in Richard Dedekind (1831–1916) dokazala njen obstoj. Definirala sta jo z enoličnim prirejanjem elementov dveh množic v strukturi eden enemu in jih tako želela urediti v pare. Rezultat njune raziskave je bil, da sta dve množici enako močni – ekvipolentni, kadar imata enako število elementov. Iz tega izhaja, da je lahko ta moč neskončna. Za zapis sta uporabila χ (alef). Nato je zapis zamenjal simbol ∞, najpogosteje v izrazih, enačbah in pri računanju neskončnosti (Domajnko in Kovačič, 2002).

2.2.1 Grki

Neskončnost se prvič pojavi s starimi Grki. Sicer se omenja že v Daoizmu, vendar je prikazana kot nekakšna praznina (nebivanje), ki je potrebna za osmislitev bivanja (Milčinski, 1992).

Anaksimandra (6. stol. pr. n. št.) je omenjal pojem »apeiron« – po naše »neomejen« oziroma »neskončen«, tudi »nedoločen«, »nedefiniran«. Svet razume kot nekaj, kar je večno in od nekdaj (Domajnko in Kovačič, 2002).

Stari Grki so idejo neskončnosti uporabljali v raziskovanju števil, časa in prostora. Izraz »neskončnost« zanje ni bil le matematičen pojem, temveč je imel tudi izjemno močan duhovni pomen, saj je imel lastnost neomejenosti, večnosti, zaradi česar so ga povezovali z nesmrtnostjo in božanskostjo.

Zenon (490 pr. n. št.) je skušal dokazati nesmiselnost rezultata pri razdeljevanju neskončnega števila elementov. To imenujemo tudi Zenonov paradoks – Ahil in želva (Bentley, 2010; Guedj, 1998).

Platon (med 427 in 347 pr. n. št.) je trdil, da je resničnost dojemljiva zgolj za breztelesni um in to v obliki idej – večnih in od nekdaj, ki jih oseba spoznava preko spominov. Po njegovem mnenju je vesolje krogla, ki se giblje v krogih. To kroglo opiše z besedami: »ta zajema vse oblike, je najpopolnejša in najbolj podobna sama sebi« (Domajnko in Kovačič, 2002, str. 43).

Grki so bili s teorijo o tem, da so števila brez meja in da so potrebna števila z nedoločenim obsegom, prisiljeni v raziskovanje neskončnosti. Aristotel (roj. 384 pr. n. št.) se je želel izogniti dejanski neskončnosti, in sicer tako, da je definiral minimalno neskončnost – kar je ravno toliko, da je priznal te teorije, vendar pa ni predstavil novega števila, kot je neskončnost. Tu gre za definicijo potencialne in ne dejanske neskončnosti, ki je zadovoljila matematike in filozofe za dve tisočletji. Aristotel je torej zagovarjal dejstvo, da so naravna – cela števila potencialno neskončna, saj lahko posameznemu številu vedno dodamo eno – večje število, vendar neskončen niz števil kot tak ne obstaja. Po njegovem mnenju je neskončnost nepopolna, nedokončana in nepredstavljiva (Allen, 1999). Podal je nekaj argumentov proti neskončnosti, npr. sleherno telo je ali sestavljeno ali enostavno, saj sestavljeno telo ne more biti večje od vsote njenih sestavnih delov – sklep o nezmožnosti obstoja neskončnega telesa. Enostavna telesa (voda, zemlja, zrak, ogenj) ne morejo biti neskončna (Domajnko in Kovačič, 2002). V prid neskončnosti je kot argument navajal čas – ne priznava mu ne začetka in ne konca, v matematiki pa govori o dejstvu, da vse sestoji iz neskončnega števila delov in s tem zavrača nedeljive velikosti (Domajnko in Kovačič, 2002).

2.2.2 Srednji vek

Tu se pojavlja konflikt med naravo in Bogom. Avguštin (354–430 n. št.) je trdil, da so vse resnice v Bogu in da nam pojasni vse, kar želimo razumeti. Ker je neskončnost pojem, ki ga težko razumemo, ga lahko prevedemo skozi vero. V smislu »Bog je vsemogočen, vseveden in neskončno dober«, lahko uvidimo, da je neskončnost ena temeljnih lastnosti Boga (Domajnko in Kovačič, 2002, str. 51). Akvinski (1225–1274) je trdil, da Bog kot tak – neminljiv, ne more ustvariti še nečesa takšnega – neminljivega (Domajnko in Kovačič, 2002). Kuzanski (1401–1464) pa je podajal zelo različne trditve, od tega, da je univerzum končen, neskončen, oboje hkrati ali nič od tega. Poglabljal se je v spoznanja Aristotela, vendar je trdil, da je absolutna neskončnost edina prava. Označil jo je kot neskončnost, ki obsega vse, nad vsem pa je Bog. Bog je mera vsega. Dodaja tudi, da neskončnosti ne moremo dojeti, lahko pa končno pojasnimo tako, da nas privede do neskončnega (Domajnko in Kovačič, 2002, str. 51–52).

2.2.3 Renesansa

V renesansi z Boga, nujnosti ipd. preidemo na gibanje in preoblikovanje, tudi na preizkušanje in merjenje. Glavna avtorja teorij o neskončnosti v tem obdobju sta bila Giordano Bruno ter Galileo Galilei (Domajnko in Kovačič, 2002).

Bruno je menil, da je neskončen univerzum in da obstaja mnogo osončij, ki spominjajo na obstoj našega zunajzemeljskega življenja (Domajnko in Kovačič, 2002, str. 54). V svojih tezah se je strinjal z Nikolajem Kopernikom, ni pa se strinjal z Aristotelovimi spoznanji. Iz tega obdobja je treba izpostaviti tezo o neskončno mnogo svetovih, v kateri je govora o tem, da je makrovesolje sestavljeno iz mikrovesolij in se lahko nadaljuje v nedogled (Domajnko in Kovačič, 2002, str. 54). Bruno meni, da neskončnosti ne moremo čutiti, saj čuti spodbujajo razum ter da če obstaja naš svet, mora obstajati tudi drugi (Domajnko in Kovačič, 2002, str. 55).

Galileo Galilei (1564) je v raziskovanju neskončnosti pomemben zaradi metode raziskovanja s preizkusi (eksperimenti). Na temelju eksperimenta, ki ga lahko dojamemo matematično, prostorsko ter časovno, je ob pojavu nove zvezde ovrgel tezo o nespremenljivosti in večnosti nebesnih teles (Domajnko in Kovačič, 2002). V svoji knjigi »Two New Sciences« je Galileo predstavil nam znan Galilejev Paradoks, ki se nanaša na nabor vseh naravnih števil »n«: gre za to, da ima vsako število ustrezen kvadrat in toliko, kolikor je kvadratov, toliko je števil. Ker pa med kvadrati ni dodatnih kvadratov (2, 3, 5 itd.) – »vsa števila, obsegajoč tiste s kvadrati kot tiste brez njih, so večja kot zgolj tista s kvadrati« – mora biti vsako število točno en kvadrat, torej ne more biti več enega kot drugega (Arthur in College, 2001).

2.2.4 Georg Cantor

Ta nemški matematik je pravzaprav tudi oče teorije množice. Predlagal je, da bi matematiko osnovali na podlagi teorije množic, te pa je opisal kot zmes določenih objektov, ki jih zaznamo in obravnavamo kot celoto (Rotar, 2012). Cantor je dokazal – sicer gre za neposreden konflikt z našo intuicijo o razumevanju neskončnosti – da obstaja več kot zgolj ena vrsta neskončnosti. Dokažemo lahko na primer, da je (neskončna) kardinalnost točk segmenta večja od (neskončne) kardinalnosti naravnih števil. Namesto enega koncepta neskončnosti, ki bi ustrezal naravi našega razumevanja o neskončnem, je Cantor dokazal obstoj neskončnih možnosti svetov neskončnosti, ki so hierarhično organizirani v svetu transfinitivnih kardinal (Fischbein idr., 1979). Cantor se je poglobil v raziskovanje neskončnih množic. Predvsem ga je zanimalo vprašanje o tem, ali obstaja neskončna množica, ki je močnejša od množice naravnih števil in hkrati manjša od intenzitete množice realnih števil. Sam je menil, da množica s temi lastnostmi ne obstaja, vendar tega ni znal potrditi (Miklavec, 2017). Dokazal je torej, da točk na premici nikakor ni mogoče prešteti z naravnimi števili. Četudi jih je neskončno, se štetje realnih števil nikoli ne izide (Rotar, 2012).

2.3 Neskončnost in matematični pojmi na razredni stopnji

Otroci začnejo s štetjem določenega obsega števil najprej do pet, deset itd., štejejo zaporedno število za številom. To zaporedje štetja je zelo težko prekiniti, saj gre za vzorec, ki je lažje zapomnljiv tudi zaradi ritma. Takoj, ko želimo šteti npr. od 10 nazaj proti 1, ugotovimo, da je veliko težje, saj smo »razbili« vzorec (Clegg, 2003). Ta števila sodijo v množico naravnih števil ($\mathbb{N}$), katere poglavitni operaciji sta seštevanje in množenje, deljenje je mogoče, vendar zgolj, ko gre za deljenje z ostankom. V njej pa ne moremo izvesti operacije odštevanja, ker rezultat ni vedno naravno število. Da omogočimo odštevanje v množici naravnih števil, ji moramo dodati še negativna števila. Nadalje sledijo racionalna števila ($\mathbb{Q}$), ki jih potrebujemo, kadar v množici celih števil, vključujoč naravne, števil ne moremo deliti. Racionalna števila lahko zapišemo z ulomkom ali decimalnim mestnim zapisom. Ker se pri deljenju zgodi, da se določeno decimalno število ponavlja v neskončnost (perioda), so bila uvedena realna števila ($\mathbb{R}$). Delimo jih na racionalna in iracionalna. Prva imajo periodični (ponavljajoč se) zapis decimalk, druga pa neperiodični, kar pomeni, da se skupina decimalk ne ponavlja in da, v nasprotju z racionalnimi, jih ne moremo zapisati z ulomki.

Pojem neskončnost je ključen pri vzpostavitvi nadaljnjih miselnih povezav pri razumevanju pojmov v geometriji. V učnem načrtu za matematiko je mogoče zaslediti pojavljanje omenjenega pojma že v prvih letih šole. Učenci naj bi v obdobju med 6. in 7. letom starosti že imeli razvito zmožnost prostorskih zaznav, ki pa so še konkretne (Ličen, 2013).

Kako učenci razumejo neskončnost, je odvisno od njihovih življenjskih izkušenj, na podlagi katerih so njihovi možgani razvili modele neskončnosti. Ti modeli (Firschbein, 2001) se ukvarjajo s ponavljajočimi se večnimi procesi, kot je nadaljevanje v prihodnosti, in ki so v matematiki obravnavani kot potencialna neskončnost, ali pa z upoštevanjem zaporedja, ki ga Bolero, Douek in Garuti (2003) imenujejo zaporedna neskončnost. Sicer se osnovni pojmi v matematični analizi običajno uvajajo skozi omejitvene procese, kar še posebej utrjuje idejo o neskončnosti kot procesu, vendar pa se simbol ∞ uporablja tudi kot število, kadar se rešujejo naloge o mejah in nekaterih drugih konceptih matematične analize.

Redke študije so se ukvarjale z razumevanjem dejstva o tem, da števila nimajo konca. Evans (1983) je izvedel intervjuje s predšolskimi in šolskimi otroki prvega vzgojno-izobraževalnega obdobja. Vključeni niso bili poučeni o konceptu neskončnosti in pri številnih od njih je izveden intervju sprožil miselni eksperiment, medtem ko so razmišljali o idejah zaporednega štetja števil. Nekaj več kot polovica učencev prvega in drugega ter več kot osemdeset odstotkov učencev tretjega razreda je ugotovilo, da bo nenehno dodajanje oziroma prištevanje števila ena prineslo še večje število in tako lahko izrazijo trditev, da naravna števila niso omejena.

Nekateri avtorji (Falk idr., 1986) so se raje osredotočili na testiranje sposobnosti otrok, da poimenujejo večje število od tistega, ki jim je dano skozi igro, ki je bila formirana v želji motivirati učence in jih pripeljati do točke, kjer bodo morda zmožni izraziti svoj neodkriti potencial. Bali so se namreč, da bi pri zgolj postavljanju vprašanj dobili odgovor »števila nimajo konca«. Navodilo za igro je bilo, da mora vsak izmed sodelujočih podati večje število od predhodnega. Tisti, ki bo na koncu podal največje, bo zmagovalec. Igra se je razvila v tekmovanje, v katerem sta na koncu dva tekmovalca podajala večja in večja števila. To je bila dobra podlaga za nadaljnjo diskusijo o tem, ali je mogoče, da se igra konča. Večina učencev od 8. leta dalje je spoznala, da se je koristno igrati v šoli, saj lahko na ta način vedno predlagajo večje število, kot ga je imenoval predhodnik. Učenci so spoznali tudi, da se proces podajanja vedno večjih števil ne bo nikoli končal, ker ima vsako število, ne glede na to, kako veliko je, svojega naslednika.

S proučevanjem razlikovanja med zelo velikim številom in neskončnostjo so se ukvarjali Falk idr. (1986). Otrokom je bilo naročeno, naj primerjajo množice. Glavno vprašanje je vključevalo primerjavo zelo velikega končnega niza, kakor ga je razumel posamezni otrok, in najmanjšega končnega niza. Mlajši otroci so menili, da obstaja več zrn peska, kakor je števil – ker je na plaži in povsod drugod ogromno peska, zrna pa so majhna. Okvirni odgovor otrok od 8. leta dalje je bil naklonjen naravnim številom. Ti so jasno povedali, da številkam ni konca in da bi tisti, ki šteje, prej obupal nad štetjem, kot bi zmanjkalo števil. Izkazalo se je, da je večina otrok uspešno razumela primerjavo množic s trditvijo »števila nimajo konca«, niso pa dojeli neskončne razdalje med velikim končnim nizom in množico vseh števil. Številni otroci, starejši od 8 let, nekateri od njih stari tudi 12 ali 13 let, so postavili števila, ki mejijo na zrna peska. Trdili so, da četudi obstaja več števil, kot je zrn peska, jih ni dosti več.

Hartnett in Gelman pravita, da približno 50–85 % otrok drugih in tretjih razredov ve, da največjega števila ni, saj tudi razložijo, da ima vsako število svojega naslednika (Hartnett in Gelman, 1998).

Fischbein idr. (1979) so v svoji raziskavi navedli, da je pojem neskončnosti intuitivno kontradiktoren (posebno neskončna delitev). Posledično so domnevali, da bodo odgovori vključenih v njihovo raziskavo sodili v dve nasprotni kategoriji – prva podpira idejo neskončne delitve intervala, druga jo zavrača. Nadalje so predvidevali, da niti starost niti učni proces ne vplivata na naravo resnično intuitivnih odgovorov. Glede na to predpostavljeno dejstvo so predvidevali, da je pogostost odgovorov v glavnih kategorijah relativno stabilna glede na starost in spol.

Na podlagi hipotez so potrdili, da je kontradiktornost obravnavanega pojma izražena v dveh kategorijah – končni in nekončni. Prevladujejo končne interpretacije. Starost in učinek poučevanja sta s temi rezultati le deloma povezana. Obstajajo subjekti, ki dajejo konkretna pojasnila za »neskončno« in tudi za »končno«. Veliko vključenih učencev je bilo višje matematično usposobljenih in predstavljajo višji odstotek napačnih »končnih« odgovorov kakor manj matematično usposobljeni učenci. Višja matematična usposobljenost določa bolj sistematično uporabo formalno logičnih shem, ki so naravno prilagojene končnim predmetom in dogodkom (Fischbein idr., 1979).

Wistedt in Matinsson (1996) sta s proučevanjem učencev 5. razreda, torej 11-letnikov, ugotovila, da pri delitvi neznano dolge lesene ploščice na 2 in 4 dele nimajo težav – del zapišejo z decimalnim številom 0,5 in 0,25. Dvom se jim porodi pri delitvi ploščice na 3 dele, saj pri delitvi na 3 celota nikoli ni 100 %, zato zapis, da so vsi 3 deli veliki vsak po 33,3 % dolžine, po njihovem mnenju ni bil pravilen, ker pri seštevanju ne dobimo celote. To pomeni, da so problem kot tak razumeli, niso pa sprejeli dejanske neskončnosti.

O vplivu starosti so avtorji Fischein idr. (1979) ugotovili, generalno gledano, da se razumevanje neskončnosti relativno stabilno začne pojavljati med 12. in 13. letom starosti. V nekaterih primerih je očiten preskok o razumevanju med 5. in 7. razredom, v katerem predstave o neskončnosti postanejo stabilnejše. Napredek od 5. do 7. razreda je lahko posledica starosti, saj se v tem obdobju pojavijo formalno logične operacije, lahko pa kaže tudi na učinek poučevanja. Vendar poučevanje samo ne more razložiti tega napredka, ker so ugotovili, da od 7. do 9. razreda na splošno ni mogoče opaziti izboljšav.

Glede na učinkovitost poučevanja so ugotovili, da reden matematični trening vpliva zgolj na formalno, površinsko razumevanje pojma neskončnosti. Intuicije ostajajo nespremenjene. Matematični trening torej sistematično okrepi trenutne logične sheme, ki pa so končne (Fischbein idr., 1979). Problem učenja neskončnosti se pojavi, ker ga ne moremo konkretno predstaviti, kakor lahko nekatere druge matematične pojme. Ne obstaja eksperiment, ki bi lahko prikazal neskončnost, in otrokom in učencem ne moremo ponuditi ničesar, kar bi lahko prikazalo neskončnost v njenem dejanskem pomenu. Ta abstraktni značaj obravnavanega koncepta nanj nalaga resno omejitev in je nedostopen za metodološke raziskave (Falk, 1994).

2.4 Neskončnost v učnem načrtu za matematiko

Da bi bolje razumeli intelektualni preskok pri otrocih med nerazumevanjem in razumevanjem neskončnosti, moramo pozornost osredotočiti tudi na učni načrt. Ta nas usmerja in nam navaja cilje ter standarde znanja. S pomočjo učnega načrta lahko proučimo razumevanje neskončnosti in napredek povežemo z obravnavo tega pojma v šoli.

Za prvo triado osnovne šole učni načrt za matematiko navaja, da se neskončnost kot termin ne omenja, vendar ga je mogoče zaznati v vzorcih in zaporedjih. Nadalje se v 4. razredu začne pojavljati pri aritmetiki, ko učenci zapisujejo in berejo naravna števila, večja od 10000; pri geometriji, pri kateri prepoznavajo ravne črte, jih opišejo in poimenujejo ter zapisujejo denarne vrednosti (cene) z decimalnim zapisom; pri opisovanju vzorcev, prepoznavanju pravila v vzorcu in nadaljevanju ter pri samostojnem oblikovanju vzorcev. V 5. razredu učenci poglabljajo pridobljena znanja. Tako pri aritmetiki zapisujejo in berejo števila, večja od milijon; pri geometriji spoznajo pojem ravnina, odnose med točko, premico, daljico in poltrakom ter seštevajo in odštevajo količine v decimalnem zapisu (spoznajo množico racionalnih števil, razširjeno množico števil); spoznajo se z življenjskimi situacijami, kjer količine izrazimo z negativnimi merskimi števili (spoznajo množico celih števil, razširjeno množico števil), opazujejo vzorec, ga prepoznajo in nadaljujejo ter oblikujejo slikovne in geometrijske vzorce (Žakelj, 2011).

Pomembno bi bilo izobraziti učitelje, da bi sami najprej razumeli oziroma vedeli, kako zahteven za razlago je pojem neskončnost, posebno takrat, ko ga je treba predstaviti 6-letnemu otroku.

Temeljni cilj ure matematike, v kateri je tema neskončnost, naj bi bil, da otroci razumejo pojem in ga znajo pojasniti z življenjskimi primeri.

2.5 Razvoj mišljenja otrok

Na splošno Crain (1994, str. 103) opredeljuje razvoj kot aktiven gradbeni proces, v katerem otroci – gradbeniki – ustvarjajo vse bolj izpopolnjene in obsežne kognitivne strukture. Zgolj izkušnje niso dovolj za usvajanje znanja, ampak so pomembni dejavnosti in odnosi med različnimi dejavnostmi ter njihov izid. Mišljenje je v času razvoja odvisno od izkušenj otrok, saj so te pomembne pri ustvarjanju podob o svetu, sebi ter drugih. Poleg že omenjenega ima velik vpliv na razvoj okolje, ki pripomore k razvoju novih kognitivnih struktur. Labinowicz (1989, str. 65) pri pomenu okolja poudari pomen izkušenj drugih – sovrstnikov, saj tako pri razmišljanju vzame v zakup tudi druge vidike, s čimer se krepi njegova objektivnost. Martinjak (2004) meni, da posamezni elementi vsak zase niso dovolj, razvoj je skupek vseh dejavnikov. Piaget (Labinowicz, 1989) doda, da ima veliko težo v razvoju motivacija, ki je povezana z vrednostnim sistemom, katerega razvoj se začne po rojstvu. Pravi, da sta interes in emocionalni interes gonilna sila vsega.

Najpomembnejši raziskovalec na področju razvoja mišljenja je bil Piaget skupaj s svojimi sodelavci (Piaget, 1957, 1970; Piaget in Inhelder, 1968, 1964). Zdi se, da v zadnjem času vse bolj in bolj v ospredje stopajo tudi raziskave Vygotskyga (1962). Tudi delo Lurie (1976) je imelo zasluženo velik vpliv na zgodnje raziskave kognitivnega razvoja, vendar niso bile primarno osredotočene na mišljenje.

Martinjak (2004) pove, da je pot otroka do mišljenja odraslega izjemno zahtevna, prebiti se mora namreč skozi precej zahtev, ki jih lahko izpolni šele, ko je pravi čas. Šele nato je zmožen iti dalje in reševati nove, zahtevnejše naloge. Faz v razvoju posameznika ne smemo preskakovati, saj to privede do izoblikovanja patoloških struktur.

Mišljenje otroka je kvalitativno drugačno od mišljenja odraslega človeka. Na vsaki izmed stopenj je mišljenje otrok tipično in se s časom razvija v vse bolj strukturirano mišljenje. Za tipično mišljenje je značilnih 5 razvojnih stopenj: univerzalnost, zaporednost, transformacija, nespremenjenost, postopnost in uravnoteženost. Te stopnje se ves čas ponavljajo in nadgrajujejo na vse bolj zahtevno raven (Thomas, 1996).

2.5.1 Jean Piaget

Presenetljivo je, kako malo je psihologija namenila raziskovanju tako zanimivega koncepta, kot je neskončnost, katere pomembnost za znanost, matematiko in filozofijo je nedojemljiva. Eden tistih, ki se je posvetil raziskovanju obravnavanega pojma, je bil Jean Piaget. Sicer je sprva deloval na področjih biologije in filozofije ter se predstavljal kot genski epistemolog. Zanimalo ga je predvsem, kako pridemo do nekega spoznanja. Verjel je, da je tisto, kar nas loči od drugih živih bitij, sposobnost abstraktnega simbolnega sklepanja. Pogosto njegov pogled na kognitivni razvoj primerjamo s pogledom Leva Vygotskyga, le da se je ta posvetil bolj socialnim interakcijam kot primarnemu viru za razvoj kognicije in vedenja (Huitt in Hummel, 2003).

Piaget je pri proučevanju razmišljanja in odkrivanja otrok uporabljal metodo pogovora. Standardizirani testi ga niso pritegnili, saj ugotavljajo uspešnost in ker so vprašanja izbrana že pred izvedbo (Doumayer, 1990). Težil je k iskanju nečesa novega, nepričakovanega, nepredvidenega. To je bilo zanj uspešno raziskovanje. Pri svojem raziskovanju je poslušal otroke in upošteval vse njihove odgovore, ne glede na to, ali so bili ustrezni ali ne. Ni jih želel voditi, saj je menil, da moramo, če želimo odkriti nekaj novega, to iskati izven okvirjev načrtovanega. Pri svojem delu je bil zelo postopen (Martinjak, 2004). Trdil je, da razvoj kognitivnih funkcij poteka po fazah oziroma stopnjah. Vsaka od teh je izjemno pomembna zaradi svoje organizirane strukture, ki se na vsaki stopnji razlikuje, kljub temu pa vsaka stopnja vsebuje elemente predhodne in elemente za predpripravo na naslednjo stopnjo (Doumayer, 1990). Zaporedje stopenj je izjemnega pomena. Ne glede na to, da so nekatere skupine otrok časovno nekoliko zamaknjene, zaporedje ostaja. Piaget svojih stopenj ne osredotoča na genetske predispozicije, temveč poudarja, da gre za razvojne spremembe, ki so pokazateljice poti v razvoju mišljenja (Miller, 1989).

Tudi Piaget, ki je bil neskončen vir novih idej in konceptov, je v smeri raziskovanja neskončnosti prispeval zelo malo (Fischbein idr., 1979). Koncept psihološkega raziskovanja neskončnosti je tako čisti konstrukt, v katerem se neposredne izkušnje ne smejo priklicati v podobo. Prav tako tu ni mogoče postaviti hipoteze, saj ni testa, s katerim bi lahko podprli ali zavrnili neskončnost (Fischbein idr., 1979). Vemo pa, da obstajata dva temeljna vidika, ki ju moramo vzeti v zakup. Prvi je, da v raziskovanju neskončnosti obstaja idealna matematična struktura, ki je nevprašljiva in logična, na drugi strani pa je psihološka resničnost istega koncepta, ki lahko ostane zapleten, nasprotujoč si, ali pa močno povezan z intivituativnimi težavami. Ravno tako je pri proučevanju neskončnosti. Sprejemanje definicij, teorij in logičnih dokazov ni tisto, kar iščemo. Sprejeti koncept neskončnosti kot take, v različnih resničnih psiholoških kontekstih v procesu mišljenja in interpretacije pa je nekaj popolnoma drugega. To protislovje lahko rešimo tako, kakor je rekel Aristotel. Pravi sicer, da neskončnost izraža le čisto potencialnost, tj. neomejeno možnost za povečanje intervala ali delitev (Fischbein idr., 1979).

Piaget in Inhelder (1948) sta v svoji študiji, namenjeni predstavitvi vesolja otrokom, raziskovala koncept točk in njihovo zaporedje. Zanimalo ju je, kako bo subjekt narisal »najmanjši« in kako »največji« kvadrat na list papirja, ali lahko zaporedno delimo geometrijske figure (na primer na dva). Subjekti v njuni študiji so morali predvideti tudi, kaj bi se zgodilo, če bi se proces delitve nadaljeval duševno in kako bi obnovili figuro v prvotno tako, da bi začeli iz končnega dela (Piaget in Inhelder, 1948).

Ugotovila sta, da otroci do 8. leta starosti razumejo le majhno število točk kot končne elemente, ki poleg tega ohranjajo prvotno obliko. Na konkretno-logični stopnji mišljenja otrok zazna večje število elementov kot rezultat neprekinjene delitve, vendar še ni zmožen razumeti narave tega procesa. Kasneje, na formalno-logični stopnji, pa so si otroci sposobni zamisliti neskončno ločljivost figure, upoštevajoč končne elemente kot tudi točke, tj. brez oblike in dimenzij (Piaget in Inhelder, 1948).

2.5.2 Stopnje mišljenja otrok po Piagetu

Kot smo že omenili, je Piaget eden najpomembnejših raziskovalcev mišljenja otrok. Zato se bomo v tem poglavju posvetili Piagetovim stopnjam mišljenja in jih kasneje, v empiričnem delu, povezali s pridobljenimi rezultati. Njegove stopnje in dognanja bomo nadalje povezali tudi z drugimi avtorji.

Piageta je začelo zanimati razmišljanje otrok, ko je delal v Binet's IQ laboratoriju v Parizu. Opazil je kvalitativno razliko v razmišljanju starejših otrok v primerjavi z mlajšimi. Ugotovil je, da mlajši otroci niso bolj »neumni«, temveč na vprašanja odgovarjajo preprosto drugače, ker drugače razmišljajo (Huitt in Hummel, 2003).

Njegova kognitivna teorija zaobjema 2 temeljna procesa. Prvi je proces spoznavanja novega, drugi pa proces postopnega prebijanja skozi stopnje s pomočjo usvojenih sposobnosti (Huitt in Hummel, 2003).

Številni avtorji (Bart, 2004; Feldman, 2004; Goswami, 2001) se sprašujejo o tem, ali razvojne stopnje dejansko obstajajo, vendar so ključne pri razvojnih teorijah Piageta – kognitivna teorija; Kohlberga – teorija moralnega razvoja in Eriksona – teorija psihosocialnega razvoja. Dejstvo, da se različne razvojne teorije zanašajo na obstoj razvojnih stopenj na različnih področjih, podpira idejo o obstajanju razvojnih stopenj, četudi je koncept uporabljen v množici različnih pomenov. Brez koncepta razvojnih stopenj bi bili prikrajšani pri uporabi hevristike za načrtovanje razvojne poti odzivov in utemeljitev na to ključno vprašanje in druga povezana. Pomembno je poudariti, da kljub vsemu razvojne stopnje niso bile središče Piageteve teorije. Kot epistemolog se je Piaget najbolj ukvarjal s pojavom novih oblik vedenja in s tem, zakaj stopnje v določeni fazi postanejo nujno potrebne (Lourenco, 2016).

Kohlbergova vplivnostna teorija moralnega razvoja je pritegnila pozornost po tem, ko je bila psihološka študija moralnosti in moralnega presojanja Piageta zavrnjena. Kohlberg je sledil Piagetu in zavrnil razlago moralnega razvoja kot preprostega prenosa moralnih pravil iz staršev na otroke kot nepopolnega. Tako Piaget kot Kohlberg sta trdila, da moralni razvoj ni zgolj proces »žigosanja« kulturnih pričakovanj. Namesto da bi moralnost prenašali iz generacije v generacijo, mora biti konstrukt posameznikovega lastnega mišljenja (Carpendele, 2000).

Učenci so v šoli vključeni v dejavnosti, ki od njih zahtevajo več, kot mislijo, da zmorejo, kar pripomore k dvigu ravni znanja. Vygotski razloži, da je poučevanje otroka nečesa, česar še ni zmožen usvojiti, skoraj toliko nesmiselno kot učiti nekaj, kar že zna. Za Vygotskega je pomembno območje bližnjega razvoja, katerega bistvo je, da je posameznik ob pomoči in sodelovanju z drugimi vedno zmožen doseči več in rešiti tudi težje naloge, ki jih sam ne bi mogel. Vendar poudari tudi, da otrok ne more preseči svojih trenutnih zmožnosti, saj obstaja fleksibilno območje sposobnosti za doseganje cilja posameznika brez ali s pomočjo. Med razvojnima teorijama Piageta in Vygotskega obstajajo tako razlike kot podobnosti. Oba sta menila, da je razvoj »revolucionaren« in ne evolucijski proces. Vendar pa je Vygotski zavračal univerzalnost razvoja ter spremembe v razvoju in prehajanju med stopnjami (Fekonja Peklaj, 2010).

Piaget je verjel, da se razvoj mišljenja pri otrocih dogaja preko različnih transformacijskih procesov. Vsaka izmed njegovih stopenj je definirana glede na mesec oziroma leto, ko se pojavi nov način mišljenja. Vendar se, četudi so otroci oziroma učenci razvrščeni v stopnje glede na kronološko starost, lahko razvoj med posamezniki bistveno razlikuje (Weinert in Helmke, 1998). Na te razlike lahko vplivajo različni dejavniki, kot so zrelost, izkušnje, kultura in sposobnosti otroka. Piaget je poudaril, da se otroci oziroma učenci postopoma prebijajo iz stopnje na stopnjo in da izkušnje iz ene stopnje tvorijo podlago za razvoj na naslednji (Ojose, 2008). V svoji teoriji je Piaget pojasnil, da se novorojenčki rodijo s prirojenimi refleksi. Pri živalih so ti refleksi tisti, ki kontrolirajo vedenje skozi življenje, človek pa jih uporablja, da se privadi na okolje. Kmalu jih zamenjajo kompleksnejše sheme vedenja oziroma odzivanja. Za prilagajanje okolju sta po Piagetu pomembna dva procesa – asimilacija in akomodacija. Asimilacija je proces uporabe ali preoblikovanja okolja tako, da ga lahko umestimo v predobstoječe kognitivne strukture. Akomodacija pa je proces, ko spreminjamo kognitivne strukture, da bi lahko sprejeli nekaj iz okolja. Oba navedena procesa sta uporabljena spontano v danih trenutkih življenja (Huitt in Hummel, 2003).

Piaget je opisal 4 stopnje kognitivnega razvoja (Huitt in Hummel, 2003):

1. Senzomotorična stopnja (0–2 let): inteligenca se kaže preko motorične aktivnosti brez uporabe simbolov. Znanje o svetu je omejeno, a se razvija, saj temelji na interakcijah in izkušnjah. Do nekje 7. meseca se pri otrocih razvije tudi razumevanje obstojnosti predmeta. Fizični razvoj pa je tisti, ki pomaga otroku pri razvijanju novih intelektualnih sposobnosti. Nekateri simboli jezika se začnejo razvijati do konca te stopnje. Ojose (2008) navaja, da so otroci na tej stopnji zmožni povezati število z objektom, npr. en pes, dve mački, trije prašički.

Razvoj matematičnih zmožnosti na tej stopnji lahko spodbudimo, če jih ne omejujemo, vendar jim moramo zagotoviti varnost, da lahko začnejo graditi na novih konceptih. Nekateri rezultati kažejo, da so otroci na senzomotorični stopnji v manjši meri zmožni razumeti koncept števil in štetja (Fuson, 1988). Na tej stopnji bi morali otrokom zagotoviti aktivnosti, ki vključujejo štetje in tako spodbujajo razvoj števil. Vzgojitelji oziroma starši naj bi otrokom pomagali pri štetju prstov, igrač in sladkarij, z vprašanjem »Kdo ima več?« ali »Ali jih je dovolj?« pa jih lahko spodbudimo k razmišljanju (Ojose, 2008).

2. Predoperativna stopnja (2–7 let): na tej stopnji se inteligenca kaže skozi uporabo simbolov, raba jezika dozoreva, krepita se spomin in domišljija, mišljenje je še vedno nekoliko nelogično in nereverzibilno. V ospredju je egocentrično mišljenje (Huitt in Hummel, 2003). Na tej stopnji naj bi se otroci soočili s problemskimi nalogami, ki vključujejo dostopne materiale, kot so gradniki, pesek in voda. Med tem, ko se otrok sooča s problemom, je naloga učitelja oziroma vzgojitelja, da iz njega »izvleče« pogovor o dogajanju. Na tej stopnji otroci ne razmišljajo logično, racionalnega mišljenja skoraj ni, med sabo povezujejo nepovezane dogodke in ne razumejo vidika drugega. Piaget je nezmožnost ohranjanja količin na tej stopnji dokazal tako, da je v dva enako velika kozarca nalil popolnoma enako količino vode. Otrok je vedel, da je vode enako. Nato je iz enega kozarca vodo prelil v nižjega in širšega. Tedaj je otrok menil, da je v nižjem kozarcu manj vode kot v višjem (Ojose, 2008).

3. Faza konkretnih operacij (7–11 let): pojavi se 7 vrst ohranjanja količin – števil, dolžin, tekočin, gostote, teže, prostora, volumna. Inteligenca je prikazana skozi logične in sistematične manipulacije simbolov, osredotočene na konkretne objekte. Razvije se operativno mišljenje – operacije mišljenja, ki so reverzibilne. Egocentrično mišljenje počasi izzveni (Huitt in Hummel, 2003). Na tej stopnji je pomemben konkreten prikaz abstraktnih idej s pomočjo različnih materialov in pripomočkov. Ko učenci uporabljajo materiale, pridobivajo izkušnje, ki pomagajo graditi temelje za bolj napredno matematično mišljenje, poleg tega pa uporaba različnih materialov pripomore k izgradnji matematične samozavesti, saj lahko z uporabo materialov in pripomočkov učenci testirajo in potrdijo svoj način mišljenja. Pomemben izziv pri učenju matematike je tudi pomoč učencem pri ustvarjanju miselnih povezav med matematičnimi koncepti in aktivnostjo. Zagotavljanje matematičnih predstav spodbuja edinstvenost študentov in ustvarja precej različnih poti pri ustvarjanju smiselnih idej. Tako je

tudi to eno izmed orodij za spodbujanje razvoja kognitivnih sposobnosti na tej stopnji (Ojose, 2008).

4. Stopnja formalnih operacij (od 11 let dalje): tu se že pokaže inteligenca na ravni logične uporabe simbolov, povezanih z abstraktnimi koncepti. Na začetku te faze se pojavi povratek k egocentričnemu mišljenju. Le 35 % tistih, ki so zaključili srednjo šolo v industrializiranih državah, pride na stopnjo formalnih operacij, precej ljudi tudi v odraslosti ne razmišlja na stopnji formalnih operacij (Huitt in Hummel, 2003). Na tej stopnji se veščine razumevanja povezujejo z miselnimi procesi, ki so povezani s posploševanjem in evalvacijo logičnih argumentov ter vključujejo pojasnjevanje, sklepanje, evalvacijo in aplikacijo. V fazi pojasnjevanja morajo učenci prepoznati in analizirati elemente problema, preko česar razširijo informacije, ki jih potrebujejo za rešitev problema. Sklepanje je faza, na kateri so učenci sposobni in razvojno pripravljeni na induktivne in deduktivne povezave v matematiki. Deduktivne povezave so tiste, pri katerih generalne koncepte prenašamo na specifične. Na drugi strani so induktivne povezave, ki temeljijo na pridobivanju podobnosti in razlik med posameznimi predmeti in dogodki, ki jih lahko nato generaliziramo. Faza evalvacije vključuje uporabo kriterijev za formuliranje hipotez. Nadalje v fazi aplikacije morajo učenci matematične koncepte povezati z življenjskimi situacijami (Ojose, 2008).

2.6 Mišljenje v sodobnem izobraževanju

V času postmoderne, multikulturne družbe, v kateri osnovna šola postaja vse bolj heterogena, ni prostora za tradicionalne metode učenja, pri katerih so učenci zgolj pasivni sprejemniki informacij, saj pri teh metodah primanjkuje ustvarjalnosti, samorefleksije, presoje, odziva in sodb učenca. Ustvarjalno mišljenje je v sodobnem izobraževanju še posebej pomembno za učitelje, saj so oni tisti, ki znanja ne prenašajo zgolj iz knjig v glave učencev, ampak ga ustvarjalno, kreativno preoblikujejo, da lahko učence posredno pripeljejo do dosega zastavljenih ciljev (Kerndl, 2010). Pri razumevanju neskončnosti so sodobni pristopi k poučevanju še posebej pomembni, saj zgolj golo podajanje informacij o neskončnosti pri učencih ne bo spodbudilo miselnih procesov in povezav, ki so še posebej pomembne, da znanje o neskončnosti prenese na različna področja v življenju. Tako na primer od preštevanja števil, ko ugotovimo, da lahko nadaljujemo in nadaljujemo, ne da bi obstajal konec, preidemo na nenehno izmenjevanje dneva in noči, vesolje, premico itd.

Družbene spremembe so vzrok tudi za dodeljevanje novih vlog učiteljem. Med drugim učitelji niso več edini vir informacij, temveč je njihova vloga mentorska, so organizatorji učnih situacij ter v pouk intenzivneje vključujejo učence. Pomembni sta tudi prilagodljivost in pripravljenost za vključevanje novih tehnologij v pouk ter mobilnost učitelja, ki ga je v glavni vlogi zamenjal učenec, zato se danes trudimo preiti od poučevanja k učenju učenja. Pri tem je bistveno, da učitelj iz vloge posredovalca znanja preide v organizatorja učnih okoliščin, učnih situacij oziroma učečih se skupnosti, v katerih se spodbuja samostojno učenje, pri katerem učenec, na podlagi lastnih izkušenj, nadgrajuje svoje znanje in ga povezuje z že usvojenim (Hirvi, 1996).

Kerndl (2010) poudarja, da učenje za prihodnost ne sme biti zgolj vodeno, ampak samostojno, ne zgolj spoznavno, temveč tudi čustveno in socialno, ne smemo se zgolj prilagajati (danemu), predvideti moramo nekaj novega, učenje tudi ne sme biti individualno, ampak naj socialno in vseživljenjsko. Učitelj mora biti sposoben iz učenca izvabiti njegove izkušnje, stališča in poglede ter ga soočiti z nepopolnostjo in konfliktnostjo in ga s podporo pripeljati do rekonstrukcije znanja. Posebno pomembni so sodelovanje učenca, prevzemanje večje odgovornosti za proces pridobivanja znanja in osebnega razvoja ter usposabljanja za vseživljenjsko učenje. Še posebej pomembna je zmožnost samostojnega in kritičnega mišljenja in presojanja (Kerndl, 2010).

Izjemno pomembna naloga šole dandanes je, da poleg posredovanja znanja, zakonitosti in metod dela na nekem področju učenca nauči strategij iskanja, izbiranja, organiziranja in ovrednotenja informacij, pomembnih za reševanje problemov. Ključno za življenje v sodobni družbi je, da učenci pridobijo usposobljenost za vseživljenjsko učenje (Kerndl, 2010).

Poleg vsega je učitelj tisti, ki mora učno okolje pripraviti tako, da je kakovostno in da spodbuja samostojno učenje, hkrati pa mora poskrbeti za diferenciacijo in individualizacijo (Kerndl, 2010).

2.6.1 Kritično mišljenje

Pri dojemanju neskončnosti moramo biti vešči uporabe veščin kritičnega mišljenja, da lahko ovrednotimo, kaj se lahko smiselno oziroma nesmiselno nadaljuje. Gamow (1988) v svojem zapisu govori o tako velikih številih, kot je število zrn puščavskega peska, kar je skoraj nepredstavljivo, vendar gre še vedno za končno količino, saj lahko, ob zadostni količini časa, te tudi preštejemo. Tu pridemo do uporabe kritičnega mišljenja, ko se moramo vprašati, zakaj in ali je smiselno šteti vsa zrna puščavskega peska. Nadalje Gamow (1988) nadaljuje, da obstajajo resnična neskončna števila, ki so večja od vseh, ki jih lahko zapišemo, ne glede na to, koliko časa temu namenimo. To so »števila vseh števil« – jasno so neskončna, kakor je neskončno tudi vseh točk na premici. Tu se porodi dvom, ki ga je prvi izrazil George Cantor, in sicer o tem, ali je mogoče primerjati dve različni neskončnosti, da bi videli, katera je »večja«, ali pa, ali je število vseh števil večje ali manjše od števila vseh točk na premici? S tem pridemo do problema v primerjavi, ali je neko število večje ali manjše, čeprav ga ne znamo niti poimenovati niti zapisati (Gamow, 1988).

Obravnavan pojem kot tak je izjemno širok, zato se v literaturi pojavljata dve različni obravnavi kritičnega mišljenja. Pri prvi (filozofi) gre za opredelitev kot sposobnost analize in evalvacije ter oblikovanja argumentov. Tu prevladuje opredelitev, da je kritično mišljenje sposobnost evalvacije sklepov in načrtov raziskav, zaupanje lastni intuiciji o bistvu dogajanja ter občutljivosti za prepoznavanje in evalvacijo ciljev drugih. Pri drugi opredelitvi (strokovnjaki s področja vzgoje in izobraževanja) je kritično mišljenje opredeljeno s terminologijo veščin, miselnih vzorcev, procedur in prakticiranja določenih aktivnosti (Zalar, 2017). Po mnenju Lipmana (2003) je glavna sestavina kritičnega mišljenja način, kako učence učiti uporabljati kriterije, kritično mišljenje mora biti samopopravljajoče. To pomeni, da zna posameznik sam kritično oceniti svoj miselni proces in ga reflektirati kritično ter po potrebi spremeniti.

Samopopravljanje ni enako metakogniciji, ki pomeni intelektualno samozavest. Misli se obrnejo nase in razmišljajo o lastnem mišljenju, kar lahko opravijo tudi, ne da bi pri tem mislili samopopravljajoče. To pomeni, da lahko mislimo o razmišljanju nekoga drugega, ne da bi bili pri tem kritični. Misliti samopopravljajoče o mišljenju nekoga drugega postane kritično mišljenje šele takrat, ko vključuje kriterije in je osredotočeno na kontekst (Lipman, 1987).

Splošno znano je, da kritično mišljenje sledi razvoju in režiji kognitivnih sposobnosti in dispozicij. Danes je spretnost izvedba, ki je izmerjena ne glede na standarde ali kriterije. Za izmeritev potrebujemo standarde merjenja, za razvrščanje potrebujemo kriterije, da bi bili razsodni, potrebujemo standarde za razsojanje. Kritično mišljenje brez kriterijev Lipman (1987) primerja s Hamletom brez Princa Daneske. Razlikujemo lahko neformalne in formalne kriterije. Na osnovi neformalnih lahko kot kriterij služi kar koli. Ko na primer govorimo o velikosti miši v primerjavi z mačko in povemo, da je miš manjša od mačke in slon večji od mačke, za kriterij uporabljamo velikost mačke. V takšnem neformalnem smislu vsaka prispodoba vključuje primerjavo, ki v danem trenutku služi kot kriterij. Formalni kriteriji pa so tisti, ki so jih sprejele institucije, na primer, kako se je treba obnašati v sodnih dvoranah. Formalni kriteriji so lahko zakoni, pravila, predpisi, statuti, odloki, smernice in navodila. Druga kategorija formalnih kriterijev so standardi, zahteve, specifikacije, pogoji, omejitve itd. Tretja pa vključuje konvencije, norme in uniformnosti. Načela bi bila lahko četrta kategorija, ideje peta in testi šesta. Vsaka od navedenih instanc predstavlja vrsto zunanjega standarda, na katerega se sklicujemo, v želji, da bi bila naša ocena ustrezna in čem bolj objektivna (Lipman, 1987). Pri izberi kriterija je pomembno vedeti, da nekateri svojemu namenu služijo bolje kot drugi, nekateri so zelo splošni – eksplicitno ali implicitno. Tako lahko trditve označimo kot pravilne ali napačne, dobre ali slabe. Vendar je ocenjevanje, kaj je dobro in kaj slabo, že zelo splošno in dopušča prostor za lastne interpretacije, zaradi česar izgublja objektivnost (Lipman, 1987).

Fischer (2005) opredeli kritično mišljenje kot temeljno kompetenco, kot sta branje in pisanje, in pravi, da je tudi kritično mišljenje treba poučevati. Natančneje pravi: »Študij kritičnega mišljenja vključuje prizadevanje, da bi spremenili načine mišljenja, značilne za večino ljudi. Da bi to dosegli, potrebujemo vajo in povratno informacijo.« (Fischer, 2005, str. 11).

Zalar (2017) iz različnih opredelitev kritičnega mišljenja povzame glavne značilnosti. Pravi, da je zmožnost kritičnega mišljenja tudi biti odprt za različna mnenja, biti radoveden na večjih področjih in imeti močno željo po pridobivanju novih informacij. Posameznik, ki zna misliti kritično, ima sposobnost sklepanja ter je fleksibilen in upošteva druge ljudi in njihova mnenja. Sposoben je opredeliti in organizirati elemente, s pomočjo katerih pridemo do uporabnih zaključkov, ter je usmerjen k raziskovanju, razširjanju znanja in izkušenj, ki izhajajo iz življenja. Pomembna je tudi samoregulacija – za posameznika to pomeni samopreočevanje in sposobnost podati lastno mnenje, in ga, če oziroma ko je to potrebno, spremeniti.

Sternberg (1985) je poleg korenin, ki jih ima kritično mišljenje v filozofiji in psihologiji, videl tudi pomembnost v procesu izobraževanja, zato je iz modela izobraževanja izpeljal štiri temeljne cilje. Prvi je izobraževanje s poudarkom na poznavanju vsebine, drugi z namenom kritičnega mišljenja, tretji je izobraževanje, usmerjeno v razvoj intelektualnega misleca, četrti pa podpira razvoj modrosti. Pravi tudi, da kritični mislec problem v procesu reševanja razgradi na niz korakov: 1. prepoznavanje problema, 2. opredelitev narave problema, 3. miselna predstavitev problema, 4. določanje miselnih in fizičnih virov, potrebnih za rešitev, 5. oblikovanje strategij reševanja problema, 6. obvladovanje rešitve in 7. ovrednotenje rešitve (Sternberg, 1985).

Kurfiss (1988) kritično mišljenje opredeljuje kot racionalen odgovor na vprašanja, ki ne morejo biti odgovorjena in za katere morda ni na voljo dovolj ustreznih informacij.

Opredeljeno je kot raziskava, katere namen je proučiti situacijo, pojav, vprašanje ali problem, da bi prišli do hipoteze ali sklepa. To vključuje vse razpoložljive informacije v želji, da bi lahko nekaj prepričljivo utemeljili. V kritičnem mišljenju so vse domneve odprte za vprašanja, divergentni pogledi so agresivno iskani in raziskava ni pristranska v prid želenemu zaključku. Rezultati kritične raziskave so dvojni: zaključek (ali hipoteza) in ponujena utemeljitev, ki jo je podprla. Ti sklepi so ponavadi navedeni v obliki argumenta, definirani kot »zaporedje medsebojno povezanih trditev in razlogov, ki med njimi določajo vsebino in silo stališča, za katerega se določen govornik opredeljuje«.

Ennis (1989) je definiral kritično mišljenje kot razumno reflektivno mišljenje, ki je osredotočeno na odločanje med tem, kaj verjeti in narediti. Njegova definicija je nekoliko preveč omejevalna, zaradi česar lahko pride do krožnosti. Predstavljena je skozi pojem »omejevati«, saj ga lahko soodvisno povežemo s pojmom kritično mišljenje. Ta teorija je nekoliko omejevalna tudi zaradi tega, ker kritično mišljenje uporabljamo še za številne druge stvari in ne le zgolj za odločanje, kaj verjeti in kaj narediti.

Izrazito smiselno kritično mišljenje se zelo približa filozofskemu razmišljanju po mnenju Paula (1990). To »izrazito smiselno kritično mišljenje« povezujemo s Sokratovim idealom o vprašanju in razvoju kritičnih in reflektivnih nagnjenj k idejam, vedenju in življenju. Odraža se z refleksijo razmišljujočega in integracijo njegovih lastnih odkritij in je posameznikov lasten rezultat razmisleka, namesto da vsrkava prepričanja družbe. Paul (1990) dodaja, da izrazito smiselno kritično mišljenje kultivira moralne značilnosti posameznika, kot so ponižnost, pogum, empatija in neodvisnost. Paul (1990) pri učenju kritičnega mišljenja poudarja pomen tako kognitivne kot emocionalno/moralne strategije. Paulova definicija kritičnega mišljenja zaobjema poudarek na morali, verjame, da je intelektualna strogost vezana na duhovno vadbo (Paul, 1990).

Racionalnost in mišljenskost sta splošna cilja filozofije za otroke. Znotraj te doktrine je želja avtorjev tudi doseči cilje, ki odražajo splošne motive ter cilje vzgoje nasploh. Jean Piaget je dodal, da je naloga tistih, ki izobražujejo, narediti posameznika sposobnega ustvariti nekaj novega, ne le ponavljati stvaritev oziroma ugotovitev preteklih generacij (Labinowicz, 1989). Fischer (2005) dodaja, da je pomembno uvajati načine, s katerimi bodo posamezniki sposobni usvojeno znanje ovrednotiti preko kritičnega mišljenja in ga ne le sprejemati kot edinega pravega, temveč ga tudi zavračati. Filozofija za otroke je poglavitna veda, ki se ukvarja s kritičnim mišljenjem otrok. Znanstveniki pravijo, da si je vstop otroka v filozofsko mišljenje težko predstavljati brez kognitivnih procesov, mišljenja pa ne brez tehtanja in preverjanja podanih mnenj in trditev, kar nekoliko spominja na znanstveno mišljenje. Dodajajo, da je procese mišljenja mogoče vpeljati zgolj skozi pogovor, ki mora biti oblikovan kot argument (Vezjak, 2018).

Kritično mišljenje je na splošno raba kognitivnih veščin in strategij, ki krepi možnost za dosego želenega mišljenja. Podobno je zavestnemu, premišljenemu mišljenju, vključuje reševanje problemskih situacij, oblikovanje sklepov ter uvid možnosti in sprejemanje odločitev (Halpern, 2006). Gre za pozorno in učinkovito uporabo veščin mišljenja na kritičen način (Beyer, 1988). Halpern (2006) definira kritičnost preko primerjave ustvarjalnega in kritičnega mišljenja. Ustvarjalno poudarja ustvarjanje nečesa novega, kritično pa ocenjuje veljavnost in ustreznost – pravilnost tistega, kar je že znano.

Za razvoj kritičnega mišljenja pri otrocih in mladostnikih je pomembno vzpostaviti povezavo med otrokovo dovzetnostjo za logično mišljenje in posredno dojemanje logičnih zmot (Vezjak, 2018). Pomemben oporni steber za to, kdaj in kako so otroci ustrezno razviti in zreli, da lahko samostojno analizirajo zgodbe oziroma dogajanje okoli njih, je Piagetova teorija razvojnih stopenj. Po njegovem mnenju je logično mišljenje povezano s številnimi operacijami mišljenja, kot so ireverzibilnost, konzervacija, seriacija in egocentričnost. Iz njegove teorije je razvidno, da se formalno mišljenje izraža v prevladi abstraktnega mišljenja in da so otroci med 11. in 15. letom starosti (ti so na stopnji formalnih operacij) zmožni razumeti tudi nekonkretno pojavnost (Labinowicz, 2010).

2.6.2 Učitelj in šola kot spodbujevalci kritičnega mišljenja

Cilj šole naj bi bil učence naučiti usvojeno znanje učinkovito uporabiti v novih situacijah, saj so takšni učenci odgovorni in znajo uporabiti svojo inteligenco in izkušnje v dobro vseh (Zalar, 2017). Kritično mišljenje je tako ena izmed glavnih tem v diskusijah o sposobnostih v enaindvajsetem stoletju (Greenhill, 2009) in se omenja tudi kot bistvena zahteva za odgovorna človeška dejanja (Marques, 2012). Prav tako je bistvenega pomena za državljane, ko izvajajo svoje socialne, poklicne in etične naravne dolžnosti (Griffin, McGaw in Care, 2012; Greenhill, 2009). Kritično mišljenje je spretnost, ki posameznikom omogoča samostojno odločanje in dvom v prepričanja, kadar informacije ne temeljijo na trdnih dokazih (Halpern, 2003; Mulnix, 2012).

Da bi v učilnici uspešno učili kritičnega mišljenja, moramo ustvariti okolje, ki je sprejemljivo za to vrsto mišljenja. Učitelj mora spodbujati in poudarjati vrednote kritičnega mišljenja, kot so odkritost, empatija, racionalnost in samopopravljanje. Učitelji ne delujejo kot avtoritete, kar pomeni, da niso tisti, ki podajajo pravilne odgovore, ampak so spodbujevalci in podporniki učencev, ki morajo sami odkriti problem in ga samostojno rešiti. V takšnem okolju učenci začnejo zaupati učinkovitosti njihovega lastnega razmišljanja (Keng, 1996).

Kritično mišljenje je v izobraževanju močno podprto z desetletji teoretičnega in praktičnega dela (Lai, 2011). Že od prve polovice dvajsetega stoletja se močno poroča o vključitvi kritičnega mišljenja v šolske kurikulume. Močan vpliv na to je imel Bean (2011), Facione (1990) pa je kasneje predlagal, da bi bilo treba spretnosti kritičnega mišljenja vključiti v cilje za vse razrede osnovne šole. Tako bi moralo biti učenje kritičnega mišljenja integrirano v običajne učne ure.

Leta 1989 je Ennis povedal, da je najboljši čas za učenje kritičnega mišljenja v prvih letih osnovne šole. Ta napoved je koherentno povezana z drugimi študijami, ki so zaključile, da otroci pridobijo ogromno, če so naučeni in ocenjeni kritičnega mišljenja.

Vendar testi za preverjanje kritičnega mišljenja niso dostopni in oblikovani za mlajše otroke, prav tako se tudi ne osredotočajo na specifične subjekte. Namesto tega preprosto merijo zgolj splošne veščine (Ennis in Millman, 1985; Watson in Glaser, 1980; Facione, 1990; Halpern, 2003).

Izjemnega pomena je učenje te vrste mišljenja že od zgodnjih otroških let dalje, saj je bilo dokazano, da obstajajo pomembne razlike med učenci, ki so bili deležni učenja kritičnega mišljenja že v zgodnjih letih in med tistimi, ki tega niso bili deležni (Osakwe, 2009).

Na sistemski ravni bi morali biti učitelji vključeni v oblikovanje diskusije o kritičnem mišljenju. Vendar je za raziskovanje o kritičnem mišljenju potrebno precej več kot posamezniki – individualni učitelji. Razvoj tega zahteva odprto šolo in odprt sistem, ki je zavezujoč in v katerem se razmišlja racionalno. To ne vključuje samo učiteljev in učencev kot kritično razmišljujočih, ampak njihov skupni trud za ustvarjanje spodbudnega okolja predvsem z dolgoročnimi in pomenljivimi nalogami za razvijanje kritičnega mišljenja, namesto tradicionalnih instantnih programov, ki površinsko odpravljajo težavo; z dostopom do virov in materialov, ki spodbujajo in razširjajo kritično mišljenje znotraj kurikuluma in med disciplinami; s časom za interakcijo učiteljev, da oblikujejo učinkovite modele in strategije ter da raziskujejo nove načine in razširjajo svoje profesionalne sposobnosti v tej smeri, namesto da se zvišujejo njihove zahteve, brez danega časa za učinkovito razmišljanje v smeri napredka. Povedano z drugimi besedami – šolski sistem ne potrebuje le profesionalnega pristopa h kritičnemu mišljenju kot izobraževalnemu cilju, ampak potrebuje tudi pokritost z ustreznimi viri za učitelje in učence, da bi bil doseg zastavljenega cilja resnično možen (Walsh in Paul, 1986).

Pomembno je, da so učenci aktivno vključeni v učni proces in da morajo med tem, ko poslušajo, tudi razmišljati. Učenci morajo biti pripravljeni na vprašanja o obravnavanem isto uro in vse naslednje ure. Nič več kot pol šolske ure ne bi smelo biti namenjene frontalnemu podajanju vsebin oziroma razlagi. Čas, namenjen postavljanju vprašanj, naj bi bil vedno dvosmeren – vprašanja postavljajo tako učitelji kot učenci. Pogovor z učenci je priporočljivo vedno začeti z razlago o tem, kaj se bodo naučili in zakaj je pomembno, da poslušajo. Šolska ura naj ne bi stremela k temu, da pokrije ogromne količine snovi, ne glede na to, ali jo učenci razumejo ali ne. Namesto tega je treba količino prilagoditi na toliko, kolikor jo lahko učenci »vsrkajo« (Walsh in Paul, 1986).

Čutiti se pomembnega, sprejetega, imeti občutek pripadnosti in verjeti vase so najpomembnejše lastnosti, ki jih moramo spodbujati pri učencih. Šola pomembno vpliva na potrebo po pripadnosti, vrednosti, saj je učenčeva identiteta globoko povezana z uspehom v šoli in njegovo skupinsko identiteto. Pomembnost spodbudnega okolja je ključna pri razvoju kritičnega mišljenja, saj učenci lahko le tako oblikujejo zaupanje v podajanje svojih razlogov. Poleg tega morajo učenci učitelju zaupati in ga spoštovati. Učitelj, ki učencu dovoli, da se izrazi po svoje, je ključen, saj to pomeni, da sta si učenec in učitelj v smislu medčloveških odnosov enaka. Vse to vpliva na spodbujanje kritičnega mišljenja v šoli. V okolju, kjer se spodbujajo radovednost, objektivnost, prilagodljivost in dvom, bomo lahko ustvarili učenca, ki je navdušen nad učenjem, ki ve, da lahko tvega s svojim razmišljanjem in si zna domišljijsko predstavljati svoje ideje. Takšni učenci bodo manj togi, manj dogmatični in statični ter se ne bodo bali raziskovati njihovega lastnega potenciala (Walsh in Paul, 1986).

Učenje kritičnega mišljenja je zahtevna naloga. Pomembno je imeti okvirna pravila za diskusijo in pripravljene uporabne aktivnosti. Ko izvajamo na primer »možgansko nevihto,« moramo postaviti jasno pravilo, in sicer, da niso dovoljene nobene kritike podanih idej, dokler ne nastopi faza evalvacije. Tako so vsi prispevki spoštovani, tudi tisti, ki so daleč od želenega. Takšen odnos do prispevka vseh vključenih v vzgojno izobraževalni proces lahko prenesemo na vse aktivnosti. Eno od pravil v razredu je lahko tudi, da učitelj sprejme vse odgovore učencev, če so podprti s sprejemljivimi razlogi. Učenci se morajo zavedati, da ne bodo ocenjeni glede situacijo, ki jo zavzamejo, temveč glede na globino razmišljanja, ki ga podajo s svojimi trditvami. Tu se pojavi problem, saj ne želijo vsi učitelji sprejemati enakih tveganj. Problem je »model enega pravilnega odgovora« in učitelja kot avtoritete, ker se vsak učitelj počuti drugače – eni manj, drugi bolj »udobno« v situacijah, ko ne poznajo odgovora na vprašanje. Dober učitelj bo z lahkoto priznal svojo napako in zaradi nje ne bo izgubil avtoritete, temveč bo pridobil zaupanje učencev in jih še dodatno spodbudil h kritičnemu mišljenju (Walsh in Paul, 1986).

V veliko pomoč pri učenju kritičnega mišljenja nam je lahko vodeni pogovor – diskusija, v kateri moramo previdno spodbujati navade kritičnega mišljenja in učencem ponuditi pripomočke, s katerimi bodo lahko ovrednotili pridobljene informacije. Ti pripomočki naj bi učencem pomagali odkriti njihovo zmožnost, da lahko razmišljajo o svojem lastnem mišljenju na organiziran način. To vključuje razvoj sistematične predstavitve idej – sposobnost proučiti lastno mišljenje, mišljenje drugih ter podajanje sklepov in prepričanj, ki temeljijo na razlogih in dokazih. Pomemben del diskusije je formuliranje ustreznih vprašanj, saj preko njih spodbujamo podajanje kritično premišljenih odgovorov. Pomembno je, da učitelj po tem, ko postavi vprašanje, ne pričakuje odgovora takoj, v danem trenutku. Biti mora potrpežljiv in učencu nameniti dovolj časa za premislek. Namesto da takoj pokliče drugega učenca, vprašanemu z danim daljšim časom za razmislek pokaže, da pričakuje njegov odgovor in da zaupa v njegovo sposobnost odgovoriti na vprašanje (Walsh in Paul, 1986).

Kownslar (1985) je razvil teorijo desetih splošnih vprašanj za spodbujanje spretnosti kritičnega mišljenja pri učencih. Verjame, da jih lahko učenci po pridobljenih izkušnjah prenesejo na katero koli temo. Ta vprašanja so (Kownslar, 1985):

1. Katere so glavne točke, poudarjene v vsakem viru?
2. Kako bi definirali vrednost trditve? Je vir uporabil kakšno?
3. Katera je glavna razlika med relevantnimi in irelevantnimi informacijami, trditev ali razlogi?
4. V kaj je usmerjeno? Zaznate kakšno usmeritev v viru? Razložite.
5. Kaj je nestabilna domneva? Ali je kakšna v viru? Razložite svoje razloge in preverite, ali se pojavijo kakšni, ki so si nasprotujoči.
6. Razložite pojma dvoumen in nejasen. Ali vir vsebuje kakšen dvoumen ali nejasen argument? Razložite.
7. Kaj je logična nedoslednost ali logična zmota? Ali je kakšna v viru? Razložite.
8. Katera je glavna razlika med utemeljeno in neutemeljeno trditvijo? Ali vir vključuje kakšno? Razložite.
9. Kako bi določil moč dane trditve in zakaj? Katera možna nasprotja so v igri?
10. Kako bi se zdaj odločili o postavljenem vprašanju? Je odločitev hipoteza ali sklep? Zakaj? Dokažite svoje ugotovitve.

Ko govorimo o kritičnem mišljenju, je pomembno omeniti tudi Bloomovo taksonomijo, ki je izvirno delo in posega v človekove kognitivne procese. Taksonomija razporedi kognitivne procese, pomembne za mišljenje na višjih ravneh v hierarhijo sposobnosti. Vsaka klasifikacija temelji na spretnostih in sposobnostih, ki so nižje v shemi. Taksonomija je predstavljena in opisana kot enosmerna hierarhija učenja, ki nekoliko izgubi uporabnost zaradi tega, ker učenje v resnici ni hierarhično (Walsh in Paul 1986).

Walsh in Paul (1986) v svojem članki povesta, da je izjemno pomemben dober in vnaprej načrtovan realističen kurikulum, da lahko spodbujamo spretnosti, zmožnosti in predispozicije kritičnega mišljenja. Za uspešno poučevanje kritičnega mišljenja mora imeti učitelj celoten vpogled v kognitivne procese in njihove zapletene medsebojne povezave, da vidi Bloomovo taksonomijo kot dvostransko in da na racionalno učenje gleda kot na produktivno naravnan proces, ki prinaša razumevanje, analizo, sintezo in vrednotenje v vsakem dejanju uma.

3 EMPIRIČNI DEL

V tem delu magistrskega dela se bomo osredotočili na ugotavljanje razlik o razumevanju pojma neskončnost med učenci na razredni stopnji, v primerih iz matematike, fizike in življenja, ter na to, kakšna je povezava med razumevanjem pojma neskončnost glede na pojavnost te tematike v učnem načrtu za matematiko.

3.1 Namen in cilji magistrskega dela

Namen magistrskega dela je proučiti razumevanje pojma neskončnost v primerih iz matematike, fizike in življenja v povezavi s pojavljanjem tematike v učnem načrtu za matematiko.

Cilj 1: Ugotoviti razlike o razumevanju pojma neskončnost med učenci na razredni stopnji.

Cilj 2: Raziskati, ali učenci prepoznajo neskončnost v primerih iz geometrije (premica, poltrak) in aritmetike (naravna števila), fizike ter v življenjskih primerih (zrna soli, kapljice vode).

Cilj 3: Ugotoviti, kako je razumevanje pojma neskončnost povezano z obravnavo te tematike glede na učni načrt za matematiko.

3.2 Raziskovalna vprašanja

Raziskovalno vprašanje 1: Kakšne so razlike v razumevanju pojma neskončnost med učenci na razredni stopnji?

Raziskovalno vprašanje 2: Kako učenci na razredni stopnji razumejo neskončnost v primerih iz geometrije, aritmetike, fizike in v življenjskih primerih?

Raziskovalno vprašanje 3: Kako je razumevanje pojma pri učencih posameznih razredov povezano z zastavljenimi cilji obravnave neskončnosti v učnem načrtu za matematiko?

3.2.1 Raziskovalni vzorec

Sodelujoči v raziskavi bodo namensko izbrani. V navedeno raziskavo bo vključenih 5 učencev, iz vsakega od prvih petih razredov – torej 25 učencev. V raziskavo bomo vključili tudi analizo dokumentov, natančneje analizo učnega načrta za matematiko.

3.2.2 Opis postopka zbiranja podatkov

Podatke bomo zbirali v času praktičnega usposabljanja, in sicer v mesecu marcu 2019, na osnovni šoli.

Raziskava bo v prvem delu obsegala strukturiran individualen razgovor z učenci, v drugem delu pa analizo učnega načrta za matematiko od prvega do petega razreda osnovne šole.

Učitelje in učence bomo vnaprej prosili za sodelovanje, pred tem pa jim bomo zagotovili anonimnost. Staršem oziroma skrbnikom vključenih v raziskavo bomo posredovali pisna soglasja, s katerimi bodo potrdili, da soglašajo s sodelovanjem v raziskavi.

Celoten proces zbiranja podatkov bo izveden v skladu z zahtevami Zakona o varovanju osebnih podatkov (Uradni list RS, št. 59/1999).

3.2.3 Postopki obdelave podatkov

Pri obdelavi z individualnimi razgovori pridobljenih podatkov bo uporabljena deskriptivna analiza. Po končni raziskavi bomo naredili transkripcijo vsakega posameznega razgovora. Iz danih transkripcij bomo s pomočjo kodiranja oblikovali kategorije, pojme in kode.

3.3 Rezultati in razprava

Raziskava je bila opravljena z namenom proučiti razumevanje neskončnosti pri učencih na razredni stopnji in razlike v razumevanju med učenci posameznih razredov ter tudi primerjati pojavljanje tega pojma v učnem načrtu za matematiko v povezanosti z razumevanjem neskončnosti.

3.3.1 Razlike v razumevanju pojma neskončnost med učenci na razredni stopnji

Kot smo opisali že v teoretičnem delu, je neskončnost izjemno širok pojem, ki je, ne le za otroke, temveč tudi za odrasle, težko razumljiv. V prvem delu empiričnega dela smo se posvetili razlikam v razumevanju obravnavanega pojma med učenci na razredni stopnji. Za pomoč pri prvih treh vprašanjih smo uporabili riževa zrna. Vsem učencem smo zastavili ista vprašanja, odgovore pa nato kodirali.

Preglednica 1: Logična raba neskončnosti učencev na razredni stopnji

Vprašanja št. 1, 2 in 3:
1) Bi lahko prešteli vsa zrna v tej posodi? Kaj meniš, koliko približno jih je?
2) Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? Kaj meniš, koliko približno jih je?
3) Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? Če ja: Kaj meniš, koliko jih je? Če ne: Zakaj ne?

Oznaka		Odgovor	Koda	Kategorija	Tema
R1	U1	1) *»Ja, 50.«* 2) *»Ne, veliko.«* 3) *»Ne, ker jih je preveč.«*	Ja Ne Ne, preveč	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U2	1) *»Ja, če maš ful časa.«* 2) *»Odvisno, koliko jih je. Ja, če jih ni tako veliko. Več kot 200.«* 3) *»Ne, ker jih je preveč. Razen če bi jih ful veliko štelo.«*	Ja Ja Ne, preveč	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U3	1) *»Ne, kakih 1000.«* 2) *»Ne, kakih 500 000.«* 3) *»Ne, ker jih je preveliko.«*	Ne Ne Ne, preveč	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U4	1) *»Ja, sam bi rabil več dni. 2 milijona.«* 2) *»Ne, 900 milijonov.«* 3) *»Ne, ker bi moralo biti 200 odraslih, da bi lahko vse prešteli.«*	Ja Ne Ne	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U5	1) *»Ne, 1000.«* 2) *»Ne, 100, 700, 1000?«* 3) *»Ne, neskončno se mi zdi, da jih je, ker jih še vedno delajo, delajo in delajo.*	Ne Ne Ne, jih je neskončno	Število zrn	Logična raba neskončnosti
R2	U1	1) *»Ja, čez 100.«* 2) *»Ja, 1000.«* 3) *»Ne, zato ker ne bi mogla iti po vseh državah in bi dolgo trajalo.«*	Ja Ja Ne	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U2	1) *»Ne, 1000.«* 2) *»Ne, ne vem.«* 3) *»Ne, ker smo samo v Sloveniji, nismo po celem svetu.«*	Ne Ne Ne	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U3	1) *»Ne, 100.«* 2) *»Ne, 800.«* 3) *»Ne, ker jih je zelo velik.«*	Ne Ne Ne, zelo veliko	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U4	1) *»Ne, velik.«* 2) *»Ne, več kot nekaj milijard.«*	Ne Ne	Število zrn	Logična raba neskončnosti

		3) *»Ne, ker jih je preveč.«*	Ne, preveč		
	U5	1) *»Ne, neskončno.«* 2) *»Ne, na kake milijone.«* 3) *»Ne, ker jih je preveliko.«*	Ne Ne Ne, preveč	Število zrn	Logična raba neskončnosti
R3	U1	1) *»Težko bi bilo, ja. 565.«* 2) *»Ja, 100 050.«* 3) *»Ne, nekaj čez milijon, bilijarde, ker vedno raste.«*	Ja Ja Ne, število ves čas narašča	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U2	1) *»Ne, tam okoli 500 000.«* 2) *»Ne, tam okoli 50 milijonov.«* 3) *»Ne, ker jih je preveč, recimo neskončno, da jih je.«*	Ne Ne Ne, jih je neskončno	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U3	1) *»Ne, čez 300 tam nekje.«* 2) *»Ne, čez 300.«* 3) *»Nemogoče, čez 1000.«*	Ne Ne Ne	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U4	1) *»Ne, na stotine pa na tisoč.«* 2) *»Mogoče, 100 000–10 000.«* 3) *»Ja, na tisoč.«*	Ne Mogoče Ja	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U5	1) *»Ne vem, odvisno, če bi se mi dalo, ampak mogoče bi lahko. Kakih 1000.«* 2) *»Ne, več tisoč, velik več milijonov.«* 3) *»Ne, niti pod razno, ker jih je preveč – neprešteto.«*	Mogoče Ne Ne, jih je neskončno	Število zrn	Logična raba neskončnosti
R4	U1	1) *»Ja, ampak bi rabil ful dolgo časa, 1200.«* 2) *»Ja, ampak bi rabil še več časa. Uf, to jih je pa ful veliko, več kot 2000, se mi zdi.«* 3) *»Ne, ker jih je pa ful, neskončno jih je.«*	Ja Ja Ne, jih je neskončno	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U2	1) *»Ne, več kot 10 000.«* 2) *»Ne, kak milijon.«* 3) *»Ne, zato ker jih je preveč.«*	Ne Ne Ne, preveč	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U3	1) *»Ne, približno 1000.«* 2) *»Ne, 10 000.«* 3) *»Ne, zato ker jih je veliko.«*	Ne Ne Ne, veliko	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U4	1) *»Ja, 300.«* 2) *»Ne, ne vem.«* 3) *»Ne, ker jih je ful veliko.«*	Ja Ne Ne, veliko	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U5	1) *»Bi se dalo, ja. 10 000.«* 2) *»Bi bilo mogoče, 1 milijon.«*	Ja Ja	Število zrn	Logična raba neskončnosti

		3) *»Bi bilo mogoče prešteti, ja. To so pa milijarde.«*	Ja		
R5	U1	1) *»Ne, enih 1000.«* 2) *»Ja, ampak bi rabili veliko časa. Milijon.«* 3) *»Ne, ker jih je preveč«*	Ne Ja Ne, preveč	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U2	1) *»Ja, več kot 1000.«* 2) *»Ja, ampak bi rabila veliko časa. Več kot 1000.«* 3) *»Ne, ker jih je preveč.«*	Ja Ja Ne, preveč	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U3	1) *»Ja, 1000.«* 2) *»Malo težko. Ker jih je veliko, 50 milijonov.«* 3) *»Ne, ker jih je zelo preveč.«*	Ja Težko Ne, preveč	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U4	1) *»Ja, a bi rabil veliko časa. Enih 1000.«* 2) *»Ne, mogoče sto tisoč.«* 3) *»Ne, ker bi rabli veliko let, trajalo bi zelo dolgo.«*	Ja Ne Ne	Število zrn	Logična raba neskončnosti
	U5	1) *»Ja, 400.«* 2) *»Ne, pol milijona.«* 3) *»Ne, 4 milijarde.«*	Ja Ne Ne	Število zrn	Logična raba neskončnosti

Ugotovili smo, da 60 % učencev prvega in četrtega razreda meni, da je mogoče prešteti vsa zrna riža v posodi. Drugače je z učenci drugega in tretjega razreda. Le 20 % jih meni, da je zrna mogoče prešteti. V petem razredu pa je kar 80 % otrok odgovorilo, da je zrna mogoče prešteti. Tak rezultat lahko pripišemo temu, da so ti otroci na stopnji konkretno logičnih operacij. Vedo, da se števila nadaljujejo in nadaljujejo in si konkretneje predstavljajo štetje vseh zrn, vendar pa tak rezultat izključuje rabo kritičnega mišljenja. Nadalje so v primeru števila vseh riževih zrn na šoli učenci prvega, drugega in petega razreda v 80 % potrdili, da jih ni mogoče prešteti. Učenci tretjih in petih razredov pa so dejstvo o nezmožnosti preštevanja vseh zrn na šoli potrdili v 60 %. V nižjih razredih visok odstotek pripisujemo predvsem nepredstavljivosti količine zrn na šoli. V višjih razredih je odstotek nekoliko nižji, vendar je pomembno omeniti, da je vzorec 5 učencev majhen. Tako odstotek učencev petega razreda ni enak 80 % zgolj zaradi učenca, ki je podal odgovor »težko«. Najbolj enotini so si bili učenci vseh razredov pri vprašanju o vseh zrnih na svetu. V prvem, drugem in petem razredu so v 100 % odgovorili, da vseh zrn na svetu ni mogoče prešteti, v tretjem in četrtem pa v 80 %. Pri tem vprašanju je za raziskavo pomembno poudariti, da je precej učencev poleg odgovora »ne« povedalo tudi, zakaj je tako. Dodali so na primer, da je zrn preveč, zelo veliko, da število ves čas narašča in v redkih primerih tudi, da jih ni mogoče prešteti, ker jih je neskončno.

Rezultati so v tem primeru med razredi zelo variabilni in ni opaziti sorazmerja med kognitivno zrelostjo ter razumevanjem neskončnosti. Vidnejši je zgolj upad odstotka možnosti o preštevanju zrn v posodi, in sicer upada med drugim in petim razredom. To lahko pripišemo dejstvu, da otroci prve triade še niso seznanjeni s tako velikimi števili, kolikor je zrn v posodi. Glede na ta vprašanja ne moramo trditi, da se pri logični rabi neskončnosti med učenci na razredni stopnji kažejo pomembnejše razlike.

Preglednica 2: Najmanjše in največje naravno število

Vprašanji št. 4 in 5: 4) Katero je najmanjše naravno število? 5) Katero pa je največje naravno število? Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.					
Oznaka		**Odgovor**	**Koda**	**Kategorija**	**Tema**
R1	U1	4) *»0«* 5) *»Milijon. Ja (ne ve katero).«*	0 Milijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U2	4) *»0«* 5) *»1000, tisto število z 18 ničel – to je največje.«*	0 10^{18}	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U3	4) *»0«* 5) *»Tisoč. Ja, 500 000, 700 000, 800 000, 900 000, milijon. (Večje?) Ne vem.«*	0 Milijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U4	4) *»0«* 5) *»Neskončno. Ne.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U5	4) *»0«* 5) *»Neskončno. Ne, nešteto je enako kot neskončno.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
R2	U1	4) *»1«* 5) *» 100, 1000. Ne.«*	1 1000	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U2	4) *»0«* 5) *»1000, 1050, 1090, 1100.«*	0 1100	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U3	4) *»0«* 5) *» Milijon. Ne.«*	0 Milijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U4	4) *»0«* 5) *»Milijon, dva milijona.«*	0 Dva milijona	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila

	U5	*4) »O ali 1.«* *5) »Milijon, sto tisoč milijonov.«*	0 ali 1 Milijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
R3	U1	*4) »0«* *5) »Bilijon, neskončno.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U2	*4) »0«* *5) »Neskončno, ne.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U3	*4) »0«* *5) »Nešteto. Ne, ker ne moreš niti preštet do nešteto.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U4	*4) »1«* *5) »Sto, 10 000, 100 010, 100 000 milijonov, 100 000 milijard (našteva …).«*	1 100 000 milijard	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U5	*4) »0«* *5) »Milijon. Ja.«*	0 Milijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
R4	U1	*4) »0«* *5) »Bilijon, sekstilijon. Ne.«*	0 Sekstilijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U2	*4) »1«* *5) »Bilijon. Ne.«*	1 Bilijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U3	*4) »0«* *5) »Nešteto. Ne.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U4	*4) »0«* *5) »Neskončno. Ne.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U5	*4) »1«* *5) »Bilijon. Ja, neskončno.«*	1 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
R5	U1	*4) »0«* *5) »Milijarda. Bilijon.«*	0 Bilijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U2	*4) »0«* *5) »Milijon, neskončno.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U3	*4) » –100«* *5) »999 milijonov, milijard.«*	–100 Milijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila

	U4	*4) »0«* *5) »Milijon, neskončno. Ne, mislim, da ne.«*	0 Neskončno	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila
	U5	*4) »– Bilijon.«* *5) »Bilijon, verjetno.«*	– Bilijon Bilijon	Največje in najmanjše naravno število	Naravna števila

Za obdelavo pridobljenih podatkov s pomočjo vprašanja štiri in pet je pomembno razložiti, da največjega naravnega števila ni, saj je naravnih števil neskončno mnogo. Vedeti je treba tudi, da 0 ni naravno število. Ta so namreč tista, s katerimi štejemo.

Učenci prvega razreda v 100 % navajajo, da je najmanjše naravno število 0. Kot največjega pa navedejo milijon, število 10^{18} in neskončno. V drugem razredu povedo, da je najmanjše število 0 v 60 %. Eden izmed učencev se ne opredeli, ali je najmanjše število 0 ali 1, le eden pa poda ustrezen odgovor – najmanjše naravno število je 1. Kot največje število naštejejo števila, kot so 1000, 1100, milijon in dva milijona. Učenci tretjega razreda se v 80 % strinjajo, da je najmanjše naravno število 0 (20 %, da je najmanjše naravno število 1). 60 % učencev tretjega razreda pove, da je največje naravno število neskončno, ostalih 40 % navaja števila, kot sta milijon in 100 000 milijard. Rezultati četrtega razreda kažejo, da 60 % učencev 0, 40 % pa 1 označi kot najmanjše naravno število. Kot največja števila navajajo bilijon, sekstlijon in v 60 % neskončnost. Iz odgovorov učencev petega razreda lahko razberemo, da se 0 (60 %), –100 in – bilijon pojavljajo kot najmanjša naravna števila. Kot največja pa se kažejo milijon (20 %), bilijon (40 %) in neskončno (40 %).

Naši rezultati učencev tretjega razreda o tem, katero je največje naravno število, so primerljivi z rezultati avtorjev Hartnett in Gelman (1998), ki sta v svoji raziskavi ugotovila, da od 50 do 85 % učencev drugega in tretjega razreda ve, da največjega naravnega števila ni, saj lahko vsakemu številu dodamo še večje število.

Pehkonen in Hannula (2006) sta v raziskavi o razumevanju neskončnosti ugotovila podobno kot mi, in sicer da 20 % petošolcev že ima nekaj znanja o neskončnosti naravnih števil. V našem primeru je bil delež sicer 40 %, vendar je vzorec tako majhen, da ga težko posplošimo.

Povemo lahko torej, da učenci prvega razreda ne poznajo pojma »naravna števila«, zato kot najmanjše naravno število navajajo 0. 1 se kot najmanjše naravno število pojavi v drugem razredu (20 %), v enakem odstotku tudi v tretjem razredu, kasneje v četrtem pa se pojavi v 40 %. Vendar se v petem razredu ne pojavi. Pomembno je povedati, da se število 0 kot najmanjše naravno število po mnenju učencev pojavlja v konstantnem odstotku med drugim in petim razredom, zato ne moremo trditi, da učenci katerega koli od obravnavanih razredov jasneje razumejo najmanjše naravno število. Prav takšno je stanje tudi pri največjem naravnem številu. Neskončnosti učenci drugega razreda ne omenjajo. Pojavi pa se v vseh ostalih razredih, vendar zgolj v 40–60 %. Omenjeni odstotki se ne povečujejo sorazmerno s starostjo oziroma razredom, zato ne moremo podati splošne ocene o tem, kateri izmed razredov že bolje pozna števno neskončnost.

3.3.2 Razumevanje neskončnosti v primerih iz geometrije, aritmetike in življenjskih primerih

Preglednica 3: Samostojna opredelitev neskončnosti

Vprašanje št. 6: 6) Kaj je neskončnost?					
Oznaka		**Odgovor**	**Koda**	**Kategorija**	**Tema**
R1	U1	*6) »Neskončno je, da ne moreš prešteti, da se nikoli ne konča.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U2	*6) »Da števil ni konec, da je vedno eno število še večje.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U3	*6) »Da se ne da prešteti do tja.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U4	*6) »Da se nikoli ne konča.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U5	*6) »Da se neko število nikoli ne konča, da šteješ in ne prideš do konca.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
R2	U1	*6) »Se nikoli ne konča.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U2	*6) »Tudi števila, tudi živiš neskončno.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U3	*6) (Ne odgovori.)*	/	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U4	*6) »Recimo, da je nekaj, kar se vedno dogaja, se nikoli ne neha.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U5	*6) »Ne konča se.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
R3	U1	*6) »Število, ki se nikoli ne konča.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost

	U2	*6) »Neko število, ki ga je nemogoče prešteti.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U3	*6) »Ne moreš prešteti do tja, ker to rabiš veliko let.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U4	*6) »Da bi nekaj bilo konec, da bi bilo konec sveta.«*	Nerazumevanje	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U5	*6) »Pač, da se vleče, da ne moreš prešteti.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
R4	U1	*6) »Ko se nekaj nikoli ne konča.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U2	*6) »To je recimo neskončna pot, brez konca.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U3	*6) »Nekaj kar ne moreš prešteti.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U4	*6) »To je številka, ki se vije ves čas naprej.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U5	*6) »Neskončno je, kar gre v nikamor, kar ne moreš prešteti nikoli.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
R5	U1	*6) »Nekaj, kar se ne more končati.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U2	*6) »Se nikoli ne konča.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U3	*6) »To je nekaj, kar vedno traja, nikdar ni konec.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U4	*6) »Da to ne moreš prešteti nikoli.«*	Delno poznavanje (števila)	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost
	U5	*6) »Nekaj, kar se ne konča.«*	Splošna opredelitev	Opredelitev neskončnosti	Neskončnost

Pri opredelitvi neskončnosti smo odgovore kodirali glede na to, ali so splošno opredeljeni (ne kategorizirajo neskončnosti na npr. aritmetiko, geometrijo, življenje …), ali gre za delno poznavanje omenjenega pojma (kategorizirajo glede na področje) in ali je pojem nepoznan oziroma nerazumljen.

Odgovori so pokazali, da pojem delno poznavajo učenci prvega razreda v 80 %, učenci drugega razreda v 20 %, tretjega v 80 %, četrtega v 60 % in petega v 20 %. Splošno poznavanje se v prvem razredu izrazi v 20 %, v drugem razredu v 60 %, v četrtem v 40 % in v petem v 80 %. V tretjem razredu ni učenca, ki bi splošno poznal pojem neskončnosti. Eden izmed učencev je opredeli neskončnost na tak način, da se iz odgovora razbere nerazumevanje obravnavanega pojma.

Iz rezultatov sta razvidna upad delnega poznavanja pojma med prvim in petim razredom ter sorazmerno pojavljanje vse bolj splošne opredelitve. Izstopajočo višjo raven splošnega poznavanja pojma v drugem razredu (60 %) lahko pripišemo temu, da so takrat otroci ravno v prehodu iz predoperacionalne stopnje na stopnjo konkretnih operacij. Razlog za ponovno višji odstotek delnega poznavanja v tretjem razredu bi bil lahko tudi vstop učencev na višjo kognitivno stopnjo, zaradi česar se od otrok lahko pričakuje več – preveč, posledično pa to privede do zmedenosti in slabšega razumevanja.

Preglednica 4: Navajanje in razlaga primerov neskončnosti iz geometrije, aritmetike, fizike in življenja

<table>
<tr><td colspan="6">Vprašanja št. 7, 8 in 9:
7) Lahko naštejeEš primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?
8) Ali lahko narišeš neskončno črto? (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?
9) Ali je vesolje neskončno? Pokažem odsek videa https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Oznaka</td><td>Odgovor</td><td>Koda</td><td>Kategorija</td><td>Tema</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R1</td><td>U1</td><td>7) »Nesreča.«
8) »Ne, to nobeden ne more. Ne večja 100-krat mora biti.«
9) »Nisem še odkril vesolja, zato še ne vem. Mislim, da je. Ne.«</td><td>Nesreča
Ne, ne
Ja, ne</td><td>Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju</td><td>Navajanje in razlaga neskončnosti</td></tr>
<tr><td>U2</td><td>7) »Dihamo ves čas, rast las, ko rasteš.«
8) »Ne, ker potem se ne bi končala. Ja.«
9) »Ja. Rimska cesta je zelo majhen del vesolja. Ne.«</td><td>Dihanje, rast
Ne, ja
Ja, ne</td><td>Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju</td><td>Navajanje in razlaga neskončnosti</td></tr>
</table>

	U3	7) *»Požari bodo vedno, prometne nesreče, poplave, deževja.«* 8) *»Ne. Ja.«* 9) *»Ja, se mi zdi. Ne.«*	Požari, prometne nesreče, poplave, dež Ne, ja Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U4	7) *»Ne vem.«* 8) *»Ne. Ne, čisto kratka je.«* 9) *»Ja bi lahko rekel. Ne.«*	/ Ne, ne Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U5	7) *»Vesolje.«* 8) *»Ja (pokaže s prstom obliko neskončnosti). Ja, ker se ne vidi konca.«* 9) *»Ja. Ja, ker je več vesolj. Ja, ker je potem drugo vesolje.«*	Vesolje Ja, ja Ja, ja	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
R2	U1	7) *»Meseci, tedni, zemlja.«* 8) *»Ne. Ja.«* 9) *»Ja. Ne.«*	Meseci, tedni, zemlja Ne, ja Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U2	7) *»Balet, mizarstvo.«* 8) *»Mogoče ja. Ja.«* 9) *»Ja. Ne.«*	Balet, mizarstvo Ja, ja Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U3	7) / 8) *»Ne. Ja.«* 9) *»Ne. Ne.«*	/ Ne, ja Ne, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U4	7) *»Da živiš, dnevi in noči, da hodiš v šolo.«* 8) *»Bolj težko, ne bi šlo. Ja.«* 9) *»Ja. Ne.«*	Življenje, dnevi in noči, šola Ne, ja Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U5	7) *»Je to, da zemlja ne more umreti, ljubezen.«* 8) *»Ne. Ja.«* 9) *»Ja. Ne.«*	Zemlja, ljubezen Ne, ja Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
R3	U1	7) *»Vesolje, planeti, rastline, razvoj človeka.«*	Vesolje, planeti, rastline, človeški razvoj	Neskončnost v geometriji,	Navajanje in razlaga neskončnosti

		8) *»Ne. Ne.«* 9) *»Ja. Ne.«*	Ne, ne Ja, ne	aritmetiki in življenju	
	U2	7) *»Da rasteš kar naprej, srce bije neskončno, dokler ne umreš, kakih slik slikarjev, razmišljaš vsak dan, spiš skoraj vsak dan, kar naprej morajo odrasli hoditi v službo.«* 8) *»Ne. Ne, samo okrogla je, pa kao izgleda tako.«* 9) *»Ja, vesolje je več milijard svetlobnih let. Ne.«*	Rast, bitje srca, slik, razmišljanje, spanje Ne, ne Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U3	7) *»Dokler mi ne bo brat umrl, mi bo ves čas nagajal. Da, ko bom jaz odrasla, bom živela tam, kjer se bomo zdaj preselili.«* 8) *Lahko, samo boš mogel iti po celem svetu. Ja, če bi bila samo ravna, ne bi bila neskončna.«* 9) *»Še več kot neskončno, da. Se ne more nič prešteti, jaz ne vem, kako se tistemu številu reče ker to je pa tako veliko. Ne.«*	Nagajanje Ja, ja Ja, Ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U4	7) *»Da nas vedno Jezus ustvari. Če bi največji blok naredil.«* 8) *»Ne, bi mogla imeti 100 listov. Ja,«* 9) *»Ja. Ne, ker včasih, če ne bo več gravitacije, lahko tudi luno k zemlji potegne.«*	Jezus nas ustvari Ne, ja Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti

	U5	*7) »Veliko stvari, padeš lahko za vsak, moraš hoditi v šolo, dnevi se ponavljajo, pri matematiki računi.«* *8) »Ne. Ja.«* *9) »Ja. Ne, nima ga.«*	Padci, šola, dnevi, matematični računi Ne, ja Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
R4	U1	*7) »Starost ljudi, višina – rastemo, teža.«* *8) »Ja, samo rabi ogromen papir. Ja.«* *9) »Mogoče, tega še niso odkrili. Po moje, da ne.«*	Starost, višina, rast, teža Ja, ja Mogoče, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U2	*7) »Tisto, da moraš piti in jesti.«* *8) »Ne, ker je premalo listov na svetu. Ne, ni neskončna, je pa povezana.«* *9) »Ja. Ne.«*	Prehranjevanje Ne, ne Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U3	*7) »Svet.«* *8) »Ja. Ja.«* *9) »Ja. Ne.«*	Svet Ja, ja Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U4	*7) »Dnevi, meseci, leta, voda.«* *8) »Ne. Ja.«* *9) »Ja. Ja.«*	Dnevi, meseci, leta, voda Ne, ja Ja, ja	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U5	*7) »Vesolje, cesta.«* *8) »Ja, če bi imeli dosti papirja. Ja.«* *9) »Ja. Ja, črno luknjo. Mogoče prideš nekje drugje ven.«*	Vesolje, cesta Ja, ja. Ja, ja	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
R5	U1	*7) »Vesolje, dreves, ljudi, smeti, živali.«* *8) »Ne. Ne.«* *9) »Ja. Ne.«*	Vesolje, dreves, ljudi, smeti, živali Ne, ne Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U2	*7) »Morje je neskončno, vesolje.«* *8) »Ne. Ne, ima konec.«* *9) »Ja. Ne.«*	Morje Ne, ne Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti

	U3	*7) »Ljudje, živali.«* *8) »Ja. Ne.«* *9) »Ja. Ne.«*	Ljudje, živali Ja, ne Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U4	*7) »Mravlje, mikroorganizmi, iglice na drevesu, tudi rož je zelo veliko.«* *8) »Ja. Ja.«* *9) »Ja. Ima konec.«*	Mravlje, mikroorganizmi, iglice na drevesu, rože Ja, ja Ja, ja	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti
	U5	*7) »Vesolje.«* *8) »Ne. Ne.«* *9) »Ja. Ne.«*	Vesolje Ne, ne Ja, ne	Neskončnost v geometriji, aritmetiki in življenju	Navajanje in razlaga neskončnosti

Življenjski primeri neskončnosti, ki jih navajajo učenci, se med sabo zelo razlikujejo, prav tako so nekateri bolj ustrezni od drugih. Učenci prvega razreda podajo primere, kot so nesreča, dihanje, rast, požari, prometne nesreče, poplave, dež, vesolje. V drugem razredu za primere podajajo mesece, tedne, zemljo, balet, mizarstvo, življenje, dneve in noči, šolo, zemljo, ljubezen. V tretjem razredu povedo, da so primeri iz neskončnosti v življenju vesolje, planeti, rastline, človeški razvoj, rast, bitje srca, slike, razmišljanje, spanje, nagajanje, to, da nas ustvari Jezus, padci, šola, dnevi, matematični računi. Četrti razred pove, da so to starost, višina, rast, teža, prehranjevanje, svet, dnevi, meseci, leta, voda, vesolje in cesta. Najstarejši učenci, vključeni v raziskavo, pa v razgovoru povedo, da so to vesolje, drevesa, ljudje, smeti, živali, morje, ljudje, živali, mravlje, mikroorganizmi, iglice na drevesu, rože in vesolje.

Večini razredov je skupen primer neskončnosti vesolje, pa tudi leta, meseci, tedni, dnevi in noči.

Z vidika neskončnosti v geometriji smo učencem zastavili vprašanje o tem, ali je mogoče narisati neskončno črto. Pritrdilno so učenci prvega, drugega in tretjega razreda odgovorili v 20 %, četrtošolci v 60 % in petošolci v 40 %. Kasneje smo jim pokazali iz papirja izdelano neskončno črto in jih z vprašanjem spodbudili k ponovnemu razmisleku – »Ali je ta črta neskončna?«. Z »ja« je v prvem razredu odgovorilo 60 %, v drugem 100 %, tretjem 60 %, četrtem 80 % in petem 20 %.

Nazadnje smo se osredotočili na vesolje. Najpogosteje je ob omembi neskončnosti to prvo, na kar pomislimo poleg aritmetične neskončnosti. Ugotovili smo, da 100 % učencev prvega, tretjega in petega razreda meni, da je vesolje neskončno. Drugače je v drugem in četrtem razredu, kjer meni, da je vesolje neskončno, 80 % učencev. Po prvem vprašanju na to tematiko smo učencem predvajali video, ki je ponazarjal vesolje in jim zastavili dvomljivo vprašanje – »Ali ima vesolje konec?«. Učenci so morali bolje razmisliti in bili opazno zmedeni, zaradi česar so se odgovori tega vprašanja razlikovali od prvega. Tokrat so učenci prvega razreda v 80 % odgovorili, da vesolje nima konca, drugega v 100 %, tretjega v 100 %, četrtega v 60 % in petega razreda v 80 %.

3.3.3 Odvisnost razumevanja neskončnosti od pojavljanja v učnem načrtu za matematiko

Preglednica 5: Pojavljanje neskončnosti v učnem načrtu za matematiko (Učni načrt, 2011)

Razred	**Področja pojavljanja neskončnosti**
1.	Se ne pojavlja, zaznati ga je mogoče le v vzorcih in zaporedjih.
2.	Se ne pojavlja, zaznati ga je mogoče le v vzorcih in zaporedjih.
3.	Se ne pojavlja, zaznati ga je mogoče le v vzorcih in zaporedjih.
4.	Aritmetika – zapisovanje in branje naravnih števil, večjih od 10 000; zapisovanje denarnih vrednosti z decimalnim zapisom. Geometrija – prepoznavanje ravne črte, opisovanje in poimenovanje. Pojavljanje pri vzorcih.
5.	Aritmetika – zapisovanje in branje števil od milijon. Seštevanje in odštevanje količine v decimalnem zapisu (spoznavanje množice racionalnih števil in razširjene množice števil). Izražanje količine z negativnimi merskimi števili (spoznavanje množice celih števil). Geometrija – spoznavanje pojema ravnina, odnosov med točko, premico, daljico in poltrakom. Opazovanje, prepoznavanje, nadaljevanje in oblikovanje slikovnih geometrijskih vzorcev.

Čeprav pri predhodnih poglavjih empiričnega dela nismo prišli do pomembnejših spoznanj, bomo v tem delu skušali poiskati povezave med prej ugotovljenim in med pojavljanjem pojma neskončnosti v učnem načrtu za matematiko.

V povezavi z učnim načrtom lahko jasneje vidimo razliko o preštevanju zrn v posodi. Učenci od drugega razreda dalje so namreč iz razreda v razred podajali višji odstotek možnosti preštevanja zrn. Ugotovimo lahko, da je to povezano s spoznavanjem vse večjih števil in njihovim nadaljevanjem v neskončnost. Enako s tem rezultatom sovpada tudi rezultat preštevanja zrn na šoli.

Za najmanjše naravno število učenci vseh razredov v majhnem vzorcu navajajo ustrezno, torej število 1. Največ jih omenja število 0. Teh rezultatov ne moremo povezati z učnim načrtom za matematiko, prav tako z njim ne moremo povezati rezultatov o podajanju največjega naravnega števila.

Glede na splošno poznavanje pojma neskončnosti lahko trdimo, da je delno povezano s pojavljanjem v učnem načrtu. Izstopajoči so zgolj rezultati drugega razreda, kjer učenci ne glede na to, da naj v učnem procesu še ne bi spoznali pojma neskončnost, v kar 60 % splošno opredelijo neskončnost. Rezultat je višji zgolj v petem razredu (80 %), kar je glede na pojavljanje pojma v učenem načrtu logično.

Razumevanje geometrijske neskončnosti smo preverjali s prikazom neskončne črte. Glede na to, da se neskončnost nasploh od prvega do tretjega razreda v učnem načrtu še ne pojavi, je odstotek otrok, ki potrjujejo, da je neskončno črto mogoče narisati, primerno nizek (20 %). Kasneje se zviša. Sicer je višji v četrtem razredu kot v petem, česar ne moremo povezati z učnim načrtom, saj se podrobneje geometrijska neskončnost premice pojavi šele v petem razredu.

Rezultati razumevanja neskončnosti vesolja so v vseh razredih približno enaki, zatorej pri njih ne moremo trditi, da gre za kakršno koli odvisnost od pojavljanja obravnavanega pojma v učnem načrtu.

Povezava razumevanja neskončnosti z učnim načrtom je torej opazna pri ugotavljanju možnosti preštevanja različnih količin zrn, splošnem poznavanju pojma neskončnosti ter v manjši meri pri razumevanju geometrijske neskončnosti.

4 SKLEPNE UGOTOVITVE

V teoretičnem delu magistrskega dela smo spoznali in opisali, kaj je neskončnost, zakaj ljudi pritegne in kako jo razumemo. Povedali smo, kateri simbol označuje neskončnost in da je Cantor eden prvih, ki je natančneje opisal neskončnost. Pisali smo tudi o različnih časovnih obdobjih ter avtorjih, ki so na kateri koli način omenjali in razlagali neskončnost že v preteklosti. Povzeli smo ugotovitve različnih avtorjev ter raziskali učni načrt za matematiko. V zadnjem delu teoretičnega dela smo se osredotočili na razvoj mišljenja otrok na splošno ter opisali, kaj o razvoju mišljenja meni Jean Piaget. Da bi izoblikovali celostno podobo, smo pozornost namenili tudi mišljenju v sodobnem izobraževanju, kritičnemu mišljenju ter učitelju in šoli kot spodbujevalcema kritičnega mišljenja.

Nadalje smo v empiričnem delu s pomočjo individualnih intervjujev raziskovali razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji.

Glede na pridobljene rezultate lahko sklenemo, da do razlik v razumevanju neskončnosti med učenci na razredni stopnji prihaja v manjši meri.

Rezultate lahko povzamemo:

- Pri razumevanju različnih količin zrn, logični rabi neskončnosti ni opaziti pomembnejših razlik med razredi.
- Razlik v razumevanju najmanjšega in največjega naravnega števila ni.
- Rezultati so pokazali upad delnega poznavanja pojma neskončnost med prvim in petim razredom ter sorazmerno pojavljanje vse bolj splošne opredelitve.
- Razumevanje geometrijske neskončnosti je delno povezano z obravnavo premice v učnem načrtu, prav tako sta z učnim načrtom povezana možnost preštevanja različnih količin zrn in splošno poznavanje neskončnosti.
- Odgovori na vprašanja o neskončnosti vesolja niso podali pomembnejših razlik v razumevanju med učenci razredne stopnje.

Pomembno je, da pojem uvajamo postopoma, najprej posredno, skozi druge vsebine, kasneje, ko je mišljenje pri učencih že bolje razvito, pa neposredno. Tako lahko pripomoremo k temu, da bodo učenci bolje in lažje razumeli kompleksen pojem neskončnosti, hkrati pa bodo v obdobju med posrednim in neposrednim podajanjem vsebin neskončnosti v določeni meri že razvili tudi veščine kritičnega mišljenja, ki bodo še dodatno pripomogle k celostnejšemu razumevanju neskončnosti.

5 LITERATURA IN VIRI

Achtner, W. (2005). Infinity in Science and Religion. *The Creative Role of Thinking about Infinity, 47*(4). Pridobljeno, 19. 1. 2019, https://www.degruyter.com/view/j/nzst.2005.47.issue-4/nzst.2005.47.4.392/nzst.2005.47.4.392.xml.

Allen, D. (1999). *The history of infinity*. Pridobljeno, 3. 10. 2019, http://www.math.tamu.edu/~dallen/history/infinity.pdf.

Arthur, R. in College, M. (2001). Leibniz on Infinite Number, Infinite Wholes, and the Whole World: A Reply to Gregory Brown. *The Leibniz Review, 11.* Pridobljeno, 5. 1. 2020, https://www.pdcnet.org/8525737F00583BEB/file/C125737F0061E4BAC125756D005F8A1E/$FILE/leibniz_2001_0011_0000_0103_0116.pdf.

Bart, W. (2004). A commentary on H. D. Feldman's essay on Piaget's stages. *New Ideas in Psychology, 22,* 233–237.

Bean, J. C. (2011). *Engaging ideas: The professor's guide to integrating writing, critical thinking and active learning in classroom.* San Francisco: John Wiely and Sons.

Bentley, P. J. (2010). *Knjiga o številih: skrivnosti števil in kako so ustvarila sodobni svet.* Ljubljana: Tehniška založba.

Beyer, B. K. (1988). *Practical strategies for the teaching of thinking.* Boston MA: Allyn and Bacon.

Bolero, P., Douek, N. in Garuti, R. (2003). Children's concepts of infinity of numbers in a grade 5 classroom discussion context. V N. A. Pateman, B. J. Dougherty in J. Zillox, (ur.), *Proceedings of PME27* (str. 121–128). Honolulu: University of Hawaii.

Cantor, G. (1878). Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1878*(84), 242–258.

Carpendele, J. I. M. (2000). Kohlberg and Piaget on Stages and Moral Reasoning. *Developmental Review, 20*(2), 181–205.

Clegg, B. (2003). *The Brief History of Infinity: The Quest to Think the Unthinkable.* London: Constable & Robinson Ltd. Pridobljeno 2. 10. 2019, https://books.google.si/books?id=wRWeBAAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=sl#v=onepage&q&f=false.

Crain, W. (1994). *Theories of Development. Concepts and Applications.* London: Prentice Hall International.

Daniel, M. F. in Auriac, E. (2011). Philosophy, Critical Thinking and Philosophy for Children. *Philosophy in Theory, 43*(5), 415–435.

Domajnko, V. in Kovačič, J. (2002). *Neskončnost: Uvod v razmišljanja o neskončnosti za mlade radovedneže.* Ljubljana: Zveza za tehnično kulturo Slovenije – Gibanje znanosti mladini.

Doumayer, P. (1990). *Les memorables: Jean Piaget.* France: INA.

Ennis, R. H. (1989). Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research. *Educational researcher, 18*(3), 4–10.

Ennis, R. H. in Millman, J. (1985). *Cornell Critical Thinking Test-Level X.* Pacific Grove, CA: Midwest Publications.

Evans, D. W. (1983). *Understanding zero and infinity in the early school years.* Unpublished doctoral dissertation. Pennsylvania: University of Pennsylvania.

Facione, P. A. (1990). *Critical Thinking: A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction. Research Findings and Recommendations.* Pridobljeno 25. 2. 2020, http://assessment.aas.duke.edu/documents/Delphi_Report.pdf.

Falk, R. (1994). Infinity: A Cognitive Challenge. *Theory & Psychology, 4*(1), 35–60.

Falk, R., Gassner, D., Ben-Zoor, F. in Ben-Simon, K. (1986). How do children cope with the infinity of numbers? V *Proceedings of the Tenth International Conference fort he Psychology of Mathematics Education* (str. 13–18). London.

Fekonja Peklaj, U. (2010). *Lev S. Vigotski: Mišljenje in govor.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani in Znanstvenoraziskovalni inštitut Filozofske fakultete Univerze v Ljubljani.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 309–329.

Fischbein, E., Tirosh, D. in Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*(1), 3–40.

Fischer, R. (2005). *Teaching Children to Think.* Cheltenham: Nelson Thornes.

Feldman, D. H. (2004). Piaget's stages: the unfinished symphony of cognitive development. *New Ideas in Psychology, 22,* 175–231.

Fuson, K. C. (1998). *Children's counting and concepts of numbers.* New York: Springer.

Gamow, G. (1988). *One, Two, Three – Infinity: Facts and Speculations of Science.* San Francisco: Courier Corporation. Pridobljeno, 7. 2. 2020, https://books.google.si/books?hl=sl&lr=&id=EZbcwk6SkhcC&oi=fnd&pg=PA3&dq=galileo+galilei+infinity&

ots=tOYiR3_6A_&sig=AIKkG_DmnBaDCA2-W5PJbWvVOHE&redir_esc=y#v=onepage&q=galileo%20galilei%20infinity&f=false.

Gole, I. (2013). *Razumevanje neskončnosti v osnovni šoli.* Magistrsko delo. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.

Goswami, U. (2001). Cognitive development: no stages please –we're British. *British Journal of Psychology, 92,* 257–277.

Greenhill, V. (2009). *P21 framework definitions document.* Pridobljeno, 26. 2. 2020, http://www.21stcenturyskills.org/documents/p21_framework_definitions_052909.pdf.

Griffin, P, McGaw, B. in Care, E. (2012). *Assessment and Teaching of 21st Century Skills.* New York: Springer. Pridobljeno 26. 2. 2020, https://www.taylorfrancis.com/books/9780429458026.

Guedj, D. (1998). *Svet števil.* Ljubljana: DZS.

Halpern, D. F. (2003). *Thought and Knowledge: An introduction to critical thinking* (4th ed.). Mahwan, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Halpern, D. F. (2006). *Thought and Knowledge: An Introduction to Critical Thinking.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associations.

Hartnett, P. in Gelman, R. (1998). Early understanding of numbers: paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction, 8*(2), 341–374.

Heller, I. in Woodin, W. H. (2011). *Infinity: New Research Frontiers.* New York: Cambridge University Press. Pridobljeno: 20. 12. 2019, https://books.google.si/books?hl=sl&lr=&id=PVNbIGS37wMC&oi=fnd&pg=PR9&dq=heller+in+woodin+2011&ots=-cv1PH98Xf&sig=PUumkTTLHW1zcGbyU-ComgcGS70&redir_esc=y#v=onepage&q=heller%20in%20woodin%202011&f=false.

Hirvi, V. (1996). Change-Education Teaching Training. V Razdevšek Pučko, C. (2004). Kakšnega učitelja potrebuje (pričakuje) današnja (in jutrišnja) šola? *Sodobna pedagogika, 55*, 52–74.

Holton, D. in Symons, D. (2020). Infinity-based thinking in the primary classroom: a case for its inclusion in the curriculum. *Mathematics Education Research Journal.* Pridobljeno, 25. 2. 2020, https://doi.org/10.1007/s13394-020-00311-4.

Huitt, W. in Hummel, J. (2003). Piaget's theory of cognitive development. *Educational Psychology Interactive.* Valdosta, GA: Valdosta State University. Pridobljeno, 5. 3.

2020, https://intranet.newriver.edu/images/stories/library/stennett_psychology_articles/Piagets%20Theory%20of%20Cognitive%20Development.pdf.

Keng, L. T. (1996). Critical thinking and Socratic inquiry in the classroom. V *ERA-AARE Joint Conference, Singapore.* Pridobljeno, 27. 2. 2020, https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/17627/1/ERA-AARE-1996-LimTK.pdf.

Kerndl, M. (2010). Učno okolje, ki omogoča kakovostno samostojno učenje. *The Journal of Elementary Education, 3*(2/3), 105–121. Pridobljeno, 18. 2. 2020, https://journals.um.si/index.php/education/article/view/278.

Kos, M. (2013). *Dojemanje neskončnosti pri devetletnih otrocih.* Diplomsko delo. Koper: Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta.

Kownslar, A. O. (1985). What's Worth Having Students Think Critically About. *Social Education.* Pridobljeno, 28. 2. 2020, https://eric.ed.gov/?id=EJ316051.

Kurfiss, J. G. (1988). Critical Thinking: Theory, Research, Practice, and Possibilities. *ASHE-ERIC Higher Education Report No. 2.* Pridobljeno, 25. 2. 2020, https://eric.ed.gov/?id=ED304041.

Labinowicz, E. (2010). *Izvirni Piaget.* Ljubljana: DZS.

Lai, E. R. (2011). Critical thinking: A literature review. *Pearson's Research Reports, 6*, 40–41.

Ličen, T. (2013). *Dojemanje neskončnosti pri šestletnih otrocih.* Diplomsko delo. Koper: Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta.

Lipman, M. (1987). Critical Thinking: What can it be? *Analytic Teaching, 8*(1). Pridobljeno, 27. 2. 2020, http://libservices.viterbo.edu/journal/ojs/index.php/at/article/view/403.

Lipman, M. (2003). *Thinking in Education* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. Pridobljeno 26. 2. 2020, https://pdfs.semanticscholar.org/3fdd/35e91d7adf8876301eb512655b4de933385a.pdf.

Lourenco, O. M. (2016). Developmental stages, Piagetian stages in particular: A critical review*. New Ideas in Psychology, 40,* 123–137.

Luria, A. R. (1976). *Cognitive development: Its cultural and social foundations.* Harvard University Press.

Mamolo, A. in Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education, 10,* 167–182.

Martinjak, N. (2004). Telo, gibanje in razvoj mišljenja. *Socialna pedagogika, 8*(2), 153–172.

Marques, J. F. (2012). Moving from trance to think: why we need to polish our critical thinking skills, *International Journal of Leadership Studies, 7*(1), 87–95.

Miklavec, T. (2017). *Množica transcendentnih realnih števil.* Diplomsko delo. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.

Milčinski, M. (1992). *Klasika daoizma.* Ljubljana: Slovenska matica.

Miller, P. H. (1989). *Theories of developmental psychology* (2nd ed.). New York: W. H. Freeman and Company.

Moreno, L. E. in Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 211–231.

Mulnix, J. W. (2012). Thinking critically about critical thinking. *Educational Philosophy and Theory, 44*(5), 464–479.

Oberžan, L., Rabrenović, D., Veselinović, V. in Vogrin, A. (2006). *Veliki splošni leksikon založbe Modita.* Kranj: Modita.

Ojose, B. (2008). Applying Piaget's Theory of Cognitive Development to Mathematics Instruction. *The Mathematics Educator, 18*(1), 26–30.

Osakwe, R. N. (2009). The Effect of Early Childhood Education Experience on the Academic Performances of Primary School Children. *Studies on Home and Community Science, 3*(2), 143–147.

Paul, R. (1990). Critical and Reflective Thinking: A Philosophical Perspective. V B. F. Jones in L. Idol (ur.), *Dimensions of Thinking and Cognitive Instructions* (str. 447–495). NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Pehkonen, E. in Hannula, M. S. (2006). Infinity of numbers: A complex concept to be learnt? V S. Altaorre, J. L. Cortina, M. Sáiz in A. Méndez (ur.), *Psychology of Mathematics Education* (str. 152). Mérida, Youcatán, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Piaget, J. in Inhelder, B. (1948). *La representation de l'espace chez l'enfant.* Pariz: PUF.

Pučko, C. (2004). Kakšnega učitelja potrebuje (pričakuje) današnja (in jutrišnja) šola? *Sodobna pedagogika, 55*, 52–74.

Rotar, P. (2012). *Teorija množic pri poučevanju matematike.* Diplomsko delo. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta, Fakulteta za matematiko in fiziko.

Smullyan, R. (1995). *Satan, Cantor in neskončnost.* Kamnik: Logika.

Sternberg, R. J. (1985). Teaching Critical Thinking, Part 1: Are We Making Critical Mistakes? *The Phi Delta Kappan, 67*(3), 194–198. Pridobljeno, 25. 2. 2020, https://www.jstor.org/stable/20387579?seq=1.

Sternberg, R. J. (1986). *Critical Thinking: Its Nature, Measurement, and Improvement.* Washington DC: National Institute of Education. Pridobljeno 25. 2. 2020, https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED272882.pdf.

Trzesicki, K. (2018). Negation and infinity. *Studies in logic, grammar and rhetoric, 54* (67).

Vezjak, B. (2018). *Znanost in logično mišljenje: razumevanje logičnih zmot pri otrocih.* Maribor: Filozofska fakulteta Univerze v Mariboru.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language* (E. Hanfman & G. Vakar, Eds.) Cambridge, MA: MTT Press.

Walsh, D. in Paul, R. K. (1986). The Goal of Critical Thinking: from Educational Ideal to Educational Reality. *American Federation of Teachers.* Pridobljeno, 28. 2. 2020, https://eric.ed.gov/?id=ED295916.

Watson, G. B. in Glaser, E. M. (1980). *WGCTA Watson-Glaser critical thinking appraisal manual: Forms A and B.* San Antonio: The Psychological Corporation.

Weinert, F. E. in Helmke, A. (1998). The neglected role of individual differences in theoretical models of cognitive development. *Learning and Instructions, 8,* 309–324.

Winstedt, I. in Martinsson, M. (1996). Orchestrating a mathematical theme: eleven-year olds discuss the problem of infinity. *Learning and instruction 6*(2), 173–185.

Zalar, J. (2017). *Kritično mišljenje pri pouku tehnike in tehnologije v osnovni šoli.* Diplomsko delo. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.

Žakelj, A. (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika.* Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

6 PRILOGE

Priloga 1: Soglasje staršev

SOGLASJE STARŠEV

Sem Katja Rojnik, študentka študijskega programa 2. stopnje Razredni pouk na Pedagoški fakulteti Univerze na Primorskem. Za svoje magistrsko delo z naslovom: **Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji**, pod vodstvom mentorja izr. prof. dr. Darija Felde in somentorice dr. Sanele Mešinovič, bom s pomočjo intervjuja proučila razumevanje pojma neskončnost v primerih iz matematike in življenja. Otroci, ki bodo oddali pisno soglasje staršev oziroma skrbnikov, bodo v šolskem času odgovorili na 9 zastavljenih vprašanj.

Vljudno Vas prosim, da s podpisom potrdite sodelovanje pri omenjeni raziskavi. Vaš podpis bo omogočil vključitev Vašega otroka v raziskavo zaključnega magistrskega dela. Vsi rezultati bodo anonimni in uporabljeni zgolj v raziskovalne namene.

Najlepša hvala,

Katja Rojnik

Spodaj podpisani/a ____ se strinjam, da moj otrok ____ sodeluje pri raziskavi zaključnega magistrskega dela študentke Katje Rojnik. Vsi podatki bodo anonimni in uporabljeni zgolj v raziskovalne namene zaključnega dela.

Lastnoročni podpis:________________________________

Žalec, __________________________

Priloga 2: Intervju

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: ____________________
RAZRED: ___________________________________

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	
4	- Katero je najmanjše naravno število?	
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	
6	- Kaj je neskončnost?	
7	- Lahko naštaješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	

Priloga 3: Transkripcije intervjujev učencev 1. razreda

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **1. 1**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja. Enih 50.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Veliko.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je velik preveč.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Milijon. Ja, (Katero?), ne vem, katero.
6	- Kaj je neskončnost?	Neskončnost je, da ne moreš prešteti, da se nikoli ne konča.
7	- Lahko naštejeਸ਼ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Nesreča, ljubezen.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne, to noben ne more. Ne, večja 100-krat more biti.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Nisem še odkril vesolja, zato še ne vem. Mislim, da je. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **1. 2**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja, če imaš fuuul časa. Več kot sto. Zagotovo.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Odvisno, koliko jih je. Ja, če jih ni toliko veliko. Več kot 200.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je preveč. Razen, če bi jih ful veliko štelo.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	1000, tisto število z 18 ničel, to je največje.
6	- Kaj je neskončnost?	Da števil ni konec, da je vedno eno število še večje.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Dihamo ves čas, lasje nam rastejo, mi rastemo.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne, ker potem se ne bi končala. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Rimska cesta je zelo majhen del vesolja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **1. 3**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Kakih 1000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Kakih 500 000.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je preveliko.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Tisoč. Ja, 500 000, 700 000, 800 000, 900 000, milijon (Še večje?). Ne vem.
6	- Kaj je neskončnost?	Da se ne da prešteti do tja.
7	- Lahko naštejeь primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Požari bodo vedno, prometne nesreče, poplave, deževje.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja, se mi zdi. Ne, nima.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **1. 4**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja, samo bi rabil več dni. 2 milijona.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. 900 minjonov.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Zato, ker bi moglo biti 200 odraslih, da bi lahko vse prešteli.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Neskončno. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	Da se nikoli ne konča.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Mmm, ne vem.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ne, čisto kratka je ta črta.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja bi lahko rekel. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **1. 5**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. 1000
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. 100, 700, 1000.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne, neskončno se mi zdi, da jih je, ker jih še vedno delajo, delajo in delajo.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Neskončno.
6	- Kaj je neskončnost?	Da se neko število nikoli ne konča, da šteješ in šteješ in šteješ in ne prideš do konca.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Vesolje.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ja. (pokaže s prstom neskončno črto – znak za neskončnost) Ja, ker se ne vidi konca.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ja, ker je več vesolj, ker je potem še drugo vesolje.

Priloga 4: Transkripcije intervjujev učencev 2. razreda

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **2.1**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja. Čez 100.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ja. Enih 1000.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Zato, ker ne bi mogla iti po vseh državah in bi dolgo trajalo.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	1
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	100, 1000. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	Se nikoli ne konča.
7	- Lahko našteje源 primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Meseci, tedni, zemlja.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **2. 2**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. 1000
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Ne vem.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker smo samo v Sloveniji, nismo po celem svetu.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	1000, 1050, 1090, 1100.
6	- Kaj je neskončnost?	Tudi števila, tudi živiš neskončno.
7	- Lahko naštevaš primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Balet, mizarstvo.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Mogoče ja. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **2. 3**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. 100
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. 800
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je zelo veliko.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Milijon. Ne ne obstaja.
6	- Kaj je neskončnost?	Ne vem.
7	- Lahko naštejeŠ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Ammm, ne vem.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ne. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **2. 4**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Veliko jih je.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Več kot par milijard.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je preveč.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Milijon. Dva milijona. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	Recimo, da je nekaj, kar se vedno dogaja, kar se nikoli ne neha.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Da živiš, dnevi in noči, da hodiš v šolo.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Bolj težko, ne bi šlo. Je.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **2. 5**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Neskončno.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Na kake milijone.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je preveliko.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0 ali 1.
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Milijon, sto tisoč milijonov. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	Ne konča se nikoli.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Ja, to da zemlja ne more umreti, ljubezen je tudi.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

Priloga 5: Transkripcije intervjujev učencev 3. razreda

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **3.1**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Težko bi bilo. (Pa bi šlo?) Ja. 565.
.2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ja. 100 050
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Nekaj čez milijon, biljarde, ker vedno raste.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Bilijon, neskončno. Ne. Neskončno.
6	- Kaj je neskončnost?	Število, ki se nikoli ne konča.
7	- Lahko naštejeÅ¡ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Vesolje, planeti, rastline, razvoj človeka.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ne.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **3. 2**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Tam okoli 500 000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Tam okoli 50 milijonov.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je preveč, recimo neskončno, da jih je.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Neskončno. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	Neko število, ki ga je nemogoče prešteti.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Da rasteš kar naprej, srce bije neskončno, dokler ne umreš, kakih slik slikarjev, razmišljaš vsak dan, spiš skoraj vsak dan, kar naprej morajo odrasli hoditi v službo.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ne, sam okrogla je pa kao izgleda tako, kot da je neskončna.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja, vesolje je več milijard svetlobnih let. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **3. 3**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Čez 300, tam nekje.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Čez 300.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Nemogoče. Čez 1000.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Nešteto. Ne, ker ne moreš prešteti do nešteto.
6	- Kaj je neskončnost?	Da se, ne moreš prešteti do tja, ker to rabiš veliko let.
7	- Lahko naštevaš primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Dokler mi ne bo brat umrl, mi bo ves čas nagajal. Da ko bom jaz odrasla, bom živela tam, kjer se bomo zdaj preselil.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Lahko, samo bom mogel iti po celem svetu zdaj pa se preseliti. Ja, če bi bila samo ravna, ne bi bla neskončna.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Še več kot neskončno, da se ne more nič prešteti. Jaz ne vem, kako se tistemu številu reče, ker to je pa tako veliko. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **3. 4**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Na stotine pa na tisoč jih je.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Mogoče. Sto tisoč.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ja. Na tisoč.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	1
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	100, 10 000, 100 010, 100 000 milijonov, 100 000 milijard.
6	- Kaj je neskončnost?	Da bi nekaj bilo konec, da bi bilo konec sveta.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Da nas vedno Jezus ustvari, če bi največji blok naredil.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne, bi mogla imeti 100 listov. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne. Ker včasih, če ne bo več gravitacije, lahko tudi luno k zemlji potegne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **3. 5**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne vem, odvisno, če bi se mi dalo, ampak mogoče bi lahko. Kakih 1000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Več tisoč, velik več milijon.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne, niti pod razno. Ker jih je preveč – neprešteto jih je.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Milijon. Ja.
6	- Kaj je neskončnost?	Pač, da se vleče. Da ne moreš prešteti.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Velik stvari, padeš lahko vsak dan, moreš hodit iv šolo vsak dan, dnevi se ponavljajo, pri matematiki računi …
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne, nima ga.

Priloga 6: Transkripcije intervjujev učencev 4. razreda

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **4. 1**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja, ampak bi rabil ful dolgo časa. 1200
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ja, ampak bi rabil še več časa. Uf, to jih je pa ful velik, več kot 2000, se mi zdi.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je pa ful, neskončno jih je.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Bilijon. Sekstilijon. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	Ko se nekaj nikoli ne konča.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Starost ljudi, višina – rastemo, teža.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ja, sam rabim ogromen papir. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Mogoče, tega še niso odkrili. Po moje, da ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **4. 2**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Več kot 10 000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Kak milijon.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Zato, ker jih je preveč.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	1
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Bilijon. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	To je na primer neskončna pot brez konca.
7	- Lahko našteje2š primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Testi, da moraš piti in jesti.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne, ker je premalo listov na svetu. Ne, ni neskončna, je pa povezana.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **4. 3**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Približno 1000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. 10 000
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Zato, ker jih je veliko.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Nešteto. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	Nekaj, kar ne moremo prešteti.
7	- Lahko naštejeŝ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Svet.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ja. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **4. 4**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja. 300
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Ne vem.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je ful veliko.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Neskončno. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	To je številka, ki se vije kar naprej.
7	- Lahko naštejeŝ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Dnevi, meseci, leta, voda.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ja.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **4. 5**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Bi se dalo, ja. 10 000
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Bi bilo mogoče. 1 milijon.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Bi bilo mogoče prešteti, ja. To so pa milijarde.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	1
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	1 bilijon. Ja, neskončno.
6	- Kaj je neskončnost?	Neskončnost je, ko gre v nikamor, ko ne moreš prešteti nikoli.
7	- Lahko naštejeҫ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Vesolje, cesta.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ja, če bi imeli dosti papirja. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ja, črno luknjo. Mogoče prideš nekje drugje ven.

Priloga 7: Transkripcije intervjujev učencev 5. razreda

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **5. 1**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ne. Enih 1000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ja, ampak bi rabil veliko časa. Milijon.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je preveč.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Milijarda. Bilijon.
6	- Kaj je neskončnost?	Nekaj, kar se ne more končati.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Vesolje, drevesa, ljudi, smeti, živali.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ne.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **5. 2**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja. Več kot 1000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ja, ampak bi rabila veliko časa. Več kot 1000.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je preveč.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Milijon. Neskončno.
6	- Kaj je neskončnost?	Se nikoli ne konča.
7	- Lahko naštejebeš primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Morje je neskončno, vesolje.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne. Ne, ima konec.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **5. 3**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja. 1000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Malo težko. (Zakaj?) Ker jih je veliko. 50 milijonov.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker jih je zelo preveč.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	100
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	999 milijonov, milijard. Ne.
6	- Kaj je neskončnost?	To je nekaj, kar vedno traja, nikdar ni konec.
7	- Lahko naštejeř primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Ljudje, živali.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ja. Ne.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ne.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **5. 4**

1	- Bi lahko prešteli zrna v tej posodi? - Kaj meniš, koliko jih je približno?	Ja, a bi rabili veliko časa. Enih 1000.
2	- Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli? - Kaj meniš, koliko približno jih je?	Ne. Mogoče sto tisoč.
3	- Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti? - Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	Ne. Ker bi rabili veliko let, trajalo bi zelo dolgo.
4	- Katero je najmanjše naravno število?	0
5	- Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Milijon. Neskončno. Ne, mislim, da večjega od neskončno ni.
6	- Kaj je neskončnost?	Da to ne moreš prešteti nikoli.
7	- Lahko našteješ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Mravlje, mikroorganizmi, iglice na drevesu, tudi rož je zelo veliko.
8	- Ali lahko narišeš neskončno črto? - (Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ja. Ja.
9	- Ali je vesolje neskončno? - Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ja. Ima konec.

INTERVJU

Razumevanje pojma neskončnost pri učencih na razredni stopnji

IME oz. ŠTEVILKA učenca: **5. 5**

1	-	Bi lahko prešteli zrna v tej posodi?	Ja.
	-	Kaj meniš, koliko jih je približno?	400
2	-	Ali bi lahko prešteli vsa zrna na šoli?	Ne.
	-	Kaj meniš, koliko približno jih je?	Pol milijona.
3	-	Kaj pa je z vsemi zrni na svetu, bi jih bilo mogoče prešteti?	Ne.
	-	Če ja: Kaj meniš koliko jih je?; Če ne: Zakaj ne?	4 milijarde.
4	-	Katero je najmanjše naravno število?	Bilijon.
5	-	Katero pa je največje naravno število? – Če je odgovor milijon, milijarda ipd. zastavim vprašanje, ali obstaja še večje število.	Bilijon, verjetno.
6	-	Kaj je neskončnost?	Nekaj, kar se ne konča.
7	-	Lahko naštejeᚡ primere neskončnosti v vsakdanjem življenju, naravi?	Vesolje.
8	-	Ali lahko narišeš neskončno črto?	Ne.
	-	(Izdelam neskončno črto in jo pokažem.) Ali je ta črta neskončna?	Ne.
9	-	Ali je vesolje neskončno?	Ja.
	-	Pokažem odsek videa – https://www.youtube.com/watch?v=n3UjUYqFdKU in ponovno vprašam: Ali ima vesolje konec?	Ne.