

Optimización de Propulsores de Plasma Pulsantes Ablativos de Teflón Utilizando Algoritmos Evolutivos del tipo Genéticos

por

Emmanuel Walter Gomez

Tesis presentada para la obtención del grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería - Mención Aeroespacial

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales dependiente de la Universidad Nacional de Córdoba

y

Centro Regional Universitario Córdoba - IUA perteneciente a la Universidad de la Defensa Nacional

Febrero de 2018

Resumen

En la década del '90 se comenzó nuevamente a poner énfasis en diseñar satélites de bajo peso, los cuales además de bajar costos y tiempos de desarrollo, sean sencillos y robustos. En tal sentido, la idea general es poner en órbita constelaciones de micro o nano-satélites (masas inferiores a 50 y 10 kilogramos de peso respectivamente), teniendo capacidades individuales de maniobra para el vuelo en formación, los cuales a su vez puedan tener asignadas funciones de operación individuales o grupales. Es en este punto donde los Propulsores de Plasma Pulsantes ablativos (APPT por sus siglas en inglés) toman lugar debido a su simpleza constructiva, alto impulso específico, bajo impulso unitario, bajo peso y requerimientos de potencia, además de no necesitar empaquetamiento de combustible.

En este trabajo, y de acuerdo a los modelos electromecánicos inestacionarios, se proponen dos modelos a partir de los cuales se simula a los APPT con el objetivo de caracterizar su performance. Se obtiene numéricamente la masa ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo, entre otros, y se compara y valida con resultados experimentales indicados en la literatura especializada. En los modelos propuestos en este trabajo se incorpora la ecuación de la energía al sistema de ecuaciones original, lo cual agrega la temperatura del plasma como variable temporal al modelo. Para obtener la densidad de partículas de electrones del plasma en función del tiempo, se utiliza la ecuación de Saha considerando al plasma en Equilibrio Termodinámico Local. Se realiza un análisis de sensibilidad de ambos modelos respecto a variables eléctricas y geométricas prestando especial atención en su efecto sobre la masa ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo.

Por último, y utilizando algoritmos genéticos, se lleva a cabo el proceso de optimización de variables eléctricas, geométricas o ambas, utilizando uno de los modelos propuestos. Se analizan dos casos, optimización individual, es decir, de una sola función objetivo; y optimización múltiple o de más de una función objetivo. Se interpretan los resultados y se identifican tendencias en cuanto a obtener un diseño óptimo de un APPT de teflón.

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis, el Doctor Sergio Elaskar, que sin conocerme me abrió las puertas del Departamento de Aeronáutica de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, lugar donde he estado trabajando durante estos últimos años. Gracias a sus valiosos aportes realizados durante el transcurso del presente trabajo y a su buena predisposición es que he podido finalizar esta tesis.

Además quiero agradecer a mis compañeros de oficina, especialmente a Juan Pablo y Andrés los cuales también han hecho su aporte desde un punto de vista técnico hasta humano.

Por último, y no menos importante, quiero agradecer a mi esposa Virginia y a nuestro hijo Mateo y hija que esta por venir, María Sol, por el apoyo de siempre y cable a tierra de cada día. También agradezco infinitamente a mis padres Sandra y Walter, a mi hermano Mauro y mis abuelos, Alcira y Oscar, y Rosario y Tito, por los valores, apoyo y ejemplos de bien que me han sabido transmitir.

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	IX
Símbolos y nomenclatura utilizados	IX
1. Introducción	1
1.1. Breve reseña histórica	1
1.2. Conceptos generales de la propulsión espacial	3
1.3. Clasificación de los PPTs	5
1.3.1. De acuerdo a la geometría de electrodos	5
1.3.1.1. Geometría de electrodos paralela	5
1.3.1.2. Geometría de electrodos coaxial	6
1.3.1.3. Otras geometrías	7
1.3.2. De acuerdo al tipo de alimentación del propelente	7
1.4. Funcionamiento de un APPT	8
1.4.1. Propagación de la lámina de plasma	9
1.5. Objetivos	12
1.5.1. Objetivos generales	12
1.5.2. Objetivos particulares	12
2. Modelos Analíticos Inestacionarios de PPTs	14
2.1. Modelos electromecánicos simples	15
2.1.1. Modo de barrido	15
2.1.2. Modo de lámina	16
2.1.3. Formulación matemática general del modelo electromecánico simple	16
2.2. Modelos electromecánicos mejorados	18
2.2.1. Modelo de Laperriere	18
2.2.1.1. Geometría de cámara de aceleración paralela	20

2.2.1.2.	Geometría de Cámara de aceleración coaxial	25
2.2.2.	Modelo de Yang	29
2.2.2.1.	Geometría de cámara de aceleración paralela	30
2.2.2.2.	Geometría de cámara de aceleración coaxial	38
2.2.2.3.	Cálculo del bit de impulso	40
2.3.	Modelos Propuestos	41
2.3.1.	Modelo A	42
2.3.1.1.	Obtención de la masa total ablacionada	43
2.3.1.2.	Cálculo de la densidad de electrones	44
2.3.1.3.	Cálculo de la temperatura del plasma	46
2.3.1.4.	Resumen del sistema de ecuaciones resultante del Modelo A	47
2.3.1.5.	Implementación numérica del Modelo A	48
2.3.1.6.	Validación del Modelo A	50
2.3.1.7.	Aplicación del Modelo A al PPT LEs-6b	52
2.3.2.	Modelo B	54
2.3.2.1.	Cálculo de la temperatura del plasma	55
2.3.2.2.	Resumen del sistema de ecuaciones resultante	56
2.3.2.3.	Implementación numérica del Modelo B	57
2.3.2.4.	Validación del Modelo B	58
2.3.2.5.	Aplicación del Modelo B al PPT LEs-6b	59
3.	Análisis de Sensibilidad de los Modelos Propuestos	62
3.1.	Modelo Propuesto A	63
3.2.	Modelo Propuesto B	67
3.3.	Análisis de los resultados	72
4.	Optimización	73
4.1.	Optimización Genética	74
4.1.1.	Optimización Genética aplicada a los PPTs	76
4.1.2.	Optimización Individual	77
4.1.3.	Optimización Múltiple	79
4.2.	Análisis de los resultados	83
4.2.1.	Optimización Individual	83
4.2.1.1.	Optimización Geométrica	84
4.2.1.2.	Optimización Eléctrica	85
4.2.1.3.	Optimización Full	86
4.2.1.4.	Comentarios sobre la Optimización Individual	87
4.2.2.	Optimización Múltiple	87
4.2.2.1.	Optimización Geométrica	88
4.2.2.2.	Optimización Eléctrica	89

4.2.2.3. Optimización Full	91
4.2.2.4. Comentarios sobre la Optimización Múltiple	92
5. Conclusiones	93
5.1. Conclusiones Generales	93
5.2. Trabajos Futuros	96
Bibliografía	97

Índice de figuras

1.1. Tipos de geometría de electrodos paralelos utilizados en los PPTs.	6
1.2. Tipos de geometría de electrodos coaxiales utilizados en los PPTs.	6
1.3. Tipos de alimentación posibles en los PPTs ablativos.	8
1.4. Esquema de un APPT de geometría de electrodos paralela y alimentación longitudinal.	9
1.5. Movimiento de un ion positivo en un campo \vec{B} uniforme, con $\vec{v}_{\parallel} \neq 0$	10
1.6. Deriva de partículas en medios con \vec{B} y \vec{E} uniformes.	11
2.1. Esquema circuital de un PPT.	15
2.2. PPT de electrodos paralelos en modo de barrido.	16
2.3. PPT de electrodos paralelos en modo de lámina.	16
2.4. Circuito RLC del Modelo Mejorado.	19
2.5. Espira perfectamente conductora.	20
2.6. Superficie que corta a la hoja de corriente.	21
2.7. Corte de un PPT coaxial con distribución uniforme de corriente.	26
2.8. Masa total ablacionada de distintos PPTs como función de A_p y E_0	43
2.9. Temperatura del plasma en función del tiempo (LES-6b) - Modelo A.	53
2.10. Densidad de partículas de electrones en función del tiempo (LES-6b) - Modelo A.	53
2.11. Corriente en función del tiempo (LES-6b) - Modelo A.	54
2.12. Temperatura del plasma en función del tiempo (LES-6b) - Modelo B.	60
2.13. Densidad de partículas de electrones en función del tiempo (LES-6b) - Modelo B.	61
2.14. Corriente en función del tiempo (LES-6b) - Modelo B.	61
3.1. Sensibilidad del modelo respecto a h (LES-6b) - Modelo A.	64
3.2. Sensibilidad del modelo respecto a w (LES-6b) - Modelo A.	64
3.3. Sensibilidad del modelo respecto a l (LES-6b) - Modelo A.	65
3.4. Sensibilidad del modelo respecto a R_{ext} (LES-6b) - Modelo A.	65
3.5. Sensibilidad del modelo respecto a L_{ext} (LES-6b) - Modelo A.	66
3.6. Sensibilidad del modelo respecto a V_0 (LES-6b) - Modelo A.	66

3.7. Sensibilidad del modelo respecto a C (LES-6b) - Modelo A.	67
3.8. Sensibilidad del modelo respecto a h (LES-6b) - Modelo B.	68
3.9. Sensibilidad del modelo respecto a w (LES-6b) - Modelo B.	69
3.10. Sensibilidad del modelo respecto a l (LES-6b) - Modelo B.	69
3.11. Sensibilidad del modelo respecto a R_{ext} (LES-6b) - Modelo B.	70
3.12. Sensibilidad del modelo respecto a L_{ext} (LES-6b) - Modelo B.	70
3.13. Sensibilidad del modelo respecto a V_0 (LES-6b) - Modelo B.	71
3.14. Sensibilidad del modelo respecto a C (LES-6b) - Modelo B.	71
4.1. Frente Óptimo de Pareto - Optimización Geométrica - Modelo B - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 30$ - $n_{gen} = 30$	89
4.2. Frente Óptimo de Pareto - Optimización Eléctrica - Modelo B - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 50$ - $n_{gen} = 20$	90
4.3. Frente Óptimo de Pareto - Optimización Full - Modelo B - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 100$ - $n_{gen} = 20$	91

Índice de tablas

1.2. Utilización de PPTs en misiones espaciales.	2
1.3. Performances según la tecnología empleada.	4
2.1. Características Eléctricas y Geométricas de los PPTs analizados.	51
2.2. Resultados obtenidos al utilizar el Modelo A.	52
2.3. Valores experimentales del LES-6b.	54
2.4. Resultados obtenidos al utilizar el Modelo B.	59
3.1. Variaciones medias respecto de los valores nominales de las variables de interés - Modelo A.	63
3.2. Variaciones medias respecto de los valores nominales de las variables de interés - Modelo B.	68
3.3. Análisis de Sensibilidad - Comparación entre el Modelo A y B propuesto.	72
4.1. Resultados de la Optimización Geométrica utilizando el Modelo B propuesto - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 100$ - $n_{gen} = 20$	84
4.2. Resultados de la Optimización Eléctrica utilizando el Modelo B propuesto - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 100$ - $n_{gen} = 20$	85
4.3. Resultados de la Optimización Full utilizando el Modelo B propuesto - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 100$ - $n_{gen} = 20$	86

Símbolos y nomenclatura utilizados

$APPT$: Propulsor de plasma pulsante ablativo

A_p : Área expuesta de Teflón

A_{rad} : Área de radiación del arco eléctrico

\vec{B} : Campo de Inducción Magnético

\vec{B}_{ind} : Campo de Inducción Magnético

$cxpb$: Probabilidad de realizar intercambio de material genético

C_p : Calor específico del plasma a volumen constante

dx : Variaciones máximas y mínimas que pueden tomar las VD seleccionadas

e : Energía interna específica del gas

E_0 : Energía inicial almacenada en los capacitores

\vec{E} : Campo Eléctrico

f_A : Grado de degeneramiento de una especie dada

\vec{F}_g : Fuerza Gasdinámica

\vec{F}_L : Fuerza de Lorentz

g : Aceleración de la gravedad

GA : Algoritmo genético

h : Altura de la cámara de aceleración paralela del propulsor

h_p : Constante de Planck

$indpb$: Probabilidad de llevar a cabo una mutación en un diseño

$I(t)$: Corriente eléctrica

I_{bit} : Bit de impulso

I_{sp} : Impulso específico

\vec{J} : Densidad de corriente

k : Constante de Boltzman

\vec{k} : Densidad lineal de corriente

l : Largo de la cámara de aceleración paralela o coaxial del propulsor

L_c : Inductancia del capacitor

L_e : Inductancia de los cables o conectores

L_{ext} : Inductancia exterior a la lámina de plasma

L_{pe} : Inductancia de los electrodos

LTA : Ablación tardía del propelente

LTE : Equilibrio termodinámico local

m : Masa de una partícula o masa total ablacionada

m_b : Masa total ablacionada en cada pulso

m_i : Masa inicial del vehículo o satélite

m_f : Masa final del vehículo o satélite

m_n : Masa neutra

m_v : Masa del vehículo

m_0 masa inicial de la lámina de plasma

$mutpb$: Probabilidad de realizar una mutación a una VD en particular

M : Número de Mach

MHD : Magnetogasdinámica

n_e : Densidad de partículas de electrones

n_{gen} : Número de generaciones al cual detener el proceso

n_{pop} : Tamaño de la población

ODE : Ecuación diferencial ordinaria

P : Presión del gas

P_a : Presión ambiente
 P_e : Presión de salida de los gases
 P_{eq} : Presión de equilibrio de vapor
 P_M : Presión magnética
 P_0 : Presión de estancamiento del flujo
 PPT : Propulsor de plasma pulsante
 q : Carga eléctrica elemental
 $Q(t)$: Carga eléctrica del banco de capacitores en función del tiempo
 r_i : Radio interior de la cámara de aceleración coaxial del propulsor
 r_L : Radio de Larmor
 r_o : Radio exterior de la cámara de aceleración coaxial del propulsor
 R : Constante particular del gas
 R_c : Resistencia del capacitor
 R_e : Resistencia de los cables o conectores
 R_{ext} : Resistencia exterior a la lámina de plasma
 R_p : Resistencia del plasma
 R_{pe} : Resistencia de los electrodos
 T : Empuje
 T_e : Temperatura de los electrones
 t_{rad} : Tiempo que se considera dura la descarga de corriente eléctrica
 T_0 : Temperatura inicial en la lámina de corriente
 T'_0 : Temperatura de estancamiento del flujo
 UAP : Unidad Acondicionadora de Potencia
 \vec{v} : Velocidad de una partícula o lámina de plasma
 v_e : Velocidad de salida de los gases
 \vec{v}_E : Velocidad de deriva de una partícula
 V_0 : Tensión inicial del banco de capacitores
 V_c : Voltaje en el capacitor
 V_{crit} : Velocidad crítica de Alfvén
 V_{dec} : Velocidad de la masa ablacionada posterior a la descarga

V_{mean} : Velocidad media de salida de los gases
 VD : Variable de Diseño
 w : Ancho de la cámara de aceleración paralela del propulsor
 w_L : Frecuencia angular de ciclotrón
 x_s : Coordenada espacial de la lámina de plasma
 z_s : Coordenada espacial de la lámina de plasma

Letras Griegas

β : Parámetro del plasma
 γ : Relación de calores específicos
 δ : Espesor de la lámina de plasma
 η : Rendimiento propulsivo
 λ : Tamaño de la descendencia
 $\lambda_{ppt}(t)$: Flujo magnético total enlazado por el circuito que representa a un PPT
 μ_0 : Permeabilidad del vacío
 ρ_0 : densidad inicial del plasma
 σ : Constante de Stefan-Boltzmann
 σ_p : Conductividad del plasma
 τ : Tiempo que se considera dura la descarga de corriente eléctrica
 ϵ : Emisividad del plasma
 ψ : Flujo de masa
 Γ_i : Energía por unidad de masa necesaria para ionizar el flujo
 ϵ_i : Energía de ionización de la especie i

Superíndices

$\dot{()}$: Variable derivada una vez respecto del tiempo
 $\ddot{()}$: Variable derivada dos veces respecto del tiempo
 $()^*$: Valor crítico o magnetosónico de la variable
 $\hat{()}$: versor

Capítulo 1

Introducción

Los propulsores de plasma pulsantes ablativos o APPTs por sus siglas en ingles, son dispositivos capaces de ionizar y acelerar el propelente para producir empuje. Este último se produce por medio de efectos electromagnéticos (Fuerza de Lorentz) y gasdinámicos, aunque estos últimos son menos significativos. Los APPTs son utilizados para realizar correcciones de órbita y controles de actitud en pequeños satélites debido a su capacidad de producir un reducido bit impulso (I_{bit}) y relativamente elevado impulso específico (I_{sp}). El uso de Teflon® en estado sólido como propelente da el beneficio adicional de un diseño compacto y seguridad en la operación debido a que no requiere sistemas de empaquetamiento de combustible [1]. Además, poseen bajos requerimientos de potencia [2, 3]. Sin embargo, poseen una baja eficiencia que generalmente se encuentra entre un 2 a 12 [%], aunque teóricamente podrían alcanzar el 44 y 60 [%] con electrodos de geometría paralela y coaxial respectivamente [4].

1.1. Breve reseña histórica

La sonda espacial denominada “Zond 2” lanzada el 30 de noviembre de 1964 por la entonces llamada Unión Soviética con destino al planeta Marte, fue la primera aplicación concreta de la propulsión eléctrica en el área espacial [4]. En este caso el objetivo de los propulsores de plasma pulsantes (PPTs por sus siglas en inglés) fue el de proveer un control completo de la actitud de la sonda lo cual pudo lograrse durante algunos meses hasta que se perdió contacto la misma.

Posteriormente, los Estados Unidos de Norteamérica en 1968 lanzaron abordo del satélite denominado LES-6 cuatro PPTs con el objetivo de llevar a cabo el control de actitud del mismo, los cuales estuvieron en operación durante 5 años y desarrollaron un total de $6,8 \times 10^7$ pulsos con impulsos unitarios de hasta 26.8 [μ Ns] [5, 2]. En 1973, dos PPT ablativos fueron calificados para vuelo, uno para el satélite LES 8/9 y el restante para el SMS (Synchronous Metereological Satellite), pero no llegaron a ser puesto en órbita.

Luego, y como parte de un programa de navegación satelital de la marina de los Estados Unidos de Norteamérica, en el año 1976, 1977, 1981, 1988 y 1984 se lanzaron los satélites experimentales TIP II, TIP III, NOVA I, NOVA II y NOVA III respectivamente [6], en los cuales se utilizaron PPTs para corregir su posición orbital.

Posteriormente, a principios de la década del '80 Japón con los satélites L-4SC y ETS-IV, y China con el MDT-2A también ponen en órbita exitosamente módulos de PPTs sobre sus satélites [5]. Sin embargo, durante esta década el desarrollo e investigación de los PPTs mermaron en intensidad ya que el foco estaba posado en producir altos niveles de empuje para grandes satélites.

Denominación del Satélite	Año	País
Zond 2	1964	URSS
LES-6	1968	EEUU
L-4SC-3	1974	Japón
TIP-II	1975	EEUU
TIP-III	1976	EEUU
MDT-2A	1981	China
ETS-4 (Kiku 3)	1981	Japón
Nova-I	1981	EEUU
Nova-III	1984	EEUU
Nova-II	1988	EEUU
EO-1	2000	EEUU
MightySat II.I	2000	EEUU
FalconSat-3	2007	EEUU
STSAT-2A	2009	Sur Corea
STSAT-2B	2010	Sur Corea
PROITERES	2012	Japón
CUSat	2013	EEUU
STRaND-1	2013	UK
Wren	2013	Alemania
MKA-FKI PN2 (Vernov)	2014	Rusia
AOBA-VELOX III	2016	Japón
PEGASUS	2017	Austria

Tabla 1.2: Utilización de PPTs en misiones espaciales.

Fue a partir de la década del '90 cuando comenzaron a resurgir nuevamente las investigaciones respecto a los PPT debido a la nueva tendencia en la industria aeroespacial de concebir pequeños satélites de bajo peso y costo, que su vez sean sencillos y robustos. Estas características hicieron otra vez atractivos a los PPTs para las distintas misiones espaciales actuales [2], lo cual puede verificarse en la Tabla 1.2 donde se resume cronológicamente los satélites o misiones espaciales en las cuales han sido utilizados este tipo de propulsores para controles de actitud o correcciones de orbitas [7]. Se destaca que en todos los casos el propelente en estado sólido utilizado ha sido el Teflón®.

Se hace notar que en la Argentina, más específicamente en el Centro de Investigaciones Aplicadas de la Fuerza Aérea ubicado en la ciudad de Córdoba capital, se comenzó a estudiar, construir y ensayar un PPT ablativo de Teflón® a fines de la década del '90 [8, 9], lo cual sigue siendo una línea de trabajo activa en la actualidad en dicha institución.

1.2. Conceptos generales de la propulsión espacial

El objetivo de la propulsión espacial es modificar la cantidad de movimiento o posición de un determinado vehículo en el espacio, siendo ello posible gracias a la tercera ley o principio de Newton en la cual a cada acción le corresponde una reacción igual pero en sentido contrario. Se denomina empuje a la fuerza igual y opuesta que aparece en la estructura producto de estar expeliendo masa en una determinada dirección.

Despreciando la acción de la gravedad y la viscosidad del medio circundante, la ecuación de movimiento de una dada nave espacial o satélite se puede obtener a partir de plantear la conservación del momento total del vehículo en cuestión y de la masa expelida, lo cual generará un empuje T , a saber:

$$T = m_v \frac{dv}{dt} = \frac{dm_v}{dt} v_e \quad (1.2.1)$$

Donde m_v es la masa del vehículo, $\frac{dv}{dt}$ es su aceleración, $\frac{dm_v}{dt}$ es la tasa de cambio de la masa del vehículo producto de la eyección de masa, y v_e es la velocidad de salida de los gases de la nave.

Se denomina impulso específico I_{sp} a la cantidad de impulso que se puede obtener por unidad de peso expelido (fuerza gravitatoria sobre una masa dada a nivel del mar en nuestro planeta), y se mide en segundos, es decir:

$$I_{sp} = \frac{T}{\frac{dm_v}{dt} g} = \frac{v_e}{g} \quad (1.2.2)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad. Es una cantidad de suma importancia para evaluar la performance de un determinado sistema de propulsión y es proporcional a la velocidad v_e de salida de los gases.

Por otro lado, se define el bit de impulso como la integral en el tiempo de la fuerza propulsiva T . Durante un tiempo t' , el bit de impulso que produce una fuerza $T(t)$ vale:

$$I_{bit} = \int_0^{t'} T(t)dt \tag{1.2.3}$$

Por último, la ecuación que nos relaciona la variación neta de velocidad Δv que podemos obtener, con la velocidad de salida de los gases v_e y con la masa inicial m_i y final m_f del vehículo espacial, es la conocida ecuación del cohete de Tsiolkovsky, la cual, despreciando las fuerzas externas que podrían haber queda en su forma ideal como:

$$\Delta v = v_e \ln \frac{m_i}{m_f} \tag{1.2.4}$$

La cual nos dice que a mayor impulso específico o velocidad de los gases expelidos para una masa final especificada o deseada, menor será la masa inicial de propelente necesaria para cumplir con el Δv requerido, lo cual es algo que generalmente se busca ya que reduce los costos del vehículo y su lanzamiento, baja el peso, etc. El valor característico de v_e depende del tipo de tecnología con el que se este trabajando. En la Tabla 1.3 siguiente se muestran valores característicos del impulso específico, lo cual como se ha visto solo difiere de la velocidad de salida de los gases en una contante, y de empuje de las tecnologías mas comunes empleadas [10].

Tecnología		I_{sp} [s]	T [N]
Química	Líquida	140-460	0.1-12x10 ⁶
	Sólida	260-300	
	Híbrida	290-350	
Nuclear	Núcleo Sólido	800-1100	hasta 12x10 ⁶
	Núcleo Líquido	3000	
	Núcleo Gaseoso	6000	
Eléctrica	Electrotérmico	500-1000	1x10 ⁻⁴ -20
	Electromagnético	1000-7000	
	Electrostático	2000-10000	

Tabla 1.3: Performances según la tecnología empleada.

Como se ve de la tabla anterior y según [11], dentro de la propulsión espacial eléctrica existen variados diseños de dispositivos reportados hasta la fecha los cuales pueden agruparse en los siguientes tres tipos fundamentales:

- **Electrotérmico:** Donde el propelente se expande termodinámicamente mediante calentamiento eléctrico y luego se acelera a velocidades supersónicas a través de una tobera (en forma similar a lo que ocurre en un cohete químico). Los “resistojets” son los propulsores más simples dentro de esta categoría.

- Electrostático: Donde la aceleración se logra mediante la interacción de campos electrostáticos sobre partículas cargadas tales como iones atómicos, pequeñas gotas o coloides.
- Electromagnético: Donde la aceleración se obtiene por medio de la interacción de campos magnéticos en un plasma. Los plasmas son de densidad moderada, eléctricamente neutros y razonablemente buenos conductores de corriente eléctrica.

Dentro de la última categoría se encuentran los propulsores de plasma pulsantes ablativos o PPPA.

1.3. Clasificación de los PPTs

Como se ha visto en la sección anterior, los PPTs pertenecen a los propulsores eléctricos y dentro de ellos, a los electromecánicos. Además, se puede diferenciar a los PPTs de acuerdo a la geometría de la cámara de aceleración y a la manera en la que se dispone el propelente dentro de la misma.

1.3.1. De acuerdo a la geometría de electrodos

Según la geometría de electrodos se distinguen dos tipos principales, a saber:

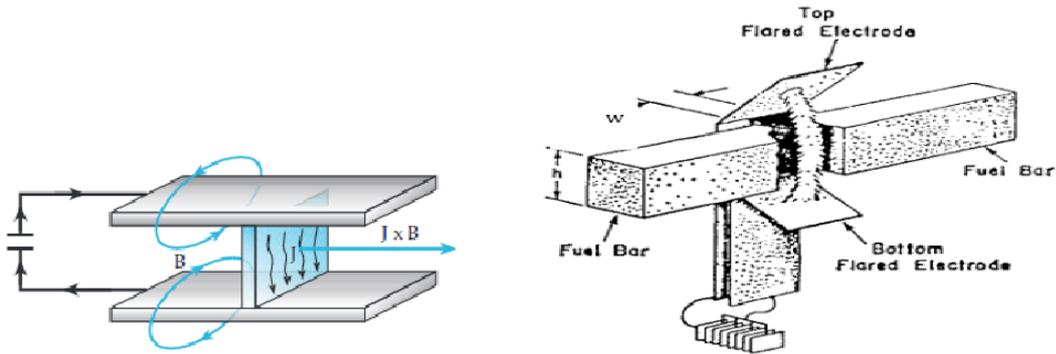
- Geometría de Electrodos Paralela
- Geometría de Electrodos Coaxial
- Otras Geometrías

A continuación se explicarán en mas detalle cada una de ellas.

1.3.1.1. Geometría de electrodos paralela

Se trata de la configuración mas simple que se puede concebir la cual queda definida por su altura h , su ancho w y su longitud l , parámetros que a su vez determinan el valor de inductancia de los electrodos. En la Figura 1.1a extraída de [12] se puede ver una configuración típica de este tipo. También pueden encontrarse electrodos paralelos pero que aumentan su separación relativa entre ellos a medida que se recorre la cámara de aceleración, como se muestra en la Figura 1.1b tomada de [13].

Una de las desventajas de este tipo de configuración es la existencia de filos o puntas en las extremidades de los electrodos que pueden provocar distorsiones importantes en el campo de inducción magnético, lo cual tiene un efecto negativo en la producción de empuje.

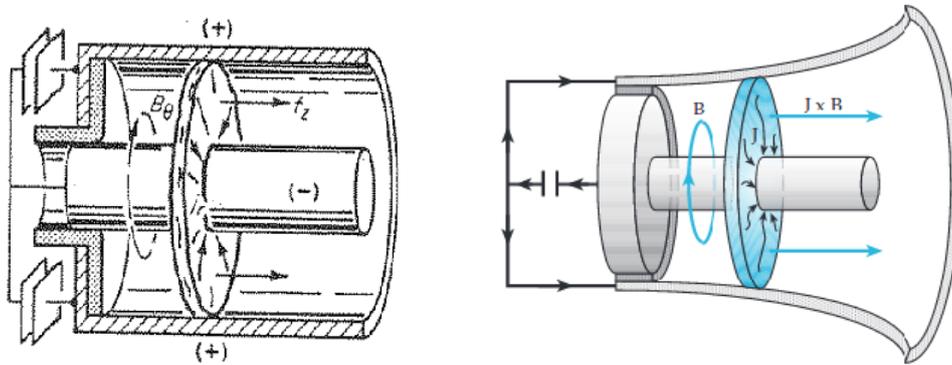


(a) Geometría de electrodos paralela de un PPT. (b) Geometría de electrodos paralela y divergente de un PPT.

Figura 1.1: Tipos de geometría de electrodos paralelos utilizados en los PPTs.

1.3.1.2. Geometría de electrodos coaxial

En este caso, el propulsor tiene una simetría radial lo cual es siempre conveniente desde el punto de vista de la modelación, tanto analítica como numérica. En la Figura 1.2a tomada de [14] se muestra una configuración típica de esta clase, mientras que en la Figura 1.2b extraída de [12] se puede ver un propulsor de geometría de electrodos coaxial, los cuales presentan un ángulo de divergencia.



(a) Geometría de electrodos coaxial de un PPT. (b) Geometría de electrodos coaxial divergente de un PPT.

Figura 1.2: Tipos de geometría de electrodos coaxiales utilizados en los PPTs.

Una vez que se inicia la descarga en este tipo de propulsores, la lámina de corriente tiene una forma anular mientras que el campo de inducción magnética presenta una forma toroidal que rodea al electrodo central como se ve en las figuras anteriores. Debido a que esta geometría es mas suave en relación a ángulos o lados rectos, la distorsión del

campo magnético se puede evitar casi en su mayor medida. Sin embargo, tienen como inconveniente que la densidad de corriente durante la descarga no es uniforme y varía con $1/r$, siendo r la posición radial dentro del motor. En consecuencia, el campo magnético presenta una variación similar y por lo tanto la Fuerza de Lorentz será proporcional a $1/r^2$, lo cual puede ser la razón de porque esta configuración presenta una mayor tendencia a observarse en los ensayos experimentales divergencia de la pluma en la descarga e inestabilidades en la lámina de corriente como la denominada *sheet canting* o lámina inclinada [14].

Otro de los aspectos importantes a tener presentes en este tipo de geometría, es el hecho de lograr que la descarga de corriente sea lo más uniforme posible, para lo cual suelen utilizarse en algunos casos múltiples bujías de ignición que operan simultáneamente [15].

1.3.1.3. Otras geometrías

Aquí se pueden nombrar las geometrías denominadas Lineal o Z-Pinch e Inverse Pinch, las cuales presentan simetría radial y tratan de subsanar algunos de los inconvenientes nombradas anteriormente, aunque no son de las más populares.

En este trabajo se van a implementar geometrías de electrodos paralela o coaxial según corresponda.

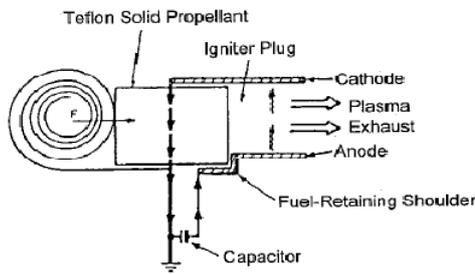
1.3.2. De acuerdo al tipo de alimentación del propelente

En los PPTs ablativos, es decir, aquellos en los que el propelente se encuentra en estado sólido, se pueden distinguir dos tipos de alimentación, a saber:

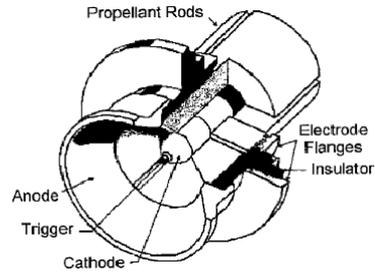
- ***Alimentación Longitudinal (o Breech-Fed)***: en la cual el propelente se dispone en una única barra en la dirección en la que el propulsor produce empuje.
- ***Alimentación Lateral (o Side-Fed)***: En la cual pueden haber dos o más barras de propelente, las cuales se disponen perpendicularmente a la dirección en la que se produce el empuje.

En las Figura 1.3 se observan las disposiciones típicas citadas anteriormente y el tipo de alimentación adoptado en cada propulsor (tomadas de [2, 13]).

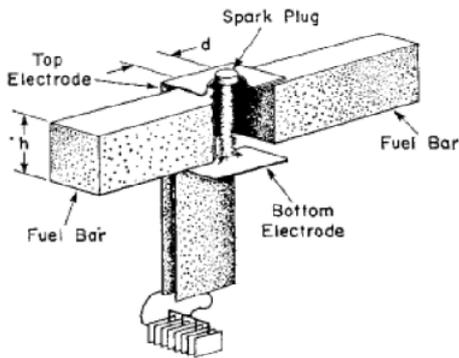
Los modelos utilizados en este trabajo podrán simular PPTs que posean una alimentación del tipo Breech-Fed o Side-Fed y cuya geometría de electrodos pueda ser paralela o coaxial como se ha visto antes.



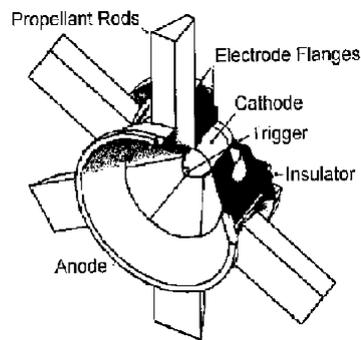
(a) PPT de electrodos paralelos y alimentación longitudinal o breech-fed.



(b) PPT de electrodos coaxiales y alimentación longitudinal o breech-fed.



(c) PPT de electrodos paralelos y alimentación lateral o side-fed.



(d) PPT de electrodos coaxial y alimentación lateral o side-fed.

Figura 1.3: Tipos de alimentación posibles en los PPTs ablativos.

1.4. Funcionamiento de un APPT

De forma simplificada, podemos representar esquemáticamente a los APPT mediante el diagrama que se muestra en la Figura 1.4. En dicha figura se destacan los elementos que caracterizan a motores de este tipo como la unidad acondicionadora de potencia (UAP), el banco de capacitores, la bujía de ignición, la barra de Teflón® comprimida por un resorte y los electrodos que conforman la cámara de aceleración del propulsor.

Inicialmente, la UAP es la encargada de cargar el capacitor el cual a su vez impone una tensión dada entre los electrodos. Luego se utiliza una o varias bujías de ignición para iniciar la descarga de corriente o arco eléctrico entre el ánodo y el cátodo en cercanías de la superficie del propelente, comenzando a liberar la energía previamente almacenada en el banco de capacitores. La elevada temperatura en la cámara producto de la descarga de corriente es suficiente para ablacionar una pequeña capa de la superficie de Teflón® e ionizar parcialmente el gas resultante, el cual será acelerado hacia el exterior por medio de la Fuerza de Lorentz. Por otro lado, el gas que no ha sido ionizado o materia neutra también es expulsado hacia el exterior de la cámara por medio de efectos gasdinámicos. Este proceso se repite dándole la característica pulsante a este tipo de motores.

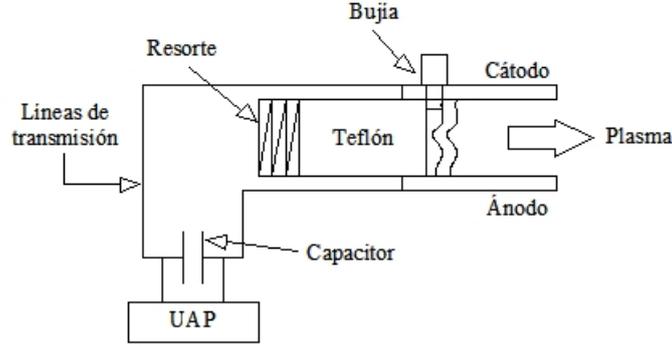


Figura 1.4: Esquema de un APPT de geometría de electrodos paralela y alimentación longitudinal.

A continuación se explicará con mas detalle el proceso por el cual la lámina de plasma es expulsada hacia el exterior de la cámara de aceleración.

1.4.1. Propagación de la lámina de plasma

Para poder explicar porque la lámina de plasma es acelerada hasta ser expulsada de la cámara de aceleración, se debe estudiar el movimiento de partículas cargadas inmersas en medios donde el campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} son no nulos.

La ecuación de movimiento de una partícula cargada individual sometida solo a fuerzas de origen electromagnético es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (1.4.1)$$

Siendo m , q y \vec{v} la masa, la carga eléctrica y la velocidad de la partícula. El término de fuerza $q(\vec{v} \times \vec{B})$ se lo denomina Fuerza de Lorentz.

Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético uniforme

Este es el caso mas simple donde se considera constante y uniforme en el espacio al campo magnético \vec{B} y se cumple que $\vec{E} = 0$. Asumiendo que \vec{B} tiene solo componentes en el eje z, es decir $\vec{B} = B \hat{z}$, proyectando la Ecuación 1.4.1 en dirección paralela a \vec{B} nos queda:

$$m \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (1.4.2)$$

Lo cual indica que $\vec{v}_{\parallel} = \text{constante}$. Luego, si nuevamente proyectamos la ecuación 1.4.1 en la dirección de \vec{v} , como el vector resultante del producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano que conforman dichos vectores, resulta:

$$\vec{v} \cdot \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = 0 \quad (1.4.3)$$

La cual, teniendo presente las reglas de derivación, resulta $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = 0$, lo cual implica que :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{constante} \quad (1.4.4)$$

Esto significa que el módulo de la velocidad debe ser constante, es decir, $v = \text{constante}$ y que la energía cinética de la partícula cuya masa es m no cambia con el tiempo. El hecho de que la Fuerza de Lorentz no modifique la energía cinética de la partícula en cuestión se debe a que actúa en un plano perpendicular a su movimiento y por lo tanto no puede realizar trabajo sobre la misma [16].

Como \vec{v}_{\parallel} es constante, para que se cumpla que el módulo de la velocidad sea constante, necesariamente la componente perpendicular a \vec{B} de la velocidad \vec{v}_{\perp} también debe ser constante, lo cual sugiere el tipo de orbita que puede esperarse. El resultado, de acuerdo con [16], es el movimiento en órbitas circulares de radio r_L alrededor del campo \vec{B} cuya frecuencia es w_L , a saber:

$$r_L = \frac{v_{\perp} m}{|q| B} \quad (1.4.5)$$

$$w_L = \frac{qB}{m} \quad (1.4.6)$$

Donde se llama r_L al radio de Larmor y w_L a la frecuencia angular de ciclotrón. Como se ve, ambas variables dependen de la masa y carga eléctrica de la partícula. En este sentido, la frecuencia angular de ciclotrón de electrones y protones serán opuestas y distintas en magnitud.

En la Figura 1.5 extraída de [16] se muestra esquemáticamente las conclusiones expuestas mas arriba:

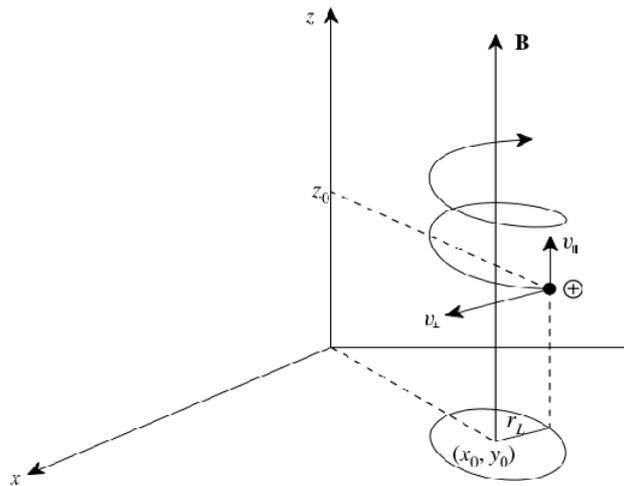


Figura 1.5: Movimiento de un ion positivo en un campo \vec{B} uniforme, con $\vec{v}_{\parallel} \neq 0$.

La posición en función del tiempo del centro de giro o centro guía vendrá dada por:

$$z(t) = v_{\parallel}t + z_0 \quad (1.4.7)$$

Donde z_0 es la posición inicial del centro de giro.

Movimiento de partículas cargadas con campo magnético y eléctrico uniforme

Cuando una partícula se encuentra sometida a la acción conjunta de un campo magnético y eléctrico uniformes, se genera un movimiento de deriva del centro guía. Considerando que $\vec{B} = B\hat{z}$ y que $\vec{E} = E\hat{y}$, de acuerdo con [17], dicha velocidad vale:

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (1.4.8)$$

Como se puede ver, la expresión anterior es independiente de la velocidad inicial, masa y polaridad de la partícula, lo cual indica que electrones y protones poseerán la misma velocidad de deriva. En la Figura 1.6 tomada de [17] se esquematiza este caso:

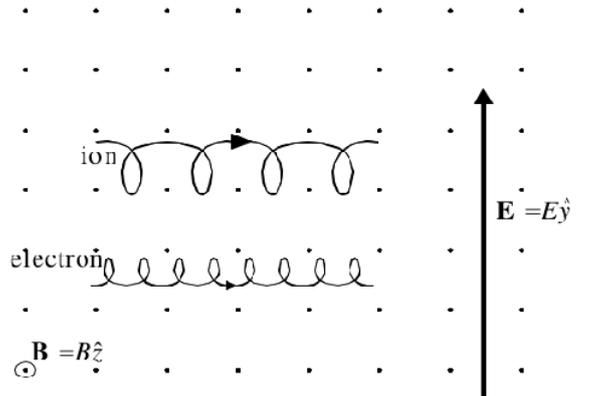


Figura 1.6: Deriva de partículas en medios con \vec{B} y \vec{E} uniformes.

De la figura anterior, se observa que tanto electrones como iones positivos tienen la misma velocidad de deriva del centro guía pero frecuencias angulares de ciclotrón distintas y opuestas.

De lo expuesto anteriormente en esta sección se ve que la Fuerza de Lorentz es la que provoca el movimiento en órbitas circulares alrededor del campo magnético mientras que el campo eléctrico y el magnético son los responsables de expulsar el plasma hacia la sección de salida de la cámara de aceleración del propulsor.

Si bien la Ecuación 1.4.8 es válida cuando se cumple que \vec{B} y \vec{E} son uniformes y son normales unos con respecto al otro, en el caso real los valores de \vec{B} y \vec{E} no son uniformes y por lo tanto producen aceleraciones de la lámina de plasma.

1.5. Objetivos

Teniendo en cuenta el interés actual en la utilización de los PPTs en pequeños satélites integrantes de una misión satelital en particular, a continuación se listan los objetivos generales y particulares de este trabajo:

1.5.1. Objetivos generales

Los objetivos generales de este trabajo son:

- Implementar y analizar modelos electromecánicos disponibles en la bibliografía especializada.
- Proponer mejoras a los mismos.
- Aplicar estos modelos a un gran número de PPTs ampliando de esta manera la base de datos sobre los que se los aplica.
- Evaluar la sensibilidad de estos modelos a ciertas variables de interés.
- Implementar algoritmos genéticos en vistas de optimizar el funcionamiento de los PPTs.

1.5.2. Objetivos particulares

Los objetivos particulares que se persiguen son:

- Implementar como variables temporales en modelos electromecánicos a la temperatura y densidad de partículas de electrones del plasma, de manera que la resistencia del mismo quede dependiente del tiempo.
- Validar el modelo con nueve PPTs disponibles en la bibliografía específica, donde haya propulsores de geometría de cámara de aceleración paralela o coaxial, y cuya alimentación pueda ser lateral o side-fed y longitudinal o breech-fed.
- Llevar a cabo un análisis de sensibilidad de variables eléctricas y geométricas de los PPTs en relación a la masa ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo. En este estudio se identificarán a las variables mas sensibles del modelo y se evaluará su impacto en las performances estudiadas.
- Implementar algoritmos genéticos mediante los cuales se puedan llevar a cabo optimización de una o varias funciones objetivos, discriminando entre optimización de variables exclusivamente geométricas, eléctricas o ambas.
- Evaluar y llevar a cabo la optimización de un PPT en relación al rendimiento propulsivo. Interpretar los resultados y elaborar conclusiones.

- Evaluar y llevar a cabo la optimización de un PPT respecto al bit de impulso y la masa total ablacionada. Obtener el frente de Pareto el cual contiene un conjunto de soluciones óptimas. Interpretar los resultados y sacar conclusiones.
- Identificar las variables mas relevantes que dependiendo de la función que se quiera optimizar, lleven a un diseño óptimo.

Capítulo 2

Modelos Analíticos Inestacionarios de PPTs

Los modelos analíticos inestacionarios aplicables a los PPT surgieron como una herramienta relativamente sencilla y rápida para estimar las performances de este tipo de motores y realizar análisis de sensibilidad y optimización respecto a alguna variable de interés, ya sea geométrica o eléctrica.

Dentro de estos modelos podemos encontrar:

- Modelos cinéticos: En los cuales se determina la tasa de masa ablacionada sobre la superficie del Teflón® calculando para ello la distribución de temperatura dentro del propelente y su interacción con el plasma en sus inmediaciones [18, 19].
- Modelos electromecánicos simples: Aquí se modela al motor como un circuito eléctrico RLC del cual al aplicar la segunda ley de Kirchhoff surge una ecuación circuital que se acopla a la ecuación de movimiento de la lámina de plasma [14, 20].
- Modelos MHD 2D o 3D: En estos modelos se simula numéricamente las ecuaciones de la MHD ideal o real en 2D o 3D, en conjunto con una ecuación circuital que representa al motor [21, 22].
- Otros: Modelos que utilizan las ecuaciones de la MHD en conjunto con modelos cinéticos [23], modelos mas complejos como los denominados PIC (Particle in Cell en inglés) o modelos de células de partículas [24], entre otros.

En este trabajo se utilizará un modelo electromecánico que se basa en el desarrollo dado en la referencia [25], que ha sido mejorado posteriormente en [26] y sobre el cual se propondrán y agregarán nuevas variables de manera de obtener mayor información y mejores estimaciones a partir del mismo.

2.1. Modelos electromecánicos simples

Dentro de los modelos inestacionarios electromecánicos se distinguen, dependiendo del estado inicial del propelente (sólido o gaseoso) y de su distribución dentro de la cámara de aceleración, dos tipos o modos de operación [14]:

- Modo de lámina (ó slug models en inglés): Donde se considera que la masa de la lámina de plasma generada producto de la descarga de corriente no cambia su valor en el tiempo y se desplaza en una cámara de aceleración que se encuentra inicialmente vacía, es decir, sin masa previa.
- Modo de barrido (ó snowplow models en inglés): En este caso se considera que un frente de plasma va avanzando e ionizando el gas presente en la cámara de aceleración de manera que la masa de plasma es variable en el tiempo.

Independientemente del modo de operación, en este tipo de modelos se representa al motor mediante un circuito eléctrico RLC de parámetros variables como se muestra en la Figura 2.1.

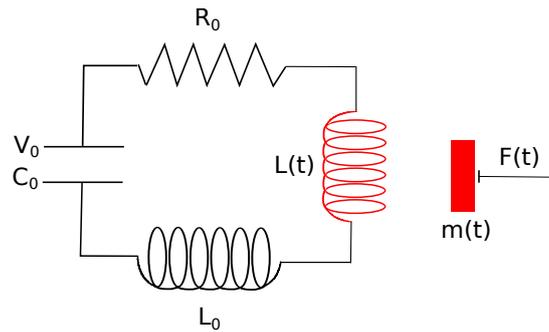


Figura 2.1: Esquema circuitual de un PPT.

A continuación se explicarán brevemente los dos modos de operación considerando que sobre la cámara de aceleración no hay campo magnético externo aplicado.

2.1.1. Modo de barrido

En el modo de barrido, como se muestra en la Figura 2.2 para un motor de geometría de cámara paralela, luego de cargarse el capacitor a su voltaje de trabajo V_0 y previo a la descarga, se inyecta rápidamente el propelente gaseoso por medio de una válvula de llenado de la cámara. Una vez iniciada la descarga principal mediante una bujía de ignición, la interacción entre el campo eléctrico entre los electrodos y el campo magnético generado por la misma descarga de corriente provoca la aceleración de la lámina de plasma hacia la salida de la cámara o tobera, comprimiendo el gas que había previo a la descarga. El trabajo de compresión realizado sobre el propelente eleva su temperatura hasta el punto en que es convertido en plasma, incrementado el espesor inicial de la lámina de corriente que se ha ido desplazando hacia la salida.

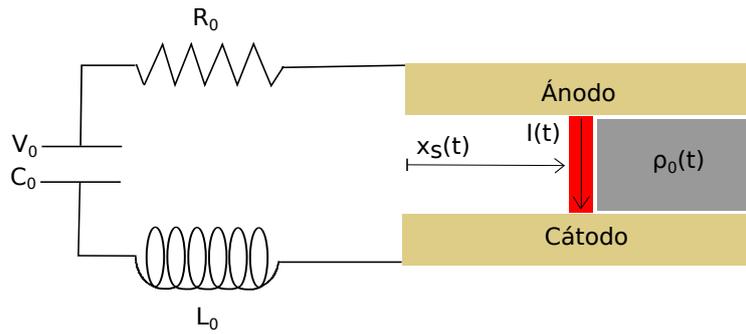


Figura 2.2: PPT de electrodos paralelos en modo de barrido.

2.1.2. Modo de lámina

En la Figura 2.3 se esquematiza el modo de operación de lámina para un motor de geometría de cámara paralela. Como se observa, en este caso el propelente se dispone en forma de barra sólida ubicada al comienzo de la cámara de aceleración. Al iniciarse la descarga principal, una parte de la superficie del propelente sólido es ablacionada y convertida en plasma. Luego, al igual que en el modo de barrido, la lámina de corriente o plasma es acelerada hacia la salida como consecuencia de la interacción entre el campo eléctrico entre los electrodos y el campo magnético generado por la circulación de corriente sobre el circuito, sin embargo, como no había previamente propelente en la cámara de aceleración, la masa de la lámina se considera constante en el tiempo como primera aproximación.

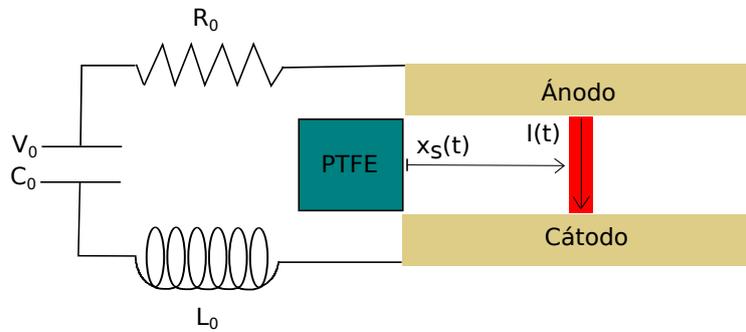


Figura 2.3: PPT de electrodos paralelos en modo de lámina.

Como se verá a continuación, se destaca que a pesar de poseer características físicamente distintas, la formulación matemática base del modelo electromecánico en modo de operación de barrido ó de lámina son las mismas.

2.1.3. Formulación matemática general del modelo electromecánico simple

Los primeros trabajos encontrados sobre este tema son los expuestos en [27, 28, 29] durante la década del sesenta. En lo que sigue se plantearán las ecuaciones básicas que

caracterizan a este tipo de modelos en el caso general, siguiendo [20].

Analizando la Figura 2.1 anterior y aplicando la segunda ley de Kirchhoff, la tensión en los bornes del capacitor de descarga vale:

$$V(t) = R_0 I(t) + L_0 \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} I(t) \quad (2.1.1)$$

Por otro lado, aplicando la segunda ley de Newton a la lámina de plasma obtenemos:

$$\frac{d}{dt} [m(t)\vec{v}(t)] = \vec{F}_L(t) \quad (2.1.2)$$

Donde $\vec{v}(t)$ es la velocidad instantánea de la lámina de corriente y $\vec{F}_L(t)$ es la Fuerza de Lorentz sobre la misma (se considera que es la única fuerza actuante). Como dicha fuerza es función de la corriente, las ecuaciones 2.1.1 y 2.1.2 quedan acopladas.

En el caso que el área transversal A de la cámara de aceleración sea constante en toda su longitud, podemos expresar a la masa total de plasma en forma general como:

$$m(t) = m_0 + \rho_0 x_s(t) A \quad (2.1.3)$$

Siendo m_0 la masa inicial de la lamina de plasma, ρ_0 la densidad inicial del gas en la cámara de aceleración previo a la descarga, y $x_s(t)$ la coordenada espacial que indica la posición de la lámina de plasma en la cámara de aceleración. Como vemos de la Ecuación 2.1.3, si queremos representar un modo de operación puramente de barrido debemos imponer que $m_0 = 0$ y $\rho_0 \neq 0$, mientras que en un modo de lámina puro, $m_0 \neq 0$ y $\rho_0 = 0$. De esta manera, el sistema de ecuaciones resultante del modelo electromecánico simple resulta:

$$\begin{cases} U(t) = R_0 I(t) + L_0 \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} I(t) \\ \frac{d}{dt} [m(t)\vec{v}(t)] = \vec{F}_L(t) \\ m(t) = m_0 + \rho_0 x_s(t) A \end{cases} \quad (2.1.4)$$

De lo anterior surge, como se había adelantado, que no hay diferencias en el planteo formal al considerar distintos modos de operación puros.

Como se desprende del planteo realizado anteriormente, en el modelo electromecánico clásico u original se realizan las siguientes suposiciones:

- Se debe asumir un valor de la masa de la lámina de plasma en el modo de operación de lámina y un valor de densidad inicial en el modo de barrido.
- Se asume constante la masa de la lámina de plasma en el modo de operación de lámina y se considera un valor inicial nulo en el modo de operación de barrido.
- Se considera contante la resistencia asociada al plasma, es decir, no se considera su variación con respecto al tiempo.

- Se sume un valor inicial de temperatura y densidad de partículas de plasma, las cuales se consideran invariantes en el tiempo durante la descarga.
- El modelo aporta los valores del bit de impulso, impulso específico y rendimiento propulsivo, no así los valores de densidad y temperatura del plasma.

Debido a las consideraciones anteriores es que se han propuesto e implementado mejoras a los modelos electromecánicos simples con el fin de simular condiciones de operación mas realistas y que por otro lado, brinden mayor información en relación al propulsor analizado.

2.2. Modelos electromecánicos mejorados

Debido a las limitaciones del modelo electromecánico simple y a la necesidad de obtener mayor información de los modelos simplificados, es que diversos investigadores han propuesto mejoras al mismo. En los trabajos presentados en [25, 30], por ejemplo, se obtienen expresiones analíticas del campo de inducción magnética dentro de la cámara de aceleración, la inductancia de los electrodos, la resistencia del plasma en función de la temperatura y densidad de partículas de electrones, y se obtiene la fuerza electromagnética que acelera a la lámina de plasma de manera mas general. Sin embargo, no se considera el aporte de la Fuerza Gasdinámica en el proceso de aceleración de la lámina de corriente y, además, si bien se considera que la masa de la lámina de corriente será función del tiempo, se debe imponer un valor inicial que a priori se desconoce.

Recientemente en [26] se ha presentado una variación al modelo propuesto en [25] en el cual se obtiene el valor de la masa ablacionada en función del tiempo a partir de una ecuación algebraica. Además, se incluye la Fuerza Gasdinámica en el cálculo de bit de impulso sobre la masa ablacionada.

2.2.1. Modelo de Laperriere

Como se mencionó anteriormente, la idea básica del modelo unidimensional electromecánico es aproximar el PPT como un dispositivo electromecánico representado por un circuito eléctrico RLC acoplado con un sistema dinámico representativo de la lámina de corriente que se desplaza por la cámara de aceleración. En la Figura 2.4 se esquematiza dicho circuito:

Siendo L_c , L_{pe} y L_e la inductancia en el capacitor, los electrodos (rectilíneos o coaxiales), y los cables y conectores respectivamente. En cuanto a los términos de resistencias R_c , R_e , R_{pe} y R_p , se corresponden a la resistencia en el capacitor, los cables y conectores, los electrodos y el plasma respectivamente.

Aplicando la ley de Faraday al circuito de la Figura 2.4, se tiene:

$$V_c(t) = IR_T(t) + \frac{d}{dt} [\lambda_{PPT}(t)] \quad (2.2.1)$$

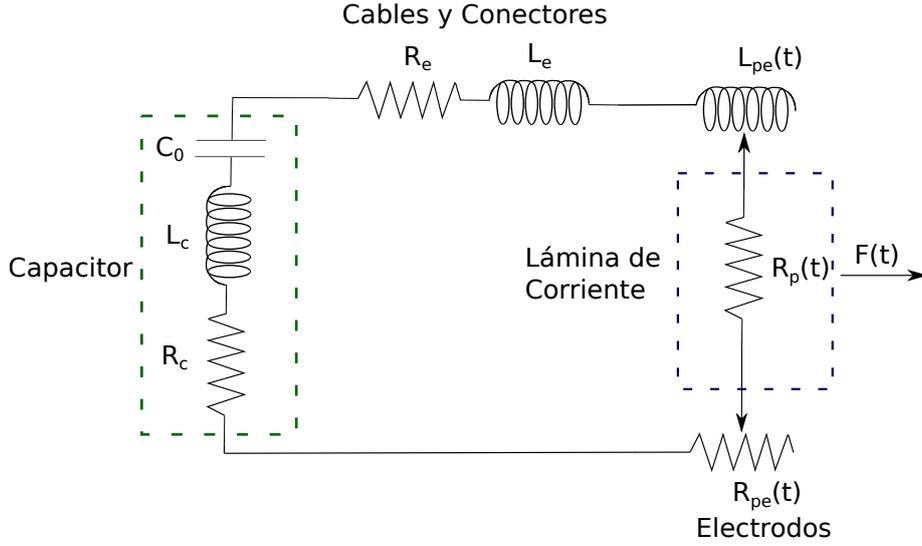


Figura 2.4: Circuito RLC del Modelo Mejorado.

Donde $R_T(t) = R_c + R_e + R_{pe} + R_p(t)$ y $\lambda_{PPT}(t)$ es el flujo magnético total enlazado por el circuito que representa al PPT. Escribiendo a $\lambda_{PPT}(t)$ en función de sus componentes de flujo magnético, se tiene:

$$\lambda_{PPT}(t) = \lambda_c(t) + \lambda_e(t) + \lambda_{pe}(t) \quad (2.2.2)$$

Siendo cada uno de los términos del lado derecho de la expresión anterior, el flujo magnético debido a la inductancia del capacitor, el flujo magnético debido a la inductancia de los cables y conectores, y el flujo magnético debido a la inductancia de los electrodos del propulsor. Recordando que el flujo magnético en una inductancia L vale:

$$\lambda_L = \frac{LI}{N} \quad (2.2.3)$$

Siendo N el número de espiras de la misma e I la corriente eléctrica. Por otro lado, según la Ley de Faraday, la caída de tensión en un inductor la podemos obtener como:

$$V_L = -N \frac{d\lambda_L}{dt} \quad (2.2.4)$$

Reemplazando la Ecuación 2.2.3 en la 2.2.4, queda:

$$V_L = -\frac{d}{dt}(LI) \quad (2.2.5)$$

Es decir, la caída de tensión existente en un inductor es igual a la variación con respecto al tiempo cambiada de signo del producto de su inductancia por la corriente que la esta atravesando.

Reescribiendo la Expresión 2.2.2 en función de las inductancias de cada elemento y teniendo en cuenta que por definición el flujo magnético que atraviesa una superficie A

se calcula como $\iint_A \vec{B}_{ind}(x, z) d\vec{A}$, siendo \vec{B}_{ind} el campo magnético presente, queda:

$$\lambda_{PPT}(t) = L_c I(t) + L_e I(t) + \iint_A \vec{B}_{ind}(x, z) d\vec{A} \quad (2.2.6)$$

Donde A es el área atravesada por las líneas de campo de \vec{B}_{ind} .

A continuación se deducirán las expresiones necesarias para poder resolver el sistema de ecuaciones acoplado que vincula las características eléctricas y dinámicas de la aceleración del plasma. Se hace notar que las expresiones que a continuación se deducirán corresponden al caso donde no haya campo magnético externo aplicado.

2.2.1.1. Geometría de cámara de aceleración paralela

Obtención del campo magnético inducido Para determinar el campo magnético inducido detrás de la lámina de corriente se harán las siguiente suposiciones:

- Se considera que el ancho w de la cámara de aceleración es cuasi-infinito, es decir, se asume que $w \gg h$, siendo h su altura o separación entre electrodos (ver Figura 2.5).
- Se asume que el circuito compuesto por los electrodos, capacitores, cables, conectores y la lámina de plasma es perfectamente conductor.
- Se considera que la lámina de corriente tiene una distribución lineal uniforme de corriente por unidad de ancho, de magnitud \vec{K} y su espesor es despreciable.
- Se asume que no existe campo magnético externo aplicado.

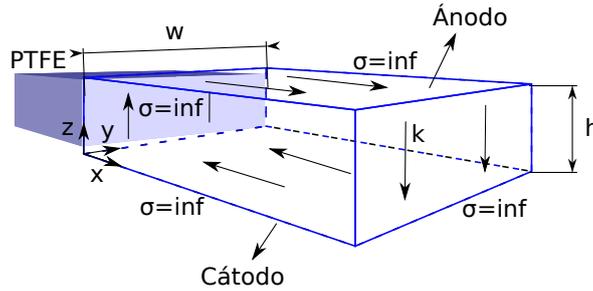


Figura 2.5: Espira perfectamente conductora.

Las suposiciones anteriores distan de la realidad debido a que la lámina de plasma tendrá un determinado espesor y conductividad finita (no será perfectamente conductora como aproximadamente se puede considerar en el caso de los electrodos y cables). Además, generalmente se cumplirá que $w > h$ pero no como para considerarla cuasi-infinita en su espesor ($w \gg h$), por lo que posiblemente aparezcan interacciones de campo magnético entre las distintas fronteras de la cámara; y por último, la distribución de corriente

en la lámina de plasma \vec{K} suele no ser uniforme en su espesor. De todas formas, las simplificaciones adoptadas anteriormente permiten obtener una expresión simple y con una buena aproximación del campo magnético inducido \vec{B}_{ind} .

De acuerdo a lo indicado en [31], las condiciones de borde que se deben cumplir para satisfacer la condición de continuidad de flujo magnético y la condición de continuidad de la Ley de Ampere en un elemento perfectamente conductor son, respectivamente:

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_{ind} = 0 \quad (2.2.7)$$

$$\vec{n} \times \frac{\vec{B}_{ind}}{\mu_0} = \vec{K} \quad (2.2.8)$$

Siendo \hat{n} un versor normal apuntando hacia el interior de la superficie en cuestión y μ_0 la permeabilidad del vacío.

De la Ecuación 2.2.7 surge que el vector \vec{B}_{ind} y el versor \hat{n} deben ser normales. Además, como por ejemplo $\vec{K} = -\frac{I}{w} \hat{z}$ en el extremo derecho de la espira (ver Figura 2.5), de la Ecuación 2.2.8 teniendo en cuenta que \vec{n} y \vec{B}_{ind} son siempre normales a lo largo de todo el elemento conductor, se obtiene que dentro de la bobina cuasi-infinita se cumple que:

$$\vec{B}_{ind}(t) = \mu_0 \frac{I(t)}{w} \hat{y} \quad (2.2.9)$$

El resultado anterior es válido para cualquier parte de la superficie de interés donde se quiera evaluar la Ecuación 2.2.8.

Por otro lado, para obtener la expresión de \vec{B}_{ind} dentro de la lámina de corriente se va a aplicar la Ley de Ampere a una superficie que corta a la hoja de corriente usando la Ecuación 2.2.9 obtenida anteriormente como condición de borde para expresar el campo magnético dentro de la bobina (ver Figura 2.6).

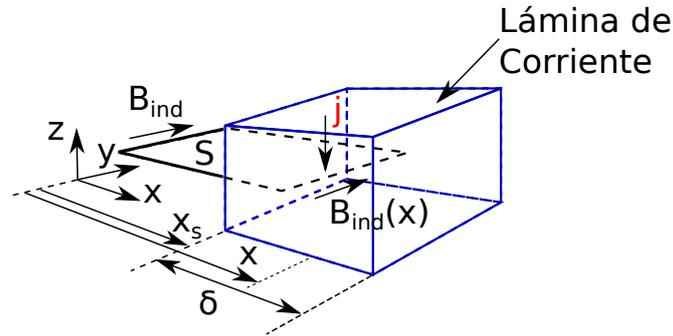


Figura 2.6: Superficie que corta a la hoja de corriente.

Si la densidad de corriente $\vec{J}(t)$ a través de la lámina es uniforme, se puede expresar como:

$$\vec{J}(t) = -\frac{I(t)}{w\delta} \hat{z} \quad (2.2.10)$$

Siendo δ el espesor de la lámina.

De esta manera, el campo magnético en el tiempo t dentro de la lámina de corriente que se encuentra a una distancia $x_s(t)$ dentro de la cámara de aceleración valdrá (ver Figura 2.3):

$$\vec{B}_{ind}(x, t) = \mu_0 \frac{I(t)}{w} \left[1 - \frac{x - x_s(t)}{\delta} \right] \hat{y} \quad (2.2.11)$$

Por último, el campo magnético por delante de la lámina de corriente se puede encontrar de manera similar y será igual a cero como surge de evaluar la ecuación anterior en $x = x_s(t) + \delta$. De esta manera, de las Ecuaciones 2.2.9 y 2.2.11, y teniendo en cuenta que \vec{B}_{ind} vale cero por delante de la lámina de corriente, se tiene:

$$\vec{B}_{ind}(x, t) = \begin{cases} \mu_0 \frac{I(t)}{w} \hat{y}, & 0 < x < x_s(t) \\ \mu_0 \frac{I(t)}{w} \left[1 - \frac{x - x_s(t)}{\delta} \right] \hat{y}, & x_s(t) < x < x_s(t) + \delta \\ 0, & x > x_s(t) + \delta \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Cálculo de la inductancia de la cámara de aceleración Si reemplazamos las expresiones de \vec{B}_{ind} obtenidas anteriormente en la Ecuación 2.2.6, obtenemos:

$$\lambda_{PPT}(t) = L_c I(t) + L_e I(t) + \int_0^{x_s(t)} \int_0^h \mu_0 \frac{I(t)}{w} dx dz + \int_{x_s(t)}^{x_s(t)+\delta} \int_0^h \mu_0 \frac{I(t)}{w} \left[1 - \frac{x - x_s(t)}{\delta} \right] dx dz \quad (2.2.13)$$

Integrando los dos últimos términos de la ecuación anterior, queda:

$$\lambda_{PPT}(t) = L_c I(t) + L_e I(t) + \left[\mu_0 \frac{h}{w} x_s(t) + \mu_0 \frac{\delta}{2} \frac{h}{w} \right] I(t) \quad (2.2.14)$$

Donde el término entre corchetes de la expresión anterior representa la inductancia inducida por los electrodos del propulsor, es decir:

$$L_{pe}(x_s(t)) = \frac{\lambda_{pe}(x_s(t))}{I(t)} = \mu_0 \frac{h}{w} x_s(t) + \mu_0 \frac{\delta}{2} \frac{h}{w} \quad (2.2.15)$$

En el caso que se considere que la lámina de corriente no tiene espesor, es decir, $\delta = 0$, queda:

$$L_{pe}(x_s(t)) = \mu_0 \frac{h}{w} x_s(t) \quad (2.2.16)$$

Siendo la expresión anterior el valor adoptado en [14] y ampliamente utilizado en trabajos posteriores.

Cálculo de la fuerza actuante sobre la lámina de corriente Para describir el movimiento de la lámina de corriente se debe aplicar la segunda Ley de Newton a la misma, es decir:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \vec{x}_s(t) \right] = \sum \vec{F}(t) \quad (2.2.17)$$

Donde $m(t)$ es la masa de la lámina, $\vec{x}_s(t)$ es su velocidad y $\sum \vec{F}(t)$ es la suma de las fuerzas actuantes sobre ella.

Considerando que la única fuerza actuante sobre la lámina de plasma es la Fuerza de Lorentz $\vec{F}_L(t)$, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \vec{x}_s(t) \right] = \vec{F}_L(t) \quad (2.2.18)$$

Donde la Fuerza de Lorentz se puede obtener como:

$$\vec{F}_L(t) = \iiint_{\text{lámina}} \vec{j} \times \vec{B} dV \quad (2.2.19)$$

Reemplazando las Ecuaciones 2.2.10 y 2.2.12 en la anterior e integrando, queda:

$$\begin{aligned} \vec{F}_L(t) &= \iiint_{\text{lámina}} -\frac{I(t)}{w\delta} \hat{z} \times \mu_0 \frac{I(t)}{w} \left[1 - \frac{x-x_s(t)}{\delta} \right] \hat{y} dx dy dz = \\ &\quad \iiint_{\text{lámina}} \mu_0 \frac{I(t)^2}{w^2\delta} \left[1 - \frac{x-x_s(t)}{\delta} \right] \hat{x} dx dy dz \\ \vec{F}_L(t) &= \mu_0 \frac{I(t)^2 h}{w\delta} \hat{x} \int_{x_s}^{x_s+\delta} \left[1 - \frac{x-x_s(t)}{\delta} \right] dx = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} I(t)^2 \hat{x} \implies \\ \vec{F}_L(t) &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} I(t)^2 \hat{x} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Obtención de la masa total ablacionada En este punto, Laperriere [25] calcula la masa de acuerdo a un modelo propuesto en [28], a saber:

$$m(t) = m_0 + m_t \left[1 - \left(1 - \frac{x_s(t)}{l} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] \quad (2.2.21)$$

Siendo α un parámetro asociado a la distribución de masa, m_0 la masa inicial de la lámina de corriente, m_t la masa adicional que entra o sale de la lámina y l el largo de la cámara de reacción.

Obtención de la masa iónica ablacionada En este modelo no se distingue entre masa iónica ablacionada y masa total. De esta forma, se asume que la masa iónica ablacionada es igual a la masa total.

Cálculo de la resistencia eléctrica del plasma Sin duda la resistencia eléctrica del plasma es una de las variables mas importantes que afectan a la mayor parte de las variables puestas en juego en un PPT. De manera simplificada se puede decir, en principio, que si la resistencia eléctrica del plasma es muy alta, la corriente disminuirá y viceversa. Además, si la corriente disminuye también disminuirá la masa ablacionada, la temperatura del plasma y por lo tanto se obtendrán valores de bit de impulso e impulso específico inferiores. Por otro lado, además, es intuitivo pensar que a mayor temperatura del plasma, mayor resistencia al paso de la corriente habrá, mientras que cuanto mayor sea la densidad de electrones en el plasma, más fácil fluirá la corriente por el mismo.

Si bien al utilizar este tipo de modelos inicialmente se consideraba constante a la resistencia eléctrica del plasma, determinándose a partir de datos experimentales o como valor que ajustara bien las curvas de tensión y de corriente obtenidas a partir de ensayos [32]; de acuerdo a lo apuntado en [33, 34] con el objetivo de mejorar las predicciones realizadas sobre los PPT, es que se comenzaron a utilizar modelos mas sofisticados y realistas para estimar dicho parámetro en la cámara de aceleración, considerando una dependencia de esta con la temperatura y la densidad de electrones en la lámina de corriente de acuerdo con [25, 30, 26].

En un caso general, se puede expresar a la resistencia eléctrica del plasma como:

$$R_p = \frac{l}{\sigma_p A} = \frac{h}{\sigma_p w \delta} \quad (2.2.22)$$

Siendo σ_p la conductividad del plasma, l la longitud de la lámina de corriente que es igual a h , y A el área transversal de la misma, a saber, $A = w \delta$, siendo w el ancho de la lámina y δ su espesor.

Considerando al plasma totalmente ionizado con grado de ionización igual a uno y de acuerdo al modelo aproximado de Spitzer-Harm, la conductividad del mismo vale según las expresiones obtenidas en [35]:

$$\sigma_p = 1,53 \times 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{\ln \Lambda} \quad [m\Omega/m] \quad (2.2.23)$$

Siendo T_e la temperatura de los electrones y $\ln \Lambda = 1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e}\right)^{1/2}$, donde n_e es la densidad de partículas de electrones.

Por otro lado, y de acuerdo con [31], debido a que la difusión del campo magnético dentro de la lámina de corriente estará gobernada por la ecuación de difusión, el espesor de la misma se puede estimar como la profundidad que se difunde el campo magnético en el medio conductor, a saber:

$$\delta = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_0 \sigma_p}} \quad (2.2.24)$$

Siendo τ igual al tiempo de descarga de corriente del propulsor considerado.

Reemplazando las Ecuaciones 2.2.23 y 2.2.24 en la Ecuación 2.2.22 queda:

$$R_p = \frac{l}{\sigma_p A} = \frac{h}{1,53 \times 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{\ln \Lambda} w} \sqrt{\frac{\mu_0 1,53 \times 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{\ln \Lambda}}{\tau}}$$

Operando se obtiene la expresión final de R_p :

$$R_p = 8,08 \frac{h}{w} \frac{1}{T_e^{3/4}} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e}\right)^{1/2}\right)}{\tau}} \quad (2.2.25)$$

Como se puede ver de la expresión anterior, la resistencia eléctrica del plasma es función de la temperatura y densidad electrónica y del tiempo de difusión magnética o tiempo de descarga de corriente considerado.

En este trabajo se implementará numéricamente la ecuación anterior sin ninguna simplificación adicional.

Resumen del sistema de ecuaciones resultante De las ecuaciones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = I(t) (R_{ext} + R_p) + \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{h}{w} x_s(t) + \mu_0 \frac{\delta}{2} \frac{h}{w} \right] \dot{I}(t) + \mu_0 \frac{h}{w} \dot{x}_s(t) I(t) \quad (2.2.26)$$

$$\frac{d}{dt} [m \dot{x}_s(t)] = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} [I(t)]^2 \quad (2.2.27)$$

$$m(t) = m_0 + m_t \left[1 - \left(1 - \frac{x_s(t)}{L} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] \quad (2.2.28)$$

$$R_p = 8,08 \frac{h}{w} \frac{1}{T_e^{3/4}} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e}\right)^{1/2}\right)}{\tau}} \quad (2.2.29)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales (CI):

$$x_s(0) = 0, \dot{x}_s(0) = 0, \int_0^{t_{rad}} I(t) dt = 0, I(0) = 0$$

2.2.1.2. Geometría de Cámara de aceleración coaxial

La ecuación circuital y dinámica de la lámina de plasma no cambia al considerar una cámara de aceleración del tipo coaxial respecto al caso de una geometría de cámara paralela, por lo cual valen las mismas ecuaciones durante el planteo básico formal. Sin embargo, sí cambiarán las expresiones del campo magnético inducido, la inductancia de

la cámara de aceleración, la fuerza actuante sobre la lámina de corriente y la resistencia del plasma. A continuación se deducirán tales expresiones siguiendo en la mayoría de los casos a [25].

Obtención del campo magnético inducido Al igual a como se realizó en el caso de geometría de cámara de aceleración paralela, se utiliza la Ley de Ampere para obtener las expresiones del campo magnético inducido \vec{B}_{ind} dentro de la cámara, dentro de la lámina y mas allá de esta.

El valor de \vec{B}_{ind} entre el propelente y la lámina de corriente se puede encontrar aplicando la Ley de Ampere a una superficie S de radio r y contorno exterior C alrededor del electrodo interior [31], como se ve en la Figura 2.7.

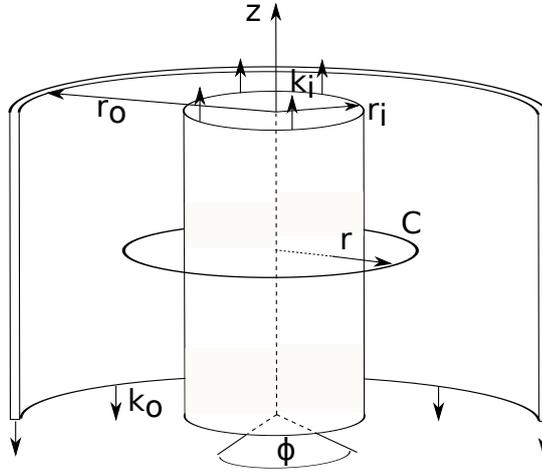


Figura 2.7: Corte de un PPT coaxial con distribución uniforme de corriente.

De esta forma, la densidad de corriente lineal \vec{K} , trabajando con un sistema de referencia cilíndrico $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$, será:

$$\vec{K} = -\frac{I}{2\pi r} \hat{r} \quad (2.2.30)$$

Luego, para cumplir la condición de continuidad de la Ley de Ampere (Ecuación 2.2.8) \vec{B}_{ind} deberá valer necesariamente:

$$\vec{B}_{ind}(t) = -\mu_0 \frac{I(t)}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (2.2.31)$$

Teniendo en cuenta que la densidad de corriente en la lámina vale:

$$\vec{j}(t) = -\frac{I}{2\pi r \delta} \hat{r} \quad (2.2.32)$$

Y procediendo de manera análoga al caso de cámara de aceleración paralela, el campo magnético inducido dentro de la lámina de corriente de espesor δ resulta:

$$\vec{B}_{ind}(t) = -\mu_0 \frac{I(t)}{2\pi r} \left(1 - \frac{z - z_s(t)}{\delta}\right) \hat{\varphi} \quad (2.2.33)$$

Siendo z la coordenada longitudinal de la cámara de aceleración y z_s la ubicación de la lámina de corriente dentro de la misma.

De igual forma, al evaluar el campo magnético inducido por delante de la lámina resulta que el mismo debe valer cero. De esta manera, la expresión general de \vec{B}_{ind} resulta:

$$\vec{B}_{ind}(r, z, t) \begin{cases} -\mu_0 \frac{I(t)}{2\pi r} \hat{\varphi}, & 0 < z < z_s(t) \\ -\mu_0 \frac{I(t)}{2\pi r} \left(1 - \frac{z - z_s(t)}{\delta}\right) \hat{\varphi}, & z_s(t) < z < z_s(t) + \delta \\ 0, & z > z_s(t) + \delta \end{cases} \quad (2.2.34)$$

Cálculo de la inductancia de la cámara de aceleración Al igual que como se realizó antes, sustituyendo la Ecuación 2.2.34 en 2.2.6 queda:

$$\begin{aligned} \lambda_{ppt}(t) = L_c I(t) + L_e I(t) + \int_0^{z_s(t)} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_0} \mu_0 \frac{I(t)}{2\pi r} r \varphi dr dz + \\ + \int_{z_s(t)}^{z_s(t)+\delta} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_0} \mu_0 \frac{I(t)}{2\pi r} \left(1 - \frac{z - z_s(t)}{\delta}\right) r \varphi dr dz \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Integrando se obtiene:

$$\lambda_{ppt}(t) = L_c I(t) + L_e I(t) + \left[\mu_0 \frac{z_s(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \mu_0 \frac{\delta}{4\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \right] I(t) \quad (2.2.36)$$

De lo cual surge que la inductancia de los electrodos coaxiales vale:

$$L_{cc}(z_s(t)) = \frac{\lambda(z_s(t))}{I(t)} = \mu_0 \frac{z_s(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \mu_0 \frac{\delta}{4\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \quad (2.2.37)$$

En el caso que consideremos que la lámina de corriente no tiene espesor, es decir, $\delta = 0$, queda:

$$L_{pe}(z_s(t)) = \mu_0 \frac{z_s(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \quad (2.2.38)$$

Siendo la expresión anterior el valor adoptado en [36] y ampliamente utilizado en trabajos posteriores.

Cálculo de la fuerza actuante sobre la lámina de corriente Para describir el movimiento de la lámina de corriente debemos aplicar la segunda Ley de Newton a la misma, es decir:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \dot{\vec{z}}_s(t) \right] = \sum \vec{F}(t) \quad (2.2.39)$$

Donde $m(t)$ es la masa de la lámina, $\dot{\vec{z}}_s(t)$ es su velocidad y $\sum \vec{F}(t)$ es la suma de las fuerzas actuantes sobre ella.

Asumiendo que la única fuerza actuante sobre la lámina de corriente es la Fuerza de Lorentz $\vec{F}_L(t)$, queda:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \dot{\vec{z}}_s(t) \right] = \vec{F}_L(t) = \iiint_{\text{lámina}} \vec{j} \times \vec{B} dV \quad (2.2.40)$$

Reemplazando las ecuaciones 2.2.32 y 2.2.34 en la anterior, se tiene:

$$\vec{F}_L(t) = \int_{z_s}^{z_s+\delta} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \frac{I(t)}{2\pi r \delta} \mu_0 \frac{I(t)}{2\pi r} \left(1 - \frac{z - z_s(t)}{\delta} \right) \hat{z} r dr d\varphi dz \quad (2.2.41)$$

La cual reordenando e integrando queda:

$$\vec{F}_L(t) = \mu_0 \frac{I(t)^2}{2\pi \delta} \hat{x} \int_{z_s}^{z_s+\delta} \int_{r_i}^{r_o} \frac{1}{r} \left[1 - \frac{z - z_s(t)}{\delta} \right] dx = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) I(t)^2 \hat{z} \quad (2.2.42)$$

De lo cual resulta la ecuación dinámica del modelo electromecánico para el caso de geometría de cámara de aceleración coaxial, a saber:

$$\vec{F}_L(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) I(t)^2 \hat{z} \quad (2.2.43)$$

Obtención de la masa total ablacionada Se calcula ídem al caso de cámara de aceleración paralela utilizando la Ecuación 2.2.21 vista anteriormente.

Obtención de la masa iónica ablacionada En este modelo no se distingue entre masa iónica ablacionada y masa total. De esta forma, se asume que la masa iónica ablacionada es igual a la masa total.

Cálculo de la resistencia eléctrica del plasma Al igual que como se realizó en la deducción de la resistencia del plasma R_p para el caso de cámara de aceleración paralela, se tiene:

$$R_p = \frac{l}{\sigma_p A} \quad (2.2.44)$$

Considerando $l = r_o - r_i$ y que $A = \delta \cdot 2\pi \left(\frac{r_o+r_i}{2} \right) = \delta\pi (r_o + r_i)$ queda:

$$R_p = \frac{r_o - r_i}{\sigma_p \delta \pi (r_o + r_i)} \quad (2.2.45)$$

Sustituyendo en la anterior las Ecuaciones 2.2.23 y 2.2.24, recordando que $\ln A = 1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e}\right)^{1/2}$ se obtiene:

$$R_p = 2,57 \frac{r_o - r_i}{T_e^{3/4} (r_o + r_i)} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e}\right)^{1/2}\right)}{\tau}} \quad (2.2.46)$$

Como se puede ver de la expresión anterior, la resistencia eléctrica del plasma es función de la temperatura y densidad electrónica y del tiempo de difusión magnética o tiempo de descarga de corriente considerado.

Resumen del sistema de ecuaciones resultante De las ecuaciones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{C} = I(t) (R_{ext} + R_p) + \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{z_s(t)}{4\pi} \ln \left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \mu_0 \frac{\delta}{4\pi} \ln \left(\frac{r_o}{r_i}\right) \right] \dot{I}(t) + \\ + \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_o}{r_i}\right) \dot{z}_s(t) I(t) \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

$$\frac{d}{dt} [m \dot{z}_s(t)] = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_o}{r_i}\right) I(t)^2 \quad (2.2.48)$$

$$m(t) = m_0 + m_t \left[1 - \left(1 - \frac{z_s(t)}{L}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] \quad (2.2.49)$$

$$R_p = 2,57 \frac{r_o - r_i}{T_e^{3/4} (r_o + r_i)} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e}\right)^{1/2}\right)}{\tau}} \quad (2.2.50)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales (CI):

$$z_s(0) = 0, \dot{z}_s(0) = 0, \int_0^{t_{rad}} I(t) dt = 0, I(0) = 0$$

2.2.2. Modelo de Yang

En este caso se proponen algunas mejoras sobre el modelo de Laperriere [25] en cuanto al cálculo de la fuerza actuante sobre la lámina de corriente y la masa iónica ablacionada, obteniendo el resto de las variables a partir de las mismas ecuaciones presentadas en la

sección anterior. Por otro lado, además, se incluye en el cálculo del bit de impulso el aporte de la masa neutra ablacionada por la denominada ablación tardía o LTA por sus siglas en inglés, fenómeno mediante el cual el propelente se sigue evaporando en forma de gas neutro luego de la descarga de corriente principal producto de la elevada temperatura de la superficie del propelente que supera a la temperatura de ablación del mismo [37]. La LTA es uno motivos principales por los cuales los APPT poseen un bajo rendimiento propulsivo debido al poco aprovechamiento de la masa ablacionada total que puede ser acelerada electromagnéticamente.

2.2.2.1. Geometría de cámara de aceleración paralela

Cálculo de la fuerza actuante sobre la lámina de corriente Para describir el movimiento de la lámina de corriente debemos aplicar la segunda Ley de Newton a la misma, es decir:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \vec{x}_s(t) \right] = \sum \vec{F}(t) \quad (2.2.51)$$

Donde $m(t)$ es la masa de la lámina, $\vec{x}_s(t)$ es su velocidad y $\sum \vec{F}(t)$ es la suma de las fuerzas actuantes sobre ella. Originalmente sólo se consideraba a la Fuerza de Lorentz, sin embargo aquí, y de acuerdo con [26], además se considerará la Fuerza Gasdinámica.

De esta manera, las fuerzas actuantes sobre la lámina de corriente a lo largo del eje x (unidimensional) serán la Fuerza de Lorentz $\vec{F}_L(t)$ y la Fuerza Gasdinámica $\vec{F}_g(t)$, a saber:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \vec{x}_s(t) \right] = \vec{F}_L(t) + \vec{F}_g(t) \quad (2.2.52)$$

Fuerza de Lorentz:

Como se dedujo en el modelo de Laperrier anteriormente, la Fuerza de Lorentz vale:

$$\vec{F}_L(t) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} I(t)^2 \hat{x} \quad (2.2.53)$$

Fuerza Gasdinámica:

De la ecuación de momento unidimensional se sabe que la Fuerza Gasdinámica total vale:

$$\vec{F}_g(t) = (\dot{m}_n u_e + (P_e - P_a) A_e) \hat{x} \quad (2.2.54)$$

Siendo \dot{m}_n la variación temporal de la masa neutra, u_e y A_e su velocidad y área a la salida, mientras que P_e y P_a son la presión en la salida y la presión ambiente respectivamente.

Como generalmente se cumple para los APPT de Teflón® , que $\tau_{pulso} \gg \tau_{transito}$, siendo τ_{pulso} el tiempo que dura la descarga ($\simeq 20 [\mu s]$ para el LES-6 por ejemplo) y

$\tau_{transito}$ el tiempo que una partícula permanece en la cámara de aceleración durante la descarga ($\simeq 1 [\mu s]$ para el LES-6), se puede asumir que el proceso de descarga es cuasi-estacionario de acuerdo con [38].

Si además de cuasi-estacionario se considera al flujo como isoentrópico, la velocidad de salida, la tasa de masa por unidad de tiempo y la relación de presión de estancamiento P_0 a la presión de salida P_e , se puede obtener como [39]:

$$u_e = \sqrt{\frac{2\gamma RT'_0}{(\gamma-1)} \left\{ 1 - \left(\frac{P_e}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}} \quad (2.2.55)$$

$$\dot{m} = \frac{AP_0}{\sqrt{\gamma RT'_0}} \left\{ \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right\} \quad (2.2.56)$$

$$\frac{P_0}{P_e} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.2.57)$$

Siendo γ , R , M y T'_0 la relación de calores específicos, la constante particular del gas, el número de Mach del fluido y la temperatura de estancamiento del mismo, respectivamente.

Asumiendo que el flujo en la cámara de aceleración estará ahogado, es decir, que $M = 1$, la relación de presiones queda:

$$\frac{P_0}{P_e} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.2.58)$$

Reemplazando la anterior en la Ecuación 2.2.55 se obtiene:

$$u_e = \sqrt{\frac{2\gamma RT'_0}{\gamma+1}} \quad (2.2.59)$$

Por último, reemplazando las Ecuaciones 2.2.59, 2.2.56 y 2.2.57 en la 2.2.54, y considerando que $P_a \simeq 0$, se tiene:

$$F_g(t) = \frac{AP_0}{\sqrt{\gamma RT'_0}} \left\{ \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right\} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma RT'_0}{\gamma+1}} + AP_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Sacando factor común a AP_0 en la expresión anterior y operando, se llega a:

$$F_g(t) = AP_0 \left[\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] \quad (2.2.60)$$

Ahora bien, si definimos los coeficientes arbitrarios C_m y C_f , a saber:

$$C_m = \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.2.61)$$

$$C_f = \gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.2.62)$$

Nos queda:

$$F_g(t) = AP_0 C_f \quad (2.2.63)$$

$$\dot{m} = \frac{AP_0}{\sqrt{\gamma RT'_0}} C_m \quad (2.2.64)$$

De lo cual, igualando AP_0 de las dos ecuaciones anteriores se obtiene la expresión de la Fuerza Gasdinámica en función de la temperatura de estancamiento T'_0 , la variación temporal de masa \dot{m} , y el valor de γ , es decir:

$$\vec{F}_g(t) = \dot{m}(t) \sqrt{\gamma RT'_0} \frac{C_f}{C_m} \hat{x} \quad (2.2.65)$$

Como último paso, considerando la relación existente entre la temperatura de estancamiento T'_0 y la temperatura estática T del plasma (será una temperatura crítica ya que $M = 1$), queda [39]:

$$\frac{T'_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 = \frac{\gamma + 1}{2} \quad (2.2.66)$$

Despejando T'_0 y reemplazándola en la Ecuación 2.2.65, se obtiene finalmente:

$$\vec{F}_g(t) = \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma + 1)}{2} RT} \frac{C_f}{C_m} \hat{x} \quad (2.2.67)$$

Esta última expresión es la que se implementará numéricamente.

De esta manera, reemplazando las expresiones obtenidas de $F_L(t)$ y de $F_g(t)$ en la Ecuación 2.2.51 resulta:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \dot{\vec{x}}_s(t) \right] = \left[\frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} I(t)^2 + \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma + 1)}{2} RT} \frac{C_f}{C_m} \right] \hat{x} \quad (2.2.68)$$

La cual es la ecuación que representa la dinámica de la lámina de corriente.

Obtención de la masa total ablacionada Si bien en [26] no se especifica como se determina la masa ablacionada total ya que del modelo se obtiene la masa ionizada, se supone que en dicho trabajo han considerado a priori un valor del grado de ionización en vez de utilizar una expresión analítica para realizar los cálculos.

Obtención de la masa iónica ablacionada Como se ha mencionado en párrafos anteriores, en el Modelo Electromecánico Simple el valor de la masa de la lámina de

corriente se asume a priori y se considera que su valor no cambia a medida que se desarrolla la descarga.

Como el valor de la masa ablacionada que conforma a la lámina de corriente es un valor que se desconoce a falta de datos experimentales, se han comenzado a utilizar modelos cero dimensionales para estimar analíticamente dicho parámetro. En tal sentido se destacan los trabajos desarrollados en [28, 40, 9, 41, 42]. En esta tesis se utilizará el modelo presentado en [43] para estimar la masa iónica ablacionada ya que ha mostrado ser mas robusto que los otros modelos cero dimensionales mencionados anteriormente y además se obtienen mejores estimaciones al correr distintos casos.

En [43] se presenta un modelo unidimensional cuasi-estacionario e ideal el cual parte de plantear las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica Ideal (MHD ideal). En el caso límite de valores elevados del Reynolds Magnético Re_m y considerando que la presión magnética es mucho mayor que la presión del plasma ($\beta = \frac{p}{p_M} \ll 1$), la dinámica del plasma estará gobernada por el campo magnético presente, es decir, las especies ionizadas que conformen el plasma sólo se podrán mover en la dirección de las líneas de campo magnético, estando fuertemente inhibido el movimiento perpendicular al campo [17]. Bajo estas condiciones y utilizando la teoría de la MHD Ideal, el flujo que proviene de la cámara de aceleración será expulsado al espacio vacío en donde se considera que no existen campos externos, lo que implica que existe una condición magnetosónica en la cámara [40]. En este punto, la velocidad del fluido iguala a la conocida velocidad de Alfvén, a saber:

$$v^* = \frac{B^*}{\sqrt{\mu_0 \rho^*}} \quad (2.2.69)$$

Siendo ρ la densidad de masa del fluido y donde los valores con asterisco representan los valores críticos o magnetosónicos, es decir, en el punto donde la velocidad del fluido iguala la velocidad de Alfvén.

Las ecuaciones de continuidad, momento y energía de la MHD Ideal despreciando el potencial gravitatorio, se exponen a continuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.2.70)$$

$$\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.2.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left(\rho \frac{v^2}{2} \vec{v} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \vec{v} \right) \quad (2.2.72)$$

La Fuerza de Lorentz se puede descomponer en dos términos, a saber:

$$F_L = \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (2.2.73)$$

Definiendo la presión magnética como $P_M = \frac{B^2}{2\mu_0}$ y teniendo en cuenta que en el caso unidimensional se cumple que $\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$ vale cero, la ecuación de momento 2.2.71 queda:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla (p + p_M) \quad (2.2.74)$$

Finalmente, para una geometría de cámara de aceleración paralela y asumiendo que $\vec{v} = v \hat{y}$, $\vec{E} = E \hat{x}$ y $\vec{B} = -B \hat{z}$, las ecuaciones de la MHD ideal para el caso unidimensional y cuasi-estacionario quedan:

$$\frac{d}{dy} (\rho v) = 0 \quad (2.2.75)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho v \frac{dv}{dy} = -\frac{d}{dy} (p + p_M) \quad (2.2.76)$$

$$-\frac{d}{dy} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \frac{EB}{\mu_0} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v \right) = 0 \quad (2.2.77)$$

De la Ecuación de continuidad 2.2.75 surge que:

$$\psi = \rho v = \frac{\dot{m}}{A} = \text{constante} \quad (2.2.78)$$

De la Ecuación de momento 2.2.76, como se cumple que $p_M \gg p$ de acuerdo a las consideraciones que se hicieron al platear el modelo, podemos despreciar p frente a p_M con lo cual resulta que $\rho v \frac{dv}{dy} = -\frac{d}{dy} p_M$, y como ρv es constante, podemos expresar que $\frac{d}{dy} \left(\rho v^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0$, de manera tal que se debe cumplir:

$$\rho v^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{constante} \quad (2.2.79)$$

Evaluando la expresión anterior en el punto de estancamiento donde $v = 0$ y magnetosónico donde $v = v^*$, se tiene:

$$\frac{B_0^2}{2\mu_0} = \rho^* v^{*2} + \frac{B^{*2}}{2\mu_0} \quad (2.2.80)$$

Reemplazando en la anterior la expresión de v^* , es decir, la Ecuación 2.2.69, queda:

$$\frac{B_0^2}{2\mu_0} = \rho^* \frac{B^{*2}}{\mu_0 \rho^*} + \frac{B^{*2}}{2\mu_0}$$

De la cual podemos despejar el valor del campo de inducción magnética en el punto magnetosónico B^* , el cual resulta:

$$B^* = \frac{B_0}{\sqrt{3}} \quad (2.2.81)$$

Por otro lado, despejando de la Ecuación 2.2.69 la densidad de masa en el punto magnetosónico ρ^* , se tiene:

$$\rho^* = \frac{B^{*2}}{\mu_0 v^{*2}} \quad (2.2.82)$$

Por lo cual, el flujo de masa por unidad de área ψ valdrá, en el punto magnetosónico del flujo:

$$\psi^* = \rho^* v^* = \frac{B^{*2}}{\mu_0 v^*} \quad (2.2.83)$$

Para determinar el campo eléctrico en el punto magnetosónico haremos uso de la ecuación de Faraday, que en el caso estacionario vale:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.2.84)$$

Como el modelo es unidimensional y de acuerdo a las consideraciones hechas al comienzo, $\vec{E} = E \hat{x}$, por lo cual queda:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{dE}{dy} \hat{z} = 0 \quad (2.2.85)$$

Luego surge que el campo eléctrico es constante en toda la cámara, es decir:

$$E = E^* = \text{constante} \quad (2.2.86)$$

Por otro lado, la ley de Ohm para el caso ideal, es decir, para un plasma perfectamente conductor es:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (2.2.87)$$

Como al comienzo se asume que $\vec{v} = v \hat{y}$, $\vec{E} = E \hat{x}$ y $\vec{B} = -B \hat{z}$ al considerar el flujo unidimensional, el producto vectorial entre la velocidad del plasma y el campo de inducción magnética, resulta:

$$\vec{v} \times \vec{B} = -vB \hat{x}$$

De manera que reemplazando en la Ecuación 2.2.87 el resultado anterior, queda:

$$\vec{E} = vB \hat{x} \quad (2.2.88)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $E = E^* = \text{constante}$ (ecuación 2.2.86) y la ecuación anterior, podemos escribir que en la dirección del versor \hat{x} vale:

$$E_0 = E^* = v^* B^* \quad (2.2.89)$$

En cuanto a la Ecuación 2.2.77 de la energía unidimensional, se ve que el flujo de energía se compone de tres términos, la convección de energía cinética $\rho \frac{v^2}{2} v$, el vector de Poynting $\frac{EB}{\mu_0}$ y la convección de la energía térmica $\frac{\gamma}{\gamma-1} p v$. Si incluimos a la energía térmica dentro de la entalpía específica del flujo h , la ecuación de la energía para un plasma cuasi-estacionario y unidimensional queda:

$$\frac{d}{dy} \left(\rho \frac{v^2}{2} v + \frac{EB}{\mu_0} + h v \right) = 0 \quad (2.2.90)$$

Lo cual implica que:

$$\psi \frac{v^2}{2} + \frac{EB}{\mu_0} + \psi h = \text{constante} \quad (2.2.91)$$

Siendo $\psi = \rho v$ el flujo de masa por unidad de área.

Evaluando la condición anterior en el punto de estancamiento y en el punto magnetosónico del flujo, se tiene:

$$\frac{E_0 B_0}{\mu_0} + \psi h_0 = \psi^* \frac{v^{*2}}{2} + \frac{E^* B^*}{\mu_0} + \psi h^* \quad (2.2.92)$$

Teniendo en cuenta que $\psi = \psi^*$ y que $E_0 = E^* = v^* B^*$ (Ecuación 2.2.78 y 2.2.86) y agrupando términos se llega a:

$$\psi^* \left(\frac{v^{*2}}{2} + (h^* - h_0) \right) = \frac{v^* B^*}{\mu_0} (B_0 - B^*) \quad (2.2.93)$$

Llamando $Q^* = h^* - h_0$ al cambio de la entalpía específica del plasma y como se verifica que $\psi = \psi^* = \rho^* v^* = \frac{B^{*2}}{\mu_0 v^*}$ (Ecuación 2.2.78), reemplazando en la anterior resulta:

$$\frac{B^{*2}}{\mu_0 v^*} \left(\frac{v^{*2}}{2} + Q^* \right) = \frac{v^* B^*}{\mu_0} (B_0 - B^*)$$

De la cual, recordando que $B^* = \frac{B_0}{\sqrt{3}}$ y despejando el valor de la velocidad magnetosónica v^* se llega a:

$$v^* = \sqrt{\frac{Q^*}{\sqrt{3} - 1,5}} = 1,468 \sqrt{2Q^*} \quad (2.2.94)$$

Por último, y con el objetivo de obtener una expresión analítica para determinar el flujo de masa de plasma del motor, se sabe que:

$$\psi^* = \frac{\dot{m}}{A} = \rho^* v^* \quad (2.2.95)$$

Anteriormente se obtuvo que $\rho^* = \frac{B^{*2}}{\mu_0 v^{*2}}$ y $B^* = \frac{B_0}{\sqrt{3}}$, y teniendo en cuenta que para una geometría de cámara paralela de ancho w vale $B_0 = \frac{\mu_0 I}{w}$, reemplazando en la anterior tenemos:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{B^{*2}}{\mu_0 v^*} = \frac{B_0^2}{\mu_0 v^* 3} = \frac{\mu_0 I^2}{w^2 v^* 3} \quad (2.2.96)$$

Finalmente, reemplazando en la anterior la Ecuación 2.2.94 de v^* , se obtiene:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{\mu_0 I^2}{4,04 w^2 V_{crit}} \quad (2.2.97)$$

Donde V_{crit} es la velocidad crítica de Alfven, es decir, la velocidad relativa entre el plasma y el gas neutro inmerso en un campo magnético a partir de la cual se considera que el gas es eficientemente ionizado. Su valor se determina a partir de la condición de que la energía cinética sea igual a la energía de ionización del gas, a saber:

$$\frac{1}{2} V_{crit}^2 = \Gamma_i$$

De la cual despejando se obtiene:

$$V_{crit} = \sqrt{2\Gamma_i} \quad (2.2.98)$$

Donde Γ_i es la energía por unidad de masa necesaria para ionizar el flujo o materia neutra.

Como $A = wh$, despejando \dot{m} de la Ecuación 2.2.97 queda:

$$\dot{m} = \frac{\mu_0 I^2 h}{4,04 w V_{crit}} \quad (2.2.99)$$

De esta manera, si se considera que la energía necesaria para ionizar la materia neutra es la mayor responsable del cambio en la entalpía del flujo asociada con la disipación eléctrica, se cumple que la velocidad del plasma en el punto magnetosónico u^* es aproximadamente un 50 [%] mayor que la velocidad crítica de Alfven [40].

Por último, para determinar el valor de la masa ablacionada sólo hay que integrar en el tiempo la expresión 2.2.99.

De esta forma en el modelo mejorado de Yang [26] se utiliza la expresión 2.2.99 para determinar tanto la tasa de variación temporal de la masa ionizada como el valor de ésta última.

Resumen del sistema de ecuaciones resultante De las ecuaciones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$\frac{Q(t)}{C} = I(t)(R_{ext} + R_p) + \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{h}{w} x_s(t) + \mu_0 \frac{\delta}{2} \frac{h}{w} \right] \dot{I}(t) + \mu_0 \frac{h}{w} \dot{x}_s(t) I(t) \quad (2.2.100)$$

$$\frac{d}{dt} [m \dot{x}_s(t)] = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} [I(t)]^2 + \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma + 1)}{2}} RTC_f / C_m \quad (2.2.101)$$

$$\dot{m}(t) = \frac{\mu_0 I^2 h}{4,04 w V_{crit}} \quad (2.2.102)$$

$$R_p = 8,08 \frac{h}{w} \frac{1}{T_e^{3/4}} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e} \right)^{1/2} \right)}{\tau}} \quad (2.2.103)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales (CI):

$$Q(0) = CV_0, \dot{Q}(0) = 0, x_s(0) = 0, \dot{x}_s(0) = 0, m(0) = m_0$$

Siendo m_0 un valor de masa inicial para que el sistema sea determinado y V_0 la tensión inicial del banco de capacitores.

2.2.2.2. Geometría de cámara de aceleración coaxial

La ecuación circuital y dinámica de la lámina de plasma no cambia al considerar una cámara de aceleración del tipo coaxial respecto al caso de una geometría de cámara paralela, por lo cual valen las mismas ecuaciones durante el planteo básico formal. Sin embargo, sí cambiarán las expresiones del campo magnético inducido, la inductancia de la cámara de aceleración, la fuerza actuante sobre la lámina de corriente y la resistencia del plasma. A continuación se deducirán tales expresiones siguiendo en la mayoría de los casos a [25].

Cálculo de la fuerza actuante sobre la lámina de corriente Suponiendo que el eje de empuje del propulsor coincide con el eje de las x , las fuerzas actuantes sobre la lámina de corriente serán la Fuerza de Lorentz $\vec{F}_L(t)$ y la Fuerza Gasdinámica $\vec{F}_g(t)$, a saber:

$$\frac{d}{dt} [m(t) \dot{\vec{x}}_s(t)] = \vec{F}_L(t) + \vec{F}_g(t) \quad (2.2.104)$$

Fuerza de Lorentz:

Como se dedujo en el modelo de Laperrier anteriormente, la Fuerza de Lorentz vale:

$$\frac{d}{dt} [m(t) \dot{\vec{x}}_s(t)] = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) I(t)^2 \hat{x}$$

Fuerza Gasdinámica:

La ecuación que se obtuvo para la geometría de cámara paralela es igualmente válida para el caso coaxial, a saber:

$$\vec{F}_g(t) = \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma + 1)}{2}} RT \frac{C_f}{C_m} \hat{x} \quad (2.2.105)$$

De esta manera, reemplazando las expresiones obtenidas de $\vec{F}_L(t)$ y de $\vec{F}_g(t)$ en la Ecuación 2.2.51 resulta:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \dot{x}_s(t) \right] = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) I(t)^2 + \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma + 1)}{2}} RT \frac{C_f}{C_m} \right] \hat{x} \quad (2.2.106)$$

La cual es la ecuación que representa la dinámica de la lámina de corriente.

Obtención de la masa total ablacionada Si bien en [26] no se especifica como se determina la masa ablacionada total ya que del modelo se obtiene la masa ionizada, se supone que en dicho trabajo han considerado a priori un valor del grado de ionización en vez de utilizar una expresión analítica para realizar los cálculos.

Obtención de la masa iónica ablacionada Indistintamente al tipo de geometría analizada, anteriormente se obtuvo que $\rho^* = \frac{B^{*2}}{\mu_0 v^{*2}}$ y $B^* = \frac{B_0}{\sqrt{3}}$. Teniendo en cuenta que para una geometría de cámara coaxial $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_o}$, siendo r_0 el radio exterior de la cámara de aceleración, se tiene:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho^* v^* = \frac{B^{*2}}{\mu_0 v^*} = \frac{B_0^2}{\mu_0 v^* 3} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r_o^2 v^* 3} \quad (2.2.107)$$

Luego, ya que $v^* = 1,468 V_{crit}$ como también se dedujo anteriormente, queda:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{\mu_0 I^2}{173,86 r_o^2 V_{crit}} \quad (2.2.108)$$

Por último, como $A = \pi (r_0^2 - r_i^2)$ finalmente se tiene:

$$\dot{m} = \frac{\mu_0 I^2 (r_0^2 - r_i^2)}{55,342 r_o^2 V_{crit}} \quad (2.2.109)$$

Donde V_{crit} es la velocidad crítica de Alfvén.

Se hace notar que para determinar el valor de la masa ablacionada sólo hay que integrar en el tiempo la expresión anterior.

Resumen del sistema de ecuaciones resultante De las ecuaciones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{C} = I(t) (R_{ext} + R_p) + \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{x_s(t)}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) + \mu_0 \frac{\delta}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \right] \dot{I}(t) + \\ + \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \dot{x}_s(t) I(t) \end{aligned} \quad (2.2.110)$$

$$\frac{d}{dt} [m \dot{x}_s(t)] = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) I(t)^2 + \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma + 1)}{2} RT} \frac{C_f}{C_m} \quad (2.2.111)$$

$$\dot{m} = \frac{\mu_0 I^2 (r_0^2 - r_i^2)}{55,342 r_o^2 V_{crit}} \quad (2.2.112)$$

$$R_p = 2,57 \frac{r_0 - r_i}{T_e^{3/4} (r_0 + r_i)} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e} \right)^{1/2} \right)}{\tau}} \quad (2.2.113)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales (CI):

$$Q(0) = CV_0, \dot{Q}(0) = 0, x_s(0) = 0, \dot{x}_s(0) = 0, m(0) = m_0$$

Siendo m_0 un valor de masa inicial para que el sistema sea determinado y V_0 el voltaje inicial del banco de capacitores.

2.2.2.3. Cálculo del bit de impulso

En el modelo de Yang [26] el cálculo de bit de impulso se obtiene integrando en el tiempo la Fuerza Gasdinámica \vec{F}_g y la Fuerza de Lorentz \vec{F}_L sobre la lámina de plasma, más un término $m_n V_{dec}$ que incluye el aporte al bit de impulso de la ablación tardía o LTA. Sobre el eje de empuje, se tiene:

$$I_{bit} = \int (F_L(t) + F_g(t)) dt + m_n V_{dec} \quad (2.2.114)$$

Donde m_n y V_{dec} corresponden a la masa y la velocidad de la masa ablacionada posterior a la descarga.

Para determinar la velocidad de la masa neutra hacemos uso de las Ecuaciones 2.2.94 y 2.2.96 obtenidas anteriormente y que se transcriben a continuación:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{1}{3} \frac{B_0^2}{\mu_0 v^*}$$

$$v^* = \frac{3}{2} V_{crit}$$

Reemplazando la segunda en la primera de las ecuaciones anteriores, queda:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{2}{9} \frac{B_0^2}{\mu_0 V_{vrit}} \quad (2.2.115)$$

Utilizando la ecuación de equilibrio de vapor del Teflón® se puede obtener la presión de equilibrio P_{eq} a la temperatura de descomposición T_{dec} , es decir:

$$P_{eq}(T_{dec}) = P_c e^{(-T_c/T_{dec})}$$

Siendo P_c y T_c constantes características de presión y temperatura del gas analizado. Luego, considerando a un gas perfecto se tiene:

$$P_{eq} = \rho_{dec} R T_{dec} \quad (2.2.116)$$

Donde R es la constante del gas.

Por lo tanto, si se despeja la densidad de la materia neutra o de descomposición se tiene:

$$\rho_{des} = \frac{P_{eq}}{R T_{dec}} \quad (2.2.117)$$

Por último, utilizando esta última y la Ecuación 2.2.115 se puede obtener la velocidad de la masa ablacionada posterior a la descarga en referencia al laboratorio o tierra, a saber:

$$V_{dec} = \frac{(2/9) B_0^2}{\mu_0 V_{crit}} \left[\frac{R T_{dec}}{p_{eq}(T_{dec})} - \frac{1}{\rho_s} \right] \quad (2.2.118)$$

Siendo ρ_s la densidad del propelente sólido, R es la constante específica del gas, T_{dec} es la temperatura de descomposición del Teflón®, p_{eq} es la presión de equilibrio de vapor y B_0 es la intensidad del campo de inducción magnética.

El valor que resulte de aplicar la ecuación 2.2.118 es un valor máximo ya que en su expresión se está utilizando la presión de equilibrio de vapor.

2.3. Modelos Propuestos

Tomando como base el modelo expuesto en la Sección 2.2.1 y considerando las modificaciones adicionales que se desarrollaron en la Sección 2.2.2, en esta parte se proponen dos modelos que toman como variables adicionales a la temperatura del plasma y a la densidad de partículas de electrones. Para determinar la temperatura del plasma fue necesario agregar y acoplar la ecuación de la energía al sistema de ecuaciones disponible, mientras que para obtener la densidad de partículas de electrones, considerando al plasma en equilibrio termodinámico local (LTE por sus siglas en inglés), se utilizó la ecuación de Saha. De esta manera, la resistencia del plasma queda en función del tiempo, su temperatura y su densidad de acuerdo a las Ecuaciones 2.2.103 o 2.2.113.

Dependiendo de los términos que se tengan en cuenta en la ecuación de la energía, se van a distinguir dos modelos, a saber:

- **Modelo A:** Donde se considera a la energía interna del gas compuesta sólo por la energía térmica y no se considera la potencia magnética aportada por la Fuerza de Lorentz.
- **Modelo B:** Donde se incluye en la energía interna del gas a la energía cinética y magnética, y se agrega la potencia entregada por la Fuerza de Lorentz.

De esta manera, la única diferencia entre el Modelo A y el Modelo B es la forma en que se implementa la ecuación de la energía.

En rasgos generales, ambos modelos poseen las siguientes características:

- La lámina de plasma tiene una masa que varía a lo largo del tiempo.
- La temperatura del plasma tiene una dependencia temporal al igual que la densidad de partículas de electrones.
- La resistencia del plasma es variable con el tiempo.
- La ecuación de la energía queda acoplada al sistema de ecuaciones.
- Se utiliza la ecuación de Saha para determinar la densidad de partículas de electrones en cada instante durante la descarga.
- Se utiliza una relación empírica para obtener la masa ablacionada total.

Como se puede ver, los modelos propuestos incorporan dependencias temporales de la temperatura del plasma y la densidad de partículas de electrones, lo cual tiene mas concordancia con lo que sucede cuando el motor se encuentra funcionando.

A continuación se desarrolla de que manera se obtiene la masa total ablacionada, la temperatura del plasma y la densidad de partículas de electrones para cada uno de los modelos propuestos, siendo el resto de las variables determinadas de manera análoga a como se expuso en la sección [2.2.2](#).

2.3.1. Modelo A

A continuación se presenta de que manera se obtiene la masa ablacionada, la temperatura del plasma y la densidad de partículas de electrones del Modelo A. También se incluye en esta sección su implementación numérica, validación y aplicación a un propulsor en particular.

2.3.1.1. Obtención de la masa total ablacionada

Es necesario destacar que del modelo electromecánico se obtiene la masa iónica ablacionada y no la masa total [26]. Para estimar esta última existen expresiones analíticas como la presentada en [28] y utilizada en [25, 30], como así también relaciones empíricas como la obtenida en [20] a partir de los trabajos publicados en [44, 45].

En este trabajo se va a utilizar la expresión propuesta en [20] que surge de aplicar el método de los mínimos cuadrados a valores experimentales conocidos de 12 APPT de Teflón® de cámara de aceleración paralela o coaxial, que relacionan la masa ablacionada por pulso m_b por unidad de energía E_0 , y la energía por unidad de área expuesta de Teflón® A_p , a saber:

$$m_b = 1,32 \cdot 10^{-6} A_p^{0,65} E_0^{0,35} \quad (2.3.1)$$

Siendo $E_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2$, es decir, la energía inicial almacenada en los capacitores de capacidad equivalente C_0 y cuya tensión de carga es V_0 . En la Figura 2.8 se puede ver la curva de ajuste a los valores experimentales presentada en [20].

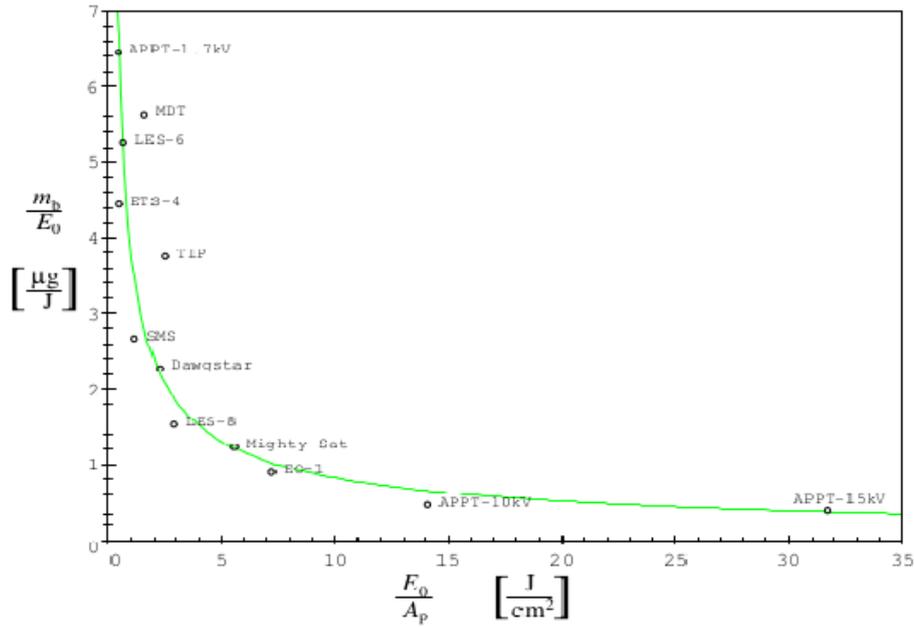


Figura 2.8: Masa total ablacionada de distintos PPTs como función de A_p y E_0 .

Si bien la Ecuación 2.3.1 funciona bien para muchos de los propulsores analizados, puede darse el caso particular de que un determinado PPT se encuentre fuera del rango sobre el cual se ha obtenido dicha curva de ajuste, de manera tal que deberá analizarse utilizando alguna consideración adicional.

En el caso de geometrías de cámara rectilínea o paralela, el valor de A_p vale:

$$A_p = w \cdot h \quad (2.3.2)$$

Siendo w y h el espesor y la altura del propelente en la cámara de aceleración.

En el caso que la cámara de aceleración sea de geometría coaxial, el valor de A_p viene dado por:

$$A_p = \pi (r_0^2 - r_i^2) \quad (2.3.3)$$

Siendo r_0 y r_i el radio del electrodo exterior e interior respectivamente.

2.3.1.2. Cálculo de la densidad de electrones

Un plasma se encontrará en equilibrio termodinámico local (LTE, por sus siglas en inglés), si la dinámica de los procesos colisionales se desarrolla de manera mas rápida que la dinámica de los procesos radiativos. Por su parte, esto es generalmente posible en plasmas altamente densos [46]. Si este fuera el caso, se tiene:

$$T_e = T_h = T \quad (2.3.4)$$

Siendo T_e , T_h y T la temperatura de los electrones, la temperatura de las partículas pesadas (átomos, moléculas o iones) y la temperatura característica del plasma, respectivamente.

Por otro lado, si se cumple que los procesos colisionales prevalecen por sobre los procesos radiativos en una relación de diez a uno como mínimo, y además, si se consideran plasmas homogéneos y estacionarios, existen criterios [47, 48, 49, 50] que nos definen la densidad de partículas de electrones mínima necesaria para considerar que el plasma se encuentra en LTE, tal como el criterio de McWhirter [50], uno de los mas popularmente utilizado, a saber:

$$n_e \gg 10^{19} T_e^{1/2} \Delta E^3 \quad (2.3.5)$$

Siendo n_e , T_e y ΔE la densidad de partículas de electrones, la temperatura electrónica y la diferencia entre los niveles de energía considerados.

Se destaca que cuando el plasma no pueda ser considerado homogéneo o sea inestacionario, el criterio de McWhirter pasará a ser una condición necesaria pero no suficiente para garantizar el LTE del plasma en cuestión [51].

En el caso de los APPT de Teflón®(R), se cumple normalmente que el tiempo de relajación ($< 10^{-2} [\mu s]$) de los iones o compuestos es bastante mas bajo que el tiempo característico de la descarga ($1 [\mu s]$), por lo cual se puede asumir que el plasma en la cámara de aceleración se encuentra en LTE [23]. Por otro lado, tomando como ejemplo el PPT LES-6 donde $T_e \simeq 1 [eV]$, $n_e \simeq 10^{21}$ y $Vol_{max} = 1,8 \cdot 10^{-6} [m^3]$, y sabiendo que $\Delta E_{max} = 12,7 [eV]$, aplicando la Ecuación 2.3.5 se obtiene:

$$\frac{n_e}{Vol_{max}} = 5,5 \cdot 10^{26} \geq 10^{19} T_e^{1/2} \Delta E^3 = 2 \cdot 10^{23}$$

Lo cual verifica el criterio de McWhirter y por lo tanto cumple la condición necesaria para considerar al plasma en LTE.

De esta manera, asumiendo que el plasma se encuentra el LTE, se puede utilizar la ecuación de Saha [35] para determinar la densidad de partículas de electrones, a saber:

$$K_A(T) = \frac{n_A^+ n_e}{n_A} = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{f_A^{i+}}{f_A^i} e^{-(\varepsilon_A/kT)} \quad (2.3.6)$$

Siendo n_A la densidad de partículas de A [$1m^3$], n_A^+ la densidad de partículas de iones positivos de A [$1/m^3$], n_e la densidad de partículas de electrones [$1/m^3$], m_e la masa del electrón [kg], k la constante de Boltzman [J/k], T la temperatura electrónica [k], h la constante de Planck [Js], ε_A la energía de ionización de la especie A en [J], donde f_A^{i+} y f_A^i son al grado de degeneramiento del ion positivo de A y de A neutro respectivamente, es decir, la cantidad de estados cuánticos posibles que pueden existir a un mismo nivel de energía.

Como se va a considerar al plasma simplemente ionizado, y considerando que utilizamos Teflón® (C_2F_4) como propelente, según [14] se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} K_C(T) = \frac{n_C^+ n_e}{n_C} = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{f_C^{i+}}{f_C^i} e^{-(\varepsilon_C/kT)} \\ K_F(T) = \frac{n_F^+ n_e}{n_F} = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{f_F^{i+}}{f_F^i} e^{-(\varepsilon_F/kT)} \\ n_e = n_C^+ + n_F^+ \\ n_C^0 = n_C + n_C^+ \\ n_F^0 = n_F + n_F^+ \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Siendo n_C^0 y n_F^0 las densidades de partículas iniciales de Carbono y Flúor respectivamente.

Las primeras dos ecuaciones del sistema 2.3.7 surgen de aplicar la ecuación de Saha a la especie de Carbono C y al Flúor F, respectivamente, mientras que la ecuación $n_e = n_C^+ + n_F^+$ representa la conservación de la carga eléctrica bajo la hipótesis de cuasi-neutralidad, y las ecuaciones $n_C^0 = n_C + n_C^+$ y $n_F^0 = n_F + n_F^+$ representan la conservación de los núcleos atómicos.

Operando y agrupando sobre el sistema de ecuaciones anterior en función de la densidad de electrones n_e se llega a una ecuación cúbica [14], a saber:

$$n_e = n_C^+ + n_F^+ = \frac{n_C^0 K_C}{n_e + K_C} + \frac{n_F^0 K_F}{n_e + K_F} \quad (2.3.8)$$

Donde el valor buscado de n_e será el único número real positivo que obtendremos de las tres raíces de la ecuación cúbica anterior. De esta forma, para cada valor de temperatura del plasma le corresponderá un valor de densidad de electrones de acuerdo

a la ecuación de Saha.

2.3.1.3. Cálculo de la temperatura del plasma

Como se sabe, si consideramos al plasma en LTE se cumple que $T_e = T_h = T$, es decir, la temperatura de los electrones es igual a la temperatura de las partículas neutras e igual a la temperatura del plasma que se indicará con T .

De acuerdo con [39] y agregando los términos asociados al plasma, podemos expresar la ecuación de la energía para cada diferencial de volumen en la lámina de corriente como:

$$m \frac{D}{Dt} (e + G) + \vec{\nabla} \cdot (p \vec{V}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \sum_j \sum_i \frac{\partial(\tau_{ij} \nu_j)}{\partial x_i} + (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{V} Vol \quad (2.3.9)$$

Siendo m la masa del plasma, e la energía específica del mismo, G el potencial del cual derivan las fuerzas másicas, p y \vec{V} la presión y la velocidad de la lámina de corriente, \vec{q} la energía en forma de calor aportada o liberada del sistema, el término $\sum_i \sum_j \frac{\partial(\tau_{ij} \nu_j)}{\partial x_i}$ que representa a los esfuerzos viscosos, \vec{B} el campo de inducción magnética, y \vec{j} y Vol la densidad de corriente y el volumen de la lámina de corriente respectivamente.

En el caso unidimensional (por ejemplo, sobre el eje x), despreciando las fuerzas másicas, los esfuerzos viscosos que pudieran aparecer, la variación de la presión dentro de la lámina de corriente y la potencia aportada por la Fuerza de Lorentz, queda:

$$\rho \frac{De}{Dt} = Q \quad (2.3.10)$$

Siendo Q el calor aportado o liberado al sistema (lámina de corriente).

La energía interna específica del gas e teniendo en cuenta sólo la energía térmica, se puede expresar considerando al plasma como un gas perfecto, es decir:

$$e = C_v T \quad (2.3.11)$$

Siendo C_v el calor específico a volumen constante del plasma.

En cuanto a Q estará compuesto por la generación de calor por efecto joule y las pérdidas por radiación, a saber:

$$Q = I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 \quad (2.3.12)$$

Es decir, la energía aportada al sistema vendrá del término $I^2 R_p$ menos la energía de radiación que se escapa de la lámina de corriente, igual a $\epsilon A_{rad} \sigma T^4$, siendo ϵ la emisividad del plasma, A_{rad} el área de radiación del arco eléctrico o lámina y σ la constante de Stefan-Boltzmann.

De esta forma, reemplazando en la Ecuación 2.3.10 y considerando que C_p es constante, se tiene:

$$m \frac{D}{Dt} (C_p T) = I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 \quad (2.3.13)$$

Esta ecuación es la que se acoplará al sistema de ecuaciones originales para calcular la temperatura en función del tiempo de acuerdo con el Modelo A.

En cuanto a la emisividad, se utilizará un valor de $\epsilon = 0,3$ de acuerdo con [42] ya que ha demostrado producir mejores estimaciones en cuanto a la masa ablacionada, el bit de impulso y el impulso específico al utilizar un modelo cero dimensional.

2.3.1.4. Resumen del sistema de ecuaciones resultante del Modelo A

A continuación se presenta el conjunto de ecuaciones resultante del Modelo A para geometría de cámara de aceleración paralela y coaxial.

Geometría de cámara de aceleración paralela

De las ecuaciones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$\frac{Q(t)}{C} = I(t) (R_{ext} + R_p) + \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{h}{w} x_s(t) + \mu_0 \frac{\delta}{2} \frac{h}{w} \right] \dot{I}(t) + \mu_0 \frac{h}{w} \dot{x}_s(t) I(t) \quad (2.3.14)$$

$$\frac{d}{dt} [m \dot{x}_s(t)] = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} [I(t)]^2 + \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma + 1)}{2}} RT \frac{C_f}{C_m} \quad (2.3.15)$$

$$m C_p \frac{DT}{Dt} = I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 \quad (2.3.16)$$

$$n_e = n_C^+ + n_F^+ = \frac{n_C^0 K_C}{n_e + K_C} + \frac{n_F^0 K_F}{n_e + K_F} \quad (2.3.17)$$

$$\dot{m}(t) = \frac{\mu_0 I^2 h}{4,04 w V_{crit}} \quad (2.3.18)$$

$$R_p = 8,08 \frac{h}{w} \frac{1}{T_e^{3/4}} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e} \right)^{1/2} \right)}{\tau}} \quad (2.3.19)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales (CI):

$$Q(0) = CV_0, \dot{Q}(0) = 0, x_s(0) = 0, \dot{x}_s(0) = 0, m(0) = m_0, T(0) = T_0$$

Siendo m_0 y T_0 la masa y temperatura inicial del plasma respectivamente, mientras que V_0 es el voltaje inicial del banco de capacitores.

Geometría de cámara de aceleración coaxial

De las ecuaciones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{C} = I(t) (R_{ext} + R_p) + \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{x_s(t)}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) + \mu_0 \frac{\delta}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \right] \dot{I}(t) + \\ + \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \dot{x}_s(t) I(t) \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

$$\frac{d}{dt} [m\dot{x}_s(t)] = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) I(t)^2 + \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma + 1)}{2}} RT \frac{C_f}{C_m} \quad (2.3.21)$$

$$mC_p \frac{DT}{Dt} = I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 \quad (2.3.22)$$

$$n_e = n_C^+ + n_F^+ = \frac{n_C^0 K_C}{n_e + K_C} + \frac{n_F^0 K_F}{n_e + K_F} \quad (2.3.23)$$

$$\dot{m} = \frac{\mu_0 I^2 (r_0^2 - r_i^2)}{55,342 r_o^2 V_{crit}} \quad (2.3.24)$$

$$R_p = 2,57 \frac{r_0 - r_i}{T_e^{3/4} (r_0 + r_i)} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e} \right)^{1/2} \right)}{\tau}} \quad (2.3.25)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales (CI):

$$Q(0) = CV_0, \dot{Q}(0) = 0, x_s(0) = 0, \dot{x}_s(0) = 0, m(0) = m_0, T(0) = T_0$$

Siendo m_0 y T_0 la masa y temperatura inicial del plasma respectivamente, mientras que V_0 es el voltaje inicial del banco de capacitores.

2.3.1.5. Implementación numérica del Modelo A

Una vez definido el sistema de ecuaciones del Modelo A propuesto se puede apreciar que se trata de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE por sus siglas en ingles) de segundo orden en la carga eléctrica $Q(t)$ y la posición de la lámina de corriente $x_s(t)$, y de primer orden en la masa de la lámina $m(t)$ y la temperatura del plasma T . Por otro lado, además, se ve que el sistema de ecuaciones es no lineal y de coeficientes variables en algún caso.

Un sistema de ecuaciones de las características nombradas anteriormente se puede resolver utilizando el concepto de variables de estado, es decir, se define un vector de estado de manera de convertir en un sistema de ODEs de primer orden el sistema de ecuaciones original.

Se define como vector de estado \vec{z} a:

$$\vec{z} = [z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] = [Q, x_s, m, \dot{Q}, \dot{x}_s, T] \quad (2.3.26)$$

Es decir, el vector de estado estará compuesto por la carga eléctrica $Q(t)$, la posición de la lámina de corriente $x_s(t)$, la masa ionizada $m(t)$, la variación temporal de la carga eléctrica (no es mas que la corriente eléctrica) $\dot{Q}(t)$, la velocidad de la lámina de corriente $\dot{x}_s(t)$ y la temperatura del plasma T .

Geometría de cámara de aceleración paralela Llamando $k_{rect} = \frac{\mu_0 h}{4,04wV_{crit}}$, sabiendo que $\dot{z}_0 = z_3$, $\dot{z}_1 = z_4$ y que $\dot{z}_2 = k_{rect}z_3^2$, reemplazando en las Ecuaciones 2.3.14, 2.3.15, 2.3.16 y 2.3.18, y despejando las variables derivadas respecto al tiempo, es decir, las \dot{z}_i , queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = z_3 \\ \dot{z}_1 = z_4 \\ \dot{z}_2 = k_{rect}z_3^2 \\ \dot{z}_3 = \left[-\frac{z_0}{C} - z_3(R_{ext} + R_p) - \mu_0 \frac{h}{w} z_3 z_4 \right] / \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{h}{w} z_1 + \mu_0 \frac{\delta}{2} \frac{h}{w} \right] \\ \dot{z}_4 = \frac{z_3^2}{z_2} \left[\frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} + k_{rect} \sqrt{\gamma \frac{(\gamma+1)}{2}} R z_5 \frac{C_f}{C_m} - k_{rect} z_4 \right] \\ \dot{z}_5 = [z_3^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma z_5^4] / [z_2 C_p] \end{array} \right. \quad (2.3.27)$$

Es decir, se obtuvo un conjunto de ODEs de primer orden cuya solución puede encontrarse numéricamente.

Geometría de cámara de aceleración coaxial Llamando $k_{coax} = \frac{\mu_0(r_0^2 - r_i^2)}{55,342r_0^2 V_{crit}}$, sabiendo que $\dot{z}_0 = z_3$, $\dot{z}_1 = z_4$ y que $\dot{z}_2 = k_{coax}z_3^2$, reemplazando en las Ecuaciones 2.3.20, 2.3.21, 2.3.22 y 2.3.24, y despejando las variables derivadas respecto al tiempo, es decir, las \dot{z}_i , queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = z_3 \\ \dot{z}_1 = z_4 \\ \dot{z}_2 = k_{coax}z_3^2 \\ \dot{z}_3 = \left[-\frac{z_0}{C} - z_3(R_{ext} + R_p) - \frac{\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right) z_3 z_4 \right] / \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{z_1}{4\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right) + \mu_0 \frac{\delta}{4\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right) \right] \\ \dot{z}_4 = \frac{z_3^2}{z_2} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right) + k_{coax} \sqrt{\gamma \frac{(\gamma+1)}{2}} R z_5 \frac{C_f}{C_m} - k_{coax} z_4 \right] \\ \dot{z}_5 = [z_3^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma z_5^4] / [z_2 C_p] \end{array} \right. \quad (2.3.28)$$

Las cuales conforman un conjunto de ODEs de primer orden cuya solución puede encontrarse numéricamente.

Para poder resolver los sistemas de ecuaciones anteriores se ha optado por utilizar el lenguaje de programación Python versión 2.7.3, utilizando como procesador de texto

el software Spyder, ambos de distribución gratuita. Como ya es sabido, Python es un lenguaje de programación orientado a objetos que cuenta con una gran variedad de librerías que pueden implementarse para resolver problemas particulares. Por otro lado, Spyder es un procesador de texto que ya trae implementado varias de las librerías más populares y utilizadas para programar en Python, como lo son las librerías numpy, math, matplotlib, scipy y time, entre otras.

Para integrar el sistema de Ecuaciones 2.3.27 o 2.3.28 se va a utilizar la función “odeint” que forma parte del módulo “integrate” dentro de la librería de scipy, la cual resuelve un sistema de ODEs de primer orden utilizando la subrutina Isoda implementada en la conocida librería “odepack” programada en Fortran 77. El integrador Isoda aplica automáticamente el método de Adams o el método de las fórmulas de diferenciación hacia atrás (BDF) dependiendo si el problema es nonstiff o stiff respectivamente [52].

Una vez integrado el sistema de ecuaciones correspondiente se obtiene la variación temporal del vector de estado, es decir, la dependencia temporal de la carga eléctrica, la posición de la lámina de corriente, la masa ionizada, la corriente, la velocidad de la lámina de plasma y su temperatura.

2.3.1.6. Validación del Modelo A

Para validar el Modelo A propuesto se utilizaron los datos experimentales de nueve APPTs de Teflón® que aparecen en la literatura especializada. A continuación se identifica cada uno de ellos y se indican sus características generales:

- LES-6a [43, 37]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo Breech-Fed y geometría de cámara paralela.
- LES-6b [43, 37]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo Breech-Fed y geometría de cámara paralela.
- OSU_LeRC_b [53]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo Breech-Fed y geometría de cámara paralela.
- PPPA [54]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo Side-Fed y geometría de cámara paralela.
- XPPT_1 [55]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo Breech-Fed y geometría de cámara paralela.
- LES-8-9 [56]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo Breech-Fed y geometría de cámara paralela.
- PPT_Henrikson [38]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo Breech-Fed y geometría de cámara paralela.

- PPT_2 [57]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo side-Fed y geometría de cámara coaxial.
- PPT_4 [57]: Propulsor de plasma pulsante ablativo con alimentación del tipo side-Fed y geometría de cámara coaxial.

Las valores correspondientes a la geometría y parámetros eléctricos de los PPTs de interés se obtuvieron de las distintas referencias bibliográficas citadas arriba y que a continuación se exponen:

PPT	h (ó r_i) [mm]	w (ó r_o) [mm]	l [mm]	E_0 [J]	L_{ext} [nH]	R_{ext} [mΩ]	C [μF]
LES-6a	30.0	10.0	6.0	1.21	34.0	30.0	2.0
LES-6b	30.0	10.0	6.0	1.85	34.0	30.0	2.0
OSU_LeRC	25.4	25.4	44.5	20.0	93.0	10.0	30.0
PPPA	66.0	38.0	41.0	450.0	70.0	10.1	9.0
XPPT_1	25.0	25.0	100.0	25.0	50.0	50.0	10.0
LES-8-9	21.5	30.0	60.0	20.0	30.0	25.0	17.0
PPT_H	38.1	25.4	25.4	60.0	99.0	34.2	50.0
PPT_2	2.4	17.6	25.0	9.0	75.0	8.5	8.0
PPT_4	2.4	24.5	25.0	9.0	75.0	8.5	8.0

Tabla 2.1: Características Eléctricas y Geométricas de los PPTs analizados.

En cuanto a la validación de los modelos se tomarán como variables a analizar la masa ablacionada total m_b , el bit de impulso I_{bit} y el impulso específico I_{sp} .

Implementando en Python el sistema de ecuaciones de acuerdo a la Sección 2.3.1.5, se obtuvieron los siguientes resultados utilizando el Modelo A:

Como se puede observar de la Tabla 2.2, los valores medios de los errores relativos que se obtuvieron de analizar nueve PPTs cuya geometría de cámara de aceleración puede ser paralela o coaxial y su alimentación del tipo Breech-Fed o Side-Fed utilizando el Modelo A, oscilan alrededor del 15 [%] para la masa ablacionada y el impulso específico, mientras que para el bit de impulso el error medio fue del 11 [%].

Estos resultados, por otro lado, además de ampliar la base sobre la cual se realiza la validación resultan ser mejores estimaciones que las obtenidas en [9, 41, 42] al utilizar modelos cero dimensionales donde en el mejor de los casos se obtuvieron errores del 17 [%], 15 [%] y 40 [%] para la masa ablacionada, el bit de impulso y el impulso específico respectivamente.

Por último, además de validar el Modelo A propuesto a partir de los resultados obtenidos (Tabla 2.2), se destaca que son una indicación clara de la robustez del mismo,

<i>PPT</i>	<i>Val. Experimental</i>			<i>Val. Numérico</i>			<i>Error Relativo</i>		
	m_b [μgr]	I_{bit} [μNs]	I_{sp} [s]	m_b [μgr]	I_{bit} [μNs]	I_{sp} [s]	e_{m_b} [%]	$e_{I_{bit}}$ [%]	$e_{I_{sp}}$ [%]
<i>LES-6a</i>	5.5	18.0	333.6	7,2	19,9	280,0	31,6	10,5	-16,1
<i>LES-6b</i>	10.0	31.2	318.0	8,4	31,5	382,3	-16,0	0,9	20,2
<i>OSU_LeRC</i>	26.5	249.6	960.1	31,8	300,4	963,6	19,9	20,4	0,4
<i>PPPA</i>	1780.0	17000	973.6	1827,5	19440,1	1084,4	2,7	14,3	11,4
<i>XPPT_1</i>	28.5	279.5	999.7	33,7	237,6	719,3	18,1	-15,0	-28,0
<i>LES-8-9</i>	34.7	300.0	879.5	31,9	226,9	727,9	-8,4	-24,4	-17,2
<i>PPT_H</i>	55.0	800	1482.7	60,8	830,4	1393,0	10,5	3,8	-6,1
<i>PPT_2</i>	45.0	252.0	570.8	48,7	218,1	456,4	8,3	-13,4	-20,1
<i>PPT_4</i>	99.0	315.0	324.3	118,3	312,1	269,0	19,5	-0,9	-17,1
<i>Errores Medios:</i>							15,0	11,5	15,1

Tabla 2.2: Resultados obtenidos al utilizar el Modelo A.

ya que como se puede ver de analizar la Tabla 2.1 tanto los valores de los parámetros eléctricos como geométricos abarcan un amplio rango de posibilidades.

2.3.1.7. Aplicación del Modelo A al PPT LEs-6b

Enfocando nuestro estudio en el propulsor LES-6b, a continuación se muestran los resultados que obtenemos de correr el modelo A:

Datos del motor: PPT = Les_6b-rect
Tipo de alimentacion = Breech fed
E0 [J] = 1.85
Ltot [nH] = 39.60
Trad [us] = 1.81
Imax [kA] = 4.09

Performances obtenidas del modelo:

Masa total [ugr] = 8.39
Masa ionizada [ugr] = 0.75
Masa neutra [ugr] 7.64
alpha_i [%] = 9.01
alpha_n [%] = 90.99
Ibit total [u.Ns] = 30.90
Ibit ion [u.Ns] = 22.22
Ibit n [u.Ns] = 8.68
Iion/Ibit [%] = 71.90
In/Ibit [%] = 28.09
Isp [s] = 375.07

$V_{mean} [km/s] = 3.68$
 $V_{ion} [km/s] = 34.34$
 $Rendimiento [\%] = 3.07$

 Obtenemos los errores porcentuales cometidos:

$error_masa [\%] = -16.01$
 $error_Ibit [\%] = -0.95$
 $error_Isp [\%] = 17.93$

=====

A continuación se muestra la dependencia temporal de la temperatura del plasma $T(t)$, la densidad de partículas de electrones $n_e(t)$ y la corriente eléctrica $I(t)$ obtenidas a partir del Modelo A:

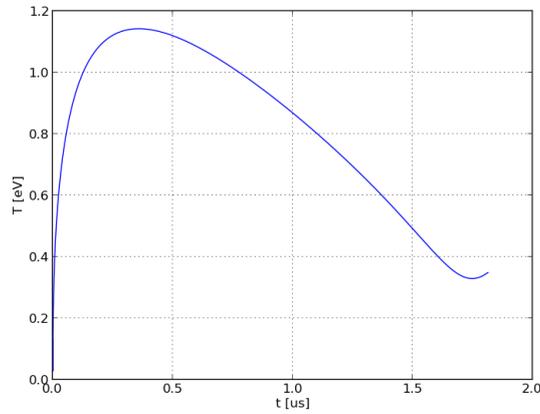


Figura 2.9: Temperatura del plasma en función del tiempo (LES-6b) - Modelo A.

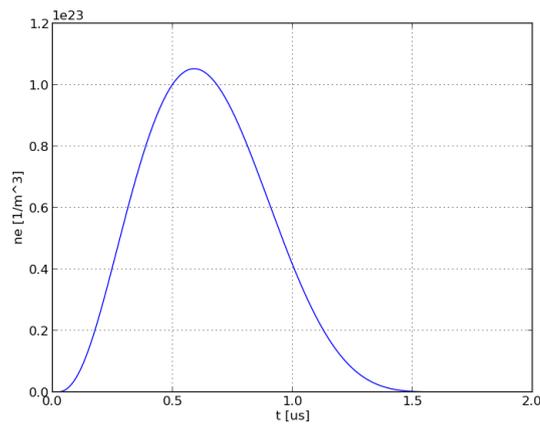


Figura 2.10: Densidad de partículas de electrones en función del tiempo (LES-6b) - Modelo A.

En cuanto a los valores experimentales, fueron extraídos del trabajo realizado en [58] y se listan a continuación:

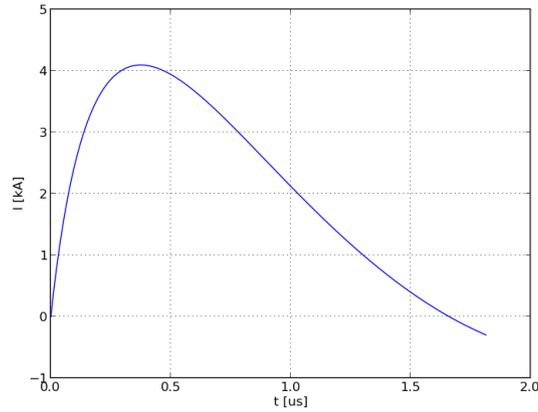


Figura 2.11: Corriente en función del tiempo (LES-6b) - Modelo A.

Variable	Valor
I_{bit} [μs]	31,2
I_{sp} [s]	318
V_{mean} [km/s]	3
V_{ion} [km/s]	40
$m_{ionizada}$ [μgr]	1
m_{neutra} [μgr]	9

Tabla 2.3: Valores experimentales del LES-6b.

Como se puede ver, el Modelo A arroja buenas estimaciones de la masa ablacionada, masa neutra, el bit de impulso, el impulso específico, la velocidad media de salida de los gases y la velocidad de salida de los iones en relación a los datos experimentales. Por otro lado, la variación en el tiempo de la temperatura del plasma, la densidad de partículas de electrones y la corriente eléctrica, se encuentran en los órdenes de magnitud observados en los ensayos experimentales [58, 59].

2.3.2. Modelo B

Recordando que la única diferencia entre el Modelo A y el Modelo B es la forma en que se implementa la ecuación de la energía para obtener la temperatura del plasma; la masa ablacionada y la densidad de partículas de electrones del Modelo B se obtienen de manera análoga a como se hizo para el Modelo A, de manera tal que a continuación sólo se desarrollará el ítem del cálculo de la temperatura del plasma. También se incluye en esta sección su implementación numérica, validación y aplicación a un propulsor en particular.

2.3.2.1. Cálculo de la temperatura del plasma

En el caso unidimensional (por ejemplo, sobre el eje x), despreciando las fuerzas másicas, los esfuerzos viscosos que pudieran aparecer y la variación de la presión dentro de la lámina de corriente, y teniendo en cuenta la potencia entregada por la Fuerza de Lorentz, la ecuación de la energía queda:

$$m \frac{De}{Dt} = Q + \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{V} Vol \quad (2.3.29)$$

Siendo Q el calor aportado o liberado al sistema (lámina de corriente).

Ahora bien, considerando la energía cinética y la energía magnética además de la energía térmica en la energía interna específica del gas e , se tiene:

$$e = C_p T + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \quad (2.3.30)$$

Siendo C_p , T y ρ el calor específico, la temperatura y la densidad del plasma respectivamente.

En cuanto a Q estará compuesto por la generación de calor por efecto joule y las perdidas por radiación, a saber:

$$Q = I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 \quad (2.3.31)$$

Es decir, la energía aportada al sistema vendrá del término $I^2 R_p$ menos la energía de radiación que se escapa de la lámina de corriente, igual a $\epsilon A_{rad} \sigma T^4$, mas la energía asociada a la Fuerza de Lorentz. Siendo ϵ la emisividad del plasma, A_{rad} el área de radiación del arco eléctrico o lámina y σ la constante de Stefan-Boltzmann.

De esta forma, reemplazando en la Ecuación 2.3.29 y considerando que C_p es constante, se obtiene:

$$m \frac{D}{Dt} \left(C_p T + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \right) = I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 + \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{V} Vol$$

$$m C_p \frac{DT}{Dt} = \left[I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 + \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{V} Vol - m \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \right) \right] \quad (2.3.32)$$

Esta ecuación es la que se acoplará al sistema de ecuaciones originales para calcular la temperatura en función del tiempo del Modelo B.

En cuanto a la emisividad del plasma, se utilizará un valor de $\epsilon = 0,3$ de acuerdo con [42] ya que ha demostrado producir mejores estimaciones en cuanto a la masa ablacionada, el bit de impulso y el impulso específico al utilizar un modelo cero dimensional.

2.3.2.2. Resumen del sistema de ecuaciones resultante

A continuación se presenta el conjunto de ecuaciones resultante del Modelo B para geometría de cámara de aceleración paralela y coaxial.

Geometría de cámara de aceleración paralela

De las ecuaciones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$\frac{Q(t)}{C} = I(t) (R_{ext} + R_p) + \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{h}{w} x_s(t) + \mu_0 \frac{\delta}{2} \frac{h}{w} \right] \dot{I}(t) + \mu_0 \frac{h}{w} \dot{x}_s(t) I(t) \quad (2.3.33)$$

$$\frac{d}{dt} [m \dot{x}_s(t)] = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} [I(t)]^2 + \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma+1)}{2}} RT \frac{C_f}{C_m} \quad (2.3.34)$$

$$m C_p \frac{DT}{Dt} = \left[I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 + \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{V} Vol - m \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0 \rho} \right) \right] \quad (2.3.35)$$

$$n_e = n_C^+ + n_F^+ = \frac{n_C^0 K_C}{n_e + K_C} + \frac{n_F^0 K_F}{n_e + K_F} \quad (2.3.36)$$

$$\dot{m}(t) = \frac{\mu_0 I^2 h}{4,04 w V_{crit}} \quad (2.3.37)$$

$$R_p = 8,08 \frac{h}{w} \frac{1}{T_e^{3/4}} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e} \right)^{1/2} \right)}{\tau}} \quad (2.3.38)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales (CI):

$$Q(0) = CV_0, \dot{Q}(0) = 0, x_s(0) = 0, \dot{x}_s(0) = 0, m(0) = m_0, T(0) = T_0$$

Siendo m_0 y T_0 la masa y temperatura inicial del plasma respectivamente, mientras que V_0 es el voltaje inicial del banco de capacitores.

Geometría de cámara de aceleración coaxial

De las ecuaciones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$\frac{Q(t)}{C} = I(t) (R_{ext} + R_p) + \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{x_s(t)}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) + \mu_0 \frac{\delta}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \right] \dot{I}(t) + \quad (2.3.39)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \dot{x}_s(t) I(t) \\
 \frac{d}{dt} [m \dot{x}_s(t)] & = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) I(t)^2 + \dot{m}(t) \sqrt{\gamma \frac{(\gamma+1)}{2}} RT \frac{C_f}{C_m} \quad (2.3.40)
 \end{aligned}$$

$$(2.3.41) \quad m C_p \frac{DT}{Dt} = \left[I^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma T^4 + \left(\vec{j} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{V} Vol - m \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \right) \right]$$

$$n_e = n_C^+ + n_F^+ = \frac{n_C^0 K_C}{n_e + K_C} + \frac{n_F^0 K_F}{n_e + K_F} \quad (2.3.42)$$

$$\dot{m} = \frac{\mu_0 I^2 (r_0^2 - r_i^2)}{55,342 r_o^2 V_{crit}} \quad (2.3.43)$$

$$R_p = 2,57 \frac{r_0 - r_i}{T_e^{3/4} (r_0 + r_i)} \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1,24 \times 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e} \right)^{1/2} \right)}{\tau}} \quad (2.3.44)$$

Sujeta a las siguientes condiciones iniciales (CI):

$$Q(0) = CV_0, \dot{Q}(0) = 0, x_s(0) = 0, \dot{x}_s(0) = 0, m(0) = m_0, T(0) = T_0$$

Siendo m_0 y T_0 la masa y temperatura inicial del plasma respectivamente, mientras que V_0 es el voltaje inicial del banco de capacitores.

2.3.2.3. Implementación numérica del Modelo B

Al igual que con el Modelo A, se define como vector de estado \vec{z} a:

$$\vec{z} = [z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] = [Q, x_s, m, \dot{Q}, \dot{x}_s, T] \quad (2.3.45)$$

Es decir, el vector de estado estará compuesto por la carga eléctrica $Q(t)$, la posición de la lámina de corriente $x_s(t)$, la masa ionizada $m(t)$, la variación temporal de la carga eléctrica (no es mas que la corriente eléctrica) $\dot{Q}(t)$, la velocidad de la lámina de corriente $\dot{x}_s(t)$ y la temperatura del plasma T .

Geometría de Cámara de Aceleración Paralela Llamando $k_{rect} = \frac{\mu_0 h}{4,04 w V_{crit}}$, sabiendo que $\dot{z}_0 = \dot{z}_3$, $\dot{z}_1 = \dot{z}_4$ y que $\dot{z}_2 = k_{rect} \dot{z}_3^2$, reemplazando en las Ecuaciones 2.3.33, 2.3.34, 2.3.35 y 2.3.37, y despejando las variables derivadas respecto al tiempo, es decir, las \dot{z}_i , queda:

$$(2.3.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = z_3 \\ \dot{z}_1 = z_4 \\ \dot{z}_2 = k_{rect} z_3^2 \\ \dot{z}_3 = \left[-\frac{z_0}{C} - z_3 (R_{ext} + R_p) - \mu_0 \frac{h}{w} z_3 z_4 \right] / \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{h}{w} z_1 + \mu_0 \frac{\delta}{2} \frac{h}{w} \right] \\ \dot{z}_4 = \frac{z_3^2}{z_2} \left[\frac{1}{2} \mu_0 \frac{h}{w} + k_{rect} \sqrt{\gamma \frac{(\gamma+1)}{2}} R z_5 \frac{C_f}{C_m} - k_{rect} z_4 \right] \\ \dot{z}_5 = \left[z_3^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma z_5^4 + \mu_0 \frac{h}{w} z_3^2 z_4 - z_2 z_4 \dot{z}_4 - \mu_0 \frac{h \delta}{2w} \left(2z_3 \dot{z}_3 - \frac{z_3^2 \dot{z}_2}{z_2} \right) \right] / [z_2 C_p] \end{array} \right.$$

Es decir, resulta un conjunto de ODEs de primer orden cuya solución puede obtenerse numéricamente.

Geometría de Cámara de Aceleración Coaxial Llamando $k_{coax} = \frac{\mu_0(r_0^2 - r_i^2)}{55,342r_0^2 V_{crit}}$, sabiendo que $\dot{z}_0 = z_3$, $\dot{z}_1 = z_4$ y que $\dot{z}_2 = k_{coax} z_3^2$, reemplazando en las Ecuaciones 2.3.39, 2.3.40, 2.3.41 y 2.3.43, y despejando las variables derivadas respecto al tiempo, es decir, las \dot{z}_i , queda:

$$(2.3.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = z_3 \\ \dot{z}_1 = z_4 \\ \dot{z}_2 = k_{coax} z_3^2 \\ \dot{z}_3 = \left[-\frac{z_0}{C} - z_3 (R_{ext} + R_p) - \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) z_3 z_4 \right] / \left[L_{ext} + \mu_0 \frac{z_1}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) + \mu_0 \frac{\delta}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \right] \\ \dot{z}_4 = \frac{z_3^2}{z_2} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) + k_{coax} \sqrt{\gamma \frac{(\gamma+1)}{2}} R z_5 \frac{C_f}{C_m} - k_{coax} z_4 \right] \\ \dot{z}_5 = \left[z_3^2 R_p - \epsilon A_{rad} \sigma z_5^4 + \frac{\mu_0 \pi (r_0^2 - r_i^2)}{4\pi^2 r_m^2} z_3^2 z_4 - z_2 z_4 \dot{z}_4 - \frac{\mu_0 \delta (r_0^2 - r_i^2)}{4\pi r_m^2} \left(2z_3 \dot{z}_3 - \frac{z_3^2 \dot{z}_2}{z_2} \right) \right] / [z_2 C_p] \end{array} \right.$$

Siendo $r_m = \frac{r_0 + r_i}{2}$ el radio medio de la cámara de aceleración coaxial.

Con lo cual se obtiene un conjunto de ODEs de primer orden que podemos solucionar numéricamente. En cuanto a la integración numérica, valen las mismas aclaraciones expuestas para el Modelo A (ver Sección 2.3.1.5).

Una vez integrado el sistema de ecuaciones correspondiente, se obtendrá la variación temporal del vector de estado, es decir, la dependencia temporal de la carga eléctrica, la posición de la lámina de corriente, la masa ionizada, la corriente, la velocidad de la lámina de plasma y su temperatura.

2.3.2.4. Validación del Modelo B

Para validar el Modelo B propuesto se utilizaron los datos experimentales de nueve PPTs ablativos de Teflón® que aparecen en la literatura especializada, los mismos que se tuvieron en cuenta para validar el Modelo A. Los valores correspondientes a la geometría y parámetros eléctricos de los PPTs de interés se obtuvieron de las distintas referencias

bibliográficas citadas en la Sección 2.3.1.6. Al igual que antes, las variables a analizar son la masa ablacionada total m_b , el bit de impulso I_{bit} y el impulso específico I_{sp} .

Implementando en Python el sistema de ecuaciones de acuerdo a la sección 2.3.2.3, se obtuvieron los siguientes resultados:

<i>PPT</i>	<i>Val. Experimental</i>			<i>Val. Numérico</i>			<i>Error Relativo</i>		
	m_b [μgr]	I_{bit} [$\mu N s$]	I_{sp} [s]	m_b [μgr]	I_{bit} [$\mu N s$]	I_{sp} [s]	e_{m_b} [%]	$e_{I_{bit}}$ [%]	$e_{I_{sp}}$ [%]
<i>LES-6a</i>	5.5	18.0	333.6	7,2	21,1	296,5	31,6	16,9	-11,1
<i>LES-6b</i>	10.0	31.2	318.0	8,4	33,3	403,6	-16,0	6,6	26,9
<i>OSU_LeRC</i>	26.5	249.6	960.1	31,9	315,6	1012,2	19,9	26,4	5,4
<i>PPPA</i>	1780.0	17000	973.6	1827,5	19602,8	1093,4	2,2	15,3	12,3
<i>XPPT_1</i>	28.5	279.5	999.7	33,7	249,5	755,6	18,1	-10,7	-24,4
<i>LES-8-9</i>	34.7	300.0	879.5	31,8	238,3	764,4	-8,4	-20,6	-13,0
<i>PPT_H</i>	55.0	800	1482.7	60,8	872,8	1464,1	10,5	9,1	-1,2
<i>PPT_2</i>	45.0	252.0	570.8	48,7	268,7	562,2	8,3	6,6	-1,5
<i>PPT_4</i>	99.0	315.0	324.3	118,3	392,2	338,0	19,5	24,5	4,2
				<i>Errores Medios:</i>			15,0	15,2	11,1

Tabla 2.4: Resultados obtenidos al utilizar el Modelo B.

Como se puede observar de la Tabla 2.4, los valores medios de los errores relativos que se obtuvieron de analizar nueve PPTs cuya geometría de cámara de aceleración puede ser paralela o coaxial y su alimentación del tipo Breech-Fed o Side-Fed utilizando el Modelo B, oscilan alrededor del 15 [%] para la masa ablacionada y el bit de impulso, mientras que para el impulso específico el error medio fue del 11 [%].

Estos resultados, por otro lado, además de ampliar la base sobre la cual se realiza la validación, resultan ser mejores estimaciones que las obtenidas en [9], [41], y [42] al utilizar modelos cero dimensionales donde en el mejor de los casos se obtuvieron errores del 17 [%], 15 [%] y 40 [%] para la masa ablacionada, el bit de impulso y el impulso específico respectivamente.

Por último, además de validar el Modelo B propuesto a partir de los resultados obtenidos (Tabla 2.4), se destaca que son una indicación clara de la robustez del mismo, ya que como se puede ver de analizar la Tabla 2.1 tanto los valores de los parámetros eléctricos como geométricos abarcan un amplio rango de posibilidades.

2.3.2.5. Aplicación del Modelo B al PPT LEs-6b

Enfocando nuestro estudio en el propulsor LES-6b, a continuación se muestran los resultados que obtenemos de correr el Modelo B:

Datos del motor:

$PPT = Les_6b-rect$

Tipo de alimentacion = Breech fed

$E0 [J] = 1.85$

$Ltot [nH] = 39.61$

$Trad [us] = 1.81$

$Imax [kA] = 4.24$

Performances obtenidas del modelo:

$Masa\ total\ [ugr] = 8.40$

$Masa\ ionizada\ [ugr] = 0.79$

$Masa\ neutra\ [ugr] = 7.61$

$alpha_i\ [%] = 9.41$

$alpha_n\ [%] = 90.58$

$Ibit\ total\ [u.Ns] = 33.25$

$Ibit\ ion\ [u.Ns] = 23.22$

$Ibit\ n\ [u.Ns] = 10.03$

$Iion/Ibit\ [%] = 69.82$

$In/Ibit\ [%] = 30.18$

$Isp\ [s] = 403.57$

$Vmean\ [km/s] = 3.96$

$Vion\ [km/s] = 35.46$

$Rendimiento\ [%] = 3.56$

Obtenemos los errores porcentuales cometidos:

$error_masa\ [%] = -16.01$

$error_Ibit\ [%] = 6.57$

$error_Isp\ [%] = 26.89$

En cuanto a la temperatura del plasma $T(t)$, la densidad de partículas de electrones $n_e(t)$ y la corriente eléctrica $I(t)$ en la lámina, en las figuras siguientes se presentan sus dependencias temporales:

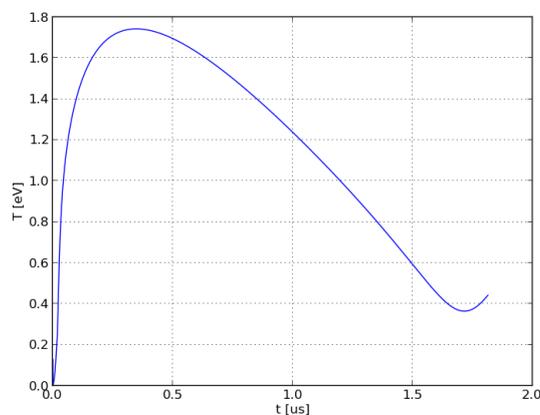


Figura 2.12: Temperatura del plasma en función del tiempo (LES-6b) - Modelo B.

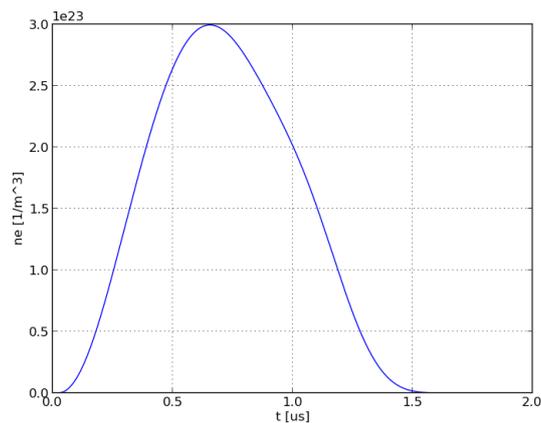


Figura 2.13: Densidad de partículas de electrones en función del tiempo (LES-6b) - Modelo B.

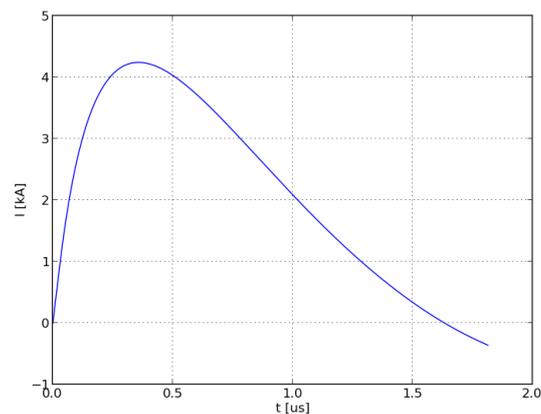


Figura 2.14: Corriente en función del tiempo (LES-6b) - Modelo B.

Como podemos ver, y de acuerdo a los valores experimentales disponibles que se resumen en la Tabla 2.3, el Modelo B arroja buenas estimaciones de la masa ablacionada, masa neutra, el bit de impulso, el impulso específico, la velocidad media de salida de los gases y la velocidad de salida de los iones en relación a los datos experimentales. Por otro lado, la variación en el tiempo de la temperatura del plasma, la densidad de partículas de electrones y la corriente eléctrica, se encuentran en los órdenes de magnitud observados en la práctica [58, 59].

Capítulo 3

Análisis de Sensibilidad de los Modelos Propuestos

En vistas de identificar y evaluar cuantitativamente el efecto de ciertas variables de interés durante el diseño, se realizará un análisis de sensibilidad de dichos parámetros respecto de la masa ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo. Los modelos analizados son el Modelos A y B que fueron desarrollados y validados en el capítulo anterior.

Las variables que se analizarán se distinguen entre variables geométrica y eléctricas, a saber:

- Variables Geométricas:
 - Geometría de cámara paralela:
 - Distancia interelectrodos h .
 - Ancho de los electrodos w .
 - Largo de la cámara de aceleración l .
 - Geometría de cámara coaxial:
 - Radio interior r_i .
 - Radio exterior r_o .
 - Largo de la cámara de aceleración l .
- Variables Eléctricas:
 - Resistencia exterior de la cámara de aceleración R_{ext} .
 - Inductancia exterior de la cámara de aceleración L_{ext} .
 - Voltaje de carga u operación de los capacitores V_0 .
 - Capacidad equivalente del banco de capacitores C .

Es decir, se tienen 3 variables geométricas y 4 variables eléctricas, sumando un total de 63 estudios de casos considerando los 9 motores utilizados para la validación. Por razones de espacio y claridad, en el presente trabajo no se expondrán los resultados particulares del análisis de sensibilidad de cada propulsor, en vez de ello se listarán los variaciones medias encontradas.

Asumiendo que las variables analizadas pueden tener un rango de variación de +/-80 [%] respecto del valor nominal o constructivo del motor, a continuación se muestran los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad realizado mediante la utilización de los Modelos A o B propuestos en este trabajo.

3.1. Modelo Propuesto A

En la Tabla 3.1 se muestran las variaciones porcentuales medias producidas en las performances de los nueve propulsores analizados al variar en +/- 80 % alguna de las variables de entrada listadas mas arriba.

<i>Variable</i>	$h(r_o)$	$w(r_i)$	l	R_{ext}	L_{ext}	V_0	C
m_{ion}	80 %	55 %	3 %	45 %	12 %	140 %	90 %
I_{bit}	80 %	125 %	5 %	45 %	30 %	165 %	90 %
I_{sp}	80 %	150 %	6 %	45 %	30 %	115 %	65 %
η	60 %	330 %	10 %	100 %	75 %	155 %	65 %
Val. Medios	75 %	165 %	6 %	59 %	37 %	144 %	78 %

Tabla 3.1: Variaciones medias respecto de los valores nominales de las variables de interés - Modelo A.

Como se puede ver, de las variables estudiadas en el análisis de sensibilidad la única que no provoca variaciones significativas en la masa ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo es la longitud de la cámara de aceleración l .

Tomando como objeto de estudio al propulsor LES-6b, a continuación, en las Figuras 3.1 a 3.7 se muestran las variabilidades encontradas:

- Sensibilidad del Modelo A respecto a h (LES-6b):

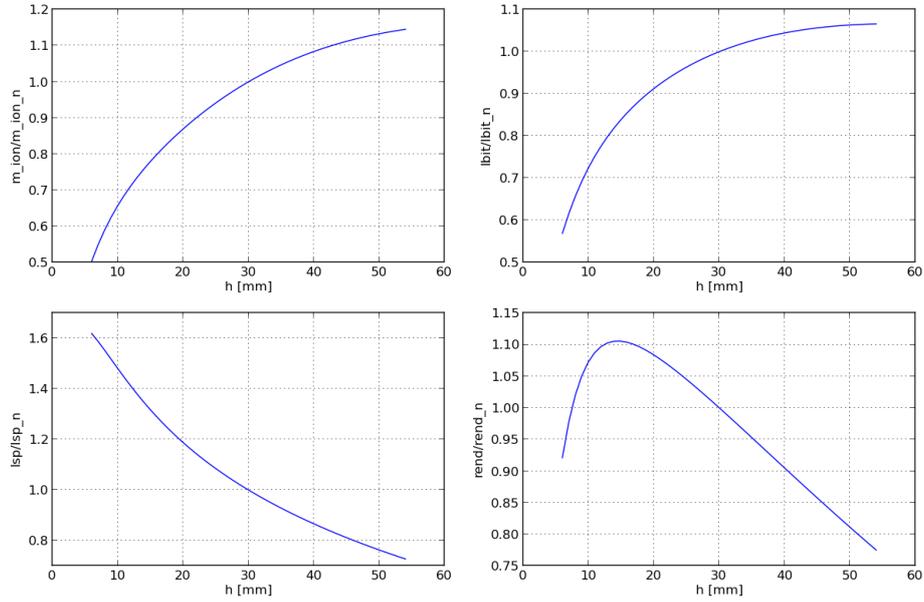


Figura 3.1: Sensibilidad del modelo respecto a h (LES-6b) - Modelo A.

- Sensibilidad del Modelo A respecto a w (LES-6b):

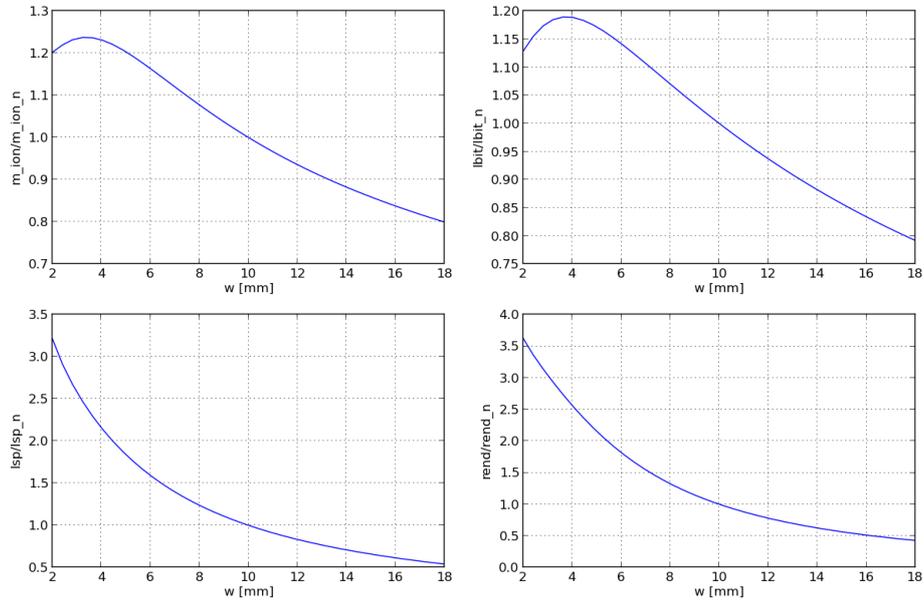


Figura 3.2: Sensibilidad del modelo respecto a w (LES-6b) - Modelo A.

- Sensibilidad del Modelo A respecto a l (LES-6b):

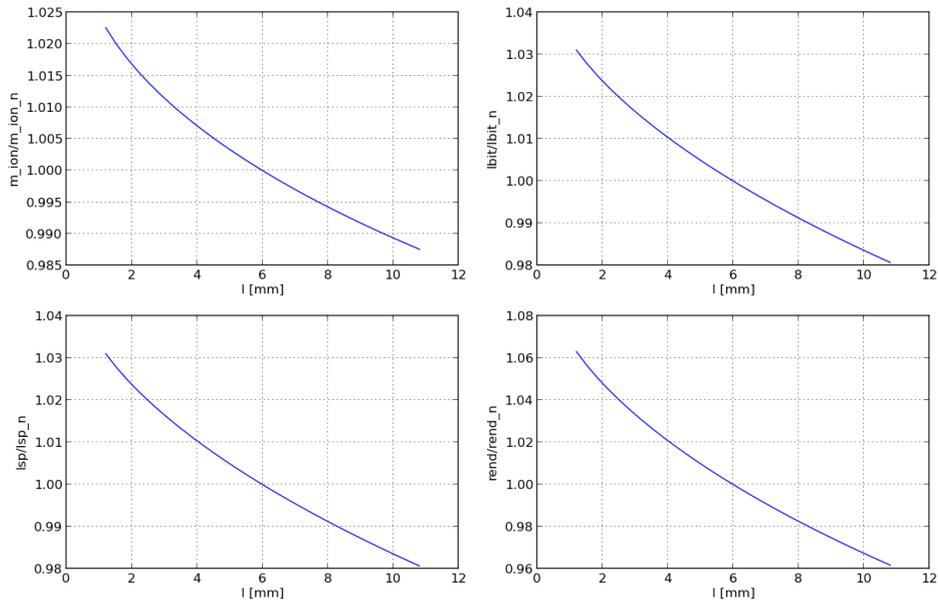


Figura 3.3: Sensibilidad del modelo respecto a l (LES-6b) - Modelo A.

- Sensibilidad del Modelo A respecto a R_{ext} (LES-6b):

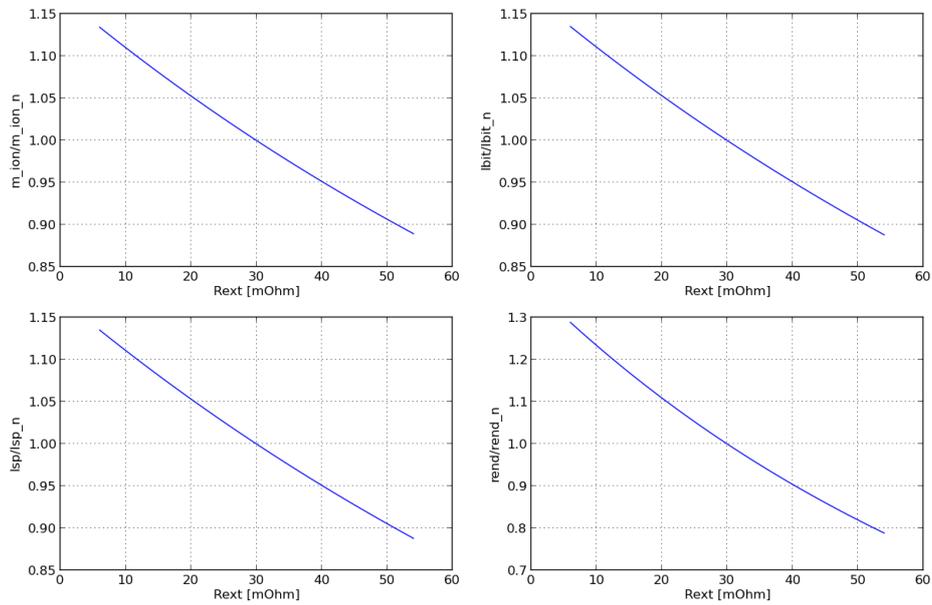


Figura 3.4: Sensibilidad del modelo respecto a R_{ext} (LES-6b) - Modelo A.

- Sensibilidad del Modelo A respecto a L_{ext} (LES-6b):

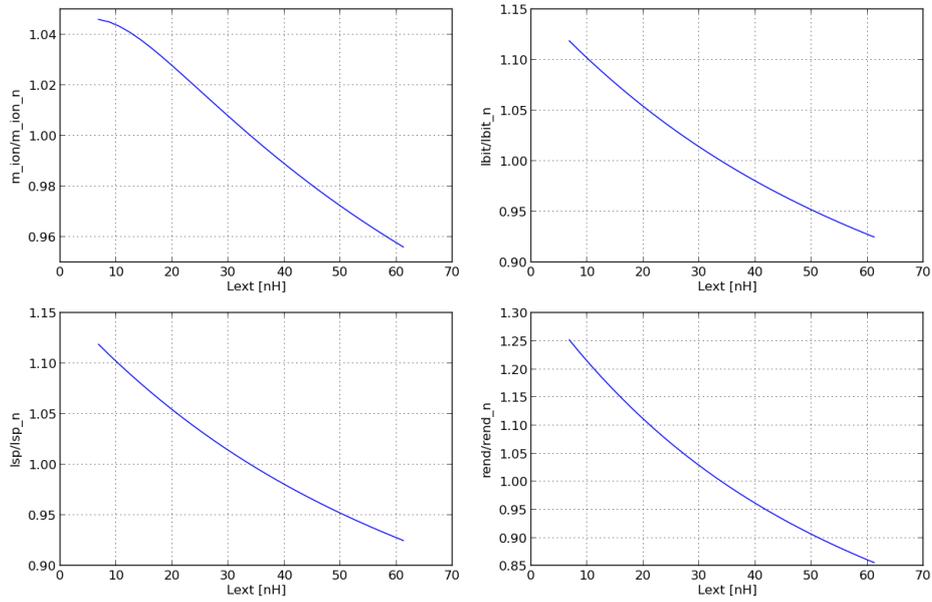


Figura 3.5: Sensibilidad del modelo respecto a L_{ext} (LES-6b) - Modelo A.

- Sensibilidad del Modelo A respecto a V_0 (LES-6b):

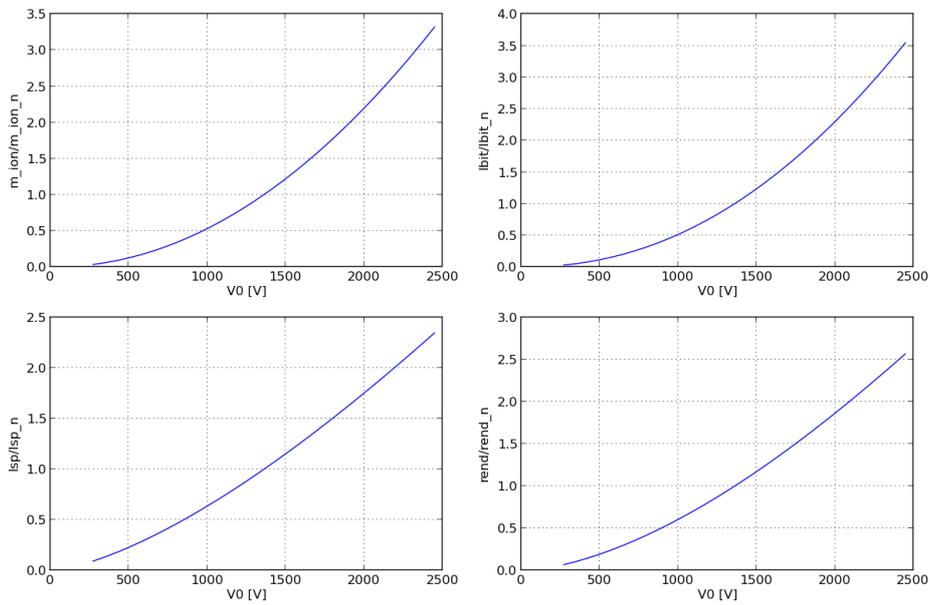


Figura 3.6: Sensibilidad del modelo respecto a V_0 (LES-6b) - Modelo A.

- Sensibilidad del Modelo A respecto a C (LES-6b):

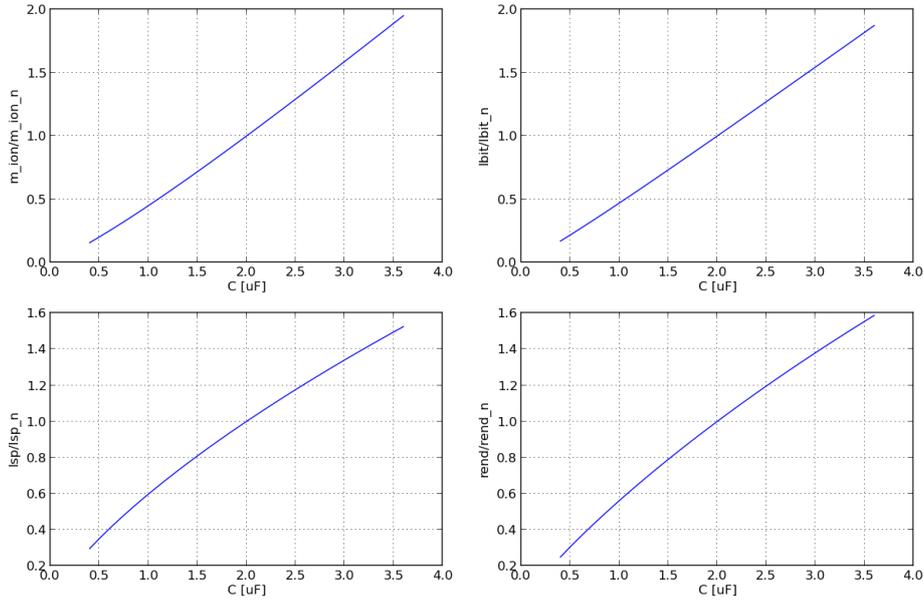


Figura 3.7: Sensibilidad del modelo respecto a C (LES-6b) - Modelo A.

Como se observa de las figuras anteriores, en algunos casos las variaciones son excesivamente grandes, sin embargo, podrían no ser prácticamente realizables.

En la Figura 3.2, se aprecia una variación del I_{bit} y el η mayor a dos veces el valor nominal del propulsor, sin embargo, los valores de w (ancho de la cámara de aceleración) para los que se presenta esta variación son muy difíciles de llevar a la práctica. Es decir, construir una cámara de aceleración de geometría paralela cuyo ancho sea igual a $2 [mm]$ tiene limitaciones prácticas (falta de espacio para la colocación de la bujía de ignición, por ejemplo) que harían a ese diseño inviable. Por lo tanto, los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad no deben considerarse infalibles, sino que debe analizarse cada caso en particular.

3.2. Modelo Propuesto B

En la Tabla 3.2 se muestran las variaciones porcentuales medias producidas en las performances de los nueve propulsores analizados al variar en $\pm 80\%$ alguna de las variables de entrada listadas mas arriba.

Como se ve, de las variables estudiadas en el análisis de sensibilidad la única que no provoca variaciones significativas en la masa ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo es la longitud de la cámara de reacción l .

Tomando como objeto de estudio al propulsor LES-6b, en las Figuras 3.8 a 3.14 se muestran las variabilidades encontradas:

<i>Variable</i>	$h(r_o)$	$w(r_i)$	l	R_{ext}	L_{ext}	V_0	C
m_{ion}	48 %	88 %	2 %	45 %	11 %	160 %	85 %
I_{bit}	90 %	125 %	5 %	68 %	30 %	160 %	88 %
I_{sp}	65 %	150 %	4 %	68 %	30 %	115 %	70 %
η	80 %	170 %	8 %	103 %	60 %	135 %	80 %
<i>Val. Medios</i>	71 %	133 %	4 %	71 %	33 %	143 %	81 %

Tabla 3.2: Variaciones medias respecto de los valores nominales de las variables de interés - Modelo B.

- Sensibilidad del Modelo B respecto a h (LES-6b):

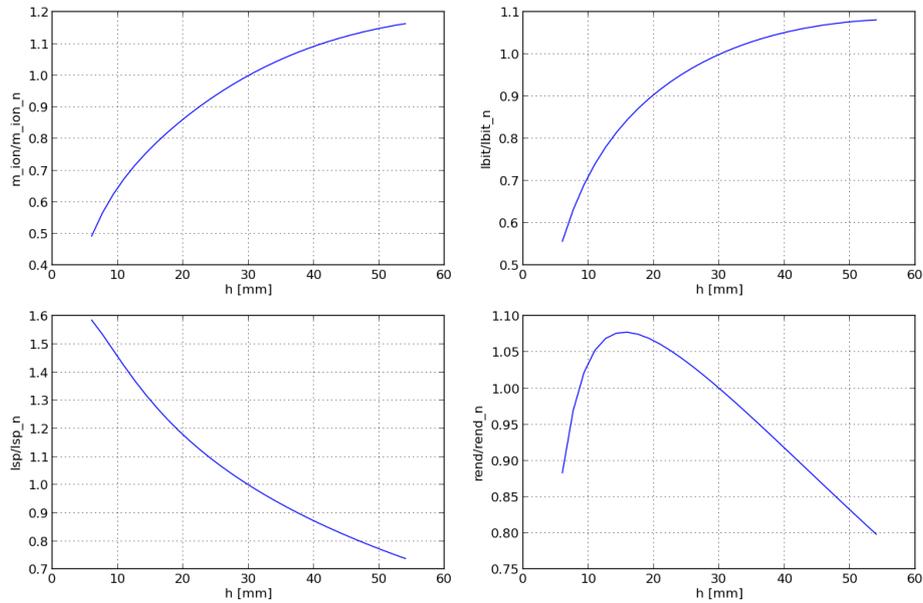


Figura 3.8: Sensibilidad del modelo respecto a h (LES-6b) - Modelo B.

- Sensibilidad del Modelo B respecto a w (LES-6b):

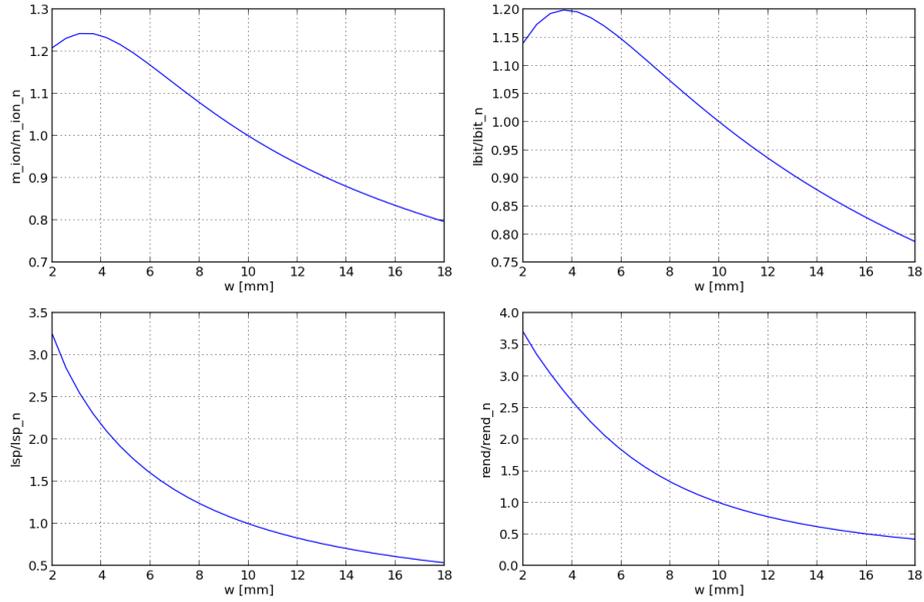


Figura 3.9: Sensibilidad del modelo respecto a w (LES-6b) - Modelo B.

- Sensibilidad del Modelo B respecto a l (LES-6b):

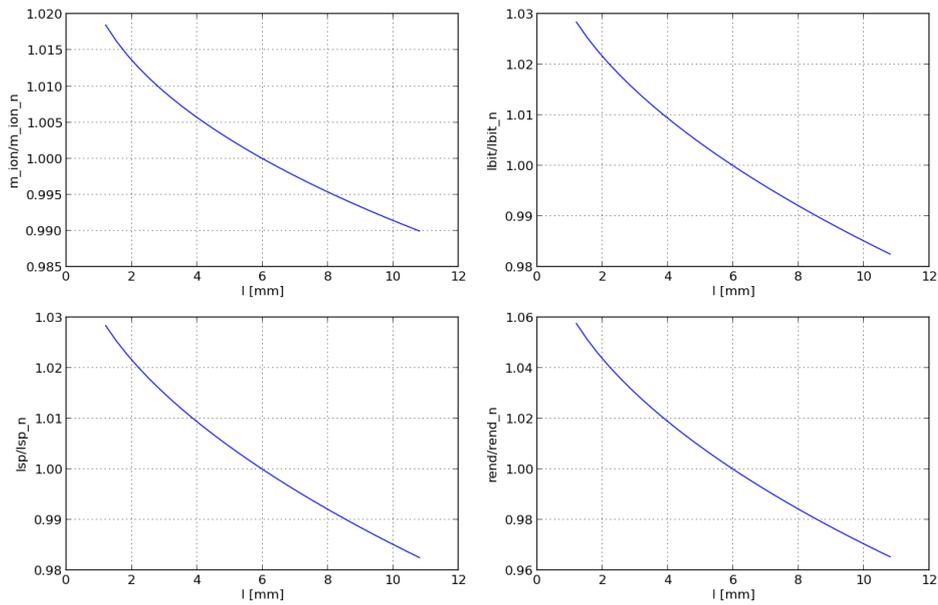


Figura 3.10: Sensibilidad del modelo respecto a l (LES-6b) - Modelo B.

- Sensibilidad del Modelo B respecto a R_{ext} (LES-6b):

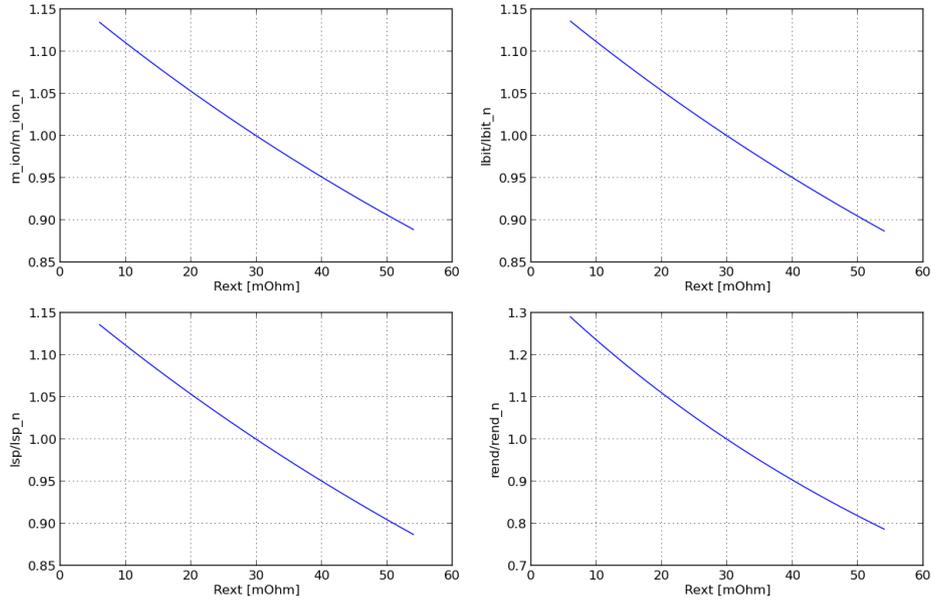


Figura 3.11: Sensibilidad del modelo respecto a R_{ext} (LES-6b) - Modelo B.

- Sensibilidad del Modelo B respecto a L_{ext} (LES-6b):

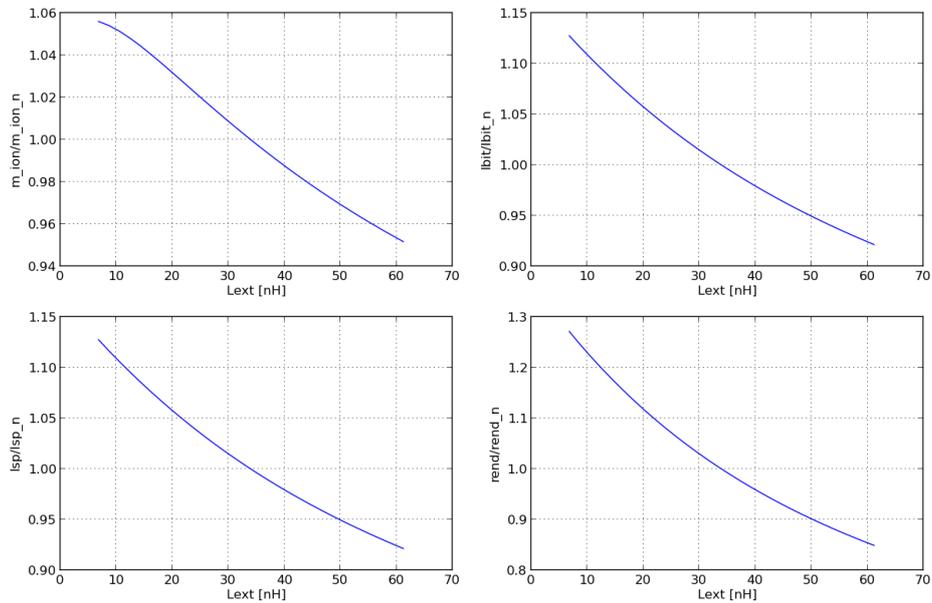


Figura 3.12: Sensibilidad del modelo respecto a L_{ext} (LES-6b) - Modelo B.

- Sensibilidad del Modelo B respecto a V_0 (LES-6b):

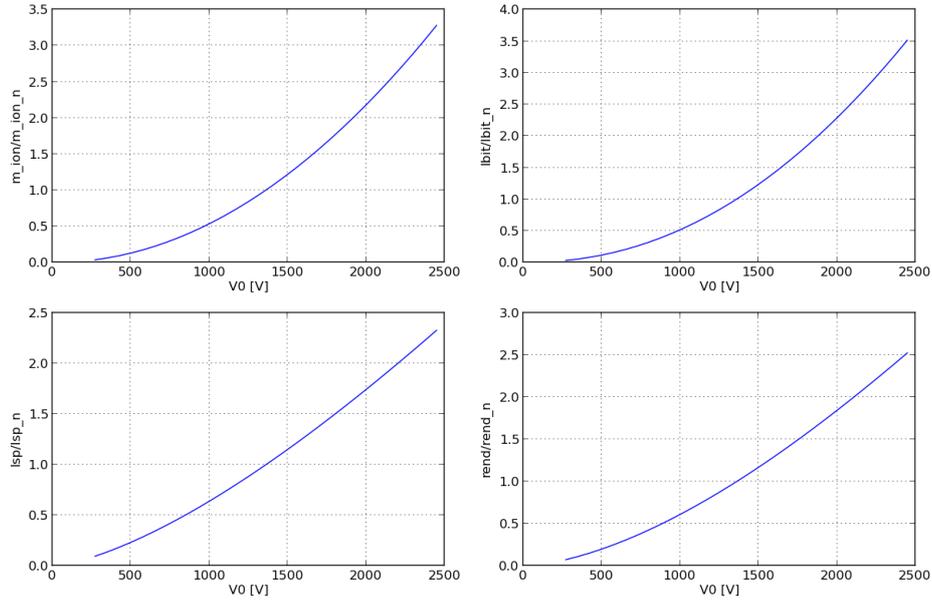


Figura 3.13: Sensibilidad del modelo respecto a V_0 (LES-6b) - Modelo B.

- Sensibilidad del Modelo B respecto a C (LES-6b):

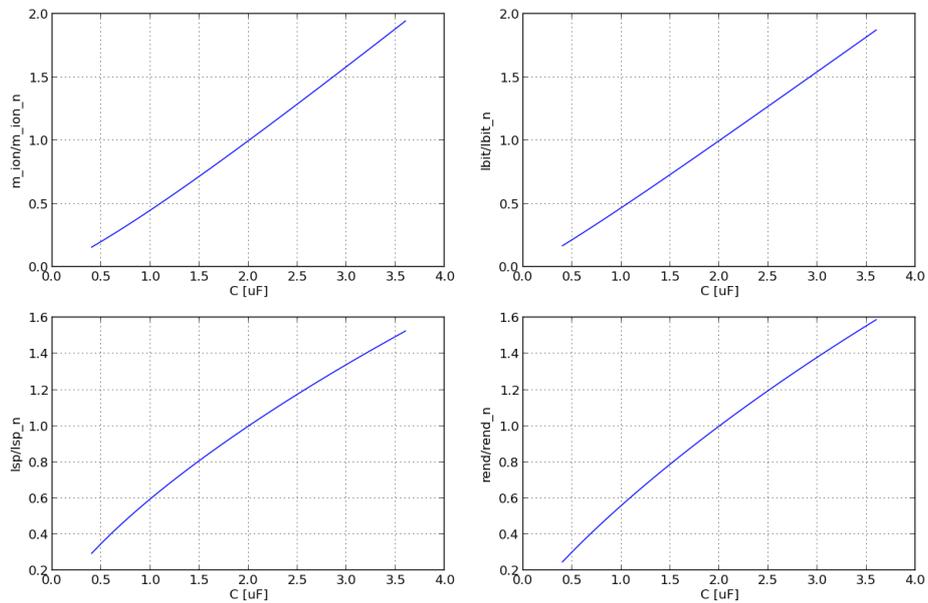


Figura 3.14: Sensibilidad del modelo respecto a C (LES-6b) - Modelo B.

Como se puede ver de las figuras anteriores, en algunos casos las variaciones son

excesivamente grandes, sin embargo, podrían no ser prácticamente realizables.

Al igual que con el Modelo A, en la Figura 3.9 se aprecia una variación del I_{sp} y el η mayor a dos veces el valor nominal del propulsor, sin embargo, los valores de w (ancho de la cámara de aceleración) para los que se presenta esta variación son muy difíciles de llevar a la práctica. Es decir, construir una cámara de aceleración de geometría paralela cuyo ancho sea igual a $2[mm]$ tiene limitaciones prácticas y constructivas (falta de espacio para la colocación de la bujía de ignición, por ejemplo) que harían a ese diseño inviable. Por lo tanto, los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad no deben considerarse infalibles, sino que debe analizarse para cada caso en particular sin perder de vista aspectos técnicos y constructivos del motor.

3.3. Análisis de los resultados

Como se ha visto en la Sección 2.3 donde se presentan los dos modelos propuestos, la diferencia entre ellos radica en la implementación de la ecuación de la energía en el sistema de ecuaciones originales. En el Modelo B se tiene en cuenta la energía cinética del plasma y la energía electromagnética para el cómputo de la entalpía total y además se incluye la potencia aportada por la Fuerza de Lorentz a la lámina de plasma, mientras que en el Modelo A se desprecian todas estas cantidades nombradas anteriormente.

En cuanto al análisis de sensibilidad ambos modelos demostraron tener una dependencia aproximadamente lineal en la altura h o radio externo r_o de la cámara de aceleración, dependiendo si es paralela o coaxial respectivamente, la resistencia externa R_{ext} y la capacidad equivalente del banco de capacitores C ; respecto a la masa iónica ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo. Las variables que mayor afectaron a los resultados fueron el ancho de la cámara de aceleración w y la tensión de operación del banco de capacitores V_0 , mientras que la inductancia exterior L_{ext} y la longitud de la cámara de aceleración l fueron las menos significativas en los dos modelos propuestos.

Por último, podemos decir que no existen diferencias importantes en cuanto a los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad utilizando los Modelos A o B, como se puede ver en la siguiente Tabla 3.3 resumen:

Val. Medios	$h (r_o)$	$w (r_i)$	l	R_{ext}	L_{ext}	V_0	C
Modelo A	75 %	165 %	6 %	59 %	37 %	144 %	78 %
Modelo B	71 %	133 %	4 %	71 %	33 %	143 %	81 %

Tabla 3.3: Análisis de Sensibilidad - Comparación entre el Modelo A y B propuesto.

Capítulo 4

Optimización

En ingeniería, cualquiera sea su especialidad, se diseñan y construyen distintos elementos o máquinas para que cumplan con un fin determinado verificando, además, que sea el mejor diseño posible en alguno o muchos sentidos (el mas económico, el mas liviano, el mas rápido, etc). El proceso de determinar el mejor diseño se denomina Optimización.

En términos matemáticos, un problema de optimización individual se define como:

Dado un vector de dimensión n , a saber $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ cuyos elementos son las variables de decisión o variables de diseño de nuestro caso, en el espacio de solución X , encontrar un vector x^ que minimice o maximice una dada función objetivo $z(x^*)$. Donde el espacio de soluciones X puede tener ciertas restricciones, tales como $g_j(x^*) = b_j$ para $j = 1, \dots, m$, y/o límites impuestos por el problema en cuestión en las variables de decisión utilizadas.*

Si bien optimizar un proceso puede hacerse manualmente, es decir, en base a la experiencia y análisis de un problema en particular, cuando el número de variables comienza a ser elevado necesitamos recurrir a las computadoras, ya que realizar un análisis manualmente se vuelve inviable.

En este sentido, para poder llevar a cabo el proceso de optimización utilizando las computadoras se necesita disponer de [60]:

- **Modelo cuantificable:** Es decir, un modelo que nos permita obtener el valor de la respuesta de interés. En el caso del presente trabajo podría ser, por ejemplo, la masa ablacionada y el bit de impulso del propulsor. Determinar un modelo válido y con una buena aproximación al problema real es la tarea mas importante en cualquier proceso de optimización.
- **Variables de Diseño:** Es decir, variables que el diseñador seleccione bajo algún criterio para ser ajustadas durante el proceso de optimización. En algunos textos también se las puede identificar como grados de libertad del modelo computacional. El grado o cantidad de variables de diseño que tengamos nos define las dimensiones del denominado Espacio de Diseño.

- Criterios de Optimización: Son los criterios que se pretende optimizar en el problema. Estos pueden ser:
 - Funciones Objetivos: Representan las funciones que se desean maximizar o minimizar.
 - Restricciones: Representan los límites dentro de los cuales deben encontrarse las variables de diseño seleccionadas, si la restricción es una desigualdad; o el valor que debe satisfacer una variable de diseño dada si la restricción es una igualdad.

Una vez que se hayan definido los tres puntos anteriores se va a poder implementar el proceso de optimización en una computadora, ya sea utilizando algún software disponible en el mercado o algún código realizado por nosotros mismos.

En este trabajo se utilizarán algoritmos evolutivos del tipo genético para llevar a cabo el proceso de optimización. A continuación se desarrollarán sus características y las ventajas y desventajas respecto a los métodos de optimización mas convencionales como los de Newton, casi-Newton, o el de gradientes conjugados, entre otros.

4.1. Optimización Genética

Los algoritmos que se basan en el cómputo de gradientes tienen ciertos inconvenientes cuando el problema de optimización tiene las siguientes características [60]:

- Variables de diseño de valores discretos.
- Gran número de variables de diseño.
- Múltiples máximos, mínimos y puntos silla locales.
- Las funciones objetivo y de restricción no son diferenciables.

Con el motivo de salvar estas dificultades, en los últimos tiempos se ha propuesto una nueva familia de algoritmos de optimización llamados Algoritmos Evolutivos, los cuales se basan en la teoría de la selección natural de Darwin. En este sentido, imitan los procesos de reproducción, mutación e intercambio de información genética presentes en la naturaleza. Dentro de esta familia es que se encuentran los Algoritmos Genéticos (GA por sus siglas en inglés), donde su origen se remonta al trabajo publicado por Holland en la década del setenta [61].

De acuerdo con [62], son cuatro las diferencias mas importantes que caracterizan a los GA respecto de los algoritmos tradicionales basados en el cálculo de gradientes, a saber:

- Los GA trabajan con las variables codificadas, no con las variables en sí.
- Los GA comienzan su proceso de búsqueda desde una población inicial de puntos o variables, no desde un único punto.

- Los GA usan la información proveniente de las funciones objetivo, no de las derivadas u otros cálculos auxiliares.
- Los GA utilizan reglas de transición probabilísticas, no deterministas.

En este sentido, y según [60], los pasos generales del cual dispone un GA son:

1. Determinar una codificación para el diseño. Normalmente los GA clásicos utilizan codificación binaria. Luego, cada diseño codificado es denominado Cromosoma.
2. Generar la población inicial. Esto puede realizarse creando aleatoriamente un conjunto de diseños posibles que se encuentren dentro del espacio de diseño. Habitualmente una población de 20 a 100 diseños suele funcionar bien.
3. Elegir una tasa de intercambio de material genético (crossover en inglés) y de mutación. Valores típicos son 0.8 y 0.01 respectivamente. Los valores dados anteriormente son orientativos, ya que dependen del problema y generalmente se determinan en la práctica.
4. Seleccionar un modo en el cual medir o ponderar la mejora de un diseño respecto de otro. Usualmente será el valor que surja de la función objetivo (en nuestro caso, podría ser el rendimiento propulsivo, por ejemplo).
5. Optar por un modo de selección de los padres, los cuales darán lugar a la nueva generación. Esto puede realizarse de muchas maneras posibles. Dos de las metodologías mas populares son la selección del tipo ruleta y la por torneos (o en inglés roulette wheel selection o tournament selection, respectivamente).
6. Llevar a cabo el intercambio de material genético (crossover en inglés).
7. Llevar a cabo el proceso de mutación (mutation en inglés).
8. Una nueva población a sido creada por lo cual sólo resta decodificar cada variable para obtener la nueva generación de diseños. Se vuelve al paso 2 y se repite el proceso.
9. Se continúa hasta un número específico de generaciones o hasta que el cambio promedio en la función objetivo este por debajo de una tolerancia especificada por el usuario.

Se hace notar que los valores de ajuste de los GA como el tamaño de la población, el tipo de selección de padres para la reproducción, el tipo de intercambio de material genético y mutación, al igual que la probabilidad de ocurrencia de estos últimos, dependen de las características del problema en particular que se este resolviendo [63].

4.1.1. Optimización Genética aplicada a los PPTs

Como se ha mencionado anteriormente, en primer lugar debemos seleccionar el Modelo Cuantificable, luego a las Variables de Diseño (VD) y por último, especificar los Criterios de Optimización.

Como modelo cuantificable se utilizará el Modelo B propuesto en la Sección 2.3.2. Este último ha sido validado con nueve PPTs indicados en la literatura especializada mostrando confiabilidad y robustez.

En cuanto a las VD, al igual que como se realizó en el estudio de sensibilidad llevado a cabo en el Capítulo 3, se las discrimina en variables geométricas y eléctricas, a saber:

- VD Geométricas:
 - Geometría de cámara paralela:
 - Distancia interelectrodos h
 - Ancho de los electrodos w
 - Largo de la cámara de aceleración l
 - Geometría de cámara coaxial:
 - Radio interior r_i
 - Radio exterior r_o
 - Largo de la cámara de aceleración l
- VD Eléctricas:
 - Resistencia exterior de la cámara de aceleración R_{ext}
 - Inductancia exterior de la cámara de aceleración L_{ext}
 - Voltaje de carga u operación de los capacitores V_0
 - Capacidad equivalente del banco de capacitores C

Con respecto a los Criterios de Optimización, las funciones objetivo a considerar dependerán de si se está implementando un proceso de optimización individual o múltiple como se verá mas adelante.

En relación a las restricciones, para todos los casos se considerará que las variables optimizadas deberán estar dentro del 20 [%] superior e inferior de las VD iniciales. Por otro lado, la población inicial para comenzar el proceso de optimización, en cualquier caso, se obtiene aleatoriamente a partir de los valores de diseño de cada propulsor indicados en la literatura especializada acotado en mas o en menos un 20 [%].

Para llevar a cabo el proceso de optimización empleando GA, se utilizó como plataforma una librería de distribución libre llamada Distributed Evolutionary Algorithms in Python ó DEAP por sus siglas en inglés [64]. Esta librería, orientada a objetos y escrita en lenguaje Python, implementa una gran variedad de algoritmos evolutivos los cuales pueden utilizarse según cada caso particular.

En el código de optimización elaborado en Python y que se utilizará en éste trabajo, se distinguen tres tipos posibles de optimización que pueden realizarse:

- Optimización Geométrica: En la cual se analizan las dimensiones de la cámara de aceleración (paralela: $[h, w, l]$ o coaxial: $[r_o, r_i, l]$).
- Optimización Eléctrica: En la cual se analizan parámetros eléctricos del propulsor, como R_{ext} , L_{ext} , V_0 y C .
- Optimización Full: En la cual se analizan los parámetros eléctricos y geométricos en conjunto.

De acuerdo al interés del diseñador y a la posibilidad de realizar cambios en el diseño, se puede optar por un tipo u otro de optimización.

4.1.2. Optimización Individual

En la optimización individual se maximiza o minimiza una única función objetivo, por lo que como resultado del proceso de optimización obtenemos el valor óptimo de cada VD de nuestro problema.

A continuación se muestra un extracto de código propio elaborado en Python, en el cual se visualiza el uso de la librería DEAP, a saber:

```
#Programra que realiza optimizacion utilizando algoritmos geneticos
from deap import algorithms, base, creator, tools
import random
import numpy
from time import time
import functions as fc
import EM_ppal, EM_ppal_plots
#####
#Variables de OPTIMIZACION:-----
n_pop=100
#Parametros de SIMULACION:-----
dx,vec_PPT,tipo_opt=fc.param_simul()
if tipo_opt=='Geometrica':
    n_VD=3
elif tipo_opt=='Electrica':
    n_VD=4
elif tipo_opt=='Full':
    n_VD=7
#####
ti=time()
creator.create("FitnessMax", base.Fitness, weights=(1.0,))
creator.create("Individual", list, fitness=creator.FitnessMax)
toolbox = base.Toolbox()
# Attribute generator
toolbox.register("attr_float", random.random)
```

```

# Structure initializers
toolbox.register("individual", tools.initRepeat, creator.Individual, toolbox.attr_float, n_VD)
toolbox.register("population", tools.initRepeat, list, toolbox.individual)
toolbox.register("evaluate", EM_ppal.fitness_motor)
toolbox.decorate("evaluate", tools.DeltaPenalty(EM_ppal.feasible, -10.))
toolbox.register("mate", tools.cxTwoPoint)
toolbox.register("mutate", tools.mutGaussian, mu=0, sigma=1, indpb=0.1)
toolbox.register("select", tools.selTournament, tournsize=3)

```

Como se puede observar, inicialmente se debe especificar el tamaño de la población n_{pop} (en nuestro caso va a ser fijo generación tras generación) y el tipo de optimización que se quiere realizar (eléctrica, geométrica o full). Luego se crea la clase “FitnessMax” e “Individual”, donde el parámetro `weights` tiene dos funciones, por un lado indicar si se debe maximizar o minimizar la función objetivo dependiendo de si su valor es positivo o negativo respectivamente; y por otro lado, es una constante que multiplica el valor de la función objetivo al cual aplica, lo que puede llegar a ser de utilidad en análisis de mas de una función objetivo para indicar mayor relevancia relativa de una respecto de otra.

Posteriormente se registra e indica en el módulo “base.Toolbox” de que tipo de datos estarán compuestos los posibles diseños (“individual”) y la población (“population”), al igual que se especifican como se realizará la evaluación de cada función objetivo, intercambio de material genético, mutación y la selección de los padres (“evaluate”, “mate”, “mutate” y “select” respectivamente). Se utiliza lo que se denomina “decorador”, lo cual nos permite incorporar nuevos filtros antes o después de utilizar una dada función sin tener la necesidad de cambiarla. En este caso, el “decorador” utiliza la función “tools.DeltaPenalty” que a su vez corre la subrutina `EM_ppal.feasible`. Lo que se consigue con esto es verificar las restricciones del criterio de diseño, que como se ha dicho anteriormente es que las VD óptimas se encuentren en ± 20 [%] de las variables originales o constructivas del propulsor analizado, sin modificar el código original. En el archivo “EM_ppal.fitness_motor” se implementa el modelo propuesto presentado en la Sección 2.3.

A continuación se resumen los datos de entrada necesarios para correr el proceso de optimización individual, los datos de salida y los parámetros de simulación utilizados en el código desarrollado.

Datos de entrada al Modelo de Optimización Individual:

- Tamaño de la población n_{pop} .
- Variación máxima y mínima dx que pueden tener las VD al generar aleatoriamente la población inicial y obtener los resultados finales optimizados.
- Tipo de optimización: Eléctrica, Geométrica o Full.
- Dimensiones y tipo de la geometría de cámara de aceleración, tipo de alimentación, características eléctricas del propulsor y valores experimentales de la masa

ablacionada, el bit de impulso y el impulso específico del propulsor que se quiere analizar.

- Número de generaciones al cual detener el proceso n_{gen} .
- Parámetros de simulación: Tipo de selección de los padres, mutación e intercambio de material genético a utilizar. Probabilidad de realizar intercambio de material genético $cxpb$, probabilidad de llevar a cabo una mutación en un diseño $indpb$ y probabilidad de realizar una mutación a una VD en particular $mutpb$.

Datos de salida del Modelo de Optimización Individual:

- Valores de las VD optimizadas.
- Valor de la función objetivo optimizada.

Los valores utilizados en los parámetros de simulación individual fueron:

- $dx = 0,2$
- Se utiliza la selección por torneos de tamaño igual a 3 para seleccionar a los padres (Tournament selection)
- Se utiliza la mutación de Gauss, con $u = 0$ y $\sigma = 1$, siendo μ y σ la media y la desviación estándar de la distribución normal.
- Se utiliza el intercambio de información genética de dos puntos (*cxTwoPoint*)
- $cxpb = 0,8$
- $indpb = 0,1$
- $mutpb = 0,1$

Los valores adoptados de los parámetros n_{pop} y n_{gen} pueden variar de un tipo de optimización a otra y se especificarán en cada caso particular.

Con estos valores se llevaron a cabo las distintas simulaciones cuyos resultados se analizarán en la Sección 4.2 mas adelante.

4.1.3. Optimización Múltiple

Cuando en un proceso de optimización debemos maximizar o minimizar mas de una función objetivo, se lo denomina optimización múltiple. Este sería el caso si, por ejemplo, quisiéramos maximizar el rendimiento propulsivo y además minimizar la masa ablacionada.

Las dos metodologías mas populares para resolver problemas de optimización múltiple son [65]: el método de las sumas ponderadas y el método de Pareto. En el método de

los sumas ponderadas se combina en una única función objetivo $z_{global}(x)$ las distintas funciones objetivo $z_j(x)$ del problema, es decir:

$$z_{global}(x_i) = w_1 z_1(x_i) + \dots + w_j z_j(x_i) \quad (4.1.1)$$

Donde $j = 1, \dots, k$, siendo k el número de funciones objetivo que estemos considerando y w_j son sus respectivos pesos, cumpliéndose que $\sum w_j = 1$. El vector x_i representa el conjunto de variables de diseño i .

Este método es mas simple y requiere menor esfuerzo de cálculo computacional respecto del método de Pareto, sin embargo la selección correcta de los pesos es una tarea difícil ya que se realiza experimentalmente. Por otro lado, además, pequeñas perturbaciones en los valores de los pesos seleccionados pueden producir soluciones muy diferentes. La principal desventaja del método de las sumas ponderadas es que suelen tener inconvenientes al buscar soluciones que se encuentren uniformemente distribuidas sobre una superficie o frente de Pareto no convexo [66].

En el método de Pareto, en cambio, se determina el conjunto de soluciones óptima de Pareto o un subconjunto de esta. Se denomina conjunto óptimo de Pareto a un conjunto de soluciones que no son “dominadas” (en relación al valor de su función objetivo) por ninguna de las otras en el espacio posible de soluciones. De esta forma una solución óptima de Pareto no puede ser mejorada con respecto a algún objetivo en particular sin que empeore al menos algún otro de ellos. Consecuentemente, el diseño óptimo final será una decisión de compromiso que deberá tomar el diseñador como sucede en la práctica en problemas sencillos.

En vistas de obtener la solución óptima de Pareto, se han desarrollado una gran cantidad de algoritmos genéticos para problemas de optimización múltiple. El primero de ellos fue el propuesto en [67] denominado Vector Evaluated Genetic Algorithms (ó VEGA), y luego vinieron muchos otros, entre los cuales uno de los mas populares y que esta implementado en la plataforma DEAP y Matlab, por ejemplo, es el denominado Fast Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (ó NSGA-II, ver [68]) que es una versión mejorada del trabajo original llamado Nondominated Sorting Genetic Algorithm (ó NSGA, ver [69]). A continuación se señalan las características principales del algoritmo NSGA-II:

- Algoritmo mas rápido que sus predecesores ya que baja en un orden de magnitud la cantidad de cálculos a realizar para obtener cada nueva generación o frente de Pareto.
- Incorpora el concepto de Elitismo durante la búsqueda de la solución óptima de Pareto, lo cual, además de garantizar que las buenas soluciones perduren en cada generación y no sean modificadas, ha demostrado que aumenta significativamente la velocidad de convergencia del método [66, 70].

- Se elimina la necesidad de especificar un parámetro en relación a garantizar la diversidad en el cálculo de las soluciones.

Debido a lo señalado anteriormente es que el algoritmo NSGA-II de búsqueda de las soluciones óptimas de Pareto ha sido y sigue siendo utilizado ampliamente en problemas de optimización múltiple en ingeniería.

A continuación se muestra un extracto de código propio elaborado en Python, en el cual se visualiza el uso de la librería DEAP aplicado a problemas de optimización múltiple, a saber:

```

ti=time()
creator.create("FitnessMinMax", base.Fitness, weights=Obj_type)
creator.create("Individual", array.array, typecode='d', fitness=creator.FitnessMinMax)
toolbox = base.Toolbox()
# Attribute generator
toolbox.register("attr_float", random.random)
# Structure initializers
toolbox.register("individual", tools.initRepeat, creator.Individual, toolbox.attr_float, n_VD)
toolbox.register("population", tools.initRepeat, list, toolbox.individual)
#Implementando Restricciones mediante Decoradores:
def checkBounds(min, max):
    def decorator(func):
        def wrapper(*args, **kargs):
            offspring = func(*args, **kargs)
            for child in offspring:
                for i in range(len(child)): #len(child)=n_VD
                    if child[i] > max[i]:
                        child[i] = max[i]
                    elif child[i] < min[i]:
                        child[i] = min[i]
            return offspring
        return wrapper
    return decorator
toolbox.register("evaluate", EM_ppal.Multi_Obj)
toolbox.register("mate", tools.cxBlend, alpha=0.5)
toolbox.register("mutate", tools.mutGaussian, mu=0, sigma=1, indpb=0.1)
toolbox.register("select", tools.selNSGA2)
toolbox.decorate("mate", checkBounds(min_v, max_v))
toolbox.decorate("mutate", checkBounds(min_v, max_v))

```

Al igual que en el caso de optimización individual, primero se crean las clases “FitnessMinMax” y “Individual”, donde ahora el parámetro weights será igual a una tupla de mas de un elemento ya que vamos a resolver problemas de optimización múltiple. Por otro lado, se puede ver que se define la función “checkBounds”, la cual contiene al Decorador el cual nos acotará el rango de validez de cada VD a los valores especificados por el problema o diseñador. Por último, se registran e indican el tipo de mutación, selección de padres y evaluación de la función objetivo a utilizar. En este caso se utiliza

el denominado “Blend Crossover” como operador de intercambio de material genético ya que con el mismo se obtuvieron mejores resultados respecto a otros tipos.

En el “Blend Crossover”, considerando dos padres x_1 y x_2 y que $x_1 < x_2$, un hijo surge de seleccionar aleatoriamente un valor en el rango $[x_1 - \alpha(x_2 - x_1), x_2 + \alpha(x_2 - x_1)]$, donde el valor de α normalmente se elige igual a 0.5.

A continuación se resumen los datos de entrada necesarios para correr el proceso de optimización múltiple, los datos de salida y los parámetros de simulación utilizados en el código desarrollado.

Datos de entrada al Modelo de Optimización Múltiple:

- Tamaño de la población n_{pop} .
- Indicación de la tupla $Obj - type = (1, -1)$, en la cual se indican la cantidad y tipo de funciones objetivo a considerar. Valores unitarios positivos o negativos indican que debe maximizarse o minimizarse la función objetivo correspondiente.
- Variación máxima y mínima dx que pueden tener las VD al generar aleatoriamente la población inicial y obtener los resultados finales optimizados.
- Tipo de optimización: Eléctrica, Geométrica o Full.
- Dimensiones y tipo de la geometría de cámara de aceleración, tipo de alimentación, características eléctricas del propulsor y valores experimentales de la masa ablacionada, el bit de impulso y el impulso específico del propulsor que se quiere analizar.
- Número de generaciones al cual detener el proceso n_{gen} .
- Parámetros de simulación: Se implementa el algoritmo NSGA-II para obtener el tipo de selección de los padres, la mutación es del tipo Gausseana y el intercambio de material genético es del tipo “Blend Crossover” como se ha explicado anteriormente. La probabilidad de realizar intercambio de material genético se identifica con $cspb$, la probabilidad de llevar a cabo una mutación en un diseño con $indpb$ y la probabilidad de realizar una mutación a una VD en particular con $mutpb$. También se debe especificar el parámetro $lambda$ que indica el tamaño de la descendencia al utilizar el algoritmo implementado en DEAP llamado “eaMuPlusLambda” del cual resulta cada generación.

Datos de salida del Modelo de Optimización Múltiple:

- Conjunto de soluciones óptimas de Pareto.
- Valor de cada función objetivo optimizada.

Los valores utilizados en los parámetros de simulación para la optimización múltiple son:

- $dx = 0,2$
- Tipo de selección de padres: Se utiliza el algoritmo NSGA-II.
- Se utiliza la mutación de Gauss, con $u = 0$ y $\sigma = 1$, siendo μ y σ la media y la desviación estándar de la distribución normal.
- Se utiliza el intercambio de información genética del tipo “Blend Crossover”, con $\alpha = 0,5$ (*cxBlend*)
- $cspb = 0,8$
- $indpb = 0,1$
- $mutpb = 0,1$
- $lambda = 1,5n_{pop}$

Los valores adoptados de los parámetros n_{pop} y n_{gen} pueden variar de un tipo de optimización a otra y se especificarán en cada caso particular.

De esta manera se han sentado las bases para llevar a cabo el proceso de optimización utilizando la librería DEAP programada en Python y de distribución libre. En la Sección 4.2 se analizarán los resultados obtenidos al aplicar dicho procedimiento a PPTs citados en la literatura especializada.

4.2. Análisis de los resultados

En la Sección 2.3 se presentaron dos modelos propuesto, los cuales incorporan como variable temporal adicional a la temperatura y densidad del plasma. Luego, en la Sección 2.3.1.5 y 2.3.2.3 se indicó la manera en que estos modelos pueden implementarse computacionalmente. Por último, en la sección anterior se presentó una pequeña introducción a la optimización genética, sus ventajas y desventajas respecto a los métodos de optimización convencionales, y se indicó la manera en que se llevará a cabo este proceso en el presente trabajo.

En esta sección se mostrarán y analizarán los resultados obtenidos al implementar el proceso de optimización genética, ya sea del tipo múltiple o individual. Si bien disponemos de una base de datos de nueve PPTs, por cuestiones de claridad y espacio en el presente trabajo se mostrarán los resultados obtenidos para el propulsor LES-6b, uno de los mas referenciados en la literatura especializada, utilizando el Modelo B propuesto en la Sección 2.3.2 como modelo cuantificable.

4.2.1. Optimización Individual

En la optimización individual existe una única función objetivo la cual queremos optimizar. Puntualmente hablando de los PPTs, esta podría ser el bit de impulso, el

impulso específico, la masa ablacionada, el rendimiento propulsivo, etc., es decir, cualquier función que el diseñador considere de suma importancia optimizar para cumplir con ciertos requerimientos especificados por la misión o el proyecto.

En este caso se va a elegir como función objetivo el rendimiento propulsivo η . De esta manera, el objetivo del proceso de optimización será maximizar dicha función. La misma puede obtenerse como:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}m_b V_{mean}^2}{E_0} \quad (4.2.1)$$

Siendo m_b , $V_{mean} = \frac{I_{bit}}{m_b}$ y E_0 la masa total ablacionada, la velocidad media de salida de los gases y la energía inicial previa a la descarga de corriente del propulsor, respectivamente. De esta manera, el rendimiento propulsivo nos indica que parte de la energía entregada al motor es convertida en energía cinética de los gases en la salida.

4.2.1.1. Optimización Geométrica

En este punto se centra la atención en optimizar la geometría de la cámara de aceleración utilizando como base el Modelo B propuesto. Cuando la geometría es del tipo paralela las variables a optimizar son la altura h , el ancho w y el largo l de la misma. Cuando la cámara es del tipo coaxial, las variables a optimizar son el radio exterior r_o , el radio interior r_i y el largo l de la misma.

Los parámetros de simulación utilizados se indicaron en la Sección 4.1.2. A continuación se presentan los resultados obtenidos para el propulsor LES-6b:

Variables	Val. Numéricos Nominales	Val. Numéricos Optimizados	Diferencia [%]
h [mm]	30.0	24.0	-19.9
w [mm]	10.0	8.1	-19.1
l [mm]	6.0	4.9	-19.0
η [%]	3.56	5.0	41.1

Tabla 4.1: Resultados de la Optimización Geométrica utilizando el Modelo B propuesto - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 100$ - $n_{gen} = 20$.

Donde Valores Numéricos Nominales y Valores Numéricos Optimizados hace mención a los valores de las variables constructivas del propulsor (ya establecidos y fijos) y a los valores optimizados numéricamente. Se hace notar que el valor nominal del rendimiento propulsivo η surge de aplicar el Modelo B presentado en la Sección 2.3 con los valores nominales.

Como se puede observar de la tabla anterior, asumiendo una variación de las VD en +/- 20 [%] como límite, se encuentra que el rendimiento propulsivo (es la función

objetivo elegida) aumenta un 41 [%]. Esto se logra disminuyendo el valor de las VD a saber h , w , y l en aproximadamente un 20 [%]. Es decir, a la vista de los resultados, si el objetivo es aumentar el rendimiento propulsivo, esto puede lograrse disminuyendo las dimensiones de h , w y l de la cámara de aceleración del propulsor. Obviamente, lo antes dicho muestra una tendencia ya que dicha disminución no puede ser arbitraria o muy grande debido a que pueden existir limitaciones constructivas y físicas que pueden volver inconcebible el diseño optimizado obtenido.

4.2.1.2. Optimización Eléctrica

Aquí se centra la atención en optimizar parámetros eléctricos del propulsor seleccionado utilizando como base el Modelo B propuesto en la Sección 2.3.2. Estos son la resistencia externa R_{ext} , la inductancia externa L_{ext} , la tensión de carga nominal V_0 y la capacidad equivalente C del banco de capacitores.

Los parámetros de simulación utilizados se indicaron en la Sección 4.1.2. A continuación se presentan los resultados obtenidos para el propulsor LES-6b:

Variables	Val. Numéricos Nominales	Val. Numéricos Optimizados	Diferencia [%]
R_{ext} [$m\Omega$]	30.0	24.1	-19.73
L_{ext} [nH]	34.0	24.5	-19.1
V_0 [V]	1360.2	1630.4	19.9
C [μF]	2.0	2.39	19.5
η [%]	3.56	6.1	71.4

Tabla 4.2: Resultados de la Optimización Eléctrica utilizando el Modelo B propuesto - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 100$ - $n_{gen} = 20$.

Donde al igual que antes, Valores Numéricos Nominales y Valores Numéricos Optimizados hace mención a los valores de las variables constructivas del propulsor (ya establecidos y fijos) y a los valores optimizados numéricamente. Se hace notar que el valor nominal del rendimiento propulsivo η surge de aplicar el Modelo B desarrollado en la Sección 2.3 con los valores nominales.

Como se ve de la tabla anterior, asumiendo una variación de las VD en +/- 20 [%] como límite, se encuentra que el rendimiento propulsivo aumenta un 71.4 [%]. Esto se logra disminuyendo el valor de R_{ext} y L_{ext} en 20 [%] aproximadamente, mientras que en cuanto a V_0 y C deben aumentarse en la misma proporción.

De esta manera, si el objetivo es aumentar el rendimiento propulsivo, esto puede lograrse disminuyendo los valores de resistencia e inductancia exteriores del propulsor y aumentando el valor de la capacidad y tensión de operación del banco de capacitores. Al igual que como se mencionó antes, esto indica una tendencia de comportamiento ya

que dicha disminución no puede ser arbitraria o muy grande debido a que pueden existir limitaciones constructivas y físicas que pueden volver inconcebible el diseño optimizado obtenido.

4.2.1.3. Optimización Full

En este caso se va a optimizar tanto los parámetros geométricos como eléctricos del propulsor seleccionado utilizando como base el Modelo B propuesto. Cuando el tipo de cámara de aceleración es paralela, como es el caso del propulsor LES-6b analizado, las variables geométricas incluyen la altura h , el ancho w y el largo l de la misma, en tanto que las variables eléctricas son la resistencia externa R_{ext} , la inductancia externa L_{ext} , la tensión de carga nominal V_0 y la capacidad equivalente C del banco de capacitores.

Los parámetros de simulación utilizados se indicaron en la Sección 4.1.2. A continuación se presentan los resultados obtenidos para el propulsor LES-6b:

Variables	Val. Numéricos Nominales	Val. Numéricos Optimizados	Diferencia [%]
h [mm]	30.0	24.14	-19.5
w [mm]	10.0	8.0	-20.0
l [mm]	6.0	4.89	-18.5
R_{ext} [mΩ]	30.0	24.5	-18.3
L_{ext} [nH]	34.0	27.7	-18.6
V_0 [V]	1360.2	1628.6	19.7
C [μF]	2.0	2.4	18.7
η [%]	3.56	7.3	105.9

Tabla 4.3: Resultados de la Optimización Full utilizando el Modelo B propuesto - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 100$ - $n_{gen} = 20$.

Al igual que antes, Valores Numéricos Nominales y Valores Numéricos Optimizados hace mención a los valores de las variables constructivas del propulsor y a los valores optimizados numéricamente. Se hace notar que el valor nominal del rendimiento propulsivo η surge de aplicar el Modelo B desarrollado en la Sección 2.3 con los valores nominales.

Como se puede ver en la tabla anterior, asumiendo una variación de las VD en +/- 20 [%] como límite, se encuentra que el rendimiento propulsivo puede aumentar un 105.9 [%], lo cual representa una mejora sustancial en esta función. Esto se logra disminuyendo aproximadamente en un 20 [%] el valor de h , w , l , R_{ext} y L_{ext} , mientras que para V_0 y C se deben aumentar en la misma proporción.

De esta forma, si el objetivo es aumentar el rendimiento propulsivo, esto puede obtenerse disminuyendo los valores característicos de la geometría de la cámara de aceleración, la resistencia e inductancia exterior del propulsor, y aumentando el valor de la capacidad

y tensión de operación del banco de capacitores. Como se mencionó antes, esto indica una tendencia de comportamiento ya que dicha disminución no puede ser arbitraria o muy grande debido a que pueden existir limitaciones constructivas y físicas que pueden volver inconcebible el diseño optimizado obtenido. Sin embargo, con sólo admitir una variación límite en las VD del 20 [%] respecto de los valores nominales o de fabricación, se puede llegar a lograr una mejora en el rendimiento propulsivo de del 100 [%] aprximadamente.

4.2.1.4. Comentarios sobre la Optimización Individual

De los resultados presentados mas arriba en esta sección se pudo constatar que si nuestro objetivo es maximizar el rendimiento propulsivo η , esto se puede llevar a cabo disminuyendo el valor de las variables geométricas (h , w y l para el propulsor LES-6b) y de la resistencia e inductancia externa del motor, y aumentando el valor de la tensión de operación y capacidad del banco de capacitores.

Si bien a priori estas conclusiones son las mismas que las que se podrían inferir al observar los resultados arrojados por el análisis de sensibilidad realizado (Capítulo 3), se debe tener en cuenta que en un análisis de sensibilidad se estudia cuan sensible es un modelo o sistema a una variable en particular, manteniendo constante el resto de las mismas. Como el sistema de ecuaciones (ver Sección 2.3.1.4) con el que estamos trabajando es no lineal, el mismo no necesariamente podrá comportarse de la misma forma si modificamos mas de una variable de manera aislada o si las modificamos todas a la vez, que es lo que generalmente se realiza cuando se busca optimizar un diseño. Consecuentemente, un análisis de sensibilidad es de poca utilidad en la búsqueda de un diseño óptimo. En cambio, cuando realizamos optimización genética, se está estudiando el comportamiento del sistema ante variaciones en el total de las VD, con lo cual se logra cuantificar el efecto de las mismas en la función objetivo de interés (en esta caso, el rendimiento propulsivo) y así identificar el punto óptimo de diseño. Es decir, si bien los resultados obtenidos de la optimización individual parecieran marcar la misma tendencia que los resultados derivados del análisis de sensibilidad, el proceso de optimización está dando información extra con respecto al análisis de sensibilidad.

4.2.2. Optimización Múltiple

En el proceso de optimización múltiple se optimiza mas de una función objetivo simultáneamente, existiendo varias técnicas para poder realizarlo. En este trabajo, como se había señalado anteriormente, se utilizará el método de Pareto para encontrar las soluciones óptimas de diseño. En éste método no se obtiene una única solución posible sino un frente óptimo de Pareto el cual está compuesto por las distintas soluciones como se verá a continuación.

Se van a considerar dos funciones objetivo en el proceso de optimización múltiple:

- El bit de impulso I_{bit} : El cual, durante el proceso de optimización, se buscará

maximizar.

- La masa total ablacionada m : La cual se intentará minimizar durante el proceso de optimización.

Se hace notar que en este caso, como se maximizará el bit de impulso y minimizará la masa total ablacionada, y teniendo en cuenta que el impulso específico I_{sp} puede obtenerse como:

$$I_{sp} = \frac{I_{bit}}{m} \quad (4.2.2)$$

También se estará maximizando el impulso específico, el cual a su vez, es proporcional a la velocidad media de los gases a la salida (ver Sección 1.2).

A continuación se exponen los resultados obtenidos para los tres tipos de optimización múltiple realizados al propulsor LES-6b utilizando el Modelo B desarrollado en la Sección 2.3.

4.2.2.1. Optimización Geométrica

En este punto se centra la atención en optimizar la geometría de la cámara de aceleración como se indicó anteriormente, utilizando como base el Modelo B propuesto. Cuando la geometría es del tipo paralela las variables a optimizar son la altura h , el ancho w y el largo l de la misma. Cuando la cámara es del tipo coaxial, las variables a optimizar son el radio exterior r_o , el radio interior r_i y el largo l de la misma.

Los parámetros de simulación utilizados se indicaron en la Sección 4.1.3. En la Figura 4.1 se observa el frente óptimo de Pareto obtenido para el propulsor LES-6b, siendo las dos funciones objetivo seleccionadas: el bit de impulso y la masa total ablacionada. Los valores que se presentan en la misma se encuentran normalizados respecto a los valores nominales o de diseño.

Como se ha mencionado anteriormente, al obtener el frente de Pareto en los casos de optimización múltiple, no se encuentra una única solución posible sino un conjunto de soluciones o frente. Luego, de acuerdo a ciertos criterios que pueda adoptar el diseñador va a elegir un único diseño adecuado para su problema.

Como se puede ver de la Figura 4.1, cercano al origen del gráfico comenzamos con un diseño que provoca un aumento poco significativo del 4 [%] en el bit de impulso y una disminución del 25 [%] de la masa total ablacionada, es decir, este punto ya representa un diseño superior al original porque se ha disminuido un 25 [%] la masa total ablacionada y mantenido aproximadamente constante (aumento leve menor al 4 [%]) el bit de impulso. Hacia la derecha en el eje de abscisas, aumenta el bit de impulso y también aumentará la masa total ablacionada lo cual no es deseado ya que uno de los objetivos es minimizarla. Esta es una característica distintiva del diagrama de Pareto, cuando mejoramos una función objetivo, alguna de las restantes empeora. En el extremo del eje de abscisas, se

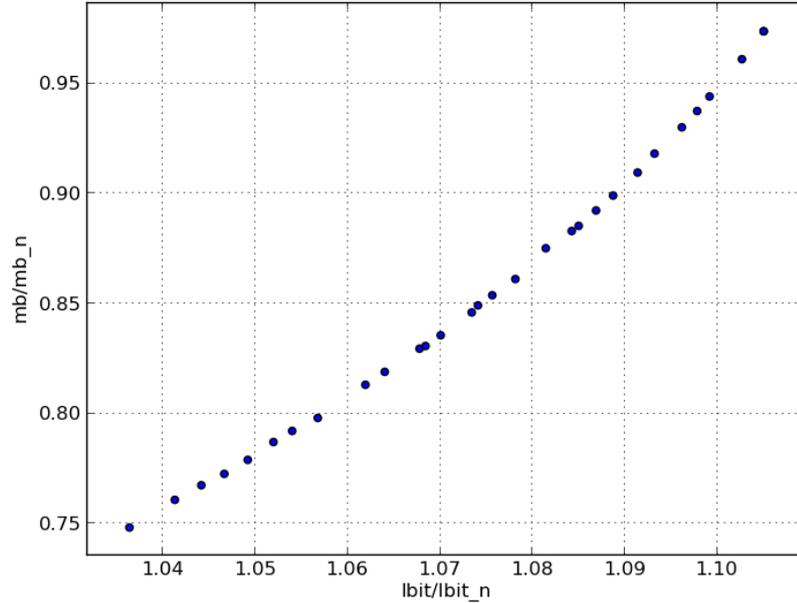


Figura 4.1: Frente Óptimo de Pareto - Optimización Geométrica - Modelo B - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 30$ - $n_{gen} = 30$.

ha aumentado el bit de impulso un 10 [%] y la masa total ablacionada correspondiente es un 5 [%] inferior al valor nominal o de diseño.

Como comentario final de la optimización geométrica se puede decir que el menor valor de la masa total ablacionada que es posible obtener al variar en +/- 20 [%] las VD geométricas es de un 25 [%], lo cual corresponde a un aumento del 4 [%] del bit de impulso. En el otro extremo, el mayor valor del bit de impulso que se puede lograr bajo las mismas condiciones es de un 10 [%], que se corresponde a un valor de masa total ablacionada de un 5 [%] inferior al valor nominal

4.2.2.2. Optimización Eléctrica

Aquí se centra la atención en optimizar parámetros eléctricos del propulsor seleccionado, usando como base el Modelo B propuesto en la Sección 2.3.2. Estos son la resistencia externa R_{ext} , la inductancia externa L_{ext} , la tensión de carga nominal V_0 y la capacidad equivalente C del banco de capacitores.

Los parámetros de simulación utilizados se indicaron en la Sección 4.1.3. En la Figura 4.2 se muestran los resultados obtenidos para el propulsor LES-6b siendo las dos funciones objetivo seleccionadas: el bit de impulso y la masa total ablacionada. Los valores que se presentan en dicha figura se encuentran normalizados respecto a los valores nominales o de diseño.

Como se puede ver de la Figura 4.2, cercano al origen se comienza con un diseño que

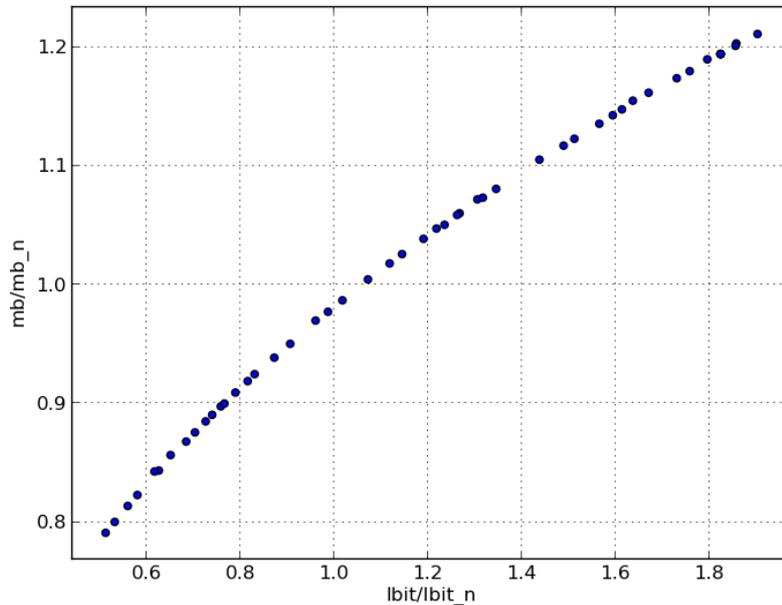


Figura 4.2: Frente Óptimo de Pareto - Optimización Eléctrica - Modelo B - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 50$ - $n_{gen} = 20$.

provoca una disminución mayor al 40 [%] y el 20 [%] para el bit de impulso y la masa total ablacionada respectivamente, es decir, este punto mejora en cuanto a disminuir la masa total ablacionada pero empeora la otra función objetivo o bit de impulso ya que también lo disminuye respecto a su valor nominal. Hacia la derecha en el eje de abscisas aumenta el bit de impulso y también aumenta la masa total ablacionada lo cual no es deseado ya que un objetivo es minimizarla. Como se indicó antes, ésta es una característica distintiva del diagrama de Pareto, cuando es mejorada una función objetivo, alguna de las restantes empeora.

Por otro lado, se puede ver que los valores nominales del propulsor LES-6b también son valores óptimos ya que se encuentran aproximadamente sobre la curva del frente óptimo de Pareto obtenido a partir de la optimización eléctrica. Es decir, si sólo se pudiera modificar las VD eléctricas del propulsor LES-6b, los valores de diseño originales serían valores óptimos si no se tuviera la necesidad de modificar la masa ablacionada total y el bit de impulso originales para cumplir con ciertas especificaciones impuestas por el diseño o la misión.

Por último, en el extremo del eje de abscisas, es decir, cuando se ha aumentado el bit de impulso un 90 [%], la masa total ablacionada correspondiente es levemente superior al 20 [%] del valor nominal o de diseño.

Como comentario final de la optimización eléctrica se puede indicar que el menor valor de la masa total ablacionada que se podría obtener al variar en +/- 20 [%] las VD eléctricas es de un 20 [%]; lo cual corresponde a una disminución superior al 40 [%] del

bit de impulso. En el otro extremo, el mayor valor del bit de impulso que podemos lograr bajo las mismas condiciones es de un 90 [%], que se corresponde a un valor de masa total ablacionada de un 20 [%] superior al valor nominal

4.2.2.3. Optimización Full

En este caso se va a optimizar tanto los parámetros geométricos como eléctricos del propulsor seleccionado, utilizando como base el Modelo B propuesto. Cuando el tipo de cámara de aceleración es paralela, como es el caso del propulsor LES-6b analizado, las variables geométricas incluyen la altura h , el ancho w y el largo l de la misma, en tanto que las variables eléctricas son la resistencia externa R_{ext} , la inductancia externa L_{ext} , la tensión de carga nominal V_0 y la capacidad equivalente C del banco de capacitores.

Los parámetros de simulación utilizados se indicaron en la Sección 4.1.3. A continuación, en la Figura 4.3, se presentan los resultados obtenidos para el propulsor LES-6b:

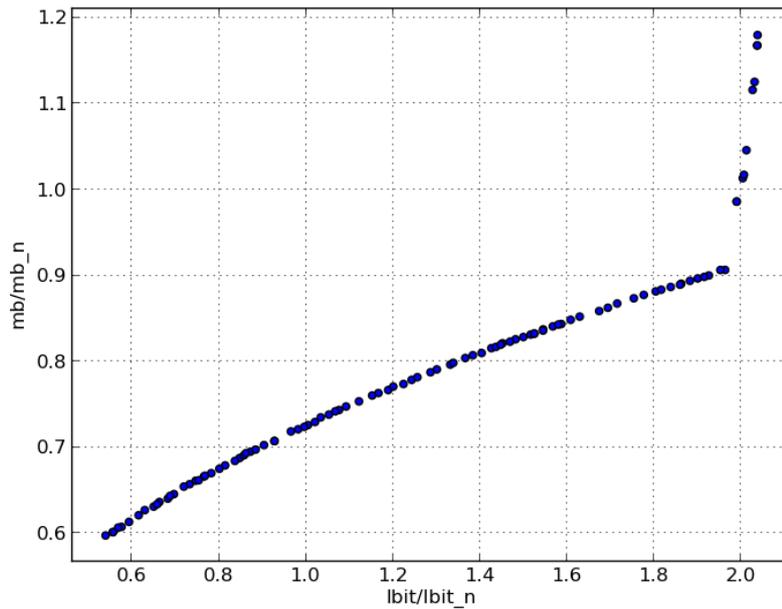


Figura 4.3: Frente Óptimo de Pareto - Optimización Full - Modelo B - APPT: LES-6b - $dx = 0,2$ - $n_{pop} = 100$ - $n_{gen} = 20$.

En la figura anterior se observa el frente óptimo de Pareto para las dos funciones objetivo seleccionadas: el bit de impulso y la masa total ablacionada. Los valores que se presentan en la Figura 4.3 se encuentran normalizados respecto a los valores nominales o de diseño.

Como se puede ver de la Figura 4.3, cercano al origen se comienza con un diseño que provoca una disminución mayor al 40 [%] tanto para el bit de impulso como para la masa total ablacionada, es decir, este punto mejora en cuanto a disminuir la masa total

ablacionada pero empeora la otra función objetivo o bit de impulso ya que también lo disminuye respecto a su valor nominal.

Por otro lado, se observa que para un bit de impulso igual al original (punto igual a uno en el eje de abscisas) se logra reducir la masa ablacionada aproximadamente un 25 [%], lo cual convierte a este nuevo diseño como superior al original. De izquierda a derecha de este punto, aumenta el bit de impulso y también aumenta la masa ablacionada total, aunque esta última siempre se mantiene por debajo de uno casi en toda su gráfica. En el extremo del eje de abscisas, es decir, cuando hemos aumentado el bit de impulso algo menos que un 100 [%], la pendiente de la masa total ablacionada cambia abruptamente, lo que lleva a que esta pueda crecer superando ampliamente su valor de diseño.

Se destaca que el menor valor de la masa total ablacionada que se puede obtener al variar en ± 20 [%] las VD eléctricas y geométricas es de un 40 [%], lo cual corresponde a una disminución de mas de un 40 [%] del bit de impulso. En el otro extremo, el mayor valor del bit de impulso que se podría lograr bajo las mismas condiciones es superior a un 100 [%], que se corresponde a un valor de masa total ablacionada de un 20 [%] superior al valor nominal. Sin embargo, debido al cambio abrupto de pendiente no se recomienda elegir puntos de diseño óptimos en esa zona.

4.2.2.4. Comentarios sobre la Optimización Múltiple

En la optimización múltiple se empieza a apreciar la potencialidad y utilidad de herramientas numéricas que asistan al diseñador. Se pudo verificar que en este tipo de problemas, no existe una única solución óptima de diseño, sino que el diseñador deberá optar entre las posibles soluciones que resulten del diagrama de Pareto.

Por otro lado, se verificó que la combinación de VD geométricas y eléctricas permiten obtener mejores resultados ya que es mas amplio el espectro de soluciones posibles que los algoritmos pueden encontrar. En este sentido, se obtuvo que en la optimización Full, casi todo el diagrama o soluciones óptimas del frente de Pareto resultaron ser superiores, desde el punto de vista de la optimización, a los valores originales o de diseño del propulsor.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones Generales

Mediante el empleo de los conocidos modelos electromecánicos y siguiendo el desarrollo dado en [26], se han propuesto dos modelos denominados Modelo A y Modelo B en los cuales se acopla la ecuación de la energía y la ecuación de Saha al sistema de ecuaciones original para incorporar la variación temporal de la temperatura y densidad de partículas de electrones en el plasma. La utilización de la ecuación de Saha es válida si se asume que el plasma se encuentra en equilibrio termodinámico local, lo cual es aproximadamente cierto si se considera que en el caso de los APPT de Teflón® normalmente se cumple que el tiempo de relajación de los iones o compuestos es bastante mas bajo que el tiempo característico de la descarga. En el Modelo A propuesto se desprecia en la ecuación de la energía la variación de la presión dentro de la lámina de corriente y la potencia aportada por la Fuerza de Lorentz. Además se considera a la energía térmica como único componente de la energía interna del gas. En el Modelo B propuesto, en cambio, se incorpora la potencia entregada por la Fuerza de Lorentz a la lámina de corriente y se considera a la energía cinética y magnética, además de la térmica, como componentes de la entalpía total del gas. Si bien los errores cometidos respecto a la masa ablacionada, el bit de impulso y el impulso específico son del mismo orden cuando se aplica el Modelo A o B propuesto a un propulsor en particular, se observó que la temperatura del plasma y densidad de electrones es superior en el Modelo B, no habiendo diferencia en la curva temporal de corriente respecto al Modelo A. Esto se debe a que se consideran términos adicionales en la ecuación de la energía en el Modelo B respecto del A, lo cual provoca un aumento de la variable temperatura y consecuentemente de la densidad del plasma.

Luego, se validaron los dos modelos propuestos con datos experimentales provenientes de nueve APPTs de Teflón® obtenidos de la literatura especializada. De los nueve motores que se utilizaron para la validación, siete de ellos presentan una geometría de electrodos paralela, mientras que los dos restantes, una geometría coaxial. En cuanto al tipo de alimentación del propelente, seis de ellos poseen una alimentación del tipo

breech-fed mientras que los otros tres propulsores una alimentación del tipo side-fed. Los resultados obtenidos al aplicar el Modelo A arrojaron un error relativo medio respecto a la masa ablacionada y el impulso específico del 15 [%], mientras que respecto al bit de impulso el error medio cometido fue del 11.5 [%]. En cuanto al Modelo B, se obtuvo un error relativo medio del 15 [%] para la masa ablacionada y el bit de impulso, mientras que para el impulso específico el error fue del 11.1 [%]. Estos resultados representan una mejora en las estimaciones realizadas con anterioridad por otros investigadores y por el autor de este trabajo [42, 71, 72] utilizando modelos analíticos cero dimensionales. Por otro lado, además de ampliar la base sobre la cual se validan los modelos numéricos propuestos respecto de otros modelos analíticos existentes, los resultados obtenidos son una clara muestra de la robustez de los mismos, ya que tanto los valores de los parámetros eléctricos como geométricos de los distintos propulsores analizados abarcan un amplio rango de posibilidades.

En vistas de identificar y evaluar cuantitativamente el efecto de ciertas variables de interés sobre los modelos propuestos, se realizó un análisis de sensibilidad de parámetros eléctricos y geométricos de los PPTs respecto a la masa ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo. Los parámetros geométricos analizados fueron la altura, el ancho y el largo de la cámara de aceleración para electrodos paralelos, y el radio exterior e interior y el largo de la cámara de aceleración para electrodos coaxiales; mientras que los parámetros eléctricos estudiados fueron la resistencia e inductancia exterior del propulsor y la tensión de operación y la capacidad equivalente del banco de capacitores. Ambos modelos demostraron tener una dependencia aproximadamente lineal con la altura h o radio externo r_o de la cámara de aceleración dependiendo si es paralela o coaxial respectivamente, la resistencia externa R_{ext} y la capacidad equivalente del banco de capacitores C ; respecto a la masa iónica ablacionada, el bit de impulso, el impulso específico y el rendimiento propulsivo. Las variables que mayor afectaron a los resultados fueron el ancho w de la cámara de aceleración paralela o el radio interior r_i si la geometría de electrodos es coaxial, y la tensión de operación del banco de capacitores V_0 , mientras que la inductancia exterior L_{ext} y la longitud de la cámara de aceleración l fueron las variables menos significativas en los dos modelos propuestos. No se observaron diferencias importantes en cuanto a los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad utilizando los Modelos A o B.

Por último, se definieron como variables de diseño los mismo parámetros eléctricos y geométricos utilizados en el análisis de sensibilidad para llevar a cabo el proceso de optimización utilizando algoritmos genéticos aplicando el Modelo B propuesto en la Sección 2.3.2. En vista de evaluar la utilidad de esta herramienta, se aplicó optimización de una función objetivo individual y múltiple al propulsor LES-6b, uno de los mas utilizados en la literatura especializada. Tanto para la optimización individual como múltiple, se distinguieron tres tipos: optimización geométrica, eléctrica o full. Dentro de la optimización individual, tomando como función objetivo maximizar el rendimiento propulsivo, se

encontró que el mismo puede llegar a aumentar un 41.1 [%], 71.4 [%] y 105.9 [%] para la optimización geométrica, eléctrica o full, respectivamente, asumiendo una variación admisible en las VD de ± 20 [%]. En cuanto a la optimización múltiple y bajo las mismas condiciones sobre las cuales se aplicó la optimización individual, se tomó como función objetivo maximizar el bit de impulso y minimizar la masa ablacionada total. Con esto también se logra optimizar el impulso específico o su equivalente, la velocidad media de los gases a la salida del propulsor. Se obtuvo el frente óptimo de Pareto para la optimización del tipo eléctrica, geométrica o full, mediante el cual el diseñador puede en base a ciertos criterios impuestos por el diseño o la misión, elegir la configuración que mejor se adapte a sus requerimientos. Considerando una variación admisible de las VD de un ± 20 [%] se observó que las variables eléctricas tienen una mayor influencia sobre el bit de impulso y la masa total ablacionada que las variables geométricas. Se verificó que la combinación de VD geométricas y eléctricas permiten obtener mejores resultados ya que es más amplio el espectro de soluciones posibles que los algoritmos pueden encontrar. Por otro lado, se pudo ver que los valores nominales del propulsor LES-6b también son valores óptimos ya que se encuentran aproximadamente sobre la curva del frente óptimo de Pareto obtenido a partir de la optimización eléctrica. Finalmente, se puede decir que en la optimización geométrica, cualquier diseño óptimo es superior al original en ambas funciones objetivo seleccionadas, mientras que en cuanto a la optimización full, cualquier diseño óptimo es mejor respecto a la masa ablacionada pero puede empeorar respecto al bit de impulso. En relación a la optimización eléctrica, de acuerdo al diseño óptimo seleccionado se puede mejorar la masa ablacionada y empeorar el bit de impulso y viceversa, respecto al diseño original.

En cuanto a la utilización de algoritmos genéticos para realizar el proceso de optimización, se implementó dicha herramienta de manera rápida y eficaz, siendo además muy versátil sobre todo en relación a la optimización múltiple. En todos los casos se observó buena convergencia, sin embargo, durante la optimización múltiple se constató que tanto el tamaño de la población como la cantidad de generaciones afectaban la amplitud del espectro del frente óptimo de Pareto, es decir, se obtenía una parte de la curva y no el total, lo cual es un tema a estudiar a futuro.

5.2. Trabajos Futuros

Como trabajos futuros se proponen:

- Incorporar a los modelos propuestos la posibilidad de simular geometrías de electrodos divergentes y/o con extremos en forma de punta.
- Obtener a partir de la ecuación de Saha la densidad de partículas de distintas especies presentes en el plasma y comparar con datos experimentales.
- Estudiar la validez de la utilización de la ecuación de Saha al considerar el plasma en Equilibrio Termodinámico Local.
- Implementar en la ecuación de la energía el término de gradiente de presiones que se desprecia en el Modelo A y B propuestos.
- Analizar el efecto de distintas variables de entrada necesarias para la optimización genética en los resultados.
- Estudiar fenómenos de intermitencia que puedan estar presentes en la descarga de los APPT.

Bibliografía

- [1] Rayburn C., Campbell M., Hoskins W., and Cassady R. Development of a micro pulsed plasma thruster for the dawgstar nanosatellite. *AIAA*, 2000.
- [2] Burton R. and Turchi P. Pulsed plasma thruster. *Journal of Propulsion and Power*, 1998.
- [3] Myers R. and Cassady R. Overview of mayor u.s. industrial program in electric propulsion. *AIAA*, 1998.
- [4] Burton R., Wilson M., and Bushman S. Energy balance and efficiency of the pulsed plasma thruster. *AIAA*, 1998.
- [5] Myers R. Electromagnetic propulsion for spacecraft. *AIAA*, 1993.
- [6] Brill Y., Eisner A., and Osborn L. The flight application of a pulsed plasma microthrusters. *AIAA*, 1982.
- [7] Schonherr T. *Investigation of Performance and Plasma Dynamics of the Pulsed Plasma Thruster ADD SIMP-LEX*. PhD thesis, PhD disertation, 2011.
- [8] Brito H., Duelli R., Garay R., and Maglione L. A compact, low-cost test atand for ppt impulse bit measurements. *AIAA*, 2000.
- [9] Brito C., Elaskar S., Brito H., and Paoletti N. Zero-dimensional model for preliminary design od ablative pulsed plasma thrusters. *Journal of Propulsion and Power*, 2004.
- [10] *Space Propulsion Analysis Designs*. McGraw-Hill Companies, 1995.
- [11] *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, 2001.
- [12] Ziemer J. *Performance Scaling of Gas-Fed Pulsed Plasma Thrusters*. PhD thesis, Princeton University, 2001.
- [13] Vondra R. and Thomassen K. Performance improvements in solid fuel microthrusters. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1972.
- [14] *Physics of Electric Propulsion*. McGraw-Hill, 1968.

-
- [15] Ziemer J., Markusic T., Choueiri E., and Bix D. Effect of ignition on discharge symmetry in gas-fed pulsed plasma thrusters. *AIAA*, 1998.
- [16] *The Physics of Plasma*. Cambridge University Press, 2003.
- [17] *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [18] Pekker L., Keidar M., and Cambier J. Effect of thermal conductivity on the knudsen layer at ablative surfaces. *Journal of Applied Physics*, 2008.
- [19] Keidar M. and Boyd D. Ionization and ablation phenomena in an ablative plasma accelerator. *Journal of Applied Physics*, 2004.
- [20] Wagner H. and Kurtz M. Slug model and snowplow model for pulsed plasma thruster description. *AIAA*, 2004.
- [21] Maglione L., Elaskar S., and Brito H. Solución de las ecuaciones magnetogasdinámicas bidimensionales mediante un esquema tvd. *Mecánica Computacional*, 2002.
- [22] Sankaran K. *Simulation of Plasma Flows in Self-Field Lorentz Force Accelerators*. PhD thesis, Princeton University, 2005.
- [23] Yang L., Huang Y., and Tang H. Ablation and ionization phenomenon in a teflon pulsed plasma thruster. *IEPC*, 2015.
- [24] Neudorfer J., Stindl T., Schneider R., Roller S., Munz C., and Auweter-Kurtz M. Three-dimensional particle-in-cell simulation of a pulsed plasma thruster: Modeling and challenges. *IEPC*, 2011.
- [25] Laperriere D. Electromechanical modeling and open-loop control of parallel-plate pulsed plasma microthrusters with applied magnetic fields. Master's thesis, Worcester Polytechnic Institute, 2005.
- [26] Yang L., Liu X., Wu Z., , and Wang N. Analysis of teflon pulsed plasma thrusters using a modified slug parallel plate model. *AIAA*, 2011.
- [27] Lovberg B., Hayworth B., and Gooding T. The use of a coaxial propulsion. Technical report, NASA Lewis Research Center, 1962.
- [28] Michels G., Heighway J., and Johansen A. Analytical and experimental performance of capacitor powered coaxial plasma guns. *AIAA*, 1966.
- [29] Butler T., Henins I., Jahoda F., Marsahll J., and Morse R. Coaxial snowplow discharge. *Physics of Fluids*, 1969.
- [30] Laperriere D., Gatsonis N., and Demetriou M. Electromechanical modeling of applied field micro pulsed plasma thrusters. *AIAA*, 2005.

-
- [31] *Electromagnetic Fields and Energy*. Prentice-Hall, 1989.
- [32] Leiweke R. An advanced pulsed plasma thruster design study using one-dimensional slug modeling. Technical report, Phillips Laboratory, Kirkland Air Force Base, 1996.
- [33] Ziemer J. and Choueiri E. Scaling laws for electromagnetic pulsed plasma thrusters. *Plasma Sources Science and Technology*, 2001.
- [34] Ziemer J., Choueiri E., and Birx D. Trends in performance improvements of a coaxial gas-fed pulsed plasma thruster. *IEPC*, 1997.
- [35] *Partially Ionized Gases*. John Wiley & Sons, 1973.
- [36] Hart P. Plasma acceleration with coaxial electrodes. *The Physics of Fluids*, 1962.
- [37] Mikellides P. and Turchi P. Modeling of late-time ablation in teflon pulsed plasma thrusters. *AIAA*, 1996.
- [38] Henrikson E. and Mikellides P. Experimental assessment of a benchmark ablation-fed pulsed plasma thruster. *AIAA*, 2007.
- [39] *Dinámica de los Gases*. Universitas, 2008.
- [40] Turchi P., Mikellides I., Mikellides P., and Kamhawi H. Optimization of pulsed plasma thrusters for microsatellite propulsion. *AIAA*, 1999.
- [41] Paoletti N., Elaskar S., and Brito H. Aplicación del modelo cero dimensional para el cálculo de performances del propulsor de plasma pulsante ablativo de teflón p4s. *Mecánica Computacional*, 2004.
- [42] Gomez E. and Elaskar S. Simulación numérica de propulsores de plasma pulsantes ablativos de teflón mediante un modelo cero dimensional. *Mecánica Computacional*, 2016.
- [43] Turchi P., Mikellides I., Mikellides P., and Schmahl C. Theoretical investigation of pulsed plasma thrusters. *AIAA*, 1998.
- [44] Palumbo D. and Guman W. Propellant sidefeed-short discharge thruster studies. Technical report, Fairchild Industries, 1972.
- [45] Igarashi M., Kumagai N., Sato K., Tamura K., Takegahara H., Okamoto H., Wakizono T., and Hashimoto H. Performance improvement of pulsed plasma thruster for micro satellite. *IEPC*, 2001.
- [46] Celik M. *Experimental and Computational Studies of Electric Thruster Plasma Radiation Emission*. PhD thesis, MIT, 2007.

-
- [47] Drawin H. Validity conditions for local thermodynamic equilibrium. *Zeitschrift für Physik*, 1969.
- [48] Hey J. Criteria for local thermal equilibrium in non-hydrogenic plasmas. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 1976.
- [49] Wilson R. The spectroscopy on non-thermal plasmas. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 1962.
- [50] *Plasma Diagnostics Techniques*. Academic Press, 1965.
- [51] Cristoforetti G., De Giacomo A., Dell’Aglio M., Legnaioli S., Tognoni E., Palleschi V., and Omenetto N. Local thermodynamic equilibrium in laser-induced breakdown spectroscopy: Beyond the mcwhirter criterion. Technical report, 2010.
- [52] Hindmarsh A. Odepack, a systematized collection of ode solvers. *Scientific Computation*, 1983.
- [53] Kamhawi H., Turchi P., Leiweke R., and Myers R. Design and operation of a laboratory benchmark ppt. *AIAA*, 1996.
- [54] Palumbo D. and Guman W. Effects of propellant and electrode geometry on pulsed ablative plasma thruster performance. *AIAA*, 1975.
- [55] Spanjers G., McFall K., Gulczinski F., and Spores R. Investigation of propellant inefficiencies in a pulsed plasma thruster. *AIAA*, 1996.
- [56] Myers R., Arrington L., Pencil E., Carter J., Heminger J., and Gatsonis N. Pulsed plasma thruster contamination. *AIAA*, 1996.
- [57] Bushman S., Burton R., and Antonsen E. Arc measurements and performance characteristics of a coaxial pulsed plasma thruster. *AIAA*, 1998.
- [58] Vondra R., Thomassen K., and Solbes A. Analysis of solid teflon pulsed plasma thruster. *AIAA*, 1970.
- [59] Gatsonis N., Eckman R., and Yin X. Experimental investigations and numerical modeling of pulsed plasma thruster plumes. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2001.
- [60] *Optimization Methods for Engineering Design: Applications and Theory*. Brigham Young University, 2013.
- [61] Holland J. Adaptation in natural and artificial systems. Technical report, University of Michigan Press, 1975.
- [62] *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison Wesley, 1989.

-
- [63] *Multi-objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons, 2001.
- [64] Fortin F., De Rainville F., Gardner M., and Parizeau M. Deap: evolutionary algorithms made easy. *Journal of Machine Learning Research*, 2012.
- [65] Konak A., Coit D., and Smith A. Multi-objective optimization using genetic algorithms a tutorial.
- [66] Zitzler E., Deb K., and Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 2000.
- [67] Schaffer J. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. *International Conference on Genetic Algorithm and their applications*, 1985.
- [68] Deb K., Agrawal S., Pratap A., and Meyarivan T. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: Nsga-ii. *Lecture Notes in Computer Science*, 2000.
- [69] Srinivas N. and Deb K. Multi-objective function optimization using non-dominated sorting genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 1995.
- [70] Rudolph G. Evolutionary search under partially ordered sets. Technical report, Dortmund: Department of Computer Science/LS11, University of Dortmund, Germany, 1999.
- [71] Gomez E. and Elaskar S. Estudio de sensibilidad de un modelo analítico cero dimensional para el diseño preliminar de propulsores de plasma pulsantes ablativos de teflón. *IV Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica*, 2016.
- [72] Gomez E. and Elaskar S. Modelo cero-dimensional para diseño de propulsores de plasma pulsantes ablativos de teflón. *Revista de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, UNC*, 2017, en revisión.