

Marco A. Carpio Alemán
Walter H. Orozco Tupacyupanqui

Introducción al Análisis e Implementación de Sistemas de Control Automático

Universidad Politécnica Salesiana

Introducción al Análisis e Implementación de Sistemas de Control Automático

Marco A. Carpio Alemán
Walter J. Orozco Tupacyupanqui

Introducción al Análisis e Implementación de Sistemas de Control Automático



2017

Introducción al Análisis e Implementación de Sistemas de Control Automático

© *Marco A. Carpio Alemán*

© *Walter H. Orozco Tupacyupanqui*

1era. Edición: Universidad Politécnica Salesiana 2017
Av. Turuhuayco 3-69 y Calle Vieja
Casilla: 2074
P.B.X.: (+593 7) 2050000
Fax: (+593 7) 4088958
e-mail: rpublicas@ups.edu.ec
www.ups.edu.ec
Área de Ciencia y Tecnología
CARRERA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
Casilla: 2074
P.B.X.: (+593 7) 2050000
Cuenca-Ecuador

Diseño

Diagramación

Impresión:

Editorial Universitaria Abya-Yala
Quito-Ecuador

ISBN: 978-9978-10-273-2

Derechos

de autor: 051213

Depósito legal: 005889

Tiraje: 300 ejemplares

Impreso en Quito-Ecuador, junio 2017

Publicación arbitrada de la Universidad Politécnica Salesiana.

Índice

Introducción	1
Descripción del contenido	2
Notación	3
Agradecimiento	4
Acerca de los autores	5
1. Introducción a los Sistemas de Control	6
1.1. Definiciones y conceptos	6
1.1.1. Teoría de Sistemas de Control Automático	6
1.1.2. Ingeniería de Control	7
1.1.3. Clasificación de los Sistemas de Control.	14
1.2. Sistemas de control en lazo abierto y lazo cerrado.	16
1.2.1. Sistema de Lazo Abierto (<i>LA</i>).	16
1.2.2. Sistema de Lazo Cerrado (<i>LC</i>)	17
1.3. Representación de los sistemas de control.	19
1.4. Preguntas de repaso.	23
2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.	24
2.1. Modelo matemático mediante ecuaciones diferenciales.	24
2.1.1. Modelo matemático de sistemas mecánicos.	24
2.1.2. Modelo matemático de sistemas eléctricos.	32
2.2. Función de Transferencia de los sistemas lineales.	38
2.3. Diagrama de bloques de funciones de transferencia y técnicas aplicadas para su simplificación.	48
2.3.1. Reducción de diagramas de bloques.	57
2.4. Gráfica de flujo de señales.	61
2.4.1. Cálculo de la ganancia para gráficas de flujo de señales.	64
2.5. Gráficas de estados.	69
2.5.1. Característica del sistema representado en Espacios de Estados.	83
2.6. Preguntas y ejercicios de repaso.	88

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).	90
3.1. Efectos de la realimentación en un sistema de control.	90
3.2. Señales típicas de prueba para evaluación de sistemas.	94
3.3. Análisis del error en estado estable.	96
3.4. Análisis de Sistemas de Primero y Segundo Orden.	104
3.4.1. Modelo de sistemas de Primer orden.	104
3.4.2. Modelo de sistemas de Segundo orden.	106
3.4.3. Determinación de las características para el Modelo de Primer Orden.	119
3.4.4. Determinación Características, Modelo de Segundo Orden.	120
3.4.5. Análisis del comportamiento de sistemas de segundo orden en función del coeficiente de amortiguamiento.	122
3.5. Estabilidad de un sistema.	127
3.5.1. Criterio de estabilidad de Routh Hurwitz.	128
3.5.2. Procedimiento para determinar estabilidad según el criterio de Routh Hurwitz.	128
3.5.3. Casos Especiales.	131
3.5.4. Estabilidad relativa.	133
3.6. Lugar Geométrico de las Raíces (LGR).	137
3.6.1. Trazado del lugar geométrico de raíces	141
3.7. Linealización de sistemas mediante el Jacobiano.	150
3.8. Preguntas y ejercicios de repaso.	156
4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia	157
4.1. Respuesta de sistemas en el dominio de la frecuencia	157
4.1.1. Salida en estado estacionario	158
4.2. Diagramas de Bode	160
4.2.1. Diagrama de Bode de una ganancia K	161
4.2.2. Diagrama de Bode de un integrador	161
4.2.3. Diagrama de Bode de un diferenciador	162
4.2.4. Diagrama de Bode de un polo simple	163
4.2.5. Diagrama de Bode de un cero simple	164
4.2.6. Diagrama de Bode de factor cuadrático (denominador)	165
4.2.7. Diagrama de Bode de un factor cuadrático (numerador)	166
4.2.8. Diagrama de Bode de un factor exponencial (retraso puro)	168
4.3. Diagrama de Bode de una función de transferencia general	169
4.3.1. Aporte en magnitud	169
4.3.2. Aporte en fase	170
4.4. Parámetros de comportamiento en el dominio de la frecuencia	170

4.4.1.	Determinación del pico y la frecuencia de resonancia de un sistema de segundo orden	171
4.4.2.	Ancho de banda (W)	173
4.5.	Análisis de estabilidad de los sistemas de control (Diagrama de Bode)	174
4.6.	Preguntas y ejercicios de repaso.	176
5.	Diseño y ajuste de controladores.	177
5.1.	Estructura Básica de un Sistema con Controlador	177
5.2.	Diseño e implementación del controlador Proporcional Integral Derivativo (PID).	178
5.3.	Diseño e implementación de controlador por realimentación de estados con observador.	185
5.4.	Sistemas de control en tiempo discreto.	197
5.4.1.	Ecuaciones en Diferencias (muestras)	197
5.4.2.	Etapas para la discretización y tratamiento de una señal.	198
5.5.	Implementación del controlador PID digital.	202
5.6.	Algunas consideraciones para la implementación de sistema de control discreto.	206
5.7.	Preguntas y ejercicios de repaso.	208

Introducción

Este libro sintetiza los conocimientos básicos utilizados en la Ingeniería de Control, se pretende preparar al lector para el análisis e implementación del control automático en sistemas virtuales y físicos. El desarrollo de estas temáticas son consideradas como elementales para el modelamiento y la implementación de un controlador con el uso de herramientas accesibles como MATLAB y LabView. Este libro reúne las experiencias de los autores y los trabajos conjuntos con los estudiantes de los cursos de Teoría de Control de la Universidad Politécnica Salesiana (UPS). Se ha incluido experimentaciones de controladores desarrollados en el laboratorio de control de la UPS, que fácilmente pueden ser regeneradas por el lector con la intención de comprender de manera eficaz la teoría.

Descripción del contenido

El primer capítulo está orientado a explicar los conceptos básicos de la Teoría de Control tales como; establecer los modelos de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) como funciones de transferencia, los distintos tipos de sistemas de control, la definición de términos y bloques usados en sistemas de control tanto en lazo abierto como en lazo cerrado, también se hace mención a las señales de prueba y las perturbaciones a las cuales se pueden someter dichos sistemas. El segundo capítulo está enfocado al modelamiento de los sistemas a ser controlados, se incluye ejemplos desarrollados para los sistemas más comunes como; circuitos mecánicos (masa-resorte-amortiguador), circuitos eléctricos (resistencia-inductancia-capacitancia) y sistemas combinados. Se desarrolla el modelamiento matemático usando ecuaciones diferenciales, para luego obtener el modelo como Función de Transferencia y el modelo en Espacio de Estados. En el capítulo tercero se realiza el análisis en el dominio del tiempo, en el cual se estudian los sistemas de primer y segundo orden. Se revisa el criterio de estabilidad de Routh Hurwitz y el trazado del lugar geométrico de raíces (LGR), adicionalmente se realiza un enfoque a la linealización de sistemas de control mediante el Jacobiano. En el capítulo cuarto se cubre una introducción al análisis de los sistemas de control en el dominio de la frecuencia con base en el diagrama de Bode, se determinan las ecuaciones que caracterizan el comportamiento de un sistema de control clásico de segundo orden, se estudia la respuesta en estado permanente del sistema y las condiciones de estabilidad de un sistema de control al analizar las curvas de magnitud y fase de las funciones de transferencia en relación a la frecuencia. Finalmente en el capítulo quinto se realiza un enfoque a la matemática discreta y la Transformada Z, lo que posteriormente es usado para establecer el controlador PID en su forma discreta, el mismo que es implementado con la ayuda del software LabView.

Notación

De acuerdo con el material bibliográfico consultado y considerando la terminología tradicional utilizada para la teoría de control, se utilizó la siguiente notación:

PID: Proporcional Integral Derivativo.

y : señal de salida de un sistema.

r : señal de referencia o entrada de un sistema.

e : señal de error.

u : señal de control o comando.

s : variable compleja para la transformada de Laplace.

$x(t)$: variable en función del tiempo.

\dot{x} : derivada temporal de $x(t)$.

A,B,C,D: matrices para modelo de espacio de estados del sistema.

GFS: gráfica de flujo de señales.

LGR: Lugar geométrico de las raíces.

τ : Tao del sistema.

modelamiento: representación matemática para el sistema físico.

planta: sistema físico en análisis.

Agradecimiento

Este libro surge a partir de unos apuntes de las clases de Teoría de Control impartidas por los autores aproximadamente por 5 años, además de las experimentaciones realizadas en el laboratorio de control de la UPS. Se agradece a nuestros estudiantes, quienes pudieron sintetizar de primera mano los conocimientos impartidos en cada una de las clases, y de manera especial al estudiante Kevin Fabricio Calle Urgilez, un aficionado de la temática y colaborador en la corrección del material. Se agradece también a nuestros compañeros docentes de las carreras de Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Electrónica, y a las autoridades de la UPS por el apoyo brindado para la consecución de esta meta. Finalmente, se da un agradecimiento por las observaciones realizadas por los revisores del documento, la magister Jazmín Ramírez Hernández del Instituto Politécnico Nacional de México y el magister Julio César Zambrano Abad de la Universidad Politécnica Salesiana del Ecuador.

Acerca de los autores

Marco Alexander Carpio Alemán recibió el grado de magister en control y automatización industriales, y el grado de Ingeniero Electrónico por la Universidad Politécnica Salesiana. Es importante mencionar, que el ingeniero Carpio es el primer graduado de la oferta de maestría además de obtener el grado académico con sobresaliente. En la actualidad es profesor de ingeniería eléctrica y electrónica en la Universidad Politécnica Salesiana sede Cuenca, en la cual también desempeña el cargo de Director de la Carrera de Electricidad y de Ingeniería Eléctrica. Es miembro del Grupo de Investigación de Interacción, Robótica y Automatización (GIIRA). En sus trece años como docente universitario ha impartido diversas cátedras referentes a Sistemas Microprocesados y Teoría de Control en pregrado. Tiene a su haber varias publicaciones en congresos científicos internacionales indexados en Scopus. Sus áreas de interés involucran principalmente sistemas de control, robótica y lógica difusa.

Walter Humberto Orozco Tupacyupanqui recibió el grado de Doctor en Comunicaciones y Electrónica por el Instituto Politécnico Nacional de México, el grado de M.Sc. en Ingeniería Eléctrica y Sistemas por el New York Institute of Technology, y el grado de Ingeniero Eléctrico por la Universidad de Cuenca. Es importante destacar que obtuvo sus grados académicos de posgrado con menciones honoríficas por méritos académicos y de investigación. En la actualidad es profesor de ingeniería eléctrica, electrónica y telecomunicaciones en la Universidad Politécnica Salesiana sede Cuenca, en la cual también desempeña el cargo de Director de la Carrera de Telecomunicaciones y Coordinador del Grupo de Investigación de Interacción, Robótica y Automatización (GIIRA). En sus doce años como docente universitario ha impartido diversas cátedras relacionados a Señales y Sistemas y Teoría de Control tanto en pregrado como posgrado. Tiene a su haber varias publicaciones en revistas y congresos científicos internacionales indexados en Scopus y JCR. Sus áreas de interés involucran principalmente sistemas de control, sistemas de comunicaciones, filtrado inteligente, sistemas neurodifusos y procesamiento digital de señales.

Capítulo 1

Introducción a los Sistemas de Control

1.1. Definiciones y conceptos

En este apartado se presenta las definiciones y conceptos empleados en el análisis de los sistemas de control, desde un punto de vista de la teoría de control clásico y moderno.

1.1.1. Teoría de Sistemas de Control Automático

La Teoría de Sistemas de Control Automático, es una temática que aborda el aprendizaje de las técnicas de modelamiento de sistemas físicos, y el conocimiento de herramientas matemáticas e informáticas, que permitan el análisis y el uso de estrategias de diseño de sistemas de control. Su implementación permitirá garantizar el adecuado funcionamiento de la planta o sistema controlado.

Es importante enfatizar sobre algunos conceptos manejados en la teoría de control, tales como:

- **Señal:** Cantidad física que se desarrolla a través del tiempo y posee información de interés.
- **Sistema:** Integración de elementos de distinta naturaleza, que permiten generar o modificar señales.

1. Introducción a los Sistemas de Control

- **Control:** Dominio, manejo, comando, gobierno o regulación de un sistema.

Los sistemas a controlar pueden tener diferentes entradas y salidas, por lo tanto se los puede clasificar según las mismas.

Sistemas de Única Entrada Única Salida, como se muestra en la figura 1.1

Sistemas de Múltiple Entrada Múltiple Salida, como se muestra en la figura 1.2



Figura 1.1: Sistema Única Entrada Única Salida



Figura 1.2: Sistema Múltiple Entrada Múltiple Salida

1.1.2. Ingeniería de Control

De acuerdo al panorama histórico citado en [1], la ingeniería de Control data desde el siglo XVII, con el trabajo de James Watt para el control de velocidad de una máquina de vapor, Minorsky en 1922, Nyquist en 1932 y Hazen en 1934, entre otros, proporcionaron importantes aportes para el desarrollo de la teoría de control.

Se puede destacar principalmente que la ingeniería de control, consiste en el desarrollo de las siguientes etapas:

- Modelamiento de la planta.
- Análisis de estabilidad y comportamiento dinámico.
- Análisis y propuesta de control.

1. Introducción a los Sistemas de Control

- Diseño, sintonización y simulación del controlador.
- Implementación y verificación del funcionamiento (pruebas correspondientes).

La ingeniería de control en función de su evolución y de acuerdo con las herramientas matemáticas usadas, se ha categorizado en dos grandes campos conocidos como el Control Clásico y el Control Moderno.

Teoría del Control Clásico.

Comprende un análisis de sistemas de control, usando la herramienta matemática de Laplace y su comportamiento en el plano de la variable compleja (s). El modelado de la planta se presenta mediante una Función de Transferencia $G(s)$, la misma que es definida posteriormente. Uno de los alcances relevantes en este campo, es el controlador de tres términos PID (Proporcional, Integrador, Derivador).

El uso de la matemática de la transformada de Laplace, para la solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema, presenta las siguientes ventajas:

1. Permite modelar y resolver sistemas que poseen componentes de diferente naturaleza, como por ejemplo componentes eléctricos, mecánicos, térmicos, entre otros, que al interactuar entre sí constituyen un solo mecanismo.
2. Facilita la solución de las ecuaciones diferenciales, al convertir estas ecuaciones en un caso de solución de ecuaciones algebraicas de menor complejidad, al estar representadas en el dominio de la variable compleja (s).
3. Permite obtener la solución de las ecuaciones diferenciales en forma directa, lo cual reemplaza el procedimiento clásico de emplear un tratamiento independiente para obtener una solución homogénea y una solución particular.

1. Introducción a los Sistemas de Control

4. Permite simplificar bloques de función de transferencia que se encuentran en cascada, tan solo con realizar el producto de las funciones de transferencia de los mismos, evitando la complejidad, de realizar el proceso correspondiente que es la operación de convolución, para cuando los bloques estén representados como modelos en función del tiempo.

Un planteamiento de bloques de función de transferencia correspondiente a un tratamiento de control clásicos, es como el que se muestra en la figura 1.3

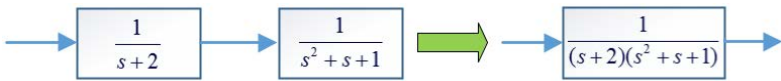


Figura 1.3: Bloques de función de transferencia en cascada

Los textos de matemáticas o de teoría de control, como es el caso de [1, 2], plantean en tablas los casos más generales para la transformada de Laplace. La tabla 1.1 presenta algunos de ellos.

Principales Transformadas de Laplace	
f(t)	F(s)
$\delta(t)$ <i>Impulso Unitario</i>	1
$\mu(t)$ <i>Escalón Unitario</i>	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{ a-b }(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{e^{-at}}{(b-a)(a-c)} \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

Tabla 1.1: Algunos casos de transformada de Laplace

1. Introducción a los Sistemas de Control

Es importante también para el estudio de la teoría de control, enfatizar sobre las técnicas de transformada inversa de Laplace, que permitirá dar una interpretación temporal a los resultados analizados en bloques de Laplace.

Transformada Inversa de Laplace, solución mediante fracciones parciales: Como se propone en [1, 2], consiste en descomponer el modelo, en diferentes términos, uno para cada raíz del denominador, con la finalidad de que al momento de aplicar la transformada inversa, esta se la pueda realizar directamente al tratarse de casos probablemente ya definidos en tablas. Los principales casos son abordados en los siguientes ejemplos:

- **Caso de raíces diferentes.**

$$G(s) = \frac{1}{(s+4)(s+5)} \quad (1.1)$$

$$G(s) = \frac{A}{(s+4)} + \frac{B}{(s+5)} \quad (1.2)$$

De acuerdo a lo planteado en [1], los coeficientes A y B se calcula mediante la evaluación de los residuos de $G(s)$ en el polo correspondiente, tal como se muestra a continuación:

$$A = G(s)(s+4)|_{s=-4} \quad (1.3)$$

$$B = G(s)(s+5)|_{s=-5} \quad (1.4)$$

Estando el sistema en la forma de la ecuación 1.2, se puede aplicar directamente la transformada inversa de Laplace, para conseguir la solución del sistema planteado en 1.1.

- **Caso de raíces repetidas.**

1. Introducción a los Sistemas de Control

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)^2} \quad (1.5)$$

$$G(s) = \frac{A_0}{(s+3)^2} + \frac{A_1}{s+3} \quad (1.6)$$

Donde los coeficientes A_0 y A_1 son:

$$A_0 = G(s)(s+3)^2|_{s=3} \quad (1.7)$$

$$A_1 = \frac{d}{ds} [G(s)(s+3)^2]|_{s=3} \quad (1.8)$$

De manera similar al caso anterior, estando el sistema en la forma de la ecuación 1.6, se puede aplicar directamente la transformada inversa de Laplace, para conseguir la solución del sistema planteado en 1.5.

Para el análisis de los sistemas de control, se debe considerar que aquellos serán sometidos a la presencia de señales físicas en su entrada, lo que provocará una respuesta de salida, por lo tanto es necesario conocer la representación matemática en transformada de Laplace de estas señales. A continuación se presenta la representación matemática y la correspondiente gráfica, para dos de las señales que son comúnmente utilizadas en el campo del análisis de los sistemas de control.

▪ La función Delta Dirac.

Definida matemáticamente en la ecuación 1.9, y representada gráficamente como la figura 1.4

$$\delta = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

1. Introducción a los Sistemas de Control

Su transformada de Laplace corresponde a:

$$\Delta(s) = 1 \quad (1.10)$$

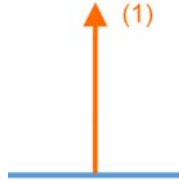


Figura 1.4: Función Delta Dirac

■ La función Escalón.

Definida matemáticamente en la ecuación 1.11, y representada gráficamente como la figura 1.5

$$\mu(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Su transformada de Laplace corresponde a:

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad (1.12)$$



Figura 1.5: Función Escalón

1. Introducción a los Sistemas de Control

Control Moderno.

Se caracteriza por estar sustentado principalmente en un análisis temporal, mediante el planteamiento de ecuaciones diferenciales y herramientas matriciales. El modelado del sistema está constituido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, cuyas variables se conocen como variables de estado y representan los estados del sistema, de esta manera el modelo toma su nombre de modelo en espacios de estados. La representación matemática en forma generalizada de acuerdo a [1], se presenta en las ecuaciones 1.13 y 1.14.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.13)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.14)$$

donde:

\dot{x} - Matriz de estados derivados.

x - Matriz de estados.

u - Matriz de entradas del sistema.

A - Matriz de Transición (característica del sistema).

B - Matriz de Control (coeficientes asociados de la entrada).

C - Matriz de Observación (coeficientes asociados a la salida).

D - Matriz de transferencia directa entrada-salida.

y - Matriz de salidas del sistema.

Este planteamiento permite, que un sistema representado por una ecuación diferencial de orden n , pueda ser representado con un sistema de n ecuaciones de primer orden, empleando n variables de estado.

Gráficamente el sistema de las ecuaciones 1.13 y 1.14, está estructurado como se muestra en la figura 1.6.

1. Introducción a los Sistemas de Control

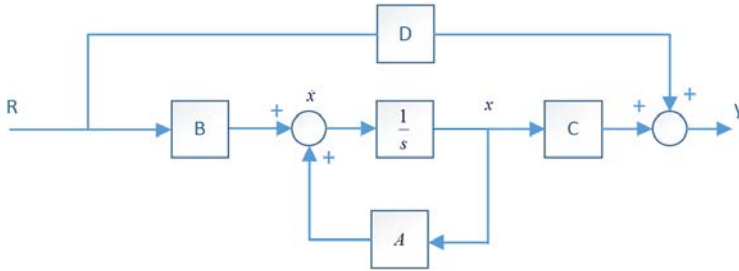


Figura 1.6: Diagrama de bloques del sistema en tiempo continuo, en su representación en el espacio de estados

Generalmente para simplificar el análisis de los sistemas de control, es común no considerar la matriz de transferencia directa entrada-salida, debido a que, de acuerdo a la estructura de la figura 1.6, el flujo de la señal que atraviesa bloque D , no afecta los estados internos de la planta.

1.1.3. Clasificación de los Sistemas de Control.

Los Sistemas de Control pueden ser clasificados de múltiples maneras, se menciona algunas de ellas.

Por su naturaleza

- Control de Temperatura
- Control de Velocidad
- Control de Posición
- Control de Flujo
- Control de Nivel

1. Introducción a los Sistemas de Control

Por el tipo de señal.

- Sistemas en *Tiempo Continuo*: El análisis de señales en tiempo continuo que fluyen por el sistema, generalmente es desarrollado empleando la *Transformada de Laplace* y el planteamiento de modelos en espacios de estados a base de ecuaciones diferenciales.
- Sistemas en *Tiempo Discreto*: A diferencia del caso anterior, para el tratamiento de las señales discretas que fluyen por el sistema, generalmente se emplea la *Transformada Z* y el planteamiento de modelos en espacios de estados a base de ecuaciones en diferencias.

Por su modelo matemático.

- Sistemas Lineales: Corresponde a sistemas cuyo modelo matemático está representada por una ecuación diferencial lineal. Un ejemplo de aquello se muestra en la ecuación 1.15.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3 = 5u \quad (1.15)$$

- Sistemas No lineales: Representados con una o varias ecuaciones diferenciales en las cuales, en uno o varios términos, se presenta la no-linealidad. Un ejemplo de aquello se muestra en la ecuación 1.16

$$\sqrt{\ddot{x}} + \frac{2\ddot{x}}{x} + 3Sen(x) + 3u = 0 \quad (1.16)$$

Se puede recomendar profundizar el tratamiento de sistemas no lineales en [3].

Por su comportamiento y respuesta, con el paso del tiempo.

- Sistemas Variantes en el Tiempo: Son sistemas que varían su comportamiento al pasar el tiempo. Como ejemplo puede citarse un cohete espacial, el cual cambia su modelo matemático a medida que pierde masa al quemar combustible.

1. Introducción a los Sistemas de Control

- Invariantes en el tiempo: Son aquellos que teóricamente no varían su comportamiento, su modelo es el mismo a pesar de que ha pasado el tiempo considerablemente. En este caso los ejemplos podrían ser; el caso de un horno, un motor, entre otros.

Considerando el envejecimiento de todo sistema, se puede decir que todo sistema es variante en el tiempo y que se consideran invariantes aquellos en los cuales los cambios no son tan representativos en el modelo.

- Sistemas Causales: Son sistemas causa-efecto es decir, requiere una señal de entrada para que se desarrolle una respuesta en la salida.
- Sistemas no Causales: Son sistemas en los cuales la salida se desarrolla sin que se haya presentado una señal de entrada (acciones futuras que pueden ser analizadas matemáticamente).

1.2. Sistemas de control en lazo abierto y lazo cerrado.

Los sistemas de control pueden tener una estructura natural de lazo abierto o lazo cerrado, pudiendo también un sistema natural de lazo abierto convertirse en un sistema de control de lazo cerrado al incorporar un lazo de realimentación.

1.2.1. Sistema de Lazo Abierto (LA).

Este tipo de sistemas no permite conocer si la salida controlada cumple con los objetivos de control, debido a que no posee realimentación. Estos sistemas pueden ser representados gráficamente como se muestra en la figura 1.7.

1. Introducción a los Sistemas de Control

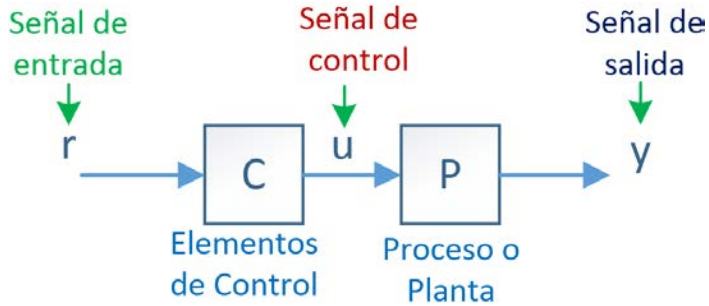


Figura 1.7: Sistema de control en lazo abierto

Como ejemplo se puede mencionar el caso de una lavadora, la cual presenta las siguientes características:

- Funciona sobre una base de tiempos.
- La variable de salida: “ropa limpia”, no influye en una posible reconfiguración del funcionamiento de la lavadora; es decir, no hay certeza de que al terminar el proceso la ropa esté completamente limpia. La figura 1.8 muestra los bloques que conforman el sistema de la lavadora.

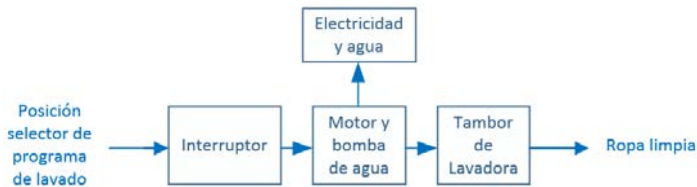


Figura 1.8: Ejemplo de un sistema de control en lazo abierto

1.2.2. Sistema de Lazo Cerrado (*LC*)

Este tipo de sistema posee realimentación de la señal de salida, con la cual se puede comprobar si el sistema de control cumple con el objetivo deseado.

1. Introducción a los Sistemas de Control

El insumo para el trabajo del bloque controlador, quien debe generar la señal de control que gobierna la planta, es una señal (e) conocida como señal de error, que se obtiene como diferencia entre la señal de referencia (r) y la señal de salida (y) que pasa a través de el bloque de realimentación (H), como se muestra en la figura 1.9.

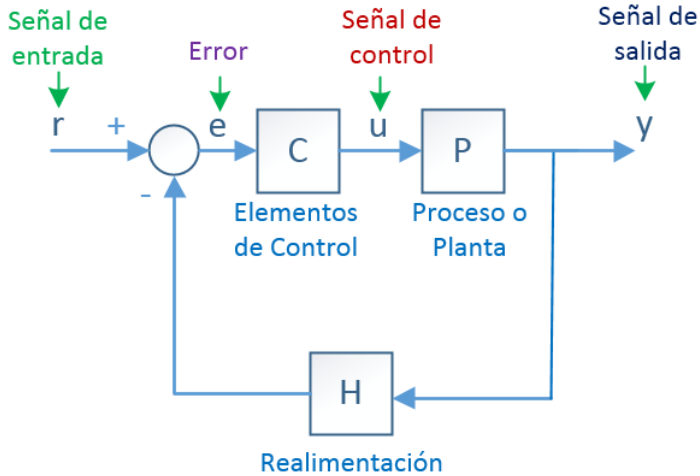


Figura 1.9: Sistema de control en lazo cerrado

El bloque (H) corresponde al arreglo matemático que permite igualar las unidades y las escalas correspondientes entre la señal de entrada y la señal de salida. Este bloque es llamado función de transferencia de realimentación.

Como ejemplo se puede citar el caso de un sistema de control de temperatura de un horno, que presenta las siguientes características de funcionamiento: Se fija un valor de temperatura en lo que será la referencia del sistema, el sistema está realimentado mediante un sensor de temperatura, cuando la temperatura del horno no ha llegado al valor prefijado, se presenta una señal de error, la misma que sirve como insumo del bloque controlador, el cual tiene la función de generar una señal de control específica e instantánea, que permita igualar la temperatura del horno con lo fijado en la referencia. En presencia de algún disturbio como es el caso de la apertura de la puerta, el horno

1. Introducción a los Sistemas de Control

disminuirá la temperatura, produciéndose nuevamente una señal de error y con esto la señal de control también cambiará, permitiendo de corregir esa caída de temperatura del horno. En la figura 1.10 se muestra el diagrama de bloque del control de temperatura para el horno.

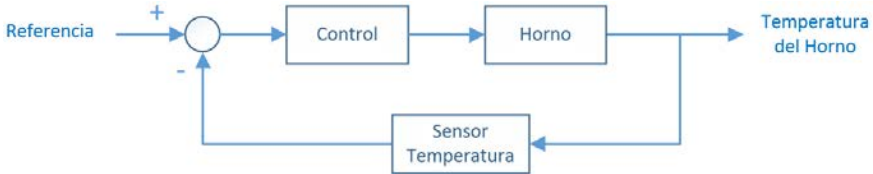


Figura 1.10: Sistema de control para un horno.

Se recomienda ampliar estos conceptos de sistemas de control tanto en lazo abierto como en lazo cerrado, analizando los ejemplos planteados en [1, 2, 4].

1.3. Representación de los sistemas de control.

Con la finalidad de facilitar el análisis de los sistemas de control, estos son representados mediante diagramas de bloques, permitiendo visualizar las relaciones entre los componentes del sistema y las señales que fluyen en dicho sistema.

Los componentes principales de un sistema de control son:

- **Proceso:** Es el proceso que se desea controlar o regular.
- **Controlador:** Encargado de generar la señal de control que gobierna la planta, utiliza como insumo la señal de error.
- **Bloque de realimentación:** Es un convertidor de escalas y unidades, permite determinar el valor de la señal de salida, que luego será enviada a ser comparada con la de entrada.
- **Señal de control:** Es la señal generada por el controlador y que comanda la planta.

1. Introducción a los Sistemas de Control

- **Señal de salida:** Es la señal, resultado del proceso de control, se la conoce también como variable controlada.
- **Señal de referencia (En inglés como: Set Point):** es el valor en el cual se desea mantener la variable controlada, también conocida como señal de comando del sistema.
- **Señal de error:** Es una señal que corresponde a la diferencia entre la señal de referencia y la señal de realimentación.
- **Señal de realimentación:** Es la señal que recoge el sensor y es comparada con la de referencia para dar lugar a la señal de error.

La figura 1.11 muestra el diagrama de bloque para un sistema en realimentación.

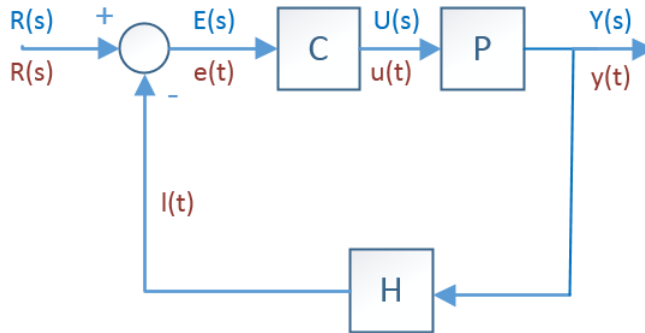


Figura 1.11: Bloques y señales de un sistema de control

Donde las letras en mayúsculas corresponden a la representación en el dominio de Laplace y las letras en minúsculas a la representación en el dominio del tiempo:

$u(t)$ = Señal de control.

$y(t)$ = Señal de salida o señal controlada.

$r(t)$ = Señal de referencia (*Set Point*).

1. Introducción a los Sistemas de Control

$e(t)$ = Señal de error.

$l(t)$ = Señal de realimentación.

P = Bloque de la función de transferencia del proceso o planta.

C = Bloque de la función de transferencia del controlador.

H = Bloque de la función de transferencia de realimentación.

Se puede acotar que los bloques C y P están en cascada y conforman la trayectoria directa entre la entrada y la salida, como se observa en la figura 1.11.

En la figura 1.12 se puede notar una configuración diferente, en la que el controlador aparece en la etapa de realimentación, para lo cual tendrá otras consideraciones en su cálculo.

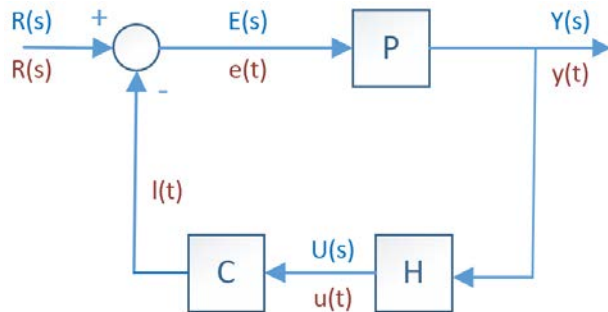


Figura 1.12: Sistema de control con el controlador en la etapa de realimentación

Error y perturbación en un sistema de control.

Dentro de un sistema de control, el cual posee una configuración de controlador en cascada en la trayectoria directa, como es el caso

1. Introducción a los Sistemas de Control

de la figura 1.11, el error es el insumo de decisión del controlador, si el error es cero el controlador mantiene la señal de comando de la planta. El error básicamente es determinado a partir de la diferencia de la señal de referencia y la señal de realimentación de la salida del sistema, de acuerdo a [4].

Cuando en el proceso de control, aparece una señal no considerada, que hace que el sistema sufra algún tipo de alteración, se genera en dicho sistema una perturbación o disturbio. Estas entradas de perturbación o entradas de disturbio pueden ingresar en cualquier parte del proceso y afectar directamente a la señal controlada.

Con la finalidad de hacer un análisis, se considera la perturbación dentro de sistema de bloques como se muestra en la figura 1.13. Esta señal corresponde a una perturbación en la planta que fue dividida en 2 bloques. G1 y G2 de acuerdo a [1]. Este tipo de perturbación puede ser de diferente naturaleza: mecánica; eléctrica; térmica; entre otras, según la naturaleza del proceso.

Por lo general las perturbaciones son el producto de acciones de rozamiento, cargas adicionales, rotura parcial de elementos, escape de líquidos, pérdida de presión, entre otras.

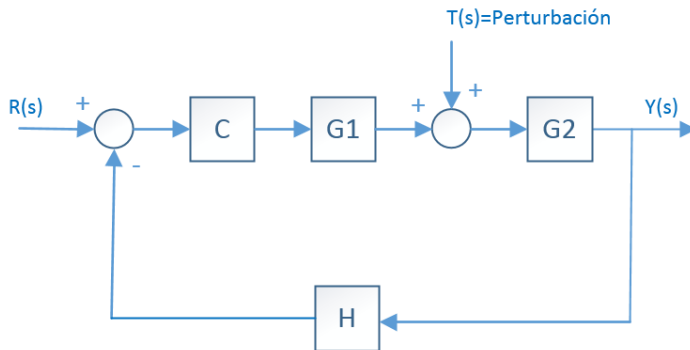


Figura 1.13: Representación de una perturbación $T(s)$ en un sistema de control.

Es necesario destacar que en los siguientes capítulos se estudiará principalmente los sistemas lineales invariantes en el tiempo y la perturbación considerada será de tipo aditiva, pudiendo estar presente

1. Introducción a los Sistemas de Control

en el interior de la planta, como es el caso de la figura 1.13, o también a la salida del sistema.

1.4. Preguntas de repaso.

1. ¿Qué entiende por Función de Transferencia?.
2. Defina un sistema de control en lazo abierto y dé un ejemplo especificando su entrada y su salida.
3. Defina un sistema de control en lazo cerrado y dé un ejemplo especificando su entrada, su salida y la señal de realimentación.
4. Indique la naturaleza de la señal de entrada de un controlador en estructura en cascada.
5. ¿Cuál es la función de la salida de un controlador en estructura en cascada?.
6. Defina una perturbación en un sistema de control y dé un ejemplo de perturbación para un sistema físico real.

Capítulo 2

Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Se emplea el uso de la matemática de ecuaciones diferenciales para encontrar los modelos de los sistemas físicos a partir del conocimiento de sus parámetros.

Para analizar un sistema de control, primeramente se debe definir su entrada y su salida, para luego proceder a obtener el modelo matemático que lo describa. Dicho modelado matemático, generalmente se lo puede llevar a cabo mediante:

- Planteamiento de ecuaciones diferenciales.
- Identificación experimental paramétrica.
- Identificación Digital experimental, mediante estímulos con señales PRBS (**Secuencia Binaria Pseudoaleatoria**), entre otras.

2.1. Modelo matemático mediante ecuaciones diferenciales.

2.1.1. Modelo matemático de sistemas mecánicos.

Se determina el modelo matemático del sistema de dos formas:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

1. Como *función de transferencia*.-Mediante el uso de la transformada de Laplace.
2. Como *modelo en espacio de estados*.-Constituido por un sistema matricial que muestra la relación entre las variables de estado que conforman el sistema.

En el ejemplo 1 se propone un sistema mecánico constituido por una masa, un resorte y un amortiguador, como se muestra en la figura 2.1.

- Obtención del modelo como *función de transferencia*.

Considerando que el orden de un sistema (definido por el orden del polinomio del denominador), está en función directa con el número de elementos almacenadores de energía presentes y que actúan de manera independiente, se puede notar de antemano que este sistema del ejemplo 1 será de segundo orden, al estar constituido por dos elementos almacenadores de energía (el resorte y la masa).

Ejemplo 1: Sistema masa resorte amortiguador.

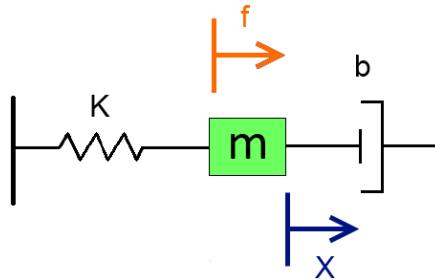


Figura 2.1: Modelo de un sistema mecánico

Donde:

K - Constante elástica del resorte.

m - Masa del sistema.

x - Desplazamiento de la masa.

f - Fuerza aplicada a la masa para provocar el desplazamiento.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

b - Constante de amortiguamiento.

Aplicando la ley de fuerzas de Newton según [5] y considerando desplazamiento en el eje x .

$$\sum F = m * a \quad (2.1)$$

$$f - Kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \quad (2.2)$$

Donde

\dot{x} corresponde a la velocidad de la masa m .

\ddot{x} corresponde a la aceleración de la masa m .

Definimos la entrada y la salida del sistema ejemplo.

$$\text{Consideramos } \begin{cases} f = \text{ entrada} \\ x = \text{ salida} \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 2.2 podemos encontrar la función de transferencia $G(s)$ que relaciona la entrada $F(s)$ y la salida $X(s)$.

$$F(s) - KX(s) - bsX(s) = ms^2X(s) \quad (2.3)$$

Buscamos despejar la relación $\frac{X(s)}{F(s)}$ en la ecuación 2.3,

$$F(s) = X(s) [ms^2 + bs + K] \quad (2.4)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + K} \quad (2.5)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Finalmente la función de transferencia para el sistema masa resorte amortiguador $G(s)$ es:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + K} \quad (2.6)$$

La representación del bloque de la función de transferencia, con su respectiva entrada y salida, es como se muestra en la figura 2.2 .

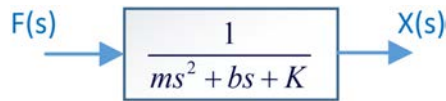


Figura 2.2: Función de transferencia de un sistema masa, resorte y amortiguador

- Obtención del modelo en *espacio de estados*.

Se define las variables de estado, con la recomendación de que el primer estado corresponde a la variable con el menor grado de derivada que presenta la ecuación diferencial. Para el ejemplo desarrollado, la ecuación diferencial a tomar en cuenta es la ecuación 2.2, por lo tanto definimos dos estados al tratarse de un sistema de segundo orden.

$$\begin{cases} x_1 = x & \leftarrow \text{Variable con derivada menor orden} \\ x_2 = \dot{x}_1 & = \dot{x} \end{cases} \quad (2.7)$$

Donde:

x_1 - Representa la posición de la masa m .

x_2 - Representa la velocidad de la masa m .

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Se reemplaza los estados x_1 y x_2 en la ecuación diferencial y se obtiene:

$$m\dot{x}_2 + bx_2 + Kx_1 = f \quad (2.8)$$

La técnica de modelación en espacio de estados consiste en convertir la ecuación diferencial de orden n , en un sistema de n ecuaciones de primer orden de acuerdo a [1] y [2]. Para este caso debemos encontrar un sistema de dos ecuaciones de primer orden a más de la ecuación de salida. En la ecuación 2.9 se muestra el sistema de ecuaciones que representan el sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{f}{m} \\ y = & x_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

De manera general, la estructura del modelo en espacio de estados de las ecuaciones 1.13 y 1.14. para el presente ejemplo son:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot f \quad (2.10)$$

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Ejemplo 2: Sistema mecánico de movimiento de dos masas.

En la figura 2.3 se muestra un sistema interconectado de dos masas, en una de ellas se aplica una fuerza externa con la finalidad de generar un movimiento. El ejercicio consiste en encontrar la función

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

de transferencia que permita establecer como salida el desplazamiento de masa m_2 , tomando como entrada la fuerza aplicada a la masa m_1 .

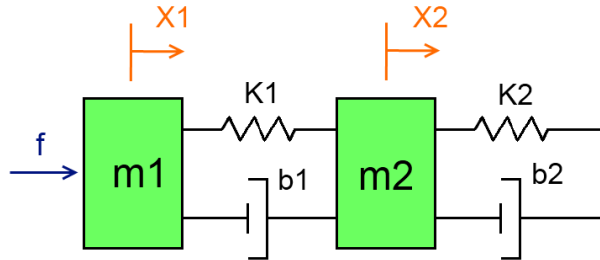


Figura 2.3: Modelo mecánico

Aplicando la ecuación 2.1 que corresponde a la ley de Newton, para cada uno de los cuerpos en movimiento, se tiene:

Para m_1

$$f - k_1(x_1 - x_2) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1\ddot{x}_1 \quad (2.12)$$

Para m_2

$$k_1(x_1 - x_2) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2x_2 - b_2\dot{x}_2 = m_2\ddot{x}_2 \quad (2.13)$$

$$\text{Definimos } \begin{cases} f = & \text{entrada} \\ x_2 = & \text{salida} \end{cases}$$

- Obtención del modelo como *función de transferencia*.

Aplicando la transformada de Laplace, a las ecuaciones 2.12 y 2.13, obtenemos las ecuaciones 2.14 y 2.15 respectivamente

$$F(s) + (k_1 + b_1s)X_2(s) = X_1(s) [m_1s^2 + b_1s + k_1] \quad (2.14)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$X_1(s) [b_1s + k_1] = X_2(s) [m_2s^2 + s(b_1 + b_2) + k_1 + k_2] \quad (2.15)$$

Se procede a despejar $X_1(s)$ de la ecuación 2.15

$$X_1(s) = \frac{X_2(s) [m_2s^2 + s(b_1 + b_2) + k_1 + k_2]}{sb_1 + k_1} \quad (2.16)$$

Se reemplaza $X_1(s)$ en la ecuación 2.14 y se obtiene:

$$F(s) + X_2(s) (k_1 + b_1s) = \frac{X_2(s) [m_2s^2 + s(b_1 + b_2) + k_1 + k_2]}{sb_1 + k_1} P(s) \quad (2.17)$$

donde

$$P(s) = (m_1s^2 + b_1s + k_1)$$

$$F(s) (sb_1 + k_1) = X_2(s) G(s) \quad (2.18)$$

y $G(s)$ está dado por:

$$G(s) = \left\{ [m_2s^2 + s(b_1 + b_2) + k_1 + k_2] (m_1s^2 + b_1s + k_1) - (k_1 + b_1s)^2 \right\} \quad (2.19)$$

Finalmente la función de transferencia buscada $G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)}$, es la que se expone en la ecuación 2.20

$$G(s) = \frac{sb_1 + k_1}{[m_2s^2 + s(b_1 + b_2) + k_1 + k_2] (m_1s^2 + b_1s + k_1) - (sb_1 + k_1)^2} \quad (2.20)$$

Con lo cual el sistema representado en diagrama de bloque es lo que muestra la figura 2.4.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.



Figura 2.4: Función de transferencia para sistema masa (2 masas), resorte y amortiguador.

- Obtención del modelo en *espacio de estados*.

Para establecer el modelo en espacio de estados del ejemplo 2, se inicia definiendo sus variables de estado, para luego estructurar el modelo de acuerdo a las ecuaciones 1.13 y 1.14.

$$\text{Variables de estado} \begin{cases} z_1 = x_1, & \dot{z}_1 = \dot{x}_1 \\ z_2 = \dot{x}_1, & \dot{z}_2 = \ddot{x}_1 \\ z_3 = x_2, & \dot{z}_3 = \dot{x}_2 \\ z_4 = \dot{x}_2, & \dot{z}_4 = \ddot{x}_2 \end{cases}$$

Se define la salida $y = z_3$, con lo cual las ecuación diferenciales quedan

$$f - k_1(z_1 - z_3) - b_1(z_2 - z_4) = m_1 \dot{z}_2 \quad (2.21)$$

$$k_1(z_1 - z_3) + b_1(z_2 - z_4) - k_2 z_3 - b_2 z_4 = m_2 \dot{z}_4 \quad (2.22)$$

Las dos ecuaciones 2.12 y 2.13 de segundo orden se convierten en un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden a más de la ecuación de la salida.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{k_1}{m_1}z_1 - \frac{b_1}{m_1}z_2 + \frac{k_1}{m_1}z_3 + \frac{b_1}{m_1}z_4 + \frac{f}{m_1} \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \frac{k_1}{m_2}z_1 + \frac{b_1}{m_2}z_2 + \left(-\frac{k_1}{m_2} - \frac{k_2}{m_2}\right)z_3 + \left(-\frac{b_1}{m_2} - \frac{b_2}{m_2}\right)z_4 \\ y = z_3 \end{cases} \quad (2.23)$$

Finalmente se realiza la representación del modelo en forma matricial correspondiente al planteamiento de las ecuaciones 1.13 y 1.14

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{k_1}{m_2} - \frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_1}{m_2} - \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot f \quad (2.24)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

2.1.2. Modelo matemático de sistemas eléctricos.

Ejemplo 3: Circuito RLC serie.

En la figura 2.5 se muestra el circuito serie de los elementos resistivo inductivo y capacitivo, el cual está alimentado por una fuente de

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

voltaje V_i , en el ejemplo se pretende encontrar la función de transferencia que relaciona como salida (la corriente del circuito) y como entrada (el voltaje de alimentación).

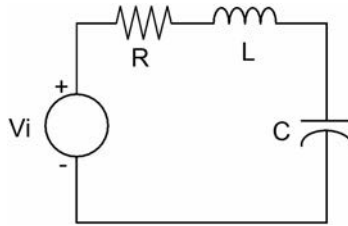


Figura 2.5: Modelo de un sistema eléctrico RLC

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en una malla de acuerdo a [6] se obtiene:

$$\sum V(t) = 0 \quad (2.26)$$

por tanto aplicando la ecuación 2.26 para el circuito de la figura 2.5, tenemos

$$V_I(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.27)$$

Definimos la entrada y la salida como:

$$\begin{cases} V_i = & \text{Entrada} \\ i(t) = & \text{Salida} \end{cases} \quad (2.28)$$

- Obtención del modelo como *función de transferencia*.

Se procede a aplicar la Transformada de Laplace a la ecuación 2.27 y se obtiene la ecuación 2.29

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$V_i(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) + \frac{1}{C s} I(s) \quad (2.29)$$

La función de transferencia buscada corresponde a $G(s) = \frac{I(s)}{V_i(s)}$, por tanto se despejará la relación $\frac{I(s)}{V_i(s)}$ de la ecuación 2.29.

$$V_i(s) = I(s) \left[R + L s + \frac{1}{C s} \right] \quad (2.30)$$

$$\frac{I(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R + L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s}} \quad (2.31)$$

Se obtiene la función de transferencia para el circuito RLC serie, planteada en la ecuación 2.32, de la cual su representación en bloques es la que se observa en la figura 2.6

$$G(s) = \frac{C s}{L C s^2 + R C s + 1} \quad (2.32)$$



Figura 2.6: Bloque de función de transferencia de un modelo eléctrico RLC en serie

- Obtención del modelo en *espacio de estados*.

Se define las variables de estado en base a la ecuación 2.27

$$\begin{cases} x_1 = \int i(t) dt \\ x_2 = \dot{x}_1 = i(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

la ecuación diferencial representada con los estados del sistema queda:

$$R \cdot x_2 + L \cdot \dot{x}_2 + \frac{1}{C}x_1 = V_i(t) \quad (2.34)$$

Se plantea las ecuaciones para \dot{x}_1 y \dot{x}_2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{V_i(t)}{L} - \frac{R}{L}x_2 + \frac{x_1}{LC} \end{cases} \quad (2.35)$$

Se define como salida del sistema a la variable x_2 debido a que se desea investigar el comportamiento de la corriente del sistema.

$$y = x_2 \quad (2.36)$$

Finalmente se realiza la representación del modelo espacio de estados matricial para el ejemplo, en base al planteamiento de las ecuaciones 1.13 y 1.14

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot V_1 \quad (2.37)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Ejemplo 4: Circuito RLC paralelo.

En este ejemplo se propone determinar la función de transferencia que relaciona; como salida, el voltaje en el capacitor y como entrada la

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

corriente proporcionada por la fuente que alimenta al sistema, según como se observa en la figura 2.7

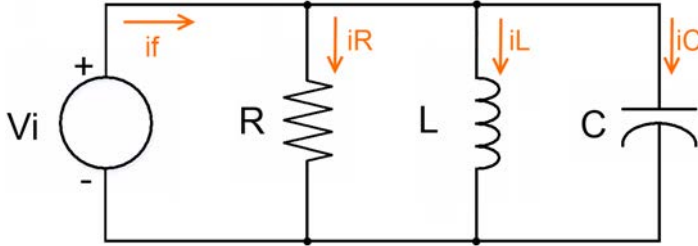


Figura 2.7: Circuito eléctrico RLC en paralelo

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff de acuerdo con [6], para las corrientes de nodos se obtiene:

$$\sum I(t) = 0 \quad (2.39)$$

$$i_f = i_R + i_L + i_C \quad (2.40)$$

reemplazando las corrientes de cada elemento se tiene

$$i_f = \frac{V_C(t)}{R} + \frac{1}{L} \int V_C(t) + C \frac{dV_C(t)}{dt} \quad (2.41)$$

Se define la entrada y la salida $\begin{cases} i_f = & \text{Entrada} \\ V_C(t) = & \text{Salida} \end{cases}$

- Obtención del modelo como *función de transferencia*.

Se determina la función de transferencia $G(s)$ que corresponde a la relación $\frac{V_C(t)}{I_f(s)}$, mediante la transformada de Laplace aplicada a la ecuación 2.41.

$$I_f(s) = \frac{V_C(s)}{R} + \frac{V_C(s)}{sL} + CsV_C(s) \quad (2.42)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$I_f(s) = V_C(s) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + Cs \right] \quad (2.43)$$

$$I_f(s) = V_C(s) \left[\frac{sL + R + s^2RLC}{sRL} \right] \quad (2.44)$$

$$G(s) = \frac{sRL}{s^2RLC + sL + R} \quad (2.45)$$

Con lo cual el sistema representado en diagrama de bloque para la ecuación 2.45 es lo que muestra la figura 2.8



Figura 2.8: Bloque de función de transferencia de un circuito eléctrico RLC en paralelo

- Obtención del modelo en *espacio de estados*.

Se define las variables de estado en base a la ecuación 2.41

$$\begin{cases} x_1 = \int V_C(t) dt \\ x_2 = \dot{x}_1 = V_C(t) \end{cases} \quad (2.46)$$

Con lo cual la ecuación diferencial conformada por los estados del sistema queda:

$$i_f = \frac{x_2}{R} + \frac{x_1}{L} + C\dot{x}_2 \quad (2.47)$$

Encontramos el sistema de ecuaciones para \dot{x}_1 y \dot{x}_2 representado en la ecuación 2.48

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{iF}{C} - \frac{x_2}{RC} - \frac{x_1}{LC} \end{cases} \quad (2.48)$$

se define como salida del sistema al estado x_2 debido a que se desea investigar el comportamiento del voltaje en el condensador

$$y = x_2 \quad (2.49)$$

finalmente se realiza la representación del modelo espacio de estados en forma matricial para el sistema RLC de la figura 2.7, en base al planteamiento de las ecuaciones 1.13 y 1.14

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \cdot i_f \quad (2.50)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

2.2. Función de Transferencia de los sistemas lineales.

Si bien anteriormente ya se usó el término función de transferencia, en este apartado se presenta un análisis conceptual y matemático de la misma.

Se puede decir que la función de transferencia modifica la señal de entrada y la convierte en una señal de salida característica de dicha planta.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

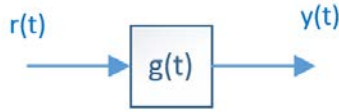


Figura 2.9: Composición básica de un sistema

En donde:

$g(t)$ - Función respuesta al impulso del sistema.

$r(t)$ - Entrada del sistema.

$y(t)$ - Salida del sistema.

Definición Matemática: La función de transferencia se define como *la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema, cuyas condiciones iniciales son iguales a cero.*

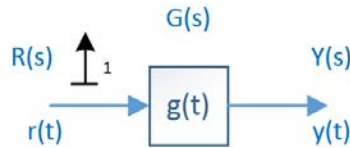


Figura 2.10: Bloque de función de transferencia

Ante una entrada impulso unitario cuya transformada de Laplace es igual a 1, se puede calcular la salida del sistema de la siguiente manera:

$$Y(s) = 1 * G(s) \quad (2.52)$$

$$Y(s) = G(s) \quad (2.53)$$

Este análisis permite justificar la definición matemática, puesto que al obtener la respuesta al impulso del sistema, se estaría encontrando la característica de comportamiento exacto del sistema.

Entonces de acuerdo con [1] y [2], matemáticamente la función de transferencia será:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$G(s) = \mathcal{L} \{g(t)\}_{CI=0} \quad (2.54)$$

Modelo Matemático de función de transferencia generalizada

En base a la teoría descrita en [2], a continuación se analiza el modelo matemático generalizado para la Función de Transferencia.

Dada una ecuación diferencial de orden n que representa una planta, cuya salida se considera a $y(t)$ y su entrada como $u(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ b_m \frac{d^m u(t)}{dt} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Para encontrar su función de transferencia, se aplica la transformada de Laplace a la ecuación 2.55, teniendo presente que las condiciones iniciales de las señales son iguales a cero, esto asegura que el sistema inicialmente esté en reposo o en su presentación natural

$$\begin{aligned} s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Agrupando los términos de $Y(s)$ y $U(s)$ se obtiene:

$$Y(s)(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_1 s + a_0) = U(s)(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_1 s + b_0) \quad (2.57)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Considerando que la función de transferencia relaciona la entrada con la salida, de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.58)$$

Entonces:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)} \quad (2.59)$$

Matemáticamente se establece que, el denominador es un polinomio característico, debido a que sus raíces caracterizan el comportamiento del modelo o de la planta, estas raíces son llamadas **Polos del sistema**, quienes caracterizan su comportamiento. Si el denominador es igualado a cero, se obtiene la ecuación característica del sistema. Por otra parte las raíces del polinomio del numerador son conocidas como ceros del modelo, estos están involucrados en la dinámica del sistema, sin comprometer su característica en cuanto a estabilidad.

De acuerdo a los valores de n y m se puede dar una clasificación a la función de transferencia en base a lo propuesto en [2] de la siguiente manera:

$n \mapsto$ Denota el orden del Sistema

- Si $n > m$ Se llama Función de Transferencia Estrictamente Propia.

Un ejemplo podría ser el siguiente:

$$\frac{s + 2}{s^2 + s + 1} \quad (2.60)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Este tipo de sistemas son los más comunes en el área de control.

- Si $n = m$ Se llama función de transferencia propia.

Como ejemplo se puede tener:

$$\frac{s + 2}{s + 3} \quad (2.61)$$

- Si $n < m$ Se llama función de transferencia impropia.

El ejemplo para este caso sería:

$$\frac{s^2 + s + 1}{s + 3} \quad (2.62)$$

Se puede decir que este tipo de sistema físicamente no tiene implementación, puesto que correspondería a un sistema no causal.

Ejemplo 1. Respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario.

El ejemplo muestra cómo determinar la respuesta $y(t)$ ante una entrada de escalón unitario para el sistema caracterizado por 2 polos y 1 cero como muestra la figura 2.11.

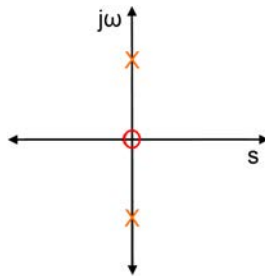


Figura 2.11: Diagrama de polos y ceros

Se conoce que la representación en transformada de Laplace para el escalón $u(t)$ es:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$\mathcal{L}^{-1} \{u(t)\} = \frac{1}{S} \quad (2.63)$$

Los polos correspondientes son:

$$s_1 = j\omega \quad (2.64)$$

$$s_2 = -j\omega \quad (2.65)$$

El cero correspondiente es ($s = 0$), por lo tanto se plantea la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{k.s}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \quad (2.66)$$

en donde (k) representa un factor de amplificación del sistema.

La figura 2.12 muestra el desarrollo del análisis en el cual se consigue establecer la estrada escalón al sistema, cuya salida $y(t)$ es buscada.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

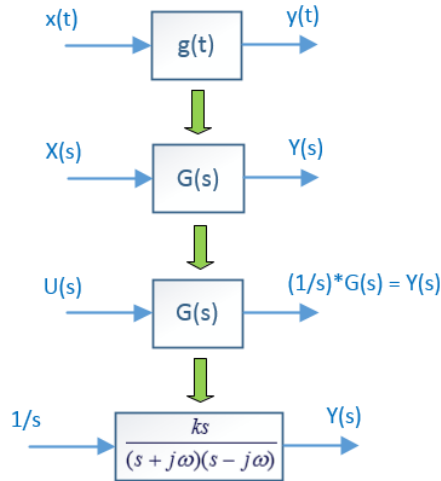


Figura 2.12: Proceso de modelo de un sistema de polos y ceros

La salida del sistema queda planteada como:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{ks}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \right] \quad (2.67)$$

Si se halla la transformada inversa de la ecuación 2.67, su respuesta en el tiempo es:

$$y(t) = \frac{k \cdot \text{sen}(\omega t)}{\omega} \quad (2.68)$$

Ejemplo 2. Circuito Electromecánico.

Encontrar el modelo matemático y la función de transferencia para el circuito de la figura 2.13, considerando como salida del sistema la posición x_2 y como entrada, el voltaje de alimentación V_i , tenemos que:

$$M = \frac{X_2(s)}{V_i(s)} \quad (2.69)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

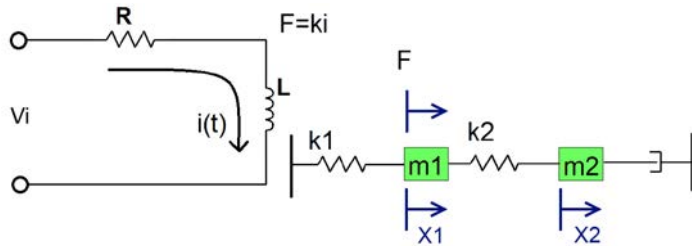


Figura 2.13: Circuito electromecánico de dos masas.

- Análisis del circuito eléctrico.

$$Vi = R \cdot i + L \frac{di}{dt} \quad (2.70)$$

Se obtiene la transformada de Laplace para la ecuación 2.70.

$$Vi(s) = R \cdot I(s) + LS \cdot I(s) \quad (2.71)$$

$$Vi(s) = I(s) \cdot (R + LS) \quad (2.72)$$

$$\frac{Vi(s)}{I(s)} = (R + LS) \quad (2.73)$$

Se determina la función de transferencia del circuito eléctrico.

$$\frac{I(s)}{Vi(s)} = \frac{1}{(R + LS)} \quad (2.74)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

- Análisis del circuito mecánico.

Referido a la masa m_1 .

$$\sum Fx = m_1 \cdot a \quad (2.75)$$

$$F - k_1(x_1) - k_2(x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (2.76)$$

$$F - k_1(X_1) - k_2(X_1 - X_2) = X_1 s^2 m_1 \quad (2.77)$$

$$F - k_1 X_1 - k_2 X_1 - k_2 X_2 = X_1 s^2 m_1 \quad (2.78)$$

$$F - (k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2 = X_1 s^2 m_1 \quad (2.79)$$

Referido a la masa m_2 .

$$\sum Fx = m_2 \cdot a \quad (2.80)$$

$$k_2(x_1 - x_2) - b_1(\dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2 \quad (2.81)$$

$$k_2 X_1 - k_2 X_2 - b_1 s X_2 = X_2 s^2 m_2 \quad (2.82)$$

$$X_1 = \frac{X_2 s^2 m_2 + k_2 X_2 + b_1 s X_2}{k_2} \quad (2.83)$$

Reemplazando la ecuación 2.83 en la ecuación 2.79 se obtiene:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$\begin{aligned}
 F - (k_1 + k_2) \left(\frac{X_2 s^2 m_2 + b_1 s X_2 + k_2 X_2}{k_2} \right) - k_2 X_2 \\
 - \left(\frac{X_2 s^2 m_2 + b_1 s X_2 + k_2 X_2}{k_2} \right) s^2 m_1 = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.84}$$

$$F - X_2 \left[(k_1 + k_2) \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) - k_1 - s^2 m_1 \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) \right] = 0
 \tag{2.85}$$

Se determina la función de transferencia del modelo mecánico asumiendo la salida $X_2(s)$ y la entrada $F(s)$.

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{\left[(k_1 + k_2) \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) - k_1 - s^2 m_1 \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) \right]}
 \tag{2.86}$$

Considerando que $F(s) = k \cdot I(s)$, se obtiene la función de transferencia $\frac{X_2(s)}{I(s)}$

$$\frac{X_2(s)}{I(s)} = \frac{k}{\left[(k_1 + k_2) \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) - k_1 - s^2 m_1 \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) \right]}
 \tag{2.87}$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Al reemplazar la ecuación 2.74 en la ecuación 2.87 se obtiene la función de transferencia $\frac{X_2(s)}{Vi(s)}$

$$\frac{X_2(s)}{Vi(s)} = \frac{k}{\left[(k_1 + k_2) \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) - k_1 - s^2 m_1 \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) \right] (R + Ls)} \quad (2.88)$$

Finalmente reorganizando la ecuación 2.88 encontramos la función de transferencia M:

$$M = \frac{k}{\left[(k_1 + k_2) \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) - k_1 - s^2 m_1 \left(\frac{s^2 m_2 + b_1 s + k_2}{k_2} \right) \right] (R + Ls)} \quad (2.89)$$

2.3. Diagrama de bloques de funciones de transferencia y técnicas aplicadas para su simplificación.

Es importante conocer cómo simplificar un sistema de bloques de función de transferencia, para conseguir otro sistema más llevadero matemáticamente.

Es oportuno analizar uno de los esquemas más comunes en cuanto a un sistema que posee realimentación, el cual se puede observar en la figura 1.11

- Resolución hacia un bloque canónico.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Un bloque canónico hace referencia a una configuración típica de realimentación que se maneja en el análisis de sistemas de control.

Los bloques $C(s)$ y $P(s)$ de la figura 1.11, al estar en cascada permiten un flujo directo de la señal, por lo que pueden multiplicarse en términos de Laplace.

$$G(s) = C(s)P(s) \quad (2.90)$$

Re-dibujando el sistema se obtiene la figura 2.14

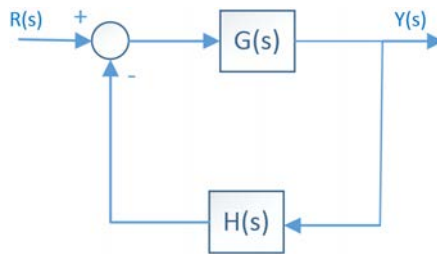


Figura 2.14: Bloque canónico de sistema realimentado.

Seguidamente, al tener una estructura canónica de realimentación, se aplica la fórmula que nos permite obtener la función de transferencia total, tal como se menciona en [1] y [2]:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.91)$$

en donde:

$M(s)$ =Función de Transferencia Total.

$G(s)$ =Función de Transferencia Directa.

$H(s)$ =Función de Transferencia de realimentación.

$G(s)H(s)$ =Función de Transferencia de Lazo.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Se considera importante analizar la deducción de la ecuación 2.91, por lo que se procede a continuación.

Tomando como referencia la figura 1.11, que muestra la definición de las señales que fluyen por el sistema y la figura 2.14 considerado como bloque canónico, se plantea la ecuación 2.92 que permite determinar la señal de error $E(s)$, la misma que corresponde a la diferencia entre la señal de entrada $R(s)$ y la señal $Y(s)$ afectado por la ganancia del bloque $H(s)$.

$$E(s) = R(s) - Y(s) \cdot H(s) \quad (2.92)$$

la salida corresponde a:

$$Y(s) = E(s) \cdot G(s) \quad (2.93)$$

despejando $E(s)$ de la ecuación 2.93 se tiene:

$$E(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} \quad (2.94)$$

reemplazando en la ecuación 2.94 en la ecuación 2.92 se tiene

$$\frac{Y(s)}{G(s)} = R(s) - Y(s) \cdot H(s) \quad (2.95)$$

$$\frac{Y(s)}{G(s)} + Y(s) \cdot H(s) = R(s) \quad (2.96)$$

$$Y(s) + Y(s) \cdot H(s) \cdot G(s) = R(s) \cdot G(s) \quad (2.97)$$

$$Y(s) [1 + H(s) \cdot G(s)] = R(s) \cdot G(s) \quad (2.98)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Finalmente se obtiene la función de transferencia para el bloque canónico de la figura 2.14, la misma que está representado por la ecuación 2.99.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{[1 + H(s) \cdot G(s)]} \quad (2.99)$$

A esta relación se lo ha nombrado como función de transferencia total $M(s)$ y corresponde a la ecuación 2.91.

- **Ejemplo 1. Reducción de bloque de función de transferencia.**

Se plantea como ejemplo el esquema de bloques de la figura 2.15

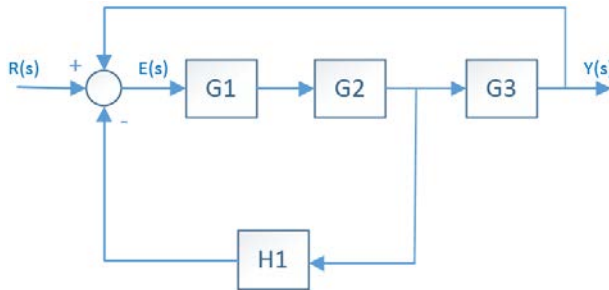


Figura 2.15: Esquema de bloques de un sistema de control.

Como primer paso se realiza la simplificación de los bloques $G1$ y $G2$ que se encuentran en cascada, obteniendo

$$G4 = G1 \cdot G2 \quad (2.100)$$

El nuevo esquema de bloques se presenta en la figura 2.16

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

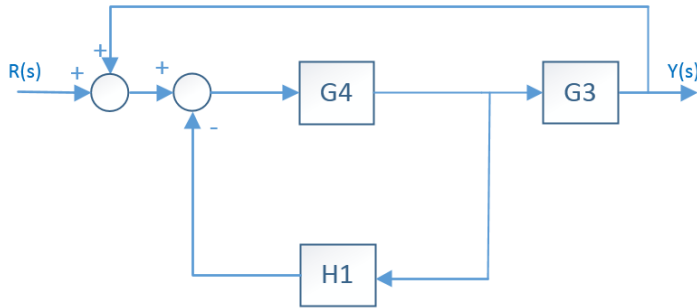


Figura 2.16: Diagrama de bloques simplificado en $G4$.

Se reconoce un bloque canónico entre $G4$, $H1$ y el sumador, aplicando la ecuación 2.91 se obtiene.

$$G5 = \frac{G4}{1 + G4 \cdot H1} \quad (2.101)$$

El esquema se reduce al mostrado en la figura 2.17



Figura 2.17: Diagrama de bloques simplificado en $G5$.

Seguidamente se procede a simplificar los bloques $G5$ y $G3$ que se encuentran en cascada

$$G6 = G5 \cdot G3 \quad (2.102)$$

Actualizando el esquema se tiene la figura 2.18

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.



Figura 2.18: Diagrama de bloques simplificado en $G6$.

Finalmente aplicando la ecuación 2.91 en el bloque de realimentación de la figura 2.18 , considerando que en este caso se trata de una realimentación positiva la misma que exige colocar un signo negativo en el segundo término del denominador, encontramos la función de transferencia total para el sistema del ejemplo

$$M(s) = \frac{G6}{1 - G6 \cdot 1} \quad (2.103)$$

La figura 2.19 representa la función de transferencia total para el ejemplo desarrollado



Figura 2.19: Bloque de función de transferencia resultante.

Si establecemos la ecuación 2.103 en términos de los bloques planteados en la figura 2.15 tenemos

$$M(s) = \frac{G1G2G3}{1 + G1G2H1 - G1G2G3} \quad (2.104)$$

- **Ejemplo 2. Bloques de función de transferencia para un motor de corriente continua (DC).**

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

A continuación se explica mediante un ejemplo, cómo se elabora el diagrama de bloques de un sistema físico, que en este caso consiste en el motor DC de la figura 2.20.

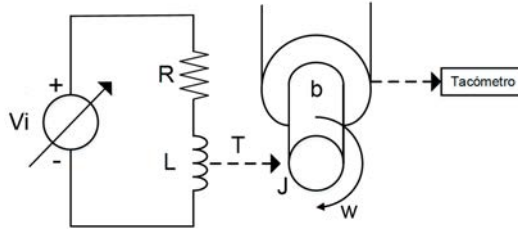


Figura 2.20: Esquema electromecánico de un motor DC

En este caso se pretende busca el modelo matemático como función de transferencia que relaciona la velocidad del motor DC respecto a la entrada de alimentación V_i . En este caso se involucra el circuito eléctrico y el circuito mecánico del motor. A continuación se describe cada variable del sistema.

V_i = Fuente de tensión variable, es la entrada del sistema.

R = Resistencia interna de los devanados del motor DC.

L = Inductancia de los devanados del motor DC.

T = Torque del motor DC.

J = Momento de inercia del rotor del motor DC.

ω = Velocidad angular del rotor del motor DC.

b = Coeficiente de rozamiento del rotor del motor DC.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema son analizados a continuación, de acuerdo a lo establecido en [1] y [2]:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Para el circuito eléctrico, según las leyes de Kirchhoff.

Se tiene:

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = v_i(t) \xleftrightarrow{L} R \cdot I(S) + LS \cdot I(S) = V_i(S) \quad (2.105)$$

Considerando para el motor, el torque proporcional a la corriente, es de interés determinar la corriente en función de la entrada a partir de la ecuación 2.105.

$$\frac{I(S)}{V_i(S)} = \frac{1}{LS + R} \quad (2.106)$$

Para el torque.

De manera directa se considera el torque de la máquina como el producto de una constante K por la corriente.

$$T(S) = K \cdot I(S) \quad (2.107)$$

Para el circuito mecánico.

Según las leyes de Newton para el caso de la velocidad angular del motor, se tiene la siguiente ecuación.

$$T - b\omega(t) = J\dot{\omega}(t) \xleftrightarrow{L} T(S) = JS \cdot \Omega(S) + b\Omega(S) \quad (2.108)$$

A partir de la ecuación 2.108, se determina la relación entre la velocidad angular y el torque, obteniendo:

$$\frac{\Omega(S)}{T(S)} = \frac{1}{JS + b} \quad (2.109)$$

Una vez obtenidas todas las ecuaciones diferenciales de cada parte del sistema y su correspondiente bloque de función de transferencia, se procede a realizar el diagrama de bloques, sin perder de vista la

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

entrada y salida del sistema, que para este caso serán; el voltaje de la fuente y la velocidad angular del eje del motor.

Los bloques en cascada para el sistema del motor de este ejemplo, se forman según como se muestra en la figura 2.21



Figura 2.21: Diagrama de bloques del sistema motor DC.

Con la finalidad de establecer un sistema de control en lazo cerrado para el motor, se realiza las siguientes acciones: se añade un bloque controlador C en cascada; se realimenta el sistema mediante un tacómetro colocado en la salida, el cual medirá la velocidad del motor y que esta representado por un bloque $K_{tacómetro}$. Esta señal será comparada con la señal de entrada de referencia, produciéndose una señal de error que servirá de insumo para el controlador; y por último se añade una señal de perturbación $Td(s)$ en el interior o a la salida de la planta, que simula efectos de desgaste, carga en el eje de la máquina, entre otros. En conclusión el diagrama de bloques para un sistema de control de velocidad de un motor DC, corresponde a la figura 2.22

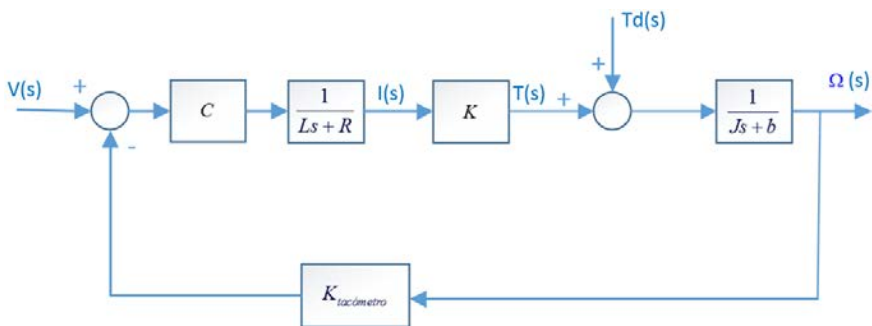


Figura 2.22: Sistema de control de velocidad de un motor DC.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

2.3.1. Reducción de diagramas de bloques.

Es común que los sistemas se representen con varios bloques de función de transferencia interconectados entre etapas. En este caso es necesario usar técnicas de reducción de diagramas de bloques para su posterior análisis. La reducción de los diagramas de bloques se logra mediante el álgebra de bloques, que indica la forma en que podemos agrupar o extender bloques. A continuación se indica algunas de las modificaciones más comunes que se pueden realizar en un diagrama de bloques, tal como lo propone [7].

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Diagrama de bloque	Diagrama de bloque equivalente	
1. Combinación de bloques en cascada.		
		$V = G_1 U$ $Y = G_2 V$ $Y = (G_1 \cdot G_2) U$
2. Combinación de bloques en paralelo.		
		$V = G_1 U$ $W = G_2 U$ $Y = V \pm W$ $Y = (G_1 + G_2) U$
3. Retroalimentación positiva.		
		$Z = G_2 Y$ $Y = G_1 X$ $X = U - Z$ $Y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} U$
4. Retroalimentación negativa.		
		$Z = G_2 Y$ $Y = G_1 X$ $X = U + Z$ $Y = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2} U$
5. Movimiento de un punto de suma después de un bloque.		
		$X = G_1 U$ $Z = G_1 V$ $Y = G_1 (U + V)$
6. Movimiento de un punto de suma antes de un bloque.		
		$X = G_1 U$ $Y = G_1 U + V$
7. Movimiento de un punto de ramificación después de un bloque		
		$Y = G_1 U$ $U = \frac{1}{G_1} Y$
8. Movimiento de un punto de ramificación antes de un bloque		
		$Y = G_1 U$
9. Redistribución de puntos de suma		
		$X = U + V; Z = U + W$ $Y = X + W = Z + V$ $Y = U + V + W = U + W + V$
10. Movimiento de un punto de ramificación antes de uno de suma		
		$Y = U + V$
11. Movimiento de un punto de ramificación después de uno de suma		
		$Y = U + V$ $U = Y - V$

Tabla 2.1: Álgebra de bloques

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Tal como se observa en la Tabla 2.1, el álgebra de bloques permite reducir de distintas formas los diagramas de bloques.

Ejemplo 3. Simplificación de bloques de función de transferencia.

Para el esquema de bloques de la figura, se realiza la simplificación con la finalidad de obtener un bloque de función de transferencia total.

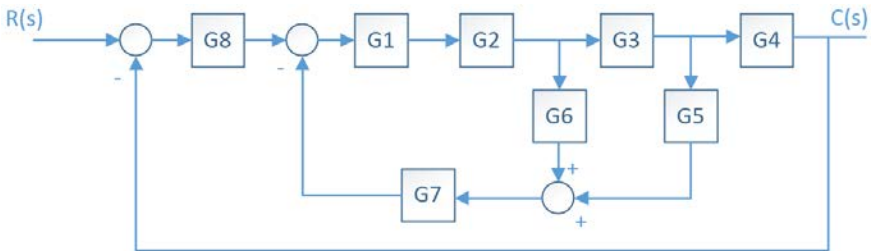


Figura 2.23: Diagrama de bloques a minimizar

Paso uno, simplificar los bloques G1 y G2

$$G1G2 = M1$$

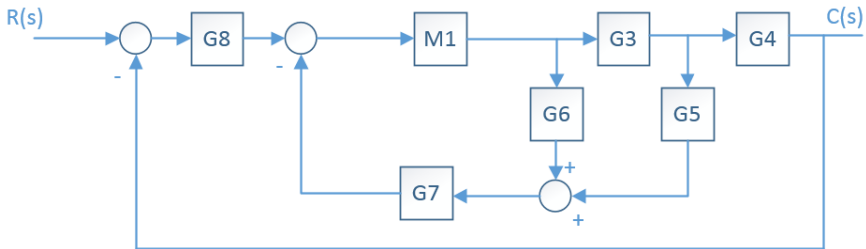


Figura 2.24: Diagrama de bloques paso uno

Paso dos, movimiento de un punto de ramificación antes de bloque G3.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

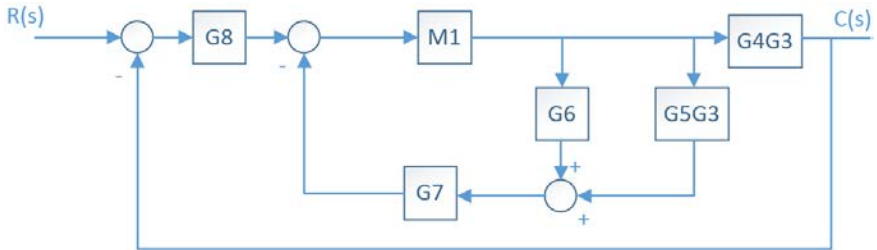


Figura 2.25: Diagrama de bloques paso dos

Paso tres. Combinación de bloque en paralelo G_6 y G_3G_5

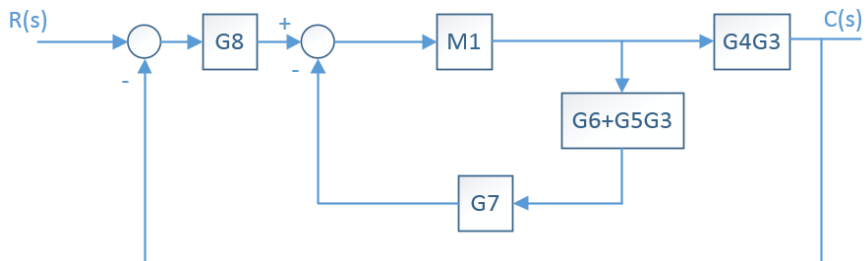


Figura 2.26: Diagrama de bloques paso tres

Paso cuatro. Movimiento de un punto de ramificación después del bloque G_4G_3 .

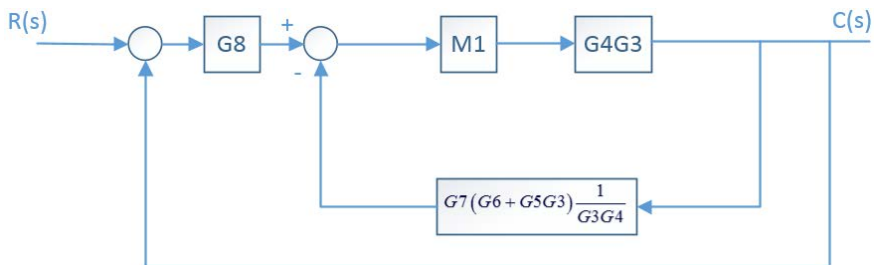


Figura 2.27: Diagrama de bloques paso cuatro

Paso cinco. Bloque canónico de realimentación.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$M2 = \frac{M1 \cdot G3 \cdot G4}{1 + M1 \cdot G2 \cdot G4 \left[G7 (G6 + G5 \cdot G3) \cdot \frac{1}{G3 \cdot G4} \right]} \quad (2.110)$$

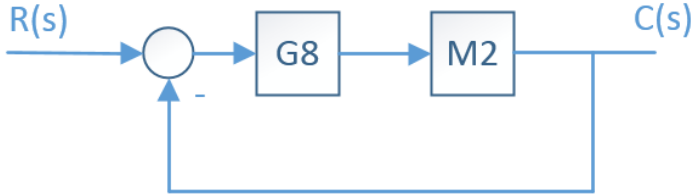


Figura 2.28: Diagrama de bloques paso cinco

Paso seis. Bloque canónico de realimentación.

$$M = \frac{G8 \cdot M2}{1 + G8 \cdot M2} \quad (2.111)$$



Figura 2.29: Diagrama de bloques paso seis.

2.4. Gráfica de flujo de señales.

Un gráfico de flujo de señal es un diagrama que expresa el flujo de una señal de entrada, por medio de nodos que se encuentran relacionados con ecuaciones algebraicas lineales simultáneas. Consiste en una red en la cual los nodos están conectados por ramas con dirección y sentido.

Así por ejemplo se tienen las siguientes ecuaciones:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$y_2 = G_1 y_1 + G_2 y_3 \quad (2.112)$$

$$y_3 = G_3 y_2 + G_4 y_4 \quad (2.113)$$

$$y_4 = G_5 y_1 + G_6 y_3 \quad (2.114)$$

La gráfica en flujo de señal se representa como muestra la figura 2.30

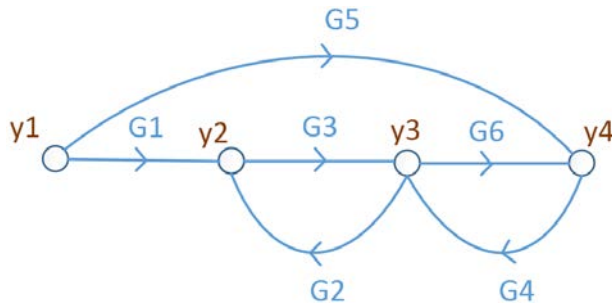


Figura 2.30: Gráfica de flujo de señales

En donde los nodos tienen las siguientes características:

y_2 se conforma por las contribuciones de y_1 y y_3 con ganancias G_1 y G_2 respectivamente.

y_3 se conforma por las contribuciones de y_2 y y_4 con ganancias G_3 y G_4 respectivamente.

y_4 se conforma por las contribuciones de y_1 y y_3 con ganancias G_5 y G_6 respectivamente.

Para el análisis de las gráficas de flujo de señales en base a las definiciones encontradas en [1] y [2] es importante definir:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

- Nodo de entrada es aquel nodo que tiene todos los ramales que salen de él.
- Nodo de salida es aquel nodo que tiene todos los ramales que ingresan a él.

Tomando como base lo tratado en temas anteriores respecto a la representación en bloque de los sistemas, se establece la forma de convertir una gráfica de bloques en una gráfica de flujo de señales, tomando las siguientes consideraciones:

- Los puntos de ramificación, se convierten directamente en un nodo.
- Los elementos sumadores, también se convierten en nodos, tomando en cuenta que si existe un término negativo, este debe ser considerado en la ganancia.
- Los bloques de función de transferencia, se convierten en ganancias, las cuales van acotadas a mitad de trayecto acompañado con un indicador del flujo de la señal.
- La entrada y la salida del sistema, se representa con nodos en forma directa.

Por ejemplo si se tiene diagrama de bloques de la figura 2.14, podemos obtener el equivalente diagrama de flujo de señales mostrado en la figura 2.31

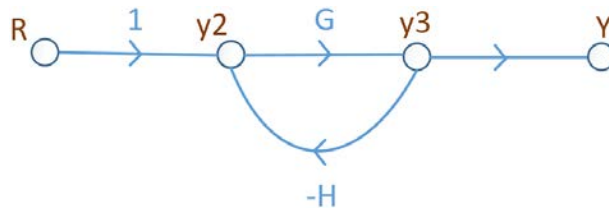


Figura 2.31: Gráfica de flujo de señal para el bloque canónico de un sistema realimentado.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

2.4.1. Cálculo de la ganancia para gráficas de flujo de señales.

Es un procedimiento y una fórmula para hallar la ganancia para gráficas de flujo de señal, entonces dado un diagrama de flujo de señal con N trayectorias directas y L lazos, la ganancia entre el nodo de entrada y_{ent} y el nodo de salida y_{sal} se puede determinar con la ecuación 2.115 según [2].

Un lazo se considera el posible flujo de la señal que parte de un nodo, recorre otros nodos y puede llegar al nodo inicial, sin haber pasado dos veces por un mismo nodo.

Una trayectoria directa se considera aquella que permite el flujo de la señal desde una entrada hasta la salida igualmente sin haber pasado dos veces por un mismo nodo.

$$M = \frac{y_{sal}}{y_{ent}} = 1k \sum \frac{M_k \Delta_k}{\Delta} \quad (2.115)$$

Donde:

y_{ent} =nodo de entrada

y_{sal} =nodo de salida

M = ganancia entre y_{ent} y y_{sal}

N =Número de trayectorias directas entre la entrada y la salida

M_k =ganancia entre la k -ésima trayectoria entre y_{ent} y y_{sal}

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \dots$$

L_{i1} =Ganancia equivalente al producto del i -ésimo lazo individuales

L_{j2} =Ganancia equivalente al producto del j -ésimo par de lazos que no se tocan entre si.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

L_{k3} =Ganancia equivalente al producto de los k -ésimos tres lazos que no se tocan entre si.

$\Delta_k = \Delta$ a excepción de los lazos que tocan la k -ésimo trayectoria.

Debido a que Δ corresponde al denominador de la función de transferencia, se tiene que, al ser igualado a cero se convierte en la ecuación característica del sistema. Además se debe destacar que Δ es único para el sistema, independientemente si cambia la entrada o salida para el análisis.

Ejemplo 1. Determinación de la función de transferencia aplicando la fórmula de la ganancia para gráficas de flujo de señales.

Con este ejemplo presentado en la figura 2.32 se pretende llevar el esquema de bloques a su equivalente gráfica de flujo de señales, para luego con la ayuda de la ecuación 2.115, poder determinar la función de transferencia total del sistema.

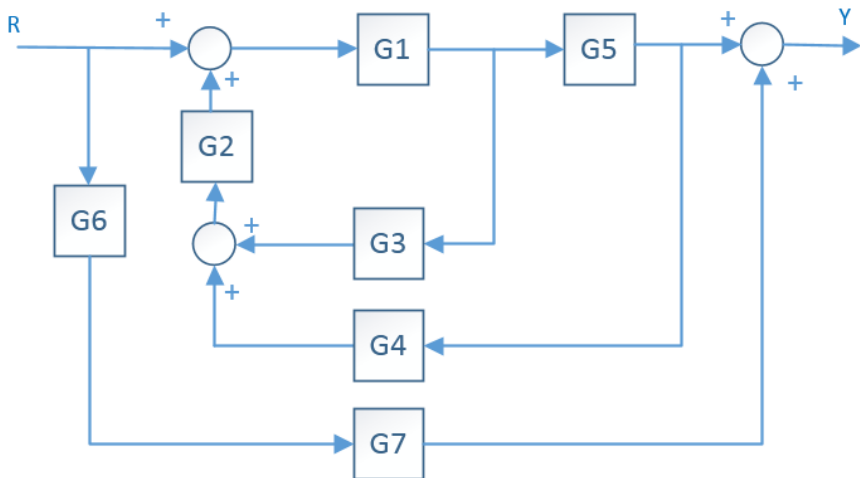


Figura 2.32: Diagrama de bloques de un sistema de control

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

En primer lugar se dibuja la gráfica de flujo de señales como se muestra en la figura 2.33 en la cual se indica el flujo de la señal además de las respectivas ganancias del sistema planteado

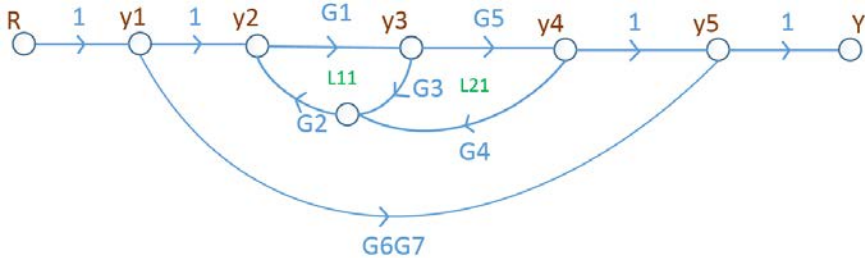


Figura 2.33: Gráfica de flujo de señal

Como segundo paso se procede a determinar trayectorias directas.

Las figuras 2.34 y 2.35 muestran las trayectorias directas, debido a que son posibles dos, entonces $k = 2$, por lo tanto M_1 y M_2 son:

$$M_1 = 1 \cdot G_1 \cdot G_5 \cdot 1 \cdot 1 = G_1 \cdot G_5 \quad (2.116)$$

$$M_2 = G_6 \cdot G_7 \quad (2.117)$$

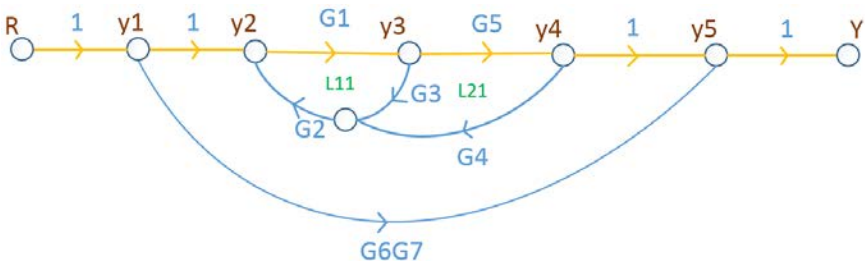


Figura 2.34: Gráfica de flujo de señal- trayectoria uno

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

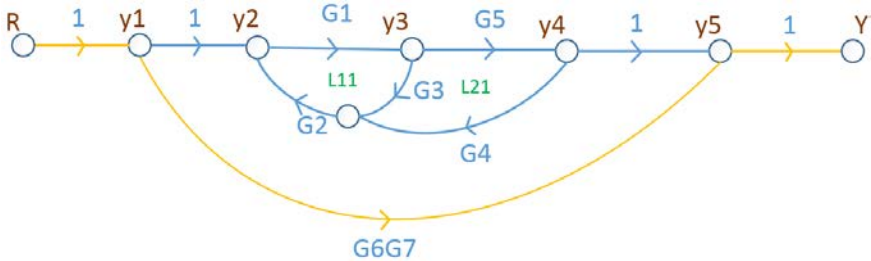


Figura 2.35: Gráfica de flujo de señal - trayectoria 2

Como tercer paso se procede a encontrar la ganancia de los lazos individuales, que en este caso son dos y se muestran en las figuras 2.36 y 2.37.

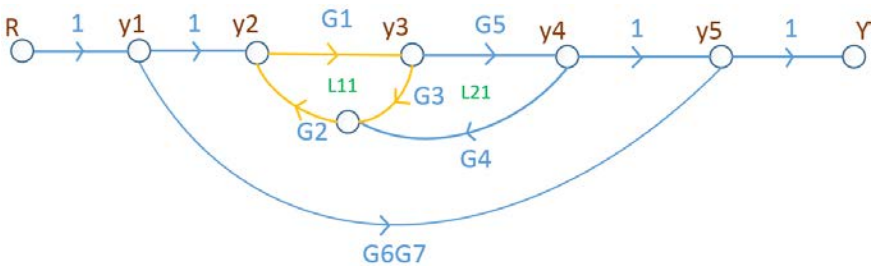


Figura 2.36: Gráfica de flujo de señal - primer lazo

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

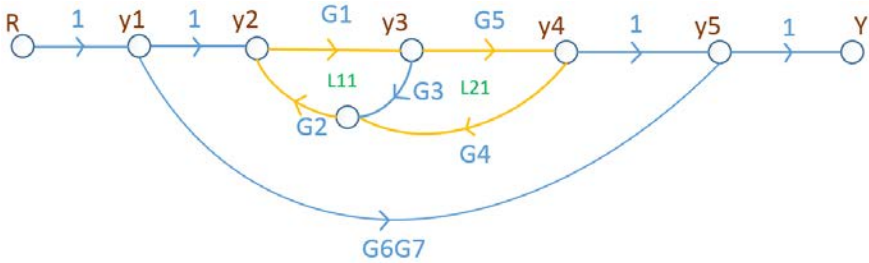


Figura 2.37: Gráfica de flujo de señal - segundo lazo

La ganancia de los lazos individuales corresponde a:

$$L_{11} = G1 \cdot G3 \cdot G2 \quad (2.118)$$

$$L_{21} = G1 \cdot G5 \cdot G4 \cdot G2 \quad (2.119)$$

Como cuarto paso corresponde a determinar los pares de lazos de no contacto, que para este ejemplo no existen, puesto que los dos lazos individuales tienen nodos en común, por tanto:

$$L_{12} = 0 \quad (2.120)$$

Como quinto paso corresponde a determinar el factor Δ y los factores Δ_k .

$$\Delta = 1 - (L_{11} + L_{21}) + L_{12} \quad (2.121)$$

$$\Delta = 1 - (G1 \cdot G3 \cdot G2 + G1 \cdot G5 \cdot G4 \cdot G2) \quad (2.122)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Para determinar Δ_1 nos fijamos en la figura 2.37 en la cual los dos lazos tocan la trayectoria directa de la figura 2.34 por lo tanto:

$$\Delta_1 = 1 \quad (2.123)$$

Para determinar Δ_2 nos fijamos en la figura 2.37 en la cual los dos lazos no tocan la trayectoria directa de la figura 2.35 por lo tanto:

$$\Delta_2 = 1 - (G1 \cdot G3 \cdot G2 + G1 \cdot G5 \cdot G4 \cdot G2) \quad (2.124)$$

Finalmente la función de transferencia del sistema lo determinamos a aplicar la ecuación 2.115 lo que resulta:

$$M = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta} \quad (2.125)$$

$$M = \frac{(G1 \cdot G5)(1) + (G6 \cdot G7)(1)}{1 - (G1 \cdot G3 \cdot G2 + G1 \cdot G5 \cdot G4 \cdot G2)} \quad (2.126)$$

$$M = \frac{(G1 \cdot G5) + (G6 \cdot G7)}{1 - (G1 \cdot G3 \cdot G2 + G1 \cdot G5 \cdot G4 \cdot G2)} \quad (2.127)$$

2.5. Gráficas de estados.

La gráfica de estados es una herramienta que posibilita la adquisición de la Función de Transferencia a partir de la formulación del sistema en Espacios de Estados. Una vez realizada la gráfica, se realiza un procedimiento igual al aplicado en las gráficas de flujo de señales. Se recomienda al lector profundizar la teoría en [1] y [2].

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

A partir de la representación del sistema en espacio de estados, se plantea la gráfica de estados.

- $(x_2 = \dot{x}_1 \mapsto \text{Gráfica de Estado})$

A partir de la gráfica de estados, se obtiene la función de transferencia.

- Gráfica de Estado \rightarrow Función de Transferencia.

Si tenemos la relación de estados de la siguiente manera:

$$x_2 = \dot{x}_1 \tag{2.128}$$

podemos encontrar x_1 aplicando la integral

$$x_1 = \int x_2 dt + x_2(0) \tag{2.129}$$

aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 2.129, se tiene:

$$X_1(s) = \frac{1}{s}X_2(s) + \frac{x_2(0)}{s} \tag{2.130}$$

La gráfica que relaciona los estados según la ecuación 2.130 se muestra en la figura 2.38.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

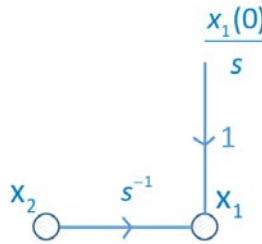


Figura 2.38: Diagrama de flujo de los estados que incluye la condición inicial.

Para generar la gráfica de flujo de señales que permita obtener la función de transferencia deseada, entre una entrada y una salida establecida, se puede aplicar el siguiente procedimiento:

1. Realizar los gráficos de los nodos correspondiente a los estados, sus derivadas, la entrada y la salida del sistema.
2. Estructurar la relación de los nodos de estados, con los correspondientes nodos de los estados derivados, mediante la incorporación de un factor integrados y la contribución de la correspondiente condición inicial, según como indica la figura 2.38.
3. Establecer los flujos para cada estado \dot{x} de acuerdo a la correspondiente ecuación de estado, la cual será función de los otros estados y en algunos casos de la entrada del sistema.
4. Aplicar el procedimiento para ejecutar la fórmula de la ganancia para las gráficas de flujo de señales, con la consideración que si se trata de un sistema lineal, podemos considerar únicamente la entrada del sistema y omitir las demás entradas por concepto de condiciones iniciales o entradas de disturbio.

Ejemplo 1. Determinación de la función de transferencia a partir de la representación en espacio de estados del sistema y la gráfica de los estados, para un circuito RLC serie.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Considerando la representación en espacio de estados del circuito RLC serie, expresado en la ecuación 2.35, en la cual los estados corresponden a la integral de la corriente y a la corriente del sistema, según la ecuación 2.33, aplicando el procedimiento respectivo, la gráfica de estados resultante es la que muestra la figura 2.39.

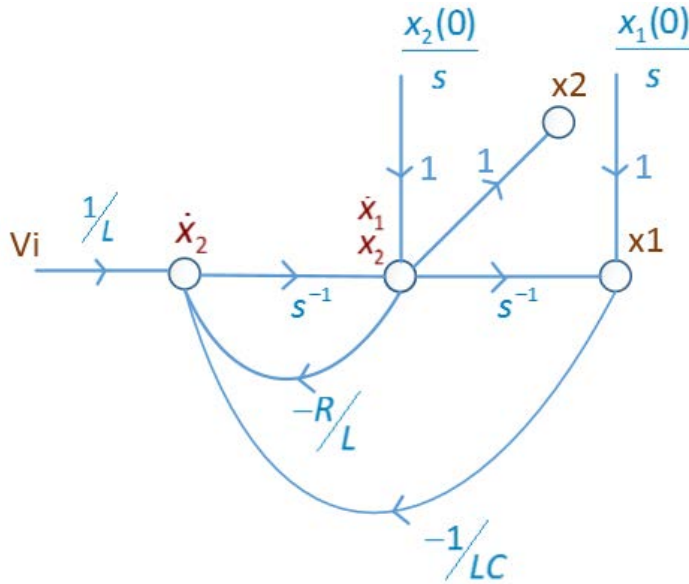


Figura 2.39: Diagrama de estados del circuito RLC serie.

Resultado del análisis de las gráficas de estados del circuito, se determina los diferentes factores, que serán los insumos para el cálculo de la función de transferencia entre V_i y X_2 , mediante la ecuación 2.115

Contamos con una sola trayectoria directa

$$n = 1$$

$$M_1 = \frac{1}{Ls}$$

Se tiene dos lazos individuales que son:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$L_{11} = -\frac{R}{Ls}$$

$$L_{21} = -\frac{1}{LCs^2}$$

No se tiene pares de lazos de no contacto, por tanto $L_{12} = 0$.

El factor Δ resulta:

$$\Delta = 1 - (L_{1I} + L_{2I})$$

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{R}{Ls} - \frac{1}{LCs^2}\right)$$

El factor Δ_1 es:

$$\Delta_1 = 1$$

Aplicando la ecuación 2.115 tenemos la función de transferencia deseada:

$$M = \frac{\frac{1}{Ls} * 1}{1 + \frac{R}{Ls} + \frac{1}{LCs^2}} \quad (2.131)$$

$$M = \frac{sC}{s^2LC + RSC + 1} \quad (2.132)$$

Ejemplo 2. A partir de la ecuación diferencial 2.133, que gobierna un sistema, determinar la función de transferencia considerando a (f) como entrada y (y) como salida.

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 8y = 10f \quad (2.133)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Se define los estados del sistema:

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{y} \\x_3 &= \dot{x}_2 = \ddot{y}\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación 2.133, queda:

$$x_3 + 2x_3 + 8x_2 + 5x_1 = 10f \quad (2.134)$$

El sistema de ecuaciones de estados que representa el sistema es:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = 10f - 2x_3 - 8x_2 - 5x_1$$

Al realizar la gráfica de los estados para el sistema, se obtiene el esquema de la figura 2.40

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

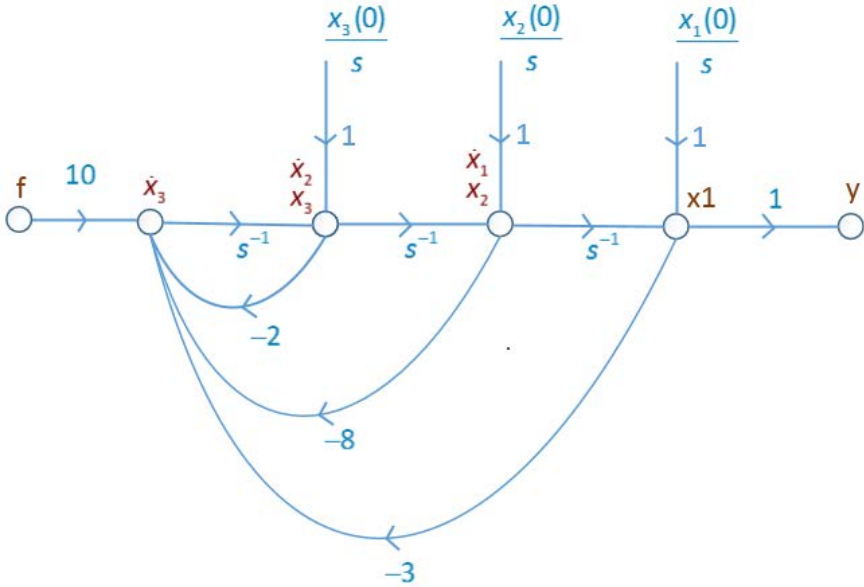


Figura 2.40: Diagrama de estados del sistema

Determinamos los factores que permitirán aplicar la ecuación 2.115, los mismos que son:

$$n = 1$$

$$M_1 = \frac{10}{s^3}$$

$$L_{11} = -\frac{2}{s}$$

$$L_{21} = -\frac{8}{s^2}$$

$$L_{31} = -\frac{5}{s^3}$$

$$L_{12} = 0$$

$$\Delta = 1 - (L_{11} + L_{21} + L_{31})$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{2}{s} - \frac{8}{s^2} - \frac{5}{s^3}\right)$$

$$\Delta = 1 + \frac{2}{s} + \frac{8}{s^2} + \frac{5}{s^3}$$

$$\Delta_1 = 1$$

Aplicando la fórmula 2.115 se determina la función de transferencia para el ejemplo, como se muestra a continuación.

$$M = \frac{\frac{10}{s^3} * 1}{1 + \frac{2}{s} + \frac{8}{s^2} + \frac{5}{s^3}} \quad (2.135)$$

$$M = \frac{10}{s^3 + 2s^2 + 8s + 5} \quad (2.136)$$

Ejemplo 3. Para el circuito electromecánico de la figura 2.41, determinar la función de transferencia $\frac{X(s)}{V_i(s)}$, considerando que la fuerza F corresponde a la mitad de la corriente que circula en el circuito.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

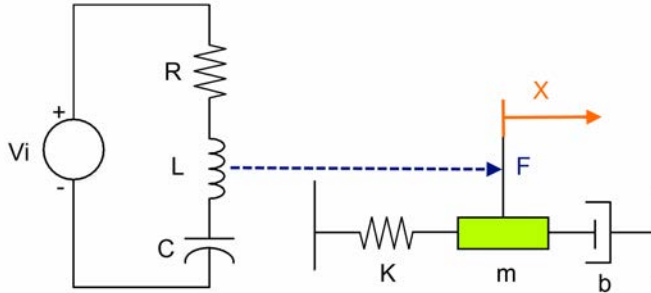


Figura 2.41: Sistema Electromecánico RLC - masa resorte amortiguador.

A. Circuito eléctrico RLC

Consideramos las siguientes ecuaciones que permiten establecer los voltajes para los diferentes elementos eléctricos:

- Voltaje en la resistencia

$$v_R(t) = R \cdot i(t) \quad (2.137)$$

- Voltaje en la inductancia.

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (2.138)$$

- Voltaje en el condensador

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.139)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Para encontrar la ecuación diferencial equivalente al circuito eléctrico, aplicamos la ley de voltaje Kirchhoff

$$v_a(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \quad (2.140)$$

entonces se obtiene la siguiente ecuación-íntegro diferencial:

$$v_a(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt \quad (2.141)$$

B. Sistema masa-resorte amortiguador

Las variables del sistema son:

Masa m

Fuerza externa F

Constante del resorte k

Constante de amortiguador b

Desplazamiento x

Para encontrar las ecuaciones diferenciales equivalente al circuito mecánico se utilizan la Ley de fuerzas de Newton $\sum F = m \cdot a$,

entonces se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$-k \cdot x - b \cdot \dot{x} + F = m\ddot{x} \quad (2.142)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

de donde $F = \frac{i(t)}{2}$, que reemplazando en la ecuación 2.142 resulta

$$-k \cdot x - b \cdot \dot{x} + \frac{i(t)}{2} = m\ddot{x} \quad (2.143)$$

Modelamiento en espacios de estados.

Con las ecuaciones 2.141 y 2.143, procedemos a plantear la representación del sistema en espacio de estados, para lo cual definimos los estados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x_1 &= \int i(t)dt \\x_2 &= i(t) \\x_3 &= x \\x_4 &= \dot{x}\end{aligned}$$

derivando las expresiones anteriores se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= i(t) \\ \dot{x}_2 &= \dot{i}(t) \\ \dot{x}_3 &= \dot{x} \\ \dot{x}_4 &= \ddot{x}\end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 2.141y 2.143, tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{V_a}{L} - \frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{k}{m}x_3 - \frac{b}{m}x_4 + \frac{1}{2m}x_2\end{aligned}$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

Finalmente el sistema representado en espacio de estados, según las ecuaciones 1.13 y 1.14, corresponde a la ecuación 2.144.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L \cdot C} & \frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_a \quad (2.144)$$

Obtención de la función de transferencia del sistema.

Realizamos la gráfica de estados para el sistema de la ecuación , el cual se puede ver en la figura 2.42.

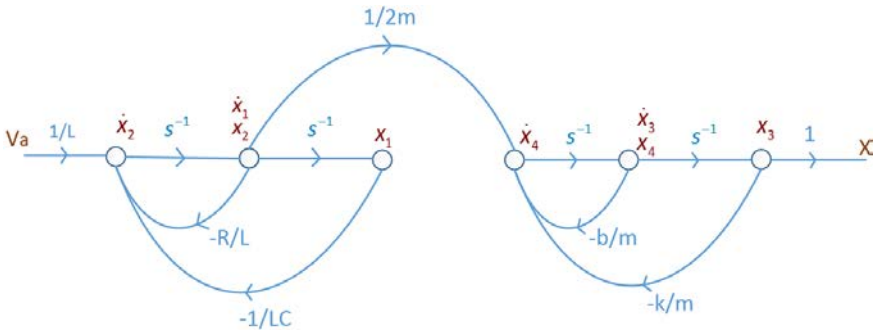


Figura 2.42: Diagrama de flujo de estados, sistema RLC - masa resorte amortiguador.

Mediante la fórmula 2.115 podemos encontrar la función de transferencia del sistema, para esto previamente se tiene que identificar las trayectorias directas y los lazos individuales, los mismos que se aprecian en la figura 2.43

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

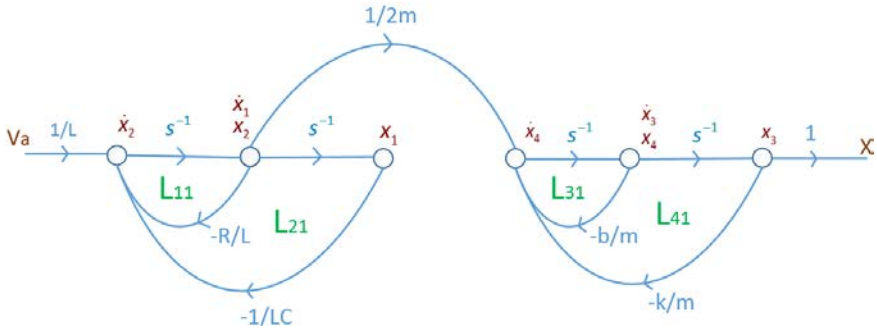


Figura 2.43: Lazos del diagrama de flujo de estados, sistema RLC - masa resorte amortiguador.

- el sistema tiene una trayectoria directa entonces $n = 1$, lo que provoca una ganancia de la trayectoria directa

$$M_1 = \frac{1}{2mLs^3}$$

- existen cuatro lazos individuales cuyas ganancias son:

$$L_{11} = -\frac{R}{Ls}$$

$$L_{21} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{LC} \right) = -\frac{1}{LCs^2}$$

$$L_{31} = -\frac{b}{ms}$$

$$L_{41} = -\frac{k}{ms^2}$$

- existen cuatro pares de lazos de no contacto con ganancias correspondientes a:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$L_{12} = L_{21} \cdot L_{31} = \left(-\frac{1}{LCs^2} \right) \left(-\frac{b}{ms} \right) = \frac{b}{LCms^3}$$

$$L_{22} = L_{21} \cdot L_{41} = \left(-\frac{1}{LCs^2} \right) \left(-\frac{k}{ms^2} \right) = \frac{k}{LCms^4}$$

$$L_{32} = L_{11} \cdot L_{31} = \left(-\frac{R}{Ls} \right) \left(-\frac{b}{ms} \right) = \frac{Rb}{Lms^2}$$

$$L_{42} = L_{11} \cdot L_{41} = \left(-\frac{R}{Ls} \right) \left(-\frac{k}{ms^2} \right) = \frac{Rk}{Lms^3}$$

- se halla Δ .

$$\Delta = 1 - (L_{11} + L_{21} + L_{31} + L_{41}) + (L_{12} + L_{22} + L_{32} + L_{42})$$

$$\Delta =$$

$$1 - \left(-\frac{R}{Ls} - \frac{1}{LCs^2} - \frac{b}{ms} - \frac{k}{ms^2} \right) +$$

$$\left(\frac{b}{LCms^3} + \frac{k}{LCms^4} + \frac{Rb}{Lms^2} + \frac{Rk}{Lms^3} \right)$$

$$\Delta =$$

$$1 + \frac{R}{Ls} + \frac{1}{LCs^2} + \frac{b}{ms} + \frac{k}{ms^2}$$

$$+ \frac{b}{LCms^3} + \frac{k}{LCms^4} + \frac{Rb}{Lms^2} + \frac{Rk}{Lms^3}$$

- se calcula Δ_k considerando que solo existe una trayectoria directa. En este caso todos los lazos tocan la trayectoria directa por lo tanto:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$\Delta_1 = 1$$

- y finalmente podemos plantear la función de transferencia de sistema

$$M = \frac{1}{1 + \frac{R}{Ls} + \frac{1}{LCs^2} + \frac{b}{ms} + \frac{k}{ms^2} + \frac{\frac{1}{2mLs^3}}{b} + \frac{k}{LCms^4} + \frac{Rb}{Lms^2} + \frac{Rk}{Lms^3}}$$

que al simplificar algebraicamente queda

$$M = \frac{cs}{2(k + s(b + RkC) + s^2(m + kLC + RbC) + s^3C(Rm + bL) + LCms^4)}$$

Entonces la función de transferencia del sistema es:

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{cs}{2(k + s(b + RkC) + s^2(m + kLC + RbC) + s^3C(Rm + bL) + LCms^4)} \quad (2.145)$$

Se puede apreciar en la ecuación 2.145 que se trata de un sistema de cuarto orden.

2.5.1. Característica del sistema representado en Espacios de Estados.

Conociendo que la representación en espacio de estados para un sistema está definido por la ecuación 1.13 y 1.14, cuya representación esquemática está en la figura 1.6, se debe enfatizar que la característica del sistema está contenida en la matriz A . Sabiendo que los polos del sistema son los únicos responsables sobre la característica dinámica del sistema, es necesario determinar los polos del sistema, cuando se tiene una representación en espacio de estados, para lo cual se procede de la siguiente manera:

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

La función de transferencia del sistema se puede determinar de la siguiente manera de acuerdo a [1] y [2]:

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación 1.13 y la ecuación 1.14 se tiene:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (2.146)$$

$$Y(s) = CX(s) \quad (2.147)$$

despejando $X(s)$ de la ecuación 2.146, obtenemos:

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s) \quad (2.148)$$

reemplazando la ecuación 2.148 en la ecuación 2.147 queda

$$Y(s) = C [sI - A]^{-1} BU(s) \quad (2.149)$$

por lo tanto la función de transferencia $X(s)$ que relaciona la salida $Y(s)$ con la entrada $U(s)$, se calcula con la siguiente fórmula:

$$G(s) = C [sI - A]^{-1} B \quad (2.150)$$

Considerando que el término inverso de la ecuación 2.150 igualado a cero corresponde a la ecuación característica que es:

$$\lambda I - A = 0 \quad (2.151)$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

en donde λ corresponde al vector que contiene los polos del sistema y la matriz I , es la identidad.

Los polos del sistema se pueden calcular a partir de la siguiente ecuación.

$$Det(\lambda I - A) \quad (2.152)$$

en donde λ corresponde al vector que contiene los polos del sistema y la matriz I , es la identidad.

Ejemplo 1. A partir de la representación en espacio de estados para el sistema masa resorte amortiguador de la figura 2.1, determinar los polos del sistema, así como la función de transferencia.

Las ecuaciones 2.10 y 2.11 corresponden a la representación en espacio de estados para el sistema masa resorte amortiguador. Considerando $K=1$, $m=1$ y $b=1$ para efectos de cálculo, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot f \quad (2.153)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

aplicando la ecuación 2.152 se determina los polos del sistema,

$$Det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \lambda + 1$$
$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

La función de transferencia para el sistema se obtiene a partir de la ecuación 2.150

$$G(s) = [1 \ 0] \left[sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que resolviendo queda:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Se procede a evaluar la respuesta gráfica de la salida ante una entrada escalón, tanto para el modelo de función de transferencia, como para el modelo en espacio de estados, con la finalidad de verificar la similitud al tratarse del mismo sistema.

La figura 2.44 representa el esquema de simulación para el modelo de función de transferencia y la figura 2.45 la respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario.

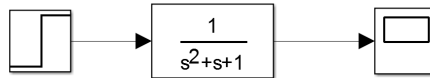


Figura 2.44: Bloques (Simulink) de simulación para el sistema representado como función de transferencia.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

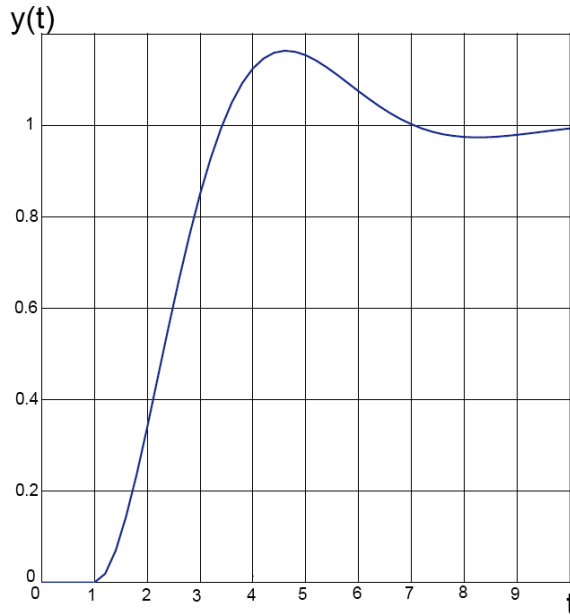


Figura 2.45: Respuesta del sistema ante señal escalón.

La figura 2.46 representa el esquema de simulación para el sistema modelado en espacio de estados y la figura 2.47 muestra la respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario.

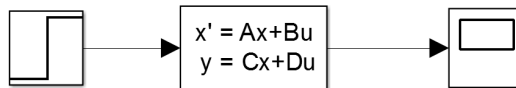


Figura 2.46: Bloques (Simulink) de simulación para el sistema representado en espacio de estados.

Cabe destacar que, en el Bloque que representa el sistema en espacio de estados de la figura 2.46, se configuran los valores de las matrices A , B , y C correspondientes, que conforman el sistema representado en las ecuaciones 2.153 y 2.154.

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

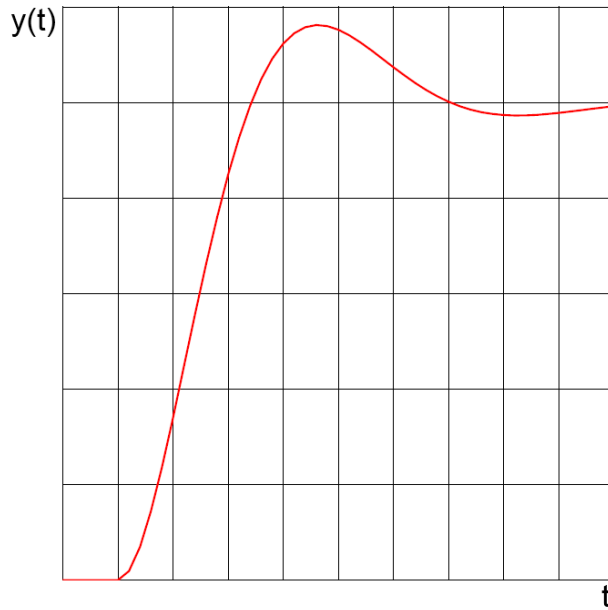


Figura 2.47: Respuesta del sistema representado en espacio de estados, ante una señal escalón.

Al tratarse del mismo sistema, las dos representaciones: la función de transferencia y la representación en espacio de estados, producen la misma respuesta típica para un sistema de segundo orden, como se puede observar en la figura 2.45 y la figura 2.47.

2.6. Preguntas y ejercicios de repaso.

1. ¿En qué consiste la representación de un sistema como: modelo de *función de transferencia*?
2. ¿En qué consiste la representación de un sistema como: modelo *en espacio de estados*?
3. Determinar la función de transferencia mediante la técnica de GFS para el sistema, cuya salida es y_4 y su entrada y_1 , considerando la siguiente estructura entre nodos:

$$y_2 = G_1 y_1 + G_2 y_4$$

2. Modelado Matemático de Sistemas Lineales.

$$y_3 = G_3 y_2 + G_4 y_4$$

$$y_4 = G_5 y_2 + G_6 y_3$$

4. Repita el ejercicio anterior considerando como salida y_3 y como entrada y_1 .

5. Para el sistema representado por la ecuación diferencial: $m\ddot{x} + 2 \cdot \dot{x} + 3 \cdot x - \int x = f$, en donde su salida es \dot{x} y su entrada f , determinar:

- a) El modelo es espacio de estados.
- b) La función de transferencia mediante la técnica de gráfica de estados.
- c) La función de transferencia a partir de las matrices que representan el sistema en espacio de estados, por medio de la ecuación 2.150.

Capítulo 3

Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

En este capítulo se abordara los temas relacionados a:

Los efectos de la realimentación del sistema sobre la estabilidad ganancia y sensibilidad del sistema,

La señales típicas de prueba para los sistemas de control,

El análisis del error en sistemas de realimentación,

Análisis de los modelos de los sistemas de primer y segundo orden,

Estudio, diseño y sintonización de controladores PID.

Estos temas han sido desarrollados principalmente en base a la lectura y aporte de los textos [1], [2] y [3].

3.1. Efectos de la realimentación en un sistema de control.

Haciendo referencia al sistema de realimentación de la figura 2.14, para lo cual la ganancia total se calcula a través de la ecuación 2.91, se procede a analizar el efecto de dicha realimentación sobre:

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

■ La Ganancia Global.

Para el sistema en lazo abierto, la ganancia total corresponde a $M = G$, mientras que para el sistema en lazo cerrado, la ganancia total corresponde a lo establecido en la ecuación 2.91 que es $M = \frac{G}{1 + GH}$.

Según lo estudiado en [2], la ganancia de lazo GH es función de frecuencia, por tanto si GH aumenta para un determinado rango de frecuencias superiores a una frecuencia de corte, entonces M se atenúa, produciendo el efecto de una acción como filtro según como indica la figura 3.1, pudiendo ser también el efecto contrario.

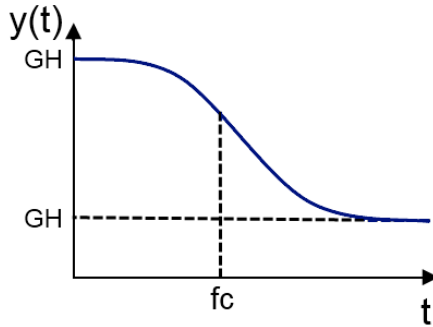


Figura 3.1: Filtro Paso Bajo

Por otra parte sí el valor de $GH = 0$ para un valor de frecuencia, entonces la ganancia M será equivalente a la ganancia en lazo abierto G de acuerdo a la ecuación 3.1.

$$M = \frac{G}{1 + 0} = G \quad (3.1)$$

Este análisis permite establecer que, al tener una ganancia GH dependiente de la frecuencia, podemos seleccionar estratégicamente el valor de H para conseguir una ganancia total conveniente en el diseño.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

■ La Estabilidad.

Si para un determinado valor de frecuencia el término $GH \approx -1$ se genera una frecuencia de resonancia, que provocará la inestabilidad del sistema al tener la ganancia total de amplitud infinita $M \approx \infty$. Entonces se puede decir que un sistema originalmente estable, al implementar una realimentación puede llegar a la inestabilidad en una determinada frecuencia, en este caso es recomendable implementar otro lazo de realimentación para conseguir la estabilidad de todo el sistema y poder controlarlo. La figura 3.2 muestra el sistema que incluye un segundo lazo de realimentación.

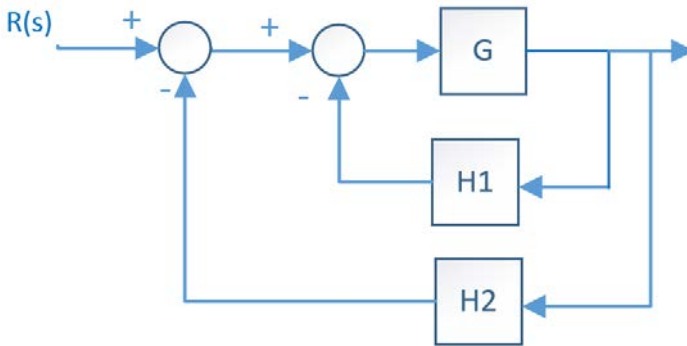


Figura 3.2: Estabilidad

■ La Sensibilidad.

De acuerdo a lo establecido en [2], la sensibilidad de M con respecto a G se define como:

$$S_G^M = \frac{\partial M/M}{\partial G/G} \implies \frac{\partial M}{\partial G} * \frac{G}{M} \quad (3.2)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Para el sistema de lazo abierto cuya ganancia total es $M = G$, al aplicar la ecuación 3.2 se tiene:

$$S_G^M = 1 * \frac{G}{G} = 1 \quad (3.3)$$

que evidencia que la sensibilidad es constante, mientras que para el sistema de lazo cerrado cuya ganancia total es $M = \frac{G}{1 + GH}$, al aplicar la ecuación 3.2 se tiene:

$$S_G^M = \frac{G}{1 + GH} \quad (3.4)$$

lo cual evidencia que la sensibilidad en un sistema de realimentación es una función de la frecuencia en los términos G y H , es decir es variable. Por lo tanto existirán ciertas frecuencias en donde el sistema cambia su sensibilidad.

Entendiéndose la sensibilidad como el cambio abrupto en el valor de la variable, ante una variación en algún parámetro del sistema, como ilustración de este efecto se pueden observar las figuras 3.3 y 3.4.

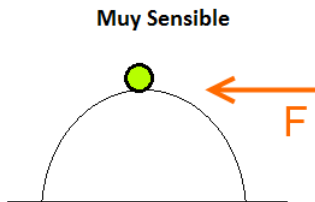


Figura 3.3: Sistema Muy Sensible

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

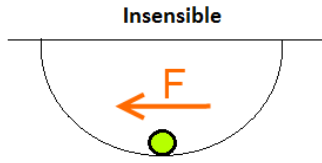


Figura 3.4: Sistema Insensible

Fruto del análisis de sensibilidad, surge la siguiente interrogante: ¿Cómo debe comportarse un sistema respecto a la sensibilidad? La respuesta es relativa, pues en forma ideal se requiere que el sistema sea sensible ante los cambios de referencia y que sea insensible con respecto al ruido y a las perturbaciones que puedan afectar su funcionamiento.

3.2. Señales típicas de prueba para evaluación de sistemas.

Las señales más comunes para pruebas de los sistemas de control son; la señal escalón, la señal rampa y la señal parábola, por lo tanto a continuación se establecerá la forma y el modelo matemático para cada una de ellas.

- Señal escalón. La figura 3.5 muestra su forma, y la ecuación 3.5 el modelo matemático que lo representa en el tiempo y la ecuación 3.6 el modelo matemático en Laplace.



Figura 3.5: Función Escalón

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$u(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$U(s) = \frac{R}{s} \quad (3.6)$$

- Señal rampa. La figura 3.6 muestra su forma, y la ecuación 3.7 el modelo matemático que lo representa en el tiempo y la ecuación 3.8 el modelo matemático en Laplace.

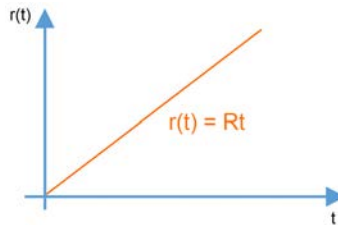


Figura 3.6: Función Rampa

$$r(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$R(s) = \frac{R}{S^2} \quad (3.8)$$

- Señal parábola. La figura 3.7 muestra su forma, y la ecuación 3.9 el modelo matemático que lo representa en el tiempo y la ecuación 3.10 el modelo matemático en Laplace.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

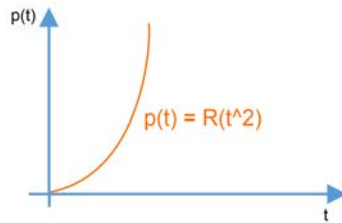


Figura 3.7: Función Parábola

$$p(t) = \begin{cases} Rt^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$P(s) = \frac{R}{s^3} \quad (3.10)$$

Es importante también conocer el tipo de sistema al cual se someterá la señal de prueba, para que su respuesta posibilite el análisis de error en régimen permanente, que a futuro se explicará, por tanto se define que, el Tipo de un sistema corresponde al número de polos en el origen presentes en el modelo matemático que representa dicho sistema. Como ejemplo se tomará la función de transferencia de la ecuación 3.11, en esta se puede observar que posee un polo igual a cero, lo que clasifica al sistema como *Tipo 1*, además se puede apreciar que el sistema corresponde a un Orden 2, al tener dos raíces en el denominador.

$$H(S) = \frac{1}{(s+3)s} \quad (3.11)$$

3.3. Análisis del error en estado estable.

Cuando en un sistema que incluye control por realimentación, se ingresa una señal de entrada, este responde en su salida con un determinado valor, cuando este valor no coincide con el valor referenciado

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

en su entrada, entonces se dice que el sistema posee error. En la figura 3.8 se puede observar la acción que provoca la fuerza aplicada sobre el desplazamiento de la masa, la cual luego de superar la etapa transitoria se estabiliza y es cuando se puede hacer un análisis de error en estado permanente.

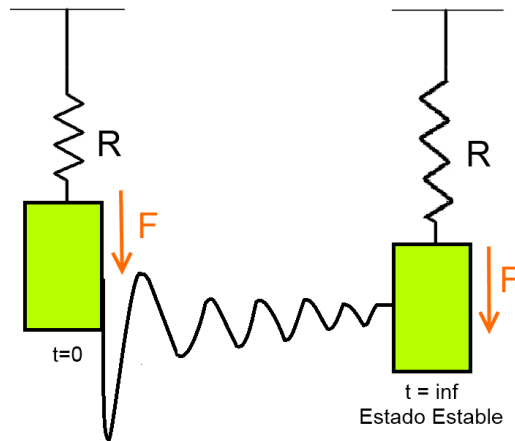


Figura 3.8: Sistema masa resorte sometido a la acción de una fuerza externa.

Es importante analizar el error de una sistema, pues se puede definir como “**propósito del control**” el de minimizar o eliminarlo. Considerando el sistema de realimentación de la figura 3.9 se plantea el error con la ecuación 3.12 .

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

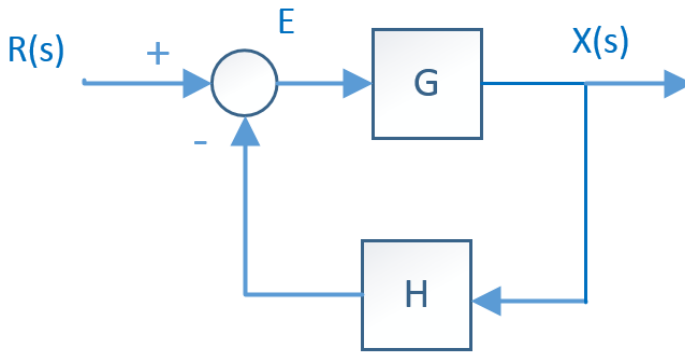


Figura 3.9: Error en un sistema de realimentación.

$$E(s) = R(s) - Y(s)H(s) \quad (3.12)$$

la salida del sistema en función del error, se calcula con la ecuación 3.13

$$Y(s) = E(s)G(s) \quad (3.13)$$

reemplazando la ecuación 3.13 en la ecuación 3.12 y agrupando los términos correspondientes, se obtiene la ecuación 3.14

$$E(s)(1 + G(s)H(s)) = R(s) \quad (3.14)$$

en consecuencia el error instantáneo del sistema se calcula con la ecuación 3.15

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}R(s) \quad (3.15)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Para calcular el error en estado permanente de acuerdo a [1] y [2], hacemos uso del teorema del valor final de la matemática de Laplace, el cual se plantea de manera general en la ecuación 3.16

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad (3.16)$$

aplicando el teorema de la ecuación 3.16 a la ecuación 3.15, obtenemos el error en estado permanente o error en estado estable e_{ss} , como indica la ecuación 3.17.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(S) \quad (3.17)$$

Considerando una realimentación unitaria $H(s) = 1$, que corresponde a una acomodación de ganancia y unidades en el bloque de realimentación, que permita comparar y analizar directamente las señales de la referencia y la señal de salida, se tiene la ecuación 3.18.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s * R(S)}{1 + G(S)} \quad (3.18)$$

En el siguiente apartado se analizará el error en estado permanente para diferentes tipos de sistemas, en función de las señales típicas de prueba (escalón, rampa y parábola), definidas anteriormente.

- *Análisis de error en estado estable para sistemas tipo cero, uno y dos ante una entrada escalón.*

Asumiendo la entrada escalón, cuya descripción matemática se muestra en el ecuación 3.6, podemos desarrollar la ecuación 3.18 para obtener la ecuación 3.20

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s * \frac{R}{s}}{1 + G(s)} \quad (3.19)$$

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} \quad (3.20)$$

por tanto podemos definir una constante K_E para la evaluación del límite en la función $G(s)$, como se muestra en la ecuación 3.21,

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K_E \quad (3.21)$$

permitiendo calcular el error en estado estable para una entrada escalón con la ecuación 3.22.

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_E} \quad (3.22)$$

Considerando el ejemplo de sistema *Tipo Cero* de la ecuación 3.23, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.21 y 3.22. Se obtiene; $K_E = \frac{1}{2}$, y $e_{ss} = \frac{R}{1+(1/2)}$.

$$G(s) = \frac{1}{s + 2} \quad (3.23)$$

De manera similar al caso anterior, considerando el ejemplo de sistema *Tipo Uno* de la ecuación 3.24, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.21 y 3.22. Se obtiene; $K_E = \infty$, y $e_{ss} = 0$.

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 2)} \quad (3.24)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

De manera similar, considerando el ejemplo de sistema *Tipo Dos* de la ecuación 3.25, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.21 y 3.22. Se obtiene; $K_E = \infty$, y $e_{ss} = 0$.

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} \quad (3.25)$$

- *Análisis de error en estado estable para sistemas tipo cero, uno y dos ante una entrada rampa.*

Asumiendo la entrada rampa, cuya descripción matemática se muestra en la ecuación 3.8, podemos desarrollar la ecuación 3.18 para obtener la ecuación 3.29

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{R}{s^2}}{1 + G(S)} \quad (3.26)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{R}{s}}{1 + G(S)} \quad (3.27)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s + sG(S)} \quad (3.28)$$

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(S)} \quad (3.29)$$

por tanto podemos definir una constante K_R para la evaluación del límite en la función $sG(s)$, como se muestra en la ecuación 3.30,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(S) = K_R \quad (3.30)$$

permitiendo calcular el error en estado estable para una entrada rampa con la ecuación 3.31.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$e_{ss} = \frac{R}{K_R} \quad (3.31)$$

Considerando el ejemplo de sistema *Tipo Cero* de la ecuación 3.23, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.30 y 3.31. Se obtiene; $K_R = 0$, y $e_{ss} = \infty$.

De manera similar al caso anterior, considerando el ejemplo de sistema *Tipo Uno* de la ecuación 3.24, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.30 y 3.31. Se obtiene; $K_R = \frac{1}{2}$, y $e_{ss} = 2R$.

De manera similar, considerando el ejemplo de sistema *Tipo Dos* de la ecuación 3.25, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.30 y 3.31. Se obtiene; $K_R = \infty$, y $e_{ss} = 0$.

- *Análisis de error en estado estable para sistemas tipo cero, uno y dos ante una entrada parábola.*

Asumiendo la entrada parábola, cuya descripción matemática se muestra en el ecuación 3.10, podemos desarrollar la ecuación 3.18 para obtener la ecuación 3.34

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s * \frac{R}{s^3}}{1 + G(S)} \quad (3.32)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 + s^2 G(S)} \quad (3.33)$$

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(S)} \quad (3.34)$$

por tanto podemos definir una constante K_P para la evaluación del límite en la función $s^2 G(s)$, como se muestra en la ecuación 3.35,

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(S) = K_P \quad (3.35)$$

permitiendo calcular el error en estado estable para una entrada parábola con la ecuación 3.36.

$$e_{ss} = \frac{R}{K_P} \quad (3.36)$$

Considerando el ejemplo de sistema *Tipo Cero* de la ecuación 3.23, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.35 y 3.36. Se obtiene; $K_P = 0$, y $e_{ss} = \infty$.

De manera similar al caso anterior, considerando el ejemplo de sistema *Tipo Uno* de la ecuación 3.24, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.35 y 3.36. Se obtiene; $K_P = 0$, y $e_{ss} = \infty$.

De manera similar, considerando el ejemplo de sistema *Tipo Dos* de la ecuación 3.25, calculamos el error en estado estable al aplicar las ecuaciones 3.35 y 3.36. Se obtiene; $K_P = \frac{1}{2}$, y $e_{ss} = 2R$.

Como conclusión se puede manifestar que para cálculo del error en estado estable según el tipo de sistema, se debe considerar lo siguiente:

1. Para sistemas *Tipo Cero* se debe utilizar el análisis con una entrada escalón.
2. Para sistemas *Tipo Uno* se debe utilizar el análisis con una entrada rampa.
3. Para sistemas *Tipo Dos* se debe utilizar el análisis con una entrada parábola.

En caso de realizar otros análisis, el error en estado estable no tiene un valor real, debido a la naturaleza propia de los sistemas.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

3.4. Análisis de Sistemas de Primero y Segundo Orden.

En este apartado se analiza el modelo y comportamiento de los sistemas de primero y segundo orden, los cuales contemplan un alto porcentaje de los sistemas en el campo del control. Considerando además que los sistemas de orden superior pueden simplificarse mediante consideraciones y ser analizados como un sistema de primero o segundo orden.

3.4.1. Modelo de sistemas de Primer orden.

Tiene la característica de poseer un polo. Un modelo generalizado es el que se muestra en la figura 3.10.

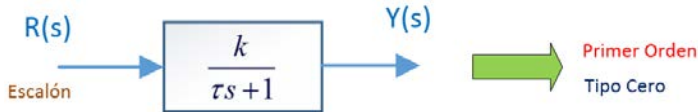


Figura 3.10: Sistema de primer orden.

k \rightarrow corresponde a la ganancia natural del sistema,

τ \rightarrow corresponde al Tao del sistema,

Debido a que el sistema es de *Tipo Cero*, podemos analizar su respuesta en el tiempo frente a una entrada de tipo escalón, de la siguiente manera.

La salida del sistema se obtiene a partir de la operación Transformada Inversa de Laplace de la función de transferencia del sistema por la función de transferencia de la entrada, como se plantea en la ecuación 3.37

$$y(t) = L^{-1} \{G(s) \cdot R(s)\} \quad (3.37)$$

por tanto al remplazar; la entrada escalón de amplitud R y la función de transferencia de sistema de primer orden, se tiene:

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \left(\frac{k}{\tau_s + 1} \right) \cdot \frac{R}{s} \right\} \quad (3.38)$$

desarrollando la operación se obtiene:

$$y(t) = kR \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad (3.39)$$

en muchos de los casos los sistemas naturalmente tardan en reaccionar ante la presencia de una entrada, considerando este tiempo de reacción comúnmente llamado tiempo muerto, el modelo de primer orden es el que se muestra en la ecuación 3.40 y su respuesta temporal se observa en la figura 3.11.

$$G(s) = \frac{k \cdot e^{-\theta s}}{\tau \cdot s + 1} \quad (3.40)$$

en donde el retardo de tiempo está representado con la función exponencial en Laplace y θ corresponde al tiempo muerto.

se puede calcular la ganancia k del sistema mediante la ecuación 3.41 y se establece que el tiempo de estabilización t_{ss} por lo general equivale a $t_{ss} \approx 4 \cdot \tau$.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta R} \quad (3.41)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

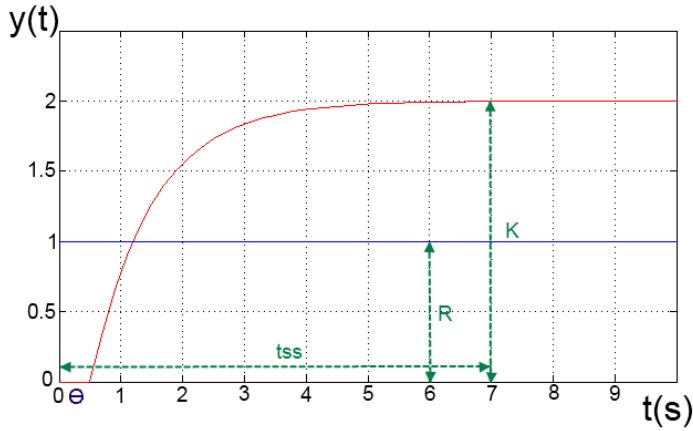


Figura 3.11: Respuesta del sistema de primer orden ante una entrada escalón.

Una característica muy importante de los sistemas de primer orden, es que no presentan sobrepaso, algunos ejemplos de sistemas que pueden adoptar este modelo son:

- Motor DC
- Hornos
- Nivel de líquido en un tanque

3.4.2. Modelo de sistemas de Segundo orden.

Evidentemente estos sistemas poseen dos polos. Como ejemplo se puede tener el sistema de segundo orden de la ecuación 3.42,

$$G(s) = \frac{1,5}{s^2 + s + 1} \quad (3.42)$$

de manera general, el modelo de segundo orden que incluye tiempo muerto, corresponde a la ecuación 3.43,

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 \cdot k \cdot e^{-\theta s}}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (3.43)$$

en donde:

ω_n → frecuencia natural.

k → ganancia del sistema.

θ → tiempo muerto.

ζ → coeficiente de amortiguamiento.

los polos del sistema son de tipo complejos conjugados, cuya componente real e imaginaria se muestra en la ecuación 3.44.

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega \quad (3.44)$$

La gráfica de uno de los polos, corresponde a la figura 3.12, en donde se puede apreciar sus componentes. Se puede notar que el valor real α del polo corresponde al término $\zeta\omega_n$, y la componente imaginaria ω que se define como frecuencia natural amortiguada.

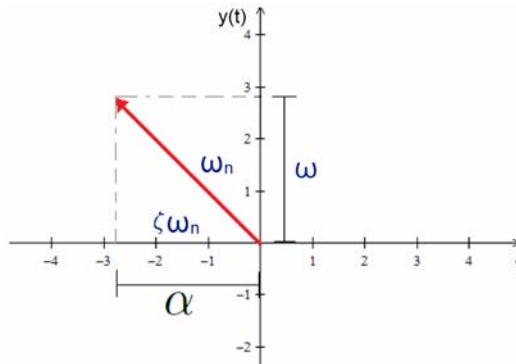


Figura 3.12: Esquema de frecuencias para un polo complejo.

al reemplazar los términos correspondientes de la ecuación 3.43 en la ecuación 3.44, se obtiene

$$s_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.45)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

en donde se define el término $\sqrt{1 - \zeta^2}$ como coeficiente de amortiguamiento relativo.

Sin considerar el tiempo muerto, para efectos de análisis, el sistema de segundo orden tiene la siguiente estructura.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 \cdot k}{(s + \zeta \cdot \omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})(s + \zeta \cdot \omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})}$$

que al aplicar la Transformada Inversa de Laplace considerando una entrada escalón de amplitud R , y despreciando el tiempo muerto, se obtiene la salida del sistema mostrado en la ecuación 3.46.

$$y(t) = R \cdot k \cdot \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{Sen} \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t + \text{arcCos}(\zeta) \right) \right) \quad (3.46)$$

de acuerdo con lo tratado en [1] y [2], una forma simplificada para la ecuación 3.46, se puede representar como la ecuación 3.47

$$y(t) = R \cdot k \cdot \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{Sen} (\omega t + \phi) \right) \quad (3.47)$$

$\phi \rightarrow$ ángulo de desfase de la onda seno

$\omega \rightarrow$ frecuencia amortiguada.

En la figura 3.13, se observa la respuesta típica de un sistema de segundo orden. Se puede ver que la señal presenta varios sobrepasos o también denominados sobre-impulsos, y que el primero es el más grande, este efecto de oscilación atenuada obedece a que, la función

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

matemática $y(t)$ corresponde a una señal sinusoidal modulada por una señal exponencial.

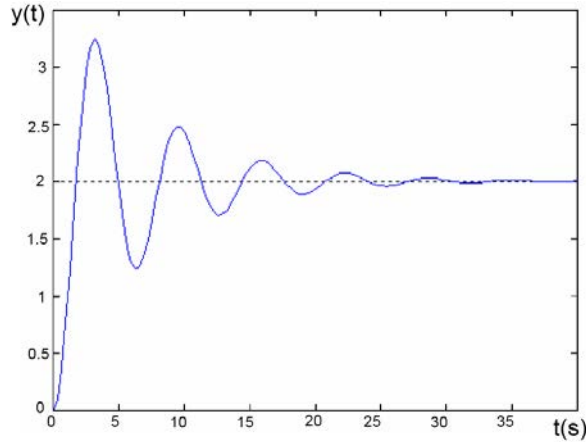


Figura 3.13: Respuesta de un sistema de segundo orden ante una entrada escalón.

Los parámetros que conforman el modelo de sistema de segundo orden de la ecuación se los puede calcular de la siguiente manera:

- El factor de amplificación k se calcula con el mismo criterio que para el sistema de primer orden, en base a la ecuación 3.41,
- La frecuencia amortiguada corresponde a:

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (3.48)$$

$f \rightarrow$ frecuencia de la onda

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.49)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

en donde $f \rightarrow$ frecuencia de la onda y $T \rightarrow$ periodo de la onda.

La frecuencia amortiguada se puede calcular a partir de la frecuencia natural y del coeficiente de amortiguamiento, con la siguiente ecuación.

$$\omega = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.50)$$

Existen otros parámetros importantes para el análisis de los sistemas de segundo orden, estos son; el tiempo de estabilización t_{ss} , el sobrepaso máximo M_P , el tiempo de levantamiento t_r , el tiempo de retardo t_d , el tiempo máximo t_{max} , entre otros. Estos pueden observarse en la figura 3.14, parámetros que son esenciales a la hora de diseñar un controlador, debido que este debe ser sintonizado de manera que la respuesta transitoria sea satisfactoria.

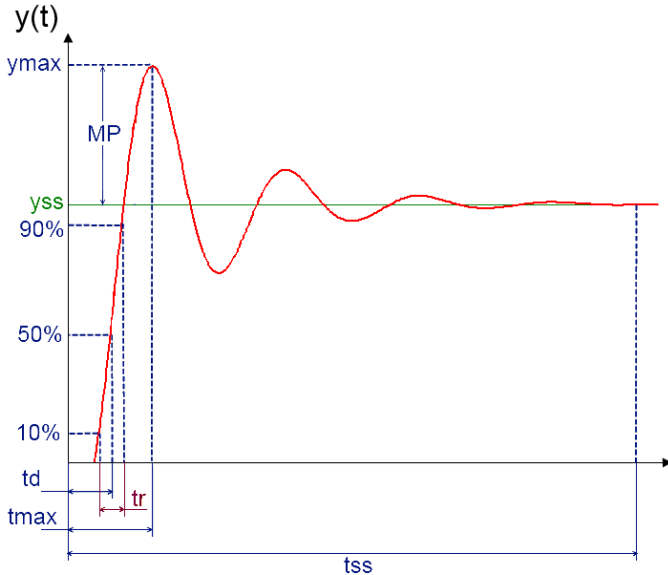


Figura 3.14: Características de la respuesta de un sistema de segundo orden.

Se destacan las fórmulas de cálculo de los parámetros, de acuerdo a [1] y [2], de la siguiente manera:

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

El tiempo de estabilización t_{ss} que corresponde al tiempo en que la onda oscila en un rango de $\pm 5\%$, se calcula de la siguiente ecuación:

$$t_{ss} = \frac{\pi}{\zeta\omega_n} \quad (3.51)$$

El sobrepaso máximo M_P que corresponde al porcentaje en que la onda sobrepasa su valor de estabilización, se calcula con la ecuación:

$$M_P = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (3.52)$$

El tiempo de levantamiento t_r , que corresponde al tiempo en que la onda va desde un 10% al 90% del valor de estabilización, se calcula con la ecuación:

$$t_r = \frac{\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)}{\omega} \quad (3.53)$$

El tiempo de retardo t_d , que corresponde al tiempo en que la onda va desde cero al 50% del valor de estabilización, podemos utilizar la ecuación 3.54 para su cálculo, considerando el coeficiente de amortiguamiento entre cero y uno,

$$t_d \cong \frac{1 + 0,7\zeta}{\omega_n} \quad (3.54)$$

El tiempo máximo t_{max} , que corresponde al tiempo en que la onda alcanza el valor del pico máximo, se calcula con la ecuación:

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n} \quad (3.55)$$

A continuación, se desarrollan varios ejemplos, con la finalidad de aplicar los conceptos en los modelos de primero y segundo orden.

Ejemplo 1. Realizar la gráfica de la respuesta del sistema de primer orden de acuerdo al comportamiento mostrado

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

en la figura 3.15 y considerando los valores de: $\theta = 0,2\text{seg}$ y $\tau = 1\text{seg}$.

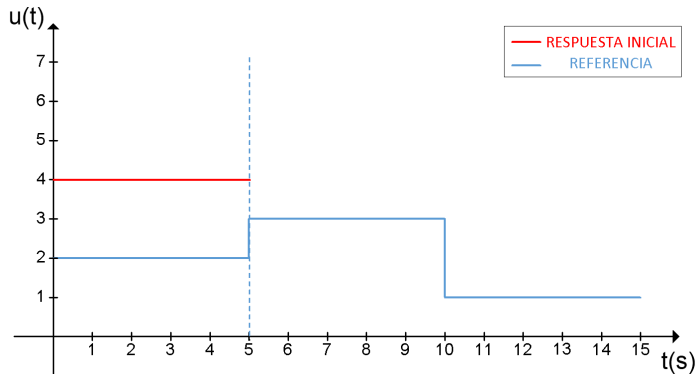


Figura 3.15: Comportamiento pasado de sistema de primer orden para el ejemplo.

Al observar el comportamiento del sistema hasta antes del valor de 5 en el eje horizontal, podemos determinar el factor de amplificación con la ecuación 3.41.

$$k = \frac{4}{2}$$

Si el valor en la entrada es de 3, entonces la salida será de 6, y si el valor en la entrada es de 1, entonces la salida será de 2. Tomando en cuenta este análisis y considerando los valores de: θ y τ , se procede a elaborar el esquema de la figura 3.16.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

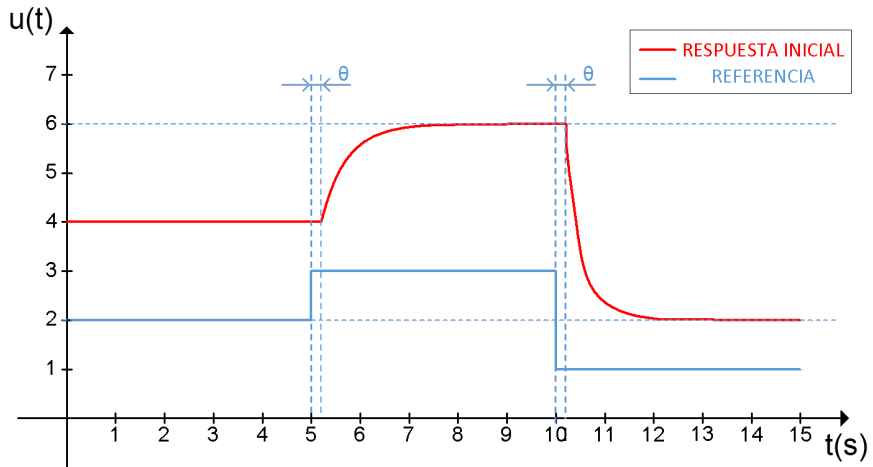


Figura 3.16: Comportamiento de un sistema de primer orden ante cambios de referencia.

Ejemplo 2. Completar la gráfica de la respuesta del sistema de segundo orden de acuerdo al cambio de referencia mostrado en la figura 3.17, determinar k y el valor de la salida para el cambio de referencia.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

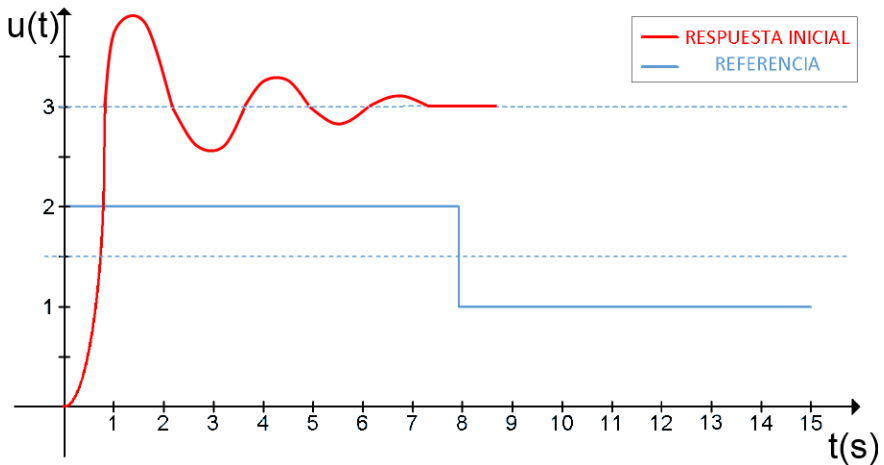


Figura 3.17: Comportamiento pasado de sistema de segundo orden para el ejemplo.

Al observar el comportamiento del sistema hasta antes del valor de 8 en el eje horizontal, podemos determinar el factor de amplificación con la ecuación 3.41.

$$k = \frac{3}{2}$$

si el valor en la entrada es de 1, entonces la salida será de 1.5. Tomando en cuenta este análisis se procede a elaborar el esquema de la figura 3.18.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

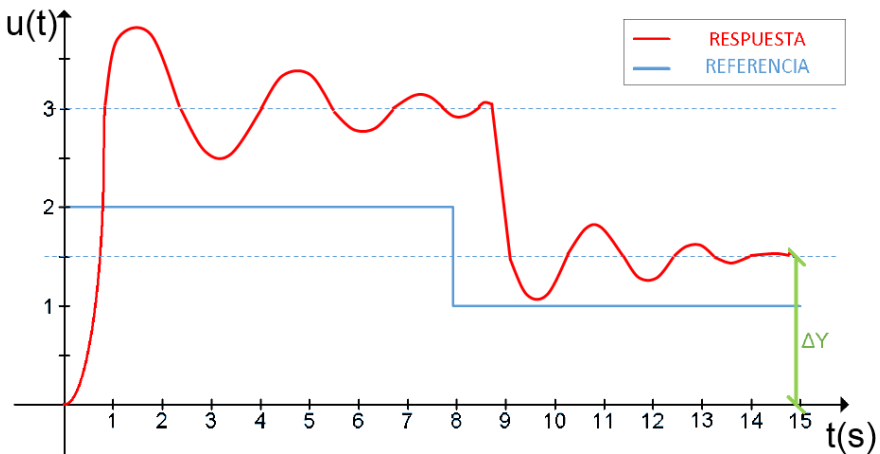


Figura 3.18: Comportamiento de un sistema de segundo orden ante cambios de referencia.

Ejemplo 3. Dada la función de transferencia de segundo orden de la ecuación 3.56, realizar los siguientes procedimientos:

$$G(S) = \frac{8}{6 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 24} \quad (3.56)$$

- Encontrar y realizar el gráfico los polos de la función $G(S)$ en el plano S .

Se simplifica la ecuación 3.56 obteniendo:

$$G(S) = \frac{1,333}{s^2 + 2 \cdot s + 4} \quad (3.57)$$

Se toma el denominador y mediante la fórmula cuadrática encontramos los polos de la función.

$$s^2 + 2 \cdot s + 4 = 0$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j \cdot \sqrt{3}$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

La gráfica de los polos en el plano de la variable compleja s , se observa en la figura 3.19.

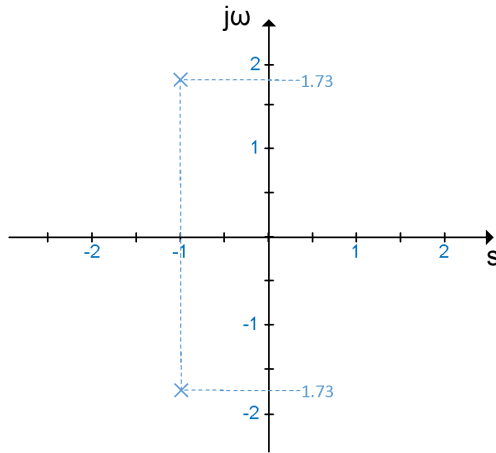


Figura 3.19: Gráfica de los polos de la función de transferencia.

- Calcular el valor de ω , ω_n , ϕ y k .

Haciendo referencia al modelo de función de transferencia de la ecuación 3.43, podemos determinar en primer lugar el valor de ω_n al tomar el último término del denominador, entonces:

$$\omega_n = \sqrt{4} = 2$$

a continuación podemos determinar el valor de ζ a partir del coeficiente del término que le acompaña a la variable compleja s , por tanto:

$$2 = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \implies \zeta = 0,5$$

se determina la frecuencia amortiguada ω por medio de la ecuación 3.50

$$\omega = 1,73$$

determinamos el ángulo ϕ , sabiendo que $\phi = \arccos(\zeta)$.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$\phi = 60^\circ$$

finalmente se obtiene k , sabiendo que el numerador de la ecuación 3.57 corresponde al factor $\omega_n^2 \cdot k$, por lo tanto

$$k = 0,3325$$

La gráfica de los parámetros de frecuencia y ángulo determinados, corresponde a la figura 3.20.

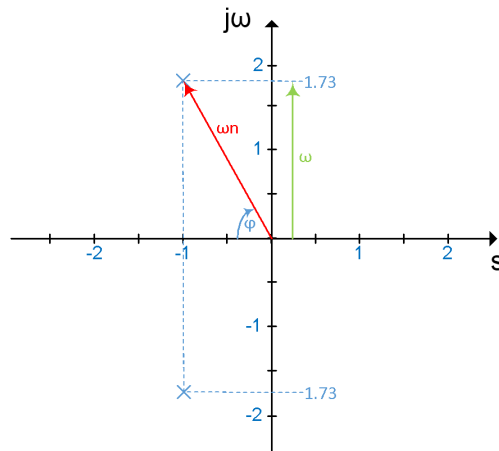


Figura 3.20: Parámetros de ω , ω_n y ϕ .

- **Evaluar la salida del sistema para un tiempo de 2 segundos, ante una entrada escalón de 3 unidades.**

Al reemplazar los datos obtenidos de ζ , ω_n , y k en la ecuación 3.47, y considerando una entrada escalón con amplitud $R=3$, tenemos:

$$y(2) = 3 \cdot 0,3325 \cdot \left(1 - \frac{e^{-0,5 \cdot 2 \cdot 2}}{\sqrt{1 - 0,5^2}} \text{Sen}(1,73 \cdot 2 + 1,047) \right)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$y(2) = 1,15$$

Estos resultados se comprueba realizando una simulación en simulink de MATLAB, cuyos resultados que se ilustra en las figuras 3.21 y 3.22.

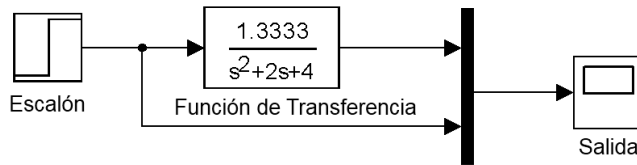


Figura 3.21: Esquema de simulación del modelo de segundo orden en simulink.

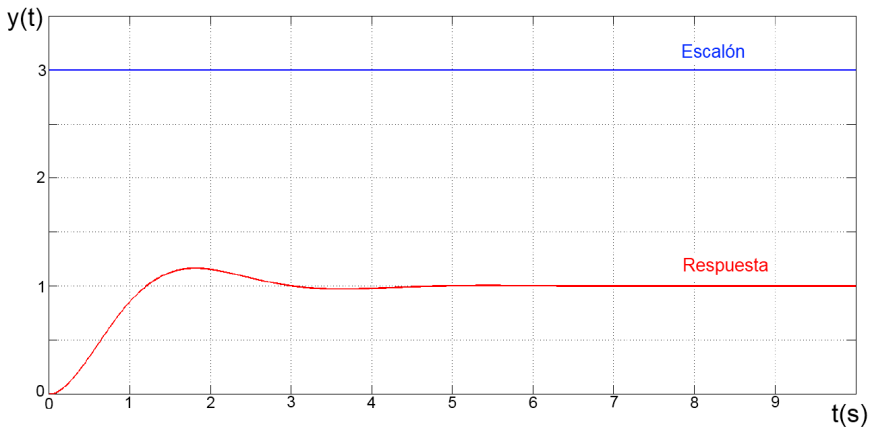


Figura 3.22: Respuesta de la simulación del modelo de segundo orden en simulink.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

3.4.3. Determinación de las características para el Modelo de Primer Orden.

Tomando en cuenta el modelo generalizado de sistema de primer orden de la ecuación 3.40 y que se representa en el esquema de la figura 3.23, en este apartado se analizará la técnica experimental para obtener el modelo en base a los resultados experimentales de la planta.

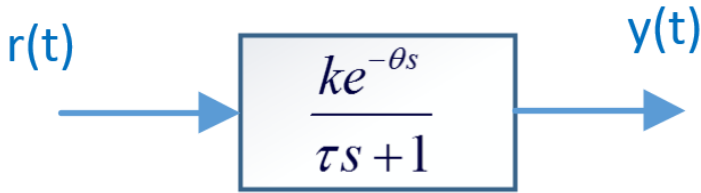


Figura 3.23: Modelo de Primer Orden generalizado.

Existen varias formas de obtener los parámetros del modelo, pero se cree muy aplicable el método SMITH, el mismo que se puede desarrollar con el siguiente procedimiento:

- Aplicar una señal escalón de amplitud determinada a la planta, garantizando que dicha señal no lesione a la misma.
- Registrar su respuesta física.
- Determinar el tiempo en el que la señal alcanza el 28% de su valor en estado estable, este dato se denominará t_{28} .
- Determinar el tiempo en el que la señal alcanza el 63% de su valor en estado estable, este dato se denominará t_{63} .
- Aplicar la ecuación 3.58 para determinar el parámetro τ .
- Aplicar la ecuación 3.59 para determinar el parámetro θ .
- Aplicar la ecuación 3.41 para determinar el parámetro k

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot (t_{63} - t_{28}) \quad (3.58)$$

$$\theta = (t_{63} - \tau) \quad (3.59)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

En la figura 3.24 se puede observar las cotas de los tiempos requeridos para el cálculo.

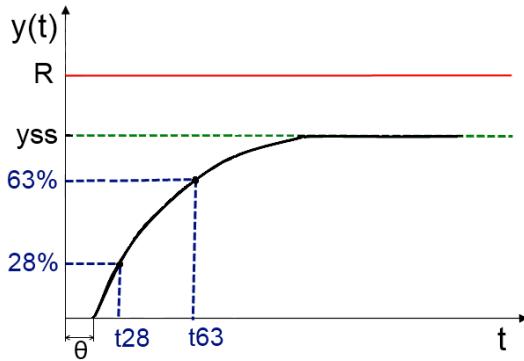


Figura 3.24: Identificación paramétrica criterio de SMITH.

3.4.4. Determinación Características, Modelo de Segundo Orden.

De forma similar que el caso anterior, tomando en cuenta el modelo generalizado de sistema de segundo orden de la ecuación 3.43 y que se representa en el esquema de la figura 3.14, en este apartado se analizará la técnica experimental para obtener el modelo en base a los resultados experimentales de la planta.

- Aplicar una señal escalón de amplitud determinada a la planta, garantizando que dicha señal no lesione a la misma.
- Registrar su respuesta física.
- Determinar el valor de sobrepaso máximo aplicando la ecuación 3.60.
- Determinar el parámetro ζ con la ecuación 3.61, la misma que resulta de despejar de la ecuación 3.52.
- Determinar el valor de T de acuerdo a la figura 3.25.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

- Determinar el parámetro ω_n a partir de las ecuaciones 3.49 y 3.50.
- Determinar el parámetro θ a partir de la ecuación 3.62.
- Aplicar la ecuación 3.41 para determinar el parámetro k

$$Mp = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \quad (3.60)$$

$$\zeta = \frac{|\ln(Mp)|}{\sqrt{\ln(Mp)^2 + \pi^2}} \quad (3.61)$$

$$\theta = t_{max} - \frac{T}{2} \quad (3.62)$$

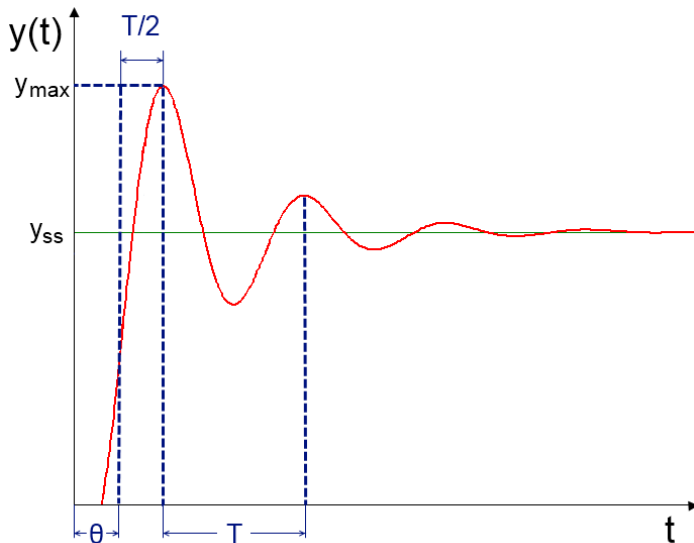


Figura 3.25: Periodo para la respuesta de segundo orden.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Los casos típicos de segundo orden corresponden a sistemas que poseen dos elementos almacenadores de energía, que no se puedan simplificar entre sí, tal es el caso de un sistema Masa Resorte Amortiguador o un sistema RLC serie, los cuales fueron analizados en secciones anteriores.

3.4.5. Análisis del comportamiento de sistemas de segundo orden en función del coeficiente de amortiguamiento.

Es importante analizar el comportamiento y la respuesta de los sistemas de segundo orden en función del coeficiente de amortiguamiento, este es un parámetro que caracteriza la respuesta del sistema.

1) Primer Caso: $\zeta = 0$

Los polos del sistema de acuerdo a la ecuación 3.45, para este caso corresponden a:

$$s_1 = j\omega_n$$

$$s_2 = -j\omega_n$$

La ubicación de los polos y la respuesta temporal del sistema se puede observar en la figura 3.26, este comportamiento caracteriza al sistema como Oscilante.

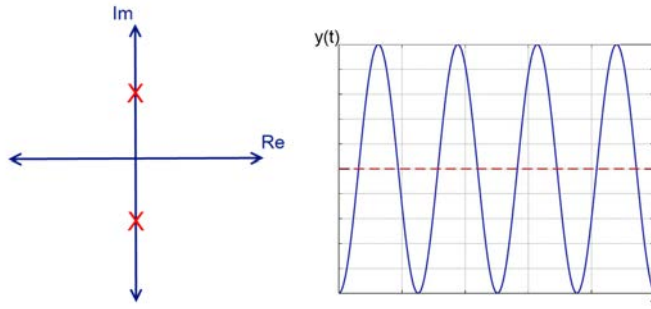


Figura 3.26: Respuesta Oscilante.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

2) Segundo Caso: $0 < \zeta < 1$

Los polos del sistema de acuerdo a la ecuación 3.45, para este caso corresponden a:

$$s_1 = -\alpha + j\omega_n$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_n$$

La ubicación de los polos y la respuesta temporal del sistema considerando $\zeta = 0,5$, se puede observar en la figura 3.27, este comportamiento caracteriza al sistema como Subamortiguado.

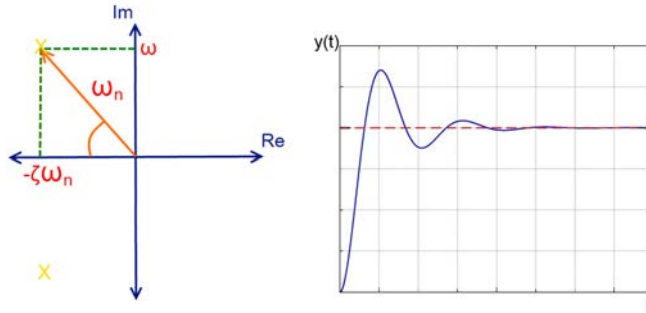


Figura 3.27: Sistema Subamortiguado.

3) Tercer Caso: $\zeta = 1$

Los polos del sistema de acuerdo a la ecuación 3.45, para este caso corresponden a:

$$s_1 = -\omega_n$$

$$s_2 = -\omega_n$$

La ubicación de los polos y la respuesta temporal del sistema se puede observar en la figura 3.28, este comportamiento caracteriza al sistema como Críticamente amortiguado.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

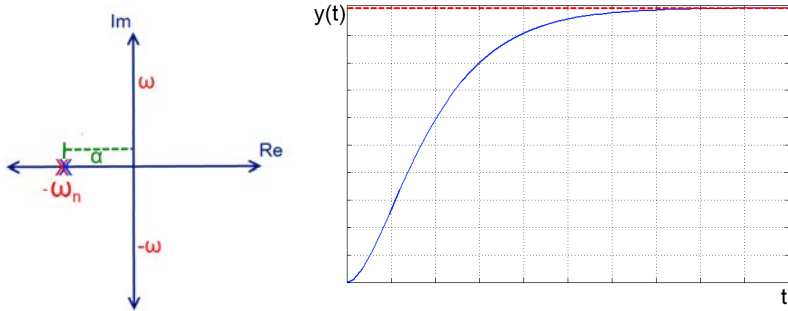


Figura 3.28: Sistema Críticamente amortiguado.

4) Cuarto Caso: $\zeta > 1$

Los polos del sistema de acuerdo a la ecuación 3.45, para este caso corresponden a:

$$s_1 = -\alpha$$

$$s_2 = -\beta$$

La ubicación de los polos y la respuesta temporal del sistema considerando $\zeta = 2$ se puede observar en la figura 3.29, este comportamiento caracteriza al sistema como Sobreamortiguado.

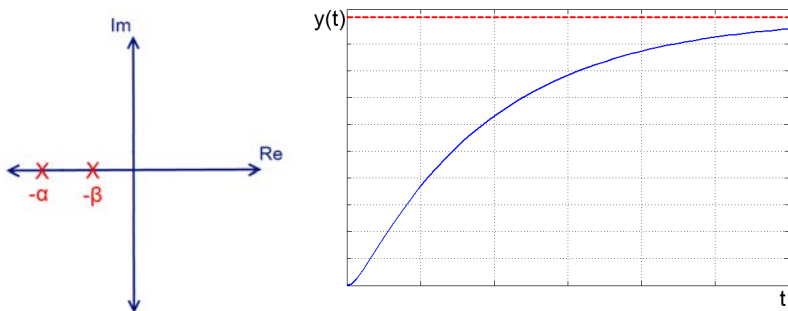


Figura 3.29: Sistema Sobreamortiguado.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

5) Quinto Caso: $\zeta < 0$

Los polos del sistema de acuerdo a la ecuación 3.45, para este caso corresponden a:

$$s_1 = \alpha + j\omega$$

$$s_2 = \alpha - j\omega$$

La ubicación de los polos y la respuesta temporal del sistema se puede observar en la figura 3.30, este comportamiento caracteriza al sistema como Inestable.

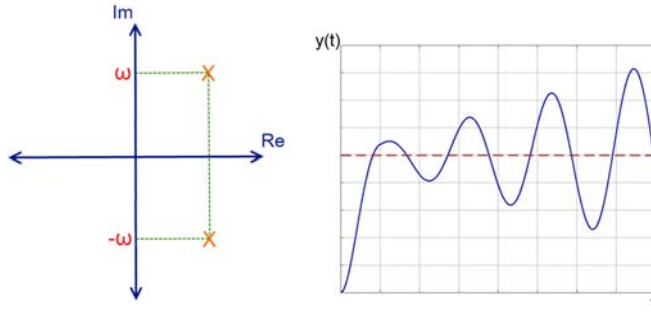


Figura 3.30: Sistema Inestable.

Se puede llegar a concluir que cuando el coeficiente de amortiguamiento ζ se incrementa, el sobrepaso máximo disminuye. Se ha generado varios escenarios de simulación, según el esquema de la figura 3.31, cuya respuesta se puede observar en la figura 3.32.

El sistema de segundo orden corresponde a la ecuación 3.63,

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \quad (3.63)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

en la cual se ha variado el valor del coeficiente de amortiguamiento para: $\zeta = 0,2$, $\zeta = 0,5$, $\zeta = 0,8$, $\zeta = 1$ y $\zeta = 3$.

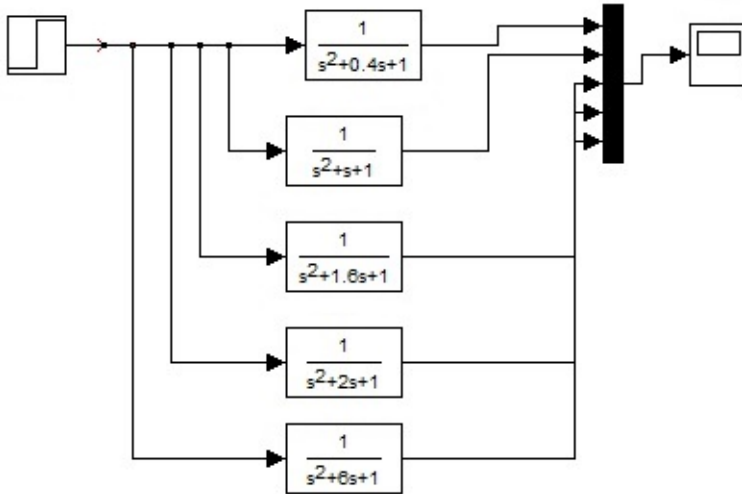


Figura 3.31: Escenario de simulación para un sistema ante la variación del coeficiente de amortiguamiento.

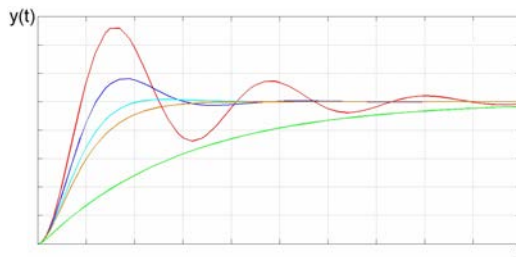


Figura 3.32: Respuesta del sistema de segundo orden ante la variación del coeficiente de amortiguamiento, con $\zeta=0.2$ (rojo), $\zeta=0.5$ (azul), $\zeta=0.8$ (cyan) $\zeta=1$ (marrón) y $\zeta=3$ (verde).

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Es importante destacar que mientras más a la izquierda se ubican los polos, más rápido reacciona el sistema, debido a que la componente real es más negativa y por estar relacionada con la función exponencial en el tiempo según la ecuación 3.47, esta provoca una respuesta exponencial negativa que permite al sistema alcanzar el valor de estabilización en forma más rápida.

3.5. Estabilidad de un sistema.

La estabilidad de un sistema es la capacidad para llegar al estado de equilibrio, para el análisis de sistemas de control, se consideran dos tipos de estabilidad:

- Estabilidad absoluta: este tipo de estabilidad determina si el sistema es estable o no.
- Estabilidad relativa: cuantifica el nivel o rango de estabilidad del sistema.

La estabilidad del sistema está en función directa de los polos del sistema, el sistema se considera estable cuando sus polos se ubican a la izquierda del plano de la variable compleja s . Existen varios criterios y métodos para determinar la estabilidad de los sistemas, entre los más importantes tenemos:

- Criterio de Routh - Hurwitz

Es un método algebraico que permite identificar el número de raíces en el semiplano derecho, este método me permite establecer la estabilidad absoluta y relativa.

- Criterio de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist relaciona la respuesta en frecuencia del sistema.

- Criterio de Bode

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

El criterio de estabilidad de Bode para la respuesta de un sistema en el dominio de la frecuencia, puede determinar los límites de estabilidad al analizar la ganancia y la fase del sistema.

Con la intención de dar una visión rápida del análisis de estabilidad, se abordará únicamente el criterio de Routh - Hurwitz.

3.5.1. Criterio de estabilidad de Routh Hurwitz.

El criterio de Routh es un método que permite eliminar el cálculo de las raíces y asegura si cualquiera de las raíces es positiva o tiene partes reales que son positivas, en cuyo caso el sistema es inestable.

3.5.2. Procedimiento para determinar estabilidad según el criterio de Routh Hurwitz.

De acuerdo a [1] y [2] en lo que corresponde a este tema, se realiza una síntesis.

1. Partimos de la ecuación característica que puede ser planteada como la ecuación 3.64.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots + a_1 s^1 + a_0 = 0 \quad (3.64)$$

2. El siguiente paso es formar el arreglo de Routh Hurwitz, ordenando los coeficiente con el siguiente patrón:

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$\begin{array}{cccccccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 & a_0 & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & 0 & \dots \\
 s^{n-2} & A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & A_{m-1} & A_m & 0 & \dots \\
 s^{n-3} & B_1 & B_2 & \cdot & \cdot & B_{m-1} & B_m & 0 & \dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\
 s^1 & Y_1 & Y_2 & \cdot & \cdot & Y_{m-1} & Y_m & 0 & \dots \\
 s^0 & Z_1 & Z_2 & \cdot & \cdot & Z_{m-1} & Y_m & 0 & \dots
 \end{array} \tag{3.65}$$

Los coeficientes se encuentran de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl}
 A_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}} & B_1 = \frac{A_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot A_2}{A_1} & \dots \\
 A_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}} & B_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot A_3}{A_1} & \dots \\
 \cdot & \cdot & \dots \\
 \cdot & \cdot & \dots \\
 \cdot & \cdot & \dots \\
 A_{m-1} = \frac{a_{n-1} \cdot a_2 - a_n \cdot a_1}{a_{n-1}} & B_{m-1} = \frac{A_1 \cdot a_1 - a_{n-1} \cdot A_m}{A_1} & \dots \\
 A_m = \frac{a_{n-1} \cdot a_0 - a_n \cdot 0}{a_{n-1}} & B_m = \frac{A_1 \cdot 0 - a_{n-1} \cdot 0}{A_1} & \dots
 \end{array} \tag{3.66}$$

Este procedimiento continúa hasta que se completa la primera columna de valores de la tabla.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$\begin{array}{c}
 s^n \\
 s^{n-1} \\
 s^{n-2} \\
 s^{n-3} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c}
 a_n \\
 a_{n-1} \\
 A_1 \\
 B_1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 Y_1 \\
 Z_1
 \end{array} \right] \tag{3.67}$$

El análisis consiste en verificar los cambios de signos de la primera columna de coeficientes, según el arreglo 3.67. De existir cambios de signo, el sistema es inestable, y el número de polos inestables mantiene relación directa con aquel número de cambios de signo. Al ser uno de los coeficientes cero, este se considera de signo positivo.

Ejemplo 1: Comprobar si el sistema dado en la ecuación es inestable.

$$s^4 + 2s^3 + s^2 - 2s + 4 = 0 \tag{3.68}$$

$$\begin{array}{c}
 s^4 \\
 s^3 \\
 s^2 \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 1 & 1 & 4 \\
 2 & -2 & 0 \\
 A_1 & A_2 & 0 \\
 B_1 & 0 & 0 \\
 C_1 & 0 & 0
 \end{array}$$

Los coeficientes corresponden a:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2 \cdot 1 - (1 \cdot -2)}{2} = 2 \\
 A_2 &= \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 0}{2} = 4 \\
 B_1 &= \frac{(2 \cdot -2) - 2 \cdot 4}{2} = -6 \\
 B_2 &= 0 \\
 C_1 &= \frac{-6 \cdot 4 - 2 \cdot 0}{-6} = 4
 \end{aligned}$$

Entonces obtenemos nuestra matriz resultante.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

col_0	col_1	col_2	col_3
s^4	1	1	4
s^3	2	-2	0
s^2	2	4	0
s^1	-6	0	0
s^0	4	0	0

Extraemos la primera columna para el análisis.

col_0	col_1
s^4	1
s^3	2
s^2	2
s^1	-6
s^0	4

Ahora analizamos si entre cada una de las filas de la primera columna “ col_1 ” existe un cambio de signo;

$s^4 \rightarrow s^3$	→	1 → 2	<i>Sin cambio</i>
$s^3 \rightarrow s^2$	→	2 → 2	<i>Sin cambio</i>
$s^2 \rightarrow s^1$	→	2 → -6	<i>1er cambio</i>
$s^1 \rightarrow s^0$	→	-6 → 4	<i>2do cambio</i>

Tal como se puede observar entre la fila $s^2 \rightarrow s^1$ existe un cambio de *positivo* a *negativo* y entre la fila $s^1 \rightarrow s^0$ existe un cambio de *negativo* a *positivo*, de tal manera que este sistema es **inestable**.

Este método presenta casos especiales, los cuales se pueden consultar con mayor detalle en la bibliografía.

3.5.3. Casos Especiales.

Se procede a analizar dos casos especiales, como lo tratado en [2].

- Caso I: Cuando en la elaboración de la tabla, uno de los coeficientes de la primera columna es cero, este impedirá el cálculo de los posteriores coeficientes, en este caso podemos, reemplazar el coeficiente de cero por un valor muy cercano a cero ϵ , esta acción permite continuar con el cálculo.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Ejemplo 2: Determinar la estabilidad para el sistema cuyo polinomio característico es: $s^3 + s + 1 = 0$

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \\ A_1 & A_2 \\ B_1 & \end{array}$$

Los coeficientes corresponden a:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon} \\ A_2 &= 0 \\ B_1 &= \frac{-\frac{1}{\epsilon} - \epsilon \cdot 0}{-\frac{1}{\epsilon}} = 1 \end{aligned}$$

Entonces obtenemos la matriz resultante

$$\begin{array}{r} col_0 \\ s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{ccc} col_1 & col_2 \\ 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & 0 \\ 1 & \end{array}$$

En este caso se trata de un sistema inestable al presentar dos cambios de signo.

Al obtener las raíces que vemos que dos de ellas son inestables

$$\begin{aligned} s_1 &= 0.3412 + j1.1615 \\ s_2 &= 0.3412 - j1.1615 \\ s_3 &= -0.6823 \end{aligned}$$

- Caso II: Termina prematuramente la tabla al presentarse una fila con todos los coeficientes de cero, en este caso se forma un polinomio auxiliar a partir de los coeficientes de la línea anterior a la de ceros, a este polinomio se le aplica la derivada y los coeficientes del polinomio resultante serán los que reemplacen a

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

la fila de ceros, permitiendo seguir con el cálculo.

Ejemplo 3: Determinar la estabilidad para el sistema cuyo polinomio característico es: $2s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 2$

$$\begin{array}{r}
 s^5 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \\
 s^4 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \\
 s^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 s^2 \\
 s
 \end{array}$$

La fila correspondiente es cero se toma la anterior y derivamos para después reemplazar los valores.

$$2s^4 + 3s^2 + 2$$

Derivada

$$8s^3 + 6s + 0$$

La tabla resultante

$$\begin{array}{r}
 s^5 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \\
 s^4 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \\
 s^3 \quad 8 \quad 6 \quad 0 \\
 s^2 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad 0 \\
 s \quad -\frac{14}{3} \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

En este caso se trata de un sistema inestable al presentar un cambio de signo.

3.5.4. Estabilidad relativa.

En este apartado se calculará la estabilidad relativa, es decir el rango de valores de una determinada variable en la que se da la estabilidad.

Ejemplo 4: Hallar el rango de valores del parámetro k que permita la estabilidad del sistema, cuyo polinomio característico se plantea en la ecuación 3.69.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$s^4 + 2s^3 + ks^2 + s + 2 = 0 \quad (3.69)$$

el arreglo correspondiente es:

<i>col</i> ₀	<i>col</i> ₁	<i>col</i> ₂	<i>col</i> ₃
s^4	1	k	2
s^3	2	1	0
s^2	A_1	A_2	0
s^1	B_1	0	0
s^0	C_1	0	0

los coeficientes son:

$$A_1 = \frac{2k - (1 \cdot 1)}{2}$$

$$A_1 = \frac{2k - 1}{2}$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{2}$$

$$A_2 = 2$$

$$B_1 = \frac{\left(\frac{2k - (1 \cdot 1)}{2}\right) \cdot 1 - 2 \cdot 2}{\frac{2k - (1 \cdot 1)}{2}}$$

$$B_1 = \frac{2k - 9}{2k - 1}$$

$$C_1 = \frac{-6 \cdot 4 - 2 \cdot 0}{-6}$$

$$C_1 = 2$$

el arreglo resultante es:

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

col_0	col_1	col_2	col_3
s^4	1	k	2
s^3	2	1	0
s^2	$\frac{2k-1}{2}$	2	0
s^1	$\frac{2k-9}{2k-1}$	0	0
s^0	2	0	0

Para que el sistema sea estable, no debe haber cambios de signo en la primera columna, debido a que los primeros términos de la primera columna son positivos, obliga a que los demás términos que contiene a k , sean también positivos, por lo tanto:

Analizando la primera desigualdad tenemos:

$$\frac{2k-1}{2} > 0$$

$$2k-1 > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{2}$$

Analizando la segunda desigualdad tenemos:

$$\frac{2k-9}{2k-1} > 0$$

$$2k-9 > 0 \Rightarrow k > \frac{9}{2}$$

Una vez encontrados los valores de las variables, se realizan las gráficas que permiten establecer el resultado, según como se observa en la figura 3.33.

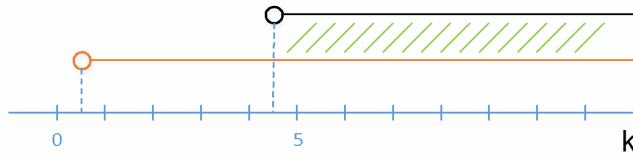


Figura 3.33: Gráfica de los valores para una desigualdad.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Identificamos el rango de valores común de ambas desigualdades, determinando así que la condición para que el sistema sea estable es:

$$k > \frac{9}{2}$$

Ejemplo 5: Hallar la región k_1 , k_2 que permita la estabilidad del sistema, cuyo polinomio característico se plantea en la ecuación 3.70.

$$s^3 + k_2 s^2 + k_1^2 s + k_1 k_2 = 0 \tag{3.70}$$

Al construir el arreglo, se tiene

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & k_1^2 \\ s^2 & k_2 & k_1 k_2 \\ s & a & 0 \\ s^0 & b & \end{array}$$

los coeficientes a y b se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a &= \frac{k_2(k_1)^2 - k_1 k_2}{k_2} = \frac{k_2(k_1^2 - k_1)}{k_2} = k_1^2 - k_1 \\ b &= \frac{a(k_1 k_2) - k_2(0)}{a} = \frac{a(k_1 k_2)}{a} = k_1 k_2 \end{aligned}$$

entonces el arreglo correspondiente a la primera columna es:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & \\ s^2 & k_2 & \\ s^1 & k_1^2 - k_1 & \\ s^0 & k_1 k_2 & \end{array}$$

las condiciones para la estabilidad es que los coeficientes sean todos positivos, debido a que el primer elemento así lo condiciona, esto exige que:

- $k_2 > 0$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

- $k_1 k_2 > 0$
- $k_1^2 > k_1 \rightarrow k_1(k_1 - 1) > 0$

por lo tanto las condiciones son; $k_2 > 0$ y $k_1 > 1$, al realizar la gráfica de estas condiciones, se obtiene la gráfica de la figura 3.34 donde muestra la región (rojo) de valores de k_1 y k_2 que permite la estabilidad del sistema.

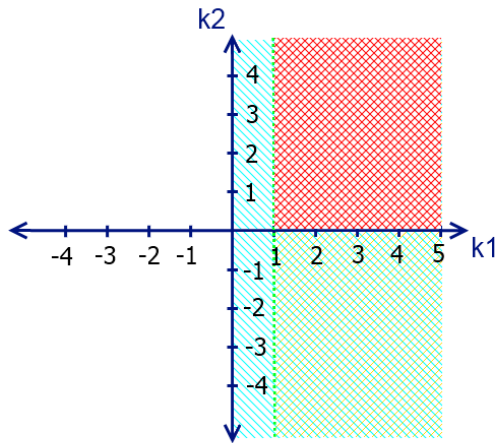


Figura 3.34: Región de k_1 y k_2 para la estabilidad.

3.6. Lugar Geométrico de las Raíces (LGR).

Es importante en los sistemas de control lineal investigar y analizar la trayectoria de las raíces o polos de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado. Si se considera que la función de transferencia de lazo abierto posee una ganancia variable k , entonces esta técnica permite establecer la ubicación satisfactoria de los polos del sistema en lazo cerrado al posibilitar la elección de la ganancia, la misma que puede variar en un rango de menos infinito a más infinito. En caso

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

de que no exista un valor de la ganancia que satisfaga los requerimientos de ubicación de los polos del sistema, puede ser necesario la incorporación de un bloque compensador, dando lugar al diseño de los controladores.

Se plantea la ecuación característica, la cual contienen a la variable de ganancia en lazo abierto del sistema k , según la ecuación 3.71,

$$1 + k \cdot G(S)H(S) = 0 \quad (3.71)$$

entonces podemos plantear la condición general que $k \cdot G(S)H(S) = -1$, considerando que tanto $G(S)$ como $H(S)$, son funciones de frecuencia, podemos establecer dos condiciones:

$$\text{Condición de Magnitud} \Rightarrow |k \cdot G(S)H(S)| = 1$$

$$\text{Condición de Ángulo} \Rightarrow \angle k \cdot G(S)H(S) = \pm 180$$

Al trazar la trayectoria de los valores de k para la ecuación 3.71, se puede observar la trayectoria del comportamiento de los polos del sistema en lazo cerrado ante la variación de la ganancia k , característica conocida como; Lugar Geométrico de las Raíces (LGR). Puesto que se trata de una técnica gráfica, se lo puede desarrollar mediante el uso del comando *rlocus* de MATLAB (*rlocus(num, den)*), la misma que consiste en alimentar al comando con el numerador y denominador de la función de transferencia de lazo, según como se establece en la ecuación 3.72.

$$1 + \frac{num}{den} = 0 \quad (3.72)$$

Ejemplo 1: Trazar el LGR para la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 3} \quad (3.73)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Cuando no se especifica la función de transferencia de realimentación, esta es asumida como realimentación unitaria $H(S) = -1$. El LGR correspondiente a la función de transferencia de la ecuación 3.73 es aquella que se ilustra en la figura 3.35 .

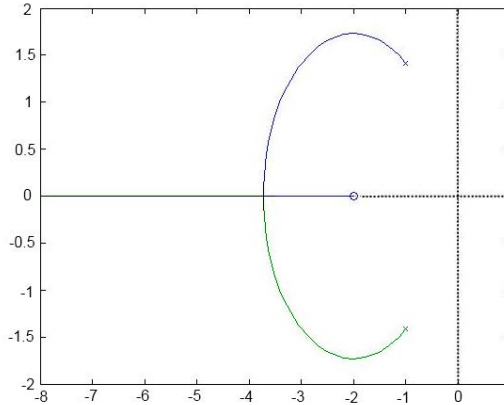


Figura 3.35: Lugar geométrico de las raíces.

Se observa que el lugar geométrico de las raíces está completamente en el semiplano izquierdo, esto quiere decir que para todos los valores de k el sistema es estable.

Ejemplo 2: Trazar el LGR para la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^3 + s^2 + s - 2} \quad (3.74)$$

El LGR correspondiente a la función de transferencia de la ecuación 3.74 es aquella que se muestra en la figura 3.36.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

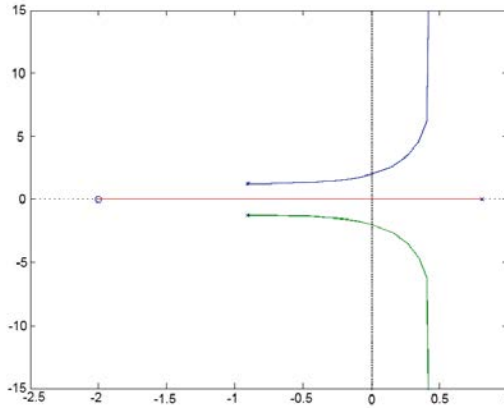


Figura 3.36: Lugar geométrico de las raíces sistema inestable.

Se observa que el lugar geométrico de las raíces tiene un sector en el semiplano derecho, esto quiere decir que existen valores de k que causarán la inestabilidad del sistema. En este caso existe la necesidad de incluir un bloque compensador el cual produzca un efecto de desplazar en gran parte el LGR hacia la izquierda.

Algunas características del LGR son:

- Pasa siempre por los polos en lazo abierto.
- Es una gráfica simétrica al eje real.
- El número de ramales es igual al orden del sistema.
- Los ceros del sistema corresponden a valores de menos infinito o más infinito del parámetro de ganancia k .
- El valor de la ganancia k para un determinado punto sobre el LGR, se puede encontrar mediante la ecuación 3.75 evaluando para el valor de s .

$$k = \frac{\prod_{i=1}^n |s + p_i|}{\prod_{j=1}^m |s + z_j|} \quad (3.75)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

en donde p_i corresponde al i -ésimo polo de un total de n , y z_j es el j -ésimo cero de un total de m .

Una de las principales ventajas del LGR, es que permite realizar una elección adecuada de la ganancia k , que estabilice el sistema sin la necesidad de incluir un bloque compensador.

3.6.1. Trazado del lugar geométrico de raíces

A continuación se detalla el procedimiento general usado para trazar el LGR de manera manual. La metodología a emplear usa la relación existente entre los ceros y polos de $G(s)H(s)$ con respecto a los ceros de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ de lazo cerrado. Para ilustrar de mejor manera al lector, se ha considerado varios ejemplos explicativos.

Ubicación de los polos y ceros de $G(s)H(s)$ sobre el LGR

La ubicación de los polos y ceros de la función de transferencia $G(s)H(s)$ sobre el LGR está definida por los valores de $k = 0$ y $k = \pm\infty$, respectivamente. Para ilustrar este concepto, considere la siguiente función de transferencia en lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad (3.76)$$

si la ecuación característica de la función de transferencia en lazo cerrado se define por $1 + G(s)H(s) = 0$, entonces

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad (3.77)$$

$$s(s+2)(s+3) + k(s+1) = 0 \quad (3.78)$$

Al hacer $k = 0$ en la ecuación 3.78, se obtiene que $s(s+2)(s+3) = 0$ los cuales corresponden a los polos de $G(s)H(s)$. Para el caso en que $k = \pm\infty$, primero divida la ecuación 3.78 para k de tal manera que

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$\frac{s(s+2)(s+3)}{k} + (s+1) = 0 \quad (3.79)$$

cuando $k \rightarrow \pm\infty$, la ecuación anterior queda expresada por $(s+1) = 0$, que corresponde al cero de $G(s)H(s)$. Por tanto, el LGR comienza en los polos de $G(s)H(s)$ y termina en los ceros de $G(s)H(s)$ conforme la variable k aumenta desde cero hasta infinito. La figura 3.37 ilustra este concepto.

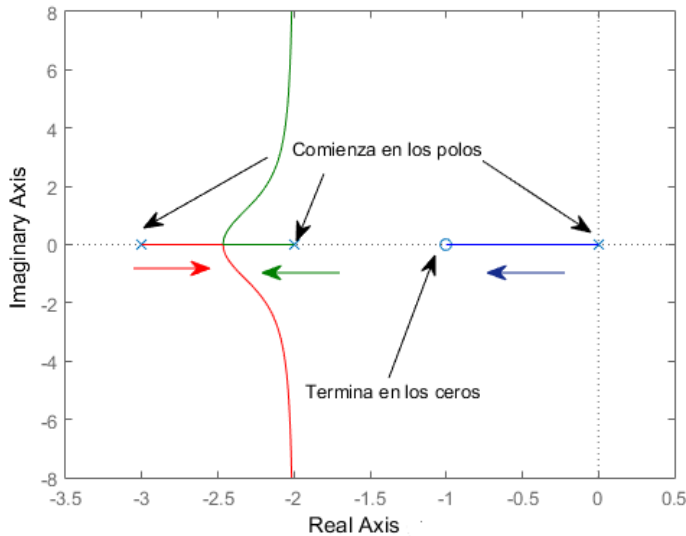


Figura 3.37: Dirección de las ramas del LGR

Las flechas en color indican el sentido en el cual inician los ramales del LGR.

Número de ramales del LGR

El número de ramales que tiene el LGR está determinado por el grado de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$. Para el ejemplo

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

dato, $s(s+2)(s+3) + k(s+1) = 0$ se tendría 3 ramales. En la figura 3.38 se especifican los ramales para el ejemplo analizado.

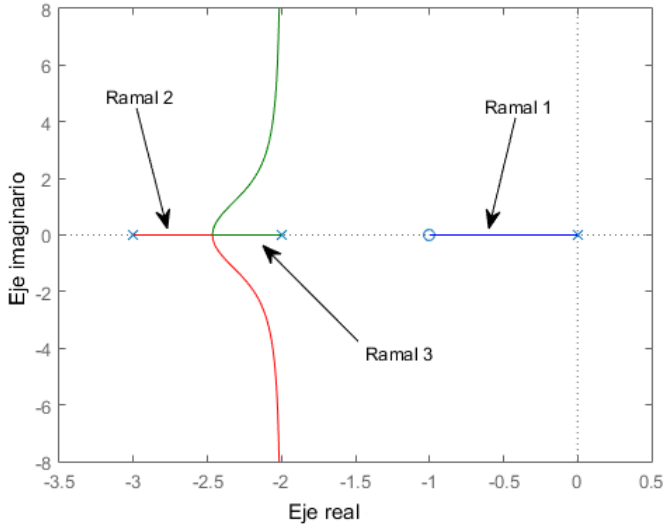


Figura 3.38: Ramales del LGR

Segmentos del LGR que están sobre el eje real

Para valores de $k \geq 0$, el LGR se encuentra sobre el eje real en aquellos tramos que están ubicados a la izquierda de un número impar de polos y ceros. Mientras que para valores de k negativos correspondería a un número par de polos y ceros. La figura 3.39 ilustra los ramales sobre el eje real para la variable k positiva, se observa que los segmentos 1 y 3 corresponden al LGR al estar ubicados a un número impar de polos y ceros, por ejemplo el ramal 1 está a la izquierda del polo $s = 0$ (número impar de polos), mientras que el ramal 3 está a la izquierda de los polos en $s = 0$, $s = -2$ y del cero en $s = -1$, lo cual da un número impar de polos y ceros. Para la condición negativa de la variable k , los segmentos restantes corresponderían al LGR en esta condición.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

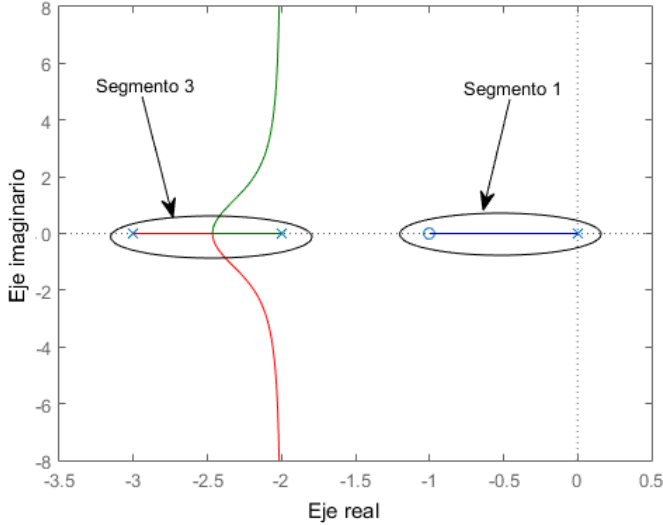


Figura 3.39: Segmentos sobre el eje real del LGR

Ángulo e intersección de las asíntotas

Las asíntotas del LGR son líneas imaginarias que permiten establecer la tendencia del comportamiento de las trazas del LGR conforme $s \rightarrow \infty$. Se utilizan como guías para el trazado ya que no son parte del LGR. Para dibujarlas se debe determinar la intersección que tienen sobre el eje real, ya que se origina sobre este eje, y el ángulo con respecto al punto de intersección. El número de asíntotas se calcula mediante $|n - m|$, donde n y m son el número de polos y ceros de la función de transferencia $G(s)H(s)$.

La intersección de las asíntotas ρ representa el centroide del LGR y siempre debe ser un número positivo. Se calcula mediante la siguiente ecuación para $-\infty \leq k \leq \infty$

$$\rho = \frac{\sum \text{polos de } G(s)H(s) - \sum \text{ceros de } G(s)H(s)}{n - m}; \quad n \neq m \quad (3.80)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

El ángulo de las asíntotas con respecto al eje real, para $k \geq 0$, se determina mediante

$$\varphi_i = \frac{(2i + 1)}{|n - m|} \times \pi; \quad n \neq m \quad (3.81)$$

donde $i = 0, 1, 2, \dots, |n - m| - 1$.

Para el ejemplo considerado, se tiene en total $|3 - 1| = 2$ asíntotas, cuya centroide está determinada por

$$\rho = \frac{(0 - 2 - 3) - (-1)}{3 - 1} = \frac{-5 + 1}{2} = -2 \quad (3.82)$$

mientras que sus ángulos son

$$\varphi_i = \frac{(2i + 1)}{|2|} \times \pi; \quad i = 0, 1 \quad (3.83)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_1 = \frac{3\pi}{2} \quad (3.84)$$

La figura 3.40 muestra la ubicación de la centroide y las asíntotas con sus respectivos ángulos.

Puntos de rompimiento del LGR

En algunas ocasiones, algunos ramales del LGR ubicados sobre el eje real tienen puntos de salida, de los cuales se desprenden otros ramales del LGR. Para determinar si el punto o puntos de salida existen, se debe calcular las raíces de la derivada de la función de transferencia $G(s)H(s)$ con respecto a la variable s e igualado a cero, es decir

$$\frac{d}{ds}G(s)H(s) = 0 \quad (3.85)$$

la ecuación 3.85 implica determinar el máximo de la función de transferencia en lazo abierto. Entonces, para nuestro ejemplo se tiene que

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)} \right] = 0 \quad (3.86)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

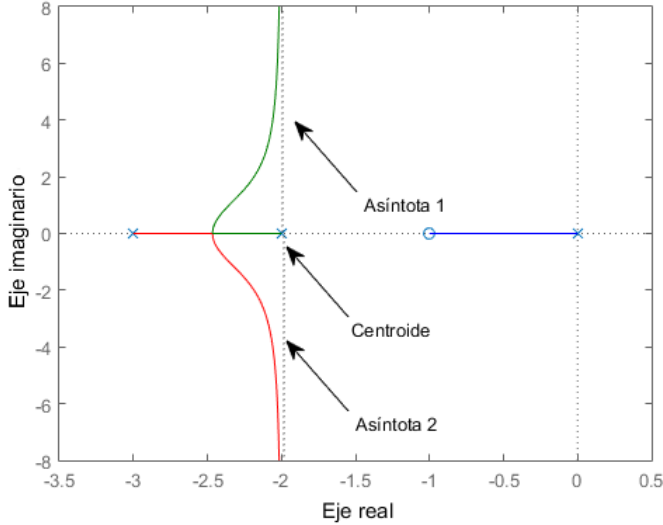


Figura 3.40: Ángulo en intersección de las asintotas

después de algunas simplificaciones y manipulaciones básicas la ecuación anterior puede ser expresada como

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 3 = 0 \quad (3.87)$$

finalmente sus raíces están dadas por

$$s_1 = -2,4656$$

$$s_{2,3} = -0,7672 \pm 0,7926i$$

de acuerdo al resultado la única raíz que puede ser considerada un punto de rompimiento corresponde al valor de $-2,4656$, la cual se ubica en el semiplano izquierdo de Laplace entre los polos ubicados en -3 y -2 sobre el eje real. La figura 3.41 muestra la ubicación del punto de rompimiento.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

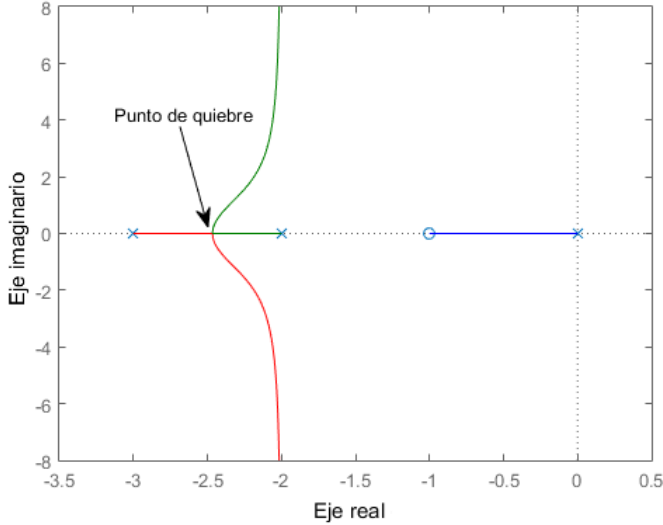


Figura 3.41: Punto de quiebre en el LGR

Intersección del LGR con el eje imaginario

Los posibles puntos de intersección del LGR con el eje imaginario del plano complejo de Laplace y los valores en los cuales se produce la intersección se determinan mediante el criterio de Routh-Hurwitz. Continuando con nuestro ejemplo, la ecuación característica está dada por la ecuación (3.78), de tal manera que

$$s^3 + 5s^2 + (6 + k)s + k = 0 \quad (3.88)$$

aplicando el criterio de Routh-Hurwitz a la ecuación característica

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 6 + k \\ 5 & k \\ \frac{30+4k}{5} & 0 \\ k & 0 \end{array}$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

el sistema es estable para $k > 0$. Para este caso en particular, el sistema no tiene intersección con el eje negativo ya que es estable para toda ganancia positiva. Ahora considere la función de transferencia dada por

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s^3 + s^2 + s - 2} \quad (3.89)$$

cuya ecuación característica es

$$s^3 + s^2 + (1+k)s - 2(1-k)k = 0 \quad (3.90)$$

aplicando el criterio de Roth-Hurwitz a esta última ecuación, se tiene que

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 1+k \\ 1 & 2k-2 \\ 3-k & 0 \\ 2k-2 & 0 \end{array}$$

el sistema es estable si

$$3 - k > 0 \rightarrow k < 3 \quad (3.91)$$

y

$$2k - 2 > 0 \rightarrow k > 1 \quad (3.92)$$

es decir $1 < k < 3$. Para este segundo caso, existen dos valores críticos en 1 y 3. Según esta condición, cuando $k = 1$ la fila que contiene $2k - 2 = 0$, por lo tanto se escoge la fila inmediatamente superior para determinar el cruce y la ecuación auxiliar dada por:

$$(3 - k)s = 0 \rightarrow 2s = 0 \therefore s = 0 \quad (3.93)$$

esto implica que existe un corte justo en el origen. Ahora, cuando $k = 3$ se elimina la fila correspondiente a s^1 , por lo tanto la ecuación auxiliar está dada por

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$s^2 + 2k - 2 = 0 \rightarrow s^2 + 4 = 0 \therefore s = \pm 2j \quad (3.94)$$

Estos resultados se pueden verificar en la figura 3.42.

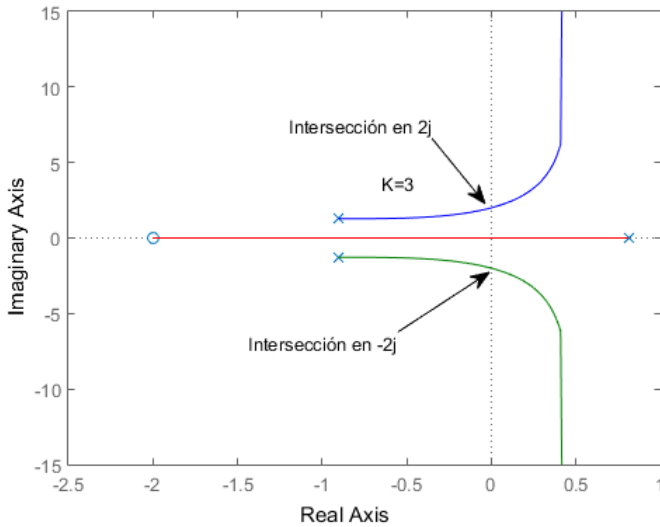


Figura 3.42: Intersección del LGR con el eje imaginario

Ángulos de salida y llegada

Los ángulos de salida y llegada usualmente se determinan para polos o ceros complejos de la función de transferencia en lazo abierto. El ángulo de salida de un polo complejo se determina por

$$\phi_p = \frac{\pi}{2} + \arg(P(s)) \quad (3.95)$$

donde $P(s)$ es la fase de $G(s)H(s)$ evaluado en el polo complejo de análisis sin considerar el mismo en la ecuación. Mientras que el ángulo de llegada a un cero complejo se calcula como

$$\phi_l = \frac{\pi}{2} - \arg(Q(s)) \quad (3.96)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

donde $Q(s)$ es la fase de $G(s)H(s)$ evaluado en el cero complejo de análisis sin considerar el mismo en la ecuación. Para ilustrar esta condición considere una función de transferencia dada por

$$G(s)H(s) = \frac{(s + 3)}{(s + 2 + 2j)(s + 2 - 2j)} \quad (3.97)$$

entonces para determinar el ángulo de salida de $s = -2 - 2j$ determinamos primero la fase de $P(s)$ dado por

$$\arg(P(s)) = \arg\left[\frac{(-2 - 2j + 3)}{(-2 - 2j + 2 - 2j)}\right] = 0,4636 \quad (3.98)$$

por lo tanto el ángulo de salida es $\phi_p = (\pi/2) + 0,4636 = 2,0344 \rightarrow 116,56$ deg. Para el polo $s = -2 + 2j$ se tiene exactamente el mismo argumento pero con signo negativo por el hecho de ser conjugado, es decir $-0,4636$, por lo tanto $\phi_p = (\pi/2) - 0,4636 = 1,1072 \rightarrow 63,43$.

Ahora considere una función de transferencia de la cual se necesita determinar el ángulo de llegada a sus ceros, definida por

$$G(s)H(s) = \frac{(s + 1 + j)(s + 1 - j)}{(s + 3)(s + 2)} \quad (3.99)$$

entonces procediendo de manera similar a los polos complejos se tiene que para $s = -1 - j$, $\phi_l = \frac{\pi}{2} - \arg(Q(s)) = \frac{\pi}{2} - (-0,3218) \rightarrow 198,43$ rad. Mientras que para $s = -1 + j$, $\phi_l = 161,56$ deg.

3.7. Linealización de sistemas mediante el Jacobiano.

En muchos de los casos nos encontramos con sistemas no lineales, lo que exige el desarrollo de compensadores o controladores no lineales. Con la finalidad de poder aplicar las técnicas de control lineal abordados en este libro, se desarrollará un ejemplo explicativo de linealización de un sistema mediante la herramienta matemática conocida como el Jacobiano, de acuerdo a lo tratado en [3].

El ejemplo consiste en encontrar el modelo matemático del sistema Levitador Magnético mostrado en la figura 3.43, luego aplicar

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

la técnica de linealización alrededor de un punto de operación, pudiendo ser el punto de equilibrio, para finalmente obtener el modelo del sistema linealizado en una forma de representación en espacio de estados.

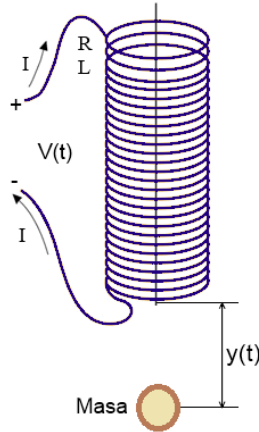


Figura 3.43: Levitador magnético.

- Modelo matemático del Circuito Eléctrico.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en una malla tenemos:

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} = V(t) \quad (3.100)$$

- Modelo matemático de las fuerzas sobre la masa.
- La figura muestra las dos fuerzas a la que está sometida la masa, y cuyo modelo está representado en la ecuación 3.101 en base a la ley de fuerzas de Newton.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).



Figura 3.44: Masa Metálica

$$M\ddot{y} = Mg - f_{elect} \quad (3.101)$$

siendo:

$M \rightarrow$ masa de objeto

$g \rightarrow$ aceleración de la gravedad.

La fuerza eléctrica del electro-imán se puede representar con la ecuación 3.102

$$f_{elect} = \frac{k_L \cdot i^2}{y} \quad (3.102)$$

en donde:

$k_L \rightarrow$ constante del electro-imán,

$y \rightarrow$ la distancia del borde del electro-imán al objeto.

Reemplazando la ecuación 3.102 en la ecuación 3.101 se tiene

$$M\ddot{y} = Mg - \frac{k_L \cdot i^2}{y} \quad (3.103)$$

Se define los estados del sistema como:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

$$x_3 = i$$

Sustituyendo los estados planteados en las ecuaciones 3.100 y 3.103 obtenemos las ecuaciones 3.104 y 3.105 las que conforman el modelo matemático del Levitador Magnético.

$$M\dot{x}_2 = Mg - \frac{k_L \cdot x_3^2}{x_1} \quad (3.104)$$

$$R \cdot x_3 + L\dot{x}_3 = V(t) \quad (3.105)$$

Se puede observar que la ecuación 3.105, presenta características no lineales.

Ordenando el sistema para una representación en espacio de estados se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \frac{k_L x_3^2}{M x_1} \\ \dot{x}_3 = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} V(t) \end{cases} \quad (3.106)$$

Se realizará la linealización del sistema alrededor de un punto de operación, considerando que el nuevo sistema linealizado podrá representar al original en un cierto rango tolerable alrededor de este punto donde operará el sistema, que para este caso será una determinada distancia y_0 . Una vez fijado el punto de equilibrio de una de las variables, se puede encontrar el valor de las demás variables, que para este caso será la corriente del electro-imán. Al considerar la condición de equilibrio en que la masa no se mueva, esta condición permite encontrar la corriente de equilibrio del sistema, en estas condiciones las variables toman el nombre de variables de equilibrio o punto de equilibrio del sistema.

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Los valores de las variables que posibilitan un equilibrio de la masa a una distancia y_o son:

$$\begin{aligned} x_{1E} &= y_o \\ x_{2E} &= \dot{y} = 0 \quad \dot{x}_2 = 0 \\ x_{3E} &= \sqrt{\frac{gM(y_o)}{k_L}} \end{aligned}$$

Una vez definido el punto de operación y equilibrio, se aplicará la derivada del sistema de la ecuación 3.106 mediante el Jacobiano, pero antes definimos el sistema como funciones, según se observa en el grupo de ecuaciones 3.107

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = g - \frac{k_L x_3^2}{M x_1} \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} V(t) \end{array} \right. \quad (3.107)$$

El sistema linealizado debe tomar la forma de las ecuaciones 1.13 y 1.14, por lo tanto se procede a obtener la matriz A y el vector B mediante la operación del Jacobiano de la ecuación 3.108 y la ecuación 3.109 respectivamente sobre el sistema no lineal de las ecuaciones 3.107

$$J_{1x} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \frac{\delta f_1}{\delta x_3} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \frac{\delta f_2}{\delta x_3} \\ \frac{\delta f_3}{\delta x_1} & \frac{\delta f_3}{\delta x_2} & \frac{\delta f_3}{\delta x_3} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

$$J_{1u} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u} \\ \frac{\delta f_2}{\delta u} \\ \frac{\delta f_3}{\delta u} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

Debido a que únicamente la función $f_2(x_1, x_2, x_3)$ es no lineal, se desarrollará la segunda fila de la matriz Jacobiano de la ecuación 3.108, que será evaluada en el punto de equilibrio definido anteriormente.

El resultado de dicho proceso es el siguiente:

$$\nabla \dot{x}_2 = \left[\frac{k_L x_3^2}{M x_1^2}, 0, \frac{-2k_L x_3}{M x_1} \right]$$

$$\nabla \dot{x}_2 = \left[\frac{k_L \left(\sqrt{\frac{g M y_o}{k_L}} \right)^2}{M (y_o)^2}, 0, \frac{-2k_L \left(\sqrt{\frac{g M y_o}{k_L}} \right)}{M x_1} \right]$$

la linealización de la función $f_2(x_1, x_2, x_3)$ corresponde a:

$$\nabla \dot{x}_2 = \left[\frac{g}{y_o}, 0, \frac{-2\sqrt{M g y_o}}{M y_o} \right]$$

Continuando con el proceso se observa que no es necesario el desarrollo del Jacobiano de la ecuación 3.109, puesto que el sistema no presenta la no linealidad para la variable de entrada $V(t)$ del sistema.

Finalmente el sistema linealizado corresponde al arreglo de ecuaciones 3.110.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{y_o} x_1 - \frac{2\sqrt{M g y_o}}{M y_o} x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{-R}{L} x_3 + \frac{1}{L} V(t) \end{cases} \quad (3.110)$$

De esta forma se ha logrado la linealización del sistema alrededor de un punto de operación, el cual pasará a ser el punto donde se

3. Análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la variable compleja (s).

equilibre el sistema. Esto permitirá aplicar las técnicas de control lineal al sistema que posee características naturales no lineales.

3.8. Preguntas y ejercicios de repaso.

1. Dé un ejemplo de una función de transferencia de un sistema tipo uno, orden dos.

- ¿Qué tipo de señal se debe usar para evaluar el error en estado permanente?

2. Establezca la función de transferencia y su correspondiente gráfica de la respuesta al escalón unitario, para un sistema de primer orden que posee las siguientes características:

- $Tao = 0.9$ segundos,
- Una ganancia de 1.5,
- Tiempo muerto de 0.1 segundos.

3. Establezca la función de transferencia y su correspondiente gráfica de la respuesta al escalón unitario, para un sistema de segundo orden que posee las siguientes características:

- Un sobrepaso de 15 %,
- Una atenuación de 0.7
- Una frecuencia de 1 rad/seg.

4. Para el sistema cuya función de transferencia es: $G(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 2s^2 + s - 1}$, mediante el análisis del LGR determine:

- el rango de estabilidad en función de k .
- la ubicación de los polos y los ceros.

5. Modele un sistema de nivel h de agua en un tanque cilíndrico de diámetro D , cuya entrada es el caudal q en la parte superior del tanque y tiene como salida de agua un agujero en el fondo del tanque de diámetro d . Linealice el sistema mediante el uso del Jacobiano.

Capítulo 4

Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

En el presente capítulo se introduce el estudio de los sistemas de control en el dominio de la frecuencia. En una primera instancia se determina la respuesta estacionaria de los sistemas de control lineales e invariantes en el tiempo ante entradas de tipo senoidal, señales dependientes de una frecuencia de entrada y a la vez del tiempo. Se revisa los diagramas de Bode, gráficas que permiten determinar las características de comportamiento y estabilidad de los sistemas de control. En todo este contexto, se determina un compendio de ecuaciones que caracterizan el comportamiento de un sistema de control y sus propiedades.

4.1. Respuesta de sistemas en el dominio de la frecuencia

En el dominio de la frecuencia la respuesta de un sistema de control se mide con base en señales de tipo seno, coseno o su combinación. Se debe tener presente que entre el dominio de tiempo y el dominio de la frecuencia existe una correlación de tal manera que cualquier modificación del desempeño del sistema en el dominio del tiempo produce

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

una alteración de las características en el dominio de la frecuencia del sistema y viceversa.

4.1.1. Salida en estado estacionario

La respuesta en el dominio de frecuencia se define como la respuesta en estado permanente que se obtiene del sistema al considerar una señal de entrada tipo senoidal definida para todo ω . Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo como se describe en la figura, cuya función de transferencia se denota por $G(s)$ de orden n y su señal de entrada se define por $x(t) = A \sin(\omega t)$, la transformada de Laplace de $x(t)$ está dada por

$$X(s) = \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} \quad (4.1)$$

de tal manera que la señal de salida en la variable de Laplace queda definida por

$$Y(S) = G(s) \frac{\omega A}{s^2 + \omega^2} \quad (4.2)$$

por simplicidad se considera que la ecuación 4.2 tiene polos distintos y simples de tal manera que su transformada inversa queda

$$y(t) = a e^{-j\omega t} + a^* e^{j\omega t} + b_1 e^{-\beta_1 t} + b_2 e^{-\beta_2 t} + \dots + b_n e^{-\beta_n t} \quad (4.3)$$

donde $(\cdot)^*$ denota la conjugada mientras que a y b_n ($n = 1, 2, \dots, N$) son constantes. Para un sistema estable, los exponenciales de la ecuación 4.3 tienen componentes reales negativas, por consiguiente tienden a desaparecer conforme el tiempo tiende al infinito. Por consiguiente, la respuesta en estado estacionario del sistema queda definida por

$$y_{ee}(t) = a e^{-j\omega t} + a^* e^{j\omega t} \quad (4.4)$$

donde las constantes a y a^* se calculan utilizando fracciones parciales,

$$a = -\frac{AG(-j\omega)}{2j} = -\frac{A|G(j\omega)|e^{-j\psi}}{2j} \quad (4.5)$$

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

$$a^* = \frac{AG(j\omega)}{2j} = \frac{A|G(j\omega)|e^{j\psi}}{2j} \quad (4.6)$$

se debe notar en la ecuación 4.5 que $|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|$ por ser el módulo de la función de transferencia compleja $G(j\omega)$ mientras que el ángulo de fase $\psi = \tan^{-1}\left(\frac{Im\{G(j\omega)\}}{Re\{G(j\omega)\}}\right)$, donde $Im\{\cdot\}$ y $Re\{\cdot\}$ denotan la parte imaginaria y real de la función de transferencia del sistema. Reemplazando las ecuaciones 4.5 y 4.6 en la ecuación 4.4, se obtiene finalmente que

$$y_{ee}(t) = A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \psi) \quad (4.7)$$

de acuerdo a la ecuación 4.7, se observa que un sistema lineal e invariante en el tiempo genera a su salida una señal cuya amplitud es el producto del módulo de la función de transferencia del sistema y la amplitud de la señal de entrada, lo que es más la salida conserva la forma matemática de la entrada con la misma frecuencia ω pero con un desfase ψ debido al sistema.

Para ilustrar este comportamiento, considere la siguiente función de transferencia y señal de entrada

$$G(s) = \frac{4}{2s + 1}$$

$$x(t) = 1,5\sin(4\pi t)$$

de acuerdo a la ecuación 4.7, la señal de salida del sistema está determinada por

$$y_{ee}(t) = \frac{4(1,5)}{\sqrt{1 + 4\omega^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}(2\omega)) \quad (4.8)$$

donde la $\omega = 4\pi$, por lo tanto la respuesta en estado permanente queda determinada por

$$y_{ee}(t) = 0,24\sin(4\pi t - \tan^{-1}(8\pi)) \quad (4.9)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 4.1.

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

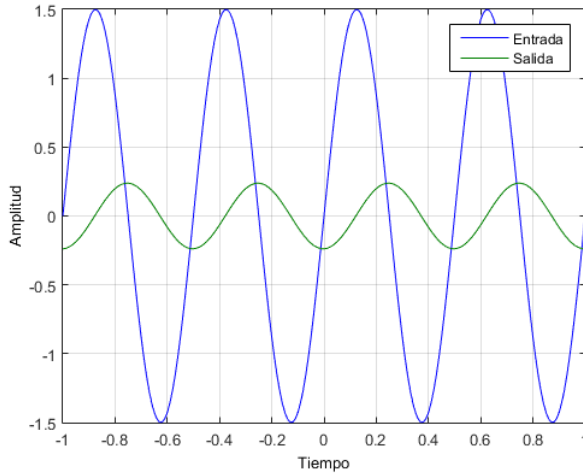


Figura 4.1: Respuesta en estado permanente para una entrada senoidal $x(t) = 1,5\sin(4\pi t)$

4.2. Diagramas de Bode

Los diagramas de Bode son una representación gráfica de la magnitud y del ángulo de fase de la función de transferencia $G(j\omega)$ versus la frecuencia en escala logarítmica. Usualmente la gráfica de $|G(j\omega)|$ se representa en una escala logarítmica usando como base la potencia de la señal, por lo tanto

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10} (|G(j\omega)|) \quad (4.10)$$

es frecuente que en los diagramas de Bode se utilice el concepto de década, el cual se denomina a cualquier intervalo ubicado sobre el eje de frecuencias cuya frecuencia final es diez veces mayor a la frecuencia inicial del intervalo. En algunas ocasiones se suele emplear un intervalo cuya frecuencia final es el doble de la inicial, el cual se denomina octava. A continuación se definen algunos diagramas de Bode usualmente utilizados en los sistemas de control.

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

4.2.1. Diagrama de Bode de una ganancia K

El diagrama de Bode de una ganancia $G(j\omega) = K$ se ilustra en la figura 4.2 tanto para valores positivos como negativos. La curva de magnitud es constante mientras que su fase es nula.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}K \quad (4.11)$$

$$\angle G(j\omega) = 0 \quad (4.12)$$

Si la ganancia $0 < K < 1$, la gráfica resultante muestra decibelios negativos (atenuación de la señal de entrada) mientras que para $K > 1$ se tienen decibelios positivos (amplificación de la señal de entrada).

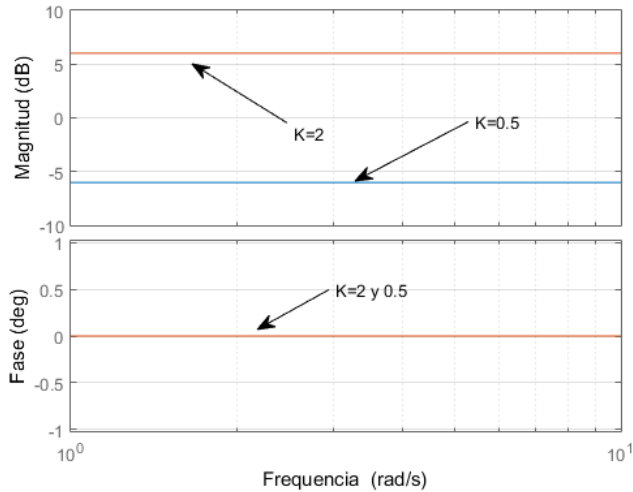


Figura 4.2: Diagrama de Bode de una ganancia K

4.2.2. Diagrama de Bode de un integrador

Un integrador definido por $G(j\omega) = 1/j\omega$ tiene un ángulo de fase constante en $-\pi/2$, mientras su gráfica de magnitud es una recta con

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

una pendiente de $-20dB/década$. La figura 4.3 muestra este comportamiento.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(1/\omega) \quad (4.13)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\infty) \rightarrow -\pi/2 \quad (4.14)$$

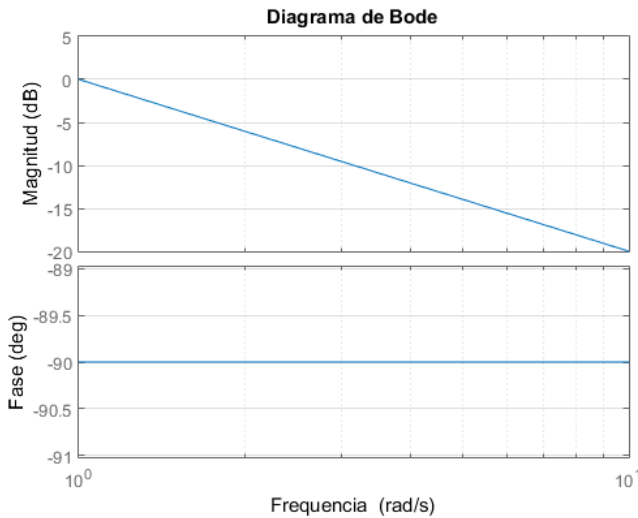


Figura 4.3: Diagrama de Bode de un integrador

4.2.3. Diagrama de Bode de un diferenciador

Un diferenciador definido por $G(j\omega) = j\omega$ tiene un ángulo de fase constante en $\pi/2$, mientras su gráfica de magnitud es una recta con una pendiente de $20dB/década$. La figura 4.4 muestra su comportamiento.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(\omega) \quad (4.15)$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\infty) \rightarrow \pi/2 \quad (4.16)$$

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

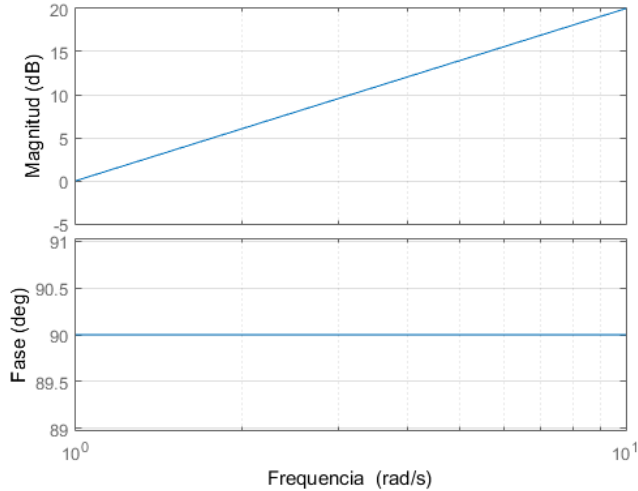


Figura 4.4: Diagrama de Bode un diferenciador

4.2.4. Diagrama de Bode de un polo simple

Un cero simple es un sistema cuya función de transferencia en frecuencia está dada por

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} \quad (4.17)$$

donde T es una constante. Las ecuaciones de magnitud y ángulo de fase del cero simple se determinan por medio de las siguientes ecuaciones

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \right) = -20 \log(\sqrt{(\omega T)^2 + 1}) \quad (4.18)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T) \quad (4.19)$$

Si se considera que $\omega = 1/T$, entonces $|G(j\omega)|_{dB} = -3dB$ y

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

$\angle G(j\omega) = -\pi/4$. Para una frecuencia inicial $\omega = 0$, tanto su magnitud como su ángulo de fase son nulos. Por otro lado, para un valor de frecuencia $\omega \rightarrow \infty$, su magnitud tiende a decrecer con una pendiente de $-20\log(\omega T)$, esto ocurre debido a que $\omega T \gg 1$, un cantidad extremadamente grande, y por lo tanto la unidad puede ser despreciada dentro del radical de la ecuación 4.18. Su ángulo de fase, tiende a un valor de $-\pi/2$ ya que la tangente inversa tiende ese valor conforme su argumento tiende al infinito. La figura 4.5, muestra el diagrama de Bode de un polo simple.

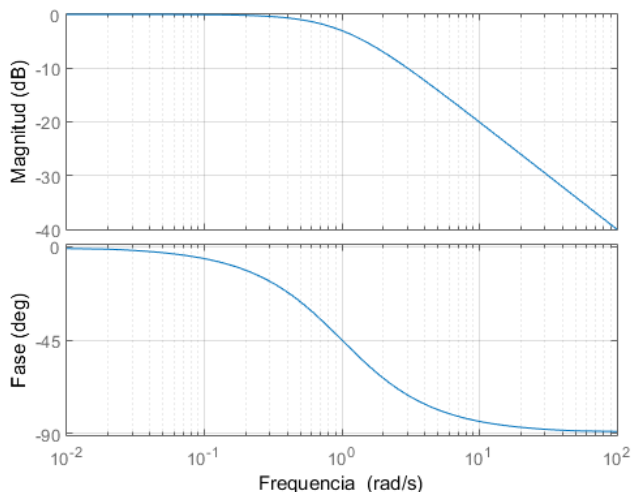


Figura 4.5: Diagrama de Bode un polo simple

4.2.5. Diagrama de Bode de un cero simple

Un cero simple está definido por la siguiente función de transferencia

$$G(j\omega) = j\omega T + 1 \quad (4.20)$$

donde T es una constante. Su magnitud y ángulo de fase están determinados por

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\sqrt{(\omega T)^2 + 1} \right) \quad (4.21)$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T) \quad (4.22)$$

si se observan las ecuaciones 4.18 y 4.21, tienen la misma forma matemática que las ecuaciones establecidas para un polo simple excepto el signo negativo. Por lo tanto, tienen características similares de comportamiento excepto que este sistema tiende todo a valores positivos de magnitud y fase. La figura 4.6 corrobora este comportamiento.

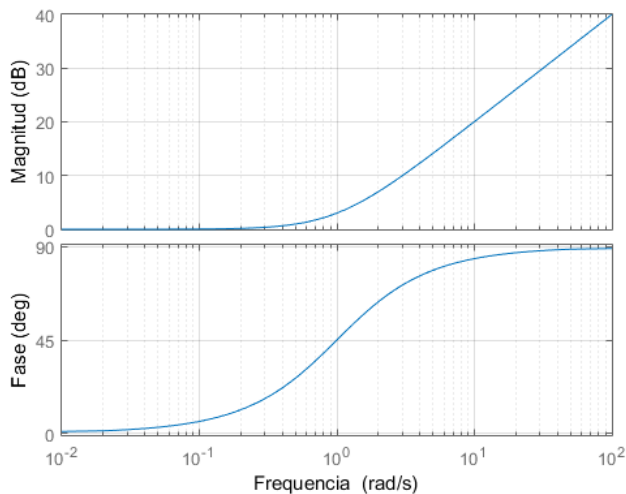


Figura 4.6: Diagrama de Bode de un cero simple

4.2.6. Diagrama de Bode de factor cuadrático (denominador)

La función de transferencia de un sistema de segundo orden estándar está definido por

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\omega\xi\omega_n + \omega_n^2} \quad (4.23)$$

donde ω_n es la frecuencia natural del sistema y ξ es su factor de amortiguamiento. La magnitud y ángulo de fase se determinan por

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10} \left(\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\xi\omega_n)^2}} \right) \quad (4.24)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\omega\xi\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \quad (4.25)$$

de acuerdo a las ecuaciones 4.24 y 4.25, para $\omega = 0$, la magnitud y el ángulo de fase son nulos. Si $\omega = \omega_n$ la magnitud y el ángulo de fase respectivamente son

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10} \left(\frac{1}{2\xi} \right) = -20\log_{10}(2\xi) \quad (4.26)$$

$$\angle G(j\omega) = -\pi/2 \quad (4.27)$$

conforme la frecuencia tiende al infinito su ángulo de fase tiende a $-\pi$ mientras que su magnitud se calcula como

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (4.28)$$

La figura 4.7 muestra el diagrama de Bode para este sistema.

4.2.7. Diagrama de Bode de un factor cuadrático (numerador)

La función de transferencia de un sistema con factor cuadrático en el numerador se define como

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\omega\xi\omega_n + \omega_n^2}{\omega_n^2} \quad (4.29)$$

la magnitud y ángulo de fase se calculan como

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

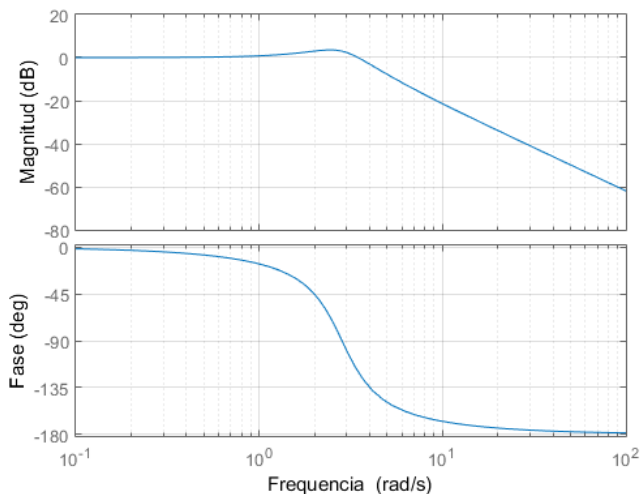


Figura 4.7: Diagrama de Bode de un factor cuadrático en el denominador

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\xi\omega_n)^2}}{\omega_n^2} \right) \quad (4.30)$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{2\omega\xi\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \quad (4.31)$$

como se observa en la última ecuación, el ángulo de fase de un factor cuadrático en el numerador difiere tan solo del signo negativo de la ecuación 4.25. Para un valor de frecuencia $\omega = 0$, la ecuación 4.30 y 4.31 dan valores nulos de magnitud y fase. Si $\omega = \omega_n$ la magnitud y el ángulo de fase respectivamente son idénticos a los dados por las ecuaciones 4.26 y 4.27 pero con signo positivo. Lo mismo ocurre para la condición en que la frecuencia crece indefinidamente pero con magnitud y frecuencia positiva. Este comportamiento se observa en la figura 4.8.

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

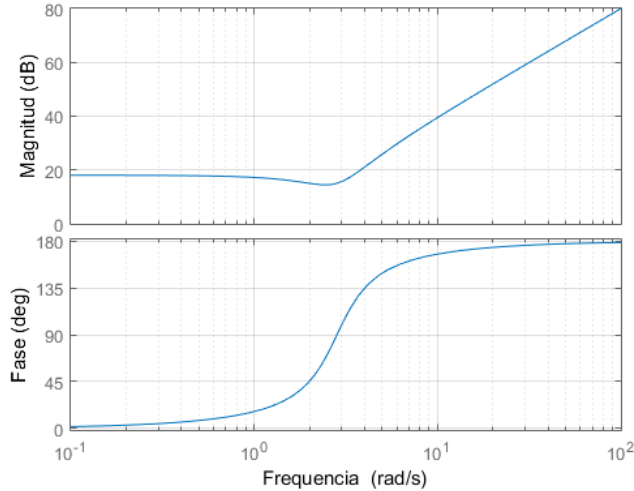


Figura 4.8: Diagrama de Bode de un factor cuadrático en el numerador

4.2.8. Diagrama de Bode de un factor exponencial (retraso puro)

La función de transferencia de un retraso en el tiempo está definida por

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} \quad (4.32)$$

donde T es una constante. La magnitud y el ángulo de fase para esta función están dadas por

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(1) = 0dB \quad (4.33)$$

$$\angle G(j\omega) = -\omega T \quad (4.34)$$

como se observa la ecuación 4.33 establece que el factor exponencial puro no atenúa ni amplifica la señal de entrada. En caso de que $\omega = 1/T$ la fase del exponencial es igual a -1 rad. Conforme la

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

frecuencia tiende a incrementarse, la fase tiende a disminuir negativamente. La figura 4.9, muestra las características de comportamiento de retraso puro.

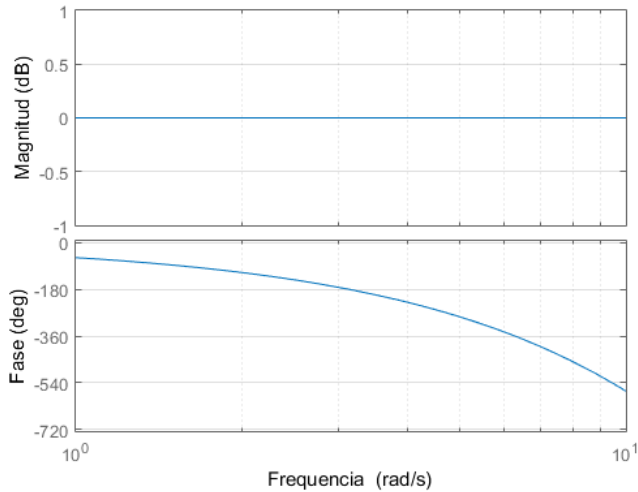


Figura 4.9: Diagrama de Bode un retardo puro de -1 s.

4.3. Diagrama de Bode de una función de transferencia general

Para determinar el diagrama de Bode de una función de transferencia conformada por diferentes factores, es decir

$$G(j\omega) = \frac{K e^{-j\omega T} (j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)}{(j\omega T_3 + 1)(j\omega T_4 + 1)} \quad (4.35)$$

se considera el aporte individual de cada factor tanto para la magnitud como la fase de la siguiente manera.

4.3.1. Aporte en magnitud

Para la magnitud se considera las propiedades de los logaritmos,

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(K) + 20\log_{10}\left(\sqrt{(\omega T_1)^2 + 1}\right) + 20\log_{10}\left(\sqrt{(\omega T_2)^2 + 1}\right) \quad (4.36)$$

en este caso al aporte del retraso en tiempo es cero.

4.3.2. Aporte en fase

Para el ángulo de fase se considera las propiedades trigonométricas,

$$\angle G(j\omega) = -\omega T + \tan^{-1}(\omega T_1) + \tan^{-1}(\omega T_2) - \tan^{-1}(\omega T_3) + \tan^{-1}(\omega T_4) \quad (4.37)$$

el aporte de la constante en fase es cero. Recuerde que este criterio se extiende tanto para un número M como N de factores ubicados en el numerador y denominador de la función de transferencia. La figura 4.10 ilustra un ejemplo de este concepto para una función dada por:

$$G(s) = \frac{5e^{-s}(s+3)}{s(s+25)} \quad (4.38)$$

4.4. Parámetros de comportamiento en el dominio de la frecuencia

Para el análisis de la característica de comportamiento de un sistema de control, es importante definir los siguientes parámetros en el diagrama de Bode:

- **Pico de resonancia (M_r):** Es el valor máximo de la magnitud de la función de transferencia $G(j\omega_r)$. Generalmente el pico de resonancia se expresa en decibelios para efectos prácticos, es decir $M_r = 20\log_{10}(|G(j\omega_r)|)$.
- **Frecuencia de resonancia (ω_r):** Es el valor de la frecuencia en la cual se produce el pico de resonancia medida usualmente en rad/s.

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

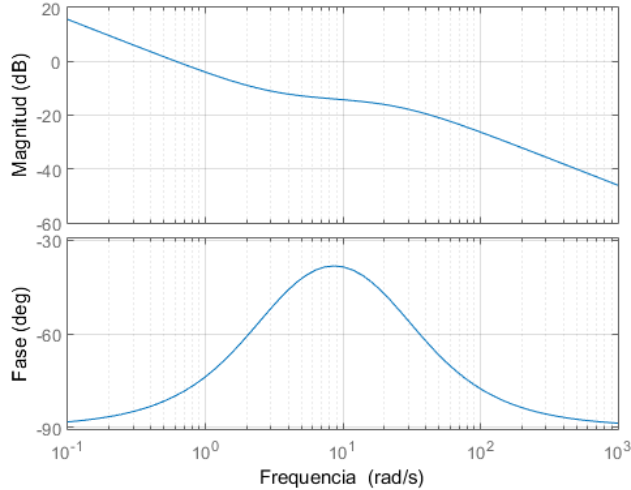


Figura 4.10: Diagrama de Bode resultante de una función de transferencia compuesta de diferentes factores

- **Ancho de banda (W):** Es el valor de la frecuencia a la cual $|G(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$ o $-3dB$ medida de igual manera en rad/s.

4.4.1. Determinación del pico y la frecuencia de resonancia de un sistema de segundo orden

Para determinar M_r y ω_r se ha considerado un sistema de segundo orden estándar, por ser el más común para efectos de análisis de los sistemas de control. Por lo tanto, dada la función de transferencia

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.39)$$

esta puede ser expresada de la forma

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2j\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{-(\omega^2/\omega_n^2) + 2j\xi(\omega/\omega_n) + 1} \quad (4.40)$$

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

el módulo y ángulo de fase de la ecuación 4.40 vienen respectivamente dados por

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega^2/\omega_n^2)]^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2}} \quad (4.41)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega} \right) \quad (4.42)$$

de la ecuación 4.41 se determina la frecuencia de resonancia al utilizar el criterio de la primera derivada, es decir

$$\frac{d}{d\omega} |G(j\omega_r)| = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_r^2/\omega_n^2)]^2 + 4\xi^2(\omega_r/\omega_n)^2}} \right\} = 0 \rightarrow \left(\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} + 2\xi^2 - 1 \right) \frac{\omega_r}{\omega_n} = 0 \quad (4.44)$$

de acuerdo a la ecuación 4.44 se obtienen dos posibles soluciones, la primera dada por

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} + 2\xi^2 - 1 = 0 \quad (4.45)$$

de la cual se determina que la frecuencia de resonancia se calcula como

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (4.46)$$

y es válida para $1 - 2\xi^2 \geq 0$ o $\xi \leq 1/\sqrt{2}$. Por otro lado, la solución $\omega_r = 0$ establece que el pico de resonancia se da en el origen del eje de coordenadas de magnitud versus frecuencia tal como se ilustra en la figura. Por otro lado, el pico de resonancia se calcula al reemplazar la ecuación 4.46 en la ecuación 4.41, de tal manera que

$$M_r^2 = \frac{1}{[1 - (\omega_r^2/\omega_n^2)]^2 + 4\xi^2(\omega_r/\omega_n)^2}$$

$$M_r^2 = \frac{1}{[1 - (1 - 2\xi^2)]^2 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}$$

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

$$M_r^2 = \frac{1}{1 - 2(1 - 2\xi^2) + (1 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 - 8\xi^2}$$

$$M_r^2 = \frac{1}{4\xi^2(1 - \xi^2)} \rightarrow M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.47)$$

la última expresión es válida para $\xi < 1/\sqrt{2}$, observe que no se ha considerado el igual debido a que esto produciría una indeterminación en la ecuación 4.47. No obstante en caso de que el factor de amortiguamiento sea igual a $1/\sqrt{2}$ el pico de resonancia es uno con una frecuencia de resonancia en cero. Esta característica se puede observar en la figura 4.11 para diferentes valores de ξ con una frecuencia natural unitaria.

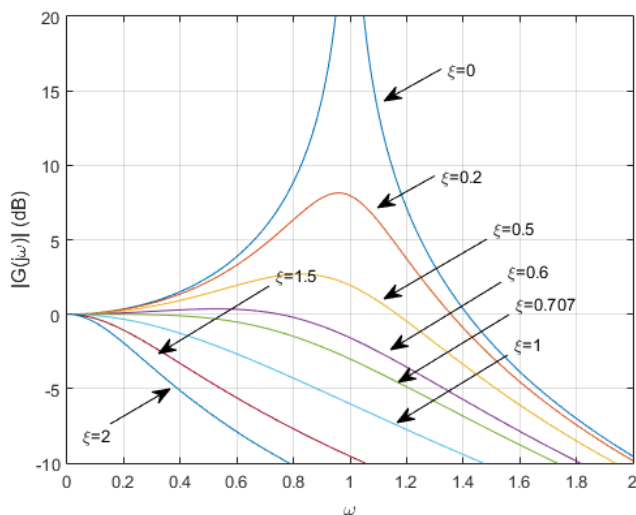


Figura 4.11: Variaciones de M_r y ω_r para diferentes valores de ξ

4.4.2. Ancho de banda (W)

El ancho de banda de un sistema estándar se determina cuando la magnitud de $G(j\omega)$ es igual a $1/\sqrt{2}$, es decir

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

$$\frac{1}{\sqrt{[1 - (W^2/\omega_n^2)]^2 + 4\xi^2(W/\omega_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donde

$$2 = [1 - (W^2/\omega_n^2)]^2 + 4\xi^2(W/\omega_n)^2$$

$$(W^4/\omega_n^4) - 2(W^2/\omega_n^2) + 4\xi^2(W^2/\omega_n^2) - 1 = 0$$

$$(W^4/\omega_n^4) - 2(W^2/\omega_n^2)(1 - 2\xi^2) - 1 = 0 \quad (4.48)$$

la ecuación 4.48 puede ser resuelta como una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, de tal manera que $x = W^2/\omega_n^2$, por lo tanto

$$W^2/\omega_n^2 = (1 - 2\xi^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{16\xi^4 - 16\xi^2 + 8}$$

$$W = \omega_n \sqrt{\left[(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2} \right]} \quad (4.49)$$

observe que en la ecuación 4.49 se ha considerado solamente el signo positivo de tal manera que se obtenga frecuencias positivas.

4.5. Análisis de estabilidad de los sistemas de control (Diagrama de Bode)

Para el análisis de estabilidad de un sistema de control, se considera las siguientes definiciones

- **Margen de Ganancia (Gm):** Es la ganancia en decibelios que se puede añadir al lazo de control para que el sistema en lazo cerrado se vuelve críticamente amortiguado o llegue al límite de estabilidad.
- **Margen de fase (Pm):** Es el ángulo de fase que se necesita para que el sistema en lazo cerrado llegue al límite de estabilidad.

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

- **Frecuencia de cruce de ganancia (ω_g):** Es un valor de frecuencia a la cual $|G(j\omega)H(j\omega)|_{dB} = 0$, donde $H(j\omega)$ es la función de transferencia en el lazo de retroalimentación.
- **Frecuencia de cruce de fase (ω_p):** Es un valor de frecuencia a la cual $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\pi$.

Las definiciones dadas, se ilustran en la figura 4.12 para la función de transferencia

$$G(s) = \frac{8}{s(s^2 + 6s + 12)}$$

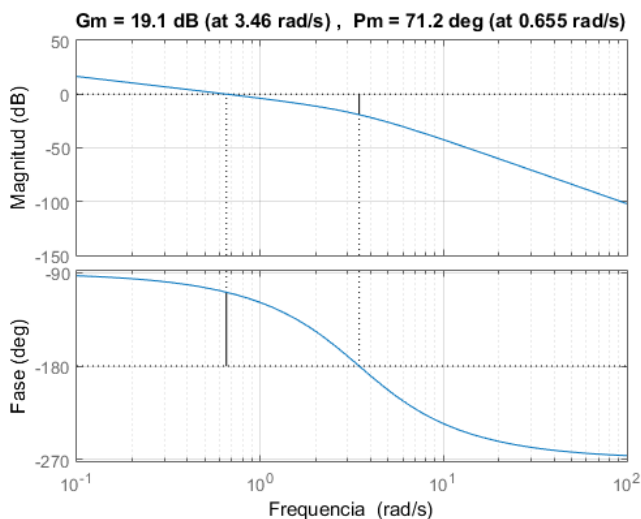


Figura 4.12: Margen de ganancia y margen de fase

Si el margen de fase y el margen de ganancia son positivos, el sistema es estable. Si ambos son negativos o uno de los dos parámetros es negativo entonces el sistema es inestable. Observe que el margen de ganancia se mide por debajo de los 0 dB mientras que el ángulo de fase se lo hace por encima de $-\pi$ para considerar su condición de signo positivo. El margen de ganancia se mide en la frecuencia de cruce de fase mientras que el margen de fase se mide en la frecuencia de cruce

4. Análisis de sistemas de control en el dominio de frecuencia

de ganancia. Recuerde, que para el cálculo de estos parámetros se considera la función de transferencia en lazo abierto.

Es importante indicar, que el método del diagrama de Bode se utiliza para determinar la estabilidad relativa de un sistema de fase mínima, es decir aquel sistema que no tiene polos y ceros en el semiplano derecho de Laplace. Lo cual es muy frecuente en los sistemas de control. Para sistema de fase mínima se recomienda revisar en detalle la bibliografía mencionada al final de este capítulo.

4.6. Preguntas y ejercicios de repaso.

1. Desarrolle las ecuaciones del pico y frecuencia de resonancia de un sistema de control estándar de orden dos al cual se le ha incluido un polo en el origen.

2. Desarrolle las ecuaciones del ancho de banda de un sistema de control estándar de orden dos al cual se le ha incluido un polo en el origen.

3. Determine el ancho de banda, el pico y frecuencia de resonancia de la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{25}{s(s + 2,5)(s + 3,85)}$$

4. Graficar los diagramas de Bode de las siguientes funciones de transferencia en lazo abierto de un sistema de control con retroalimentación unitario

▪ $G(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+4,5)(s+2)}$

▪ $G(s) = \frac{(s+3)e^{-3s}}{(s+1)(s+3,2)(s+2)}$

5. Del problema 4, determine si el sistema es estable.

Capítulo 5

Diseño y ajuste de controladores.

En el presente capítulo se aborda los temas relacionados a; estructura de controladores PID y en espacio de estados, discretización de las señales continuas, y la implementación de los controladores bajo la plataforma del software LabView.

5.1. Estructura Básica de un Sistema con Controlador

La incorporación de un bloque compensador o controlador al sistema realimentado puede realizarse de diversas maneras. En este caso se adoptará la estructura del controlador en cascada a la planta, por ser una de las configuraciones más comunes. Esta configuración es la que muestra la figura 5.1.

5. Diseño y ajuste de controladores.

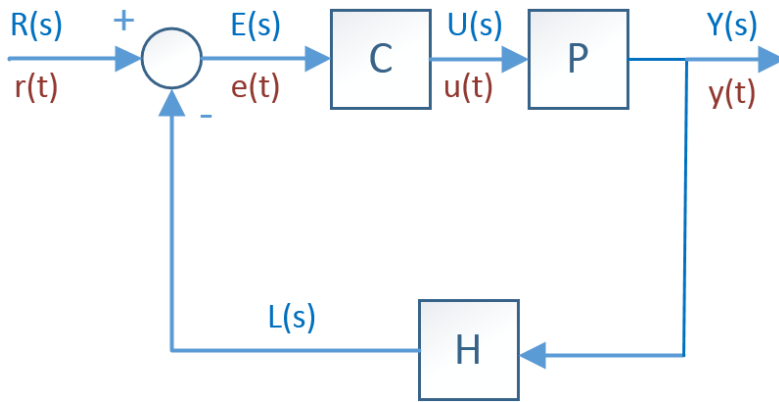


Figura 5.1: Diagrama de bloques de un sistema con controlador.

Como se puede observar en la figura 5.2, la entrada del controlador es la señal de error $e(t)$ y la salida del controlador es la señal de control $u(t)$, esta señal será la encargada de comandar la planta con la finalidad de que en la salida $y(t)$ se cumplan los objetivos planteados en la referencia $r(t)$.



Figura 5.2: Diagrama de bloques de un controlador.

5.2. Diseño e implementación del controlador Proporcional Integral Derivativo (PID).

El controlador PID es un controlador de tres términos, que combina las acciones de compensación; proporcional, integral y derivativa, las mismas que le permiten desarrollar una acción eficaz de comando.

5. Diseño y ajuste de controladores.

Matemáticamente se lo puede definir con la ecuación 5.1, de acuerdo a [2]:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d \cdot s + \frac{K_i}{s} \quad (5.1)$$

El diagrama de bloques simplificado es el que se muestra en la figura 5.3

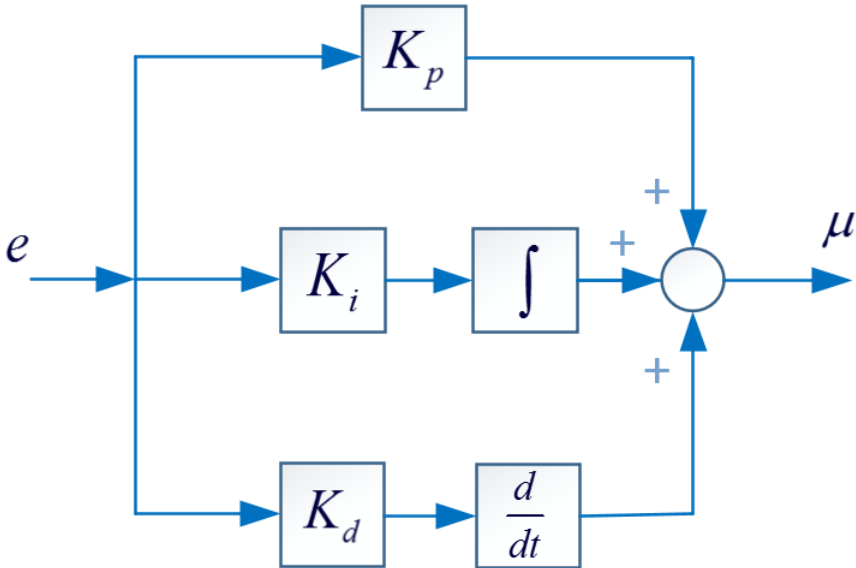


Figura 5.3: Diagrama de bloques de un controlador PID.

Las acciones de las componentes del controlador PID se describen a continuación:

- **Acción Proporcional.**

Corresponde a una amplificación o atenuación de la salida del controlador en base al error instantáneo. En la medida de la amplitud

5. Diseño y ajuste de controladores.

del error, el controlador penaliza a la planta, produciendo un efecto directo sobre el M_p (sobrepaso de la planta).

■ Acción Derivativa.

Corresponde a una amplificación o atenuación de la salida del controlador en base a la derivada del error. Trabaja con la pendiente del error instantáneo, lo que le posibilita proyectar la tendencia del error y realizar una acción anticipante de corrección, logrando un efecto directo en la velocidad de respuesta del sistema.

■ Acción Integral.

Corresponde a una amplificación o atenuación de la salida del controlador, en base a la integral del error. Al trabajar con la integral del error, permite disminuir o eliminar el error en estado estable, con la contraparte de que compromete la velocidad, haciéndole lenta la respuesta del sistema.

En conclusión se puede citar algunos criterios para la elección de las etapas de un controlador, considerando que el controlador PID a más de su estructura de tres términos, puede ser configurado en sus derivaciones como: controlador Proporcional Integral (PI), controlador Proporcional (P), controlador Proporcional Derivativo (PD).

- Un controlador PI, se puede seleccionar en sistemas en donde se necesite exactitud en su salida, y que no sea esencial una respuesta rápida, siendo un ejemplo el control de nivel de líquido en un tanque.

- Un controlador PD, se puede seleccionar en sistemas en donde se necesite velocidad de respuesta, pero no sea esencial la exactitud de la salida, siendo un ejemplo el control de un levitador magnético.

- Un controlador PID, se puede seleccionar en sistemas en donde sea necesario ganar velocidad y precisión, pero en valores no ideales. siendo un ejemplo el control de temperatura en hornos, nivel de líquido en un tanque, entre otros.

- Un controlador P, no es muy aplicado, pero se puede seleccionar en sistemas en donde no se tengan muchas exigencias, considerando que este controlador produce muchas oscilaciones para su estabilización.

5. Diseño y ajuste de controladores.

La estructura del controlador de la ecuación 5.1, puede colocarse de la forma como la ecuación 5.2.

$$PID = \frac{Kp \cdot s + Kd \cdot s^2 + Ki}{s} \quad (5.2)$$

Se puede observar que la función de transferencia del controlador PID de la ecuación 5.2 está conformada por una estructura de dos ceros y un polo en el origen, por tanto la acción de sintonización del PID consiste la elección adecuada de la posición de los ceros, que permitan que el sistema logre el comportamiento requerido.

Otra estructura del PID muy común de encontrar es la de la ecuación 5.3.

$$PID = K_c \left(1 + T_d \cdot s + \frac{1}{T_i \cdot s} \right) \quad (5.3)$$

La demostración de la sintonización y comportamiento de un controlador PID, se lo realiza en base a un ejemplo, para lo cual se toma el sistema de la ecuación 5.4.

$$G(S) = \frac{1}{3s^2 + 6s + 1} \quad (5.4)$$

Al proponer el controlador PID en cascada de acuerdo al esquema de la figura 5.3, considerando realimentación unitaria, obtenemos el planteamiento de función de transferencia total de la ecuación 5.5.

$$M = \frac{(Kp + Kd \cdot s + \frac{Ki}{s}) \left(\frac{1}{3s^2 + 6s + 1} \right)}{1 + (Kp + Kd \cdot s + \frac{Ki}{s}) \left(\frac{1}{3s^2 + 6s + 1} \right)} \quad (5.5)$$

5. Diseño y ajuste de controladores.

simplificando se tiene,

$$M = \frac{Kp \cdot s + Kd \cdot s^2 + Ki}{3s^3 + (6 + Kd)s^2 + (1 + Kp)s + Ki} \quad (5.6)$$

El sistema incrementó el orden, por lo tanto, para el diseño de los parámetros del controlador, se debe proponer un sistema de igual orden, con características de tiempo y sobrepaso aceptables en función de los requerimientos del sistema. Con el sistema propuesto se debe igualar los términos correspondientes al denominador de la ecuación 5.6, para luego poder determinar los términos del controlador. Este procedimiento puede ser desarrollado con la herramienta *sisotool* de MATLAB, mediante la ejecución del código: *sisotool(G,H)* el cual despliega la ventana de la herramienta mostrada en la figura 5.4 y la ventana del LGR mostrada en la figura 5.5, en la primera ventana se observa una propuesta básica de términos del controlador, que pueden ser modificados en función de los requerimientos de diseño por medio de el movimiento de los polos del controlador en el LGR.

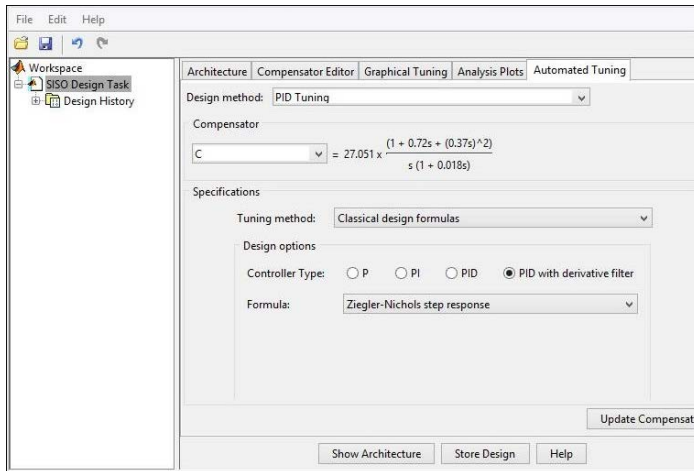


Figura 5.4: Herramienta de diseño de controladores de MATLAB.

5. Diseño y ajuste de controladores.

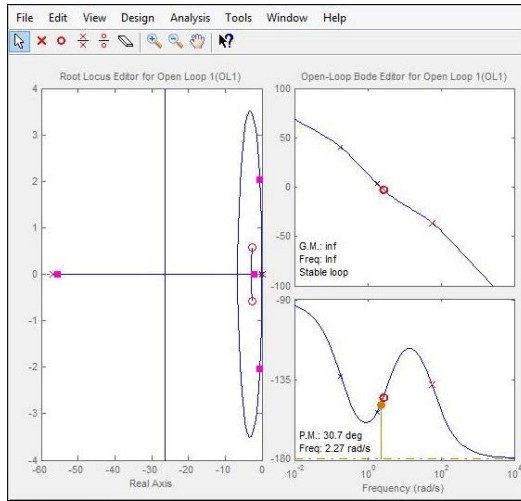


Figura 5.5: LGR del sistema con compensador PID.

Luego de realizar la sintonización, mejorando la ubicación de polos en el LGR para el ejemplo, se obtienen la función de transferencia del controlador PID, mostrados en la ecuación 5.7.

$$C = 110,931 \frac{(1 + 0,35s)(1 + 0,35s)}{s} \quad (5.7)$$

desarrollando los términos tenemos:

$$C = 110,931s^{-1} + 77,651 + 13,5346s \quad (5.8)$$

finalmente se determina las constantes del controlador

$$Kd = 13,5346$$

5. Diseño y ajuste de controladores.

$$K_p = 77,651$$

$$K_i = 110,93$$

Para la simulación se utiliza *simulink* de MATLAB. Se ha procedido a esquematizar los bloques del sistema de control, como se muestra la figura 5.6. La simulación consistirá en cambiar la referencia con la ayuda de tres bloques escalones que trabajan en tiempos diferentes, además de una simulación de una perturbación en la salida del sistema por medio de otro bloque de escalón, que ingresa en un tiempo determinado.

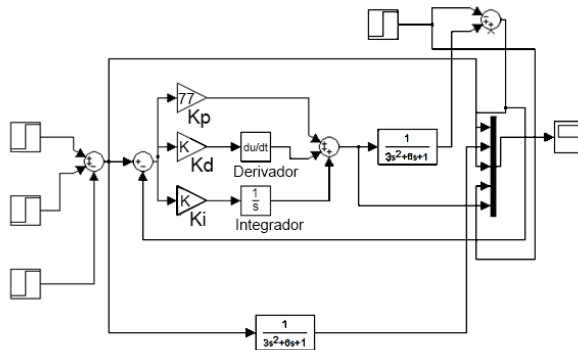


Figura 5.6: Sistema de control PID en simulink.

La gráfica de resultados de la simulación se observa en la figura 5.7, en esta se puede notar los cambios de referencia los tiempos de; 0, 8 y 16 segundos, mientras que la perturbación ingresa en el segundo 12 y desaparece en el segundo 24, pudiendo notarse que el sistema cuya salida (color verde) puede seguir la referencia (línea interpunktada), y que se recupera ante una perturbación. También se ha realizado la gráfica del sistema sin la implementación de control (color rojo), en la que se observa que no sigue la referencia además de que se altera en presencia de la perturbación sin recuperar su referencia.

5. Diseño y ajuste de controladores.

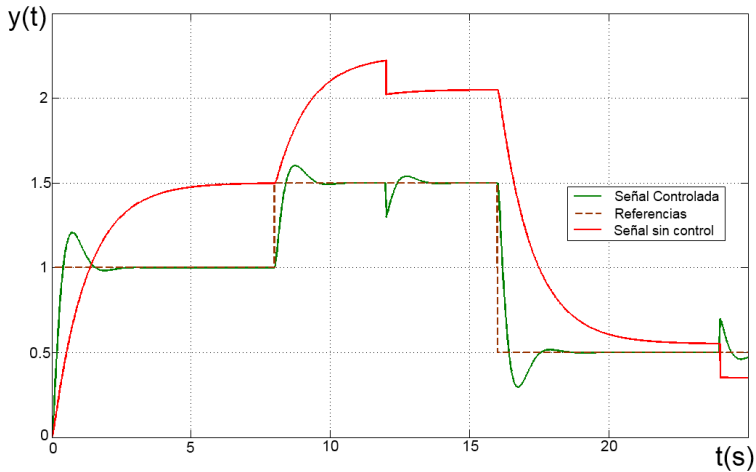


Figura 5.7: Respuesta del sistema con PID, cambios de referencia y perturbaciones.

5.3. Diseño e implementación de controlador por realimentación de estados con observador.

El controlador por realimentación de estados con observadores, forma parte de las técnicas de control moderno, el cual analiza los sistemas en el dominio del tiempo, usando una representación en variables de estado. Se formulan los controladores por medio de la realimentación de las señales de estado del sistema por medio de una ganancia, que permita llevar el sistema hacia una respuesta lo más cercana a un comportamiento escogido para el diseño. Para este tipo de control por realimentación de estados, es imprescindible el conocimiento pleno de los estados del sistema, mismos que muchas veces no están disponibles para su medición, tornándose necesario el uso de observadores de estado, cuyo objetivo es: estimar el vector de estados completo o únicamente los estados que no están disponibles para su medición. Para su consecución es necesario contar con un modelo relativamente exacto del sistema en su representación en variables de

5. Diseño y ajuste de controladores.

estado.

La representación de un sistema en variables de estado se lo puede apreciar en la figura 1.6 y las ecuaciones 1.13 y 1.14, para lo cual la ley de control propuesta por la técnica de realimentación de estados tratada en [1] y [2] es:

$$u = -\mathbf{K} \cdot x \quad (5.9)$$

donde \mathbf{K} representa el vector de ganancias de realimentación de estados, de esta forma el sistema se convierte en un sistema de lazo cerrado según la ecuación 5.10

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x \quad (5.10)$$

En consecuencia \mathbf{K} se escoge de tal forma que los valores característicos de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ sean los polos en lazo cerrado deseados.

La figura 5.8 muestra la estructura de un sistema de control por realimentación de estados, conocido como regulador.

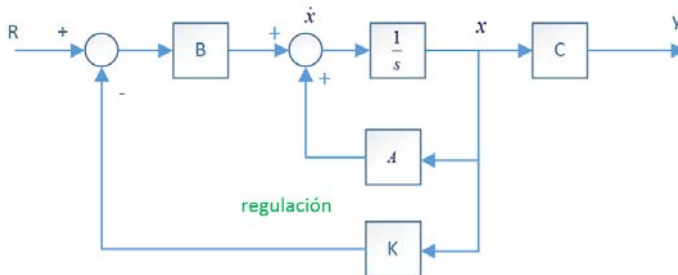


Figura 5.8: Control por realimentación de estados.

Al no existir una etapa de integración incluida en la planta, es necesario implementar una etapa a base de un integrador con su correspondiente ganancia, con la finalidad de que el sistema de control

5. Diseño y ajuste de controladores.

pueda realizar el seguimiento de la referencia. Esta etapa comúnmente es ubicada en la entrada del sistema en una estructura que permita realimentar la salida del sistema, compararla con la referencia, y minimizar su diferencia. La figura 5.9, muestra un sistema de control regulador seguidor.

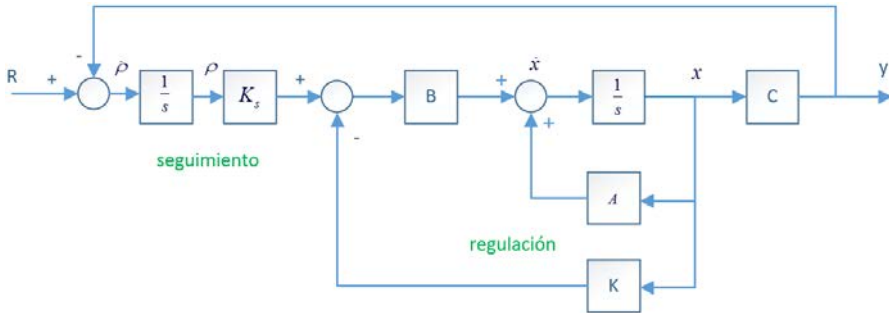


Figura 5.9: Control en espacio de estados de seguimiento y regulación.

El sistema de control toma otra estructura al implementar la etapa de seguimiento, pues ha incrementado su orden a causa del integrador, por lo tanto de acuerdo a [1], su planteamiento corresponde a:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \rho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (5.11)$$

El diseño del controlador para este planteamiento, según [1], consiste en formar las matrices aumentadas \mathbf{A}_p y \mathbf{B}_p según las ecuaciones 5.12 y 5.13, y luego determinar el vector de ganancias $\hat{\mathbf{K}}$, en base al planteamiento de un polinomio propuesto de orden correspondiente a la dimensión de la matriz \mathbf{A}_p . El vector $\hat{\mathbf{K}}$, está conformado por el vector de ganancias de realimentación de estados \mathbf{K} además de la ganancia K_i de la etapa de seguimiento, tal como se muestra en la ecuación ,

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

5. Diseño y ajuste de controladores.

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -K_s] \quad (5.14)$$

Debido a que esta técnica de control demanda conocimiento pleno de todos los estados del sistema para su posterior realimentación, resulta evidente la necesidad de implementar un observador de estados para realimentarlos mediante la técnica de ubicación de polos, cuyo proceso matemático a partir de la señal de control y la medición de la salida del modelo de la planta conocido, estima los valores de los estados del sistema.

De acuerdo a [1], matemáticamente un observador de estados es representado con la ecuación 5.15:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot u + \mathbf{K}_e [y - \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{x}}] \quad (5.15)$$

En donde $\tilde{\mathbf{x}}$ representa los estados estimados a partir de las mediciones de la salida y , \mathbf{K}_e corresponde al vector de ganancias del observador, con similar criterio de diseño que para el vector ganancias de realimentación \mathbf{K} .

En la figura 5.10 se muestra el esquema general de un controlador por realimentación de estados seguidor regulador que utiliza un observador para estimar los mismos, que luego pasan a través del bloque de ganancia de realimentación \mathbf{K} , permitiendo obtener la señal de control u .

5. Diseño y ajuste de controladores.

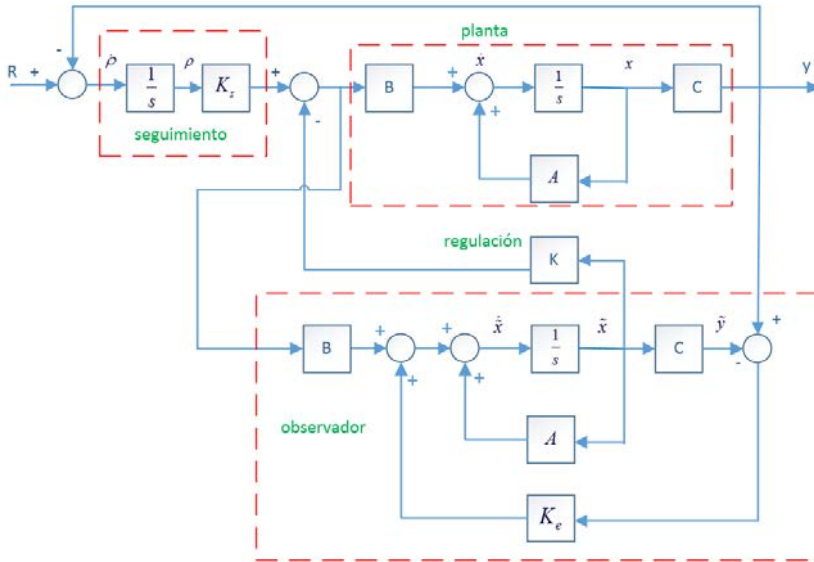


Figura 5.10: Control por realimentación de estados con observador.

Resulta sencillo notar la relación directa que la ecuación 5.15 guarda con la sección inferior de la figura 5.10 que representa el observador.

Para la implementación de un controlador por realimentación de estados con observador, es necesario que el sistema sea controlable y observable. Por tanto se define:

Controlabilidad.- Poder dirigir las variables de estado de un valor inicial a un valor deseado por medio de la variable de control. El sistema es controlable si el rango de la matriz de controlabilidad es completo, por tanto se puede utilizar los siguientes comandos de MATLAB.

$$\text{MatrizControlabilidad} = \text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (5.16)$$

$$\text{rango} = \text{rank}(\text{MatrizControlabilidad}) \quad (5.17)$$

Observabilidad.- Poder determinar el valor de los estados del sistema conociendo únicamente el valor del estado de salida y la en-

5. Diseño y ajuste de controladores.

trada de del sistema. El sistema es observable si el rango de la matriz de observabilidad es completo, por tanto se puede utilizar los siguientes comandos de MATLAB.

$$\text{MatrizObservabilidad} = \text{obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \quad (5.18)$$

$$\text{rango} = \text{rank}(\text{MatrizObservabilidad}) \quad (5.19)$$

Para determinar el valor del vector de control K , se puede utilizar la herramienta de *acker()* de MATLAB, de la siguiente forma:

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, (\text{RaicesPropuestasControl})) \quad (5.20)$$

y para determinar $\hat{\mathbf{K}}$, se puede usar:

$$\hat{\mathbf{K}} = \text{acker}(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, (\text{RaicesPropuestas})) \quad (5.21)$$

siendo

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -K_s] \quad (5.22)$$

Es recomendable indagar sobre la fórmula Ackermann en [12], un procedimiento muy utilizado que permite determinar de manera directa el vector de ganancias K .

Las raíces propuestas para el controlador son tales que generen una respuesta aceptable para el diseñador. Es aconsejable referirse a las propuestas de polos normalizados de ITAE de la tabla 5.1 planteadas por Graham y Lathrop (1953) para plantas de distinto orden. Se debe considerar que la respuesta de estos polinomios generan sobrepaso en la respuesta del sistema, y en caso de que los requerimientos de diseño no permitan sobrepaso, podemos emplear los polinomios de Bessel de la tabla 5.2. Ambas propuestas de polinomios consideran la frecuencia de corte del sistema ω_o .

5. Diseño y ajuste de controladores.

Orden	Polinomios ITAE
1	$\left(\frac{s}{\omega_o} + 1\right)$
2	$\left(\frac{s}{\omega_o} + 0,7 \pm 0,7j\right)$
3	$\left(\frac{s}{\omega_o} + 0,708\right) \left(\frac{s}{\omega_o} + 0,52 \pm 1,06j\right)$
4	$\left(\frac{s}{\omega_o} + 0,424 \pm 1,26j\right) \left(\frac{s}{\omega_o} + 0,626 \pm 0,414j\right)$

Tabla 5.1: Polinomios de ITAE.

Orden	Polinomios Bessel
1	$\left(\frac{s}{\omega_o} + 1\right)$
2	$\left(\frac{s}{\omega_o} + 0,86 \pm 0,5j\right)$
3	$\left(\frac{s}{\omega_o} + 0,94\right) \left(\frac{s}{\omega_o} + 0,745 \pm 0,711j\right)$
4	$\left(\frac{s}{\omega_o} + 0,657 \pm 0,83j\right) \left(\frac{s}{\omega_o} + 0,904 \pm 0,271j\right)$

Tabla 5.2: Polinomios de Bessel.

Para determinar el valor del vector de control K_e , de manera similar se puede utilizar la herramienta de *acker* de MATLAB, de la siguiente forma:

$$\mathbf{K}_e = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{C}', (RaicesPropuestasObservador)) \quad (5.23)$$

Las raíces propuestas para el observador son iguales o más rápidas que las raíces propuestas para el controlador, esto con el objetivo de que el sistema pueda estimar los estados en una forma rápida, y así posibilitar que la acción de control disponga oportunamente de aquellos para el cálculo de la señal de control.

5. Diseño y ajuste de controladores.

Como ejemplo de diseño de un controlador por realimentación de estados, se tomará el sistema cuya función de transferencia está representada por la ecuación 5.24

$$G(s) = \frac{1,5}{0,2s^3 + 5s^2 + 4s + 1} \quad (5.24)$$

Se pasa la función de transferencia a variables de estado. Para esto MATLAB brinda un comando (*tf2ss*) el cual devuelve las matrices correspondientes a la ecuación de estados.

$$num = [1,5];$$

$$den = [0,2, 5, 4, 1];$$

$$[A, B, C, D] = tf2ss[num, den];$$

Las matrices de variables de estado correspondientes a la función de transferencia son:

$$A = \begin{bmatrix} -25 & -20 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 7,5]$$

$$D = 0$$

Se puede determinar la controlabilidad y la observabilidad de la siguiente forma:

$$\text{MatrizControlabilidad} = \text{ctrb}(A, B)$$

5. Diseño y ajuste de controladores.

$$\text{MatrizControlabilidad} = \begin{bmatrix} 1 & -25 & 605 \\ 0 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rango} = \text{rank}(\text{MatrizControlabilidad}) = 3$ el sistema es completamente controlable

$$\text{MatrizObservabilidad} = \text{obsv}(A, C)$$

$$\text{MatrizObservabilidad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7,5 \\ 0 & 7,5 & 0 \\ 7,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rango} = \text{rank}(\text{MatrizObservabilidad}) = 3$ el sistema es completamente observable

Se procede a encontrar las matrices aumentadas obteniendo:

$$Ap = \begin{bmatrix} -25 & 20 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bp = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con el comando $\text{acker}()$ de MATLAB se halla la ganancia \hat{K} del controlador, asumiendo una propuesta de polos de ITAE para una frecuencia $\omega_o = 1 \text{ rad/seg}$, se plantea $Jp = [-0,424 + 1,263j, -0,424 - 1,263j, -0,626 + 0,414j, -0,626 - 0,414j]$. Al aplicar el comando $\hat{K} = \text{acker}(Ap, Bp, Jp)$, resulta:

$K_T = [-22,9, -16,6, -2,3, -0,0333]$, que desglosando las ganancias se tiene:

$$K = [-22,9, -16,6, -2,3] \text{ y } K_s = [0,0333].$$

Se halla la ganancia K_e para el observador, asumiendo una propuesta de polos un tanto más rápidos que para el controlador, y considerando dos veces más rápidos que las raíces de la planta original,

5. Diseño y ajuste de controladores.

siendo:

$$J_e = [-50, -0,8 + 0,19j, -0,8 - 0,19j]$$

$$K_e = \text{acker}(A, C', J_e)$$

que resulta

$$K_e = [4,0288, 3,3546, 0,8867]$$

La figura 5.11 representa el código en MATLAB para el diseño del controlador en espacio de estados.

```
1      %Definición de la planta
2 -    num=[6]
3 -    den=[0.2,5,4,1]
4      %Modelo en espacio de estados
5 -    [A B C D]=tf2ss(num,den)
6      %Polos del sistema
7 -    eig(A)
8      %determinamos la frecuencia de corte
9 -    bode(A,B,C,D) %se observa Wo cercano a 1
10     %Prueba de controlabilidad
11 -    F=ctrb(A,B)
12 -    rank(P)
13     %Prueba de Observabilidad
14 -    O=obsv(A,C)
15 -    rank(O)
16     %Matrices aumentadas para control integral (seguidor)
17 -    Ap=[A zeros(3,1):-C 0]
18 -    Bp=[B;0]
19     %Raices propuestas segun ITAE considerando Wo=1
20 -    Jp=[-0.424+1.263j,-0.424-1.263j,-0.626+0.414j,-0.626-0.414j]
21     %Cálculo de las ganancias del regulador y seguidor
22 -    KT=acker(Ap,Bp,Jp)
23     %Propuesta de polos para seguimimientto (dos veces más
24     %rapidas que las raices del sistema original)
25     %Je=[-50,-0.8,-0.8]
26 -    Je=[-50,-0.8+0.19j,-0.8-0.19j]
27     %Cálculo de las ganancias del observador
28 -    Ke=acker(A,C',Je)
```

Figura 5.11: Programa para el diseño en espacio de estados.

A continuación en la figura 5.12 se presenta el esquema de bloques en simulink para la simulación y en la figura 5.13 se muestra los

5. Diseño y ajuste de controladores.

resultados de la simulación del sistema. En este se puede observar el seguimiento de la salida (violeta) con diferentes referencias (amarillo) y como el sistema recupera su referencia en presencia de una perturbación que ingresan en $t = 20s$ (perturbación aditiva) y desaparece en $t = 60s$, lo que no sucede con la señal de salida del sistema que no posee controlador (cyan).

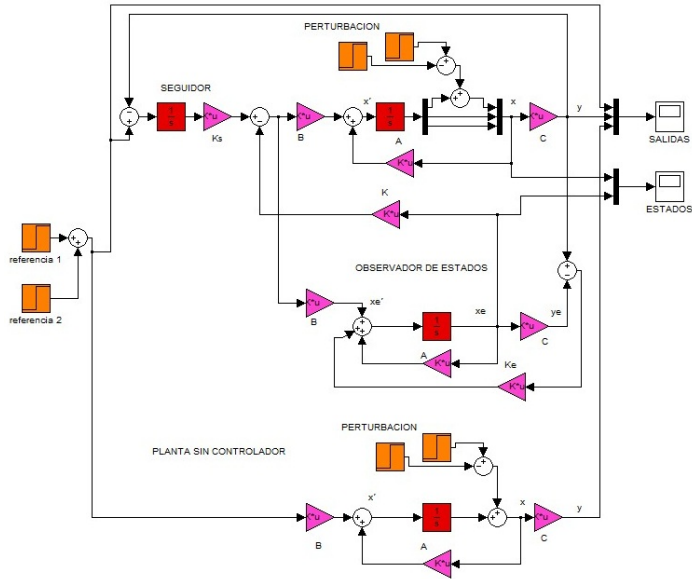


Figura 5.12: Diagrama de bloques del controlador en espacio de estados.

5. Diseño y ajuste de controladores.

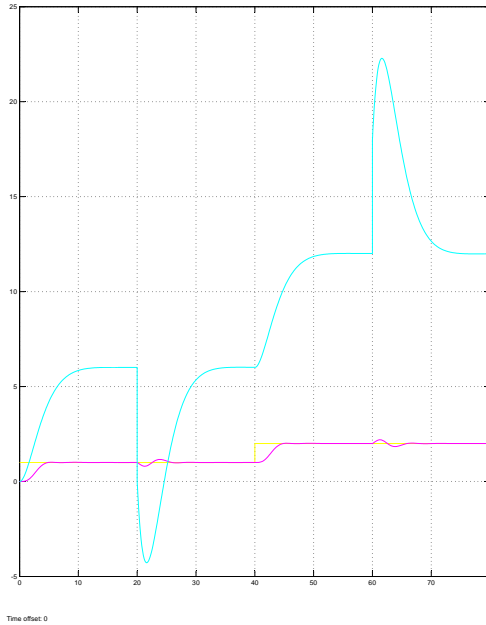


Figura 5.13: Resultados de la simulación del control en espacio de estados.

En la figura 5.14 se aprecia la respuesta de los estados originales y estimados del sistema. Para esta simulación se ha incorporado una señal de perturbación en uno de los estados del sistema, a los 20 segundos, esto provoca que los estados originales y los observados, se separen y en un tiempo determinado por el observador, estos convergen nuevamente. Los estados originales arrancan con condiciones iniciales diferentes de cero.

5. Diseño y ajuste de controladores.

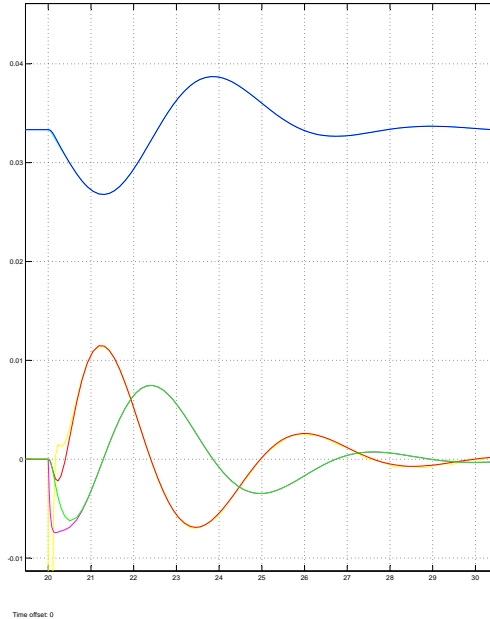


Figura 5.14: Estados reales y observados del sistema.

5.4. Sistemas de control en tiempo discreto.

En este apartado se realiza un enfoque sobre el procedimiento matemático para obtener la ecuación en diferencias de la señal de control, adicionalmente se plantea un ejemplo de implementación de un controlador PID discreto usando el software LabView.

5.4.1. Ecuaciones en Diferencias (muestras)

Una ecuación en diferencias es una expresión que relaciona distintas sucesiones de una o varias variables, que se encuentran generadas en periodos establecidos, y que representan las muestras de una señal continua. Como ejemplo se plantea la ecuación 5.25, en la que se puede notar que, para obtener el valor de la variable $y(k)$ en un cierto valor de k , se mantiene una dependencia de; los valores anteriores $y(k - 1)$

5. Diseño y ajuste de controladores.

y de los valores que posee la señal u en ese instante. A este tipo de modelos se las conoce como; modelo lineal discreto Auto Regresivo con variable Exógena (ARX).

$$y(k) - 0,2y(k - 1) = 3v(k) \quad (5.25)$$

La solución inmediata de la ecuación 5.25 corresponde a

$$y(k) = 0,2y(k - 1) + 3v(k) \quad \text{Modelo ARX}$$

En sistemas de tiempo discreto el factor $y(k - 1)$ corresponde a tener \dot{y} en sistemas de tiempo continuo, por lo que se vuelve sencillo determinar el valor de la derivada, pues se trata de una muestra de la señal en un periodo anterior de muestreo.

5.4.2. Etapas para la discretización y tratamiento de una señal.

En sistemas de control, la señal que se obtiene de un sensor es procesada mediante un controlador, cuyo resultado corresponde a la señal de control que gobernará la planta. Cuando se trabaja con controladores discretos es necesario implementar las siguientes etapas:

1. **Muestreo de la señal sensada.**
2. **Procesamiento mediante una técnica de control discreto.**
3. **Retención de la señal.**

La figura 5.15, muestra las etapas para el manejo de una señal continua mediante procesos digitales.

5. Diseño y ajuste de controladores.

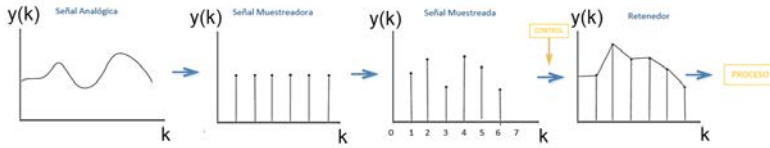


Figura 5.15: Etapas para el manejo de señales continuas mediante procesos digitales.

- **La primera etapa.** Consiste en la discretización de la señal continua $x(t)$, para lo cual se realizará mediante la ecuación 5.26.

$$x(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) \quad (5.26)$$

en donde k corresponde al número de muestra realizada, T corresponde al periodo de muestreo y $\delta(t - kT)$ corresponde a la señal de pulso que se utiliza para capturar la k_{esima} muestra.

- **La segunda etapa;** Consiste en realizar el tratamiento de la señal discretizada $x(kT)$, mediante alguna técnica de control, por lo que es conveniente usar la transformada Z para su análisis, y luego de esto se realizará su transformada inversa para devolverlo al tiempo discreto, como se menciona en [13] .

La transformada Z de una función discreta $x(kT)$, corresponde a la ecuación 5.27.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (5.27)$$

la correspondencia entre el plano z y el plano de la variable compleja s de acuerdo a la matemática desarrollada para la transformada Z y la transformada de Laplace, corresponde a la ecuación 5.28, la misma que se denomina operador en adelante.

$$z = e^{sT} \quad (5.28)$$

5. Diseño y ajuste de controladores.

al despejar la variable compleja s , se tiene la ecuación 5.29, esta relación puede ser usada para convertir el planteamiento de un modelo en transformada de Laplace a uno en transformada Z .

$$s = \frac{\ln(z)}{T} \quad (5.29)$$

Para realizar el mapeo de la zona estable del plano de la variable compleja s al plano de la variable compleja z , se realiza el siguiente análisis:

Considerando la ecuación 5.28 se plantea la variable compleja s con su componente real σ y su componente imaginaria ω , por tanto

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} \quad (5.30)$$

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

$$z = e^{\sigma T} (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T)) \quad (5.31)$$

donde $\cos(\omega T) + j \sin(\omega T)$ representan una característica oscilatoria del sistema, por lo tanto, el término $e^{\sigma T}$ es el que define la estabilidad del sistema.

Los límites de estabilidad en el plano de la variable compleja s corresponde todos los valores en que $\sigma \leq 0$, lo que demanda que $|z| \leq e^0 \leq 1$. La figura 5.16 muestra la gráfica del mapeo s a z .

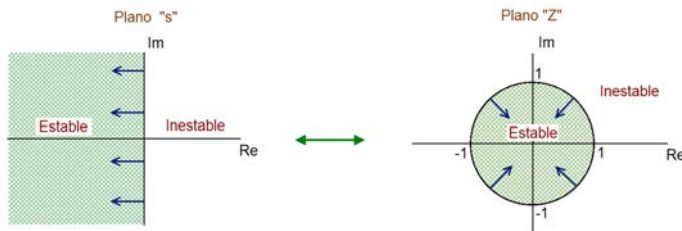


Figura 5.16: Correspondencia entre el plano s y z .

5. Diseño y ajuste de controladores.

por lo tanto, cualquier valor de z que esté fuera del rango $|z| \leq 1$ provocará que el sistema sea inestable.

Debido a que la correspondencia entre la variable compleja s y la variable compleja z dependen de una función logaritmo planteada en la ecuación 5.29 y considerando que dicha función resulta compleja su implementación en hardware digital, se utilizan distintos métodos de aproximación, de acuerdo con [12], uno de ellos es el llamado Integración por Diferencias hacia atrás, el cual se plantea en la ecuación 5.32. El mapeo correspondiente es el que se observa en la figura 5.17, en el que se puede observar que es válido al estar concentrado dentro del círculo unitario o región estable en sistemas discretos.

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (5.32)$$

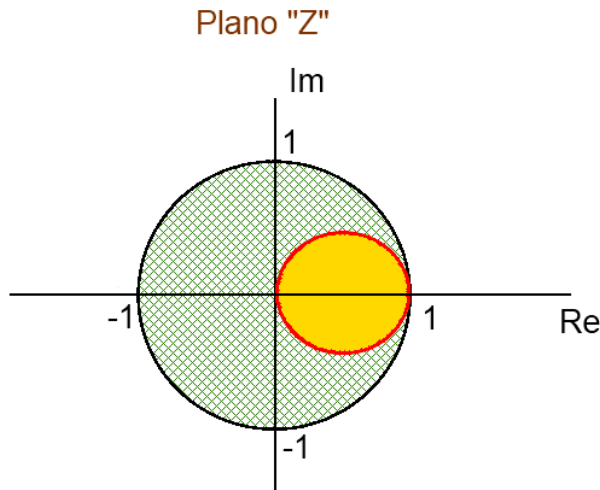


Figura 5.17: Mapeo Integración por diferencias hacia atrás.

- **La tercera etapa;** Consiste en regenerar la señal discreta enviada por el controlador, en una señal continua para poder enviarlo como señal de comando del proceso, en este sentido se emplea diferentes formas de retenedores, los cuales están carac-

5. Diseño y ajuste de controladores.

terizados por la función empleada para unir los puntos de las muestras discretas. Es así que cuando se emplea una función constante de orden cero, el retenedor se denomina Retenedor de Orden Cero que por sus siglas en ingles se conoce como ZOH, cuando se emplea una recta, el retenedor se denomina Retenedor de Orden Uno y de esta forma según la función se clasifica el retenedor.

Es importante destacar que, en función de la técnica de retención, la función matemática del proceso se modifica, incorporando el bloque de función de transferencia correspondiente al retenedor. Por ejemplo cuando se emplea un retenedor de orden cero, el bloque de función de transferencia que se incorpora corresponde a la ecuación .

$$ZOH = \frac{1 - z^{-1}}{s} \quad (5.33)$$

5.5. Implementación del controlador PID digital.

Se procede a obtener la ecuación en diferencias para el controlador PID de la ecuación 5.1, por medio del mapeo en diferencias hacia atrás formulada en la ecuación 5.32.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_i}{\frac{1-z^{-1}}{T}} + K_d \left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right) \quad (5.34)$$

$$T \cdot U(z) (1 - z^{-1}) =$$

$$E(z) (T \cdot K_p + K_d + T^2 K_i) - E(z) (T \cdot K_p + 2K_d) z^{-1} + E(z) K_D z^{-2}$$

Aplicando la anti-transformada z , se tiene

$$Tu(k) - Tu(k - 1) =$$

$$TK_P e(k) + K_D e(k) + T^2 K_i e(k) - TK_P e(k - 1) - 2K_D e(k - 1) + K_D e(k - 2)$$

5. Diseño y ajuste de controladores.

Despejando la señal de control se obtiene la ecuación 5.35 en la que se puede notar que se trata de un modelo ARX que depende de la variable error e .

$$u(k) = u(k-1) + K_P [e(k) - e(k-1)] + \frac{K_D}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] + TK_i e(k) \quad (5.35)$$

Para la implementación del controlador PID discreto, se analizará el caso práctico de una planta de control Motor Generador de LabVolt, en la que se pretende controlar la velocidad de eje del motor de CD, cuya respuesta experimental es la que se muestra en la figura 5.18. La gráfica de color amarillo corresponde a la señal de voltaje aplicado al motor, mientras que la gráfica de color cian corresponde a la velocidad sensada por el tacómetro que incorpora la planta.

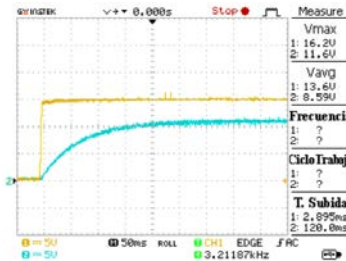


Figura 5.18: Respuesta al escalón de la planta.

Al tratarse de un sistema de primer orden, se procede a identificar sus parámetros en base a la ecuación 3.40:

$$\Delta R = 16,2V$$

$$\Delta Y = 11,6V$$

$$\theta = 0\text{seg.}$$

5. Diseño y ajuste de controladores.

Se proceden a calcular los valores necesarios para poder definir la función de transferencia de la planta

$$k = \frac{\Delta Y}{\Delta R} = 0,71$$

El factor τ asumido es $\tau = 0,06\text{seg}$, por lo tanto la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{0,71}{0,06s + 1} \quad (5.36)$$

Mediante la herramienta *sisotool*, se consigue un compensador para nuestra función de transferencia.

$$C(s) = 36,468 \frac{1 + 0,018s}{s} \quad (5.37)$$

De la ecuación 5.37 del controlador , se obtienen las constantes para el controlador PID

$$k_P + \frac{k_i}{s} + k_d s = 36,468 \frac{1 + 0,018s}{s}$$

$$k_P + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{36,468 \cdot}{s} + 0,6564$$

$$k_p = 0,6564$$

$$k_i = 36,468$$

$$k_d = 0$$

Este sistema de primer orden requiere únicamente de un controlador PI, al resultar la constante $k_d = 0$.

Usando el software LabView se implementa el controlador PID de la ecuación 5.35 y que se puede observar en la figura 5.19.

5. Diseño y ajuste de controladores.

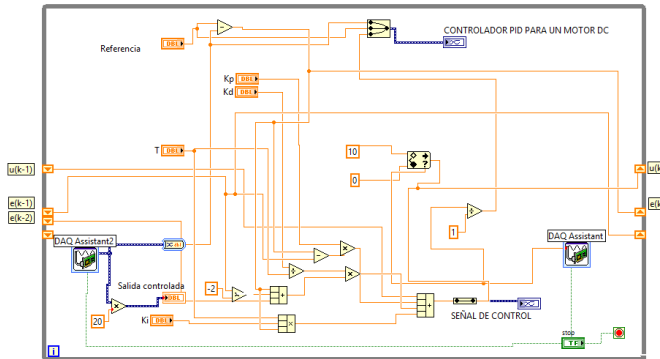


Figura 5.19: Implementación de un controlador PID en LabView.

Para un mejor manejo del sistema por parte del usuario, que involucre una adecuada visualización de las diferentes señales entregadas por el sistema, es recomendable desarrollar una interfaz gráfica parecida a la mostrada en la figura 5.20. En esta figura se observa los cambios de referencia (color rojo), la señal controlada o señal de salida (blanco) y la señal de control (color verde), se puede notar que el sistema sigue adecuadamente la referencia, la respuesta a las perturbaciones es posible experimentar sujetando el eje del motor de manera considerable.

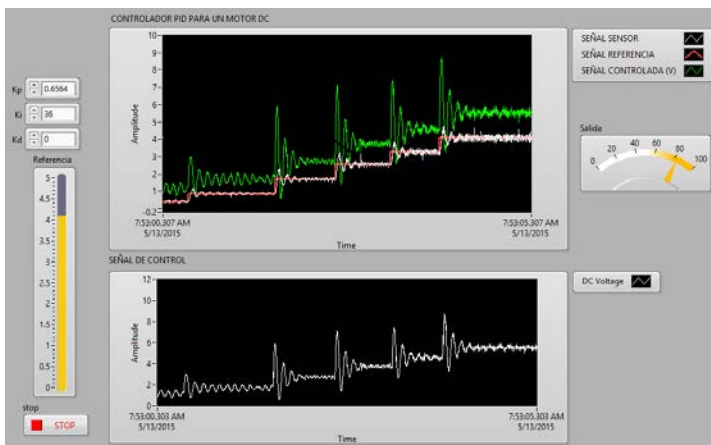


Figura 5.20: Interfaz del PID en LabView.

5.6. Algunas consideraciones para la implementación de sistema de control discreto.

El tiempo de muestreo debe ser seleccionado alrededor de la décima parte del Tao del sistema.

Es importante fijarse en la señal de control, pues su máxima amplitud está restringido por las características de la tarjeta de adquisición de datos.

Si la señal de control se satura, debido a un determinado cambio de referencia o perturbación, es probable que el sistema no se recupere, o a lo mejor necesita mucho tiempo para retomar su referencia.

La implementación del PID en LabView de la figura 5.19 puede ser simplificado usando un script de MATLAB como muestra la figura en la cual se ha implementado el controlador PID cuya estructura es la de la ecuación 5.3 la correspondiente ecuación en diferencias para la señal de control es la que se expone en la ecuación 5.38.

$$u(k) = u(k-1) + K_c [e(k) - e(k-1)] + \frac{T}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{T} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \quad (5.38)$$

5. Diseño y ajuste de controladores.

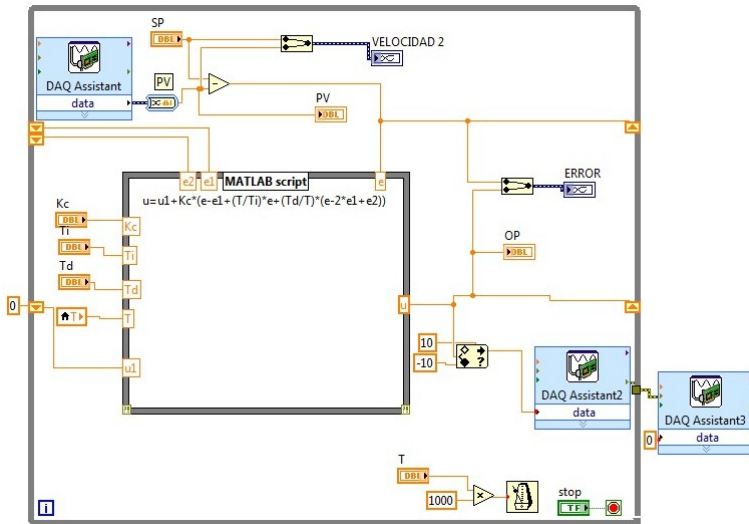


Figura 5.21: Interfaz del PID en LabView.

La implementación en LabView del controlador en espacio de estados, podría ser el que se muestra en la figura 5.22, en donde se nota claramente el uso de un script de MATLAB. Este implementa el planteamiento del controlador que posee características de seguimiento, regulación y estimación de estados .

5. Diseño y ajuste de controladores.

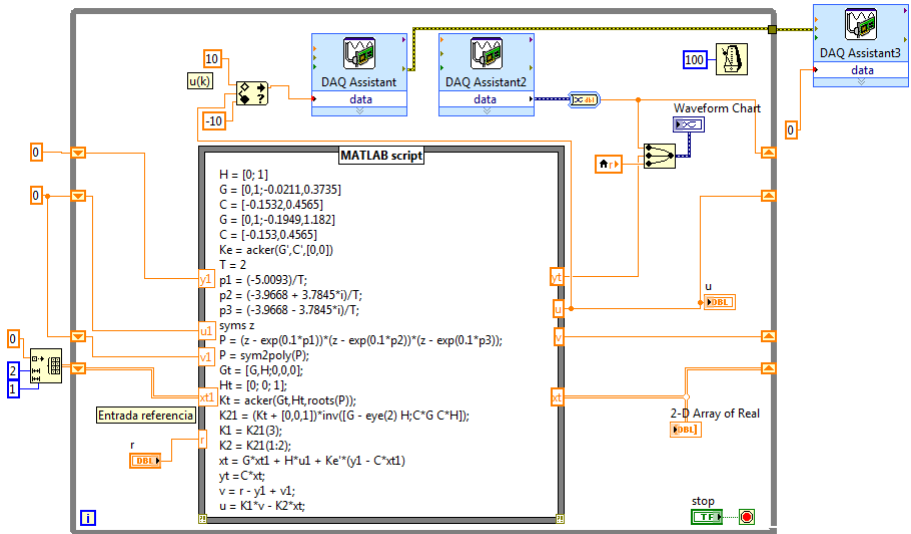


Figura 5.22: Implementación de un controlador en espacio de estados en LabView.

El presente capítulo concluye con una idea básica que permitirá al lector implementar un controlador PID y un controlador en espacio de estados. Estas propuestas de implementación han sido desarrolladas en los laboratorios de la Universidad Politécnica Salesiana, la misma que dispone de las licencias correspondientes de MATLAB y LabView.

Para la profundización de los temas abordados en este capítulo, se recomienda al lector consultar la bibliografía correspondiente al capítulo.

5.7. Preguntas y ejercicios de repaso.

1. Esquematice la estructura básica de un sistema de control en lazo cerrado con una configuración en cascada del controlador.
2. Esquematice la configuración interna del controlador PID y proponga su esquema de implementación a base de amplificadores operacionales.
3. Explique el procedimiento para la sintonización de un controlador PID, por medio de la herramienta sisotool de MATLAB.

5. Diseño y ajuste de controladores.

4. Escriba la ecuación en diferencias para el controlador PID
5. Explique en qué consiste la prueba de un controlador ante cambios de referencia y perturbaciones.

Bibliografía

- [1] Ogata K. (2003). Ingeniería de control moderna. Pearson Educación, (4a ed.).
- [2] Kuo B. (2003). Sistemas de control automático. Prentice Hall, (7a ed.).
- [3] Sira, H., Márquez R., Rivas F., Llanes O. (2005). Control de sistemas no lineales. Pearson Prentice Hall.
- [4] Dorf R. y Bishop R. (2005). Sistemas de control moderno. Pearson Prentice Hall, (10a ed.).
- [5] Hibbeler R. Dinámica. Prentice Hall, (7a ed.).
- [6] D. Hayt Kemmerly, Análisis De Circuitos En Ingeniería, McGraw Hill, Octava Edición, 2012
- [7] <http://ingcontclasico-ita-coyo.blogspot.com/2013/11/unidad-2-modelado-de-sistemas-dinamicos.html>
- [8] Sira, H., Márquez R., Rivas F., Llanes O. (2005). Control de sistemas no lineales. Pearson Prentice Hall.
- [9] Franklin G., Da Powell J., Emani-Naeini A. (2014). Feedback Control of Dynamic Systems. Pearson Educación, (7a ed.).
- [10] Gil Nobajas J., Rubio Díaz-Cordovés A., (2004). Ingeniería de Control. Control de Sistemas Continuos, Unicopia, C.B, (2a ed.).
- [11] D’Azzo J., Houpis C., Sheldon S., (2003). Linear Control System Analysis and Design with Matlab, CRC Taylor&Francis, (5a ed.)

BIBLIOGRAFÍA

- [12] Ackermann J. *Sampled-Data Control Systems*, Springer_Verlag, Berlin, Alemania, 1985.
- [13] Ogata K. (1996). *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*, Pearson Educación, (2a ed.).
- [14] Dorf R. y Bishop R. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson Prentice Hall, (10a ed.).
- [15] Isermann, R. (2006). *Fault-Diagnosis Systems*, Springer-Verlag.
- [16] Minchala I., Valdez, A. (2010, diciembre). *Identificación de Procesos Usando Mínimos Cuadrados por Lotes*.
- [17] Wang, L. (2009). *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB®*, Springer Verlag.
- [18] Chang, K.y Yu, D. (2005, febrero). *Fault Tolerant Control of Multivariable Processes Using Auto-Tuning PID Controller*

Introducción al Análisis e Implementación de Sistemas de Control Automático es un libro de texto para estudiantes universitarios y profesionales interesados en el estudio de los conceptos básicos de la teoría de control en el dominio del tiempo y de la frecuencia con aplicaciones en el diseño clásico y moderno de los sistemas de control automático.

En esta primera edición, en sus dos primeros capítulos tratan sobre los fundamentos de los sistemas de control y el modelamiento de los sistemas eléctricos, mecánicos y electromecánicos. Los capítulos tres y cuatro cubren el estudio de los conceptos relacionados con definiciones de parámetros y análisis de respuesta de los sistemas de control en el dominio de tiempo y frecuencia. Finalmente, en el capítulo cinco, el lector tendrá la posibilidad de estudiar y aplicar las técnicas de diseño de los controladores mediante el uso del MATLAB o Simulink de tal manera que podrá desarrollar su habilidad en la implementación, simulación y análisis de resultados.

Marco Carpio Alemán. Ingeniero en Electrónica y Magister en Control y Automatización Industriales por parte de la Universidad Politécnica Salesiana del Ecuador. Actualmente estudia el doctorado en Automática y Robótica en la Universidad Politécnica de Madrid, en España.

Walter Orozco Tupacyupanqui. Ingeniero Eléctrico por la Universidad de Cuenca, Master en Ciencias en Ingeniería Eléctrica y de Sistemas por el New York Institute of Technology en Estados Unidos. Doctor en Comunicaciones y Electrónica por el Instituto Politécnico Nacional de México.

