Universidad Nacional
de Córdoba

Acotación de algunos operadores integrales entre espacios de Lebesgue variables

Por Lic. Lucas Alejandro Vallejos

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Julio, 2020

dirigida por Dra. Marta Susana Urciuolo

Resumen

En el presente trabajo nos enfocamos en el estudio de ciertos operadores en el contexto de los espacios de Lebesgue con exponente variable. En un principio definimos el espacio ambiente $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y recordamos algunas propiedades topológicas del mismo. Definimos la norma que los describe como espacios de Banach y destacamos algunas propiedades importantes que usaremos a lo largo de la tesis.
Después hacemos un repaso de la acotación de uno de los más conocidos operadores en el análisis armónico. Se trata del operador maximal de $Hardy-Littlewood$. El estudio acerca de este operador nos dará alguna guía para estudiar otros operadores que serán de nuestro interés. Mencionaremos los resultados conocidos acerca de condiciones sobre las funciones exponentes para que la maximal de $Hardy-Littlewood$ sea un operador acotado sobre el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. También introducimos condiciones más generales para las funciones exponentes, las cuales garantizan esta acotación. Como un resultado clave que será el punto de partida para el estudio de otros operadores enunciamos un teorema de extrapolación sobre los espacios $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ el cual requiere de conocer ciertas desigualdades con pesos de $Muckenhoupt$.
El primer operador que estudiamos en este trabajo es el operador de tipo fraccionario. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Sea $A_1, ..., A_m$ matrices invertibles $n \times n$. Sea $0 \leq \alpha < n$ y $0 < \alpha_i < n$ tales que $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n - \alpha$, si $\alpha = 0$ suponemos $m > 1$. Definimos

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - A_1 y|^{\alpha_1} ... |x - A_m y|^{\alpha_m}} f(y) dy.$$

En [47] estudiamos este operador en el caso de que las matrices A_i son potencias de una matriz invertible A tal que $A^N = I_n$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$. Este este trabajo se consiguió una mejora sobre el trabajo [39] donde los autores exigían ciertas condiciones de continuidad para las funciones exponentes y que las matrices sean ortogonales. Logramos probar la acotación del T_α entre espacios de Lebesgue con exponente variable y probamos además una estimación del tipo débil con mejores condiciones. Luego en otro trabajo, [48], volvimos a tratar con este operador pero esta vez

para matrices invertibles con condiciones mínimas. Probamos, bajo ciertas condiciones sobre las funciones exponentes, que el operador T_α resulta acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para ciertos pares $p(\cdot), q(\cdot)$ tales que $\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\alpha}{n}$. Nuevamente probamos una estimación del tipo débil. Además probamos algunas condiciones necesarias en casos particulares. Ambos trabajos publicados forman parte de esta tesis.
Otro de los operadores con los que trabajamos fue el operador integral con núcleo de tipo rough". Sean $A_{1,\dots,}A_m$ matrices invertibles. Definimos

$$k_i(x) = \frac{\Omega_i(x)}{|x|^{\frac{n}{q_i}}},$$

donde $\Omega_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones homogéneas de grado cero que satisfacen una condición de tamaño y una condición de Dini y $\frac{n}{q_1} + \dots + \frac{n}{q_m} = n - \alpha$ con $0 \leq \alpha < n$. Si $\alpha = 0$ suponemos $m > 1$. Definimos el núcleo

$$K(x, y) = k_1(x - A_1 y) \dots k_m(x - A_m y).$$

El operador que tratamos está dado por

$$R_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy.$$

Este operador es más general que el de tipo fraccionario. Estudiamos el R_α en el contexto de los espacios de Lebesgue con exponente variable. Pero en este caso hemos considerado condiciones distintas para las funciones exponentes. Estas fueron motivadas por el estudio del operador maximal de $Hardy-Littlewood$. Obtuvimos así la acotación de este operador desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para ciertos $p(\cdot), q(\cdot)$ tales que $\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\alpha}{n}$. Dicho trabajo se puede ver en [49].
Finalmente consideramos operadores de convolución con medidas singulares. Dada una medida de Borel finita μ sobre $\mathbb{R}^n$, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\,|\mu| < \infty$$

definimos el operador de convolución

$$T_\mu f(x) = (\mu * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) d\mu(y).$$

Particularmente consideramos μ una medida sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ soportada en el gráfico de una función real definida sobre un cubo $Q^n \subset \mathbb{R}^n$.
Por otro lado estudiamos el operador convolución con una medida soportada

sobre ciertas superficies en $\mathbb{R}^{2n}$. En este último caso la medida no es finita. Para ambos casos hemos probado que los operadores están bien definidos sobre el $L^{p(\cdot)}$. Primero hemos obtenidos resultados sobre condiciones suficientes para las funciones exponentes las cuales garantizan que T_μ es acotado desde el $L^{p(\cdot)}$ en el $L^{q(\cdot)}$ adecuados. Por otro lado hicimos más hincapié en las condiciones necesarias que deben satisfacer las funciones exponentes $p(\cdot), q(\cdot)$ asumiendo que T_μ es acotado desde el $L^{p(\cdot)}$ en el $L^{q(\cdot)}$.

Abstract

In the present work we focus in the study of certain operators in the context of the Lebesgue spaces with variable exponent. At first we define the ambient space $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ and we recall some topological properties of it. We define the norm that describes them as Banach spaces and we highlight some important properties that we will use throughout the thesis.
After that we do a review of the boundedness of one of the best known operator in the harmonic analysis. The $Hardy-Littlewood$ maximal operator. The study of this operator will give us some guidance to study other operators of our interest. We will mention the known results about conditions on the exponent functions for the $Hardy-Littlewood$ maximal be a bounded operator on $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Also we introduce more general conditions for the exponent functions, which guarantee this boundedness. We will enunciate a key result thet will be a starting point for the study of others operators. It is the extrapolation's theorem on the $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ spaces which requires knowing certaint inequalities with $Muckenhoupt's$ weights.
The first operator that we will study in this work is a fractional type operator. Let $n, m \in \mathbb{N}$. Let $A_1, ..., A_m$ be invertible $n \times n$ matrices. Let $0 \leq \alpha < n$ and $0 < \alpha_i < n$ such that $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n - \alpha$, if $\alpha = 0$ we suppose $m > 1$. We define

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - A_1 y|^{\alpha_1} ... |x - A_m y|^{\alpha_m}} f(y) dy.$$

In [47] we study this operator in the case that the matrices A_i are powers of a invertible matrix A such that $A^N = I_n$, where I_n is the identity $n \times n$ matrix. We got better results that than in [39] where the authors demanded certain conditions of continuity for the exponent functions and that the matrices were orthogonal. We managed to demonstrate the boundedness of T_α between Lebesgue's spaces with variable exponent and we also demonstrate a weak type estimates, with better conditions. Then in another work,[48], we tried again with this operator but this time for the invertible matrices with minimal conditions. We prove, under certain conditions on exponent functions, that the operator T_α is bounded from $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ into $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ for certain $p(\cdot), q(\cdot)$

such that $\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\alpha}{n}$. Again we prove a weak type estimates. Also we prove some neccesary conditions in the particular cases. Both published works are part of this thesis.
Another operador we worked with was the integral operator with kernel of rough-type. Let $A_{1,\ldots,}A_m$ be invertible matrices. We define

$$k_i(x) = \frac{\Omega_i(x)}{|x|^{\frac{n}{q_i}}}$$

where $\Omega_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are homogeneous functions of degree zero that satisfy a Dini's condition and a condition of size and $\frac{n}{q_1} + ... + \frac{n}{q_m} = n - \alpha$ with $0 \leq \alpha < n$. If $\alpha = 0$ We suppose $m > 1$. We define the kernel

$$K(x,y) = k_1(x - A_1 y)...k_m(x - A_m y).$$

The operator that we treat is given by

$$R_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy.$$

This operator is more general that the fractional type. We study the R_α in the context of Lebesgue's spaces with variable exponent. But in this case we have considered different conditions for the exponent functions. These conditions were motivated by the study of the $Hardy-Littlewood$ maximal operator. We obtained the boundedness of this operator from $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ into $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ for certain $p(\cdot), q(\cdot)$ such that $\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\alpha}{n}$. This work is published in [49].
Finally we consider operators of convolution with singular measures.
Given a finite Borel's measure μ on $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\,|\mu| < \infty$$

we define the operator of convolution

$$T_\mu f(x) = (\mu * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu(y).$$

We particularly consider μ a measure on $\mathbb{R}^{n+1}$ supported on the graph of a real function defined on the cube $Q^n \subset \mathbb{R}^n$.
On the other hand we study the operator of convolution with a measure sopported on certain surfaces in $\mathbb{R}^{2n}$. In this last case the measure is not finite.
For both cases we have proven that the operators are well defined on $L^{p(\cdot)}$.

First we have obtained results about sufficient conditions for the exponent functions wicth guarantee that T_μ is bounded from $L^{p(\cdot)}$ into $L^{q(\cdot)}$. On the other hand we put more emphasis in the neccesary conditions that must satisfy the exponent functions $p(\cdot), q(\cdot)$, assuming that T_μ is bounded from $L^{p(\cdot)}$ into $L^{q(\cdot)}$.

Agradecimientos

El esfuerzo requerido en este trabajo de cinco años dio sus frutos gracias a muchos factores. En primer lugar todo hubiera sido notablemente más difícil sin la beca otorgada por CONICET para realizar el Doctorado en Matemática. Mi primer agradecimiento para la entidad. En segundo lugar quiero destacar el lugar de trabajo, la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba. Verdaderamente me ha brindando la formación necesaria para poder culminar de manera efectiva esta tesis.
En cuanto a las personas que me han rodeado en todos estos años quiero dar mi enorme agradecimiento a mi directora, la Dra. Marta Urciuolo, por la dedicación y acompañamiento que me brindó en todo este tiempo. He aprendido muchísimo y me ha motivado a seguir creciendo como matemático. También quiero destacar al grupo de investigación en análisis armónico y ecuaciones diferenciales de la FAMAF, con quien he tenido una emocionante experiencia a lo largo de los años.
Por último agradecer a mi familia, amigos, compañeros y colegas en general por el apoyo y la experiencia compartida. En lo personal estoy muy agradecido a la vida y a Dios por todo lo que he aprendido y logrado en este tiempo.

Índice general

Introducción

En este trabajo analizamos la acotación de distintos operadores integrales entre espacios de Lebesgue con exponentes variables. Estos espacios, como su nombre lo indica, son una generalización de los clásicos espacios de Lebesgue L^p. Los espacios resultantes $L^{p(\cdot)}$ comparten muchas propiedades con los espacios L^p, y son muy importantes por sus aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales y a problemas variacionales con condiciones de crecimiento no estándar. Estos espacios fueron estudiados originalmente en 1931 por Orlicz en el trabajo [31]. El siguiente paso en el desarrollo de los espacios de Lebesgue de exponente variable vino dos décadas después, en los trabajos [27], [28] y [29], de H. Nakano, quien desarrolló la teoría de espacios modulares e introduce los espacios $L^{p(\cdot)}$ como un ejemplo de éstos. Independientemente, estos espacios aparecen estudiados en la literatura rusa. Fueron introducidos por Tsenov en 1961. En el trabajo [46], el autor consideró el problema de minimizar la integral

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^{p(x)}\, dx,$$

donde f es una función continua y ϕ es un polinomio de grado fijo. En 1979 I. Sharapudinov, en [40] desarrolló la teoría de espacios funcionales sobre intervalos de la recta real, introduciendo una norma de Luxemburgo. En el trabajo [41], él fue el primero en considerar cuestiones sobre regularidad de la función exponente e introdujo la condición de continuidad log-Hölder

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{-\ln|x-y|}, \qquad |x-y| < \frac{1}{2} \tag{1}$$

que sería de gran utilidad en desarrollos futuros. A partir de 1982, V. V. Zhikov aplicó los espacios de Lebesgue variables al problema del cálculo de variaciones (ver [52] y [53]). El interés en el estudio de estos espacios creció en los años 90 por su utilidad en el estudio de modelos matemáticos de fluidos cuya viscosidad cambia cuando se la expone a un campo eléctrico (a modo de ejemplo ver [19]). Estos espacios también han sido usados para estudiar el comportamiento de fluidos quasi-newtonianos, en magnetostática, en procesamiento de imágenes, etc.

En el Capítulo 1 damos la definición precisa de los espacios $L^{p(\cdot)}$ y enunciamos los resultados sobre completitud, desigualdad de Hölder, dualidad, convergencia e inmersiones que usaremos después a lo largo de la tesis.
Para muchos de los resultados descriptos antes fue necesario extender resultados clásicos del análisis armónico al contexto de los espacios de Lebesgue variables. Un problema central histórico fue, y sigue siendo, determinar condiciones sobre la función exponente $p(\cdot)$ para que la función maximal de Hardy-Littlewood sea continua sobre $L^{p(\cdot)}$. El primer resultado en esta dirección se debe a L. Diening que en el trabajo [7] mostró que es suficiente que $p(\cdot)$ satisfaga la condición de continuidad log-Hölder (1) y que sea constante fuera de una bola. Este resultado fue generalizado en [3] donde los autores mostraron que era suficiente asumir que $p(\cdot)$ satisfaga (1) y la siguiente condición de decaimiento en infinito: que existan p_∞, c_∞ tales que

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_\infty}{\ln(e + |x|)}, \tag{2}$$

Las condiciones (1) y (2) son suficientes pero no necesarias. Posteriormente a estos trabajos distintos autores dieron diferentes condiciones para la continuidad del operador maximal. Por ejemplo, en los trabajos [30], [22] y [24] se encuentran resultados de este tipo.
En el Capítulo 2 describimos los resultados actuales sobre la acotación del operador maximal y mostramos que se pueden reemplazar las condiciones (1) y (2) sobre la función exponente por otras dos condiciones (una de característica local y otra de decaimiento en infinito) para obtener la acotación del operador maximal. La importancia de estos resultados se evidencia en el trabajo [5] donde los autores muestran que la teoría de extrapolación de J. L. Rubio de Francia puede extenderse a los espacios de Lebesgue variables. En el segundo capítulo enunciamos también resultados de la teoría de pesos y los nuevos teoremas de extrapolación y cómo, con esta herramienta, se pueden obtener acotación de otros operadores, como el operador maximal fracionario M_α, entre los correspondientes espacios de Lebesgue variables.
En el Capítulo 3 presentamos los primeros operadores integrales que hemos analizado en este trabajo. Los llamamos *operadores integrales de tipo fraccionario.* Concretamente, si n es la dimensión del espacio, tomamos $0 \leq \alpha < n$. Si $m \in \mathbb{N}$ (ó $m \in \mathbb{N} - \{1\}$ si $\alpha = 0$), dadas $A_1, ..., A_m$ ciertas matrices invertibles, definimos

$$T_\alpha f(x) = \int \frac{1}{|x - A_1 y|^{\alpha_1} \dots |x - A_m y|^{\alpha_m}} f(y) dy$$

para $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n - \alpha$ (homogeneidad de la integral fraccionaria I_α). Estos operadores ya habían sido estudiados en el contextos de los L^p clásicos [14], incluyendo la correspondiente teoría de pesos [37]. También en el trabajo [39] los autores obtienen acotación $p(\cdot) - q(\cdot)$ y la formulación débil correspondiente de T_α, cuando $\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\alpha}{n}$, para ciertos exponentes $p(\cdot)$ de tipo radial que satisfacen condiciones log-Hölder y para matrices A_i invertibles. En el caso del tipo débil aparece la hipótesis extra que es que $p(0) = 1$, que nos parecía que con otro método podía ser evitada. Como teníamos disponible la teoría de pesos, pensamos en usar extrapolación en espacios de exponentes variables. Este método además nos permitiría reemplazar las condiciones log-Hölder sobre la función exponente por una hipótesis más general de acotación, en algún espacio de Lebesgue variable conveniente, de la función maximal de Hardy-Littlewood. Los resultados que obtuvimos están en el lema 3.3.1, los teoremas 3.3.2, 3.4.1. y 3.4.3. En todos estos resultados aparece la hipótesis $p(A_i x) = p(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Nos preguntamos si esa relación entre el expopnente y las matrices involucradas en el núcleo del operador era necesaria. Pudimos demostrar que en algunos casos esto es efectivamente así (Corolario 3.4.5).
En el Capítulo 4 abordamos operadores similares a los estudiados en el capítulo anterior, pero ahora con núcleos "rough". Son de la forma

$$R_\alpha f(x) = \int \frac{\Omega_1(x - A_1 y)}{|x - A_1 y|^{\frac{n}{q_1}}} ... \frac{\Omega_m(x - A_m y)}{|x - A_m y|^{\frac{n}{q_m}}} f(y)dy,$$

con $\frac{n}{q_1} + ... + \frac{n}{q_m} = n - \alpha$ y donde las funciones $\Omega_i \in L^{p_i}(\Sigma)$, para algún $p_i > q_i$ son homogéneas de grado cero y satisfacen una condición de tipo Dini, Σ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$. En el trabajo [38] se obtienen acotaciones entre los espacios de Lebesgue con pesos para estos operadores. Pudimos generalizar estos resultados al caso de espacios de Lebesgue con exponentes variables utilizando que en estos espacios vale la acotación del operador maximal sharp. Los resultados que obtuvimos están en los teoremas 4.2.3 y 4.2.4.
En el Capítulo 5 estudiamos otro tipo de operadores. Dado $Q = [-1, 1]^n$ y dada $\varphi : Q \to \mathbb{R}$ definimos la medida singular μ por $\mu(E) = \int_Q \chi_E(x, \varphi(x))dx$ donde dx denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. Definimos el operador de convolución

$$T_\mu f = \mu * f.$$

Si el gráfico de φ tiene curvatura gaussiana no nula en cada punto, un teorema de Littman [24] asegura que T_μ es acotado de $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ en $L^q(\mathbb{R}^{n+1})$ si y solo si el par $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ pertenece al triángulo cerrado con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $\left(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n+2}\right)$. Ahora, si la curvatura se anula en algún punto la situación es

muy diferente (ver [6], [32], [35]). El caso $n = 2$ y $\varphi(y_1, y_2) = |y_1|^\alpha + |y_2|^\beta$ fue estudiado en [16]. Los mismos autores en el trabajo [17] generalizan los resultados anteriormente obtenidos a más dimensiones.
Por otro lado en un trabajo de S. W. Drury, [9], se estudia el problema de estimar el operador de convolución T_μ pero ahora la medida μ soportada sobre una superficie en $\mathbb{R}^{2n}$. Más específicamente, dada una $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se define $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ por $\beta(x) = (x, \varphi(x))$. Sea λ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ y se define $\sigma = \check{\beta}(\lambda)$ como la imagen de λ mapeada por β. Entonces σ es “llevada”por una superficie $n-$dimensional en $\mathbb{R}^{2n}$. En dicho trabajo se obtiene la siguiente estimación

$$\|\sigma * f\|_{L^3(\mathbb{R}^{2n})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^{2n})} \tag{3}$$

en una variedad de casos, resolviendo una conjetura de Oberlin para subvariedades de dimensión ambiente mitad.
Dadas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ funciones reales homogéneas de grado $k \geq 2$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$, sea $\varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ y $\gamma > 0$. En [18] los autores consideraron una medida de Borel soportada sobre una superficie en $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, \varphi(x))|x|^{\gamma - n} dx.$$

Estudiaron el operador convolución $\mu * f$.
Ahora nosotros estudiamos cada uno de estos operadores en el contexto de espacios de Lebesgue con exponentes variables. Primero analizamos la buena definición de tales operadores en este contexto, Teoremas 5.2.1 y 5.2.2. Luego mostramos casos de exponentes variables $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ para los cuales T_μ, con la medida soportada sobre el cubo, o T_μ^γ con la medida soportada sobre una superficie de $\mathbb{R}^{2n}$, resulta acotado de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \to L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, Teoremas 5.2.3, 5.2.5 y 5.2.7 y Corolarios 5.2.4 y 5.2.6. Después damos condiciones necesarias que deben satisfacer los exponentes para que los operadores resulten acotados, que son una generalización de las condiciones obtenidas en los trabajos antes citados. Para el caso de la medida definida sobre el cubo, T_μ, tenemos los Teoremas 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4 y 5.3.6 y Ejemplo 5.3.5. Y para el caso de la medida soportada en una superficie de $\mathbb{R}^{2n}$, T_μ^γ, los Teoremas 5.3.7 y 5.3.8.

Capítulo 1

Espacios $L^{p(\cdot)}$

En el presente capítulo vamos a introducir los espacios ambiente, sobre los cuales trabajaremos a lo largo de este trabajo. Se trata nada más y nada menos que los espacios de Lebesgue con exponente variable. Mostraremos algunas de sus propiedades, veremos que tienen asociada una norma la cual hace que formen lo que se denomina un espacio de Banach. Para este estudio, nos basamos principalmente en [2] aunque también añadimos información complementaria de [10]. Veremos muchas analogías con los espacios de Lebesgue clásicos como así también las diferencias que hay entre ambos.
Los espacios de Lebesgue con exponente variable, los cuales llamaremos espacios de Lebesgue variables, son una generalización de los espacios de Lebesgue clásicos. Estos aparecen por primera vez en 1931 en el trabajo de W. Orlicz [31]. No obstante, Orlicz abandona el estudio de dichos espacios para centrarse más en lo que hoy se conoce como Espacios de Orlicz. Recién en 1950, en [27], H. Nakano menciona a los espacios $L^{p(\cdot)}([0,1])$ como un ejemplo de la teoría de los espacios modulares (también llamados espacios de Nakano). Una década después, en 1961, los espacios de Lebesgue variables son introducidos en la literatura rusa por I.V.Tsenov en [46]. Más adelante, en 1979, I.I.Sharapudinov estudia algunos aspectos topológicos de estos espacios en [40], en intervalos de la recta real. Además este último autor, siguió estudiando otros aspectos de los espacios de Lebesgue variables en consecutivos trabajos como [41], [42] y [43]. Autores rusos también aportaron al estudio de estos espacios, uno de los más influyentes fue V.V.Zhikov (ver por ejemplo [52]). Pero en 1991 aparece un trabajo fundamental publicado por los autores O. Kovácik y J. Rákosnik, [21], en el cual comienza una era moderna en el estudio de los espacios de Lebesgue variables. En este trabajo comienzan a explorar las propiedades básicas de los $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

1.1. Las funciones exponentes

Iniciamos el estudio de estos espacios definiendo lo que se conoce como funciones exponentes.

Definición 1.1.1. *Dado un conjunto* Ω, *sea* $\mathcal{P}(\Omega)$ *el conjunto de todas las funciones medibles Lebesgue* $p(\cdot) : \Omega \longmapsto [1, \infty]$. *Los elementos de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *son llamados funciones exponentes o simplemente exponentes. Las denotaremos por* $p(\cdot)$ *(para distinguir de los exponentes constantes* p*).*

Definición 1.1.2. *Dada una función exponente* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *sea* $E \subset \Omega$. *Definimos,*

$$p_-(E) = essinf_{x\in E}\ p(x) \ y\ p_+(E) = esssup_{x\in E}\ p(x).$$

donde $essinf$ *denota el ínfimo escencial y* $esssup$ *denota el supremo escencial. En el caso que* $E = \Omega$ *simplemente denotamos por* $p_- = p_-(\Omega)$ *y* $p_+ = p_+(\Omega)$.

Además vamos a partir el Ω en tres subconjuntos que utilizaremos a lo largo de este capítulo. Dada una función exponente $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ definimos los siguientes conjuntos,

$$\Omega_\infty^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\},$$
$$\Omega_1^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = 1\},$$
$$\Omega_*^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}.$$

Cuando no haya lugar a confusión, omitiremos el supraíndice $p(\cdot)$ en las definiciones anteriores.
Dada una función exponente $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ definimos la función exponente conjugada $p'(\cdot)$ por la fórmula,

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \qquad x \in \Omega.$$

Definición 1.1.3. *Dado* Ω *y una función* $r(\cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *diremos que* $r(\cdot)$ *es localmente log-Hölder continua, y la denotamos por* $r(\cdot) \in LH_0(\Omega)$, *si existe una constante* C_0 *tal que para todo* $x, y \in \Omega$, $|x - y| < \frac{1}{2}$,

$$|r(x) - r(y)| \ \leq \ \frac{C_0}{-log(|x - y|)}. \tag{1.1}$$

Además diremos que $r(\cdot)$ *es log-Hölder continua en el infinito, y la denotamos por* $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$, *si existen constantes* C_∞ *y* r_∞ *tales que para todo* $x \in \Omega$,

$$|r(x) - r_\infty| \ \leq \ \frac{C_\infty}{log(e + |x|)}. \tag{1.2}$$

Proposición 1.1.4. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*.*

i. *Si* $r(\cdot) \in LH_0(\Omega)$*, entonces* $r(\cdot)$ *es uniformemente continua y* $r(\cdot) \in L^\infty(E)$ *para todo subconjunto acotado* $E \subset \Omega$*.*

ii. *Si* $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$*, entonces* $r(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$*.*

iii. *Si* Ω *es acotado y* $r(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$*, entonces* $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$*, donde la constante* C_∞ *depende de* $\|r(\cdot)\|_\infty$*, el diámetro de* Ω*, y de la distancia de* Ω *al origen.*

iv. $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$ *es equivalente a la existencia de una constante* C *tal que para todo* $x, y \in \Omega$*,* $|y| \geq |x|$*,*

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{C}{log(e + |x|)}.$$

v. *Si* $p_+ < \infty$*, entonces* $p(\cdot) \in LH_0(\Omega)$ *si y solo si* $r(\cdot) = \frac{1}{p(\cdot)} \in LH_0(\Omega)$*. Similarmente,* $p(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$ *si y solo si* $r(\cdot) = \frac{1}{p(\cdot)} \in LH_\infty(\Omega)$*.*

1.2. La Modular

Dada una función exponente $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, queremos intentar definir al espacio de Lebesgue variable $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como el conjunto de las funciones medibles f tales que,

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Pero hay ciertos problemas con este intento ya que por ejemplo el Ω_∞ puede tener medida positiva. En esta sección vamos a remediar esto para luego dar formalmente la definición de lo que serán los espacios de Lebesgue variables.

Definición 1.2.1. *Dado* Ω*,* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *y una función medible Lebesgue* f*, definimos el funcional modular (o simplemente la modular) asociado a* $p(\cdot)$ *por,*

$$\rho_{p(\cdot),\Omega}(f) = \int_{\Omega \backslash \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}.$$

Si f no es acotada sobre el Ω_∞ o si $f(\cdot)^{p(\cdot)} \notin L^1(\Omega \backslash \Omega_\infty)$, definimos $\rho_{p(\cdot),\Omega}(f) = +\infty$. Cuando $|\Omega_\infty| = 0$, en particular cuando $p_+ < \infty$, dejamos $\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} = 0$. Cuando $|\Omega \backslash \Omega_\infty| = 0$ entonces $\rho_{p(\cdot),\Omega} = \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}$.
Siempre y cuando no se presente ambigüedad alguna escribiremos simplemente $\rho_{p(\cdot)}(f)$ o $\rho(f)$. A continuación vamos a enunciar algunas propiedades de la modular.

Proposición 1.2.2. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$.*

i. *Para toda f, $\rho(f) \geq 0$ y $\rho(|f|) = \rho(f)$.*

ii. *$\rho(f) = 0$ si y solo si $f(x) = 0$ p.c.t.$x \in \Omega$.*

iii. *Si $\rho(f) < \infty$, entonces $f(x) < \infty$ p.c.t.$x \in \Omega$.*

iv. *ρ es convexa : dados α, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$,*

$$\rho(\alpha f + \beta g) \;\leq\; \alpha\rho(f) + \beta\rho(g).$$

v. *ρ preserva orden : si $|f(x)| \geq |g(x)|$ p.c.t.$x \in \Omega$, entonces $\rho(f) \geq \rho(g)$.*

vi. *ρ tiene la propiedad de continuidad : si para algún $\mu > 0$, $\rho(f/\mu) < \infty$, entonces la función $\lambda \longmapsto \rho(f/\lambda)$ es continua y decreciente sobre $[\mu, \infty)$. Más aún, $\rho(f/\lambda) \longrightarrow 0$ cuando $\lambda \longrightarrow \infty$.*

Una consecuencia inmediata de la convexidad de ρ es que si $\alpha > 1$, entonces $\alpha\rho(f) \leq \rho(\alpha f)$, y si $0 < \alpha < 1$, entonces $\rho(\alpha f) \leq \alpha\rho(f)$.

1.3. El Espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Definición 1.3.1. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, definimos el $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como el conjunto de las funciones medibles Lebesgue f tales que $\rho(f/\lambda) < \infty$ para algún $\lambda > 0$. Definimos también el $L^{p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$ como el conjunto de funciones medibles Lebesgue f tales que $f \in L^{p(\cdot)}(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Ejemplo 1.3.2. *Sea $\Omega = (1, \infty)$, $p(x) = x$ y $f(x) \equiv 1$. Entonces $\rho(f) = \infty$, pero para todo $\lambda > 1$,*

$$\rho(f/\lambda) \;=\; \int_1^\infty \lambda^{-x} dx \;=\; \frac{1}{\lambda \log(\lambda)} \;<\infty.$$

Similarmente, si $\Omega = (0, 1)$ y $p(x) = \frac{1}{x}$, con $f(x) \equiv 1$, tenemos que $\rho(f) < \infty$, pero $\rho(f/\lambda) = \infty$ para todo $\lambda < 1$.

Proposición 1.3.3. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, entonces la propiedad de que $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si y sólo si,*

$$\rho(f) \;=\; \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx \;+\; \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \;<\; \infty,$$

es equivalente a asumir que $p_- = \infty$ o $p_+(\Omega\setminus\Omega_\infty) < \infty$.

En [2] se prueba que el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio vectorial. También se le define una norma de tipo *Luxemburgo − Nakano* y es como sigue,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \leq 1\right\}.$$

Finalmente se prueban, también en [2], los siguientes resultados que caracterizan al espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como un espacio de Banach.

Teorema 1.3.4. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio completo.*

Teorema 1.3.5. *Dado un conjunto abierto Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $p_+ < \infty$. Entonces el conjunto de todas las funciones acotadas de soporte compacto, con sop$(f) \subset \Omega$, es denso en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Teorema 1.3.6. *Dado un conjunto abierto Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, entonces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es separable si y solo si $p_+ < \infty$.*

A continuación vamos a enunciar algunos resultados extras que nos servirán para estudiar, luego, algunos operadores entre los espacios $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Veremos las condiciones que tales operadores deben satisfacer, como así también las condiciones sobre las funciones exponentes para garantizar la continuidad de los mismos.

Proposición 1.3.7. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $|\Omega_\infty| = 0$, entonces para todo s con $\frac{1}{p_-} \leq s < \infty$,*

$$\||f|^s\|_{p(\cdot)} \;=\; \|f\|^s_{sp(\cdot)}$$

Proposición 1.3.8. *Fijado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ entonces $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$; si $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$ entonces $\rho_{p(\cdot)}(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$.*

Notemos que hemos simplificado la notación al poner $\|f\|_{p(\cdot)}$ en lugar de $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Siempre y cuando no presente ambigüedad lo haremos así. A continuación enunciamos la Desigualdad de Hölder para los espacios de Lebesgue variables.

Teorema 1.3.9. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \;\leq\; K_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)},$$

donde

$$K_{p(\cdot)} \;=\; \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1\right)\|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty.$$

Y también enunciamos una desigualdad de Hölder general.

Corolario 1.3.10. *Dado Ω y funciones exponentes $r(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Definimos $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ por*

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}. \tag{1.3}$$

Entonces existe una constante K tal que para toda $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ y $g \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$, $fg \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{p(\cdot)} \leq K\|f\|_{q(\cdot)}\|g\|_{r(\cdot)}.$$

En los clásicos espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ la norma se puede calcular usando la siguiente identidad,

$$\|f\|_p = \sup \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones $g \in L^{p'}(\Omega)$ tales que $\|g\|_{p'} \leq 1$. Esto motiva la siguiente

Definición 1.3.11. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Para una función medible f definimos,*

$$\|f\|'_{p(\cdot)} \;=\; \sup \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ con $\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1$.

En lo que sigue vamos a denotar, de manera temporal, por $M^{p(\cdot)}$ al conjunto de todas las funciones medibles f tales que $\|f\|'_{p(\cdot)} < \infty$.

Teorema 1.3.12. *Dado Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y f medible entonces $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si y solo si $f \in M^{p(\cdot)}$. Más aún,*

$$k_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)} \;\leq\; \|f\|'_{p(\cdot)} \;\leq\; K_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)},$$

donde

$$K_{p(\cdot)} \;=\; \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1\right)\|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty.$$

$$\frac{1}{k_{p(\cdot)}} \;=\; \|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty.$$

Proposición 1.3.13. *Dado Ω y $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $|\Omega\backslash\Omega_\infty^{p(\cdot)}| < \infty$. Entonces $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si y solo si $p(x) \leq q(x)$ p.c.t.$x \in \Omega$. Más aún, en este caso, tenemos que,*

$$\|f\|_{p(\cdot)} \;\leq\; \left(1 + |\Omega\backslash\Omega_\infty^{p(\cdot)}|\right)\|f\|_{q(\cdot)}.$$

1.4. Inmersiones continuas

En esta sección daremos algunos resultados de inmersiones para estos espacios. Para ello comenzamos mostrando que toda función en el $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es localmente integrable. Para ello resaltamos el siguiente,

Lema 1.4.1. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $E \subset \Omega$ es tal que $|E| < \infty$, entonces $\chi_E \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\|\chi_E\|_{p(\cdot)} \leq |E| + 1$.*

Con el lema anterior y el Teorema 1.3.9 se prueba que si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ entonces es localmente integrable. Más generalmente, tenemos la siguiente caracterización.

Proposición 1.4.2. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. $L^\infty(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si y solo si $1 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. El cual es a su vez verdadero si y solo si para algún $\lambda > 1$,*

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \lambda^{-p(x)} dx < \infty.$$

En particular, tal inmersión vale si $|\Omega| < \infty$ o si $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH_\infty(\Omega)$ y $p(x) \longrightarrow \infty$ cuando $|x| \longrightarrow \infty$.

Finalmente, como una consecuencia de la proposición anterior, podemos caracterizar completamente a los exponentes $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ tales que $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 1.4.3. *Dados Ω y $p(\cdot),\ q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y existe $K > 1$ tal que, para toda $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, $\|f\|_{p(\cdot)} \leq K\|f\|_{q(\cdot)}$, si y solo si:*

i. $p(x) \leq q(x)$ *p.c.t.*$x \in \Omega$.

ii. *Existe $\lambda > 1$ tal que,*
$$\int_D \lambda^{-r(x)} dx < \infty,$$
donde $D = \{x \in \Omega : p(x) < q(x)\}$ y $r(\cdot)$ es el exponente defecto definido por
$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}.$$

Por último enunciaremos un lema que será de utilidad para más adelante. El mismo es una variación de los teoremas anteriores.

Lema 1.4.4. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, sean $t(\cdot),\ u(\cdot) \in \otimes$ tales que $t(x) \leq u(x)$ p.c.t.$x \in \Omega$. Supongamos que $g \in L^{t(\cdot)}(\Omega)$ y $|g(x)| \leq 1$ p.c.t.$x \in \Omega$. Entonces $g \in L^{u(\cdot)}(\Omega)$. Más aún, si $\|g\|_{t(\cdot)} \leq 1$, entonces $\|g\|_{u(\cdot)} \leq 1 + \|g\|_{t(\cdot)}$, y si $\|g\|_{t(\cdot)} \geq 1$, entonces $\|g\|_{u(\cdot)} \leq 2\|g\|_{t(\cdot)}$.*

1.5. Convergencia en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Ahora vamos a considerar tres tipos de convegencia en el espacio que estamos estudiando, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Tales serán la convergencia en modular, la convergencia en norma y la convergencia en medida. Todo está probado en [2], libro que seguimos como referencia principal.

Definición 1.5.1. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y dada una sucesión de funciones $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, decimos que $f_k \longrightarrow f$ en modular si para algún $\beta > 0$, $\rho(\beta(f - f_k)) \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Diremos que $f_k \longrightarrow f$ en norma si $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$.*

El siguiente resultado establece la relación entre la convergencia en modular y la convergencia en norma en el $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 1.5.2. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, la sucesión $\{f_k\}$ converge a f en norma si y solo si para todo $\beta > 0$, $\rho(\beta(f - f_k)) \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. En particular convergencia en norma implica convergencia en modular. Más aún, convergencia en norma es equivalente a convergencia en modular si y solo si se tiene $p_- < \infty$ o $p_+(\Omega \backslash \Omega_\infty) < \infty$.*

Ahora vamos a enunciar los teoremas de convergencias clásicos para los espacios de Lebesgue variables. A saber, el Lema de Fatou, el Teorema de la convergencia dominada y el Teorema de la convergencia monótona.

Teorema 1.5.3. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \Omega$, sea $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ una sucesión de funciones no negativas tales que f_k converge de forma creciente puntualmente a f en casi todo punto. Entonces o bien $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\|f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow \|f\|_{p(\cdot)}$, o bien $f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \infty$.*

El Teorema anterior se conoce a veces como la Propiedad de Fatou de la norma. A continuación enunciamos el análago del clásico Lema de Fatou.

Teorema 1.5.4. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que la sucesión $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es tal que $f_k \longrightarrow f$ puntualmente para casi todo punto. Si*

$$\liminf_{k \to \infty} \|f_k\|_{p(\cdot)} < \infty,$$

entonces $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \liminf_{k \to \infty} \|f_k\|_{p(\cdot)}.$$

Teorema 1.5.5. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos $p_+ < \infty$. Si la sucesión $\{f_k\}$ es tal que $f_k \longrightarrow f$ puntualmente para casi todo punto y existe $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $|f_k(x)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in \Omega$, entonces $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Más aún, si $p_+ = \infty$ entonces este resultado es falso.*

Corolario 1.5.6. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $p_+ < \infty$. Supongamos que la sucesión de funciones no negativas $\{f_k\}$ converge de forma creciente puntualemnte para casi todo punto a una función $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Entonces $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow 0$.*

A continuación vamos a relacionar las convergencias en modular y en norma con la convergencia en medida. Recordemos que dado un dominio Ω y una sucesión de funciones $\{f_k\}$, decimos que $f_k \longrightarrow f$ en medida si para todo $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que si $k \geq K$,

$$|\{x \in \Omega : |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon.$$

Teorema 1.5.7. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, si la sucesión $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge a f en norma, entonces converge a f en medida.*

Proposición 1.5.8. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que la sucesión $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge en norma a $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Entonces existe una subsucesión $\left\{f_{k_j}\right\}$ y $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que la subsucesión converge puntualmente, en casi todo punto, a f y, para casi todo $x \in \Omega$, $|f_{k_j}(x)| \leq g(x)$.*

Teorema 1.5.9. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es tal que $\|f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow 0$ (o ∞), entonces la sucesión $\rho(f_k) \longrightarrow 0$ (o ∞). La recíproca vale si y solo si $p_+(\Omega \backslash \Omega_\infty) < \infty$.*

Finalmente concluimos esta sección con el resultado más fuerte de las relaciones entre la convergencia en norma, la convergencia en modular y la convergencia en medida.

Teorema 1.5.10. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $p_+ < \infty$. Entonces para $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y una sucesión $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

i. $f_k \longrightarrow f$ *en norma,*

ii. $f_k \longrightarrow f$ *en modular,*

iii. $f_k \longrightarrow f$ *en medida y para algún* $\gamma > 0$, $\rho(\gamma f_k) \longrightarrow \rho(\gamma f)$.

1.6. Completitud y subconjuntos densos en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

En esta sección abordaremos al estudio de la completitud del espacio como así también daremos a conocer algunos subconjuntos densos en $L^{p(\cdot)}$.
La completitud de los espacios de Lebesgue variables sigue del siguiente resultado, conocido como la *propiedad de Riesz-Fischer*.

Teorema 1.6.1. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es completo: toda sucesión de Cauchy en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge en norma.*

Ahora enunciaremos algunos resultados claves sobre subconjuntos densos en $L^{p(\cdot)}$.

Teorema 1.6.2. *Dado un conjunto abierto Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $p_+ < \infty$. Entonces el conjunto de las funciones acotadas de soporte compacto, con $sop(f) \subset \Omega$, es denso en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

Corolario 1.6.3. *Dado un conjunto abierto Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos $p_+ < \infty$. Entonces el conjunto de funciones continuas con soporte compacto contenido en Ω es denso en el $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Teorema 1.6.4. *Dado Ω abierto y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $p_+(\Omega \backslash \Omega_\infty) = \infty$, entonces las funciones acotadas no son densas en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Teorema 1.6.5. *Dado un conjunto abierto Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, entonces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es separable si y solo si $p_+ < \infty$.*

1.7. El espacio dual de $L^{p(\cdot)}$

En esta última sección del capítulo consideramos el espacio dual de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Esto es el espacio de Banach $L^{p(\cdot)}(\Omega)^*$ de funcionales lineales y continuos $\phi : L^{p(\cdot)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, con norma

$$\|\phi\| = \sup_{\|f\|_{p(\cdot)}=1} |\phi(f)|.$$

Tenemos el siguiente

Teorema 1.7.1. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, son equivalentes*

a) $p_+ < \infty$,

b) el mapa $g \longmapsto \phi_g$ es un isomorfismo: dada cualquier $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, el funcional ϕ_g es continuo y lineal. Recíprocamente, dado cualquier funcional lineal y continuo $\phi \in L^{p(\cdot)}(\Omega)^*$ existe una única $g \in L^{p'(\cdot)}$ tal que $\phi = \phi_g$ y $\|g\|_{p'(\cdot)} \approx \|\phi\|$.

El teorema anterior nos dice que cuando $p_+ < \infty$ el espacio dual $L^{p(\cdot)}(\Omega)^*$ y el $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ coinciden.
Por último, tenemos el siguiente

Corolario 1.7.2. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es reflexivo si y solo si $1 < p_- \leq p_+ < \infty$.*

Capítulo 2

El operador Maximal de Hardy-Littlewood en los $L^{p(\cdot)}$

En lo que sigue, vamos a recordar todo lo referido a uno de los operadores más populares del análisis armónico. Nos referimos al operador maximal de Hardy-Littlewood.

Definición 2.0.1. *Dada una función localmente integrable f, definimos la función $\mathcal{M}f$ por*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{B} \frac{1}{|B|} \int_{B} |f(y)|\, dy, \tag{2.1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen al $x \in \mathbb{R}^n$.

En [2] se prueba, usando la descomposición de Calderon-Zygmund, que $\mathcal{M}$ es acotado del $L^p(\mathbb{R}^n)$ en el $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$. Para $p \geq 1$ el operador maximal satisface una desigualdad del tipo débil. Es decir dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existe una constante C, independiente de f, tal que para toda $\lambda > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx.$$

2.1. La maximal en los $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

En [4] se muestra que el operador maximal está bien definido para $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{M}f(x) < \infty$ *p.c.t.*$x \in \mathbb{R}^n$. En [3], D. Cruz Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer probaron el siguiente resultado.

Teorema 2.1.1. *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. Si $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH_0(\mathbb{R}^n) \cap LH_\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces el operador maximal es acotado sobre el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Es* *decir, para toda* $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$*, existe una constante* C_1 *independiente de* f *tal que,*

$$\|\mathcal{M}f\|_{p(\cdot)} \leq C_1 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Y para $p_- \geq 1$ *existe una constante* C_2*, independiente de* f*, tal que para toda* $\lambda > 0$*,*

$$\|\lambda\chi_{\{x:\mathcal{M}f(x)>\lambda\}}\|_{p(\cdot)} \leq C_2 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Es de notar que si $p_- = 1$ entonces el operador maximal no es acotado sobre el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Una prueba de esto se puede ver en [2].

2.2. Un control en el infinito, la condición N_∞

Una de las cuestiones interesantes sobre la acotación del operador maximal en el contexto de los espacios de Lebesgue variables es analizar las condiciones sobre las funciones exponentes. Según establece el Teorema 2.1.1 las funciones exponentes deben satisfacer ciertas condiciones de continuidad. Nos preguntamos entonces si tales condiciones son necesarias. La respuesta es no y para ello vamos a introducir nuevas condiciones para las funciones exponentes, las cuales garantizarán también la continuidad del operador maximal en estos espacios. Al chequear la prueba del Teorema 2.1.1 que se da en [2] se puede observar que la condición LH_∞ requerida para el exponente se usa para estimar al operador maximal de $f_2 = f\chi_{\{x:f(x)\leq 1\}}$ aplicando la Proposición 2.43 en [2]. Siendo más precisos, se necesita en realidad la validez de dos embeddings: $L^\infty(E) \subset L^{r(\cdot)}(E)$ y $L^\infty(F) \subset L^{s(\cdot)}(F)$, donde,

$$E = \{x \in \Omega : p(x) \geq p_\infty\}, \quad F = \{x \in \Omega : p(x) < p_\infty\}, \tag{2.2}$$

y $r(\cdot)$ y $s(\cdot)$ definidos por,

$$\frac{1}{p_\infty} = \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{r(x)}, \quad \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{p_\infty} + \frac{1}{s(x)}. \tag{2.3}$$

Pero por la Proposición 1.4.2 una condición necesaria y suficiente para que ambos embeddings sean posibles es que las siguientes integrales

$$\int_{\{x\in E:r(x)<\infty\}} \lambda^{-r(x)}dx, \tag{2.4}$$

$$\int_{\{x\in F:s(x)<\infty\}} \lambda^{-s(x)}dx \tag{2.5}$$

sean ambas finitas, para algún $\lambda > 1$. Esto motiva la siguiente,

Definición 2.2.1. *Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Decimos que $p(\cdot) \in N_\infty(\Omega)$ si existen $\Lambda_\infty > 0$ y $p^\infty \in [1, \infty]$ tales que*

$$\int_{\Omega_+} \exp\left(-\Lambda_\infty \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p^\infty}\right|^{-1}\right) dx < \infty,$$

donde $\Omega_+ = \left\{x \in \Omega : \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p^\infty}\right| > 0\right\}$.

Observación 2.2.2. *Si $p_+ < \infty$ entonces podemos reescribir la condición N_∞ como*

$$\int_{\Omega_+} \exp\left(-\Lambda_\infty \left|p(x) - p^\infty\right|^{-1}\right) dx < \infty,$$

donde $\Omega_+ = \{x \in \Omega : |p(x) - p^\infty| > 0\}$.

Observación 2.2.3. *Si $p(\cdot) \in N_\infty(\Omega)$, entonces se puede ver sencillamente que $p'(\cdot) \in N_\infty(\Omega)$.*

Ahora con esta nueva condición se prueba el siguiente resultado, en el cual se reemplaza la condición LH_∞ por la N_∞. Para una prueba ver [2].

Teorema 2.2.4. *Dado un conjunto Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH_0(\Omega)$ y $p(\cdot) \in N_\infty(\Omega)$ entonces existe $C_1 > 0$ tal que $\forall\ \lambda > 0$*

$$\|\lambda \chi_{\{x : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}}\|_{p(\cdot)} \le C_1 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Si además $p_- > 1$ entonces existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|\mathcal{M}f\|_{p(\cdot)} \le C_2 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Ahora mostraremos algunas relaciones entre las condiciones LH_∞ y N_∞. Veremos que la última es un poco mejor en el sentido que es una condición de integrabilidad y no de continuidad necesariamente.

Proposición 2.2.5. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH_\infty(\Omega)$, entonces $p(\cdot) \in N_\infty(\Omega)$.*

Demostración. En efecto si $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH_\infty(\Omega)$ entonces sigue inmediatamente desde la definición,

$$\int_{\Omega_+} \exp\left(-\Lambda_\infty \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right|^{-1}\right) dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-\Lambda_\infty}{C_\infty} \log(e + |x|)\right) dx < \infty.$$

La última desigualdad vale para todo $\Lambda_\infty > nC_\infty$. $\square$

Proposición 2.2.6. *Dado Ω, existe $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p_+ < \infty$, tal que $p(\cdot) \in LH_0(\mathbb{R}) \cap N_\infty(\mathbb{R})$ pero $p(\cdot) \notin LH_\infty(\mathbb{R})$.*

Demostración. Fijamos $p^\infty > 1$ y definimos $\phi(\cdot)$ como,

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} - |e^{k^2} - x| & \text{si } 0 \leq |e^{k^2} - x| \leq \frac{1}{k},\ 1 \leq k < \infty \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $p(x) = p^\infty + \phi(x)$; entonces

$$|p(e^{k^2}) - p^\infty| = \phi(e^{k^2}) = \frac{1}{k} \approx \frac{k}{\log(e + e^{k^2})}.$$

Luego es evidente que $p(\cdot) \notin LH_\infty(\mathbb{R})$. Pero la $\phi(\cdot)$ es Lipchitz, luego $p(\cdot) \in LH_0(\mathbb{R})$. Más aún,

$$\int_{\Omega_+} \exp\left(-|p(x) - p^\infty|^{-1}\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\left\{|e^{k^2} - x| < \frac{1}{k}\right\}} e^{\frac{-1}{\phi(x)}} dx$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{y}} dy \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{ke^k} < \infty.$$

$\square$

Observación 2.2.7. *Si $p(\cdot) \in N_\infty$ entonces $p(\cdot)$ tiene límite en el infinito, en un sentido débil. En [2] se prueba la siguiente,*

Proposición 2.2.8. *Dado un conjunto no acotado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $p(\cdot) \in N_\infty(\Omega)$. Entonces*

i. $\frac{1}{p(\cdot)}$ *converge a* $\frac{1}{p_\infty}$ *en el sentido que si definimos*

$$\pi_k(x) = \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| \chi_{\Omega - B_k(0)}(x),$$

entonces $\pi_k(x) \to 0$ en medida cuando $k \to \infty$.

ii. *Si $\frac{1}{p(\cdot)}$ es uniformemente continua (por ejemplo si $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH_0$), entonces $\frac{1}{p(x)} \longrightarrow \frac{1}{p^\infty}$ cuando $|x| \longrightarrow \infty$.*

2.3. Los pesos de Muckenhoupt y Wheeden

Un peso ω es una función localmente integrable y no negativa. La clase de pesos de Muckenhoupt, $\mathcal{A}_p$, $1 < p < \infty$, se define como la clase de pesos ω tales que

$$\sup_Q \left[\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \right] < \infty, \tag{2.6}$$

donde Q es un cubo en $\mathbb{R}^n$. Para $p = 1$, $\mathcal{A}_1$ es la clase de pesos ω para los cuales existe $C > 0$ tal que

$$\mathcal{M}\omega(x) \leq C\omega(x) \ p.c.t. \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Denotaremos por $[\omega]_{\mathcal{A}_1}$ al ínfimo de las constantes C tales que ω satisface la desigualdad de arriba. También, para $1 < p < \infty$ se define,

$$[\omega]_{\mathcal{A}_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'}dx \right)^{p-1} < \infty. \tag{2.8}$$

A la colección de todos los pesos $\mathcal{A}_p$ se los denota por

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcup_{p \geq 1} \mathcal{A}_p. \tag{2.9}$$

Desde la definición de $\mathcal{A}_p$ se puede probar las siguientes propiedades.

Proposición 2.3.1. *Dado p, $1 \leq p < \infty$, entonces*

i. Si $p > 1$ y $\omega \in \mathcal{A}_p$, entonces $\omega^{1-p'} \in \mathcal{A}_{p'}$.

ii. Si $p < q < \infty$ entonces $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}_q$.

iii. Si $p > 1$ y $\omega_1, \ \omega_2 \in \mathcal{A}_1$ entonces $\omega = \omega_1 \omega_2^{1-p} \in \mathcal{A}_p$.

iv. Si $\omega \in \mathcal{A}_p$ entonces para cualquier cubo Q,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)dx \leq [\omega]_{\mathcal{A}_p} \exp\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \log(\omega(x))dx \right).$$

En [25], B. Muckenhoupt y R.L. Wheeden definen $\mathcal{A}(p, q)$, $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$, como la clase de pesos ω que satisfacen

$$\sup_Q \left[\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \right] < \infty.$$

Cuando $p = 1$, $\omega \in \mathcal{A}(1, q)$ si y solo si

$$\sup_Q \left[\|\omega^{-1}\chi_Q\|_\infty \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right] \ < \ \infty.$$

Ellos prueban algunas propiedades que relacionan dichos pesos con los pesos de clase $\mathcal{A}_p$.

Proposición 2.3.2. *Sean* $1 < p \leq \infty, \ 1 \leq q < \infty$. *Entonces*

i. $\omega \in A(p, q) \ \Leftrightarrow \ \omega^q \in A_r$ *con* $r = 1 + \frac{q}{p'}$ $(q < \infty)$.

ii. $\omega \in A(p, q) \ \Leftrightarrow \ \omega^{-p'} \in A_r$ *con* $r = 1 + \frac{p'}{q}$ $(q < \infty)$.

iii. $\omega \in A(p, \infty) \ \Leftrightarrow \ \omega^{-p'} \in A_1$.

iv. $\omega \in A(p, p) \ \Leftrightarrow \ \omega^p \in A_p$.

2.4. Control local, la condición K_0

En esta sección vamos a introducir otra condición sobre las funciones exponentes que será la que reemplazará la condición de *log-Hölder* local. Jugará un papel clave, junto a la condición N_∞ para obtener la acotación del operador maximal. Antes recordemos que, dado un peso ω y p, $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(\omega)$ es el espacio de funciones medibles Lebesgue f tales que,

$$\|f\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definición 2.4.1. *Dado un cubo* Q, *definimos el operador promedio* A_Q *por*

$$A_Q f(x) = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \chi_Q(x).$$

Desde ahora en más vamos a denotar por f_Q al promedio $\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy$. En [2] se prueba la siguiente,

Proposición 2.4.2. *Dados* p, $1 \leq p < \infty$ *y un cubo* Q,

$$\int_Q |A_Q f(x)|^p \omega(x) dx \leq C_0 \int_Q |f(x)|^p \omega(x) dx$$

para toda f tal que $f\chi_Q \in L^p(\omega)$ si y sólo si $\omega_Q\left((\omega^{1-p'})_Q\right)^{p-1} \leq C_0$ cuando $p > 1$ o

$$\omega_Q \leq C_0 essinf_{x\in Q} w(x)dx$$

cuando $p = 1$. Como consecuencia, $\omega \in \mathcal{A}_p$ si y solo si el operador A_Q es uniformemente acotado sobre el $L^p(\omega)$ para todo Q.

A continuación mostraremos un resultado que conecta a la clase de pesos de Muckenhoupt con el operador maximal. El mismo es fundamental en el estudio de desigualdades con normas con pesos.

Teorema 2.4.3. *Dado p, $1 \leq p < \infty$, entonces $\omega \in \mathcal{A}_p$ si y sólo si para toda $f \in L^p(\omega)$ y todo $\lambda > 0$,*

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C_1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx.$$

Más aún, si $p > 1$ entonces $\omega \in \mathcal{A}_p$ si y sólo si

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}f(x)^p \omega(x)dx \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx.$$

En ambos casos las constantes C_1 y C_2 dependen solo de p, n y $[\omega]_{\mathcal{A}_p}$.

A continuación vamos a definir finalmente la condición K_0.

Definición 2.4.4. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, entonces $p(\cdot) \in K_0(\Omega)$ si existe una constante C tal que para todo cubo Q,*

$$\|\chi_Q\|_{p(\cdot)}\|\chi_Q\|_{p'(\cdot)} \leq C|Q|.$$

En [2] se prueba la siguiente Proposición, la cual da una definición equivalente para la condición K_0, que se relaciona con el operador promedio definido al principio de esta sección.

Proposición 2.4.5. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, para cualquier cubo Q_0 existe una constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\chi_{Q_0}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\|\chi_{Q_0}\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leq C_1|Q_0|$$

si y sólo si existe $C_2 > 0$ tal que para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $sop(f) \subset \Omega$,

$$\|A_{Q_0}f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C_2\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Como consecuencia, $p(\cdot) \in K_0(\Omega)$ si y sólo si el operador promedio A_Q es uniformemente acotado sobre el $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ para todo cubo Q.

Como corolario de la proposición anterior se tiene,

Corolario 2.4.6. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si el operador maximal es acotado sobre el $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ o si satisface la desigualdad de tipo débil*

$$\|\lambda\chi_{\{x:\mathcal{M}f(x)>\lambda\}}\|_{p(\cdot)} \leq C\|f\|_{p(\cdot)}, \ \lambda > 0,$$

entonces $p(\cdot) \in K_0(\Omega)$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.4.7. *Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, supongamos que $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ y $p(\cdot) \in K_0(\mathbb{R}^n) \cap N_\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\|Mf\|_{p(\cdot)} \leq C\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Observación 2.4.8. *El teorema anterior nos permite incluir más exponentes $p(\cdot)$ tales que la maximal sea acotada sobre el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, las Proposiciones 2.2.5 y 2.2.6 nos muestran que cuando $p_+ < \infty$, $LH_0(\mathbb{R}^n) \cap LH_\infty(\mathbb{R}^n)$ está estrictamente contenido en $K_0(\mathbb{R}^n) \cap N_\infty(\mathbb{R}^n)$. De hecho se muestra que existe $p(\cdot) \in LH_0(\mathbb{R}^n) \cap N_\infty(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto el operador maximal $\mathcal{M}$ es acotado sobre $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ y por el Corolario 2.4.6 $p(\cdot) \in K_0(\mathbb{R}^n)$ pero $p(\cdot) \notin LH_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

2.5. Extrapolación y algoritmo de Rubio de Francia

En esta sección vamos a mostrar una extensión del teorema de extrapolación de Rubio de Francia a los espacios de Lebesgue variables. El teorema de extrapolación en los espacios de Lebesgue clásicos es uno de los resultados más profundos en la teoría de desigualdades con normas con pesos. A continuación enunciaremos el clásico resultado de extrapolación en los $L^p(\omega)$.

Teorema 2.5.1. *Dado un operador T, supongamos que para algún p_0, $1 \leq p_0 < \infty$, y todo peso $\omega \in \mathcal{A}_{p_0}$, existe una constante C_{p_0} dependiente de T, p_0, n y $[\omega]_{\mathcal{A}_{p_0}}$ tal que para toda $f \in L^{p_0}(\omega)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^{p_0}\omega(x)dx \leq C_{p_0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0}\omega(x)dx. \tag{2.10}$$

Entonces para todo p, $1 < p < \infty$, y todo $\omega \in \mathcal{A}_p$, existe una constante C_p dependiendo solo de p_0, n, p and $[\omega]_{\mathcal{A}_p}$, tal que para toda $f \in L^p(\omega)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\omega(x)dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\omega(x)dx.$$

Notemos que en realidad el rol del operador T en el teorema anterior no es crucial. Será interesante, entonces, suprimir dicho operador. Podemos reemplazar la hipótesis 2.10 por una desigualdad más general,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^{p_0}\omega(x)dx \leq C_{p_0} \int_{\mathbb{R}^n} |G(x)|^{p_0}\omega(x)dx. \tag{2.11}$$

donde (F, G) son pares de funciones medibles, no negativas para las cuales vale la desigualdad con pesos establecida en 2.11. Vamos a considerar la familia $\mathcal{F}$ de pares (F, G) para los cuales el lado izquierdo es finito. Para nosotros en realidad la familia concreta constará de los pares $(|Tf|, |f|)$ para los cuales vale la desigualdad 2.10 tales que el lado lado izquierdo es finito.

Teorema 2.5.2. *Dado Ω supongamos que para algunos $p_0, q_0,\ 1 \leq p_0 \leq q_0$ la familia $\mathcal{F}$ es tal que para todo $\omega \in \mathcal{A}_1$,*

$$\left(\int_\Omega F(x)^{q_0}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \leq C_0 \left(\int_\Omega G(x)^{p_0}\omega(x)^{\frac{p_0}{q_0}}dx\right)^{\frac{1}{p_0}},\ (F, G) \in \mathcal{F}. \tag{2.12}$$

Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $p_0 \leq p_- \leq p_+ < \frac{p_0 q_0}{q_0 - p_0}$, definimos $q(\cdot)$ por

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}.$$

Si el operador maximal es acotado sobre el $L^{(\frac{q(\cdot)}{q_0})'}(\Omega)$, entonces

$$\|F\|_{q(\cdot)} \leq C_{p(\cdot)}\|G\|_{p(\cdot)},\ (F, G) \in \mathcal{F}. \tag{2.13}$$

Demostración. Daremos la idea de la prueba con el fin de mostrar el algoritmo de Rubio de Francia. Fijamos $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ como en la hipótesis. Sean $\bar{p}(x) = \frac{p(x)}{p_0}$ y $\bar{q}(x) = \frac{q(x)}{q_0}$. Por hipótesis, el operador maximal es acotado sobre el $L^{\bar{q}'}(\Omega)$. Definimos un algoritmo de iteración, llamado *Algoritmo de Rubio de Francia*, $\mathcal{R}$ sobre el $L^{q(\cdot)'}(\Omega)$ por

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^k h(x)}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{L^{q(\cdot)'}(\Omega)}}, \tag{2.14}$$

donde para $k \geq 1,\ \mathcal{M}^k = \mathcal{M} \circ \mathcal{M} \circ ... \circ \mathcal{M}$ denota k iteraciones del operador maximal y $\mathcal{M}^0 h = |h|$. Se puede ver, siguiendo la prueba del Teorema 4.37 en [2], que se verifican:

i. Para todo $x \in \Omega,\ |h(x)| \leq \mathcal{R}h(x)$;

ii. $\mathcal{R}$ es acotado sobre $L^{q'(\cdot)}(\Omega)$ y $\|\mathcal{R}h\|_{q'(\cdot)} \leq 2\|h\|_{q'(\cdot)}$;

iii. $\mathcal{R}h \in \mathcal{A}_1$ y $[\mathcal{R}h]_{\mathcal{A}_1} \leq 2\|\mathcal{M}\|_{L^{\bar{q}'}(\Omega)}$

Fijamos un par $(F, G) \in \mathcal{F}$ tal que $F \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, es decir que el lado izquierdo de 2.13 sea finito. Por la Proposición 1.3.7 y el Teorema 1.3.12,

$$\|F\|_{q(\cdot)}^{q_0} = \|F^{q_0}\|_{\bar{q}(\cdot)} \leq k_{p(\cdot)}^{-1} \sup \int_\Omega F(x)^{q_0} h(x) dx,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones no negativas $h \in L^{\bar{q}'(\cdot)}(\Omega)$ con $\|h\|_{\bar{q}'(\cdot)} = 1$. Fijamos cualquier función h; mostraremos que

$$\int_\Omega F(x)^{q_0} h(x) dx \leq C\|G\|_{p(\cdot)}^{q_0},$$

con la constante C independiente de h. Primero notemos que, por (i.), tenemos que

$$\int_\Omega F(x)^{q_0} h(x) dx \leq \int_\Omega F(x)^{q_0} \mathcal{R}h(x) dx. \tag{2.15}$$

Por la desigualdad de Hölder (Teorema 1.3.9), propiedad (ii.) y Proposición 1.3.7,

$$\int_\Omega F(x)^{q_0} \mathcal{R}h(x) dx \leq K_{p(\cdot)} \|F^{q_0}\|_{\bar{q}(\cdot)} \|\mathcal{R}h\|_{\bar{q}'(\cdot)} \leq 2K_{p(\cdot)} \|F^{q_0}\|_{\bar{q}(\cdot)} \|h\|_{\bar{q}'(\cdot)} < \infty.$$

Luego, por la propiedad (iii.), 2.12 vale con $\omega = \mathcal{R}h$. Más aún, la constante C_0 sólo depende de $[\mathcal{R}h]_{\mathcal{A}_1}$. Luego por la desigualdad de Hölder (Teorema 1.3.9), Proposición 1.3.7 y 2.12 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x)^{q_0} \mathcal{R}h(x) dx &\leq C_0^{q_0} \left(\int_\Omega G(x)^{p_0} \mathcal{R}h(x)^{\frac{p_0}{q_0}} dx \right)^{\frac{q_0}{p_0}} \\ &\leq C_0^{q_0} \|G^{p_0}\|_{\bar{p}(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_0}} \|(\mathcal{R}h)^{\frac{p_0}{q_0}}\|_{\bar{p}'(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_0}} = C_0^{q_0} \|G\|_{p(\cdot)}^{q_0} \|(\mathcal{R}h)^{\frac{p_0}{q_0}}\|_{\bar{p}'(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_0}}.\end{aligned}$$

Solo falta ver que $\|(\mathcal{R}h)^{\frac{p_0}{q_0}}\|_{\bar{p}'(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_0}}$ es acotado por una constante que no depende de h. Por la definición de $q(\cdot)$,

$$\bar{p}'(x) = \frac{p(x)}{p(x) - p_0} = \frac{q_0}{p_0} \frac{q(x)}{q(x) - q_0} = \frac{q_0}{p_0} \bar{q}'(x).$$

Por lo tanto, por la Proposición 1.3.7 y la propiedad (ii.),

$$\|(\mathcal{R}h)^{\frac{p_0}{q_0}}\|_{\bar{p}'(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_0}} = \|\mathcal{R}h\|_{\bar{q}'(\cdot)} \leq 2\|h\|_{\bar{q}'(\cdot)} = 2.$$

Y esto completa la prueba. □

Vamos a probar, como ejemplo de aplicación del Teorema 2.5.2, la acotación del operador maximal fraccionario en los espacios de Lebesgue variables. Dicho resultado nos será útil para el estudio de los operadores en los capítulos posteriores. Recordamos que, dado $0 < \alpha < n$ y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, el operador maximal fraccionario esta dado por

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_B |f(y)|\, dy.$$

También definimos $\mathcal{M}_{\alpha,s}$, para todo $1 \leq s < \infty$, por

$$\mathcal{M}_{\alpha,s} f = (\mathcal{M}_{\alpha.s} |f|^s)^{1/s}. \tag{2.16}$$

En [25] se prueba que $\mathcal{M}_\alpha$ es acotado desde $L^p(\omega^p)$ en $L^q(\omega^q)$, para pesos $\omega \in \mathcal{A}(p,q)$, con $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$. Nosotros obtenemos, con técnicas de extrapolación, el siguiente resultado.

Teorema 2.5.3. *Sea* $0 < \alpha < n$ *y sea* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$*, tal que* $1 \leq p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$*. Sea* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *definido por* $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$ *y supongamos que el operador maximal es acotado sobre el* $L^{(q(\cdot)/q_0)'}(\mathbb{R}^n)$*, con* q_0 *tal que* $\frac{1}{p_-} - \frac{1}{q_0} = \frac{\alpha}{n}$*.*
Si $p_- > 1$ *entonces existe* $C_1 > 0$ *tal que*

$$\|M_\alpha f\|_{q(\cdot)} \leq C_1 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Si $p_- = 1$ *entonces para todo* $\lambda > 0$*, existe* $C_2 > 0$ *tal que*

$$\left\|\lambda \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(x)| > \lambda\}}\right\|_{q(\cdot)} \leq C_2 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Demostración. Sea $q_0 : \frac{1}{p_-} - \frac{1}{q_0} = \frac{\alpha}{n}$ y supongamos que $p_- > 1$. Sea $\tilde{q}(\cdot) = \frac{q(\cdot)}{q_0}$, tomamos una función f con soporte compacto.

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|^{q_0}_{q(\cdot)} = \|(\mathcal{M}_\alpha f)^{q_0}\|_{\tilde{q}(\cdot)} \leq C \sup_{\|h\|_{\tilde{q}'(\cdot)}=1} \int (M_\alpha f)^{q_0}(x) h(x) dx,$$

Definimos el algoritmo de iteración sobre $L^{\tilde{q}'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dado por 2.14. Como en la prueba del Teorema 2.5.2 se verifica lo siguiente:

i. Para todo $x \in \Omega$, $|h(x)| \leq \mathcal{R}h(x)$;

ii. $\mathcal{R}$ es acotado sobre $L^{\bar{q}'}(\Omega)$ y $\|\mathcal{R}h\|_{\bar{q}'(\cdot)} \leq 2\|h\|_{\bar{q}'(\cdot)}$;

iii. $\mathcal{R}h \in \mathcal{A}_1$ y $[\mathcal{R}h]_{\mathcal{A}_1} \leq 2\|\mathcal{M}\|_{L^{\bar{q}'}(\Omega)}$

Luego

$$\|M_\alpha f\|_{q(\cdot)}^{q_0} \leq C \sup_{\|h\|_{\tilde{q}'(\cdot)}=1} \int (M_\alpha f)^{q_0}(x) \left(Rh(x)^{\frac{1}{q_0}}\right)^{q_0} dx,$$

ya que $Rh \in \mathcal{A}_1$ entonces $Rh^{\frac{1}{q_0}} \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}(p_-, q_0)$, y luego, ya que M_α es acotado desde $L^{p_-}(w^{p_-})$ en $L^{q_0}(w^{q_0})$ para pesos $w \in \mathcal{A}(p_-, q_0)$,

$$\|M_\alpha f\|_{q(\cdot)}^{q_0} \leq C \sup_{\|h\|_{\tilde{q}'(\cdot)}=1} \left(\int (f)^{p_-}(x) \left(Rh(x)^{\frac{p_-}{q_0}}\right) dx\right)^{\frac{q_0}{p_-}},$$

Ahora aplicando el Teorema 1.3.9, con $\tilde{p}(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p_-}$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_\alpha f\|_{q(\cdot)}^{q_0} &\leq C \|f^{p_-}\|_{\tilde{p}(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_-}} \sup_{\|h\|_{\tilde{q}'(\cdot)}=1} \left\|Rh^{\frac{p_-}{q_0}}\right\|_{\tilde{p}'(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_-}} \\ &\leq C \|f\|_{p(\cdot)}^{q_0}. \end{aligned}$$

El resto de la prueba sigue como la prueba del Teorema 2.5.2, ya que como $p_+ < \infty$ el conjunto de funciones acotadas de soporte compacto es denso en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 1.6.2). □

Recordemos que, dada una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la función maximal sharp se define por

$$\mathcal{M}^\# f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B \left| f(y) - \frac{1}{|B|} \int_B |f| \right| dy.$$

En [2] los autores prueban, usando el Teorema 2.5.2, que dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p_- \leq p_+ < \infty$, si el operador maximal es acotado sobre $L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe $c > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \left\|t\chi_{\{x:|f(x)|>t\}}\right\|_{p(\cdot)} \leq c \sup_{t>0} \left\|t\chi_{\{x:|\mathcal{M}^\# f(x)|>t\}}\right\|_{p(\cdot)}$$

y

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq c \left\|M^\# f\right\|_{p(\cdot)}.$$

Capítulo 3

Operadores integrales de tipo fraccionario

En este capítulo presentaremos el estudio de operadores de tipo fraccionario, los cuales fueron objeto de estudio de este trabajo, en el contexto de los espacios de Lebesgue variables. A continuación vamos a definir el operador en cuestión. Sea T_α el operador integral positivo dado por

$$T_\alpha f(x) = \int k(x,y) f(y)\, dy, \tag{3.1}$$

con

$$k(x,y) = \frac{1}{|x - A_1 y|^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{|x - A_m y|^{\alpha_m}},$$

donde $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n - \alpha$, $0 \leq \alpha < n$ (si $\alpha = 0$ entonces suponemos $m > 1$) y las A_i son ciertas matrices invertibles tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$.

In [34] Ricci and Sjögren obtuvieron la acotación sobre el $L^p(\mathbb{R}, dx)$, $p > 1$, para una familia de operadores maximales sobre el grupo de Heisenberg tridimensional. Algunos de estos operadores surgen en el estudio del comportamiento límite de las integrales de Poisson en el espacio simétrico $SL(\mathbb{R}^3)/SO(3)$. Para obtener el resultado principal ellos estudiaron la acotación, sobre el $L^2(\mathbb{R}, dx)$, del operador integral

$$Tf(x) = \int |x - y|^{-\alpha} |x + y|^{\alpha - 1} f(y) dy,$$

$0 < \alpha < 1$.
En [12] el Dr. T. Godoy y la Dra. M. Urciuolo estudiaron el operador integral

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-\alpha} |x + y|^{-n+\alpha} f(y) dy,$$

$0 < \alpha < n$. Ellos obtuvieron la acotación sobre el $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ y una estimación de tipo débil $(1,1)$ para dicho operador.
En [37] las autoras, la Dra. M. S. Riveros y la Dra. M. Urciuolo, estudiaron este tipo de operadores y obtuvieron estimaciones con pesos de la forma (p,q), con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, para $\omega \in \mathcal{A}(p,q)$, la clásica familia de pesos de Muckenhoupt y Wheeden, con la hipótesis $\omega(A_i x) \leq cw(x)$ donde c es una constante independiente del peso. Por otro lado enunciaremos los resultados obtenidos en [39] donde los autores, el Dr. P. Rocha y la Dra. M. Urciuolo, obtienen estimaciones de tipo fuerte y débil, en el contexto de los espacios de Lebesgue variables. Ellos usan una hipótesis sobre las matrices A_i y es que las mismas fueran matrices ortogonales y cuya función exponente $p(\cdot)$ saitsfaga las condiciones *log-Hölder* más una hipótesis extra.
Luego daremos resultados análogos obtenidos en [47], junto a la Dra. M. Urciuolo, pero para matrices de la forma $A_i = A^i$ con $i = 1, ..., m$, tal que $A^M = I$ para algún $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$. La prueba se basa en la técnica de extrapolación motivada por el Teorema 2.5.2.
Finalmente vamos a mostrar resultados un poco más generales que obtuvimos junto a la Dra. M. Urciuolo sobre la acotación $p(\cdot) - q(\cdot)$ del operador definido en (3.1). Los resultados que se obtuvieron están publicados en [48].

3.1. Operadores de tipo fraccionario en el contexto de espacios de Lebesgue clásicos

En [36] las autoras obtienen una estimación de tipo Coifman para el operador definido por (3.1). El resultado requiere una hipótesis para el peso ω y es que $\omega(A_i x) \leq \omega(x)$ $p.c.t. x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1.1. *Sea* $0 \leq \alpha < n$. *Sea* T_α *el operador integral definido por (3.1) donde* $A_1, \ldots, A_m$ *son matrices invertibles tales que* $A_i - A_j$ *es invertible para* $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. *Si* $0 < p < \infty$ *y* $\omega \in \mathcal{A}_\infty$ *es tal que* $\omega(A_i x) \leq \omega(x)$ $p.c.t. x \in \mathbb{R}^n$ *para* $i = 1, ..., m$, *entonces existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f(x)|^p \omega(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |M_\alpha f(x)|^p \omega(x)\, dx, \qquad f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n, dx)$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Además prueban el siguiente lema sobre la finitud del operador en cuestión.

Lema 3.1.2. *Sea* $0 \leq \alpha < n$. *Sea* T_α *definido por (3.1) donde* $A_1, \ldots, A_m$ *son matrices invertibles que tales que* $A_i - A_j$ *es invertible para* $i \neq j$, $1 \leq$

$i, j \leq m$. Si $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\omega \in \mathcal{A}(p,q)$, y $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $T_\alpha(f) \in L^q(\mathbb{R}^n, \omega^q)$.

Ahora combinando el Teorema (3.1.1) con el Lema (3.1.2) obtienen la acotación del operador definido por (3.1) sobre los clásicos espacios de Lebesgue pesados.

Teorema 3.1.3. *Sea $0 \leq \alpha < n$. Sea T_α definido por (3.1) donde $A_1, \dots, A_m$ son matrices invertibles que tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. Si $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ y $\omega \in \mathcal{A}(p,q)$ satisface que $\omega(A_i x) \leq w(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f(x)|^q \omega^q(x)\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega^p(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Observación 3.1.4. *El resultado anterior se puede extender para $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \omega^p)$. En efecto si $f \geq 0$ se define $f_N(x) = f\chi_{\{x: f(x) \leq N\}}\chi_{\{x:|x|\leq N\}}$, entonces se aplica el Teorema 3.1.3 a f_N. Tomando límite cuando $N \to \infty$ y usando el clásico teorema de la convergencia monótona sigue el resultado anterior para $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \omega^p)$.*

También en dicho trabajo las autoras obtuvieron una estimación del tipo débil del operador en cuestión.

Teorema 3.1.5. *Sea $0 \leq \alpha < n$. Sea T_α definido por (3.1) donde $A_1, \dots, A_m$ son matrices invertibles que tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. Si $\omega \in \mathcal{A}(1, \frac{n}{n-\alpha})$ tal que $\omega(A_i x) \leq \omega(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda(\omega^{\frac{n}{n-\alpha}}\{x : |T_\alpha f(x)| > \lambda\})^{\frac{n-\alpha}{n}} \leq C \int |f(x)|\omega(x)dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n, \omega).$$

3.2. Acotación sobre los espacios de Lebesgue variables

A continuación enunciaremos los resultados obtenidos en [39]. Los autores, Pablo Rocha y Marta Urciuolo, estudiaron el operador definido por (3.1) en el contexto de los espacios de Lebesgue variables. El primer resultado es sobre la continuidad de dicho operador, para la cual exigen que las matrices sean ortogonales y la función exponente $p(\cdot)$ sea radial y con ciertas hipótesis de continuidad. Esto es básicamente porque se requiere que $p(A_i x) = p(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.1. *Sea* $0 \leq \alpha < n$ *y sea* T_α *el operador integral dado por (3.1) con* A_i *matrices ortogonales y tales que* $A_i - A_j$ *es invertible para* $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. *Sea* $h(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *tal que* $1 < h_- \leq h_+ < \frac{n}{\alpha}$ *y tal que* $h \in LH_0(\mathbb{R}) \cap LH_\infty(\mathbb{R})$. *Sea* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *dada por* $p(x) = h(|x|)$. *Entonces* T_α *es acotado desde* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *en* $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *para* $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$.

El segundo resultado es sobre una estimación de tipo débil del operador. Acá vuelven a requerir ortogonalidad de las matrices y sobre la función exponente se exige que satisfaga $p(A_i x) = p(x)$ *p.c.t.*$x \in \mathbb{R}^n$, hipótesis de continuidad, más que en $x = 0$, $p(\cdot)$ alcance el valor mínimo 1.

Teorema 3.2.2. *Sea* $0 \leq \alpha < n$, $h(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *una función que satisface* $h(0) = 1$, $h_+ < \infty$ *y tal que* $h \in LH_0(\mathbb{R}) \cap LH_\infty(\mathbb{R})$. *Sea* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *definido por* $p(x) = h(|x|)$. *Sea* T_α *el operador integral dado por (3.1), con* A_i *matrices ortogonales tales que* $A_i - A_j$ *es invertible para* $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. *Si* $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$ *entonces existe* $C > 0$ *tal que,*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \, \|\chi_{\{x : T_\alpha f(x) > \lambda\}}\|_{q(\cdot)} \; \leq \; C \|f\|_{p(\cdot)}.$$

3.3. Algunas mejoras para la continuidad sobre los espacios de Lebesgue variables

Esta parte del trabajo corresponde a los aportes originales de la tesis. En esta sección vamos a probar un resultado similar usando la técnica de extrapolación, vista en el capítulo anterior, la cual nos va a permitir reemplazar las condiciones *log-Hölder* sobre la función exponente $p(\cdot)$ por una hipótesis más general: la acotación del operador maximal $\mathcal{M}$. Hemos ya visto en el capítulo anterior que las condiciones de continuidad *log-Hölder* son suficientes pero no necesarias para que el operador maximal este acotado.
Primero mostraremos la acotación del operador en cuestión. Cabe resaltar que parte de estos resultados están incluidos en el trabajo final de la Licenciatura en Matemática y publicados en [47].
Probaremos el siguiente lema que nos será útil de ahora en más.

Lema 3.3.1. *Si* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *y* A *es una matriz invertible* $n \times n$ *entonces*

i.

$$\mathcal{M}(f \circ A)(x) \leq c_1 (\mathcal{M} f) \circ A(x).$$

ii.

$$(\mathcal{M} f \circ A(x) \leq c_2 \mathcal{M}(f \circ A)(x).$$

Demostración. *i*. En efecto, $\mathcal{M}(f \circ A) = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |(f \circ A)(y)|\, dy$, donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x. Por un cambio de variables podemos ver que,

$$\frac{1}{|B|} \int_B |(f \circ A)(y)|\, dy = |det(A^{-1})| \frac{1}{|B|} \int_{A(B)} |f(z)|\, dz,$$

donde $A(B) = \{Ay : y \in B\}$. Ahora, si $y \in B = B(x_0, r)$, entonces $|Ay - Ax_0| \leq M|y - x_0| \leq Mr$, donde $M = \|A\|$. Esto es $Ay \in \widetilde{B} = B(Ax_0, Mr)$. Luego,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M^n |det(A^{-1})|}{|\widetilde{B}|} \int_{\widetilde{B}} |f(z)| dz \\ &\leq M^n |det(A^{-1})| \mathcal{M}f(Ax). \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que,

$$\mathcal{M}(f \circ A) \leq c(\mathcal{M}(f) \circ A),$$

con $c_1 = M^n|det(A^{-1})|$. *ii*. Sale aplicando (i) con A^{-1}. Se obtiene $c_2 = M^n|det(A)|$ □

Teorema 3.3.2. *Sea T_α el operador integral dado por (3.1). Sea A una matriz tal que $A^M = I$ para algún $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$. Sean A_i matrices tales que $A_i = A^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, ..., m$ tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 \leq p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$ y tal que $p(Ax) = p(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$. Sea $q(\cdot)$ definido por $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$. Si el operador maximal $\mathcal{M}$ es acotado sobre $L^{\left(\frac{n-\alpha p_-}{np_-} q(\cdot)\right)'}$ entonces T_α es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Denotamos por $q_0 = \frac{np_-}{n - \alpha p_-}$. En [37] las autoras obtienen la acotación de tipo fuerte del operador en cuestión entre los espacios de Lebesgue clásicos, (p_-, q_0) con pesos $\omega \in \mathcal{A}(p_-, q_0)$ tales que $\omega(A_i x) \leq Cw(x)$. Denotemos por $\widetilde{q}(x) = \frac{q(\cdot)}{q_0}$. Definimos el siguiente algoritmo de iteración sobre el $L^{\widetilde{q}(\cdot)'}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^k h(A^i x)}{2^k \|\mathcal{M}\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^k}, \tag{3.3}$$

Es fácil chequear los siguientes items.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|h(x)| \leq \mathcal{R}h(x)$,

2. $\mathcal{R}$ es acotado sobre el $L^{\widetilde{q}(\cdot)'}(\mathbb{R}^n)$ y $\|\mathcal{R}h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq 2M \|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}$,

3. $\mathcal{R}h \in \mathcal{A}_1$ y $[\mathcal{R}h]_{\mathcal{A}_1} \leq 2CM \left\|\mathcal{M}\right\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}$

4. $\mathcal{R}h(A^i x) \leq \mathcal{R}h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, ..., M.$

En efecto, (1) es evidente; (2) se verifica como sigue. Sea $l \in \mathbb{N}$, $l \leq M$

$$\|\mathcal{M}^k h(A^l \cdot)\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(A^l x)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}(x)'} dx \leq 1\right\}$$

Pero

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(A^l x)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}(x)'} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(y)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}(A^{-l}y)'} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(y)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}(y)'} dy,$$

la primera igualdad es por un cambio de variable usando que $detA = 1$. La segunda igualdad sigue porque $q(A^l x) = q(x)$ $p.c.t.x \in \mathbb{R}^n$. Luego concluimos que

$$\|\mathcal{M}^k h(A^l \cdot)\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} = \|\mathcal{M}^k h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}.$$

Así obtenemos (2) por la subaditividad de la norma,

$$\|\mathcal{R}h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{M}^k h(A(\cdot))\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}}{2^k \left\|\mathcal{M}\right\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^k} + ... + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{M}^k h(A^M(\cdot))\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}}{2^k \left\|\mathcal{M}\right\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^k}$$

$$\leq \|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} M \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2M\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}.$$

Ahora, por el Lema 3.3.1 existe $C > 0$ tal que, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}(f \circ A)(x) \leq C\mathcal{M}f(Ax)$. Luego (3) sigue como en la prueba del Teorema 2.5.2.

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}h)(x) \leq C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^{k+1}h(Ax)}{2^k \left\|\mathcal{M}\right\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^k} + ... + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^{k+1}h(A^M x)}{2^k \left\|\mathcal{M}\right\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^k}\right)$$

$$\leq 2C\|\mathcal{M}\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^{k+1}h(Ax)}{2^{k+1} \left\|\mathcal{M}\right\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^{k+1}} + ... + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^{k+1}h(A^M x)}{2^{k+1} \left\|\mathcal{M}\right\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^{k+1}}\right)$$

$$\leq 2\|\mathcal{M}\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}\mathcal{R}h(x).$$

Y (4) sigue por definición.
Luego $\mathcal{R}h$ es un peso de clase $\mathcal{A}_1$ tal que $\mathcal{R}h(A_i x) \leq \mathcal{R}h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora tomamos una función f acotada con soporte compacto. Seguimos como en la prueba del Teorema 2.5.2.

$$\|T_\alpha f\|_{q(\cdot)}^{q_0} = \|(T_\alpha f)^{q_0}\|_{\widetilde{q}(\cdot)} = c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} (T_\alpha f)^{q_0}(x)h(x)dx$$

$$\leq c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} (T_\alpha f)^{q_0}(x)\mathcal{R}h(x)dx \leq c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_-}\mathcal{R}h(x)^{\frac{p_-}{q_0}}dx\right)^{\frac{q_0}{p_-}},$$

ya que $Rh^{1/q_0} \in A(p_-, q_0)$. Luego por el Teorema 1.3.9,

$$\leq c\,\|f^{p_-}\|_{\widetilde{q}(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_-}} \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \left\|\mathcal{R}h^{\frac{p_-}{q_0}}\right\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^{\frac{q_0}{p_-}} \leq c\,\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0}\,\|\mathcal{R}h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq 2Mc\,\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0}\,\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'},$$

donde la última desigualdad sigue como en la prueba del Teorema 2.5.2. Finalmente mostraremos que $\|T_\alpha f\|_{q(\cdot)} < \infty$. Por la Proposición 1.3.3, será suficiente ver que $\int_{\mathbb{R}^n} (T_\alpha f(x))^{q(x)}dx < \infty$.

$$|T_\alpha f(x)|^{q(x)} \leq |T_\alpha f(x)|^{q_+}\chi_{\{x:T_\alpha f(x)>1\}} + |T_\alpha f(x)|^{q_-}\chi_{\{x:T_\alpha f(x)\leq 1\}},$$

ahora como f es acotada de soporte compacto sigue que $T_\alpha f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{n}{n-\alpha} < s < \infty$, luego $\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f(x)|^{q(x)}dx < \infty$.
El resultado sigue ya que, por el Teorema 1.6.2, las funciones acotadas y de soporte compacto son densas en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 3.3.3. *Sea T_α el operador integral dado por (3.1). Sea A una matriz tal que $A^M = I$ para algún $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$. Sean A_i matrices tales que $A_i = A^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1,...,m$ tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq m$. Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 \leq p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$ y tal que $p(Ax) = p(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$. Sea $q(\cdot)$ definido por $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$. Si el operador maximal $\mathcal{M}$ es acotado sobre $L^{\left(\frac{n-\alpha p_-}{np_-}q(\cdot)\right)'}$ entonces existe $c > 0$, tal que*

$$\left\|\lambda\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)} \leq c\,\|f\|_{p(\cdot)}.$$

$\forall\lambda > 0$, $\forall f \in L_c^\infty$.

Demostración. Tomamos $f \in L_c^\infty$. Vamos a probar sólo el caso $p_- = 1$. Para los demás casos es análoga la prueba. Denotemos por $q_0 = \frac{n}{n-\alpha}$ y $\widetilde{q}(\cdot) = \frac{q(\cdot)}{q_0}$. El Teorema 3.2 en [37] implica que para $\omega \in A(1, q_0)$ tal que $\omega(Ax) \leq c\omega(x)$ entonces

$$\sup_\lambda \lambda^{q_0}\omega^{q_0}(\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}) \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\omega(x)dx\right)^{q_0}.$$

Ahora, sea $F_\lambda = \lambda^{q_0}\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}$,

$$\|\lambda\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}\|_{q(\cdot)}^{q_0} \leq \|\lambda^{q_0}\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}\|_{\widetilde{q}(\cdot)} = \|F_\lambda\|_{\widetilde{q}(\cdot)}$$

$$= C \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x)h(x)dx.$$

Como en la prueba del teorema anterior, sea $\mathcal{R}h$ definido por (3.3). Ya que $\mathcal{R}h \in \mathcal{A}_1$, $\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}} \in \mathcal{A}(1,q_0)$. Luego,

$$\leq C \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x)\mathcal{R}h(x)dx \leq C \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x)\left(\mathcal{R}h(x)^{\frac{1}{q_0}}\right)^{q_0} dx$$

$$\leq C \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mathcal{R}h(x)^{\frac{1}{q_0}} dx\right)^{q_0}.$$

Como en el teorema anterior obtenemos

$$\|\lambda\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}\|_{q(\cdot)}^{q_0} \leq C\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0} \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \|\mathcal{R}h(x)^{\frac{1}{q_0}}\|_{p(\cdot)'}^{q_0} \leq C\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0} \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \|\mathcal{R}h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}$$

$$\leq 2M\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0} \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} = 2M\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0}.$$

Si $p_- > 1$, usamos que T_α es de tipo débil (p_-, q_0) y procedemos como antes obteniendo lo que establece el teorema. □

Observación 3.3.4. *Con las hipótesis del Teorema anterior, si $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, la integral en (3.1) converge p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$. Denominamos dicho límite por $T_\alpha f(x)$ y tenemos que existe $c > 0$ tal que*

$$\left\|\lambda\chi_{\{x:T_\alpha f(x)>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)} \leq c\left\|f\right\|_{p(\cdot)},\ f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Tomamos $f \geq 0$ y una sucesión $f_n \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n(x) \nearrow f(x)$ *p.c.t.*$x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $T_\alpha f_n(x) \nearrow T_\alpha f(x)$ *a.e* $x \in \mathbb{R}^n$ y entonces

$$\chi_{\{x:T_\alpha f_n(x)>\lambda\}}(x) \to \chi_{\{x:T_\alpha f_n(x)>\lambda\}}(x),$$

y por el Teorema 1.5.4,

$$\left\|\lambda\chi_{\{x:T_\alpha f(x)>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)} = \left\|\liminf \lambda\chi_{\{x:T_\alpha f_n(x)>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)}$$

$$\leq \liminf \left\|\lambda\chi_{\{x:T_\alpha f_n(x)>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)} \leq \liminf \left\|f_n\right\|_{p(\cdot)} \leq \left\|f\right\|_{p(\cdot)}.$$

Para f general, como es usual, escribimos $f = f^+ - f^-$. □

Observación 3.3.5. *Sea A una matriz ortogonal y sea T_α definido en (3.1), donde la matriz A_i es o bien una potencia de A o bien una potencia de A^{-1}. Si $A_i - A_j$ es invertible y $p(\cdot)$ es como en los enunciados de los teoremas anteriores, también obtenemos estimaciones de tipo débil y fuerte. Simplemente definimos $\mathcal{R}$ como sigue,*

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k h(A^j x)}{2^k \|M\|^k_{\widetilde{q}(\cdot)'}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k h((A^{-1})^j x)}{2^k \|M\|^k_{\widetilde{q}(\cdot)'}} \right),$$

y la prueba sigue como antes. Notar que acá estamos usando fuertemente la hipótesis sobre el peso ω, que tiene que satisfacer $\omega(A_i x) \leq c\omega(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$. Por eso el $\mathcal{R}$ es definido de esta manera.

Notemos que estos resultados son distintos a los que se obtuvieron en [39]. Sobre todo se destaca que, en la estimación del tipo débil para el T_α no se necesita la hipótesis $p(0) = 1$. Si bien nuestros resultados valen para ciertas matrices, no necesariamente ortogonales, ampliamos la validez a más exponentes que los pedidos en el trabajo de Rocha-Urciuolo.
A continuación mostramos algunos ejemplos de matrices y funciones exponentes que satisfacen las condiciones de los teoremas.

Ejemplo 3.3.6. *Tomemos $r(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga (1.1) y (1.2), con $1 < r_- \leq r_+ < \frac{n}{\alpha}$ y $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$, luego $A^4 = I$ y $A^i - A^j$ es invertible para $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$. Entonces definimos $p(x) = \frac{1}{4}\left(r(Ax) + r(A^2x) + r(A^3x) + r(A^4x)\right)$*

Ejemplo 3.3.7. *Tomamos una función par $p(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga (1.1) y (1.2), con $1 < p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$ y $A = -I$.*

3.4. Generalización de condiciones en el estudio de los operadores de tipo fraccionarios en los espacios de Lebesgue variables

En esta última sección de este capítulo daremos una generalización de los resultados obtenidos en la sección anterior. El trabajo está publicado en [48]. Ahora las matrices serán solamente invertibles con alguna condición mínima. A continuación probaremos un resultado de tipo débil para el operador T_α, definido en (3.1).

Teorema 3.4.1. *Sea $m \in \mathbb{N}$, sean $A_1, ...A_m$ matrices invertibles tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. Sea T_α el operador integral* *dado por (3.1), sea* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $1 \leq p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$ *y tal que* $p(A_i x) = p(x)$ *p.c.t.*$x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$. *Sea* $q(\cdot)$ *definido por* $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$. *Si el operador maximal* $\mathcal{M}$ *es acotado sobre* $L^{\left(\frac{n-\alpha p_-}{np_-}q(\cdot)\right)'}$ *entonces existe* $c > 0$ *tal que,* $\forall \lambda > 0$*,*

$$\left\| \lambda \chi_{\{x: T_\alpha f(x) > \lambda\}} \right\|_{q(\cdot)} \leq c \left\| f \right\|_{p(\cdot)},$$

$f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Tomamos $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. En [37] (ver página 459) las autoras prueban que existe $c > 0$ tal que,

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \left(\omega^{q_0}\{x : |T_\alpha f(x)| > \lambda\}\right)^{\frac{1}{q_0}} \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda \left(\omega^{q_0}\{x : \sum_{i=1}^m \mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x) > c\lambda\}\right)^{\frac{1}{q_0}}$$

para todo $\omega \in \mathcal{A}_\infty$ y $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sea $F_\lambda = \lambda^{q_0}\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}$ La última desigualdad implica que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x)\omega(x)^{q_0}dx \leq \sup_{\lambda>0} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{q_0}\chi(x)_{\{x:\sum_{i=1}^m \mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x) > c\lambda\}}\omega(x)^{q_0}dx \tag{3.4}$$

para algún $c > 0$ y para todo $\omega \in \mathcal{A}_\infty$. Ahora por Proposición 1.3.7, si $\widetilde{q}(\cdot) = \frac{q(\cdot)}{q_0}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}\|_{q(\cdot)}^{q_0} &= \|\lambda^{q_0}\chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}\|_{\widetilde{q}(\cdot)} \\ &= \|F_\lambda\|_{\widetilde{q}(\cdot)} \leq c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x)h(x)dx, \end{aligned}$$

Definimos un algoritmo de iteración sobre $L^{\widetilde{q}(\cdot)'}$ por

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\mathcal{M}^k h(x)}{2^k \|\mathcal{M}\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}^k}, \tag{3.5}$$

donde, para $k \geq 1$, $\mathcal{M}^k$ denota k iteraciones del operator maximal $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^0(h) = |h|$. Chequearemos los siguientes items,

1. $|h(x)| \leq \mathcal{R}h(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$,

2. Para todo $j : 1, ..., m$, $\|\mathcal{R}h \circ A_j\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq c\,\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}$,

3. Para todo $j : 1, ..., m$, $\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}} \circ A_j \in \mathcal{A}(p_-, q_0)$

En efecto, (1) es evidente. Para verificar (2) proseguimos como sigue.

$$\|\mathcal{R}h \circ A_j\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{M}^k h \circ A_j\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{\widetilde{q}(\cdot)'}}$$

y

$$\|\mathcal{M}^k h \circ A_j\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(A_j x)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}(x)'} dx \leq 1\right\}$$

Pero, por un cambio de variables y usando la hipótesis sobre el exponente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(A_j x)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}(x)'} dx = |det(A_j^{-1})| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(y)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}(A_j^{-1}y)'} dy,$$

ponemos $D = max\left\{|det(A_j^{-1})|, j = 1...m\right\}$,

$$\leq D \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(y)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}'(y)} dy. \tag{3.6}$$

Si $D \leq 1$,

$$\|\mathcal{M}^k h \circ A_j\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq \|\mathcal{M}^k h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}.$$

Luego,

$$\|\mathcal{R}h \circ A_j\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{M}^k h(x)\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{\widetilde{q}(\cdot)'}} \leq \|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}.$$

Si $D > 1$ entonces desde (3.6) sigue que,

$$D \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(y)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}'(y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{M^k h(y)}{\lambda C^{\frac{1}{\widetilde{q}(y)'}}}\right)^{\widetilde{q}(y)'} dy$$

y $D = \frac{1}{C}$ donde $C = min\{|det(A_j)|, j = 1...m\}$. Luego,

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{M^k h(y)}{\lambda C^{\frac{1}{(\widetilde{q}')_-}}}\right)^{\widetilde{q}(y)'} dy.$$

Esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}^k h(A_j x)}{\lambda}\right)^{\widetilde{q}(x)'} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{M^k h(x)}{\lambda C^{\frac{1}{(\widetilde{q}')_-}}}\right)^{\widetilde{q}(x)'} dx.$$

Desde esta última integral sigue que,

$$\|\mathcal{M}^k h \circ A_j\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq D^{\frac{1}{(\widetilde{q}')_-}} \|\mathcal{M}^k h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}$$

y luego (2) se verifica con $c = 2D^{\frac{1}{(\widetilde{q}')_-}}$.
Veamos (3). Por Lema (3.3.1),

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}} \circ A_j)(x) \leq c\mathcal{M}(\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}})(A_j x)$$

$\mathcal{R}h \in \mathcal{A}_1$ implica que $\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}} \in \mathcal{A}_1$ y luego,

$$\leq c\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}}(A_j x) = c(\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}} \circ A_j)(x).$$

Entonces (3) sigue ya que $\omega \in \mathcal{A}_1$ implica que $\omega \in \mathcal{A}(p_-, q_0)$.
Y luego,

$$c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x) h(x) dx \leq$$

$$\leq c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x)\mathcal{R}h(x)dx = c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x)(\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}}(x))^{q_0} dx,$$

y por (3.4), como $\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}} \in \mathcal{A}(p_-, q_0)$ y $Rh \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_\infty$,

$$\leq c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \sup_{\lambda>0} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{q_0} \chi(x)_{\{x:\sum_{i=1}^m \mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x)>c\lambda\}} (\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}}(x))^{q_0} dx.$$

Como

$$\left\{x : \sum_{i=1}^m \mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x) > c\lambda\right\} \subseteq \bigcup_{i=1}^m \left\{x : \mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x) > \frac{c\lambda}{m}\right\},$$

entonces,

$$\chi_{\{x:\sum_{i=1}^m \mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x)>c\lambda\}} \leq \sum_{i=1}^m \chi_{\{x:\mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x)>\frac{c\lambda}{m}\}}.$$

Luego

$$\leq c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{q_0} \chi(x)_{\{x:\mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x)>\frac{c\lambda}{m}\}} (\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}}(x))^{q_0} dx$$

$$= c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^m \int_{\{x:\mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x)>\frac{c\lambda}{m}\}} \lambda^{q_0} (\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}}(x))^{q_0} dx$$

$$= c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \lambda^{q_0} |det(A_i)| \int_{A_i^{-1}\left\{x:\mathcal{M}_\alpha f(A_i^{-1}x)>\frac{c\lambda}{m}\right\}} (\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}}(A_i y))^{q_0} dy,$$

$$\leq c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \lambda^{q_0} \int_{\left\{y:\mathcal{M}_\alpha f(y)>\frac{c\lambda}{m}\right\}} (\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}}(A_i y))^{q_0} dy,$$

$$\leq c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p_-} (\mathcal{R}h^{\frac{p_-}{q_0}}(A_i y)) dy \right)^{\frac{q_0}{p_-}},$$

$$= c \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}'(\cdot)}=1} \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p_-} (\mathcal{R}h^{\frac{p_-}{q_0}}(A_i y)) dy \right)^{\frac{q_0}{p_-}},$$

Denotamos por $\widetilde{p}(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p_-}$. Por el Teorema 1.3.9, (2) y la Proposición 1.3.7 y, nuevamente, las hipótesis sobre A_i y $p(\cdot)$ obtenemos

$$\|\lambda \chi_{\{x:|T_\alpha f(x)|>\lambda\}}\|_{q(\cdot)}^{q_0} \leq C \|f^{p_-}\|_{\widetilde{p}(\cdot)}^{\frac{q_0}{p_-}} \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \sum_{j=1}^{m} \left\| \left(\mathcal{R}h^{\frac{p_-}{q_0}} \right) \circ A_j \right\|_{\widetilde{p}(\cdot)'}^{\frac{q_0}{p_-}}$$

$$\leq \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} Cm \|f\|_{p(\cdot)}^{q_0} \|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq C \|f\|_{p(\cdot)}^{q_0}.$$

Ahota mostraremos que $\|T_\alpha f\|_{q(\cdot)} < \infty$. Por la Proposición 1.3.3 es fácil ver que $\rho_{q(\cdot)}(T_\alpha f) < \infty$.

$$|T_\alpha f(x)|^{q(x)} \leq |T_\alpha f(x)|^{q_+} \chi_{\{x:T_\alpha f(x)>1\}} + |T_\alpha f(x)|^{q_-} \chi_{\{x:T_\alpha f(x)\leq 1\}},$$

ahora como f es acotada de soporte compacto, $T_\alpha f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{n}{n-\alpha} < s < \infty$, (ver Lema 2.2 in [37]) luego $\int |T_\alpha f(x)|^{q(x)} dx < \infty$. □

Observación 3.4.2. *Como en la Observación 3.3.4, con las hipótesis del teorema anterior el resultado se extiende a toda $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ por la densidad de las funciones acotadas de soporte compacto, Teorema 1.6.2.*

Teorema 3.4.3. *Sea $m \in \mathbb{N}$, sean $A_1, ...A_m$ matrices invertibles tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. Sea T_α el operador integral dado por (3.1), sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 < p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$ y tal que $p(A_i x) = p(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$. Sea $q(\cdot)$ definido por $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$. Si el operador maximal $\mathcal{M}$ es acotado sobre el $L^{\left(\frac{n-\alpha p_-}{np_-} q(\cdot)\right)'}$ entonces T_α es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. En el artículo [37] las autoras obtienen una estimación de la forma

$$\int (T_\alpha f)^p (x)\omega(x)dx \leq c\sum_{j=1}^{m} \int (\mathcal{M}_\alpha f)^p (x)\omega(A_j x)dx, \tag{3.7}$$

para cualquier $\omega \in \mathcal{A}_\infty$ y $0 < p < \infty$ (ver la última línea de la página 454 en [37]). Denotamos $\widetilde{q}(\cdot) = \frac{q(\cdot)}{q_0}$, y definimos un algoritmo de iteración sobre el $L^{\widetilde{q}(\cdot)'}$ como en la prueba anterior (ver (3.5)). Tenemos que,

1. $\forall\ x \in \mathbb{R}^n, |h(x)| \leq \mathcal{R}h(x)$,
2. $\forall\ j : 1, ..., m, \|\mathcal{R}h \circ A_j\|_{\widetilde{q}(\cdot)'} \leq c\,\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}$,
3. $\forall\ j : 1, ..., m, \mathcal{R}^{\frac{1}{q_0}} h \circ A_j \in \mathcal{A}(p_-, q_0)$.

Tomamos una función f acotada de soporte compacto. Luego como en el Teorema 5.24 in [2],

$$\|T_\alpha f\|_{q(\cdot)}^{q_0} = \|(T_\alpha f)^{q_0}\|_{\widetilde{q}(\cdot)} = C \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \int (T_\alpha f)^{q_0} (x)h(x)dx$$

$$\leq C \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \int (T_\alpha f)^{q_0} (x)\mathcal{R}h(x)dx \leq C \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \sum_{j=1}^{m} \int (\mathcal{M}_\alpha f)^{q_0} (x)\mathcal{R}h(A_j x)dx$$

$$\leq C \sup_{\|h\|_{\widetilde{q}(\cdot)'}=1} \sum_{j=1}^{m} \left(\int |f(x)|^{p_-} \mathcal{R}h^{\frac{p_-}{q_0}} (A_j x)dx \right)^{\frac{q_0}{p_-}}$$

donde la última desigualdad sigue ya que, por la propiedad (3) $\mathcal{R}h^{\frac{1}{q_0}} \circ A_i$ son pesos de clase $\mathcal{A}(p_-, q_0)$.
Ahora, siguiendo como en la prueba anterior,

$$\leq C\,\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0}.$$

También, como en la prueba del Teorema 3.3.2, se tiene que $\|T_\alpha f\|_{q(\cdot)} < \infty$. Y por el Teorema 1.6.2, el resultado es válido para $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. □

Finalizamos este capítulo con un planteo sobre una condición sobre las funciones exponentes, en los resultados anteriores. Observamos que en los Teoremas 3.4.1 y 3.4.3 se le pide una condición al $p(\cdot)$,

$$p(A_i x) = p(x),\ p.c.t. x \in \mathbb{R}^n.$$

Vamos a ver que tal condición no es mucho pedir. Para ello nos basamos en un caso particular del operador que definiremos a continuación y tomaremos funciones exponentes continuas en alguna parte del dominio.

Sea A una matriz $n \times n$ invertible y sea $0 < \alpha < n$. Definimos

$$T_A f(x) = \int \frac{1}{|x - Ay|^{n-\alpha}} f(y) dy.$$

Proposición 3.4.4. *Sea A una matriz invertible $n \times n$. Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p_+ < \infty$ tal que p es continua en y_0 y en Ay_0 para algún $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $p(Ay_0) > p(y_0)$ entonces existe $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_A f \notin L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\alpha}{n}$.*

Demostración. Como p es continua en y_0, existe una bola $B = B(y_0, r)$ tal que $p(y) \sim p(y_0)$ para $y \in B$. Tenemos que $p(y_0) < p(Ay_0)$. En este caso tomamos,

$$f(y) = \frac{\chi_B(y)}{|y - y_0|^\beta},$$

para cierto $\beta < \frac{n}{p(y_0)}$ a elegir. Mostraremos que, para cierto β, $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ pero $T_A f \notin L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. En efecto,

$$T_A f(x) = \int \frac{1}{|x - Ay|^{n-\alpha}} f(y) dy = \int_B \frac{1}{|x - Ay|^{n-\alpha} |y - y_0|^\beta} dy,$$

luego

$$\int (T_A f(x))^{q(x)} dx = \int \left(\int_B \frac{1}{|x - Ay|^{n-\alpha} |y - y_0|^\beta} dy \right)^{q(x)} dx$$

$$\geq \int_{B(Ay_0,\varepsilon)} \left(\int_B \frac{1}{|x - Ay|^{n-\alpha} |y - y_0|^\beta} dy \right)^{q(x)} dx$$

$$\geq \int_{B(Ay_0,\varepsilon)} \left(\int_{B \cap \{y : |Ay - Ay_0| < |Ay_0 - x|\}} \frac{1}{|x - Ay|^{n-\alpha} |y - y_0|^\beta} dy \right)^{q(x)} dx$$

Ahora denotamos por $M = \|A\| = \sup_{\|y\|=1} |Ay|$. Luego para $\varepsilon < Mr$ y $x \in B(Ay_0, \varepsilon)$, $B(y_0, \frac{1}{M} |Ay_0 - x|) \subset B \cap \{y : |Ay - Ay_0| < |Ay_0 - x|\}$. En efecto, $|y - y_0| \leq \frac{1}{M} |Ay_0 - x| \leq \frac{1}{M} \varepsilon \leq r$ y $|Ay - Ay_0| \leq M |y - y_0| \leq |Ay_0 - x|$, luego

$$\geq \int_{B(Ay_0,\varepsilon)} \left(\int_{B(y_0, \frac{1}{M}|Ay_0 - x|)} \frac{1}{|x - Ay|^{n-\alpha} |y - y_0|^\beta} dy \right)^{q(x)} dx,$$

también, para $y \in B(y_0, \frac{1}{M}|Ay_0 - x|)$

$$|x - Ay| \leq |x - Ay_0| + |Ay_0 - Ay| \leq |x - Ay_0| + M|y_0 - y| \leq 2|x - Ay_0|,$$

luego

$$\geq \int_{B(Ay_0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{2^{n-\alpha}|x - Ay_0|^{n-\alpha}}\right)^{q(x)} \left(\int_{B(y_0,\frac{1}{M}|Ay_0-x|)} \frac{1}{|y - y_0|^{\beta}} dy\right)^{q(x)} dx$$

$$= \int_{B(Ay_0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{2^{n-\alpha}|x - Ay_0|^{n-\alpha}}\right)^{q(x)} \left(c\,|Ay_0 - x|^{-\beta+n}\right)^{q(x)} dx$$

$$= \int_{B(Ay_0,\varepsilon)} \left(\frac{c}{2^{n-\alpha}|x - Ay_0|^{\beta-\alpha}}\right)^{q(x)} dx.$$

Ahora, ya que $q(Ay_0) > q(y_0)$, $q(Ay_0) - \gamma > q(y_0)$ para $\gamma = \frac{q(Ay_0)-q(y_0)}{2}$ Observamos que si $\frac{1}{q(y_0)} = \frac{1}{p(y_0)} - \frac{\alpha}{n}$, para $\beta_0 = \frac{n}{p(y_0)}$, $(\beta_0 - \alpha)\,q(y_0) = \left(\frac{n}{p(y_0)} - \alpha\right) q(y_0) = n$, luego ya que $q(Ay_0) - \gamma > q(y_0)$, obtenemos que $\left(\frac{n}{p(y_0)} - \alpha\right)(q(Ay_0) - \gamma) > n$ y todavía $(\beta - \alpha)\,(q(Ay_0) - \gamma) > n$ para $\beta = \frac{n}{p(y_0)} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p(y_0)} - \left(\alpha + \frac{n}{q(Ay_0)-\gamma}\right)\right)$. Luego $\beta = \frac{n}{p(y_0)}(1 - \delta)$ para algún $\delta > 0$. Ya que $q(\cdot)$ es continua, elegimos ε de manera que, para $x \in B\,(Ay_0, \varepsilon)$, $q(x) > q(Ay_0) - \gamma$. Y $\frac{c}{2^{n-\alpha}|x-Ay_0|^{\beta-\alpha}} > 1$ luego esta última integral está acotada por,

$$c\int_{B(Ay_0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{|x - Ay_0|^{\beta-\alpha}}\right)^{q(Ay_0)-\gamma} dx = \infty.$$

Para este β elegimos r para el cual obtenemos que la bola $B = B(y_0, r) \subset \left\{y : p(y) < \frac{p(y_0)}{1-\delta}\right\}$. De esta manera obtenemos que $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ pero $T_A f \notin L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Corolario 3.4.5. *Si $A^N = I$ para algún $N \in \mathbb{N}$, $p(\cdot)$ es continua y T_A es acotado desde el $L^{p(\cdot)}$ en $L^{q(\cdot)}$, entonces $p(Ay) = p(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supongamos que $p(Ay_0) < p(y_0)$. Como $p(\cdot)$ es continua en y_0, por la Proposición 3.4.4,

$$p(Ay_0) < p(y_0) = p(A^N y_0) \leq p(A^{N-1} y_0) \leq ... \leq p(Ay_0) = p(Ay_0)$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Capítulo 4

Operadores integrales con núcleos de tipo "rough"

En este capítulo estudiaremos operadores con núcleos aún más generales que los del capítulo anterior. En esta ocasión, además, mostraremos otras técnicas para estudiar la continuidad de dichos operadores en el contexto de los espacios de Lebesgue variables. Como vimos en el capítulo II, existen condiciones más débiles para las funciones exponentes, para que el operador maximal resulte acotado sobre el $L^{p(\cdot)}$. Aprovecharemos dichas condiciones y obtendremos algunos resultados, los cuales serán claves en la acotación de estos nuevos operadores. Pero antes haremos referencia al trabajo [38] donde las autoras, la Dra. S. Riveros y la Dra. M. Urciuolo, estudian dicho operador sobre los clásicos espacios de Lebesgue pesados.
Sea $0 \leq \alpha < n$, $\; m \in \mathbb{N}$. Para $1 \leq i \leq m$, sea $1 < q_i < \infty$ tal que $\frac{n}{q_1} + \cdots + \frac{n}{q_m} = n - \alpha$. Para $\alpha = 0$ tomamos $m > 1$. Denotamos por $\Sigma = \Sigma_{n-1}$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$. Sea $\Omega_i \in L^1(\Sigma)$. Si $x \neq 0$, escribimos $x' = x/|x|$. Extendemos esta función a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ como $\Omega_i(x) = \Omega_i(x')$.
Sea

$$k_i(x) = \frac{\Omega_i(x)}{|x|^{n/q_i}}, \tag{4.1}$$

y sea

$$R_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy, \tag{4.2}$$

con $K(x,y) = k_1(x - A_1 y)...k_m(x - A_m y)$, donde A_i son ciertas matrices invertibles y $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$. En [38] las autoras consideran el R_α definido en (4.2) donde, para $1 \leq i \leq m$, k_i está dado por (4.1). Para $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega_i \in L^1(\Sigma)$, ellas definen el L^p- módulo de continuidad como

$$\varpi_{i,p}(t) = \sup_{|y| \leq t} \|\Omega_i(\cdot + y) - \Omega_i(\cdot)\|_{p,\Sigma}.$$

Asumen las siguientes hipótesis para Ω_i, $1 \leq i \leq m$,

(H_1) Existen $p_i > q_i,\ i : 1...m$, tales que $\Omega_i \in L^{p_i}(\Sigma)$ (condición de tamaño),

(H_2) $\displaystyle\int_0^1 \varpi_{i,p_i}(t)\frac{dt}{t} < \infty$ (condición de Dini).

4.1. Acotación sobre los clásicos espacios de Lebesgue con pesos

Un primer resultado obtenido por las autoras en [38] es acerca de una estimación sharp del operador definido por (4.2).

Teorema 4.1.1. *Sea $0 \leq \alpha < n$ y sea R_α el operador integral definido por (4.2). Supongamos que para $1 \leq i \leq m$, las matrices A_i son invertibles y tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ y las funciones Ω_i satisfacen las hipótesis (H_1) y (H_2). Si $s \geq 1$ definido por $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{s} = 1$ entonces existe $C > 0$ tal que, para $0 < \delta \leq 1$ y $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$(\mathcal{M}^{\#}|R_\alpha f|^\delta(x))^{1/\delta} \leq C \sum_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{\alpha,s} f(A_i^{-1}x).$$

Como en el capítulo anterior también las autoras en este trabajo obtuvieron una estimación de tipo Coifman para el operador definido por (4.2). Usaron la teoría de pesos para obtener los siguientes resultados.

Teorema 4.1.2. *Sea $0 \leq \alpha < n$ y sea R_α el operador integral definido por (4.2). Supongamos que para $1 \leq i \leq m$, las matrices A_i son invertibles y tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ y las funciones Ω_i satisfacen las hipótesis (H_1) y (H_2). Sea $s \geq 1$ definido por $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{s} = 1$, $0 < p < \infty$ y sea $\omega \in \mathcal{A}_\infty$ que satisface $\omega(A_i x) \leq \omega(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe $C > 0$ tal que, para $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |R_\alpha f(x)|^p \omega(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{\alpha,s} f(x)|^p \omega(x)\, dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Finalmente prueban la acotación del operador R_α en el contexto de los clásicos espacios de Lebesgue con pesos. Más precisamente para ciertos pesos de la clase de Muckenhoupt-Wheeden.

Teorema 4.1.3. *Sea $0 \leq \alpha < n$ y sea R_α el operador integral definido por (4.2). Supongamos que para $1 \leq i \leq m$, las matrices A_i son invertibles y tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ y las funciones Ω_i satisfacen las hipótesis (H_1) y (H_2). Sea $s \geq 1$ definido por $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{s} = 1$. Supongamos que ω es un peso tal que satisface $\omega(A_i x) \leq \omega(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$ y $\omega^s \in \mathcal{A}\left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}\right)$ con $s < p < \frac{n}{\alpha}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Entonces existe $C > 0$ tal que para $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n, dx)$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |R_\alpha f(x)|^q \omega^q(x)\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

También una estimación del tipo débil con pesos para el R_α. En este caso con ciertos pesos en $\mathcal{A}(1, \frac{n}{n-\alpha})$.

Teorema 4.1.4. *Sea $0 \leq \alpha < n$ y sea R_α el operador integral definido por (4.2). Supongamos que para $1 \leq i \leq m$, las matrices A_i son invertibles y tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ y las funciones Ω_i satisfacen las hipótesis (H_1) y (H_2). Sea $s \geq 1$ definido por $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{s} = 1$. Supongamos que ω es un peso tal que satisface $\omega(A_i x) \leq \omega(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$ y $\omega^s \in \mathcal{A}(1, \frac{n}{n-\alpha s})$. Entonces existe $C > 0$ tal que para $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n, dx)$,*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda (w^{\frac{sn}{n-\alpha s}}\{x : |R_\alpha f(x)| > \lambda\})^{\frac{n-\alpha s}{sn}} \leq C \left(\int |f(x)|^s w^s(x) dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

4.2. Continuidad en el contexto de los espacios de Lebesgue variables

En esta sección usaremos la función maximal sharp para obtener la acotación del operador definido por (4.2), en los espacios de Lebesgue variables. Mostremos los resultados obtenidos en [49]. Dicho trabajo forma parte de los resultados originales obtenidos en esta tesis. Las funciones exponentes van a satisfacer ciertas condiciones de regularidad y relaciones con las diferentes matrices A_i, las cuales definen al núcleo K. Asumiremos la hipótesis $p(A_i x) \leq p(x)$ $a.e.x \in \mathbb{R}^n$. En el capítulo anterior, en referencia [48], probamos que esta condición es, en efecto, necesaria en algunos casos particulares. A continuación mostraremos algunos resultados que aprovecharán la condición N_∞ definida en el Capítulo II, Definición 2.2.1, para obtener una condición sobre las funciones exponentes que serán claves en el estudio de la continuidad del operador R_α definido en 4.2.

Lema 4.2.1. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $p(\cdot) \in N_\infty(\Omega)$ y $p_\infty = \infty$ entonces $1 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Para $\lambda > 1$ suficientemente grande, por la Definición 2.2.1, aplicada a $p(\cdot)$, $\Omega_+ = \Omega \smallsetminus \Omega_\infty$,

$$\int_{\Omega\smallsetminus\Omega_\infty} \lambda^{-p(x)} dx = \int_{\Omega\smallsetminus\Omega_\infty} e^{-p(x)\ln(\lambda)} dx$$

$$= \int_{\Omega\smallsetminus\Omega_\infty} e^{-\Lambda_\infty p(x)\frac{\ln(\lambda)}{\Lambda_\infty}} dx \leq \int_{\Omega\smallsetminus\Omega_\infty} e^{-\Lambda_\infty p(x)} dx < \infty.$$

□

A continuación enunciamos un resultado clave de este capítulo. Probaremos una desigualdad en norma que nos facilitará algunos cambios de variables más adelante. Hablamos de una desigualdad de tipo

$$\|f \circ A\|_{p(\cdot)} \leq c\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Proposición 4.2.2. *Sea A una matriz invertible $n \times n$.*

i. Si $p(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p_- \leq p_+ < \infty$ y $p(Ax) \leq p(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$, entonces existe $c_1 > 0$ tal que

$$\left\|f \circ A^{-1}\right\|_{p(\cdot)} \leq c_1 \left\|f\right\|_{p(\cdot)},$$

para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

ii. Si $p(Ax) = p(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$ entonces existe $c_2 > 0$ tal que

$$\|f \circ A\|_{p(\cdot)} \leq c_2\|f\|_{p(\cdot)},$$

para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. (i.) Asumimos que f es acotada de soporte compacto y $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$. Probaremos que,

$$\left\|f \circ A^{-1}\right\|_{p(\cdot)} \leq c.$$

Descomponemos $f = f_1 + f_2$ donde $f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|>1\}}$ y $f_2 = f\chi_{\{x:|f(x)|\leq 1\}}$,

$$\left\|f \circ A^{-1}\right\|_{p(\cdot)} \leq \left\|f_1 \circ A^{-1}\right\|_{p(\cdot)} + \left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{p(\cdot)}.$$

Definimos $E = \{x : p(x) \geq p_\infty\}$ y $F = \{x : p(x) < p_\infty\}$. Estimamos $\|f_2 \circ A^{-1}\|_{p(\cdot)}$,

$$\left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p(\cdot)}(E)} + \left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p(\cdot)}(F)}.$$

Ya que f_2 es acotada y de soporte compacto, $f_2 \in L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n)$ y luego

$$f_2 \circ A^{-1} \in L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n),$$

por el Lema 1.4.4, con $g = f_2 \circ A^{-1}$, $t(\cdot) = p_\infty$, $u(\cdot) = p(\cdot)$ tenemos que, si $\|f_2 \circ A^{-1}\|_{L^{p_\infty}(E)} < 1$,

$$\left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p(\cdot)}(E)} \leq \left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p_\infty}(E)} + 1 < 2.$$

Y si $\|f_2 \circ A^{-1}\|_{L^{p_\infty}(E)} \geq 1$ entonces,

$$\begin{aligned}\left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p(\cdot)}(E)} &\leq 2\left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p_\infty}(E)} \leq 2\det(A)\left\|f_2\right\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\det(A)\left[\|f_2\|_{L^{p_\infty}(E)} + \|f_2\|_{L^{p_\infty}(F)}\right].\end{aligned}$$

Ahora estimamos $\|f_2\|_{L^{p_\infty}(E)}$. Por definición de E, definimos el exponente defecto $r(\cdot) \in \mathcal{P}(E)$ por,

$$\frac{1}{p_\infty} = \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{r(x)}.$$

Usando la desigualdad de Hölder generalizada, Corolario 1.3.10, tenemos que

$$\|f_2\|_{L^{p_\infty}(E)} \leq K\,\|1\|_{L^{r(\cdot)}(E)}\,\|f_2\|_{L^{p(\cdot)}(E)} \leq K\,\|1\|_{L^{r(\cdot)}(E)} < \infty.$$

La última desigualdad sigue ya que $r(\cdot) \in N_\infty$, $r_\infty = \infty$ y luego el Lema 4.2.1 implica que $1 \in L^{r(\cdot)}(E)$.

Para estimar $\|f_2\|_{L^{p_\infty}(F)}$, aplicamos el Lema 1.4.4, con $g = f_2 \in L^{p(\cdot)}(F)$, $t(\cdot) = p(\cdot)$, $u(\cdot) = p_\infty$. Ya que $\|f_2\|_{L^{p(\cdot)}(F)} \leq 1$,

$$\|f_2\|_{L^{p_\infty}(F)} \leq \|f_2\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + 1 \leq 2.$$

Combinando las estimaciones de arriba, obtenemos que

$$\left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p(\cdot)}(E)} \leq C(K\,\|1\|_{L^{r(\cdot)}(E)} + 2) < \infty.$$

Ahora, de forma similar, estimamos $\|f_2 \circ A^{-1}\|_{L^{p(\cdot)}(F)}$. Definimos el exponente defecto $s(\cdot) \in \mathcal{P}(F)$ por,

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{p_\infty} + \frac{1}{s(x)}.$$

Nuevamente por el Corolario 1.3.10,

$$\|f_2 \circ A^{-1}\|_{L^{p(\cdot)}(F)} \leq K \|1\|_{L^{s(\cdot)}(F)} \left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p_\infty}(F)}.$$

Como $s(\cdot) \in N_\infty$ y $s_\infty = \infty$, por el Lema 4.2.1 tenemos que $1 \in L^{s(\cdot)}(F)$. Más aún, podemos argumentar como antes obteniendo,

$$\left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p_\infty}(F)} \leq \left\|f_2 \circ A^{-1}\right\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \det(A) \|f_2\|_{L^{p_\infty}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \det(A) \left[\|f_2\|_{L^{p_\infty}(E)} + \|f_2\|_{L^{p_\infty}(F)}\right] < \infty.$$

Estimamos ahora $\|f_1 \circ A^{-1}\|_{p(\cdot)}$.
Ya que $p_+ < \infty$ es suficiente probar que existe $c > 0$ tal que $\rho_{p(\cdot)}(f_1 \circ A^{-1}) \leq c$.
Ya que $p(Ax) \leq p(x)$ $p.c.t.x \in \mathbb{R}^n$, por la Proposición 1.3.8,

$$\int f_1(A^{-1}x)^{p(x)} dx = \det(A) \int f_1(x)^{p(Ax)} dx \leq \det(A) \rho_{p(\cdot)}(f_1) \leq c \|f_1\|_{p(\cdot)} < c.$$

Para $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ general, aplicamos el Teorema 1.5.3. Para $k \in \mathbb{N}$, definimos $f^k(x) = |f| \chi_{\{x:|x|\leq k, |f(x)|\leq k\}}$, $f^k(x)$ converge de forma creciente a $|f(x)|$ para casi todo punto y luego $\left\|f^k\right\|_{p(\cdot)} \to \|f\|_{p(\cdot)}$ y también $\left\|f^k \circ A^{-1}\right\|_{p(\cdot)} \to \|f \circ A^{-1}\|_{p(\cdot)}$. Ya que cada f^k es una función acotada de soporte compacto y $\left\|\frac{f_k}{\|f_k\|_{p(\cdot)}}\right\| \leq 1$, tenemos probado que existe una constante $c > 0$ tal que $\left\|\frac{f_k \circ A^{-1}}{\|f_k\|_{p(\cdot)}}\right\|_{p(.)} \leq c$, luego

$$\left\|\frac{f \circ A^{-1}}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right\|_{p(\cdot)} = \lim_{k\to\infty} \left\|\frac{f_k \circ A^{-1}}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right\|_{p(\cdot)} \leq \lim_{k\to\infty} \left\|\frac{f_k \circ A^{-1}}{\|f_k\|_{p(\cdot)}}\right\|_{p(\cdot)} \leq c,$$

y entonces

$$\left\|f \circ A^{-1}\right\|_{p(\cdot)} \leq c_1 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

(ii.) Sea $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que

$$\|f \circ A\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(Ax)}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Por un cambio de variable y usando la hipótesis sobre el exponente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(Ax)}{\lambda}\right)^{p(x)} dx = \left|\det(A^{-1})\right| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(y)}{\lambda}\right)^{p(y)} dy, \qquad (4.3)$$

Sea $D = |\det(A^{-1})|$, entonces tenemos dos casos: Si $D \leq 1$,

$$\|f \circ A\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} .$$

Si $D > 1$, entonces,

$$D \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(y)}{\lambda} \right)^{p(y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(y)}{\lambda C^{\frac{1}{p(y)}}} \right)^{p(y)} dy,$$

donde $C = \frac{1}{D}$. Luego,

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(y)}{\lambda C^{\frac{1}{p_-}}} \right)^{p(y)} dy.$$

Esto es que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(Ax)}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(x)}{\lambda C^{\frac{1}{p_-}}} \right)^{p(x)} dx.$$

La última desigualdad implica que,

$$\|f \circ A\|_{p(\cdot)} \leq D^{\frac{1}{p_-}} \|f\|_{p(\cdot)} .$$

□

Ahora, finalmente, estamos en condiciones de enunciar los resultados obtenidos, junto con la Dra. M. Urciuolo, acerca de la continuidad del operador definido por (4.2). En este primer resultado obtenemos estimaciones de tipo débil y fuerte del operador usando el operador maximal sharp. Además usaremos como resultado clave la Proposición 4.2.2.

Teorema 4.2.3. *Sea $0 \leq \alpha < n$ y sea R_α el operador integral dado por (4.2). Sea $m \in \mathbb{N}$ (o $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ para $\alpha = 0$), sean $A_1, ..., A_m$ matrices invertibles tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ y las funciones Ω_i satisfacen las hipótesis (H_1) y (H_2). Sea $s \geq 1$ definido por $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{s} = 1$, sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 \leq s \leq p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$ y tal que $p(A_i x) \leq p(x)$ p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$ y sea $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definido por $\frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{q(\cdot)} = \frac{\alpha}{n}$. Si $\frac{q(\cdot)}{s} \in N_\infty(\mathbb{R}^n) \cap K_0(\mathbb{R}^n)$ entonces,*

i. para todo $\lambda > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\left\| \lambda \chi_{\{x : R_\alpha f(x) > \lambda\}} \right\|_{q(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)} ,$$

$f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ii. Si $p_- > s$ entonces R_α se extiende a un operador acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. (i). En [37] las autoras prueban que, para $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{M}^{\#}(R_\alpha f)(x) \leq c \sum_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{\alpha,s} f(A_i^{-1}x), \tag{4.4}$$

$p.c.t. x \in \mathbb{R}^n$. Ya que $\frac{q(\cdot)}{s} \in N_\infty(\mathbb{R}^n) \cap K_0(\mathbb{R}^n)$ entonces $q'(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n) \cap K_0(\mathbb{R}^n)$. En efecto, es fácil ver que si $p(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $\alpha p(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \geq 1$. Luego $s\frac{q(\cdot)}{s} = q(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$. Por la observación 2.2.3 se tiene que $q'(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$. Ya que $\frac{q(\cdot)}{s} \in N_\infty(\mathbb{R}^n) \cap K_0(\mathbb{R}^n)$ entonces por el Teorema 2.4.7 el operador maximal resulta acotado sobre el $L^{\frac{q(\cdot)}{s}}(\mathbb{R}^n)$. Luego, por el Teorema 4.37 en [2], éste es acotado sobre el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. También por el Corolario 4.64 in [2] éste es acotado sobre el $L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Por el Corolario 2.4.6, $q'(\cdot) \in K_0(\mathbb{R}^n)$. Y entonces se tiene $q'(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n) \cap K_0(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\lambda > 0$ y $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ya que $q'(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n) \cap K_0(\mathbb{R}^n)$, nuevamente el Teorema 2.4.7 implica que el operador maximal es acotado sobre el $L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, luego por el Teorema 5.54 in [2] y (4.4),

$$\|\lambda \chi_{\{x: R_\alpha f(x) > \lambda\}}\|_{q(\cdot)} \leq C \sup_{\lambda>0} \left\|\lambda \chi_{\{x:\mathcal{M}^{\#}(R_\alpha f)(x)>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)}$$

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \left\|\lambda \chi_{\{x: \sum_{i=1}^m \mathcal{M}_{\alpha,s} f(A_i^{-1}x) > \frac{\lambda}{c}\}}\right\|_{q(\cdot)} \leq C \sup_{\lambda>0} \left\|\lambda \sum_{i=1}^{m} \chi_{\{x:\mathcal{M}_{\alpha,s} f(A_i^{-1}x) > \frac{\lambda}{cm}\}}\right\|_{q(\cdot)}$$

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left\|\lambda \chi_{\{x:\mathcal{M}_{\alpha,s} f(A_i^{-1}x) > \frac{\lambda}{cm}\}}\right\|_{q(\cdot)} \leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left\|\lambda \chi_{\{x:\mathcal{M}_{\alpha.s}|f|^s(A_i^{-1}x) > (\frac{\lambda}{cm})^s\}}\right\|_{q(\cdot)}$$

Luego por la Proposición 1.3.7 y el Teorema 1.3.12,

$$\|\lambda \chi_{\{x: R_\alpha f(x) > \lambda\}}\|_{q(\cdot)} \leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left\|\lambda^s \chi_{\{x:\mathcal{M}_{\alpha.s}|f|^s(A_i^{-1}x) > (\frac{\lambda}{cm})^s\}}\right\|_{\frac{q(\cdot)}{s}}^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left\|\left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s \chi_{\{x:\mathcal{M}_{\alpha.s}|f|^s(A_i^{-1}x) > (\frac{\lambda}{cm})^s\}}\right\|_{\frac{q(\cdot)}{s}}^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left[\sup_{\|h\|_{(\frac{q(\cdot)}{s})'}=1} \int_{\{x:\mathcal{M}_{\alpha.s}|f|^s(A_i^{-1}x)>(\frac{\lambda}{cm})^s\}} \left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s h(x)dx \right]^{\frac{1}{s}}$$

Ahora desde el Lema 3.3.1, parte (ii), se puede ver que para A invertible y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ existe $c > 0$ tal que $\mathcal{M}_{\alpha.s}f(A^{-1}x) \leq c\mathcal{M}_{\alpha.s}(f \circ A^{-1})(x)$. Y luego,

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left[\sup_{\|h\|_{(\frac{q(\cdot)}{s})'}=1} \int_{\{x:\mathcal{M}_{\alpha.s}\left|f\circ A_i^{-1}\right|^s(x)>(\frac{\lambda}{cm})^s\}} \left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s h(x)dx \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left[\sup_{\|h\|_{(\frac{q(\cdot)}{s})'}=1} \int \left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s \chi_{\{x:\mathcal{M}_{\alpha.s}\left|f\circ A_i^{-1}\right|^s(x)>(\frac{\lambda}{cm})^s\}} h(x)dx \right]^{\frac{1}{s}}$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder (Teorema 1.3.9). Entonces usamos que $(\frac{q(\cdot)}{s})' \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$, Proposición 4.2.2, Lema 2.5.3 y Proposición 1.3.7 para obtener

$$\|\lambda\chi_{\{x:R_\alpha f(x)>\lambda\}}\|_{q(\cdot)}$$

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left[\sup_{\|h\|_{(\frac{q(\cdot)}{s})'}=1} \left\| \left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s \chi_{\{y:\mathcal{M}_{\alpha.s}\left|f\circ A_i^{-1}\right|^s(x)>(\frac{\lambda}{cm})^s\}} \right\|_{\frac{q(\cdot)}{s}} \|h\|_{(\frac{q(\cdot)}{s})'} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$= C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \left[\sup_{\|h\|_{(\frac{q(\cdot)}{s})'}=1} \left\| \left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s \chi_{\{y:\mathcal{M}_{\alpha.s}\left|f\circ A_i^{-1}\right|^s(x)>(\frac{\lambda}{cm})^s\}} \right\|_{\frac{q(\cdot)}{s}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

Ahora $|f|^s \in L^{\frac{p(\cdot)}{s}}(\mathbb{R}^n)$, y como $\frac{q(\cdot)}{s} \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces se puede ver que $\frac{p(\cdot)}{s} \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $p(Ax) \leq p(x)$, por Proposición 4.2.2 tenemos que $\||f \circ A_i^{-1}|^s\|_{\frac{p(\cdot)}{s}} \leq \||f|^s\|_{\frac{p(\cdot)}{s}} < \infty$. Luego $|f \circ A_i^{-1}|^s \in L^{\frac{p(\cdot)}{s}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\leq C \sup_{\lambda>0} \sum_{i=1}^{m} \||f \circ A_i^{-1}|^s\|_{\frac{p(\cdot)}{s}}^{\frac{1}{s}}$$

y por la homogeneidad del exponente, Proposición 1.3.7 y en vista a la Proposición 2.2.8 se puede ver que $p(\cdot) \in N_\infty$ y luego Proposición 4.2.2,

$$\leq C \sum_{i=1}^{m} \||f \circ A_i^{-1}|\|_{p(\cdot)} \leq C\|f\|_{p(\cdot)}.$$

(ii). Sea $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Por el Teorema 5.54 in [2], ya que $q'(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n) \cap K_0(\mathbb{R}^n)$,

$$\|R_\alpha f\|_{q(\cdot)} \leq C \left\| \mathcal{M}^{\#} |R_\alpha f| \right\|_{q(\cdot)}$$

Ahora usamos (4.4) y ya que $q(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$, por la Proposición 4.2.2

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \left\| \mathcal{M}_{\alpha,s} f(A_i^{-1} \cdot) \right\|_{q(\cdot)} \leq C \sum_{i=1}^{m} \|\mathcal{M}_{\alpha,s} f\|_{q(\cdot)} = Cm \left\| (\mathcal{M}_{\alpha.s} |f|^s)^{1/s} \right\|_{q(\cdot)}$$

Por la Proposición 1.3.7 y Lema 2.5.3

$$= Cm \, \|(\mathcal{M}_{\alpha.s} |f|^s)\|^{\frac{1}{s}}_{\frac{q(\cdot)}{s}} \leq C \, \||f|^s\|^{\frac{1}{s}}_{\frac{p(\cdot)}{s}} = C \, \|f\|_{p(\cdot)} \, .$$

Ahora *ii.* sigue ya que $L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 1.6.2).

□

Ahora probaremos un resultado similar pero con otras hipótesis. En lugar de que la función exponente satisfaga las condiciones K_0 y N_∞ pediremos que el operador maximal esté acotado sobre el $L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Y en lugar de $p(Ax) \leq p(x)$ vamos a exigir que $p(Ax) = p(x)$. Como se puede observar las hipótesis ganan por un lado pero pierden por el otro. Por lo que no se trata de que un teorema sea más general que el otro sino que son resultados diferentes.

Teorema 4.2.4. *Sea $0 \leq \alpha < n$ y sea R_α el operador integral dado por (4.2). Sea $m \in \mathbb{N}$ (o $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ para $\alpha = 0$). Sean $A_1, ..., A_m$ matrices invertibles tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ y las funciones Ω_i satisfacen las hipótesis (H_1) y (H_2). Sea $s \geq 1$ definido por $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{s} = 1$, sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 \leq s \leq p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$ y tal que $p(A_i x) = p(x) p.c.t. x \in \mathbb{R}^n$ y sea $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definido por $\frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{q(\cdot)} = \frac{\alpha}{n}$. Si el operador maximal es acotado sobre $L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ entonces,*

i. existe $c_1 > 0$ tal que

$$\left\| \lambda \chi_{\{x : R_\alpha f(x) > \lambda\}} \right\|_{q(\cdot)} \leq c_1 \|f\|_{p(\cdot)}$$

para todo $\lambda > 0$, $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.

ii. Si $p_- > s$ entonces R_α extiende a un operador acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. (i). Sea $\lambda > 0$ y $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por Teorema 5.54 en [2], ya que el operador maximal es acotado sobre $L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\|\lambda\chi_{\{x:R_\alpha f(x)>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)} \leq C\left\|\lambda\chi_{\{x:\mathcal{M}^\#(T_\alpha f)(x)>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)}.$$

Ahora, por (4.4), como en la prueba del teorema previo y ya que $\left(\frac{q(A_i x)}{s}\right)' = \left(\frac{q(x)}{s}\right)'$, por Proposición 4.2.2, Lema 2.5.3 y Proposición 1.3.7, tenemos que

$$\left\|\lambda\chi_{\{x:R_\alpha f(x)>\lambda\}}\right\|_{q(\cdot)} \leq$$

$$\leq C\sup_{\lambda>0}\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{\|h\|_{\left(\frac{q(\cdot)}{s}\right)'}=1}\left|\det(A_i^{-1})\right|\left\|\left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s\chi_{\{y:\mathcal{M}_{\alpha.s}|f|^s(y)>\left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s\}}\right\|_{\frac{q(\cdot)}{s}}\|h\circ A_i\|_{\left(\frac{q(\cdot)}{s}\right)'}\right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq C\sup_{\lambda>0}\sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{\|h\|_{\left(\frac{q(\cdot)}{s}\right)'}=1}\left|\det(A_i^{-1})\right|\left\|\left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s\chi_{\{y:\mathcal{M}_{\alpha.s}|f|^s(y)>\left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s\}}\right\|_{\frac{q(\cdot)}{s}}\|h\|_{\left(\frac{q(\cdot)}{s}\right)'}\right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq C\sup_{\lambda>0}\left\|\left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s\chi_{\{y:\mathcal{M}_{\alpha.s}|f|^s(y)>\left(\frac{\lambda}{cm}\right)^s\}}\right\|_{\frac{q(\cdot)}{s}} \leq C\left\||f|^s\right\|_{\frac{p(\cdot)}{s}}^{\frac{1}{s}} = C\|f\|_{p(\cdot)}.$$

(ii). Supongamos que $s < p_-$. Sea $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por Teorema 5.54 en [2], ya que el operador maximal es acotado sobre $L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|R_\alpha f\|_{q(\cdot)} \leq C\left\|\mathcal{M}^\#(R_\alpha f)\right\|_{q(\cdot)}.$$

Por (4.4) y como $q(A_i x) = q(x)$, por Proposición 4.2.2,

$$\|R_\alpha f\|_{q(\cdot)} \leq C\sum_{i=1}^{m}\left\|\mathcal{M}_{\alpha,s}f(A_i^{-1}\cdot)\right\|_{q(\cdot)} \leq C\sum_{i=1}^{m}\|\mathcal{M}_{\alpha,s}f\|_{q(\cdot)} \leq C\|f\|_{p(\cdot)}.$$

donde la última desigualdad sigue como en la prueba del teorema anterior.

□

Capítulo 5

Operadores de convolución con medidas singulares

Dada una medida de Borel finita μ sobre $\mathbb{R}^n$, o sea

$$\|\mu\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} d\,|\mu| < \infty$$

consideramos el operador de convolución

$$T_\mu f(x) = (\mu * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)d\mu(y),$$

Un problema muy estudiado es el de caracterizar los pares (p,q) tales que T_μ es acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que si $1 \leq p = q \leq \infty$, T_μ es acotado y

$$\|\mu * f\|_p \leq \|\mu\|_1 \|f\|_p .$$

En general ponemos

$$E_\mu = \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) : T_\mu : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n) \text{ es acotado} \right\}.$$

E_μ está contenido en el cuadrado unidad $[0,1]\times[0,1]$, en realidad se sabe que $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$, por interpolación se tiene que E_μ es convexo, y con argumentos de dualidad resulta simétrico respecto de la diagonal no principal.

Si μ es absolutamente continua respecto de dx, $d\mu = \varphi(x)dx$ con $\varphi \in L^1 \cap L^q$, $q > 1$, entonces por la desigualdad de Young si $f \in L^p$, $g \in L^q$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, entonces

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

se obtiene así un trapecio totalmente contenido en E_μ. Si μ es singular la situación es bien distinta. Por ejemplo si $\mu = \delta_0$, $T_\mu = I$ y E_μ coincide con la diagonal principal. Se sabe que si existen p, q con $1 \leq p < q \leq \infty$ tales que T_μ es acotado de L^p en L^q, entonces el soporte de μ no está contenido en ningún subespacio propio.
En [33] el autor presenta algunos problemas abiertos cuando la medida μ está soportada sobre una variedad diferenciable de dimensión k. Es bien conocido que para medidas soportadas sobre alguna variedad diferenciable S de dimensión k, la propiedad de $L^p - improving$ para μ está estrechamente conectada con la curvatura de S, la cual determina el comportamiento de la transformada de Fourier $\mathcal{F}(\mu)$ de μ. Si por ejemplo $|\mathcal{F}(\mu)(\xi)|$ decae como potencia negativa de ξ entonces μ es $L^p - improving$. En [35] se probó una recíproca parcial de este resultado, válida en el contexto general de los grupos de Lie.
En los trabajos [16] y [17] se estudian este tipo de operadores para $\varphi(x_1, ..., x_n) = |x_1|^{\alpha_1} + ... + |x_n|^{\alpha_n}$.
En [18] los autores estudiaron el operador T_μ^γ de convolución con una medida μ dada por

$$\mu(E) = \int \chi_E(x, \varphi(x))\, |x|^{\gamma - n}\, dx,$$

donde $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, con $\varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones suaves, homogéneas de cierto grado positivo.
Nuestro propósito en este capítulo es extender algunos de los resultados obtenidos en los trabajos antes mencionados a los espacios de Lebesgue de exponente variable.

5.1. Trabajos previos sobre los espacios de Lebesgue clásicos

Sea $Q = [-1, 1]^n$ y sea $\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Supongamos que μ es la medida sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\mu(E) = \int_Q \chi_E(x, \varphi(x))dx, \tag{5.1}$$

donde la integral es con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ y E es un conjunto de Borel de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Sea T_μ el operador de convolución definido por

$$T_\mu f(x,t) = (\mu * f)(x,t) = \int_Q f(x - y, t - \varphi(y))dy, \;\; (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Como dijimos al principio del capítulo

$$E_\mu = \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) : \| T_\mu f \|_{p,q} < \infty \right\} \tag{5.3}$$

será el conjunto tipo. Dicho conjunto es conocido en algunos casos. Si el gráfico de la función φ tiene curvatura Gaussiana no nula en cada punto, un teorema de Littman (ver [24]) implica que E_μ es el triángulo cerrado con vértices $(0,0), (1,1)$ y $(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n+2})$. Si la curvatura se anula en algún punto entonces E_μ está estrictamente contenido en el triángulo de arriba.
En [16] los autores caracterizaron el conjunto E_μ en el caso $n = 2$ y $\varphi(x_1, x_2) = |x_1|^\alpha + |x_2|^\beta$, $2 \leq \alpha \leq \beta$. Ellos obtuvieron una completa descripción de E_μ en los casos $\alpha = 2$, $2 \leq \beta \leq 4$ y $2 \leq \alpha = \beta \leq 4$. También caracterizaron el interior de E_μ y obtuvieron alguna información adicional sobre su frontera en otros casos. Supongamos μ, E_μ son como arriba. El Teorema de Riesz Thorin implica que E_μ es un subconjunto convexo del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. Es bien conocido que si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ entonces $p \leq q$ (ver [44] p.33). A continuación enunciamos los lemas obtenidos en dicho trabajo sobre condiciones necesarias acerca de la acotación, sobre los clásicos espacios de Lebesgue, del operador T_μ.

Lema 5.1.1. *Si* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ *entonces* $\frac{1}{q} \geq \frac{3}{p} - 2$ *y* $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{3p}$.

Lema 5.1.2. *Si* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ *entonces* $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.

Lema 5.1.3. *Si* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ *entonces* $\frac{1}{q} \geq \frac{2\beta+1}{\beta+1}\frac{1}{p} - 1$.

Los Lemas 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.3 dicen que E_μ está contenido en la región poligonal convexa $\Sigma^{\alpha,\beta} \subset Q$ determinadas por las líneas $L_0^{\alpha,\beta}$, L_1^β, L_2 con ecuaciones $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\alpha\beta}$, $\frac{1}{q} = \frac{2\beta+1}{\beta+1}\frac{1}{p} - 1$ y $\frac{1}{q} = \frac{3}{p} - 2$ respectivamente, sus simétricas con respecto a la diagonal no principal y diagonal principal $\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Un breve cálculo muestra que Σ es un trapezoide o un pentágono o un hexágono de acuerdo a $\alpha = \beta > \dot{2}$; $\alpha = 2$, $\beta > 2$ y $2 < \alpha < \beta$ respectivamente. Para obtener la acotación del T_μ sobre los vértices del polígono los autores usaron acotaciones de la transformada de Fourier de la medida μ.
En [17] los autores generalizan los resultados anteriores al considerar $Q^n = [-1,1]^n$, $\varphi : Q^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\alpha_j},$$

$1 < \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_n$. Y μ la medida dada por

$$\mu(E) = \int_{Q^n} \chi_E(x, \varphi(x))\, dx,$$

donde la integral es con respecto a la medida de Lebesgue.
Para $1 \leq k \leq n$ sea $S_k = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j^{-1}$. También $S_{n+1} = 0$. Obtuvieron el siguiente

Lema 5.1.4. *Si* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ *y* $0 \leq k \leq n$ *entonces*

$$\frac{1}{q} \geq \frac{k+1+S_{k+1}}{1+S_{k+1}}\frac{1}{p} - \frac{k+S_{k+1}}{1+S_{k+1}}.$$

En [9] se estudió el E_μ con μ una medida definida sobre $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, \varphi(x))dx$$

para cierta función $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

En [18] los autores estudiaron el operador T_μ^γ convolución con una medida más general. Consideraron $\varphi_1, ..., \varphi_n$ funciones reales homogéneas de grado $k \geq 2$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n - 0)$. Sea $\varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$, sea $\gamma > 0$ y μ la medida de Borel sobre $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, \varphi(x))|x|^{\gamma-n}dx, \tag{5.4}$$

donde la integral es con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. En dicho trabajo asumieron las siguientes hipótesis

1. $D\varphi(x)$ es invertible $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$,
2. Para todo $x \neq 0$ existe $\lambda = \lambda_x > 0$ tal que $|det(\varphi''(x)h)| \geq \lambda|h|^n$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

Un resultado conocido de [32] es que si $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in E_\mu$ entonces p y q satisfacen $\frac{1}{q} \geq \frac{2}{p} - 1$ y $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{2p}$. Además en [18] se obtuvo el siguiente

Lema 5.1.5. *Si* T_μ^γ *es acotado desde el* $L^p(\mathbb{R}^{2n})$ *en el* $L^q(\mathbb{R}^{2n})$ *entonces*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n(k+1)}.$$

Sea D la intersección, en el plano $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$, de las líneas $\frac{1}{q} = \frac{2}{p} - 1$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n(k+1)}$ y sea D' el simétrico con respecto a la diagonal no principal $\frac{1}{q} = -\frac{1}{p} + 1$. Se obtuvo el siguiente

Teorema 5.1.6. *Si* $\gamma \leq \frac{n(k+1)}{3}$ *entonces* E_μ *es el segmento cerrado con puntos extremos* $D = (1 - \frac{\gamma}{n(k+1)}, 1 - \frac{2\gamma}{n(k+1)})$ *y* $D' = (\frac{2\gamma}{n(k+1)}, \frac{\gamma}{n(k+1)})$.

5.2. Acotación del T_μ entre espacios de Lebesgue de exponentes variables, condiciones suficientes

Ahora estudiaremos, como parte de esta tesis, la acotación del T_μ en el contexto de los espacios de Lebesgue variables. Primero veremos la buena definición del operador definido en 5.2 con μ la medida definida en 5.1.

Teorema 5.2.1. *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Si $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{n+1})$ y $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un conjunto de medida de Lebesgue finita, entonces $T_\mu f \in L^1(E)$ y luego $T_\mu f(x)$ esta bien definido p.c.t.$x \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. Denotemos por $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ las primeras n coordenadas de x y por $\mathbf{dx} = dx_1...dx_n$.
Primero consideramos $p_+ < \infty$. En este caso sabemos que $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{n+1})$ si y solo si $\int |f(u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1})|^{p(u_1,u_2,...,u_n,u_{n+1})} \, du < \infty$. (Prop.2.12 en [2]). Ahora, ya que $1 \leq p(x) < \infty$, observamos que $|f(x)| \leq |f(x)|^{p(x)} + 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, luego por la desigualdad de Minkowsky para integrales se tiene que

$$\int_E |Tf(x)| \, dx \leq \int_Q \int_E |f(\mathbf{x}-\mathbf{y}, x_{n+1} - \varphi(\mathbf{y}))| \, dx\mathbf{dy}$$

$$\leq \int_Q \int_E \left(|f(\mathbf{x}-\mathbf{y}, x_{n+1} - \varphi(\mathbf{y})))|^{p(\mathbf{x}-\mathbf{y}, x_{n+1}-\varphi(\mathbf{y}))} + 1 \right) dx\mathbf{dy}$$

$$\leq |Q| \left(\int |f(\mathbf{u}, u_{n+1})|^{p(\mathbf{u}, u_{n+1})} \, du + |E| \right) < \infty.$$

Si $p_+ = \infty$, denotamos por $\Omega_\infty = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : p(x) = \infty\}$. Ya que $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{n+1})$ existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_\infty^c} \left| \frac{f}{\lambda}(\mathbf{u}, u_{n+1}) \right|^{p(\mathbf{u}, u_{n+1})} du + \left\| \frac{f}{\lambda} \right\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} < \infty,$$

luego

$$\int_E |Tf(x)| \, dx = \lambda \int_E \left| T\left(\frac{f}{\lambda}\right)(x) \right| dx$$

$$\leq \lambda \int_Q \int_E \left| \frac{f}{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, x_{n+1} - \varphi(\mathbf{y})) \right| dx\mathbf{dy}$$

$$= \lambda \int_Q \int_{E \cap \{x : \mathbf{x}-\mathbf{y}, x_{n+1} - \varphi(\mathbf{y}) \in \Omega_\infty^c\}} \left| \frac{f}{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, x_{n+1} - \varphi(\mathbf{y})) \right| dx\mathbf{dy}$$

$$+\lambda \int_Q \int_{E\cap\{x:\mathbf{x}-\mathbf{y},x_{n+1}-\varphi(\mathbf{y})\in\Omega_\infty\}} \left|\frac{f}{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{y},x_{n+1}-\varphi(\mathbf{y}))\right| dx\mathbf{dy}$$

$$\leq \lambda\,|Q| \left(\int_{\Omega_\infty^c} \left|\frac{f}{\lambda}(\mathbf{u},u_{n+1})\right|^{p(\mathbf{u},u_{n+1})} dx + \left\|\frac{f}{\lambda}\right\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} |E| \right) < \infty.$$

□

A continuación haremos lo mismo pero para el operador definido por 5.2 con μ la medida dada por 5.4. Sean $D = \left(1-\frac{\gamma}{n(k+1)};\frac{2\gamma}{n(k+1)}\right)$ y $D' = \left(\frac{2\gamma}{n(k+1)};\frac{\gamma}{n(k+1)}\right)$, con $\gamma \leq \frac{n(k+1)}{3}$. El Remark 2.2 en [18] dice que el E_μ está contenido en el segmento cerrado de vértices D y D'. El Teorema 5.1.6 asegura que el T_μ^γ es acotado en D y D' y por lo tanto E_μ es efectivamente dicho segmento cerrado.

Teorema 5.2.2. *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $\frac{2\gamma}{n(k+1)} \leq \frac{1}{p_+} \leq \frac{1}{p_-} \leq 1-\frac{\gamma}{n(k+1)}$. Si $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{2n})$ entonces para todo subconjunto $E \subset \mathbb{R}^{2n}$, $|E| < \infty$, se tiene que $T_\mu^\gamma f \in L^1(E)$.*

Demostración. Sea $f = f_1 + f_2$ donde $f_1 = f\chi_{\{x:f(x)>1\}}$ y $f_2 = f - f_1$. Entonces $f_1(x) \leq f_1(x)^{\frac{p(x)}{p_-}} \in L^{p_-}(\mathbb{R}^{2n})$. Definimos q_1 y q_2 tales que

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_-} - \frac{\gamma}{n(k+1)},$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{p_+} - \frac{\gamma}{n(k+1)}.$$

Entonces los puntos $\left(\frac{1}{p_-},\frac{1}{q_1}\right)$ y $\left(\frac{1}{p_+},\frac{1}{q_2}\right)$ están sobre el segmento determinado por D y D'. Luego

$$\int_E \left|T_\mu^\gamma f_1(x)\right| dx = \int_{E\cap\left\{x:\left|T_\mu^\gamma f(x)\right|>1\right\}} T_\mu^\gamma f_1(x)dx + \int_{E\cap\left\{x:\left|T_\mu^\gamma f(x)\right|\leq 1\right\}} T_\mu^\gamma f_1(x)dx$$

$$\leq \int_{E\cap\left\{x:T_\mu^\gamma f_1(x)>1\right\}} T_\mu^\gamma f_1(x)^{\frac{p(\cdot)}{p_-}} dx + \int_{E\cap\left\{x:T_\mu^\gamma f_1(x)\leq 1\right\}} T_\mu^\gamma f_1(x)dx$$

$$\leq \int_E \left[T_\mu^\gamma f_1^{\frac{p(\cdot)}{p_-}}(x)\right]^{q_1} dx + |E|$$

$$\leq \left\|T_\mu^\gamma f_1^{\frac{p(\cdot)}{p_-}}\right\|_{L^{q_1}(E)}^{q_1} + |E|$$

$$\leq c \left\| f_1^{\frac{p(\cdot)}{p_-}} \right\|_{p_-}^{q_1} + |E| < \infty,$$

La penúltima desigualdad sigue por $p_+ < \infty$. Ahora como $f_2(x) \leq 1$ entonces $f_2(x) \leq f_2(x)^{\frac{p(\cdot)}{p_+}} \in L^{p_+}(\mathbb{R}^{2n})$. Luego

$$\int_E \left|T_\mu^\gamma f_2(x)\right| dx = \int_{E\cap\left\{x:\left|T_\mu^\gamma f_2(x)\right|>1\right\}} \left|T_\mu^\gamma f_2(x)\right| dx + \int_{E\cap\left\{x:\left|T_\mu^\gamma f_2(x)\right|\leq 1\right\}} \left|T_\mu^\gamma f_2(x)\right| dx$$

$$\leq \int_{E\cap\left\{x:\left|T_\mu^\gamma f_2(x)\right|>1\right\}} \left|T_\mu^\gamma f_2^{\frac{p(\cdot)}{p_+}}(x)\right| dx \ + \ \int_{E\cap\left\{x:\left|T_\mu^\gamma f_2(x)\right|\leq 1\right\}} \left|T_\mu^\gamma f_2(x)\right| dx$$

$$\leq \int_E \left|T_\mu^\gamma f_2^{\frac{p(\cdot)}{p_+}}(x)\right|^{q_2} dx + |E|$$

$$\leq \left\| T_\mu^\gamma f_2^{\frac{p(\cdot)}{p_+}} \right\|_{L^{q_2}(E)}^{q_2} + |E|$$

$$\leq c \left\| f_2^{\frac{p(\cdot)}{p_+}} \right\|_{p_+}^{q_2} + |E| < \infty.$$

Con lo que $T_\mu^\gamma f \in L^1(E)$. □

Ahora vamos a ver algunos casos de exponentes variables en los cuales los operadores resultan acotados $p(\cdot) - q(\cdot)$ para ciertos $p(\cdot), q(\cdot)$, tanto para μ la medida dada por 5.1 del trabajo [17] como para μ la medida definida en 5.4 del trabajo [18]. Nos apoyaremos en resultados de inmersiones continuas. Desde aquí hasta el final de la sección denotaremos por T tanto al operador T_μ como al operador T_μ^γ. Esto lo haremos particularmente aquí porque los resultados obtenidos no dependen de la medida que definen a ambos operadores.

Teorema 5.2.3. *Sean $p(\cdot),\ q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y sean $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \neq p_-\}$ y $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) \neq q_+\}$. Si $\left(\frac{1}{p_-}, \frac{1}{q_+}\right) \in E_\mu$, $|D_1| < \infty$ y $|D_2| < \infty$ entonces T es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Definimos $r_1(x)$ y $r_2(x)$ por $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{q_+} + \frac{1}{r_1(x)}$ y $\frac{1}{p_-} = \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{r_2(x)}$ respectivamente. Observamos entonces que

$$\int_{D_1} \lambda^{-r_1(x)} dx < |D_1| < \infty,$$

para todo $\lambda > 1$ y también

$$\int_{D_2} \lambda^{-r_2(x)} dx < |D_2| < \infty,$$

para todo $\lambda > 1$.
Ya que $p_- \leq p(x)$ $p.c.t.x \in \mathbb{R}^n$ y $q(x) \leq q_+$ $p.c.t.x \in \mathbb{R}^n$, el Teorema 1.4.3 y la hipótesis $\left(\frac{1}{p_-}, \frac{1}{q_+}\right) \in E_\mu$ implican que

$$\|Tf\|_{q(\cdot)} \leq \|Tf\|_{q_+} \leq c\|f\|_{p_-} \leq c\|f\|_{p(\cdot)}.$$

$\square$

Los teoremas de inmersiones continuas valen con diferentes hipótesis sobre los exponentes $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$. (Ver por ejemplo Remark 2.46, pág. 38, en [2]). En efecto, tenemos el siguiente

Corolario 5.2.4. *Sean $p(\cdot),\ q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tales que $\frac{1}{p(\cdot)},\ \frac{1}{q(\cdot)} \in LH_\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\left(\frac{1}{p_-},\ \frac{1}{q_+}\right) \in E_\mu$, $p_\infty = p_-$ y $q_\infty = q_+$ entonces T es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

También obtenemos un resultado más general para garantizar la acotación del T sobre los espacios de Lebesgue variables. Probamos primero que vale la acotación del T desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en algún $L^q(\mathbb{R}^n)$ con $p(\cdot) \in LH_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5.2.5. *Sea $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ con $p_- < \infty$. Si $\left(\frac{1}{p_-}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ y si $p(\cdot) \in LH_\infty$ es tal que $p_\infty = p_-$ entonces T es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^q(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Por homogeneidad, basta ver que si $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$ entonces $\|Tf\|_q \leq c$. Descomponemos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f\chi_{\{x:f(x)\geq 1\}}$ y $f_2 = f - f_1$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |Tf_1(x)|^q\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |T\,|f_1||^q\,(x)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|T\,|f_1|^{\frac{p(x)}{p_-}}\right|^q (x)dx \\ = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^{\frac{p(\cdot)p_-}{p_-}}\,(x)dx\right)^{\frac{q}{p_-}} &\leq c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^{p(x)}\,(x)dx\right)^{\frac{q}{p_-}} \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{\frac{q}{p_-}} \leq c.\end{aligned}$$

La penúltima desigualdad sigue de la Proposición 1.3.8.
Ahora por Lema 3.26 en [2],

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf_2(x)|^q\, dx \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^{p_-}\, dx\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$= c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^{p_\infty}\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \le c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^{p(x)}\,dx + c\int R(y)^{p_-}dy\right)^{\frac{q}{p}} \le C.$$

□

Ahora simplemente tomamos $q = q_+$ y pedimos que $L^{q_+}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ y obtenemos el siguiente

Corolario 5.2.6. *Sea $p_- < \infty$ y supongamos que $L^{q_+}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, sea $p(\cdot) \in LH_\infty$ tal que $p_\infty = p_-$. Si además $\left(\frac{1}{p_-}, \frac{1}{q_+}\right) \in E_\mu$, entonces T es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Por lo anterior sabemos que T es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q_+}(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto,

$$\|Tf\|_{q(\cdot)} \le c\,\|Tf\|_{q_+} \le c\,\|f\|_{p(\cdot)}\,.$$

□

Para finalizar esta sección probamos un resultado más general que el Teorema 5.2.5. Esta vez reemplazamos la condición LH_∞ por la condición N_∞, que en el caso $p_+ < \infty$, es más general.

Teorema 5.2.7. *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $p(\cdot) \in N_\infty(\mathbb{R}^n)$ con $p^\infty = p_-$. Si además $\left(\frac{1}{p_-}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ entonces T es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^q(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Definimos los siguientes conjuntos

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \ge p^\infty\},$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) < p^\infty\}.$$

También definimos los exponentes defecto, $r(\cdot), s(\cdot)$, por

$$\frac{1}{p^\infty} = \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{r(x)} \quad \textit{con } x \in E_1$$

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{p^\infty} + \frac{1}{s(x)} \quad \textit{con } x \in E_2$$

Entonces por la definición, ya que $p(\cdot) \in N_\infty$, se tiene que

$$1 \in L^{r(\cdot)}(E_1) \cap L^{s(\cdot)}(E_2). \tag{5.5}$$

Sea $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f\chi_{\{x:f(x)\ge 1\}}$ y $f_2 = f\chi_{\{x:f(x)<1\}}$. Por homogeneidad podemos suponer $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$. Entonces tenemos que ver que $\|Tf\|_q \le C$.

Para estimar Tf_1 proseguimos como sigue,

$$\begin{aligned}\|Tf_1\|_q &\le \left\| Tf_1^{\frac{p(\cdot)}{p_-}} \right\|_q \\ &\le c \left\| f_1^{\frac{p(\cdot)}{p_-}} \right\|_{p_-} \\ &= c \left\| f_1^{\frac{p(\cdot)}{p^\infty}} \right\|_{p^\infty} \\ &= c \left(\rho_{p(\cdot)}(f_1)\right)^{\frac{1}{p^\infty}} < c,\end{aligned}$$

la última desigualdad vale por el Corolario 1.3.8.
Ahora estimamos Tf_2 como sigue,

$$\begin{aligned}\|Tf_2\|_q &\le c\,\|f_2\|_{p_-} = c\,\|f_2\|_{p^\infty} \\ &\le c\left(\|f_2\|_{L^{p^\infty}(E_1)} + \|f_2\|_{L^{p^\infty}(E_2)}\right),\end{aligned}$$

ahora por 5.5 y aplicando la desigualdad de Hölder general, 1.3.10

$$\|f_2\|_{L^{p^\infty}(E_1)} \le \|1\|_{L^{r(\cdot)}(E_1)}\,\|f_2\|_{L^{p(\cdot)}(E_1)} < c_1$$

Por otro lado, por el Lema 1.4.4 con $t(x) = p(x)$, $u(x) = p^\infty$ y $g = f_2$; tenemos que

$$\|f_2\|_{L^{p^\infty}(E_2)} \le \|f_2\|_{L^{p(\cdot)}(E_2)} + 1 < c_2$$

□

5.3. Acotación del T_μ entre espacios de Lebesgue de exponentes variables, condiciones necesarias

Ahora asumiremos que T_μ es acotado desde el $L^{p(\cdot)}$ en el $L^{q(\cdot)}$ y obtendremos, bajo ciertas hipótesis de regularidad, condiciones necesarias que deben satisfacer los exponentes $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$.
Estos resultados son originales de esta tesis y vienen a extender, sobre los espacios de Lebesgue variables, los lemas 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3 y 5.1.4.
Primero estudiamos el operador T_μ con la medida μ definida en 5.1. Sea $S_k = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j^{-1}$ y $S_{n+1} = 0$. Tenemos el siguiente

Teorema 5.3.1. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, continuas en $x^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supongamos que T_μ es un operador acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{n+1})$ en $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^{n+1})$. Entonces, para $0 \leq k \leq n$,*

i.

$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{k+1+S_{k+1}}{1+S_{k+1}} \frac{1}{p(x^0)} - \frac{k+S_{k+1}}{1+S_{k+1}}.$$

ii. Si además $p_+ < \infty$ y $q_+ < \infty$ con $p(x^0) > 1$ entonces

$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1+S_{k+1}}{k+1+S_{k+1}} \frac{1}{p(x^0)} + \left(1 - \frac{k-1}{k+1+S_{k+1}}\right).$$

Demostración. Veamos(i). Dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \tilde{\delta} < \frac{1}{2}$ tal que

$$\left|p(x) - p(x^0)\right| < \varepsilon$$
$$\left|q(x) - q(x^0)\right| < \varepsilon$$

siempre que $|x - x^0| < \tilde{\delta}$. Elegimos $\delta << \tilde{\delta}$ y definimos el conjunto

$$A_\delta(x^0) = \Big\{x : \left|x_j - x_j^0\right| < \tilde{\delta}\ 1 \leq j \leq k,\ \left|x_j - x_j^0\right| < \delta^{\frac{1}{\alpha_j}}\ k+1 \leq j \leq n,$$
$$\left|x_{n+1} - x_{n+1}^0 - \varphi(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right| \leq \delta\big\}.$$

Tomamos $f = \chi_{Q_\delta(x^0)}$ con

$$Q_\delta(x^0) = \Big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \left|x_j - x_j^0\right| < \delta,\ 1 \leq j \leq k;\ \left|x_j - x_j^0\right| < \delta^{\frac{1}{\alpha_j}},$$
$$k+1 \leq j \leq n;\ \left|x_{n+1} - x_{n+1}^0\right| < c\delta\big\}.$$

Para $x \in A_\delta(x^0)$ definimos

$$Y_x(x^0) = \Big\{y \in Q : \left|x_j - x_j^0 - y_j\right| < \delta, 1 \leq j \leq k;\ \left|x_j - x_j^0 - y_j\right| < \delta^{\frac{1}{\alpha_j}}, k+1 \leq j \leq n\Big\}.$$

Si $x \in A_\delta(x^0)$ y $y \in Y_x(x^0)$ entonces podemos ver que $(x_1 - y_1, ..., x_n - y_n, x_{n+1} - \varphi(y_1, ..., y_n)) \in Q_\delta(x^0)$. En efecto, por definición del $Y_x(x^0)$ tenemos que $\left|x_j - x_j^0 - y_j\right| < \delta$ para $1 \leq j \leq k$ y $\left|x_j - x_j^0 - y_j\right| < \delta^{\frac{1}{\alpha_j}}$ para $k+1 \leq j \leq n$. Debemos ver que $\left|x_{n+1} - x_{n+1}^0 - \varphi(y_1, ..., y_n)\right| < c\delta$. Pero

$$\left|\varphi(y_1, ..., y_n) - x_{n+1} - x_{n+1}^0\right| \leq \left|\varphi(y_1, ..., y_n) - \varphi(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right| +$$

$$+\left|\varphi(x_1-x_1^0,...,x_n-x_n^0)-x_{n+1}-x_{n+1}^0\right| = I + II$$

Pero por definición del $A_\delta(x^0)$ tenemos que

$$II \leq \delta.$$

Ahora para acotar I observamos que

$$\left|\varphi(y_1,...,y_n)-\varphi(x_1-x_1^0,...,x_n-x_n^0)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\left|x_j-x_j^0\right|^{\alpha_j}-|y_j|^{\alpha_j}\right|$$

Luego podemos aplicar el teorema del valor medio a la función $g(z)=z^\alpha$ para obtener $\xi_j \in [x_j-x_j^0, y_j]$ y tal que

$$\left|x_j-x_j^0\right|^{\alpha_j}-|y_j|^{\alpha_j} \leq \alpha_j\xi_j^{\alpha_j-1}\left|x_j-x_j^0-y_j\right|,$$

Donde, para $1\leq j\leq k$

$$\left|x_j-x_j^0\right|^{\alpha_j}-|y_j|^{\alpha_j} \leq \alpha_j\xi_j^{\alpha_j-1}\delta,$$

y para $k+1\leq j\leq n$

$$\left|x_j-x_j^0\right|^{\alpha_j}-|y_j|^{\alpha_j} \leq \alpha_j\xi_j^{\alpha_j-1}\delta^{\frac{1}{\alpha_j}}.$$

Como las derivadas son continuas alcanzan un máximo en Q. Luego se puede ver que

$$\left|x_j-x_j^0\right|^{\alpha_j}-|y_j|^{\alpha_j}$$

$$\leq \alpha_j\delta 2^{\alpha_j-1}, \text{ si } 1\leq j\leq k.$$

$$\left|x_j-x_j^0\right|^{\alpha_j}-|y_j|^{\alpha_j}$$

$$\leq \alpha_j\delta^{\frac{1}{\alpha_j}}2^{\alpha_j-1}\delta^{1-\frac{1}{\alpha_j}} = \alpha_j 2^{\alpha_j-1}\delta, \text{ si } k+1\leq j\leq n.$$

Esto implica que

$$\left|\varphi(y_1,...,y_n)-\varphi(x_1-x_1^0,...,x_n-x_n^0)\right| \leq c\delta.$$

Con lo que hemos probado que $\left|x_{n+1}-x_{n+1}^0-\varphi(y_1,...,y_n)\right| < c\delta$. Luego, para $x\in A_\delta(x^0)$ se tiene que

$$|T_\mu f(x)| \geq \left|Y_x(x^0)\right| \geq \delta^{k+S_{k+1}}.$$

Sea $\lambda = c\delta^{(k+S_{k+1})+\frac{S_{k+1}+1}{q(x^0)-\varepsilon}}$

$$\begin{aligned}
\int \left|\frac{T_\mu f(x)}{\lambda}\right|^{q(x)} dx &\geq \int_{A_\delta(x^0)} \left(\frac{|T_\mu f(x)|}{\lambda}\right)^{q(x)} dx \\
&\geq \int_{A_\delta(x^0)} \left(\frac{\delta^{k+S_{k+1}}}{c\delta^{(k+S_{k+1})+\frac{S_{k+1}+1}{q(x^0)-\varepsilon}}}\right)^{q(x^0)-\varepsilon} dx \\
&= \left(\frac{\delta^{k+S_{k+1}}}{c\delta^{(k+S_{k+1})+\frac{S_{k+1}+1}{q(x^0)-\varepsilon}}}\right)^{q(x^0)-\varepsilon} \left|A_\delta(x^0)\right| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

pues, podemos elegir el $\tilde{\delta}$ en la definición del $A_\delta(x^0)$ tal que valga la última igualdad.

Luego tenemos que

$$\|T_\mu f\|_{q(\cdot)} \geq c\delta^{(k+S_{k+1})\frac{S_{k+1}+1}{q(x^0)-\varepsilon}}.$$

Por otro lado, ya que T_μ es un operador acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{n+1})$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^{n+1})$ entonces

$$\|T_\mu f\|_{q(\cdot)} \leq c\,\|f\|_{p(\cdot)}$$

Y ahora, calculemos $\|f\|_{p(\cdot)}$. Para $\lambda = |Q_\delta(x^0)|^{\frac{1}{p_+(Q_\delta(x^0))}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx &= \int \left|\frac{\chi_{Q_\delta(x^0)}(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \\
&= \int_{Q_\delta(x^0)} \left|\frac{1}{\lambda}\right|^{-p(x)} dx \\
&\leq \int_{Q_\delta(x^0)} \left|\frac{1}{\lambda}\right|^{p_+(Q_\delta(x^0))} dx \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Luego

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \left\|\chi_{Q_\delta}(x^0)\right\|_{p(\cdot)} \leq \left|Q_\delta(x^0)\right|^{\frac{1}{p_+(Q_\delta(x^0))}} \leq \left|Q_\delta(x^0)\right|^{\frac{1}{p(x^0)}-\varepsilon},$$

como $|Q_\delta(x^0)| = c\delta^{k+S_{k+1}+1}$ tenemos entonces que

$$\|T_\mu f\|_{q(\cdot)} \leq c\left|Q_\delta(x^0)\right|^{\frac{1}{p(x^0)}-\varepsilon}$$

Haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ tenemos que

$$c\delta^{(k+S_{k+1})+\frac{S_{k+1}+1}{q(x^0)}} \leq c\delta^{(k+S_{k+1}+1)\frac{1}{p(x^0)}}$$

Y al mismo tiempo $\delta \longrightarrow 0$, entonces

$$(k+S_{k+1}) + \frac{S_{k+1}+1}{q(x^0)} \geq \frac{k+S_{k+1}+1}{p(x^0)}$$

O , lo que es lo mismo

$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{k+S_{k+1}+1}{S_{k+1}+1}\frac{1}{p(x^0)} - \frac{k+S_{k+1}}{S_{k+1}+1}.$$

Ahora, para ver (ii) basta ver que el conjugado T_μ^* tiene la misma forma que T_μ. Pues $T_\mu^* = T_{\mu^*} = T_{-\mu}$. Entonces T_μ^* es acotado del $\left(L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)'$ en el $\left(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)'$. Luego, como $p_+ < \infty$ y $q_+ < \infty$, por el Teorema 1.7.1 tenemos que $\left(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)' = \left(L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)$ y $\left(L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)' = \left(L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)$. Entonces, llamando $a = \frac{k+1+S_{k+1}}{1+S_{k+1}}$ y $b = \frac{k+S_{k+1}}{1+S_{k+1}}$, Si $q(x^0) > 1$ aplicando el inciso (i) a T_μ^* se tiene que

$$\frac{1}{p'(x^0)} \geq a\frac{1}{q'(x^0)} - b$$

$$1 - \frac{1}{p(x^0)} \geq a\left[1 - \frac{1}{q(x^0)}\right] - b$$

$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1}{a}\frac{1}{p(x^0)} + \frac{a-b-1}{a}.$$

Es decir,

$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1+S_{k+1}}{k+1+S_{k+1}}\frac{1}{p(x^0)} + 1 - \frac{k-1}{k+1+S_{k+1}}.$$

Ahora si $q(x^0) = 1$ la desigualdad vale trivialmente. □

Como casos particulares, hemos obtenidos con técnicas similares, las condiciones necesarias para el caso $n = 2$ del T_μ con la medida definida en $Q = [-1,1]^2$.

Teorema 5.3.2. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. Si p, q son continuas en un punto $x^0 \in \mathbb{R}^3$ y supongamos T_μ acotado del $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ entonces*

$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{3}{p(x^0)} - 2,$$

Teorema 5.3.3. *Si $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ son continuas en un punto $x^0 \in \mathbb{R}^3$ y supongamos T_μ acotado del $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ entonces*

$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1}{p(x^0)} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\alpha\beta}.$$

Teorema 5.3.4. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ continuas en un punto $x^0 \in \mathbb{R}^3$ y supongamos T_μ acotado del $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$. Entonces*

$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{2\beta+1}{\beta+1}\frac{1}{p(x^0)} - 1.$$

Es bien conocido que si $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in E_\mu$ entonces $p \leq q$ (ver [44] pag. 33). Nos preguntamos ahora si, al menos en el caso que $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ sean continuas en x_0, debe valer que $p(x^0) \leq q(x^0)$. La respuesta es ¡no!

Ejemplo 5.3.5.

$$p(x) = \begin{cases} 3-|x|^2 & si\ \ |x| \leq 1 \\ 2 & si\ \ |x| > 1 \end{cases}$$

y

$$q(x) = \begin{cases} |x|^2+1 & si\ \ |x| \leq 1 \\ 2 & si\ \ |x| > 1 \end{cases}$$

Entonces por el Teorema 1.4.3 tenemos que

$$\|T_\mu f\|_{q(\cdot)} \leq \|T_\mu f\|_{2=q_+} \leq \|f\|_{2=p_-} \leq \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Pero $\forall\, |x| < 1$ tenemos que $q(x) < p(x)$.

Recordemos que el operador adjunto de T_μ satisface

$$T_\mu^* = T_{\mu^*},$$

donde

$$\mu^*(E) = \mu(-E) = \int_Q \chi_E(x_1, x_2, -\varphi(x_1,x_2))dx_1dx_2.$$

Es decir los operadores T_μ y T_μ^* tienen la misma forma. Luego, como casos particulares del Teorema 5.3.1 inciso (ii), podemos aplicar los Teoremas 5.3.2, 5.3.3 y 5.3.4 para obtener el siguiente

Teorema 5.3.6. *Sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ continuas en un punto $x^0 \in \mathbb{R}^3$ y tales que $p_+ < \infty$ y $q_+ < \infty$. Supongamos T_μ acotado del $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$. Entonces se verifican*

i.
$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1}{3p(x^0)},$$

ii. Si además $p_+ < \infty$ y $q_+ < \infty$ con $p(x^0) > 1$,
$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{\beta+1}{2\beta+1}\frac{1}{p(x^0)} + \left(1 - \frac{2(\beta+1)}{2\beta+1}\right).$$

Por último generalizamos el resultado obtenido en [18] con el operador T_μ^γ de convolución con la medida sobre $\mathbb{R}^{2n}$ definida en 5.4. La técnica usada en la demostración del Lema 5.1.5 se basaba en un argumento de homogeneidad de la norma que no se extiende fácilmente al caso de exponente variable. Como parte de esta tesis obtuvimos el siguiente

Teorema 5.3.7. *Sea T_μ^γ el operador definido en 5.2 con la medida dada por 5.4 y sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n})$ continuas en $x^0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Si T_μ^γ es acotado de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{2n})$ en $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^{2n})$ entonces*
$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1}{p(x^0)} - \frac{\gamma}{n\,(1+k)}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0 \ \exists\ \tilde{\delta} > 0$ tal que
$$\left|p(x) - p(x^0)\right| < \varepsilon$$
$$\left|q(x) - q(x^0)\right| < \varepsilon$$
siempre que $|x - x^0| < \tilde{\delta}$. Tomamos ahora $0 < \delta << \tilde{\delta}$. Y definimos
$$Q_\delta(x^0) = \left[x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta\right] \times ... \times \left[x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta\right] \times$$
$$\times \left[x_{n+1}^0 - c\delta^k, x_{n+1}^0 + c\delta^k\right] \times ... \times \left[x_{2n}^0 - c\delta^k, x_{2n}^0 + c\delta^k\right]$$
Sea $f = \chi_{Q_\delta}$. Definimos el conjunto
$$A_\delta(x^0) = \left\{x \in \mathbb{R}^{2n} : \left|x_1 - x_1^0\right| \leq \delta, ..., \left|x_n - x_n^0\right| \leq \delta,\right.$$
$$\left|x_{n+1} - x_{n+1}^0 - \varphi_1(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right| \leq d\delta^k, ...$$
$$\left. ..., \left|x_{2n} - x_{2n}^0 - \varphi_n(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right| \leq d\delta^k\right\}.$$

y sea $B_\delta = B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n}) \in A_\delta$ y $y = (y_1, ..., y_n) \in B_\delta$, entonces

$$(x_1 - y_1, ..., x_n - y_n, x_{n+1} - \varphi_1(y_1, ..., y_n), ..., x_{2n} - \varphi_n(y_1, ..., y_n)) \in Q_\delta.$$

En efecto para $1 \leq j \leq n$, $\left|x_j - y_j - x_j^0\right| \leq \left|x_j - x_j^0\right| + |y_j| \leq 2\delta$. Ahora

$$\left|x_{n+j} - x_{n+j}^0 - \varphi_j(y_1, ..., y_n)\right|$$

$$= \left|x_{n+j} - x_{n+j}^0 - \varphi_j(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right| + \left|\varphi_j(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0) - \varphi_j(y_1, ..., y_n)\right|$$
$$\leq d\delta^k + \left|\varphi_j(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right| + |\varphi_j(y_1, ..., y_n)| \leq c\delta^k$$

pues al ser φ_j continua sobre la esfera unitaria y homogénea de grado k se tiene que, $\varphi_j(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0) = \left|(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right|^k \varphi_j\left(\frac{x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0}{\left|(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right|}\right)$ y entonces $|\varphi_j(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)| \leq c\left|(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)\right|^k \leq c\delta^k$ y lo mismo pasa con $|\varphi_j(y_1, ..., y_n)|$. Por lo tanto si $(x_1, ..., x_{2n}) \in A_\delta$,

$$\left|T_\mu^\gamma f\,(x_1, ..., x_{2n})\right| \geq \int_{B_\delta} |y|^{\gamma - n}\, dy = c\int_0^\delta r^{\gamma - n} r^{n-1} dr = c\delta^\gamma.$$

Ahora

$$|A_\delta| = \int \chi_{A_\delta}(x) dx$$

hacemos el cambio de variables $u_1 = x_1 - x_1^0, ..., u_n = x_n - x_n^0$ $u_{n+1} = x_{n+1} - x_{n+1}^0 - \varphi_1(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0), ..., u_{2n} = x_{2n} - x_{2n}^0 - \varphi_n(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)$, entonces $x \in A_\delta$ si y solo si $u \in [x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta] \times ... \times [x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta] \times \left[x_{n+1}^0 - \delta^k, x_{n+1}^0 + \delta^k\right] \times ... \times \left[x_{2n}^0 - \delta^k, x_{2n}^0 + \delta^k\right]$ y el jacobiano de la transformación es $D\varphi$ que es invertible, acotada sobre la esfera unitaria y por el teorema de la función inversa,

$$\left(D\varphi^{-1}\right)\left(\varphi\left(x - x^0\right)\right) = \left[D\varphi\left(x - x^0\right)\right]^{-1} \geq c.$$

Entonces

$$\left|A_\delta(x^0)\right| = \int \chi_{A_\delta(x^0)}(x) dx \geq c\int \chi_{[x^0 - \delta, x^0 + \delta]^n \times \left[x^0 - \delta^k, x^0 + \delta^k\right]^n}(u) = c\delta^{n(1+k)}$$

Ahora, tomando $\lambda = C^{\frac{1}{q(x^0) - \varepsilon}} \delta^{\gamma + \frac{n(1+k)}{q(x^0) - \varepsilon}}$ se tiene que (tomando δ suficientemente pequeño)

$$\rho_{q(\cdot)}\left(\frac{T_\mu^\gamma f}{\lambda}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \int_{A_\delta(x^0)} \left(\frac{T_\mu^\gamma f(x)}{\lambda}\right)^{q(x)} dx \\
&\geq \int_{A_\delta(x^0)} \left(\frac{c\delta^\gamma}{C^{\frac{1}{q(x^0)-\varepsilon}}\delta^{\gamma+\frac{n(1+k)}{q(x^0)-\varepsilon}}}\right)^{q(x^0)-\varepsilon} dx \\
&= \left(\frac{c\delta^\gamma}{C^{\frac{1}{q(x^0)-\varepsilon}}\delta^{\gamma+\frac{n(1+k)}{q(x^0)-\varepsilon}}}\right)^{q(x^0)-\varepsilon} \left|A_\delta(x^0)\right| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Con lo que

$$
\left\|T_\mu^\gamma f\right\|_{q(\cdot)} \geq C\delta^{\gamma+\frac{n(1+k)}{q(x^0)-\varepsilon}}.
$$

Por otro lado, tomando $\lambda = \left(c\delta^{n+nk}\right)^{\frac{1}{p_+(Q_\delta(x^0))}}$ y ya que $|Q_\delta(x^0)| = c\delta^{n+nk}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) &= \int_{Q_\delta(x^0)} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \\
&= \int_{Q_\delta(x^0)} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{p_+(Q_\delta(x^0))} dx \\
&= \left(\frac{1}{\left(c\delta^{n+nk}\right)^{\frac{1}{p_+(Q_\delta(x^0))}}}\right)^{p_+(Q_\delta(x^0))} \left|Q_\delta(x^0)\right| \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Luego se tiene que

$$
\left\|T_\mu^\gamma f\right\|_{q(\cdot)} \leq c\left\|f\right\|_{p(\cdot)} \leq c\left(c\delta^{n+nk}\right)^{\frac{1}{p_+(Q_\delta(x^0))}} \leq \left(c\delta^{n+nk}\right)^{\frac{1}{p(x^0)}-\varepsilon}.
$$

Entonces, haciendo $\varepsilon \to 0$,

$$
\delta^{\gamma+\frac{n(1+k)}{q(x^0)}} \leq \delta^{\frac{n+nk}{p(x^0)}}
$$

Y al hacer $\delta \to 0$ obtenemos que

$$
\gamma + \frac{n(1+k)}{q(x^0)} \geq \frac{n+nk}{p(x^0)}.
$$

O, lo que es lo mismo

$$
\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1}{p(x^0)} - \frac{\gamma}{n(k+1)}.
$$

□

Además podemos obtener una versión del Lema de Oberlin (ver Teorema 1 en [32]) para exponentes variables.

Teorema 5.3.8. *Sea T_μ^γ el operador definido en 5.2 con la medida dada por 5.4 y sean $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2n})$ continuas en $x^0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Si T_μ^γ es acotado de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{2n})$ en $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^{2n})$ entonces*

i.
$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{2}{p(x^0)} - 1,$$

ii. Si además $p_+ < \infty$ y $q_+ < \infty$ con $p(x^0) > 1$,
$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1}{2p(x^0)}.$$

Demostración. Veamos (i). Dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\tilde{\delta} > 0$ tal que, si $|x - x^0| < \tilde{\delta}$ entonces
$$\left|p(x) - p(x^0)\right| < \varepsilon$$
$$\left|q(x) - q(x^0)\right| < \varepsilon$$

Denotemos por $x_1 = (x_1, ..., x_n)$ y $x_2 = (x_{n+1}, ..., x_{2n})$. Tomamos $0 < \delta << \tilde{\delta}$ y definimos
$$Q_\delta(x^0) = B_\delta(x_1^0) \times B_{c\delta}(x_2^0).$$

Sea $f = \chi_{Q_\delta(x^0)}$. Definimos el conjunto
$$A_\delta(x^0) = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n} : \left|x_1 - x_1^0\right| \sim \tilde{\delta},\ \left|x_2 - x_2^0 - \varphi\left(x_1 - x_1^0\right)\right| \sim \delta\right\}.$$

Definimos también, para $x \in A_\delta(x^0)$,
$$Y_x(x^0) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \left|y - x_1 - x_1^0\right| \sim \delta\right\}.$$

Luego si $x \in A_\delta(x^0)$ y $y \in Y_x(x^0)$ entonces $(x_1 - y, x_2 - \varphi(y)) \in Q_\delta(x^0)$. En efecto $|x_1 - y - x_1^0| < \delta$ puesto que $y \in Y_x(x^0)$.

Además

$$\begin{aligned}\left|x_2 - x_2^0 - \varphi(y)\right| &\leq \left|x^2 - x_0^2 - \varphi(x_1 - x_1^0)\right| + \left|\varphi(x_1 - x_1^0) - \varphi\left(y\right)\right| \\ &\leq c\delta + c_1 \sup\left|\nabla\varphi\left(\xi\right)\right|\left|x_1 - x_1^0 - y\right|.\end{aligned}$$

Como el gradiente de φ es homogéneo de grado $k-1$, entonces $|\nabla\varphi\,(\xi)| \leq M\,|\xi| \leq 2M$, donde $M = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|$, y ξ está en el segmento entre $x_1 - x_1^0$ y y, por lo tanto

$$\left|x_2 - x_2^0 - \varphi(y)\right| \leq (c + 2c_1 M)\,\delta.$$

Luego, como

$$T_\mu^\gamma f(x) \geq \int_{Y_x(x^0)} f(x^1 - y, x_2 - \varphi(y))\,|y|^{\gamma-n}\,dy,$$

entonces

$$\left|T_\mu^\gamma f(x)\right| \geq \left|Y_x(x^0)\right| = c\delta^n.$$

Como antes se puede ver que

$$\left|A_\delta(x^0)\right| = c\delta^n,$$

y luego tomando $\lambda = c\delta^{n+\frac{n}{q(x^0)-\varepsilon}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho_{q(\cdot)}\left(\frac{T_\mu^\gamma f}{\lambda}\right) &\geq \int_{A_\delta(x^0)} \left|\frac{T_\mu^\gamma f(x)}{\lambda}\right|^{q(x)} dx \\
&\geq \int_{A_\delta(x^0)} \left|\frac{c\delta^n}{c\delta^{n+\frac{n}{q(x^0)-\varepsilon}}}\right|^{q(x^0)-\varepsilon} dx \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Con lo que

$$\left\|T_\mu^\gamma f\right\|_{q(\cdot)} \geq c\delta^{n+\frac{n}{q(x^0)-\varepsilon}}.$$

Por otro lado, como T_μ^γ es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^{2n})$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\begin{aligned}
\left\|T_\mu^\gamma f\right\|_{q(\cdot)} &\leq c\,\|f\|_{p(\cdot)} \\
&\leq c\delta^{\frac{2n}{p(x^0)-\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Luego, haciendo $\varepsilon \to 0$, tenemos

$$c\delta^{n+\frac{n}{q(x^0)}} \leq c\delta^{\frac{2n}{p(x^0)}}$$

Y al hacer $\delta \to 0$ obtenemos que

$$n + \frac{n}{q(x^0)} \geq \frac{2n}{p(x^0)}$$

o equivalentemente
$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{2}{p(x^0)} - 1.$$

Ahora para ver (ii) observamos que el conjugado $(T_\mu^\gamma)^*$ tiene la misma forma que T_μ^γ. Pues $(T_\mu^\gamma)^* = T_{\mu^*}^\gamma = T_{-\mu}^\gamma$. Luego $(T_\mu^\gamma)^*$ es acotado desde el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)'$ en el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)'$. Como $p_+, q_+ < \infty$, por el Teorema 1.7.1, $\left(L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)' = L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ y $\left(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\right)' = L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, si $q(x^0) > 1$, podemos aplicar la parte (i) a los exponentes $q'(\cdot)$ y $p'(\cdot)$,

$$\frac{1}{p'(x^0)} \geq \frac{2}{q'(x^0)} - 1$$
$$1 - \frac{1}{p(x^0)} \geq 2\left(1 - \frac{1}{q'(x^0)}\right) - 1,$$

lo que es lo mismo que
$$\frac{1}{q(x^0)} \geq \frac{1}{2p(x^0)}.$$

Y si $q'(x^0) = 1$ la desigualdad vale trivialmente. $\square$

Bibliografía

[1] C.Capone, D.V.Cruz Uribe y A.Fiorenza, *The Fractional Maximal Operator and Fractional Integral on Variable L^p Spaces*, Revista Matemática Iberoamericana 23(3), 2007, 743-770.

[2] D.V.Cruz Uribe y A.Fiorenza,*Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis*, University of Maryland, Birkhauser.

[3] Cruz Uribe D., Fiorenza A., Neugebauer C. J., *The maximal function on variable L^p spaces.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 28(1), 223-238, 2003.

[4] C.Capone, D.Cruz Uribe, SFO y A.Fiorenza, *The Fractional Maximal Operator on Variable L^p Spaces*, Mathematics Subjets Classification. 42B25,42B35. 2004.

[5] Cruz Uribe D., Fiorenza A., Martell J. M., Perez C., The boundedness of classical operators on variable L^p spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 31(1):239-264, 2006.

[6] Christ M., Endpoint bounds for singular fractional integral operators. UCLA, Preprint, 1988.

[7] L.Diening,*Maximal function on generalized $L^{p(\cdot)}$ Spaces*, Math. Inequal. Appl., 7(2), 2004, 245-253.

[8] L.Diening, y M.Ruzicka $Calderon - Zygmund$ *operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics*, J. Reine Angew. Math. 563 (2003), 197-220.

[9] S.W. Drury and K. Guo *Convolution estimates related to surfaces of half the ambient dimension*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110 (1991), 151–159.

[10] H.Rafeiro y E.Rojas,*Espacios de Lebesgue con exponente variable. Un espacio de Banach de funciones medibles.*, XXVII Escuela venezolana de Matemáticas, Emalca-Venezuela 2014.

[11] J.García Cuerva y J.M.Martell *Two-weight norm inequalities for maximal operators and fractional integrals on non-homogeneous spaces.*

[12] T.Godoy y M.Urciuolo, *About the L^p boundedness of some integral operators*, Revista de la UMA 38, 1993.

[13] T.Godoy y M.Urciuolo, *About the L^p boundedness of integral operators with kernels of the form $k_1(x-y)k_2(x+y)$*, Math Scand. 78, 1996, 84-92.

[14] T.Godoy y M.Urciuolo, *On Certain integral operators of fractional type*, Acta Math. Hungar. 82 (1-2), 1999, 99-105.

[15] M. de Guzman *A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular integral operators*, Studia Math.34(1970), 299-317.

[16] Ferreyra E., Godoy T., Urciuolo M., Boundedness properties of some convolution operators with singular measures. *Math. Z.* 225:611-624, 1997.

[17] Ferreyra E., Godoy T., Urciuolo M., $L^p - L^q$ estimates for convolution operators with n-dimensional singular measures. *J.Fourier Anal. Appl.* 3(4):475-484, 1797.

[18] Ferreyra E., Godoy T., Urciuolo M.,The Type Set for some measures on $\mathbb{R}^{2n}$ with n-dimensional support. *Czechoslovak Mathematical Journal* 52 (127):575–583, 2002.

[19] Hasley T. C., Electrorheologicalfluids. *Science, New Series,* 258(5083):761-766, 1992.

[20] L.I.Hedberg,*On certain convolution inequalities*,Proc. American Mathematical Society, 1972, 505-510.

[21] O.Kovácik, y J.Rákosnik *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czech. Math. J., 41(**116**) (1991), 592-618.

[22] Kopaliani T., On the Muckenhaupt condition on variable Lebesgue spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 148:29-33, 2008.

[23] Lerner A. K., On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 362(8):4229-4242, 2010.

[24] Littman,W. *$L^p - L^q$ estimates for singular integral operators.* In Proc.Symp. Pure and Appl. Math. vol. 23, pp 479-481, Amer.Math. Soc., Providence,RI, 1973.

[25] B.Muckenhoupt y R.L.Wheeden *Wheighted norm inequalities for fractional integrals*, American Mathematical Society. Vol. 192, 1974.

[26] B.Muckenhoupt *.Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions* , Trans. Amer. Math. Soc.165(1972), 207-226. MR 45.

[27] H.Nakano,*Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*, Maruzen Co. Ltd., Tokio, 1950.

[28] Nakano H., Modulared Sequence Spaces. *Proc. Japan Acad.,* 27:508-512, 1951.

[29] Nakano H., *Topology and Linear Topological Spaces.* Maruzen Co. Ltd., Tokio, 1951.

[30] Nekvinda A., Maximal operators on variable Lebesgue spaces for almost monotone radial exponent. *J. Math. Anal. Appl.* , 337(2):1345-1365, 2008.

[31] W.Orlicz,*Über konjugierte exponentenfolgen*, Studia Math., 3, (1931), 200-212.

[32] Oberlin D., Convolution estimates for some measures on curves. *Proc. A. M. S.* 99:56-60, 1987.

[33] F. Ricci: Limitatezza Lp-Lq per operatori di convoluzione definiti da misure singolari in $\mathbb{R}^n$. Bollettino U.M.I. 7 11-A (1997), 237–252.

[34] F.Ricci y P.Sjögren,*Two parameter maximal functions in the Heissemberg group*, Math. Z., Vol. 199, 4, 1988.

[35] Ricci F., Stein E. M. *Harmonic Analysis on Nilpotent Groups and Singular integrals. III. Fractional Integration along Manifolds.* J. Funct. Anal., 86, 360-389 (1989).

[36] M.S.Riveros y M.Urciuolo, *Weighted inequalities for integral operators with some homogeneous kernels*, Czechoslovak Mathematical Journal, 55 (130) (2005), 423-432.

[37] M.S.Riveros y M.Urciuolo, *Weighted inequalities for fractional type operators with some homogeneous kernels*, Acta Mathematica Sinica 29, Nº 3, 2013, 449-460.

[38] M. S. Riveros, M. Urciuolo, *Weighted inequalities for some integral operators with Rough kernels,* Acta Mathematica Sinica 29, No 3, 449-460, 2013.

[39] P.Rocha y M.Urciuolo, *About integral operators of fractional type on variable L^p Spaces*, Georgian Math. J.20, 2013, 805-816.

[40] I.I.Sharapudinov,*The topology of the spaces* $\mathfrak{L}^{p(t)}([0,1])$, Math. Zametki, 26(4) (1979), 613-655.

[41] I.I.Sharapudinov, *Approximation of function in the metric space* $\mathfrak{L}^{p(\cdot)}([a,b])$ *and quadrature formulas*, En: Çonstructive function theory '81 (Varma 1981)", Publ. House Bulgar. Acad. Sci. Sofia, (1983), 189-193.

[42] I.I.Sharapudinov, *The basic property of the Haar system in the space* $\mathfrak{L}^{p(t)}([0,1])$ *and the principle of localization in the mean*, Math. Sb., (N.S.), 130 (**172**)(**2**) (1986), 275-283.

[43] I.I.Sharapudinov, *On the uniform boundedness in* $L^p(p = p(x))$ *of some families of convolution operators*, Math. Zametki 59(**2**)(**302**) (1996), 291-302.

[44] Stein E. M., Weiss G.*Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press , 1975.

[45] E.M.Stein,*Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press.

[46] I.V.Tsenov, *Generalization of the problem of best approximation of a function in the spaces* L^s, Uch. Zap. Dagestan. Gos. Unive., 7, (1961), 25-37.

[47] M. Urciuolo, L. A. Vallejos, $L^{p(\cdot)} - L^{q(\cdot)}$ *boundedness of some integral operators obtained by extrapolation techniques,* Georgian Math. J.(De Gruyter), (https://doi.org/10.1515/gmj-2018-0066) 2018.

[48] M. Urciuolo, L. A. Vallejos, *A generalization of the boundedness of certain integral operators in variable Lebesgue spaces* Journal of Math. Inequalities, Volume 14, Number 2. 2020, 547–557.

[49] M. Urciuolo, L. A. Vallejos, *Integral operators with rough kernels in variable Lebesgue spaces*, Acta Math. Hungar. (https://doi.org/10.1007/s10474-020-01045-2) 2020.

[50] G.V.Welland *Wheighted norm inequalities for fractional integrals*, Proc. American Mathematical Society. 51 (1), 1975, 143-148.

[51] V.V.Zhicov, *On some variational problems*, Russian J. Math. Phys. 5(**1**) (1997), 105-116.

[52] Zhikov V. V., Problems of convergence, duality and averaging for a class of functionals of the calculus of variations. *Dokl.Akad.Nauk. SSSR,* 267(3):524-528, 1882.

[53] Zhikov V. V., averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Izy. Acad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* 50(4):675-710, 887, 1986.